

# *Elementos de Teoria do Potencial*

*Disciplina Métodos Potenciais*

Vanderlei C. Oliveira Jr. Observatório Nacional - MCTI Rio de Janeiro - 2015
--

# Conteúdo

<b>I</b>	<b>Funções harmônicas</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Função potencial magnético escalar</b>	<b>4</b>
1.0.1	Exercício . . . . .	4
<b>II</b>	<b>Harmônicos esféricos</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Equações diferenciais auxiliares</b>	<b>6</b>
2.1	Equações de $r$ . . . . .	6
2.1.1	Exercício . . . . .	6
2.2	Equações de $\lambda$ . . . . .	6
2.2.1	Exercício . . . . .	7
2.3	Polinômios de Legendre . . . . .	7
2.3.1	Exercício . . . . .	9
2.3.2	Exercício . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Equação de Laplace em coordenadas esféricas</b>	<b>10</b>
3.1	Solução da Equação de Laplace em coordenadas esféricas . . . .	10
3.2	Relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ e $S_{nm}(\theta, \lambda)$	12
3.3	Determinação das expressões analíticas que descrevem as constantes $A_{nm}$ e $B_{nm}$ . . . . .	13
3.4	Normalização das funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ . . . . .	15
3.4.1	Exercício . . . . .	17
3.5	Descrição do campo de gravidade em harmônicos esféricos . . . .	17
3.6	Descrição do campo geomagnético em harmônicos esféricos . . . .	19
3.7	Algoritmos para o cálculo dos polinômios associados de Legendre normalizados . . . . .	22
3.7.1	Algoritmo para o calcular os polinômios associados de Legendre plenamente normalizados . . . . .	24

3.7.2	Algoritmo para o calcular os polinômios associados de Legendre com a seminormalização de Schmidt . . . . .	25
3.8	Expansão da função inverso da distância e fórmula da decomposição	25

## Parte I

# Funções harmônicas

## 1 Função potencial magnético escalar

Seja  $f(x, y, z)$  dada por

$$f(x, y, z) = - \iiint_v \mathbf{m}(x', y', z')^\top \left( \nabla \frac{1}{r} \right) dv \quad (1)$$

em que  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$  é a distância entre o ponto  $(x, y, z)$  e o ponto  $(x', y', z')$  dentro do volume de integração  $v$  (Figura 1). Os vetores  $\mathbf{m}(x', y', z')$  e  $\nabla \frac{1}{r}$  são dados por

$$\mathbf{m}(x', y', z') = \begin{bmatrix} m_x(x', y', z') \\ m_y(x', y', z') \\ m_z(x', y', z') \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (2)$$

e

$$\nabla \frac{1}{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \end{bmatrix}_{3 \times 1} . \quad (3)$$

.....

### 1.0.1 Exercício

Mostre que a função  $f(x, y, z)$  (Eq. 1) é harmônica e, portanto, satisfaz a equação de Laplace em coordenadas Cartesianas

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad (4)$$

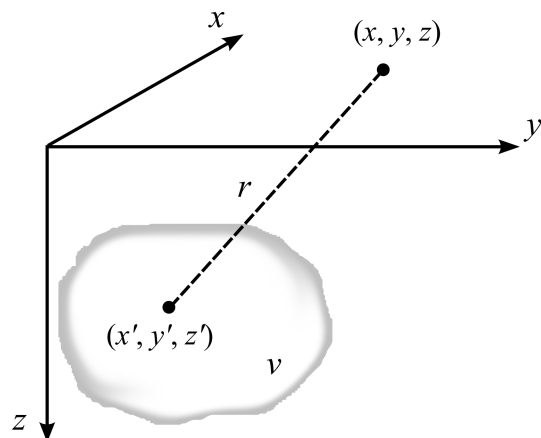


Figura 1: Distância  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$  entre um ponto  $(x, y, z)$  e outro ponto  $(x', y', z')$  de um sistema de coordenadas Cartesianas. O ponto  $(x', y', z')$  está dentro do volume de integração  $v$ .

## Parte II

# Harmônicos esféricos

## 2 Equações diferenciais auxiliares

### 2.1 Equações de $r$

Sejam  $f_1(r)$  e  $f_2(r)$  duas funções dadas por

$$f_1(r) = r^n \tag{5}$$

e

$$f_2(r) = r^{-(n+1)} \quad , \tag{6}$$

em que  $n \geq 0$  é um número inteiro e  $r > 0$  é um número real.

.....

#### 2.1.1 Exercício

Mostre que  $f_1(r)$  (Eq. 5) e  $f_2(r)$  (Eq. 6) são soluções da equação diferencial

$$r^2 \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2r \frac{df(r)}{dr} - n(n+1)f(r) = 0 \quad . \tag{7}$$

.....

