

# *Disciplina Métodos Potenciais*

Vanderlei C. Oliveira Jr.

Observatório Nacional - MCTI

Rio de Janeiro - 2014

---

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Funções harmônicas</b>	<b>1</b>
1.1	Exercício . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Harmônicos esféricos</b>	<b>3</b>
2.1	Exercício . . . . .	3
2.1.1	. . . . .	3
2.1.2	. . . . .	3
2.1.3	. . . . .	4
2.1.4	. . . . .	6

---

## 1 Funções harmônicas

### 1.1 Exercício

Seja  $f(x, y, z)$  dada por

$$f(x, y, z) = - \iiint_v \mathbf{m}(x', y', z')^\top \left( \nabla \frac{1}{r} \right) dv \quad (1)$$

em que  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$  é a distância entre o ponto  $(x, y, z)$  e o ponto  $(x', y', z')$  dentro do volume de integração  $v$  (Figura 1). Os

vetores  $\mathbf{m}(x', y', z')$  e  $\nabla \frac{1}{r}$  são dados por

$$\mathbf{m}(x', y', z') = \begin{bmatrix} m_x(x', y', z') \\ m_y(x', y', z') \\ m_z(x', y', z') \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (2)$$

e

$$\nabla \frac{1}{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \end{bmatrix}_{3 \times 1} . \quad (3)$$

Mostre que a função  $f(x, y, z)$  (Eq. 1) é harmônica e, portanto, satisfaz a equação de Laplace em coordenadas Cartesianas

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad (4)$$

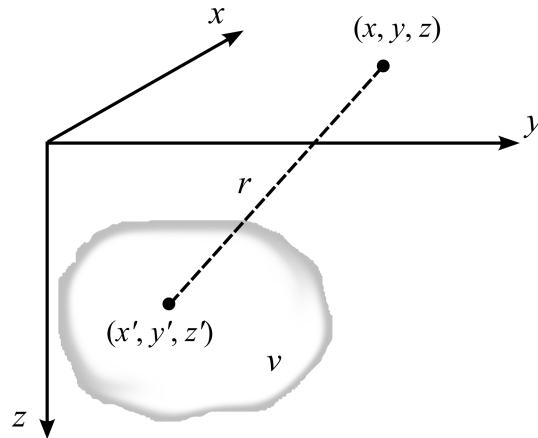


Figura 1: Distância  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$  entre um ponto  $(x, y, z)$  e outro ponto  $(x', y', z')$  de um sistema de coordenadas Cartesianas. O ponto  $(x', y', z')$  está dentro do volume de integração  $v$ .

## 2 Harmônicos esféricos

### 2.1 Exercício

#### 2.1.1

Sejam  $f_1(r)$  e  $f_2(r)$  duas funções dadas por

$$f_1(r) = r^n \quad (5)$$

e

$$f_2(r) = r^{-(n+1)} \quad , \quad (6)$$

em que  $n \geq 0$  é um número inteiro e  $r > 0$  é um número real. Mostre que  $f_1(r)$  (Eq. 5) e  $f_2(r)$  (Eq. 6) são soluções da equação diferencial

$$r^2 \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2r \frac{df(r)}{dr} - n(n+1) f(r) = 0 \quad . \quad (7)$$

#### 2.1.2

Sejam  $h_1(\lambda)$  e  $h_2(\lambda)$  duas funções dadas por

$$h_1(\lambda) = \cos(m\lambda) \quad (8)$$

e

$$h_2(\lambda) = \sin(m\lambda) \quad , \quad (9)$$

em que  $m \geq 0$  é um número inteiro e  $\lambda$  é um número real. Mostre que  $h_1(\lambda)$  (Eq. 8) e  $h_2(\lambda)$  (Eq. 9) são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2 h(\lambda)}{d\lambda^2} + \lambda^2 \frac{dh(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad . \quad (10)$$

### 2.1.3

A equação diferencial

$$\text{sen}\theta g''(\theta) + \cos\theta g'(\theta) + \left[ n(n+1) \text{sen}\theta - \frac{m^2}{\text{sen}\theta} \right] = 0 \quad (11)$$

tem como solução os polinômios associados de Legendre

$$g(\theta) = P_{nm}(\cos\theta) \quad . \quad (12)$$

Nestas Equações,  $n$  e  $m$  são inteiros maiores ou iguais a zero (sendo  $m$  menor ou igual a  $n$ ),  $g'(\theta)$  é a primeira derivada e  $g''(\theta)$  é a segunda derivada de  $g(\theta)$ . Os inteiros  $n$  e  $m$  são, respectivamente, o grau e a ordem do polinômio  $P_{nm}(\cos\theta)$ . Por conveniência, estas Equações são comumente transformadas por mudança de variáveis utilizando a relação  $t = \cos\theta$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \bar{g}(t) \\ g'(\theta) &= -\bar{g}'(t) \text{sen}\theta \\ g''(\theta) &= \bar{g}''(t) \text{sen}^2\theta - \bar{g}'(t) \cos\theta \quad . \end{aligned} \quad (13)$$

em que  $\bar{g}(t) = P_{nm}(t)$ , com primeira e segunda derivadas  $\bar{g}'(t)$  e  $\bar{g}''(t)$ , respectivamente. Substituindo as Equações 13 na equação diferencial 11, dividindo o resultado por  $\text{sen}\theta$  e utilizando a relação  $\text{sen}^2\theta = 1 - t^2$  temos que

$$(1 - t^2) \bar{g}''(t) - 2t \bar{g}'(t) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - t^2} \right] = 0 \quad . \quad (14)$$

