

# Sphere

$$X' = r' \sin \theta' \cos \lambda'$$

$$Y' = r' \sin \theta' \sin \lambda'$$

$$Z' = r' \cos \theta'$$

$$l = \sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2 + (Z-Z')^2}$$

law of cosines

$$= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \theta'}$$

For convenience, consider:  $G\rho = 1$

radius of the sphere

$$V_P = \iiint \frac{1}{l} d\tau$$

$$= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \theta'}} r'^2 \sin \theta' d\lambda' d\theta' dr'$$

$$= 2\pi \int_0^R r'^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \theta'}} d\theta' dr'$$

$$= 2\pi \int_0^R r'^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' t}} dt dr'$$

$$\begin{aligned} t &= \cos \theta' \\ dt &= -\sin \theta' d\theta' \\ \theta' = \pi &\rightarrow t = -1 \\ \theta' = 0 &\rightarrow t = 1 \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_0^R r'^2 \left[ -\frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' t}}{r r'} \right]_{-1}^1 dr'$$

$$= 2\pi \int_0^R r'^2 \left[ \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2r r'} - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r'}}{r r'} \right] dr'$$

$$= 2\pi \int_0^R r' \left[ \frac{|r+r'| - |r-r'|}{r} \right] dr'$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

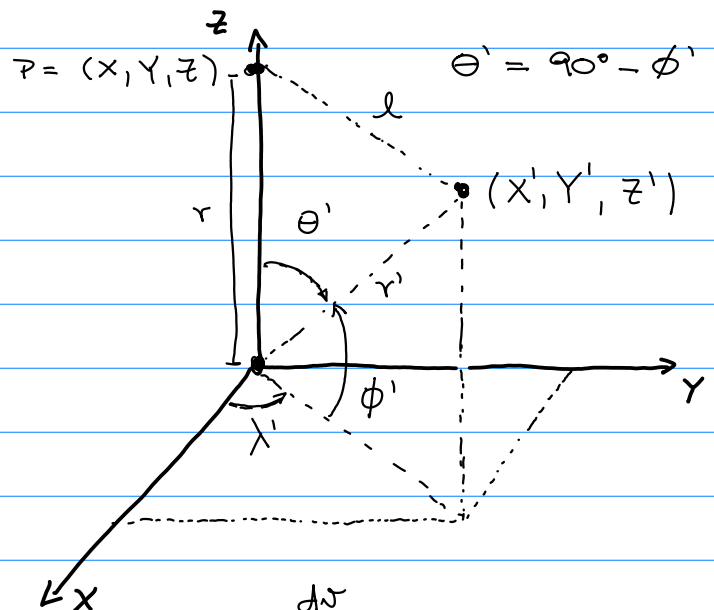
1)  $r > R$ ,  $|r+r'| = r+r'$ ,  $|r-r'| = r-r'$

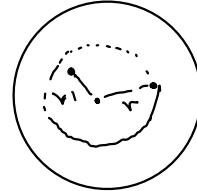
$$V_{out} = 2\pi \frac{1}{r} \int_0^R r' r + r'^2 - r' r + r'^2 dr' = \int_0^R 2r'^2 dr' =$$

$$= 2\pi \frac{1}{r} \left[ \frac{2R^3}{3} \right] = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{r}$$

$$\boxed{G\rho = 1}$$

$$\left( \frac{GM}{r} \right)$$





2)  $r < R$

$$V_{in} = 2\pi \left[ \int_0^r \frac{r'}{r} \left( \overbrace{r+r'}^{r+r'} - \overbrace{r-r'}^{r-r'} \right) dr' + \int_r^R \frac{r'}{r} \left( \overbrace{r+r'}^{r+r'} - \overbrace{r-r'}^{r-r'} \right) dr' \right]$$

$$= 2\pi \frac{1}{r} \left[ \int_0^r 2r'^2 dr' + \int_r^R 2r'r dr' \right]$$

$$= 2\pi \frac{1}{r} \left[ 2 \frac{r^3}{3} + 2r \left( \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \right]$$

