

Anomalias Magnéticas

Disciplina Métodos Potenciais

Vanderlei C. Oliveira Jr.

Observatório Nacional - MCTI

Rio de Janeiro - 2015

Conteúdo

1	Anomalia de Campo Total	3
1.1	Definição	3
1.2	Anomalia de Campo Total aproximada	4
1.2.1	Exercício	6

1 Anomalia de Campo Total

1.1 Definição

Considere uma área de estudo sobre uma pequena região na superfície do planeta. Em um dado intervalo curto de tempo, podemos considerar que a parcela do campo geomagnético que é produzida pelo núcleo da Terra é um vetor constante em toda a área de estudo. Este vetor pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = \|\mathbf{F}\| \hat{\mathbf{F}}, \quad (1)$$

em que $\|\mathbf{F}\|$ é a intensidade de \mathbf{F} e $\hat{\mathbf{F}}$ é um vetor unitário dado por

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \cos(I) \cos(D) \\ \cos(I) \sin(D) \\ \sin(I) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

sendo D e I a declinação e a inclinação de \mathbf{F} , respectivamente, de acordo com a Figura 1.

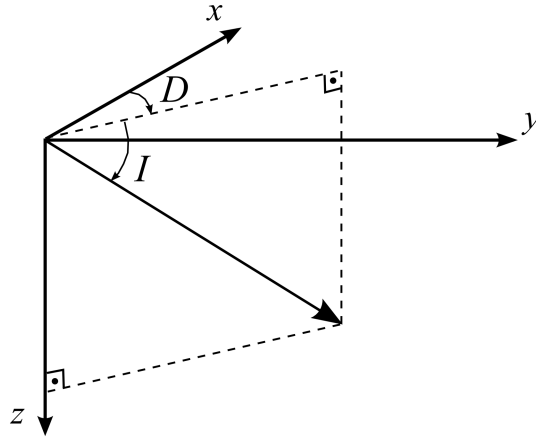


Figura 1: Representação esquemática de um vetor com declinação D e inclinação I referidas a um sistema de coordenadas Cartesianas com o eixo x apontando para o norte geográfico, y apontando para o leste e z para baixo.

A anomalia de campo total em uma determinada posição (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, N$, da área de estudo é definida da seguinte forma:

$$\Delta T_i = \|\mathbf{F} + \mathbf{B}_i\| - \|\mathbf{F}\| , \quad (3)$$

em que \mathbf{B}_i é a indução magnética produzida na posição (x_i, y_i, z_i) por corpos geológicos magnetizados em subsuperfície. Em geral, a seguinte relação é válida:

$$\|\mathbf{F}\| \gg \|\mathbf{B}_i\| , \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Esta relação possibilita aproximar a anomalia de campo total ΔT_i (Eq. 3) por uma série de Taylor, tal como será descrito a seguir.

1.2 Anomalia de Campo Total aproximada

Seja $f(\mathbf{p})$ uma função escalar dada por:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}) &= \|\mathbf{p}\| \\ &= \sqrt{\mathbf{p}^\top \mathbf{p}} \\ &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 , \end{aligned} \quad (5)$$

em que \mathbf{p} é um vetor dado por

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}_{3 \times 1} . \quad (6)$$

A função $f(\mathbf{p})$ (Eq. 5) representa a norma Euclidiana do vetor \mathbf{p} (Eq. 6), cujas componentes Cartesianas são p_x , p_y e p_z . A função pode ser expandida em torno de um ponto \mathbf{p}_0 por meio de uma série de Taylor até ordem 1 da seguinte forma:

$$f(\mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}) \approx f(\mathbf{p}_0) + \nabla f(\mathbf{p}_0)^\top \Delta \mathbf{p} , \quad (7)$$

em que $\Delta \mathbf{p}$ é um vetor que representa uma pequena perturbação em torno de \mathbf{p}_0 – isto é, $\|\mathbf{p}_0\| \gg \|\Delta \mathbf{p}\|$ – e $\nabla f(\mathbf{p}_0)$ é o vetor gradiente de $f(\mathbf{p}_0)$, que é definido como:

$$\nabla f(\mathbf{p}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{p}_0)}{\partial p_x} \\ \frac{\partial f(\mathbf{p}_0)}{\partial p_y} \\ \frac{\partial f(\mathbf{p}_0)}{\partial p_z} \end{bmatrix}_{3 \times 1} . \quad (8)$$

