Disciplina Métodos Potenciais

Vanderlei C. Oliveira Jr.

Observatório Nacional - MCTI

Rio de Janeiro - 2014

Conteúdo

---

1 Funções harmônicas

1.1 Função potencial magnético escalar

Seja $f(x,y,z)$ dada por

$$f(x,y,z) = -\iiint\limits_{v} \mathbf{m}(x',y',z')^{\intercal} \left(\nabla \frac{1}{r}\right) dv \tag{1}$$

em que $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ é a distância entre o ponto (x,y,z) e o ponto (x',y',z') dentro do volume de integração v (Figura 1). Os vetores $\mathbf{m}(x',y',z')$ e $\nabla \frac{1}{r}$ são dados por

$$\mathbf{m}(x',y',z') = \begin{bmatrix} m_x(x',y',z') \\ m_y(x',y',z') \\ m_z(x',y',z') \end{bmatrix}_{3\times 1} \tag{2}$$

e

$$\nabla \frac{1}{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} \end{bmatrix}_{3\times 1} \quad . \tag{3}$$

....

1.1.1 Exercício

Mostre que a função $f(x,y,z)$ (Eq. 1) é harmônica e, portanto, satisfaz a equação de Laplace em coordenadas Cartesianas

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = 0 \quad . \tag{4}$$

....

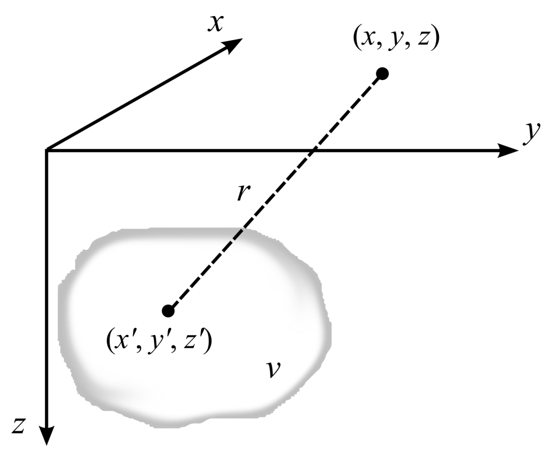

Figura 1: Distância $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ entre um ponto (x, y, z) e outro ponto (x', y', z') de um sistema de coordenadas Cartesianas. O ponto (x', y', z') está dentro do volume de integração v.

2 Harmônicos esféricos

2.1 Equações diferenciais de r

Sejam $f_1(r)$ e $f_2(r)$ duas funções dadas por

$$f_1(r) = r^n \tag{5}$$

e

$$f_2(r) = r^{-(n+1)} \quad , \tag{6}$$

em que $n \geqslant 0$ é um número inteiro e $r > 0$ é um número real.

. . . .

2.1.1 Exercício

Mostre que $f_1(r)$ (Eq. 5) e $f_2(r)$ (Eq. 6) são soluções da equação diferencial

$$r^2 \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2\, r \frac{d\, f(r)}{dr} - n(n+1)\, f(r) = 0 \quad . \tag{7}$$

....

2.2 Equações diferenciais de λ

Sejam $h_1(\lambda)$ e $h_2(\lambda)$ duas funções dadas por

$$h_1(\lambda) = cos(m\lambda) \tag{8}$$

e

$$h_2(\lambda) = sen(m\lambda) \quad , \tag{9}$$

em que $m \geqslant 0$ é um número inteiro e λ é um número real.

....

2.2.1 Exercício

Mostre que $h_1(\lambda)$ (Eq. 8) e $h_2(\lambda)$ (Eq. 9) são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2 h(\lambda)}{d\lambda^2} + m^2 h(\lambda) = 0 \quad . \tag{10}$$

....

