Elementos de Teoria do Potencial

Disciplina Métodos Potenciais

Vanderlei C. Oliveira Jr.

Observatório Nacional - MCTI

Rio de Janeiro - 2015

Conteúdo

Parte I

Funções harmônicas

1 Função potencial magnético escalar

Seja $f(x, y, z)$ dada por

$$f(x, y, z) = -\iiint_v \mathbf{m}(x', y', z')^\intercal \left(\nabla \frac{1}{r} \right) dv \tag{1}$$

em que $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ é a distância entre o ponto (x, y, z) e o ponto (x', y', z') dentro do volume de integração v (Figura 1). Os vetores $\mathbf{m}(x', y', z')$ e $\nabla \frac{1}{r}$ são dados por

$$\mathbf{m}(x', y', z') = \begin{bmatrix} m_x(x', y', z') \\ m_y(x', y', z') \\ m_z(x', y', z') \end{bmatrix}_{3 \times 1} \tag{2}$$

e

$$\nabla \frac{1}{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad . \tag{3}$$

....

1.0.1 Exercício

Mostre que a função $f(x, y, z)$ (Eq. 1) é harmônica e, portanto, satisfaz a equação de Laplace em coordenadas Cartesianas

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad . \tag{4}$$

. . . .

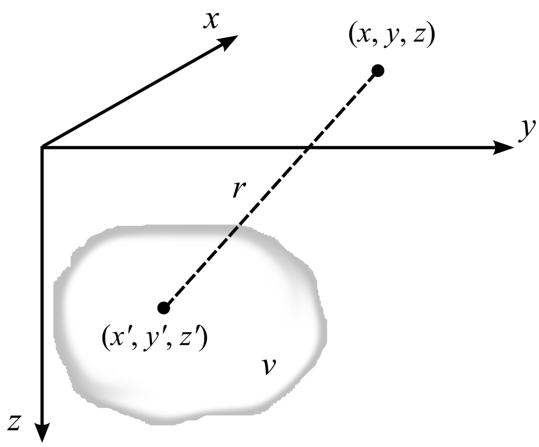

Figura 1: Distância $r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ entre um ponto (x, y, z) e outro ponto (x', y', z') de um sistema de coordenadas Cartesianas. O ponto (x', y', z') está dentro do volume de integração v.

Parte II

Harmônicos esféricos

2 Equações diferenciais auxiliares

2.1 Equações de r

Sejam $f_1(r)$ e $f_2(r)$ duas funções dadas por

$$f_1(r) = r^n \tag{5}$$

e

$$f_2(r) = r^{-(n+1)} \quad , \tag{6}$$

em que $n \geqslant 0$ é um número inteiro e $r > 0$ é um número real.

. . . .

2.1.1 Exercício

Mostre que $f_1(r)$ (Eq. 5) e $f_2(r)$ (Eq. 6) são soluções da equação diferencial

$$r^2 \, \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2\, r \, \frac{d\, f(r)}{dr} - n(n+1)\, f(r) = 0 \quad . \tag{7}$$

. . . .

2.2 Equações de λ

Sejam $h_1(\lambda)$ e $h_2(\lambda)$ duas funções dadas por

$$h_1(\lambda) = \cos(m\lambda) \tag{8}$$

e

$$h_2(\lambda) = \mathrm{sen}(m\lambda) \quad , \tag{9}$$

em que $m \geqslant 0$ é um número inteiro e λ é um número real.

....

2.2.1 Exercício

Mostre que $h_1(\lambda)$ (Eq. 8) e $h_2(\lambda)$ (Eq. 9) são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2h(\lambda)}{d\lambda^2} + m^2 h(\lambda) = 0 \quad . \tag{10}$$

....