Se derivarmos a Equação 5 em relação às variáveis p_x , p_y e p_z , podemos reescrever o vetor $\nabla f(\mathbf{p}_0)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{p}_0) &= \frac{\mathbf{p}_0}{\sqrt{\mathbf{p}_0^\top \mathbf{p}_0}} \\ &= \hat{\mathbf{p}}_0 , \end{aligned} \quad (9)$$

sendo $\hat{\mathbf{p}}_0$ um vetor unitário com a mesma direção e sentido do vetor \mathbf{p}_0 . Substituindo esta expressão (Eq. 9) na Equação 7 temos que:

$$f(\mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}) \approx \|\mathbf{p}_0\| + \hat{\mathbf{p}}_0^\top \Delta \mathbf{p} . \quad (10)$$

Utilizando esta aproximação por série de Taylor (Eq. 10) e considerando que a indução magnética \mathbf{B}_i , $i = 1, \dots, N$ (Eq. 3) é uma pequena perturbação no campo geomagnético \mathbf{F} (Eq. 1), – ou seja, que a Equação 4 é válida – podemos aproximar a anomalia de campo total ΔT_i (Eq. 3) pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Delta T_i^a &= \|\mathbf{F}\| + \frac{\mathbf{F}^\top}{\sqrt{\mathbf{F}^\top \mathbf{F}}} \mathbf{B}_i - \|\mathbf{F}\| \\ &= \hat{\mathbf{F}}^\top \mathbf{B}_i , \end{aligned} \quad (11)$$

em que $\hat{\mathbf{F}}$ é um vetor unitário com a mesma direção e sentido do campo geomagnético \mathbf{F} (Eq. 1). Vale ressaltar que esta aproximação (Eq. 11) da anomalia de campo total (Eq. 3) pressupõe a validade da relação descrita pela Equação 4.

.....

1.2.1 Exercício

Seja \mathbf{B} um vetor 3×1 que representa a indução magnética produzida por um corpo geológico em uma determinada posição na superfície da Terra. Este vetor pode ser escrito como:

$$\mathbf{B} = \|\mathbf{B}\| \hat{\mathbf{B}}, \quad (12)$$

em que $\|\mathbf{B}\|$ é a intensidade de \mathbf{B} e $\hat{\mathbf{B}}$ é um vetor unitário dado por

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \cos(i) \cos(d) \\ \cos(i) \sin(d) \\ \sin(i) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

sendo d e i a declinação e a inclinação de \mathbf{B} , respectivamente, de acordo com a Figura ???. Utilizando este vetor \mathbf{B} (Eq. 12) e um vetor \mathbf{F} que descreva o campo geomagnético é possível calcular a anomalia de campo total ΔT (Eq. 3) e a anomalia de campo total aproximada ΔT^a (Eq. 11). É de se esperar que, quanto maior a intensidade de \mathbf{F} , menos deve ser a diferença entre ΔT (Eq. 3) e ΔT^a (Eq. 11). Sendo assim:

1. Defina valores para $\|\mathbf{B}\|$, d e i (Eqs. 12 e 13) e calcule um vetor \mathbf{B} .
2. Defina valores para D e I (Eq. 2) e calcule um vetor unitário $\hat{\mathbf{F}}$.
3. Defina um conjunto de N valores $F = \|\mathbf{F}\|$. Estes valores devem formar uma série crescente, que começa com valores menores que $\|\mathbf{B}\|$ (definido no item 1) e terminam com valores muito maiores que $\|\mathbf{B}\|$ (definido no item 1).
4. Utilizando o vetor unitário $\hat{\mathbf{F}}$ definido no item 2 e cada um dos N valores F definidos no item anterior, calcule um vetor \mathbf{F} .
5. Para cada um dos N vetores \mathbf{F} definidos no item anterior, calcule a anomalia de campo total ΔT (Eq. 3) e a anomalia de campo total aproximada

ΔT^a (Eq. 11).

6. Faça um gráfico da anomalia de campo total predita pelas Equações 3 e 11 em função da razão $F/\|\mathbf{B}\|$.
7. A partir de qual valor $F/\|\mathbf{B}\|$ a diferença entre os valores preditos pelas Equações 3 e 11 é mínima?

.....