### 2.2 Equações de $\lambda$

Sejam  $h_1(\lambda)$  e  $h_2(\lambda)$  duas funções dadas por

$$h_1(\lambda) = \cos(m\lambda) \tag{8}$$

e

$$h_2(\lambda) = \text{sen}(m\lambda) \quad , \quad (9)$$

em que  $m \geq 0$  é um número inteiro e  $\lambda$  é um número real.

.....

### 2.2.1 Exercício

Mostre que  $h_1(\lambda)$  (Eq. 8) e  $h_2(\lambda)$  (Eq. 9) são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2 h(\lambda)}{d\lambda^2} + m^2 h(\lambda) = 0 \quad . \quad (10)$$

.....

## 2.3 Polinômios de Legendre

A equação diferencial

$$\text{sen}\theta \, g''(\theta) + \cos\theta \, g'(\theta) + \left[ n(n+1) \text{sen}\theta - \frac{m^2}{\text{sen}\theta} \right] = 0 \quad (11)$$

tem como solução os *Polinômios associados de Legendre*

$$g(\theta) = P_{nm}(\cos\theta) \quad . \quad (12)$$

Nestas Equações,  $n$  e  $m$  são inteiros maiores ou iguais a zero (sendo  $m$  menor ou igual a  $n$ ),  $g'(\theta)$  é a primeira derivada e  $g''(\theta)$  é a segunda derivada de  $g(\theta)$ . Os inteiros  $n$  e  $m$  são, respectivamente, o grau e a ordem do polinômio  $P_{nm}(\cos\theta)$ . Por conveniência, estas Equações são comumente transformadas por mudança

de variáveis utilizando a relação  $t = \cos(\theta)$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \bar{g}(t) \\ g'(\theta) &= -\bar{g}'(t) \sin\theta \\ g''(\theta) &= \bar{g}''(t) \sin^2\theta - \bar{g}'(t) \cos\theta \quad . \end{aligned} \tag{13}$$

em que  $\bar{g}(t) = P_{nm}(t)$ , com primeira e segunda derivadas  $\bar{g}'(t)$  e  $\bar{g}''(t)$ , respectivamente. Substituindo as Equações 13 na equação diferencial 11, dividindo o resultado por  $\sin\theta$  e utilizando a relação  $\sin^2\theta = 1 - t^2$  temos que

$$(1 - t^2) \bar{g}''(t) - 2t \bar{g}'(t) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right] = 0 \quad . \tag{14}$$

A função  $\bar{g}(t) = P_{nm}(t)$  (polinômio associado de Legendre escrito em função da variável  $t$ ) que satisfaz a Equação 14 pode ser dada por

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2 - 1)^n \quad . \tag{15}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= \frac{(1 - t^2)^{1/2}}{2} \frac{d^2}{dt^2} (t^2 - 1) \\ &= \sqrt{1 - t^2} \\ &= \sin\theta \quad , \end{aligned} \tag{16}$$

ou

$$\begin{aligned} P_{21}(t) &= \frac{(1 - t^2)^{1/2}}{2^2 2!} \frac{d^3}{dt^3} (t^2 - 1)^2 \\ &= \frac{\sqrt{1 - t^2}}{8} (16t + 8t) \\ &= 3t \sqrt{1 - t^2} \\ &= 3 \sin\theta \cos\theta \quad . \end{aligned} \tag{17}$$

No caso particular em que  $m = 0$ , não há raízes  $\sqrt{1 - t^2}$ ,  $P_{nm}(t)$  é representado simplesmente por  $P_n(t)$  e é denominado *Polinômio de Legendre*. A partir da



Equação 15, os polinômios de Legendre podem ser escritos como

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad . \quad (18)$$

Alternativamente, os polinômios de Legendre (18) a partir do grau  $n = 2$  podem ser obtidos pela fórmula recursiva

$$P_n(t) = -\frac{n-1}{n} P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n} t P_{n-1}(t) \quad , \quad (19)$$

em que  $P_2(t)$  é obtido utilizando  $P_0(t)$  e  $P_1(t)$ ,  $P_3(t)$  é obtido utilizando  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$ , etc.

.....

### 2.3.1 Exercício

Determine:

- (i) os polinômios associados de Legendre de grau  $n = 0$  e ordem  $m = 0$  até grau  $n = 3$  e ordem  $m = 3$  utilizando a Equação 15.
- (ii) os polinômios de Legendre de grau  $n = 0$  até  $n = 5$  utilizando a Equação 18.
- (iii) os polinômios de Legendre de grau  $n = 2$  até  $n = 5$  utilizando a fórmula recursiva representada pela Equação 19.

### 2.3.2 Exercício

Faça um gráfico dos polinômios de Legendre  $P_n(t)$  de grau  $n = 0$  até  $n = 5$  para  $t$  no intervalo  $[-1, 1]$ .