2.3 Polinômios de Legendre

A equação diferencial

$$sen\theta\, g''(\theta) + cos\theta\, g'(\theta) + \left[n(n+1)\, sen\theta - \frac{m^2}{sen\theta} \right] = 0 \tag{11}$$

tem como solução os polinômios associados de Legendre

$$g(\theta) = P_{nm}(cos\theta) \quad . \tag{12}$$

Nestas Equações, n e m são inteiros maiores ou iguais a zero (sendo m menor ou igual a n), $g'(\theta)$ é a primeira derivada e $g''(\theta)$ é a segunda derivada de $g(\theta)$. Os inteiros n e m são, respectivamente, o grau e a ordem do polinômio $P_{nm}(cos\theta)$. Por conveniência, estas Equações são comumente transformadas por mudança de variáveis utilizando a relação $t = cos\theta$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \overline{g}(t) \\ g'(\theta) &= -\overline{g}'(t)\, sen\theta \\ g''(\theta) &= \overline{g}''(t)\, sen^2\theta - \overline{g}'(t)\, cos\theta \quad . \end{aligned} \tag{13}$$

em que $\overline{g}(t) = P_{nm}(t)$, com primeira e segunda derivadas $\overline{g}'(t)$ e $\overline{g}''(t)$, respectivamente. Substituindo as Equações 13 na equação diferencial 11, dividindo o resultado por $sen\theta$ e utilizando a relação $sen^2\theta = 1 - t^2$ temos que

$$(1-t^2)\,\overline{g}''(t) - 2\,t\,\overline{g}'(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right] = 0 \quad . \tag{14}$$

A função $\overline{g}(t) = P_{nm}(t)$ (polinômio associado de Legendre escrito em função da viariável t) que satisfaz a Equação 14 pode ser dada por

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n\, n!}\,(1-t^2)^{m/2}\,\frac{d^{n+m}}{d\,t^{n+m}}(t^2-1)^n \quad . \tag{15}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2}\,\frac{d^2}{d\,t^2}(t^2-1) \\ &= \sqrt{1-t^2} \\ &= sen\theta \quad , \end{aligned} \tag{16}$$

ou

$$
\begin{aligned}
P_{21}(t) &= \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2^2\,2!}\,\frac{d^3}{d\,t^3}(t^2-1)^2 \\
&= \frac{\sqrt{1-t^2}}{8}\,(16\,t+8\,t) \\
&= 3\,t\,\sqrt{1-t^2} \\
&= 3\,sen\theta\,cos\theta \quad .
\end{aligned} \tag{17}
$$

No caso particular em que $m=0$, não há raízes $\sqrt{1-t^2}$, $P_{nm}(t)$ é representado simplesmente por $P_n(t)$ e é denominado polinômio de Legendre. A partir da Equação 15, os polinômios de Legendre podem ser escritos como

$$
P_n(t) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{d\,t^n}(t^2-1)^n \quad . \tag{18}
$$

Alternativamente, os polinômios de Legendre (18) a partir do grau $n=2$ podem ser obtidos pela fórmula recursiva

$$
P_n(t) = -\,\frac{n-1}{n}\,P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n}\,t\,P_{n-1}(t) \quad , \tag{19}
$$

em que $P_2(t)$ é obtido utilizando $P_0(t)$ e $P_1(t)$, $P_3(t)$ é obtido utilizando $P_1(t)$ e $P_2(t)$, etc.

....

2.3.1 Exercício

Determine os polinômios associados de Legendre de grau $n=0$ e ordem $m=0$ até grau $n=3$ e ordem $m=3$ utilizando a Equação 15.

2.3.2 Exercício

Determine os polinômios de Legendre de grau $n=0$ até $n=5$ utilizando a Equação 18. Em seguida, determine os polinômios de grau $n=2$ até $n=5$ utilizando a fórmula recursiva (Eq. 19). Por último, faça um gráfico dos polinômios de Legendre $P_n(t)$ de grau $n = 0$ até $n = 5$ para t no intervalo $[-1, 1]$.

....