2.3 Polinômios de Legendre

A equação diferencial

$$\mathrm{sen}\theta\, g''(\theta) + \cos\theta\, g'(\theta) + \left[n(n+1)\,\mathrm{sen}\theta - \frac{m^2}{\mathrm{sen}\theta} \right] = 0 \tag{11}$$

tem como solução os *Polinômios associados de Legendre*

$$g(\theta) = P_{nm}(\cos\theta) \quad . \tag{12}$$

Nestas Equações, n e m são inteiros maiores ou iguais a zero (sendo m menor ou igual a n), $g'(\theta)$ é a primeira derivada e $g''(\theta)$ é a segunda derivada de $g(\theta)$. Os inteiros n e m são, respectivamente, o grau e a ordem do polinômio $P_{nm}(\cos\theta)$. Por conveniência, estas Equações são comumente transformadas por mudança de variáveis utilizando a relação $t = \cos(\theta)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \overline{g}(t) \\ g'(\theta) &= -\overline{g}'(t)\,\mathrm{sen}\theta \\ g''(\theta) &= \overline{g}''(t)\,\mathrm{sen}^2\theta - \overline{g}'(t)\cos\theta \quad . \end{aligned} \tag{13}$$

em que $\overline{g}(t) = P_{nm}(t)$, com primeira e segunda derivadas $\overline{g}'(t)$ e $\overline{g}''(t)$, respectivamente. Substituindo as Equações 13 na equação diferencial 11, dividindo o resultado por senθ e utilizando a relação $\mathrm{sen}^2\theta = 1 - t^2$ temos que

$$(1-t^2)\,\overline{g}''(t) - 2\,t\,\overline{g}'(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right] = 0 \quad . \tag{14}$$

A função $\overline{g}(t) = P_{nm}(t)$ (polinômio associado de Legendre escrito em função da viariável t) que satisfaz a Equação 14 pode ser dada por

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n\,n!}\,(1-t^2)^{m/2}\,\frac{d^{n+m}}{d\,t^{n+m}}(t^2-1)^n \quad . \tag{15}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2}\,\frac{d^2}{d\,t^2}(t^2-1) \\ &= \sqrt{1-t^2} \\ &= \mathrm{sen}\theta \quad , \end{aligned} \tag{16}$$

ou

$$\begin{aligned} P_{21}(t) &= \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2^2\,2!}\,\frac{d^3}{d\,t^3}(t^2-1)^2 \\ &= \frac{\sqrt{1-t^2}}{8}\,(16\,t + 8\,t) \\ &= 3\,t\,\sqrt{1-t^2} \\ &= 3\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta \quad . \end{aligned} \tag{17}$$

No caso particular em que $m = 0$, não há raízes $\sqrt{1-t^2}$, $P_{nm}(t)$ é representado simplesmente por $P_n(t)$ e é denominado polinômio de Legendre. A partir da

Equação 15, os polinômios de Legendre podem ser escritos como

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{d\,t^n}(t^2 - 1)^n \quad . \tag{18}$$

Alternativamente, os polinômios de Legendre (18) a partir do grau $n = 2$ podem ser obtidos pela fórmula recursiva

$$P_n(t) = -\,\frac{n-1}{n}\, P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n}\, t\, P_{n-1}(t) \quad , \tag{19}$$

em que $P_2(t)$ é obtido utilizando $P_0(t)$ e $P_1(t)$, $P_3(t)$ é obtido utilizando $P_1(t)$ e $P_2(t)$, etc.

. . . .

2.3.1 Exercício

Determine:

(i) os polinômios associados de Legendre de grau $n = 0$ e ordem $m = 0$ até grau $n = 3$ e ordem $m = 3$ utilizando a Equação 15.

(ii) os polinômios de Legendre de grau $n = 0$ até $n = 5$ utilizando a Equação 18.

(iii) os polinômios de Legendre de grau $n = 2$ até $n = 5$ utilizando a fórmula recursiva representada pela Equação 19.

2.3.2 Exercício

Faça um gráfico dos polinômios de Legendre $P_n(t)$ de grau $n = 0$ até $n = 5$ para t no intervalo $[-1, 1]$.