.....

### 3 Equação de Laplace em coordenadas esféricas

Seja  $V(r, \theta, \lambda)$  uma função harmônica que depende das coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  e  $\lambda$  (Fig. 2). Esta função satisfaz a equação de Laplace em coordenadas esféricas, que pode ser escrita como

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad . \quad (20)$$

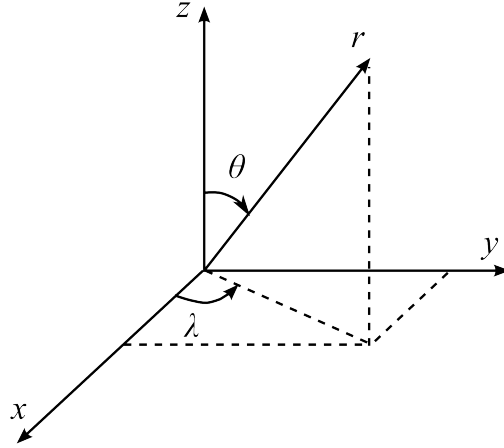


Figura 2: Sistema de coordenadas Cartesianas  $(x, y, z)$  e esféricas  $(r, \theta, \lambda)$ .

#### 3.1 Solução da Equação de Laplace em coordenadas esféricas

A equação de Laplace 20 pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Este método consiste em supor que a função  $V(r, \theta, \lambda)$  pode ser reescrita como o produto entre três funções independentes:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r) g(\theta) h(\lambda) \quad . \quad (21)$$

O próximo passo consiste em determinar as funções  $f(r)$ ,  $g(\theta)$  e  $h(\lambda)$ . Para tanto, basta substituir a função  $V(r, \theta, \lambda)$  dada pela Equação 21 na equação de Laplace 20. Esta substituição nos leva a conclusão de que a função  $f(r)$  (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 7. Tal como visto anteriormente, as funções  $f_1(r)$  (Eq. 5) e  $f_2(r)$  (Eq. 6) são soluções desta equação. Neste caso, mostra-se que a função  $V(r, \theta, \lambda)$  pode ser escrita como:

$$V(r, \theta, \lambda) = r^n g(\theta) h(\lambda) \quad , \quad (22)$$

ou

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{r^{(n+1)}} g(\theta) h(\lambda) \quad . \quad (23)$$

De forma análoga, mostra-se que a função  $h(\lambda)$  (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 10, que possui as soluções  $h_1(\lambda)$  (Eq. 8) e  $h_2(\lambda)$  (Eq. 9), e que a função  $g(\theta)$  (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 11, cuja solução é dada pelos polinômios associados de Legendre  $P_{nm}(\cos\theta)$  (Eq. 12). Os polinômios associados de Legendre  $P_{nm}(\cos\theta)$  podem ser obtidos pela Equação 15, em que  $t = \cos\theta$ . Por fim, é possível mostrar que a função  $V(r, \theta, \lambda)$  pode ser escrita de duas formas:

$$V_e(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \lambda) \quad , \quad (24)$$

ou

$$V_i(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} Y_n(\theta, \lambda) \quad , \quad (25)$$

em que

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad , \quad (26)$$

sendo  $A_{nm}$  e  $B_{nm}$  constantes e as funções  $R_{nm}(\theta, \lambda)$  e  $S_{nm}(\theta, \lambda)$  dadas por

$$R_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\lambda) \quad (27)$$

e

$$S_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \sin(m\lambda) \quad . \quad (28)$$

As funções  $V_e(r, \theta, \lambda)$  (Eq. 24) e  $V_i(r, \theta, \lambda)$  (Eq. 25) são denominadas *harmônicos esféricos sólidos*. Já as funções  $Y_n(\theta, \lambda)$  (Eq. 26) são denominadas *harmônicos (esféricos) de superfície*.

### 3.2 Relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ e $S_{nm}(\theta, \lambda)$

As expressões analíticas que descrevem as constantes  $A_{nm}$  e  $B_{nm}$  (Eq. 26) podem ser determinadas por meio das relações de ortogonalidade entre as funções  $R_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 27) e  $S_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 28). Para tanto, vamos considerar  $r = 1$  nas equações 24 e 25. Dessa maneira, estas equações são iguais a uma função  $f(\theta, \lambda)$  que pode ser escrita em função dos harmônicos de superfície (Eq. 26) da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad . \end{aligned} \quad (29)$$

De acordo com as relações de ortogonalidade entre as funções  $R_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 27) e  $S_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 28),

