平 成 29 年 度

大 学 院 入 学 試 験 問 題

数　　　学

試験時間　　10:00～12:30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
3. 本冊子には第 1 問から第 3 問まである．全問を日本語ないし英語で解答すること．
4. 解答用紙 3 枚が渡される．1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

(草稿用紙)

第１問

３次元ベクトル $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ は式

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

を満たすものとする．ただし，x_0, y_0, z_0, α は実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}, \qquad 0 < \alpha < \frac{1}{3}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $x_n + y_n + z_n$ を x_0, y_0, z_0 を用いて表せ．

(2) 行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ を求めよ．

(3) 行列 A を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ を用いて表せ．

(4) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ を x_0, y_0, z_0, α を用いて表せ．

(5) $\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ を求めよ．

(6) 以下の式

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{(x_n, y_n, z_n) \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}}{(x_n, y_n, z_n) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}}$$

を x_0, y_0, z_0 の関数とみなして，$f(x_0, y_0, z_0)$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 0$ とする．

第2問

実数値関数 $u(x,t)$ が $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ で定義されている．ここで，x と t は互いに独立である．偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (*)$$

の解を次の条件

$$\text{境界条件：} \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$$
$$\text{初期条件：} \quad u(x,0) = x - x^2$$

のもとで求める．ただし，定数関数 $u(x,t) = 0$ は明らかに解であるから，それ以外の解を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式を計算せよ．ここで，n, m はともに正の整数とする．

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\ \sin(m\pi x)\ \mathrm{d}x$$

(2) x のみの関数 $\xi(x)$ および t のみの関数 $\tau(t)$ を用いて，$u(x,t) = \xi(x)\tau(t)$ とおけるとする．任意の定数 C を用いて，ξ および τ が満たす常微分方程式をそれぞれ表せ．関数 $f(x)$ と関数 $g(t)$ が任意の x と t について $f(x) = g(t)$ を満たす場合は，$f(x)$ と $g(t)$ が定数関数となることを用いてもよい．

(3) 設問 (2) の常微分方程式を解け．次に，境界条件を満たす偏微分方程式 $(*)$ の解の一つが次の式で表される $u_n(x,t)$ で与えられることを示し，α, β を正の整数 n を用いて表せ．

$$u_n(x,t) = e^{\alpha t} \sin(\beta x)$$

(4) 境界条件と初期条件を満たす偏微分方程式 $(*)$ の解は $u_n(x,t)$ の線形結合として次の式で表される．c_n を求めよ．設問 (1) の結果を用いてもよい．

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$

第3問

(1) 連続確率変数 T の確率密度関数 $f(t)$ が λ を正の定数として

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で表されるとき，T はパラメータ λ の指数分布に従うという．この確率変数の平均値を求めよ．またこの指数分布の確率分布関数 $F(t) = P(T \leq t)$ を求めよ．なお，$P(X)$ は事象 X が起こる確率である．

(2) 設問 (1) の分布が無記憶であること，即ち任意の $s > 0, t > 0$ に対して

$$P(T > s + t \mid T > s) = P(T > t)$$

が成立することを示せ．なお，$P(X|Y)$ は事象 Y が起こった条件のもとで事象 X が起こる確率である．

(3) 問題の解答を始めてから解答を終えるまでの時間を解答所要時間と呼ぶことにする．ある問題に対して n 人の学生の解答所要時間が全て同じパラメータ λ_0 の指数分布に従うものとする．n 人が同時に解答を始めたとき，最も早く解答を終える学生の解答所要時間の確率分布関数と平均値を示せ．ただし，各学生の解答所要時間はそれぞれ独立であるとする．

(4) 学生 A, B の解答所要時間がパラメータ λ_A, λ_B の指数分布にそれぞれ従うものとする．この二人が同時に解答を開始したときに，学生 A の方が学生 B より先に解答を終える確率を求めよ．

(5) 優秀な学生である秀夫君と，他 10 名の学生に問題を同時に解かせる．各学生の解答所要時間は指数分布に従うものとし，また秀夫君以外の各学生の平均解答所要時間は，すべて秀夫君の平均解答所要時間の 10 倍であるとする．秀夫君が 1 番目に解答を終える確率，および 4 番目に解答を終える確率をそれぞれ求めよ．