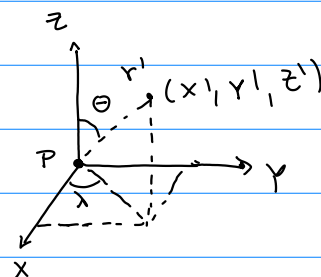
$$= 2\pi \left[ \frac{2r^2}{3} + R^2 - r^2 \right] = 2\pi \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

3)  $r = 0$   $\ell = r'$

$$V_0 = \iiint \frac{1}{r'} r'^2 \sin\theta d\lambda d\theta dr'$$

$$= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r' \sin\theta d\lambda d\theta dr'$$

$$= 2\pi \int_0^R r' [-\cos\theta]_0^\pi dr' = 2\pi R^2$$



4)  $r = R$ ,  $\lim_{r \rightarrow R^-} V_{in} = \lim_{r \rightarrow R^+} V_{out} = \frac{4\pi R^2}{3}$

$G = 1$

$$V_P = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{r} & , r > R \\ \frac{4}{3}\pi R^2 & , r = R \\ 2\pi \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right) & , r < R \\ 2\pi R^2 & , r = 0 \end{cases}$$

(Sansò and Sideris, 2013. p. 10-11)

Ex.: Faça um gráfico do potencial gravitacional produzido por uma esfera sólida em função de  $r$ .

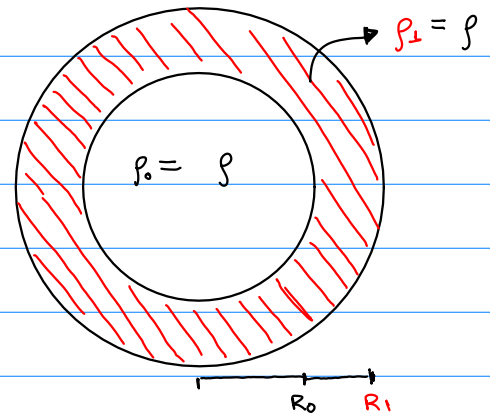
Ex.: Defina o Laplaciano, primeira e segunda derivadas radiais do potencial produzido por uma esfera sólida.

$$\partial_{xx}V + \partial_{yy}V + \partial_{zz}V = \nabla^2 V$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r > R_1,$$

$$\begin{aligned} V_p &= G \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho_1 \frac{1}{r} - G \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_0 \frac{1}{r} \\ &= G \frac{4}{3} \pi \rho (R_1^3 - R_0^3) \frac{1}{r} \end{aligned}$$



$$R_0 < r < R_1$$

$$\begin{aligned} V_p &= G 2\pi \rho_1 \left( R_1^2 - \frac{r^2}{3} \right) - G \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_0 \frac{1}{r} \\ &= G 2\pi \rho \left( R_1^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{R_0^3}{r} \right) \end{aligned}$$

$$r < R_0$$

$$\begin{aligned} V_p &= G 2\pi \left( R_1^2 - \frac{r^2}{3} \right) \rho_1 - G 2\pi \left( R_0^2 - \frac{r^2}{3} \right) \rho_0 \\ &= G 2\pi \rho (R_1^2 - R_0^2) \end{aligned}$$

Ex.: Faça um gráfico do potencial gravitacional produzido por uma casca esférica em função de  $r$ .

Ex.: Defina o Laplaciano, primeira e segunda derivadas radiais do potencial produzido por uma cascas esférica.

Ex.: Defina o potencial, Laplaciano, primeira e segunda derivadas radiais produzidos pelo modelo de esféricas concêntricas.

Ex.: Faça um gráfico do potencial gravitacional produzido pelo modelo de esferas concêntricas em função de  $r$ .

Ex.: Usando a relação de Poisson, defina o potencial magnético escalar e a indução magnética produzida pelos 3 modelos definidos acima (esfera sólida, casca esférica e esferas concêntricas)