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad (30)$$

e

$$\iint_{\sigma} S_{nm}(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad (31)$$

para o caso em que  $nm \neq op$ . Já a integral

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad (32)$$

é sempre zero, independente dos valores de  $o$  e  $p$ . Nestas Equações,  $\iint_{\sigma} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi}$  e  $d\sigma = \sin\theta d\theta d\lambda$ . Por outro lado, estas integrais são diferentes de zero quando  $nm = op$ . Neste caso,

$$\iint_{\sigma} R_{n0}^2(\theta, \lambda) d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \quad (33)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\sigma} R_{nm}^2(\theta, \lambda) d\sigma \\ \iint_{\sigma} S_{nm}^2(\theta, \lambda) d\sigma \end{aligned} \right\} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (34)$$

Observe que estas integrais (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34) são avaliadas sobre a superfície  $\sigma$  de uma esfera com raio unitário, cuja área é igual a  $4\pi$ .

### 3.3 Determinação das expressões analíticas que descrevem as constantes $A_{nm}$ e $B_{nm}$

Para determinar as expressões analíticas que descrevem as constantes  $A_{nm}$  (Eqs. 26 e 29), basta multiplicar os dois lados da Equação 29 por  $R_{op}(\theta, \lambda)$  (Eq. 27), integrar o resultado sobre a superfície  $\sigma$  de uma esfera com raio unitário e utilizar

as relações de ortogonalidade (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34):

$$\begin{aligned}
R_{op}(\theta, \lambda) f(\theta, \lambda) &= R_{op}(\theta, \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \\
&= [A_{00} R_{op}(\theta, \lambda) R_{00}(\theta, \lambda) + \\
&\quad B_{00} R_{op}(\theta, \lambda) S_{00}(\theta, \lambda) + \\
&\quad A_{10} R_{op}(\theta, \lambda) R_{10}(\theta, \lambda) + \\
&\quad B_{10} R_{op}(\theta, \lambda) S_{10}(\theta, \lambda) + \\
&\quad A_{11} R_{op}(\theta, \lambda) R_{11}(\theta, \lambda) + \\
&\quad B_{11} R_{op}(\theta, \lambda) S_{11}(\theta, \lambda) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad A_{op} R_{op}(\theta, \lambda) R_{op}(\theta, \lambda) + \\
&\quad B_{op} R_{op}(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad A_{nn} R_{op}(\theta, \lambda) R_{nn}(\theta, \lambda) + \\
&\quad B_{nn} R_{op}(\theta, \lambda) S_{nn}(\theta, \lambda)] \\
&= [\dots + A_{op} R_{op}^2(\theta, \lambda) + \dots]
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) R_{op}(\theta, \lambda) d\sigma &= \left[ \dots + \iint_{\sigma} A_{op} R_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma + \dots \right] \\
&= \left[ \dots + A_{op} \iint_{\sigma} R_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma + \dots \right] \cdot \\
&= A_{op} \iint_{\sigma} R_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma
\end{aligned} \tag{36}$$

De forma análoga, para obter as expressões analíticas que descrevem as constantes  $B_{nm}$  (Eqs. 26 e 29), basta multiplicar os dois lados da Equação 29 por  $S_{op}(\theta, \lambda)$  (Eq. 28), integrar o resultado sobre a superfície  $\sigma$  de uma esfera com

raio unitário e utilizar as relações de ortogonalidade (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34):

$$\iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = B_{op} \iint_{\sigma} S_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma. \quad (37)$$

A partir das Equações 36 e 37 temos que

$$A_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) R_{n0}(\theta, \lambda) d\sigma, \quad (38)$$

$$A_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) R_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma, \quad m \neq 0, \quad (39)$$

e

$$B_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) S_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma, \quad m \neq 0. \quad (40)$$

### 3.4 Normalização das funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ e $S_{nm}(\theta, \lambda)$

Em geofísica, a descrição do campo de gravidade e do campo geomagnético é feita por meio dos harmônicos esféricos (Eqs. 24 e 25). Contudo, por conveniência, a descrição destes campos não é feita utilizando-se as funções  $R_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 27) e  $S_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 28). Ao invés destas funções, são utilizadas as funções normalizadas

$$\overline{R}_{nm}(\theta, \lambda) = c_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) \quad (41)$$

e

$$\overline{S}_{nm}(\theta, \lambda) = c_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda). \quad (42)$$

Utilizando as Equações 27 e 28, é possível reescrever as Equações 41 e 42 em função dos Polinômios associados de Legendre (Eqs. 12 e 15) da seguinte forma

$$\overline{R}_{nm}(\theta, \lambda) = \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \cos(m\lambda) \quad (43)$$

e

$$\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) = \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \sin(m\lambda), \quad (44)$$

em que

$$\bar{P}_{nm}(\cos\theta) = c_{nm} P_{nm}(\cos\theta) \quad (45)$$

são Polinômios associados de Legendre normalizados.