2.4 Equação de Laplace em coordenadas esféricas

Seja $V(r, \theta, \lambda)$ uma função harmônica que depende das coordenadas esféricas r, θ e λ (Fig. 2). Esta função satisfaz a equação de Laplace em coordenadas esféricas, que pode ser escrita como

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2\, r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + cot\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{sen^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad . \tag{20}$$

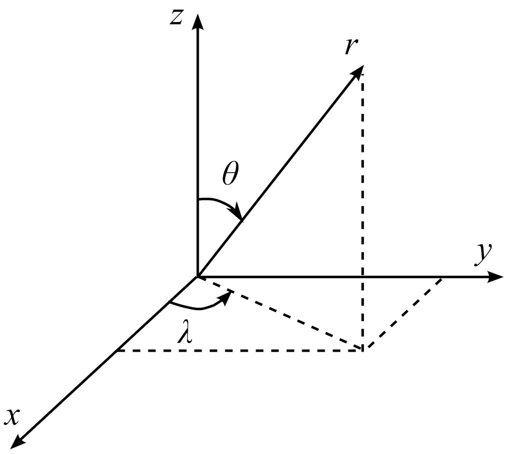

Figura 2: Sistema de coordenadas Cartesianas (x, y, z) e esféricas (r, θ, λ).

Solução da Equação de Laplace em coordenadas esféricas

A equação de Laplace 20 pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Este método consiste em supor que a função $V(r,\theta,\lambda)$ pode ser reescrita como o produto entre três funções independentes:

$$V(r,\theta,\lambda) = f(r)\,g(\theta)\,h(\lambda) \quad . \tag{21}$$

O próximo passo consiste em determinar as funções $f(r)$, $g(\theta)$ e $h(\lambda)$. Para tanto, basta substituir a função $V(r,\theta,\lambda)$ dada pela Equação 21 na equação de Laplace 20. Esta substituição nos leva a conclusão de que a função $f(r)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 7. Tal como visto anteriormente, as funções $f_1(r)$ (Eq. 5) e $f_2(r)$ (Eq. 6) são soluções desta equação. Neste caso, mostra-se que a função $V(r,\theta,\lambda)$ pode ser escrita como:

$$V(r,\theta,\lambda) = r^n\,g(\theta)\,h(\lambda) \quad , \tag{22}$$

ou

$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{1}{r^{(n+1)}}\,g(\theta)\,h(\lambda) \quad . \tag{23}$$

Estas funções são denominadas harmônicos esféricos sólidos. De forma análoga, mostra-se que a função $h(\lambda)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 10, que possui as soluções $h_1(\lambda)$ (Eq. 8) e $h_2(\lambda)$ (Eq. 9), e que a função $g(\theta)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 11, cuja solução é dada pelos polinômios associados de Legendre $P_{nm}(cos\theta)$ (Eq. 12). Os polinômios associados de Legendre $P_{nm}(cos\theta)$ podem ser obtidos pela Equação 15, em que $t = cos\theta$. Por fim, é possível mostrar que a função $V(r,\theta,\lambda)$ pode ser escrita de duas formas:

$$V_e(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\,Y_n(\theta,\lambda) \quad , \tag{24}$$

ou

$$V_i(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}}\, Y_n(\theta,\lambda) \quad , \tag{25}$$

em que

$$Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{m=0}^{n} \left[A_{nm}\, R_{nm}(\theta,\lambda) + B_{nm}\, S_{nm}(\theta,\lambda)\right] \quad , \tag{26}$$

sendo A_{nm} e B_{nm} constantes e as funções $R_{nm}(\theta,\lambda)$ e $S_{nm}(\theta,\lambda)$ dadas por

$$R_{nm}(\theta,\lambda) = P_{nm}(cos\theta)\, cos(m\,\lambda) \tag{27}$$

e

$$S_{nm}(\theta,\lambda) = P_{nm}(cos\theta)\, sen(m\,\lambda) \quad . \tag{28}$$

As funções $Y_n(\theta,\lambda)$ (Eq. 26) são denominadas harmônicos (esféricos) de superfície.

Relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta,\lambda)$ e $S_{nm}(\theta,\lambda)$

As constantes A_{nm} e B_{nm} (Eq. 26) podem ser determinadas por meio das relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 27) e $S_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 28). Para tanto, vamos considerar $r = 1$ nas equações 24 e 25. Dessa maneira, estas equações são iguais a uma função $f(\theta,\lambda)$ que pode ser escrita em função dos harmônicos de superfície (Eq. 26) da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(\theta,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[A_{nm}\, R_{nm}(\theta,\lambda) + B_{nm}\, S_{nm}(\theta,\lambda)\right] \ . \end{aligned} \tag{29}$$

De acordo com as relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 27) e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 28),

$$\iint_\sigma R_{nm}(\theta, \lambda)\, R_{op}(\theta, \lambda)\, d\sigma = 0 \tag{30}$$

e

$$\iint_\sigma S_{nm}(\theta, \lambda)\, S_{op}(\theta, \lambda)\, d\sigma = 0 \tag{31}$$

para o caso em que $nm \neq op$. Já a integral

$$\iint_\sigma R_{nm}(\theta, \lambda)\, S_{op}(\theta, \lambda)\, d\sigma = 0 \tag{32}$$

é sempre zero, independente dos valores de o e p. Nestas Equações, $\iint_\sigma = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi}$ e $d\sigma = sen\theta\, d\theta d\lambda$. Por outro lado, estas integrais são diferentes de zero quando $nm = op$. Neste caso,

$$\iint_\sigma R_{n0}^2(\theta, \lambda)\, d\sigma = \frac{4\,\pi}{2\,n+1} \tag{33}$$

e

$$\left.\begin{array}{l} \iint_\sigma R_{nm}^2(\theta, \lambda)\, d\sigma \\ \iint_\sigma S_{nm}^2(\theta, \lambda)\, d\sigma \end{array}\right\} = \frac{2\,\pi}{2\,n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,. \tag{34}$$

Observe que estas integrais (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34) são avaliadas sobre a superfície σ de uma esfera com raio unitário, cuja área é igual a $4\,\pi$.

Determinação das constantes A_{nm} ***e*** B_{nm}

Para determinar as constantes A_{nm} (Eqs. 26 e 29), basta multiplicar os dois lados da Equação 29 por $R_{op}(\theta, \lambda)$ (Eq. 27), integrar o resultado sobre a superfície σ de uma esfera com raio unitário e utilizar as relações de ortogonalidade (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34):

$$\begin{aligned}
R_{op}(\theta,\lambda)\, f(\theta,\lambda) &= R_{op}(\theta,\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} [A_{nm}\, R_{nm}(\theta,\lambda) + B_{nm}\, S_{nm}(\theta,\lambda)] \\
&= [A_{00}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, R_{00}(\theta,\lambda) + \\
&\quad B_{00}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, S_{00}(\theta,\lambda) + \\
&\quad A_{10}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, R_{10}(\theta,\lambda) + \\
&\quad B_{10}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, S_{10}(\theta,\lambda) + \\
&\quad A_{11}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, R_{11}(\theta,\lambda) + \\
&\quad B_{11}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, S_{11}(\theta,\lambda) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad A_{op}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, R_{op}(\theta,\lambda) + \\
&\quad B_{op}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, S_{op}(\theta,\lambda) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad A_{nn}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, R_{nn}(\theta,\lambda) + \\
&\quad B_{nn}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, S_{nn}(\theta,\lambda)] \\
&= \left[\ldots + A_{op}\, R_{op}^2(\theta,\lambda) + \ldots \right]
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} f(\theta,\lambda)\, R_{op}(\theta,\lambda)\, d\sigma &= \left[\ldots + \iint_{\sigma} A_{op}\, R_{op}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma + \ldots \right] \\
&= \left[\ldots + A_{op} \iint_{\sigma} R_{op}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma + \ldots \right] . \\
&= A_{op} \iint_{\sigma} R_{op}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma
\end{aligned} \tag{36}$$

De forma análoga, para determinar as constantes B_{nm} (Eqs. 26 e 29), basta multiplicar os dois lados da Equação 29 por $S_{op}(\theta,\lambda)$ (Eq. 28), integrar o resultado sobre a superfície σ de uma esfera com raio unitário e utilizar as relações de ortogonalidade (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34):

$$\iint\limits_{\sigma} f(\theta,\lambda)\, S_{op}(\theta,\lambda)\, d\sigma = B_{op} \iint\limits_{\sigma} S_{op}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma \, . \tag{37}$$