. . . .

3 Equação de Laplace em coordenadas esféricas

Seja $V(r, \theta, \lambda)$ uma função harmônica que depende das coordenadas esféricas r, θ e λ (Fig. 2). Esta função satisfaz a equação de Laplace em coordenadas esféricas, que pode ser escrita como

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2\, r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad . \tag{20}$$

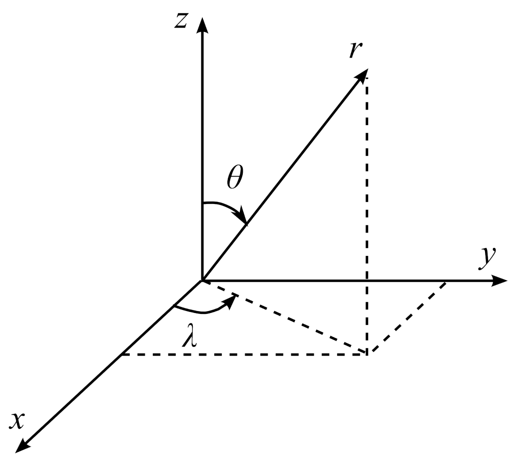

Figura 2: Sistema de coordenadas Cartesianas (x, y, z) e esféricas (r, θ, λ).

3.1 Solução da Equação de Laplace em coordenadas esféricas

A equação de Laplace 20 pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Este método consiste em supor que a função $V(r, \theta, \lambda)$ pode ser reescrita como o produto entre três funções independentes:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r)\, g(\theta)\, h(\lambda) \quad . \tag{21}$$

O próximo passo consiste em determinar as funções $f(r)$, $g(\theta)$ e $h(\lambda)$. Para tanto, basta substituir a função $V(r,\theta,\lambda)$ dada pela Equação 21 na equação de Laplace 20. Esta substituição nos leva a conclusão de que a função $f(r)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 7. Tal como visto anteriormente, as funções $f_1(r)$ (Eq. 5) e $f_2(r)$ (Eq. 6) são soluções desta equação. Neste caso, mostra-se que a função $V(r,\theta,\lambda)$ pode ser escrita como:

$$V(r,\theta,\lambda) = r^n \, g(\theta) \, h(\lambda) \quad , \tag{22}$$

ou

$$V(r,\theta,\lambda) = \frac{1}{r^{(n+1)}} \, g(\theta) \, h(\lambda) \quad . \tag{23}$$

De forma análoga, mostra-se que a função $h(\lambda)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 10, que possui as soluções $h_1(\lambda)$ (Eq. 8) e $h_2(\lambda)$ (Eq. 9), e que a função $g(\theta)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 11, cuja solução é dada pelos polinômios associados de Legendre $P_{nm}(\cos\theta)$ (Eq. 12). Os polinômios associados de Legendre $P_{nm}(\cos\theta)$ podem ser obtidos pela Equação 15, em que $t = \cos\theta$. Por fim, é possível mostrar que a função $V(r,\theta,\lambda)$ pode ser escrita de duas formas:

$$V_e(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \, Y_n(\theta,\lambda) \quad , \tag{24}$$

ou

$$V_i(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \, Y_n(\theta,\lambda) \quad , \tag{25}$$

em que

$$Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{m=0}^{n} \left[A_{nm} \, R_{nm}(\theta,\lambda) + B_{nm} \, S_{nm}(\theta,\lambda) \right] \quad , \tag{26}$$

sendo A_{nm} e B_{nm} constantes e as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ dadas por

$$R_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\, \lambda) \tag{27}$$

e

$$S_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \,\mathrm{sen}(m\, \lambda) \quad . \tag{28}$$

As funções $V_e(r, \theta, \lambda)$ (Eq. 24) e $V_i(r, \theta, \lambda)$ (Eq. 25) são denominadas *harmônicos esféricos sólidos*. Já as funções $Y_n(\theta, \lambda)$ (Eq. 26) são denominadas *harmônicos (esféricos) de superfície*.