(草稿用紙)

(草稿用紙)

平成30年度

大学院入学試験問題

数　学

試験時間　　10:00〜12:30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
3. 本冊子には第1問から第3問まである．全問を日本語ないし英語で解答すること．
4. 解答用紙3枚が渡される．1問ごとに必ず1枚の解答用紙を使用すること．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

(草稿用紙)

第1問

次の連立一次方程式を解く問題を考える.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ここで, $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{R}^{m}$ は与えられた定数の行列とベクトルであり, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^{n}$ は未知ベクトルである. 以下の問いに答えよ.

(1) $\overline{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ のように, 行列 $\boldsymbol{A}$ の最後の列の後ろに1列追加した $m \times (n+1)$ 行列を作る. 例えば, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ の場合には, $\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる. この例の $\overline{\boldsymbol{A}}$ の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とする.

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ のうち線形独立なベクトルの最大個数を求めよ.

(ii) $\boldsymbol{a}_4$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線形和で表されることを, $\boldsymbol{a}_4 = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ となるスカラー x_1, x_2 を求めることで示せ.

(iii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ のうち線形独立なベクトルの最大個数を求めよ.

(2) 任意の $m, n, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ に対して, $\operatorname{rank} \overline{\boldsymbol{A}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ のとき連立一次方程式の解が存在することを示せ.

(3) $\operatorname{rank} \overline{\boldsymbol{A}} > \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ ならば解は存在しない. $m > n$, $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ で, $\operatorname{rank} \overline{\boldsymbol{A}} > \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ のとき, 連立一次方程式の右辺と左辺の差のノルムの2乗 $\| \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \|^2$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(4) $m < n$, $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = m$ のとき, どのような $\boldsymbol{b}$ に対しても連立一次方程式を満たす解が複数存在する. 解のうちで $\| \boldsymbol{x} \|^2$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を, 連立一次方程式を制約条件として, ラグランジュ乗数法を用いて求めよ.

(5) 任意の $m, n, \boldsymbol{A}$ に対して, 以下の4つの式を満たす $\boldsymbol{P} \in \mathcal{R}^{n\times m}$ が唯一に決まることを示せ.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{P} \\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^T &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \\ (\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^T &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} \end{aligned}$$

(6) (3) で求めた $\boldsymbol{x}$ と (4) で求めた $\boldsymbol{x}$ が, いずれも $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{b}$ の形で表せることを示せ.

第2問

関数 f_1 を $[0,1]$ 上で定義される正値の定数関数とし，$f_1(x)=c$ とおく．また，正の実数 p,q を $1/p+1/q=1$ を満たすものとする．これらに対し，$[0,1]$ 上で定義される関数の列 $\{f_n\}$ を

$$f_{n+1}(x)=p\int_0^x (f_n(t))^{1/q}\,\mathrm{d}t \qquad (n=1,2,\ldots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $a_1=0,\ c_1=c$ かつ

$$a_{n+1}=q^{-1}a_n+1 \qquad (n=1,2,\ldots),$$
$$c_{n+1}=\frac{p\,(c_n)^{1/q}}{a_{n+1}} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

で定まる実数列 $\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ を用いて $f_n(x)=c_n x^{a_n}$ と表されることを示せ．

(2) $n\geq 2$ に対し $[0,1]$ 上で定義される関数 g_n を $g_n(x)=x^{a_n}-x^p$ とおく．$n\geq 2$ に対し $a_n\geq 1$ となることに注意して，g_n がある点 $x=x_n$ で最大値をとることを示し，この x_n を求めよ．

(3) 任意の $x\in[0,1]$ に対して $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$ となることを示せ．

(4) $d_n=(c_n)^{q^n}$ とおく．d_{n+1}/d_n が $n\to\infty$ のとき有限な正の値に収束することを示せ．なお，$\lim_{t\to\infty}(1-1/t)^t=1/\mathrm{e}$ となることは用いて良い．

(5) $\lim_{n\to\infty} c_n$ の値を求めよ．

(6) 任意の $x\in[0,1]$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=x^p$ となることを示せ．

