1 Fundamentos teóricos

Considere um sistema de coordenadas Cartesianas com origem na superfície da Terra e eixo z apontado para baixo (Fig. 1). Seja $V(x,y,z)$ o potencial magnético escalar produzido, no ponto de observação (x,y,z) (referido ao sistema da fonte, Fig. 1), por uma fonte 3D com volume v e direção de magnetização total uniforme. Neste caso $V(x,y,z)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$V(x,y,z) = -\nabla U(x,y,z) \cdot \hat{\mathbf{m}} \, , \tag{1}$$

em que $\hat{\mathbf{m}}$ é um vetor unitário que define a direção de magnetização total da fonte,

$$U(x,y,z) = \gamma_m \iiint\limits_{v} m(x',y',z') \, \frac{1}{r} \, dv' \, , \tag{2}$$

γ_m é uma constante, $m(x',y',z')$ é a intensidade de magnetização total no ponto (x',y',z') dentro da fonte, ∇ é o operador gradiente aplicado às coordenadas x, y e z do ponto de observação e

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \, . \tag{3}$$

O campo de indução magnética produzido pela fonte é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x,y,z) &= -\nabla V(x,y,z) \\ &= \mathbf{H}(x,y,z) \cdot \hat{\mathbf{m}} \end{aligned} \, , \tag{4}$$

em que

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \partial_{xx}U & \partial_{xy}U & \partial_{xz}U \\ \partial_{xy}U & \partial_{yy}U & \partial_{yz}U \\ \partial_{xz}U & \partial_{yz}U & \partial_{zz}U \end{bmatrix} \, , \tag{5}$$

$\partial_{\beta\eta}U \equiv \frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial_\beta \partial_\eta}$, $\beta = x, y, z$, $\eta = x, y, z$, são derivadas segundas da função $U(x,y,z)$ (eq. 2) em relação as coordenadas x, y e z do ponto de observação.

Considere que a fonte é 2D, com extensão infinita na direção y do Sistema da fonte (representado em preto na Fig. 1). Neste caso, $U(x,y,z)$ (eq. 2) é reescrito da seguinte forma:

$$U(x,y,z) = \gamma_m \iint\limits_{S} m(x',z') \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \, dy' \right] dx'dz' \, , \tag{6}$$

em que S é a área da seção vertical da fonte no plano $x-z$, $m(x',z')$ é a intensidade de magnetização, que varia apenas ao longo dos eixos x e z, e

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}} \, . \tag{7}$$

Na eq. 6, o termo entre colchetes é dado por

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\ell} \, dy' = 2 \, \log \frac{1}{\ell} \, . \tag{8}$$

Substituindo o limite acima (eq. 8) na equação 6, obtemos

$$\tilde{U}(x,z) = 2 \, \gamma_m \iint\limits_{S} m(x',z') \log \frac{1}{\ell} \, dx'dz' \, . \tag{9}$$

Note que a função $U(x,y,z)$ (eq. 2) associada a uma fonte magnética 3D torna-se a função $\tilde{U}(x,z)$ (eq. 9), que varia apenas ao longo dos eixos x e z do sistema de coordenadas da fonte (Fig. 1). Consequentemente, o potencial magnético escalar $V(x,y,z)$ (eq. 1) e a indução magnética $\mathbf{B}(x,y,z)$ (eq. 4) tornam-se

$$\tilde{V}(x,z) = -\nabla \tilde{U}(x,z) \cdot \hat{\mathbf{m}} \tag{10}$$

e

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{B}}(x,z) &= -\nabla \tilde{V}(x,z) \\ &= \tilde{\mathbf{H}}(x,z) \cdot \hat{\mathbf{m}}\end{aligned} \quad , \tag{11}$$

em que

$$\tilde{\mathbf{H}}(x,z) = \begin{bmatrix} \partial_{xx}\tilde{U} & 0 & \partial_{xz}\tilde{U} \\ 0 & 0 & 0 \\ \partial_{xz}\tilde{U} & 0 & \partial_{zz}\tilde{U} \end{bmatrix} , \tag{12}$$

e $\partial_{\beta\eta}\tilde{U} \equiv \frac{\partial^2 \tilde{U}(x,z)}{\partial_\beta \partial_\eta}$, $\beta = x, z$, $\eta = x, z$, são derivadas segundas da função $\tilde{U}(x,z)$ (eq. 9) em relação as coordenadas x e z do ponto de observação.