3.2 Relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ e $S_{nm}(\theta, \lambda)$

As expressões analíticas que descrevem as constantes A_{nm} e B_{nm} (Eq. 26) podem ser determinadas por meio das relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 27) e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 28). Para tanto, vamos considerar $r = 1$ nas equações 24 e 25. Dessa maneira, estas equações são iguais a uma função $f(\theta, \lambda)$ que pode ser escrita em função dos harmônicos de superfície (Eq. 26) da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[A_{nm}\, R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm}\, S_{nm}(\theta, \lambda) \right] \ . \end{aligned} \tag{29}$$

De acordo com as relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 27) e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 28),

$$\iint\limits_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda)\, R_{op}(\theta, \lambda)\, d\sigma = 0 \tag{30}$$

e

$$\iint_{\sigma} S_{nm}(\theta,\lambda)\, S_{op}(\theta,\lambda)\, d\sigma = 0 \tag{31}$$

para o caso em que $nm \neq op$. Já a integral

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta,\lambda)\, S_{op}(\theta,\lambda)\, d\sigma = 0 \tag{32}$$

é sempre zero, independente dos valores de o e p. Nestas Equações, $\iint_{\sigma} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi}$ e $d\sigma = sen\theta\, d\theta d\lambda$. Por outro lado, estas integrais são diferentes de zero quando $nm = op$. Neste caso,

$$\iint_{\sigma} R_{n0}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma = \frac{4\,\pi}{2\,n+1} \tag{33}$$

e

$$\left.\begin{array}{l} \iint_{\sigma} R_{nm}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma \\ \iint_{\sigma} S_{nm}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma \end{array}\right\} = \frac{2\,\pi}{2\,n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,. \tag{34}$$

Observe que estas integrais (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34) são avaliadas sobre a superfície σ de uma esfera com raio unitário, cuja área é igual a $4\,\pi$.

3.3 Determinação das expressões analíticas que descrevem as constantes A_{nm} e B_{nm}

Para determinar as expressões analíticas que descrevem as constantes A_{nm} (Eqs. 26 e 29), basta multiplicar os dois lados da Equação 29 por $R_{op}(\theta,\lambda)$ (Eq. 27), integrar o resultado sobre a superfície σ de uma esfera com raio unitário e utilizar as relações de ortogonalidade (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34):

$$
\begin{aligned}
R_{op}(\theta,\lambda)\, f(\theta,\lambda) = R_{op}(\theta,\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} [A_{nm}\, R_{nm}(\theta,\lambda) + B_{nm}\, S_{nm}(\theta,\lambda)] \\
= [A_{00}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, R_{00}(\theta,\lambda) + \\
B_{00}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, S_{00}(\theta,\lambda) + \\
A_{10}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, R_{10}(\theta,\lambda) + \\
B_{10}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, S_{10}(\theta,\lambda) + \\
A_{11}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, R_{11}(\theta,\lambda) + \\
B_{11}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, S_{11}(\theta,\lambda) + \\
\vdots \\
A_{op}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, R_{op}(\theta,\lambda) + \\
B_{op}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, S_{op}(\theta,\lambda) + \\
\vdots \\
A_{nn}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, R_{nn}(\theta,\lambda) + \\
B_{nn}\, R_{op}(\theta,\lambda)\, S_{nn}(\theta,\lambda)] \\
= \left[\ldots + A_{op}\, R_{op}^2(\theta,\lambda) + \ldots \right]
\end{aligned}
\tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_\sigma f(\theta,\lambda)\, R_{op}(\theta,\lambda)\, d\sigma &= \left[\ldots + \iint_\sigma A_{op}\, R_{op}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma + \ldots \right] \\
&= \left[\ldots + A_{op} \iint_\sigma R_{op}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma + \ldots \right] . \\
&= A_{op} \iint_\sigma R_{op}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma
\end{aligned}
\tag{36}
$$

