Disciplina Métodos Potenciais

Vanderlei C. Oliveira Jr.

Observatório Nacional - MCTI

Rio de Janeiro - 2014

Conteúdo

---

1 Funções harmônicas

1.1 Exercício

Seja $f(x, y, z)$ dada por

$$f(x,y,z) = -\iiint\limits_v \mathbf{m}(x',y',z')^\intercal \left(\nabla \frac{1}{r}\right) dv \tag{1}$$

em que $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ é a distância entre o ponto (x, y, z) e o ponto (x', y', z') dentro do volume de integração v (Figura 1). Os vetores $\mathbf{m}(x', y', z')$ e $\nabla \frac{1}{r}$ são dados por

$$\mathbf{m}(x', y', z') = \begin{bmatrix} m_x(x', y', z') \\ m_y(x', y', z') \\ m_z(x', y', z') \end{bmatrix}_{3\times 1} \tag{2}$$

e

$$\nabla \frac{1}{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad . \tag{3}$$

Mostre que a função $f(x, y, z)$ (Eq. 1) é harmônica e, portanto, satisfaz a equação de Laplace em coordenadas Cartesianas

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad . \tag{4}$$

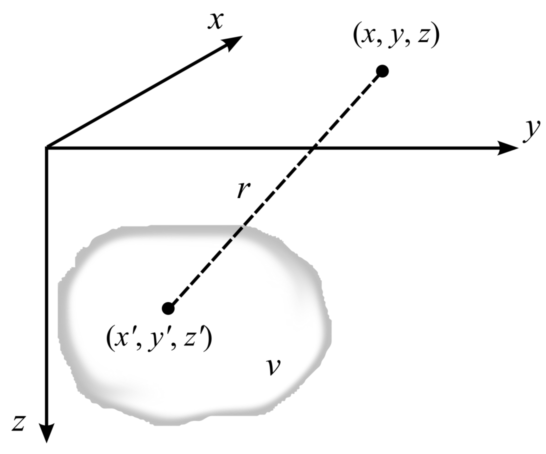

Figura 1: Distância $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ entre um ponto (x, y, z) e outro ponto (x', y', z') de um sistema de coordenadas Cartesianas. O ponto (x', y', z') está dentro do volume de integração v.

2 Harmônicos esféricos

2.1 Exercício

2.1.1

Sejam $f_1(r)$ e $f_2(r)$ duas funções dadas por

$$f_1(r) = r^n \tag{5}$$

e

$$f_2(r) = r^{-(n+1)} \quad , \tag{6}$$

em que $n \geqslant 0$ é um número inteiro e $r > 0$ é um número real. Mostre que $f_1(r)$ (Eq. 5) e $f_2(r)$ (Eq. 6) são soluções da equação diferencial

$$r^2 \, \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2 \, r \, \frac{d \, f(r)}{dr} - n(n+1) \, f(r) = 0 \quad . \tag{7}$$

2.1.2

Sejam $h_1(\lambda)$ e $h_2(\lambda)$ duas funções dadas por

$$h_1(\lambda) = cos(m\lambda) \tag{8}$$

e

$$h_2(\lambda) = sen(m\lambda) \quad , \tag{9}$$

em que $m \geqslant 0$ é um número inteiro e λ é um número real. Mostre que $h_1(\lambda)$ (Eq. 8) e $h_2(\lambda)$ (Eq. 9) são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2 h(\lambda)}{d\lambda^2} + \lambda^2 \frac{d \, h(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad . \tag{10}$$

2.1.3

A equação diferencial

$$sen(\theta)\, g''(\theta) + cos(\theta)\, g'(\theta) + \left[n(n+1)\, sen(\theta) - \frac{m^2}{sen(\theta)} \right] = 0 \tag{11}$$

tem como solução os polinômios associados de Legendre

$$g(\theta) = P_{nm}(cos\theta) \quad . \tag{12}$$

Nestas Equações, n e m são inteiros maiores ou iguais a zero (sendo m menor ou igual a n), $g'(\theta)$ é a primeira derivada e $g''(\theta)$ é a segunda derivada de $g(\theta)$. Os inteiros n e m são, respectivamente, o grau e a ordem do polinômio $P_{nm}(cos\theta)$. Por conveniência, estas Equações são comumente transformadas por mudança de variáveis utilizando a relação $t = cos\theta$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \overline{g}(t) \\ g'(\theta) &= -\overline{g}'(t)\, sen(\theta) \\ g''(\theta) &= \overline{g}''(t)\, sen^2(\theta) - \overline{g}'(t)\, cos(\theta) \quad . \end{aligned} \tag{13}$$

em que $\overline{g}(t) = P_{nm}(t)$, com primeira e segunda derivadas $\overline{g}'(t)$ e $\overline{g}''(t)$, respectivamente. Substituindo as Equações 13 na equação diferencial 11, dividindo o resultado por $sen(\theta)$ e utilizando a relação $sen^2(\theta) = 1 - t^2$ temos que

$$(1-t^2)\, \overline{g}''(t) - 2\, t\, \overline{g}'(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right] = 0 \quad . \tag{14}$$

A função $\overline{g}(t) = P_{nm}(t)$ (polinômio associado de Legendre escrito em função da viariável t) que satisfaz a Equação 14 pode ser dada por

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n\, n!}\, (1-t^2)^{m/2}\, \frac{d^{n+m}}{d\, t^{n+m}} (t^2-1)^n \quad . \tag{15}$$