A partir das Equações 36 e 37 temos que

$$A_{n0} = \frac{2\,n+1}{4\,\pi} \iint\limits_{\sigma} f(\theta,\lambda)\, R_{n0}(\theta,\lambda)\, d\sigma \ , \tag{38}$$

$$A_{nm} = \frac{2\,n+1}{2\,\pi}\, \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint\limits_{\sigma} f(\theta,\lambda)\, R_{nm}(\theta,\lambda)\, d\sigma \ , \ m \neq 0 \, , \tag{39}$$

e

$$B_{nm} = \frac{2\,n+1}{2\,\pi}\, \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint\limits_{\sigma} f(\theta,\lambda)\, S_{nm}(\theta,\lambda)\, d\sigma \ , \ m \neq 0 \, . \tag{40}$$

Normalização das funções $R_{nm}(\theta,\lambda)$ ***e*** $S_{nm}(\theta,\lambda)$

Em geofísica, a descrição do campo de gravidade e do campo geomagnético é feita por meio dos harmônicos esféricos (Eqs. 24 e 25). Contudo, por conveniência, a descrição destes campos não é feita utilizando-se as funções $R_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 30) e $S_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 31). Ao invés destas funções, são utilizadas as funções normalizadas

$$\overline{R}_{nm}(\theta,\lambda) = c_{nm}\, R_{nm}(\theta,\lambda) \tag{41}$$

e

$$\overline{S}_{nm}(\theta,\lambda) = c_{nm}\, S_{nm}(\theta,\lambda) \, . \tag{42}$$

Para descrever o campo de gravidade, os coeficientes c_{nm} (Eqs. 41 e 42) são

$$c_{n0}^{gr} = \sqrt{2\,n+1} \tag{43}$$

e

$$c_{nm}^{gr} = \sqrt{2\,(2\,n+1)\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,, \quad m \neq 0\,. \tag{44}$$

Para descrever o campo geomagnétco, os coeficientes c_{nm} (Eqs. 41 e 42) são

$$c_{n0}^{ge} = 1 \tag{45}$$

e

$$c_{nm}^{ge} = \sqrt{2\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\,, \quad m \neq 0\,. \tag{46}$$

....

2.4.1 Exercício

Utilizando as relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 30) e $S_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 31), determine

$$\frac{1}{4\,\pi}\iint\limits_{\sigma}\left[\overline{R}_{nm}^{gr}(\theta,\lambda)\right]^2\,d\sigma\,,$$

$$\frac{1}{4\,\pi}\iint\limits_{\sigma}\left[\overline{S}_{nm}^{gr}(\theta,\lambda)\right]^2\,d\sigma\,,$$

$$\frac{1}{4\,\pi}\iint\limits_{\sigma}\left[\overline{R}_{nm}^{ge}(\theta,\lambda)\right]^2\,d\sigma$$

e

$$\frac{1}{4\,\pi}\iint\limits_{\sigma}\left[\overline{S}_{nm}^{ge}(\theta,\lambda)\right]^2\,d\sigma\,,$$

em que $\iint\limits_{\sigma} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi}$ e $d\sigma = sen\theta\, d\theta d\lambda$. Nestas integrais, $\overline{R}_{nm}^{gr}(\theta, \lambda)$ e $\overline{S}_{nm}^{gr}(\theta, \lambda)$ representam as funções normalizadas $\overline{R}_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 41) e $\overline{S}_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 42) utilizando-se os coeficientes c_{n0}^{gr} (Eq. 43) e c_{nm}^{gr} (Eq. 44). Analogamente, $\overline{R}_{nm}^{ge}(\theta, \lambda)$ e $\overline{S}_{nm}^{ge}(\theta, \lambda)$ representam as funções normalizadas $\overline{R}_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 41) e $\overline{S}_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 42) utilizando-se os coeficientes c_{n0}^{ge} (Eq. 45) e c_{nm}^{ge} (Eq. 46).

....