第３問

赤いカードが２枚と白いカードが１枚入った袋および複素数 z_n, w_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ について考える．まず，袋から１枚のカードを取り出し袋に戻す．このとき取り出されたカードの色に応じて z_{k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を以下のルールで生成する．

$$z_{k+1} = \begin{cases} iz_k & \text{赤いカードが取り出された場合} \\ -iz_k & \text{白いカードが取り出された場合} \end{cases}$$

次に，袋からもう一度１枚のカードを取り出し袋に戻す．このとき取り出したカードの色に応じて w_{k+1} を以下のルールで生成する．

$$w_{k+1} = \begin{cases} -iw_k & \text{赤いカードが取り出された場合} \\ iw_k & \text{白いカードが取り出された場合} \end{cases}$$

ここで，各カードは独立に等確率で取り出されるものとする．また初期状態を $z_0 = 1, w_0 = 1$ とする．すなわち，z_n, w_n は，$z_0 = 1, w_0 = 1$ の状態から始め，上記の一連の二つの操作を n 回繰り返した後の値である．なお，ここで i は虚数単位とする．

以下の問いに答えよ．

(1) n が奇数のとき $\mathrm{Re}(z_n) = 0$，偶数のとき $\mathrm{Im}(z_n) = 0$ であることを示せ．ただし，$\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$ はそれぞれ z の実部，虚部を表すものとする．

(2) $z_n = 1$ である確率を P_n，$z_n = i$ である確率を Q_n とする．P_n，Q_n についての漸化式を立てよ．

(3) $z_n = 1$，$z_n = i$，$z_n = -1$，$z_n = -i$ である確率をそれぞれ求めよ．

(4) z_n の期待値が $(i/3)^n$ であることを示せ．

(5) $z_n = w_n$ である確率を求めよ．

(6) $z_n + w_n$ の期待値を求めよ．

(7) $z_n w_n$ の期待値を求めよ．

(草稿用紙)

(草稿用紙)

（試験時に一部訂正がありました）

平成 31 年度

大学院入学試験問題

数　学

試験時間　10:00〜12:30

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと．
2. 本冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること．
3. 本冊子には第 1 問から第 3 問まである．全問を日本語ないし英語で解答すること．
4. 解答用紙 3 枚が渡される．1 問ごとに必ず 1 枚の解答用紙を使用すること．必要なときは解答用紙の裏面を使用してもよい．
5. 解答用紙上方の指定された箇所に，受験番号およびその用紙で解答する問題番号を忘れずに記入すること．
6. 草稿用紙は本冊子から切り離さないこと．
7. 解答に関係ない記号，符号，文言などを記入した答案は無効とする．
8. 解答用紙および問題冊子は持ち帰らないこと．

受験番号	No.

上欄に受験番号を記入すること．

(草稿用紙)

第1問

複素正方行列 X は，$XX^* = I$ を満たすとき，ユニタリ行列であるという．ただし，X^* は行列 X の共役転置行列（もしくは，随伴行列とも呼ばれる）を表し，I は単位行列とする．i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) n を正の整数とし，A, B を n 次ユニタリ行列とする．行列 AB もユニタリ行列であることを示せ．

(2) n を正の整数とし，C, D を n 次実正方行列とする．行列 F を $F = C + \mathrm{i}D$ と定義し，行列 G を

$$G = \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$$

と定義する．行列 F がユニタリ行列であることと行列 G が直交行列であることは同値であることを示せ．

(3) 次の行列の固有値を求めよ．

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

(4) n を正の整数とし，n 次正方行列 Q の (j, k) 成分 q_{jk} を

$$q_{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}(j-1)(k-1)}{n}\right)$$

とする．行列 Q はユニタリ行列であることを示せ．

(5) 行列式が 1 である 2 次のユニタリ行列は次の一形式を持つことを示せ．

$$H = \begin{pmatrix} \exp(\mathrm{i}\psi)\cos\theta & \exp(\mathrm{i}\psi)\sin\theta \\ -\exp(-\mathrm{i}\psi)\sin\theta & \exp(-\mathrm{i}\psi)\cos\theta \end{pmatrix}$$

ただし，θ と ψ は実数であるとする．

(6) 2 次のユニタリ行列の一般形を求めよ．

第2問

実数値関数 $u(x,t)$ が $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ で定義されている．ここで，x と t は独立である．偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