De forma análoga, para obter as expressões analíticas que descrevem as constantes B_{nm} (Eqs. 26 e 29), basta multiplicar os dois lados da Equação 29 por $S_{op}(\theta,\lambda)$ (Eq. 28), integrar o resultado sobre a superfície σ de uma esfera com raio unitário e utilizar as relações de ortogonalidade (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34):

$$\iint_\sigma f(\theta,\lambda)\, S_{op}(\theta,\lambda)\, d\sigma = B_{op} \iint_\sigma S_{op}^2(\theta,\lambda)\, d\sigma \,. \tag{37}$$

A partir das Equações 36 e 37 temos que

$$A_{n0} = \frac{2\,n+1}{4\,\pi} \iint_\sigma f(\theta,\lambda)\, R_{n0}(\theta,\lambda)\, d\sigma \;, \tag{38}$$

$$A_{nm} = \frac{2\,n+1}{2\,\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_\sigma f(\theta,\lambda)\, R_{nm}(\theta,\lambda)\, d\sigma \;,\; m \neq 0\,, \tag{39}$$

e

$$B_{nm} = \frac{2\,n+1}{2\,\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_\sigma f(\theta,\lambda)\, S_{nm}(\theta,\lambda)\, d\sigma \;,\; m \neq 0\,. \tag{40}$$

3.4 Normalização das funções $R_{nm}(\theta,\lambda)$ e $S_{nm}(\theta,\lambda)$

Em geofísica, a descrição do campo de gravidade e do campo geomagnético é feita por meio dos harmônicos esféricos (Eqs. 24 e 25). Contudo, por conveniência, a descrição destes campos não é feita utilizando-se as funções $R_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 27) e $S_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 28). Ao invés destas funções, são utilizadas as funções normalizadas

$$\overline{R}_{nm}(\theta,\lambda) = c_{nm}\, R_{nm}(\theta,\lambda) \tag{41}$$

e

$$\overline{S}_{nm}(\theta,\lambda) = c_{nm}\, S_{nm}(\theta,\lambda)\,. \tag{42}$$

Utilizando as Equações 27 e 28, é possível reescrever as Equações 41 e 42 em função dos Polinômios associados de Legendre (Eqs. 12 e 15) da seguinte forma

$$\overline{R}_{nm}(\theta,\lambda) = \overline{P}_{nm}(\cos\theta)\, \cos(m\,\lambda) \tag{43}$$

e

$$\overline{S}_{nm}(\theta,\lambda) = \overline{P}_{nm}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}(m\,\lambda)\;, \tag{44}$$

em que

$$\overline{P}_{nm}(\cos\theta) = c_{nm}\,P_{nm}(\cos\theta) \tag{45}$$

são os *Polinômios associados de Legendre plenamente normalizados.*

Para descrever o campo de gravidade, os coeficientes c_{nm} (Eqs. 41 e 42) são

$$c_{n0}^{gr} = \sqrt{2\,n+1} \tag{46}$$

e

$$c_{nm}^{gr} = \sqrt{2\,(2\,n+1)\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\;, \quad m \neq 0\,. \tag{47}$$

Para descrever o campo geomagnétco, os coeficientes c_{nm} (Eqs. 41 e 42) são

$$c_{n0}^{ge} = 1 \tag{48}$$

e

$$c_{nm}^{ge} = \sqrt{2\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\;, \quad m \neq 0\,. \tag{49}$$

....