Por exemplo,

$$
\begin{aligned}
P_{11}(t) &= \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2}\,\frac{d^2}{d\,t^2}(t^2-1) \\
&= \sqrt{1-t^2} \\
&= sen(\theta) \quad ,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
P_{21}(t) &= \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2^2\,2!}\,\frac{d^3}{d\,t^3}(t^2-1)^2 \\
&= \frac{\sqrt{1-t^2}}{8}\,(16\,t+8\,t) \\
&= 3\,t\,\sqrt{1-t^2} \\
&= 3\,sen(\theta)\,cos(\theta) \quad .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

No caso particular em que $m = 0$, não há raízes $\sqrt{1-t^2}$, $P_{nm}(t)$ é representado simplesmente por $P_n(t)$ e é denominado polinômio de Legendre. A partir da Equação 15, os polinômios de Legendre podem ser escritos como

$$
P_n(t) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{d\,t^n}(t^2-1)^n \quad . \tag{18}
$$

Alternativamente, os polinômios de Legendre (18) a partir do grau $n = 2$ podem ser obtidos pela fórmula recursiva

$$
P_n(t) = -\,\frac{n-1}{n}\,P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n}\,t\,P_{n-1}(t) \quad , \tag{19}
$$

em que $P_2(t)$ é obtido utilizando $P_0(t)$ e $P_1(t)$, $P_3(t)$ é obtido utilizando $P_1(t)$ e $P_2(t)$, etc. Sendo assim, determine os polinômios de Legendre de grau $n = 0$ até $n = 5$ utilizando a Equação 18. Em seguida, determine os polinômios de grau $n = 2$ até $n = 5$ utilizando a fórmula recursiva (Eq. 19). Por último, faça um gráfico dos polinômios de Legendre $P_n(t)$ de ordem $n = 0$ até $n = 5$ para t no intervalo $[-1, 1]$.

2.1.4

Seja $V(r, \theta, \lambda)$ uma função harmônica que depende das coordenadas esféricas r, θ e λ (Fig. 2). Esta função satisfaz a equação de Laplace em coordenadas esféricas, que pode ser escrita como

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2\,r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + cot(\theta) \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{sen^2(\theta)} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad . \tag{20}$$

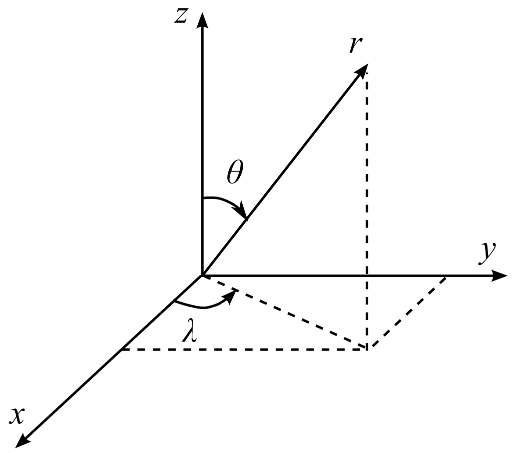

Figura 2: Sistema de coordenadas Cartesianas (x, y, z) e esféricas (r, θ, λ).

A equação de Laplace 20 pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Este método consiste em supor que a função $V(r, \theta, \lambda)$ pode ser reescrita como o produto entre três funções independentes:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r)\, g(\theta)\, h(\lambda) \quad . \tag{21}$$

O próximo passo consiste em determinar as funções $f(r)$, $g(\theta)$ e $h(\lambda)$. Para tanto, basta substituir a função $V(r, \theta, \lambda)$ dada pela Equação 21 na equação de Laplace 20. Esta substituição nos leva a conclusão de que a função $f(r)$ (Eq.

21) satisfaz a equação diferencial 7. Tal como visto anteriormente, as funções $f_1(r)$ (Eq. 5) e $f_2(r)$ (Eq. 6) são soluções desta equação. Neste caso, mostra-se que a função $V(r, \theta, \lambda)$ pode ser escrita como:

$$V(r, \theta, \lambda) = r^n \, g(\theta) \, h(\lambda) \quad , \tag{22}$$

ou

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{r^{(n+1)}} \, g(\theta) \, h(\lambda) \quad . \tag{23}$$

Estas funções são denominadas harmônicos esféricos sólidos. De forma análoga, mostra-se que a função $h(\lambda)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 10, que possui as soluções $h_1(\lambda)$ (Eq. 8) e $h_2(\lambda)$ (Eq. 9), e que a função $g(\theta)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 11, cuja solução é dada pelos polinômios associados de Legendre $P_{nm}(cos\theta)$ (Eq. 12). Os polinômios associados de Legendre $P_{nm}(cos\theta)$ podem ser obtidos pela Equação 15, em que $t = cos(\theta)$. Por fim, é possível mostrar que a função $V(r, \theta, \lambda)$ pode ser escrita de duas formas:

$$V_e(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \, Y_n(\theta, \lambda) \quad , \tag{24}$$

ou

$$V_i(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \, Y_n(\theta, \lambda) \quad , \tag{25}$$

em que

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^{n} \left[A_{nm} \, R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} \, S_{nm}(\theta, \lambda) \right] \quad , \tag{26}$$

sendo A_{nm} e B_{nm} constantes e as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ dadas por

$$R_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(cos\theta) \, cos(m \, \lambda) \tag{27}$$

e

$$S_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(cos\theta)\, sen(m\,\lambda) \quad . \tag{28}$$

As funções $Y_n(\theta, \lambda)$ (Eq. 26) são denominadas harmônicos (esféricos) de superfície.