の解を初期条件

$$u(x,0) = \exp(-ax^2) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{2.3}$$

の下で求める．ただし，a, c は正の実数とする．また，i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式を複素積分を用いて計算せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a(x+\mathrm{i}d)^2\right) \mathrm{d}x$$

ただし，d は実数である．また，以下の式を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

(2) $u(x,t)$ の x に関するフーリエ変換 $U(k,t)$ を

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) \exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}x$$

と定義する．ここで，x に関する積分と t に関する微分の順序の交換が可能であると仮定してよい．さらに，$u(x,t)$ と $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ は任意の t に対して $x \to \pm\infty$ のとき 0 に収束するものとする．

(i) $u(x,t)$ が式 (2.1) を満たすとき，$U(k,t)$ が従う偏微分方程式を求めよ．

(ii) (i) の解は式 (2.3) の初期条件のもとで，k を変数とする関数 $F(k)$ を用いて以下のように表せることを示せ．

$$U(k,t) = F(k)\cos(kct)$$

(iii) さらに，式 (2.2)の初期条件のもとで $F(k)$ を求め，$U(k,t)$ を与えよ．設問 (1) の結果を用いてもよい．

(3) 設問 (2) で得られた $U(k,t)$ のフーリエ逆変換を計算することにより，$u(x,t)$ を求めよ．ただし，フーリエ逆変換は次式で定義される．

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(k,t) \exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k$$

第3問

下図のように，平面上に三角形 ABC が与えられており，各頂点の座標は A $(1,0)$, B $(0,1)$, C $(-1,-1)$ とする．原点 $(0,0)$ を端点とする半直線 ℓ をランダムに選ぶ．すなわち，Θ を区間 $[0,2\pi)$ 上の一様分布に従う確率変数として

$$\ell = \{(r\cos\Theta, r\sin\Theta) \mid r \geq 0\}$$

とおく．この半直線 ℓ と三角形 ABC の周との交点を Q とおく．また，Q の座標を (X,Y) とおく．ただし，X,Y は確率変数である．以下の問いに答えよ．

(1) 点 Q が辺 AB 上にある確率を求めよ．

(2) 点 Q が辺 AB 上にあるという条件のもとでの X の期待値は $1/2$ であることを示せ．ただし，三角形 ABC が直線 $y=x$ に関して対称であることを利用してよい．

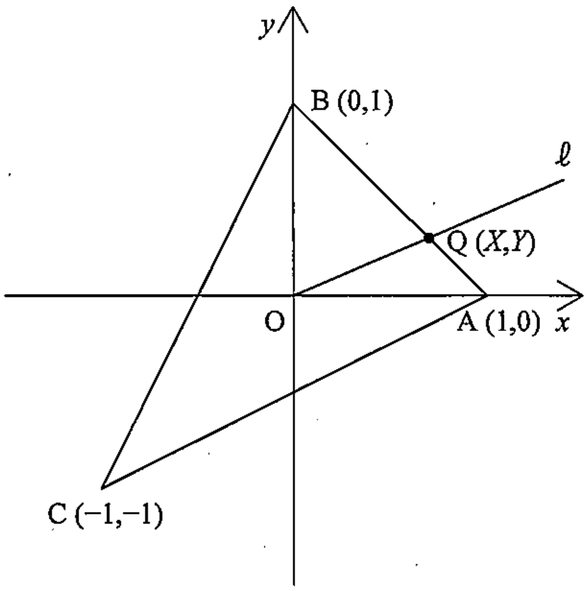
(3) 点 Q が辺 BC 上にあるという条件のもとでの X の確率密度関数を，変数変換の公式

$$f(x) = g\left(h(x)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x)\right|$$

を使って求めよ．ただし，x は任意の実数とし，f と g はそれぞれ X と Θ の確率密度関数を表し，h は $\Theta = h(X)$ を満たす関数とする．

(4) 点 Q が辺 BC 上にあるという条件のもとでの X の期待値を α とおく．設問 (3) の結果を使って α を求めよ．

(5) X の期待値 μ を求めよ．



(草稿用紙)

(草稿用紙)