Expansão da função inverso da distância e fórmula da decomposição

3 Anomalia de Campo Total

3.1 Definição

Considere uma área de estudo sobre uma pequena região na superfície do planeta. Em um dado intervalo curto de tempo, podemos considerar que a parcela do campo geomagnético que é produzida pelo núcleo da Terra é um vetor constante em toda a área de estudo. Este vetor pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = \|\mathbf{F}\|\, \hat{\mathbf{F}} \,, \tag{47}$$

em que $\|\mathbf{F}\|$ é a intensidade de $\mathbf{F}$ e $\hat{\mathbf{F}}$ é um vetor unitário dado por

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} cos(I)\, cos(D) \\ cos(I)\, sen(D) \\ sen(I) \end{bmatrix} , \tag{48}$$

sendo D e I a declinação e a inclinação de $\mathbf{F}$, respectivamente, de acordo com a Figura 3.

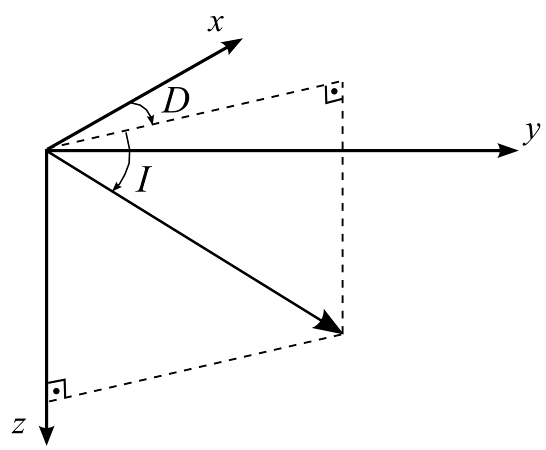

Figura 3: Representação esquemática de um vetor com declinação D e inclinação I referidas a um sistema de coordenadas Cartesianas com o eixo x apontando para o norte geográfico, y apontando para o leste e z para baixo.

A anomalia de campo total em uma determinada posição (x_i, y_i, z_i), $i = 1, ..., N$, da área de estudo é definida da seguinte forma:

$$\Delta T_i = \|\mathbf{F} + \mathbf{B}_i\| - \|\mathbf{F}\| \ , \tag{49}$$

em que $\mathbf{B}_i$ é a indução magnética produzida na posição (x_i, y_i, z_i) por corpos geológicos magnetizados em subsuperfície. Em geral, a seguinte relação é válida:

$$\|\mathbf{F}\| \gg \|\mathbf{B}_i\| \ , \ i = 1, ..., N. \tag{50}$$

Esta relação possibilita aproximar a anomalia de campo total ΔT_i (Eq. 49) por uma série de Taylor, tal como será descrito a seguir.

3.2 Anomalia de Campo Total aproximada

Seja $f(\mathbf{p})$ uma função escalar dada por:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) &= \|\mathbf{p}\| \\ &= \sqrt{\mathbf{p}^\intercal \mathbf{p}} \\ &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \ , \end{aligned} \tag{51}$$

em que $\mathbf{p}$ é um vetor dado por

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}_{3\times 1} . \tag{52}$$

A função $f(\mathbf{p})$ (Eq. 51) representa a norma Euclidiana do vetor $\mathbf{p}$ (Eq. 52), cujas componentes Cartesianas são p_x, p_y e p_z. A função pode ser expandida em torno de um ponto $\mathbf{p}_0$ por meio de uma série de Taylor até ordem 1 da seguinte forma:

$$f(\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}) \approx f(\mathbf{p}_0) + \nabla f(\mathbf{p}_0)^\intercal \Delta\mathbf{p} \ , \tag{53}$$

em que $\Delta\mathbf{p}$ é um vetor que representa uma pequena perturbação em torno de $\mathbf{p}_0$ – isto é, $\|\mathbf{p}_0\| \gg \|\Delta\mathbf{p}\|$ – e $\nabla f(\mathbf{p}_0)$ é o vetor gradiente de $f(\mathbf{p}_0)$, que é definido como:

$$\nabla f(\mathbf{p}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{p}_0)}{\partial p_x} \\ \frac{\partial f(\mathbf{p}_0)}{\partial p_y} \\ \frac{\partial f(\mathbf{p}_0)}{\partial p_z} \end{bmatrix}_{3\times 1} . \tag{54}$$