3.4.1 Exercício

Utilizando as relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 30) e $S_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 31), determine

$$\frac{1}{4\,\pi}\iint\limits_{\sigma}\left[\overline{R}_{nm}^{gr}(\theta,\lambda)\right]^2\,d\sigma\;,$$

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}\left[\overline{S}^{gr}_{nm}(\theta,\lambda)\right]^2 d\sigma \, ,$$

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}\left[\overline{R}^{ge}_{nm}(\theta,\lambda)\right]^2 d\sigma$$

e

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}\left[\overline{S}^{ge}_{nm}(\theta,\lambda)\right]^2 d\sigma \, ,$$

em que $\iint_{\sigma} = \int_{\lambda=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}$ e $d\sigma = \text{sen}\theta\, d\theta d\lambda$. Nestas integrais, $\overline{R}^{gr}_{nm}(\theta,\lambda)$ e $\overline{S}^{gr}_{nm}(\theta,\lambda)$ representam as funções normalizadas $\overline{R}_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 41) e $\overline{S}_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 42) utilizando-se os coeficientes c^{gr}_{n0} (Eq. 46) e c^{gr}_{nm} (Eq. 47). Analogamente, $\overline{R}^{ge}_{nm}(\theta,\lambda)$ e $\overline{S}^{ge}_{nm}(\theta,\lambda)$ representam as funções normalizadas $\overline{R}_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 41) e $\overline{S}_{nm}(\theta,\lambda)$ (Eq. 42) utilizando-se os coeficientes c^{ge}_{n0} (Eq. 48) e c^{ge}_{nm} (Eq. 49).

....

3.5 Descrição do campo de gravidade em harmônicos esféricos

A força total exercida sobre um corpo de prova que possui massa m_0 e está em repouso sobre a superfície da Terra é a soma da *força gravitacional* e da *força centrífuga*. Se dividirmos a força total pela massa m_0 do corpo de prova, o resultado é uma grandeza com unidade de aceleração denominada *aceleração de gravidade* ou *vetor gravidade*. O vetor gravidade é a soma entre uma aceleração de origem gravitacional e outra devido ao movimento de rotação da Terra. Por conveniência, a primeira é denominada *aceleração gravitacional* e a outra *aceleração centrífuga*. Do ponto de vista físico, o vetor gravidade é o gradiente de uma função escalar denominada *potencial de gravidade*. Analogamente, a aceleração gravitacional e a centrífuga são, respectivamente, o gradiente do *potencial gravitacional* e o gradiente do *potencial centrífugo*. O potencial gravitacional é uma função harmônica e, portanto, satisfaz a equação de Laplace. Devido a natureza física do problema, o potencial gravitacional pode ser descrito em termos dos harmônicos esféricos sólidos representados pela Equação 25. Sendo assim, de acordo com as Equações 25-28, o potencial gravitacional $V(r, \theta, \lambda)$ em um ponto (r, θ, λ) de um sistema de coordenadas esféricas (Fig. 2) pode ser escrito como:

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{r^{(n+1)}} \left[A_{nm} \, R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} \, S_{nm}(\theta, \lambda) \right] . \tag{50}$$

Tal como mencionado anteriormente, a descrição do campo de gravidade não é feita utilizando-se as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 27) e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 28), mas sim as funções normalizadas $\overline{R}_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 41) e $\overline{S}_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 42), cujos coeficientes de normalização $c_{nm} = c_{nm}^{gr}$ são mostrados nas Equações 46 e 47. Assim, o potencial gravitacional $V(r, \theta, \lambda)$ (Eq. 50) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{r^n} \left[\frac{A_{nm}}{c_{nm}^{gr} \, GM} \, \overline{R}_{nm}(\theta, \lambda) + \frac{B_{nm}}{c_{nm}^{gr} \, GM} \, \overline{S}_{nm}(\theta, \lambda) \right] , \tag{51}$$

em que a constante GM representa o produto entre a constante gravitacional G e a massa M da Terra. Note que, para obter a Equação 51, é necessário multiplicar e dividir a Equação 50 pela distância radial r (Fig. 2). Finalmente, se multiplicarmos e dividirmos cada elemento do somatório da Equação 51 pelo raio médio da Terra R e substituirmos as Equações 43 e 44, o potencial gravitacional é representado por:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r} \right)^n \overline{P}_{nm}(\cos\theta) \, \left[\overline{A}_{nm} \cos(m \, \lambda) + \overline{B}_{nm} \, \mathrm{sen}(m \, \lambda) \right] , \tag{52}$$