Para descrever o campo de gravidade, os coeficientes  $c_{nm}$  (Eqs. 41 e 42) são

$$c_{n0}^{gr} = \sqrt{2n+1} \quad (46)$$

e

$$c_{nm}^{gr} = \sqrt{2(2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}, \quad m \neq 0. \quad (47)$$

A substituição destes coeficientes (Eqs. 46 e 47) na Equação 45 resulta nos *Polinômios associados de Legendre plenamente normalizados*.

Para descrever o campo geomagnético, os coeficientes  $c_{nm}$  (Eqs. 41 e 42) são

$$c_{n0}^{ge} = 1 \quad (48)$$

e

$$c_{nm}^{ge} = \sqrt{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}, \quad m \neq 0. \quad (49)$$

A substituição destes coeficientes (Eqs. 48 e 49) na Equação 45 resulta nos *Polinômios associados de Legendre com a seminormalização de Schmidt*.

.....



### 3.4.1 Exercício

Utilizando as relações de ortogonalidade entre as funções  $R_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 30) e  $S_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 31), determine

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} [\bar{R}_{nm}^{gr}(\theta, \lambda)]^2 d\sigma,$$

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} [\bar{S}_{nm}^{gr}(\theta, \lambda)]^2 d\sigma,$$

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} [\bar{R}_{nm}^{ge}(\theta, \lambda)]^2 d\sigma$$

e

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} [\bar{S}_{nm}^{ge}(\theta, \lambda)]^2 d\sigma,$$

em que  $\iint_{\sigma} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi}$  e  $d\sigma = \sin\theta d\theta d\lambda$ . Nestas integrais,  $\bar{R}_{nm}^{gr}(\theta, \lambda)$  e  $\bar{S}_{nm}^{gr}(\theta, \lambda)$  representam as funções normalizadas  $\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 41) e  $\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 42) utilizando-se os coeficientes  $c_{n0}^{gr}$  (Eq. 46) e  $c_{nm}^{gr}$  (Eq. 47). Analogamente,  $\bar{R}_{nm}^{ge}(\theta, \lambda)$  e  $\bar{S}_{nm}^{ge}(\theta, \lambda)$  representam as funções normalizadas  $\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 41) e  $\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 42) utilizando-se os coeficientes  $c_{n0}^{ge}$  (Eq. 48) e  $c_{nm}^{ge}$  (Eq. 49).

.....

## 3.5 Descrição do campo de gravidade em harmônicos esféricos

A força total exercida sobre um corpo de prova que possui massa  $m_0$  e está em repouso sobre a superfície da Terra é a soma da *força gravitacional* e da *força centrífuga*. Se dividirmos a força total pela massa  $m_0$  do corpo de prova, o resultado é uma grandeza com unidade de aceleração denominada *aceleração de gravidade* ou *vetor gravidade*. O vetor gravidade é a soma entre uma aceleração de origem gravitacional e outra devido ao movimento de rotação da Terra. Por

conveniência, a primeira é denominada *aceleração gravitacional* e a outra *aceleração centrífuga*. Do ponto de vista físico, o vetor gravidade é o gradiente de uma função escalar denominada *potencial de gravidade*. Analogamente, a aceleração gravitacional e a centrífuga são, respectivamente, o gradiente do *potencial gravitacional* e o gradiente do *potencial centrífugo*. O potencial gravitacional é uma função harmônica e, portanto, satisfaz a equação de Laplace. Devido a natureza física do problema, o potencial gravitacional pode ser descrito em termos dos harmônicos esféricos sólidos representados pela Equação 25. Sendo assim, de acordo com as Equações 25-28, o potencial gravitacional  $V(r, \theta, \lambda)$  em um ponto  $(r, \theta, \lambda)$  de um sistema de coordenadas esféricas (Fig. 2) pode ser escrito como:

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{(n+1)}} [A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] . \quad (50)$$

Tal como mencionado anteriormente, a descrição do campo de gravidade não é feita utilizando-se as funções  $R_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 27) e  $S_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 28), mas sim as funções normalizadas  $\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 41) e  $\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 42), cujos coeficientes de normalização  $c_{nm} = c_{nm}^{gr}$  são mostrados nas Equações 46 e 47. Assim, o potencial gravitacional  $V(r, \theta, \lambda)$  (Eq. 50) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^n} \left[ \frac{A_{nm}}{c_{nm}^{gr} GM} \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) + \frac{B_{nm}}{c_{nm}^{gr} GM} \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \right] , \quad (51)$$

em que a constante  $GM$  representa o produto entre a constante gravitacional  $G$  e a massa  $M$  da Terra. Note que, para obter a Equação 51, é necessário multiplicar e dividir a Equação 50 pela distância radial  $r$  (Fig. 2). Finalmente, se multiplicarmos e dividirmos cada elemento do somatório da Equação 51 pelo raio médio da Terra  $R$  e substituirmos as Equações 43 e 44, o potencial gravi-