Se derivarmos a Equação 51 em relação às variáveis p_x, p_y e p_z, podemos reescrever o vetor $\nabla f(\mathbf{p}_0)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{p}_0) &= \frac{\mathbf{p}_0}{\sqrt{\mathbf{p}_0^\intercal \mathbf{p}_0}} \\ &= \hat{\mathbf{p}}_0 \ , \end{aligned} \tag{55}$$

sendo $\hat{\mathbf{p}}_0$ um vetor unitário com a mesma direção e sentido do vetor $\mathbf{p}_0$. Substituindo esta expressão (Eq. 55) na Equação 53 temos que:

$$f(\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}) \approx \|\mathbf{p}_0\| + \hat{\mathbf{p}}_0^\intercal \Delta\mathbf{p} \ . \tag{56}$$

Utilizando esta aproximação por série de Taylor (Eq. 56) e considerando que a indução magnética $\mathbf{B}_i$, $i = 1, ..., N$ (Eq. 49) é uma pequena perturbaçã no campo geomagnético $\mathbf{F}$ (Eq. 47), $-$ ou seja, que a Equação 50 é válida $-$ podemos aproximar a anomalia de campo total ΔT_i (Eq. 49) pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Delta T_i^a &= \|\mathbf{F}\| + \frac{\mathbf{F}^\intercal}{\sqrt{\mathbf{F}^\intercal \mathbf{F}}} \mathbf{B}_i - \|\mathbf{F}\| \\ &= \hat{\mathbf{F}}^\intercal \mathbf{B}_i \ , \end{aligned} \tag{57}$$

em que $\hat{\mathbf{F}}$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido do campo geomagnético $\mathbf{F}$ (Eq. 47). Vale ressaltar que esta aproximação (Eq. 57) da anomalia de campo total (Eq. 49) pressupõe a validade da relação descrita pela Equação 50.

....

3.2.1 Exercício

Seja $\mathbf{B}$ um vetor 3×1 que representa a indução magnética produzida por um corpo geológico em uma determinada posição na superfície da Terra. Este vetor pode ser escrito como:

$$\mathbf{B} = \|\mathbf{B}\| \, \hat{\mathbf{B}} \, , \tag{58}$$

em que $\|\mathbf{B}\|$ é a intensidade de $\mathbf{B}$ e $\hat{\mathbf{B}}$ é um vetor unitário dado por

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} cos(i) \, cos(d) \\ cos(i) \, sen(d) \\ sen(i) \end{bmatrix} , \tag{59}$$

sendo d e i a declinação e a inclinação de $\mathbf{B}$, respectivamente, de acordo com a Figura 3. Utilizando este vetor $\mathbf{B}$ (Eq. 58) e um vetor $\mathbf{F}$ que descreva o campo geomagnético é possível calcular a anomalia de campo total ΔT (Eq. 49) e a anomalia de campo total aproximada ΔT^a (Eq. 57). É de se esperar que, quanto maior a intensidade de $\mathbf{F}$, menos deve ser a diferença entre ΔT (Eq. 49) e ΔT^a (Eq. 57). Sendo assim:

1. Defina valores para $\|\mathbf{B}\|$, d e i (Eqs. 58 e 59) e calcule um vetor $\mathbf{B}$.

2. Defina valores para D e I (Eq. 48) e calcule um vetor unitário $\hat{\mathbf{F}}$.

3. Defina um conjunto de N valores $F = \|\mathbf{F}\|$. Estes valores devem formar uma série crescente, que começa com valores menores que $\|\mathbf{B}\|$ (definido no item 1) e terminam com valores muito maiores que $\|\mathbf{B}\|$ (definido no item 1).

4. Utilizando o vetor unitário $\hat{\mathbf{F}}$ definido no item 2 e cada um dos N valores F definidos no item anterior, calcule um vetor $\mathbf{F}$.

5. Para cada um dos N vetores $\mathbf{F}$ definidos no item anterior, calcule a anomalia de campo total ΔT (Eq. 49) e a anomalia de campo total aproximada ΔT^a (Eq. 57).

6. Faça um gráfico da anomalia de campo total predita pelas Equações 49 e 57 em função da razão $F/\|\mathbf{B}\|$.

7. A partir de qual valor $F/\|\mathbf{B}\|$ a diferença entre os valores preditos pelas Equações 49 e 57 é mínima?

. . . .