A função  $\bar{g}(t) = P_{nm}(t)$  (polinômio associado de Legendre escrito em função da variável  $t$ ) que satisfaz a Equação 14 pode ser dada por

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2 - 1)^n \quad . \quad (15)$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
P_{11}(t) &= \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2} \frac{d^2}{dt^2}(t^2-1) \\
&= \sqrt{1-t^2} \\
&= \text{sen}\theta \quad ,
\end{aligned} \tag{16}$$

ou

$$\begin{aligned}
P_{21}(t) &= \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2^2 2!} \frac{d^3}{dt^3}(t^2-1)^2 \\
&= \frac{\sqrt{1-t^2}}{8} (16t+8t) \\
&= 3t \sqrt{1-t^2} \\
&= 3 \text{sen}\theta \cos\theta \quad .
\end{aligned} \tag{17}$$

No caso particular em que  $m = 0$ , não há raízes  $\sqrt{1-t^2}$ ,  $P_{nm}(t)$  é representado simplesmente por  $P_n(t)$  e é denominado polinômio de Legendre. A partir da Equação 15, os polinômios de Legendre podem ser escritos como

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \quad . \tag{18}$$

Alternativamente, os polinômios de Legendre (18) a partir do grau  $n = 2$  podem ser obtidos pela fórmula recursiva

$$P_n(t) = -\frac{n-1}{n} P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n} t P_{n-1}(t) \quad , \tag{19}$$

em que  $P_2(t)$  é obtido utilizando  $P_0(t)$  e  $P_1(t)$ ,  $P_3(t)$  é obtido utilizando  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$ , etc. Sendo assim, determine os polinômios de Legendre de grau  $n = 0$  até  $n = 5$  utilizando a Equação 18. Em seguida, determine os polinômios de grau  $n = 2$  até  $n = 5$  utilizando a fórmula recursiva (Eq. 19). Por último, faça um gráfico dos polinômios de Legendre  $P_n(t)$  de ordem  $n = 0$  até  $n = 5$  para  $t$  no intervalo  $[-1, 1]$ .

#### 2.1.4

Seja  $V(r, \theta, \lambda)$  uma função harmônica que depende das coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$  e  $\lambda$  (Fig. 2). Esta função satisfaz a equação de Laplace em coordenadas esféricas, que pode ser escrita como

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad . \quad (20)$$

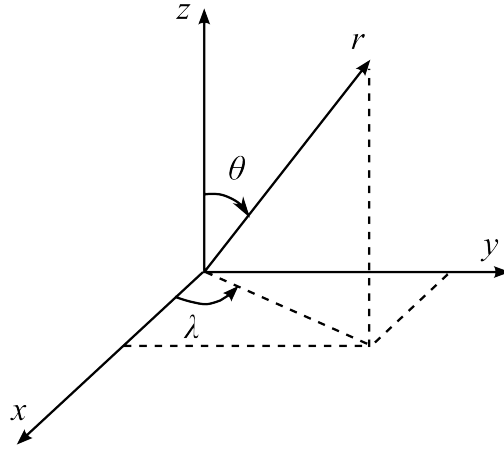


Figura 2: Sistema de coordenadas Cartesianas  $(x, y, z)$  e esféricas  $(r, \theta, \lambda)$ .

A equação de Laplace 20 pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Este método consiste em supor que a função  $V(r, \theta, \lambda)$  pode ser reescrita como o produto entre três funções independentes:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r) g(\theta) h(\lambda) \quad . \quad (21)$$

O próximo passo consiste em determinar as funções  $f(r)$ ,  $g(\theta)$  e  $h(\lambda)$ . Para tanto, basta substituir a função  $V(r, \theta, \lambda)$  dada pela Equação 21 na equação de Laplace 20. Esta substituição nos leva a conclusão de que a função  $f(r)$  (Eq.