tacional é representado por:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n \bar{P}_{nm}(\cos\theta) [\bar{A}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{B}_{nm} \sin(m\lambda)], \quad (52)$$

em que  $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$  são os Polinômios associados de Legendre plenamente normalizados (Eq. 45), cujos coeficientes de normalização  $c_{nm} = c_{nm}^{gr}$  são mostrados nas Equações 46 e 47. Note que, diferente da Equação 51, o somatório na Equação 52 não vai até  $n = \infty$ , mas sim até um grau máximo  $n = n_{max}$  finito. Um conjunto de coeficientes  $\bar{A}_{nm}$  e  $\bar{B}_{nm}$  provenientes da expansão em harmônicos esféricos sólidos representada pela Equação 52 até um grau máximo  $n = n_{max}$  constitui um *modelo global do campo de gravidade*.

### 3.6 Descrição do campo geomagnético em harmônicos esféricos

O campo magnético da Terra ou campo geomagnético é pode ser definido como a indução magnética produzida por praticamente dois tipos de fontes: rochas magnetizadas ou correntes elétricas. Rochas magnetizadas são localizadas na parte superior da litosfera, em regiões onde a temperatura é mais fria que a *temperatura de Curie* dos minerais constituintes das rochas. O campo produzido pelas rocha magnetizadas é denominado *campo crustal*. Diferente das rochas magnetizadas, as correntes elétricas são encontradas em várias regiões diferentes, tanto no interior quanto no exterior da Terra. De acordo com grande parte da literatura geofísica, a principal fonte do campo geomagnético é o sistema de correntes elétricas resultantes do movimento da liga metálica que constitui o núcleo externo. Considera-se que a maior parcela do campo geomagnético seja produzido por estas correntes no núcleo externo e, por isso, o campo produzido por elas é denominado *campo principal*. A variação temporal do campo principal é da ordem de cem anos e, portanto, é denominada *variação secular*. Além disso, o campo principal tem caráter predominantemente dipolar. O campo resultante

da soma entre os campos crustal e principal é comumente denominada *campo interno*.

Outras fontes de corrente importantes são aquelas localizadas na ionosfera e na magnetosfera, que estão acima da região neutra da atmosfera. Estes dois sistemas de correntes elétricas são originados por processos físicos distintos, mas que exercem uma influência mútua e, portanto, são considerados acoplados. O campo produzido pelas correntes na ionosfera é denominado *campo ionosférico* enquanto aquele produzido pelas correntes na magnetosfera é denominado *campo magnetosférico*. O campo resultante da soma entre os campos ionosférico e magnetosférico é denominado *campo externo*. Em *dias magneticamente calmos*, a magnitude do campo externo é da ordem de dezenas de nanoteslas. Por outro lado, ele pode atingir magnitudes da ordem de milhares de nanoteslas em *dias magneticamente perturbados*. Além disso, as variações do campo externo têm diferentes escalas temporais, que vão de frações de segundo até alguns dias. Por fim, outra fonte importante do campo geomagnético é caracterizada por correntes elétricas induzidas na crosta e no manto, que produzem o *campo induzido*. Dentre estas correntes, destacam-se aquelas induzidas pelo campo externo, que são utilizadas no método magnetotelúrico, por exemplo, para estimar a distribuição de condutividade/resistividade elétrica no interior da Terra.

Em um curto intervalo de tempo em uma região sem a presença de distribuições locais de correntes elétricas, o campo geomagnético pode ser considerado como o gradiente negativo de uma função denominada *potencial magnético escalar*. Esta função escalar é harmônica e, portanto, pode ser representada por uma expansão em harmônicos esféricos sólidos. Do ponto de vista físico, o potencial magnético escalar  $V(r, \theta, \lambda, t)$  em um ponto  $(r, \theta, \lambda)$  de um sistema de coordenadas esféricas (Fig. 2), em um dado tempo  $t$ , pode ser considerado a soma de outros dois potenciais magnéticos escalares, sendo um representado por  $V_e(r, \theta, \lambda, t)$  e descrito pela Equação 24 e o outro representado por  $V_i(r, \theta, \lambda, t)$  e descrito pela Equação 25.