Note que a segunda linha da matriz $\tilde{\mathbf{H}}(x,z)$ (eq. 12) é formado por zeros. Isso significa que, no Sistema da fonte (Fig. 1), a componente y da indução magnética $\tilde{\mathbf{B}}(x,z)$ (eq. 11) é nula, ainda que a componente y da magnetização total da fonte seja não nula. Para entender esta propriedade, vamos primeiro definir o vetor unitário

$$\hat{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \cos I \, \cos D \\ \cos I \, \sin D \\ \sin I \end{bmatrix} , \tag{13}$$

que é definido em função da inclinação I e da declinação D da magnetização total da fonte, no Sistema dos dados (Fig. 1). Para obter a magnetização total da fonte no Sistema da fonte, é necessário transformar o vetor unitário $\hat{\mathbf{m}}$ (eq. 13) no vetor unitário $\hat{\mathbf{m}}$ (eqs. 10 e 11). Esta transformação é dada por:

$$\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{m}}_{\parallel} + \hat{\mathbf{m}}_{\perp} , \tag{14}$$

em que

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{m}}_{\parallel} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{m}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(D+\alpha) \, \cos I \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{15}$$

é um vetor paralelo à fonte (definido ao longo do eixo y do Sistema da fonte),

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{m}}_{\perp} &= \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{m}} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(D+\alpha) \, \cos I \\ 0 \\ \sin I \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{16}$$

é perpendicular à fonte 2D (no Sistema da fonte) e α é o azimute da fonte 2D (Fig. 1). Uma expressão alternativa pode ser obtida em função do ângulo θ (Fig. 1). Utilizando as eqs. 14–16, é possível reescrever a indução magnética $\tilde{\mathbf{B}}(x,z)$ (eq. 11) da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{B}}(x,z) = \tilde{\mathbf{H}}(x,z) \cdot \hat{\mathbf{m}}_{\parallel} + \tilde{\mathbf{H}}(x,z) \cdot \hat{\mathbf{m}}_{\perp} \quad . \tag{17}$$

Como a segunda linha da matriz $\tilde{\mathbf{H}}(x,z)$ (eq. 12) é formada por zeros, o termo que depende de $\hat{\mathbf{m}}_{\parallel}$ (eq. 15) da eq. 17 é igual ao vetor nulo. Portanto, a indução magnética $\tilde{\mathbf{B}}(x,z)$ produzida pela fonte 2D, no Sistema da fonte (Fig. 1), é dada por

$$\tilde{\mathbf{B}}(x,z) = \tilde{\mathbf{H}}(x,z) \cdot \hat{\mathbf{m}}_{\perp} , \tag{18}$$

em que $\hat{\mathbf{m}}_{\perp}$ (eq. 16) define a componente da magnetização perpendicular à fonte. Note que $\hat{\mathbf{m}}_{\perp}$ depende do azimute α da fonte, bem como da inclinação I e da declinação D de sua magnetização total, ambas definidas no Sistema dos dados (Fig. 1).

As equações 14–16 relacionam os vetores $\hat{\mathbf{m}}$ (eq. 13) e $\hat{\mathbf{m}}$ (eqs. 10 e 11), que são definidos, respectivamente, no Sistema dos dados e da fonte (Fig. 1). Da mesma forma, é possível estabelecer uma relação entre a indução magnética $\tilde{\mathbf{B}}(x,z)$ (eqs. 11, 17 e 18), definida no Sistema da fonte, e a indução magnética $\mathbf{B}(x,y,z)$, definida no Sistema dos dados. Esta relação é dada por:

$$\tilde{\mathbf{B}}(x,z) = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B}(x,y,z) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B}(x,y,z) \quad , \tag{19}$$

em que o primeiro termo do lado direito representa a componente da indução magnética perpendicular e o segundo termo é a componente paralela à fonte 2D. É importante ressaltar que a indução magnética $\mathbf{B}(x,y,z)$ produzida pela fonte 2D, no Sistema dos dados, não possui nenhuma componente nula. Já a indução $\tilde{\mathbf{B}}(x,z)$ produzida pela fonte 2D no Sistema da fonte possui a componente y nula.

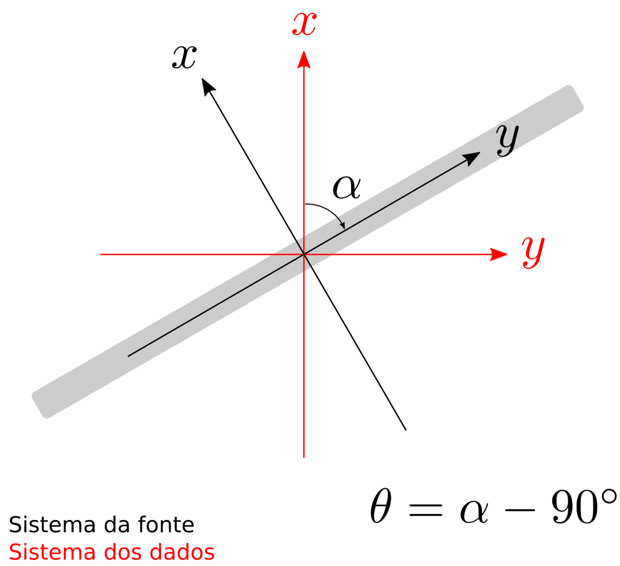

Figure 1: Sistemas de coordenadas Cartesianas da fonte (em preto) e dos dados (em vermelho). Ambos os sistemas possuem eixo z apontado para o interior da Terra (em direção ao plano da folha/tela). A origem deste sistema está localizada sobre uma fonte magnética 2D, cuja projeção no plano horizontal está representada em cinza. Esta fonte tem azimute α (positivo no sentido horário).