21) satisfaz a equação diferencial 7. Tal como visto anteriormente, as funções  $f_1(r)$  (Eq. 5) e  $f_2(r)$  (Eq. 6) são soluções desta equação. Neste caso, mostra-se que a função  $V(r, \theta, \lambda)$  pode ser escrita como:

$$V(r, \theta, \lambda) = r^n g(\theta) h(\lambda) \quad , \quad (22)$$

ou

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{r^{(n+1)}} g(\theta) h(\lambda) \quad . \quad (23)$$

Estas funções são denominadas harmônicos esféricos sólidos. De forma análoga, mostra-se que a função  $h(\lambda)$  (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 10, que possui as soluções  $h_1(\lambda)$  (Eq. 8) e  $h_2(\lambda)$  (Eq. 9), e que a função  $g(\theta)$  (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 11, cuja solução é dada pelos polinômios associados de Legendre  $P_{nm}(\cos\theta)$  (Eq. 12). Os polinômios associados de Legendre  $P_{nm}(\cos\theta)$  podem ser obtidos pela Equação 15, em que  $t = \cos\theta$ . Por fim, é possível mostrar que a função  $V(r, \theta, \lambda)$  pode ser escrita de duas formas:

$$V_e(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \lambda) \quad , \quad (24)$$

ou

$$V_i(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} Y_n(\theta, \lambda) \quad , \quad (25)$$

em que

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad , \quad (26)$$

sendo  $A_{nm}$  e  $B_{nm}$  constantes e as funções  $R_{nm}(\theta, \lambda)$  e  $S_{nm}(\theta, \lambda)$  dadas por

$$R_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\lambda) \quad (27)$$

e

$$S_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \operatorname{sen}(m\lambda) \quad . \quad (28)$$

As funções  $Y_n(\theta, \lambda)$  (Eq. 26) são denominadas harmônicos (esféricos) de superfície.

As constantes  $A_{nm}$  e  $B_{nm}$  (Eq. 26) podem ser determinadas por meio das relações de ortogonalidade entre as funções  $R_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 27) e  $S_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 28). Para tanto, vamos considerar  $r = 1$  nas equações 24 e 25. Dessa maneira, estas equações são iguais a uma função  $f(\theta, \lambda)$  que pode ser escrita em função dos harmônicos de superfície (Eq. 26) da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad . \end{aligned} \quad (29)$$

De acordo com as relações de ortogonalidade entre as funções  $R_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 27) e  $S_{nm}(\theta, \lambda)$  (Eq. 28),

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad (30)$$

e

$$\iint_{\sigma} S_{nm}(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad (31)$$

para o caso em que  $nm \neq op$ . Já a integral

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad (32)$$

é sempre zero, independente dos valores de  $o$  e  $p$ . Nestas Equações,  $\iint_{\sigma} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi}$  e  $d\sigma = \operatorname{sen}\theta d\theta d\lambda$ . Por outro lado, estas integrais são diferentes de



zero quando  $nm = op$ . Neste caso,

$$\iint_{\sigma} R_{n0}^2(\theta, \lambda) d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \quad (33)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\sigma} R_{nm}^2(\theta, \lambda) d\sigma \\ \iint_{\sigma} S_{nm}^2(\theta, \lambda) d\sigma \end{aligned} \right\} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \quad (34)$$

Observe que estas integrais (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34) são avaliadas sobre a superfície  $\sigma$  de uma esfera com raio unitário.

Agora, para determinar as constantes  $A_{nm}$  (Eqs. 26 e 29), basta multiplicar os dois lados da Equação 29 por  $R_{op}(\theta, \lambda)$  (Eq. 27), integrar o resultado sobre a superfície  $\sigma$  de uma esfera com raio unitário e utilizar as relações de ortogonalidade (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34):

$$\begin{aligned} R_{op}(\theta, \lambda) f(\theta, \lambda) &= R_{op}(\theta, \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \\ &= [A_{00} R_{op}(\theta, \lambda) R_{00}(\theta, \lambda) + \\ &\quad B_{00} R_{op}(\theta, \lambda) S_{00}(\theta, \lambda) + \\ &\quad A_{10} R_{op}(\theta, \lambda) R_{10}(\theta, \lambda) + \\ &\quad B_{10} R_{op}(\theta, \lambda) S_{10}(\theta, \lambda) + \\ &\quad A_{11} R_{op}(\theta, \lambda) R_{11}(\theta, \lambda) + \\ &\quad B_{11} R_{op}(\theta, \lambda) S_{11}(\theta, \lambda) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad A_{op} R_{op}(\theta, \lambda) R_{op}(\theta, \lambda) + \\ &\quad B_{op} R_{op}(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad A_{nn} R_{op}(\theta, \lambda) R_{nn}(\theta, \lambda) + \\ &\quad B_{nn} R_{op}(\theta, \lambda) S_{nn}(\theta, \lambda)] \\ &= [\dots + A_{op} R_{op}^2(\theta, \lambda) + \dots] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) R_{op}(\theta, \lambda) d\sigma &= \left[ \dots + \iint_{\sigma} A_{op} R_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma + \dots \right] \\
&= \left[ \dots + A_{op} \iint_{\sigma} R_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma + \dots \right] \cdot \quad (36) \\
&= A_{op} \iint_{\sigma} R_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma
\end{aligned}$$

De forma análoga, para determinar as constantes  $B_{nm}$  (Eqs. 26 e 29), basta multiplicar os dois lados da Equação 29 por  $S_{op}(\theta, \lambda)$  (Eq. 28), integrar o resultado sobre a superfície  $\sigma$  de uma esfera com raio unitário e utilizar as relações de ortogonalidade (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34):

$$\iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = B_{op} \iint_{\sigma} S_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma. \quad (37)$$

A partir das Equações 36 e 37 chegamos a...