Tal como o potencial gravitacional (Eq. 50), o potencial magnético  $V_i(r, \theta, \lambda, t)$

pode ser descrito por uma equação do tipo

$$V_i(r, \theta, \lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{(n+1)}} [A_{nm}(t) R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm}(t) S_{nm}(\theta, \lambda)] , \quad (53)$$

e representa o campo interno. Já o potencial magnético  $V_e(r, \theta, \lambda, t)$  é descrito por uma equação similar a Equação 24, dada por

$$V_e(r, \theta, \lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^n [A_{nm}(t) R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm}(t) S_{nm}(\theta, \lambda)] , \quad (54)$$

e representa o campo externo. De forma similar ao que foi feito para o campo de gravidade (Eqs. 50, 51 e 52), os potenciais magnéticos descritos pelas Equações 53 e 54 são reescritos de seguinte forma:

$$V_i(r, \theta, \lambda, t) = R \sum_{n=1}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{(n+1)} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) [g_{nm}(t) \cos(m\lambda) + h_{nm}(t) \sin(m\lambda)] \quad (55)$$

e

$$V_e(r, \theta, \lambda, t) = R \sum_{n=1}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \left( \frac{r}{R} \right)^n \bar{P}_{nm}(\cos\theta) [q_{nm}(t) \cos(m\lambda) + s_{nm}(t) \sin(m\lambda)] , \quad (56)$$

em que  $R$  é o raio médio da Terra e  $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$  são os Polinômios associados de Legendre com a seminormalização de Schmidt (Eq. 45), cujos coeficientes de normalização  $c_{nm} = c_{nm}^{ge}$  são mostrados nas Equações 48 e 49. Note que, diferente da Equação 52, os somatórios nas Equações 55 e 56 não começam em  $n = 0$ , mas sim em  $n = 1$ . Isso se deve ao fato de que o primeiro termo da expansão é nulo para o caso magnético. Os coeficientes  $g_{nm}(t)$ ,  $h_{nm}(t)$ ,  $q_{nm}(t)$  e  $s_{nm}(t)$  (Equações 55 e 56) são comumente denominados *coeficientes de Gauss* e definem um modelo global do campo geomagnético.

### 3.7 Algoritmos para o cálculo dos polinômios associados de Legendre normalizados

Tal como explicado na subseção anterior, os campos de gravidade e geomagnético podem ser descritos por meio de uma expansão em harmônicos esféricos. O campo de gravidade é descrito pela Equação 52 e o campo geomagnético pelas Equações 55 e 56. Para avaliar as equações que descrevem os campos de gravidade e geomagnético, é necessário:

- (i) ter os coeficientes  $\bar{A}_{nm}$  e  $\bar{B}_{nm}$  (Equação 52) e os coeficientes de Gauss  $g_{nm}(t)$ ,  $h_{nm}(t)$ ,  $q_{nm}(t)$  e  $s_{nm}(t)$  (Equações 55 e 56) e
- (ii) calcular os polinômios associados de Legendre  $\bar{P}_{nm}(\cos\theta)$  devidamente normalizados.

Com relação ao primeiro item, hoje em dia é relativamente fácil obter os coeficientes que descrevem os modelos globais para os campos de gravidade e geomagnético. Já com relação ao segundo item, é necessário definirmos algumas relações de recorrência adicionais para que possamos calcular os polinômios associados de Legendre plenamente normalizados e os polinômios associados de Legendre com a seminormalização de Schmidt.

As relações de ortogonalidade para os polinômios associados de Legendre plenamente normalizados, utilizados para descrever o campo de gravidade, são dadas por:

$$\bar{P}_{nn} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n} \sin\theta \bar{P}_{n-1\ n-1}, \quad (57)$$

$$\bar{P}_{nn-1} = \sqrt{2n+1} \cos\theta \bar{P}_{n-1\ n-1} \quad (58)$$

e

$$\bar{P}_{nm} = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+m}\sqrt{n-m}} \left( \sqrt{2n-1} \cos\theta \bar{P}_{n-1\ m} - \frac{\sqrt{n+m-1}\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{2n-3}} \bar{P}_{n-2\ m} \right).$$

(59)

Nestas equações, por conveniência, utilizamos a notação  $\overline{P}_{\alpha\beta} \equiv \overline{P}_{\alpha\beta}(\cos\theta)$ . De acordo com a Equação 57, é possível calcular todos os polinômios  $\overline{P}_{nn}$ ,  $n > 2$ , a partir do  $\overline{P}_{22}$ . De acordo com a Equação 58, é possível utilizar os polinômios  $\overline{P}_{nn}$  calculados com a Equação 57 para calcular todos os polinômios  $\overline{P}_{nn-1}$ . Por fim, de acordo com a Equação 59, é possível utilizar os polinômios calculados com as Equações 57 e 58 para calcular os demais polinômios  $\overline{P}_{nm}$ . A partir destas relações de recorrência, é possível definirmos o seguinte algoritmo:

### 3.7.1 Algoritmo para o calcular os polinômios associados de Legendre plenamente normalizados

$$\text{cosseno} = \cos\theta$$

$$\text{seno} = \sin\theta$$

$$\bar{P}_{00} = 1$$

$$\bar{P}_{10} = \text{cosseno}^{\frac{3}{2}}$$

$$\bar{P}_{11} = \text{seno}^{\frac{3}{2}}$$

$$\bar{P}_{20} = \sqrt{1,25} (3 \text{cosseno}^2 - 1)$$

$$\bar{P}_{21} = \sqrt{30} \text{cosseno} \text{seno}$$

$$\bar{P}_{22} = \sqrt{22,5} \text{seno}^2$$

$$n = 3$$

Enquanto  $n \leq n_{max}$ , calcule:

$$a0 = \sqrt{2n+1}$$

$$a1 = \frac{a0}{2n}$$

$$\bar{P}_{nn} = a1 \text{seno} \bar{P}_{n-1\ n-1}$$

$$\bar{P}_{n\ n-1} = a0 \text{cosseno} \bar{P}_{n-1\ n-1}$$

$$a2 = \sqrt{2n-1}$$

$$a3 = \sqrt{2n-3}$$

$$m = n - 2$$

Enquanto  $m \geq 0$ , calcule:

$$a4 = \sqrt{(n+m)(n-m)}$$

$$a5 = \sqrt{(n+m-1)(n-m-1)}$$

$$\bar{P}_{nm} = a2 \text{cosseno} \bar{P}_{n-1\ m}$$

$$\bar{P}_{nm} = \bar{P}_{nm} - \frac{a5}{a3} \bar{P}_{n-2\ m}$$

$$\bar{P}_{nm} = \frac{a0}{a4} \bar{P}_{nm}$$

$$m = m - 1$$

$$n = n + 1$$



### 3.7.2 Algoritmo para o calcular os polinômios associados de Legendre com a seminormalização de Schmidt

## 3.8 Expansão da função inverso da distância e fórmula da decomposição

Considere dois pontos  $P$  e  $P'$  separados por um ângulo  $\psi$  e uma distância  $l$  (Figura 3). De acordo com a lei dos cossenos, a distância  $l$  é dada por

$$l^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\psi, \quad (60)$$

em que

$$\cos\psi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\lambda' - \lambda). \quad (61)$$

A partir da Equação 60, é possível escrever

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\psi}}. \quad (62)$$

Sabe-se que, se  $r' < r$ , a função  $1/l$  (Eq. 62) pode ser descrita pela expansão

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi), \quad (63)$$

em que  $P_n(t) = P_n(\cos\psi)$  (Eqs. 18 e 19) são os Polinômios de Legendre. Por questões práticas, os Polinômios de Legendre  $P_n(\cos\psi)$  são reescritos em função das coordenadas esféricas  $(r, \theta, \lambda)$  a partir da *fórmula da decomposição*:

$$P_n(\cos\psi) = \quad (64)$$

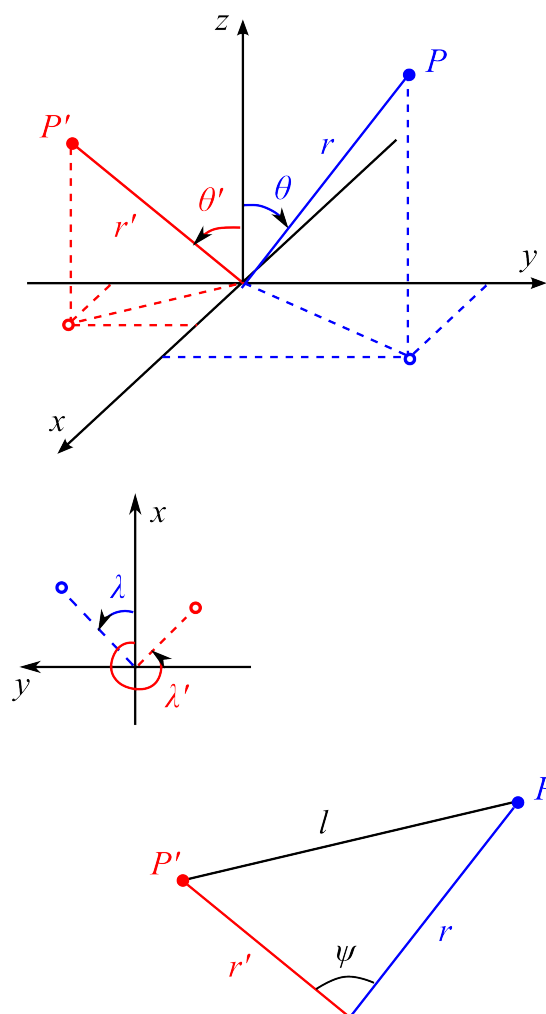


Figura 3: Distância  $l$  entre um ponto  $P$  e outro ponto  $P'$  de um sistema de coordenadas esféricas.