em que $\overline{P}_{nm}(\cos\theta)$ são os Polinômios associados de Legendre plenamente normalizados (Eq. 45), cujos coeficientes de normalização $c_{nm} = c_{nm}^{gr}$ são mostrados nas Equações 46 e 47. Note que, diferente da Equação 51, o somatório na Equação 52 não vai até $n = \infty$, mas sim até um grau máximo $n = n_{max}$ finito. Um conjunto de coeficientes $\overline{A}_{nm}$ e $\overline{B}_{nm}$ provenientes da expansão em harmônicos esféricos sólidos representada pela Equação 52 até um grau máximo $n = n_{max}$ constitui um *modelo global do campo de gravidade*.

3.6 Expansão da função inverso da distância e fórmula da decomposição

Considere dois pontos P e P' separados por um ângulo ψ e uma distância l (Figura 3). De acordo com a lei dos cossenos, a distância l é dada por

$$l^2 = r^2 - r'^2 - 2\, r\, r'\cos\psi\ , \tag{53}$$

em que

$$\cos\psi = \cos\theta\cos\theta' + \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\theta'\cos(\lambda' - \lambda)\ . \tag{54}$$

A partir da Equação 53, é possível escrever

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - r'^2 - 2\, r\, r'\cos\psi}}\ . \tag{55}$$

Sabe-se que, se $r' < r$, a função $1/l$ (Eq. 55) pode ser descrita pela expansão

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi)\ , \tag{56}$$

em que $P_n(t) = P_n(\cos\psi)$ (Eqs. 18 e 19) são os Polinômios de Legendre. Por questões práticas, os Polinômios de Legendre $P_n(\cos\psi)$ são reescritos em função das coordenadas esféricas (r, θ, λ) a partir da *fórmula da decomposição*:

$$P_n(\cos\psi) = \tag{57}$$

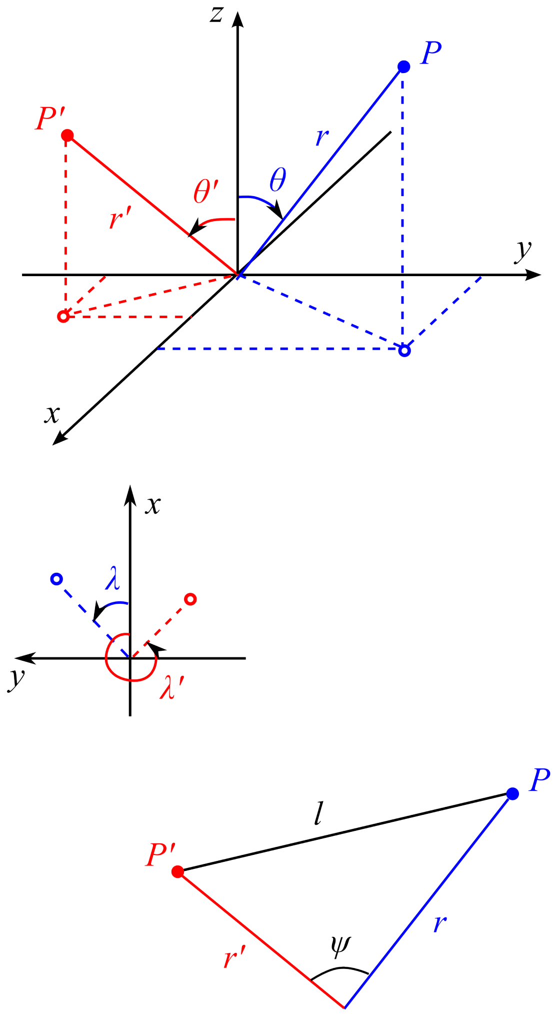

Figura 3: Distância l entre um ponto P e outro ponto P' de um sistema de coordenadas esféricas.