

AALBORG UNIVERSITET

P3: STUDENTERRAPPORT

Optimering af Funktioner af Flere Reelle Variable

Forfattere:

Andreas Valentin Pedersen

Birgitte Madsen

Vejleder:

Esben Skovsen

Forår 2014



AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

Teknisk-Naturvidenskabelige Fakultet
Institut for Matematiske Fag

Fredrik Bajers Vej 7G

Tlf. 99409940

<http://www.math.aau.dk/>

Emne:

Ekstrema: Teori og Praksis

Titel:

Optimering af Funktioner af Flere Reelle
Variable

Projektperiode:

P3, Efterårssemester 2013

Projektgruppe:

G3-112A

Medlemmer:

Andreas Valentin Pedersen
Betina Lundgaard Christensen
Birgitte Madsen
Kristian Lundgaard Kjøller

Vejleder:

Horia Cornean

Oplag: 7

Sideantal: 1

Bilag: 0

Afsluttet: 20. december, 2013

Synopsis:

Denne rapport undersøger ekstrema for kontinuerte funktioner af flere reelle variable på kompakte mængder, hvilke jf. ekstremalværdisætningen antager minimum og maksimum indenfor den kompakte mængde.

Der skelnes mellem lineær programmering, hvor simplexmetoden introduceres som en metode til optimering af lineære programmeringsproblemer, og ikke-lineær optimering, hvor nogle tilstrækkelige og nødvendige betingelser for eksistens af ekstrema bruges til optimering af en ikke-lineær funktion af reelle variable.

Den bagvedliggende teori til lineær programmering og ikke-lineær optimering præsenteres, og de centrale sætninger bevises, deriblandt ekstremalværdisætningen og dualitetssætningen.

Som et eksempel på lineær programmering inddrages transportproblemet, og metoden til løsningen af et ikke-lineært optimeringsproblem eksemplificeres.



Forord

Dette projekt er skrevet af gruppe G3-112A bestående af 3. semesters matematikbachelorstuderende og 5. semesters fysikbachelorstuderende med matematik som tilvalgsfag ved Aalborg Universitets Institut for Matematiske Fag i efteråret 2013. Projektet er en forlængelse af 3. semesters matematikkurserne *Analyse 1* og *Linearitet og Differentiabilitet* samt fri studieaktivitet udbudt af Aalborg Universitet i efterårssemestret 2013.

Læsevejledning

Det anbefales, at projektet læses i kronologisk rækkefølge, da grundlæggende definitioner, begreber og sætninger, der er nødvendige for senere sætningers bevisførelse, introduceres tidligere i rapporten.

Projektet er afgrænset, så ikke alle sætninger i projektet bevises. De sætninger, der introduceres uden bevis, introduceres sådan, da forståelsen af beviset indgår som en del af kurset *Analyse 1* eller anvender andet teori projektet afgrænses fra, og derfor ikke indgår i projektets omfang. Når en sætning introduceres uden bevis vil der i stedet refereres til den eksterne kilde, hvori beviset for den pågældende sætning kan findes, med sidetal.

Ligninger, figurer, kapitler, sætninger, definitioner mm. er nummereret i rækkefølge, og specielt er sætninger nummereret efter det tilhørende kapitel, mens definitioner nummereres uafhængigt af, hvilket kapitel, de står i. Dvs. den første sætning i andet kapitel nummereres 2.1, mens rapportens første definition nummereres 1.

Eksterne referencer introduceres i teksten i firkantede parenteser og er listet i litteraturlisten i optrædende rækkefølge, og kapitlers hovedreferencer, der benyttes i flere af kapitlets afsnit, bliver nævnt i introduktionen til kapitlet.

Underskrifter

Gruppemedlemmernes underskrifter herunder udtrykker, at hele gruppen er ansvarlige for alle aspekter af projektet samt samtlige af rapportens kapitler og afsnit.

Andreas V. Pedersen

Betina Lundgaard Christensen

Birgitte Madsen

Kristian Lundgaard Kjøller



Indholdsfortegnelse

Kapitel 1	Indledning
-----------	------------

1

Indledning

Lineær programmering (LP) og ikke-lineær optimering har mange anvendelser. Når en virksomhed vil optimere produktionen under hensyn til den givne mængde arbejdskraft, giver det anledning til et LP-problem med en lineær objektfunktion, der ønskes maksimeret under en række lineære begrænsninger.

Et andet eksempel på et optimeringsproblem er en kasseproducerende virksomhed, der vil bestemme længde, bredde og højde på deres kasser, således, at rumfanget bliver størst under en række begrænsninger. Dette giver en ikke-lineær funktion, der skal optimeres.

En vilkårlig funktion defineret på et vilkårligt domæne antager ikke nødvendigvis ekstreme værdier. Derfor viser denne rapport, hvilke tilstrækkelige betingelser, funktionen og definitionsdomænet skal opfylde, for at garantere eksistensen af et globalt maksimum og minimum for funktionen på domænet.

Med udgangspunkt i kontinuerte funktioner af flere reelle variable defineret på en kompakt mængde, undersøger rapporten metoder til at finde ekstrema for både LP og ikke-lineære funktioner. For LP-problemer, der omhandler maksimering eller minimering af en lineær funktion, undersøges det, hvordan eksistensen af en løsning til det duale problem garanteres, når det primale problem er løseligt, samt hvad den optimale værdi for det primale og duale problem er. Desuden undersøges, hvordan en ikke-lineær funktions kritiske punkter klassificeres som minima, maksima eller saddelpunkter ved at betragte betydningen af en ikke-lineær funktions gradientvektor og Hessematrix. Teorien bag ikke-lineær optimering eksemplificeres på en kontinuert funktion af tre reelle variable defineret på en kompakt mængde, og globalt maksimum og minimum for denne funktion findes.