

Elementos de Teoria do Potencial

Disciplina Métodos Potenciais

Vanderlei C. Oliveira Jr. Observatório Nacional - MCTI Rio de Janeiro - 2015
--

Conteúdo

1	Funções harmônicas	3
1.1	Função potencial magnético escalar	3
1.1.1	Exercício	3
2	Harmônicos esféricos	5
2.1	Equações diferenciais de r	5
2.1.1	Exercício	5
2.2	Equações diferenciais de λ	5
2.2.1	Exercício	6
2.3	Polinômios de Legendre	6
2.3.1	Exercício	8
2.3.2	Exercício	8
2.4	Equação de Laplace em coordenadas esféricas	8
2.4.1	Exercício	14

1 Funções harmônicas

1.1 Função potencial magnético escalar

Seja $f(x, y, z)$ dada por

$$f(x, y, z) = - \iiint_v \mathbf{m}(x', y', z')^\top \left(\nabla \frac{1}{r} \right) dv \quad (1)$$

em que $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ é a distância entre o ponto (x, y, z) e o ponto (x', y', z') dentro do volume de integração v (Figura 1). Os vetores $\mathbf{m}(x', y', z')$ e $\nabla \frac{1}{r}$ são dados por

$$\mathbf{m}(x', y', z') = \begin{bmatrix} m_x(x', y', z') \\ m_y(x', y', z') \\ m_z(x', y', z') \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (2)$$

e

$$\nabla \frac{1}{r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \end{bmatrix}_{3 \times 1} . \quad (3)$$

.....

1.1.1 Exercício

Mostre que a função $f(x, y, z)$ (Eq. 1) é harmônica e, portanto, satisfaz a equação de Laplace em coordenadas Cartesianas

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

.....

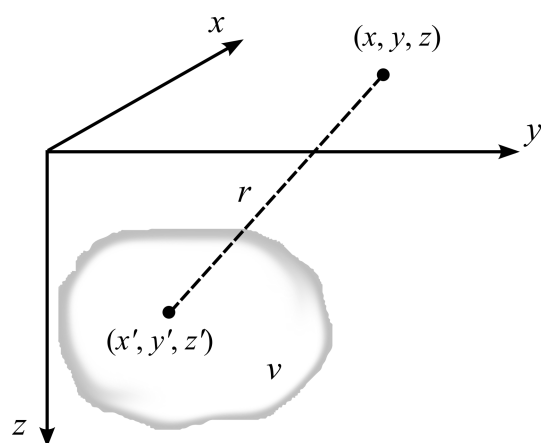


Figura 1: Distância $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ entre um ponto (x, y, z) e outro ponto (x', y', z') de um sistema de coordenadas Cartesianas. O ponto (x', y', z') está dentro do volume de integração v .

2 Harmônicos esféricos

2.1 Equações diferenciais de r

Sejam $f_1(r)$ e $f_2(r)$ duas funções dadas por

$$f_1(r) = r^n \tag{5}$$

e

$$f_2(r) = r^{-(n+1)} \quad , \tag{6}$$

em que $n \geq 0$ é um número inteiro e $r > 0$ é um número real.

.....

2.1.1 Exercício

Mostre que $f_1(r)$ (Eq. 5) e $f_2(r)$ (Eq. 6) são soluções da equação diferencial

$$r^2 \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2r \frac{df(r)}{dr} - n(n+1) f(r) = 0 \quad . \tag{7}$$

.....

2.2 Equações diferenciais de λ

Sejam $h_1(\lambda)$ e $h_2(\lambda)$ duas funções dadas por

$$h_1(\lambda) = \cos(m\lambda) \tag{8}$$

e

$$h_2(\lambda) = \sin(m\lambda) \quad , \tag{9}$$

em que $m \geq 0$ é um número inteiro e λ é um número real.

2.2.1 Exercício

Mostre que $h_1(\lambda)$ (Eq. 8) e $h_2(\lambda)$ (Eq. 9) são soluções da equação diferencial

$$\frac{d^2 h(\lambda)}{d\lambda^2} + m^2 h(\lambda) = 0 \quad . \quad (10)$$

2.3 Polinômios de Legendre

A equação diferencial

$$\text{sen}\theta g''(\theta) + \cos\theta g'(\theta) + \left[n(n+1) \text{sen}\theta - \frac{m^2}{\text{sen}\theta} \right] = 0 \quad (11)$$

tem como solução os polinômios associados de Legendre

$$g(\theta) = P_{nm}(\cos\theta) \quad . \quad (12)$$

Nestas Equações, n e m são inteiros maiores ou iguais a zero (sendo m menor ou igual a n), $g'(\theta)$ é a primeira derivada e $g''(\theta)$ é a segunda derivada de $g(\theta)$. Os inteiros n e m são, respectivamente, o grau e a ordem do polinômio $P_{nm}(\cos\theta)$. Por conveniência, estas Equações são comumente transformadas por mudança de variáveis utilizando a relação $t = \cos\theta$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \bar{g}(t) \\ g'(\theta) &= -\bar{g}'(t) \text{sen}\theta \\ g''(\theta) &= \bar{g}''(t) \text{sen}^2\theta - \bar{g}'(t) \cos\theta \quad . \end{aligned} \quad (13)$$

em que $\bar{g}(t) = P_{nm}(t)$, com primeira e segunda derivadas $\bar{g}'(t)$ e $\bar{g}''(t)$, respectivamente. Substituindo as Equações 13 na equação diferencial 11, dividindo o

resultado por $\text{sen}\theta$ e utilizando a relação $\text{sen}^2\theta = 1 - t^2$ temos que

$$(1 - t^2) \bar{g}''(t) - 2t \bar{g}'(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2} \right] = 0 \quad . \quad (14)$$

A função $\bar{g}(t) = P_{nm}(t)$ (polinômio associado de Legendre escrito em função da variável t) que satisfaz a Equação 14 pode ser dada por

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2 - 1)^n \quad . \quad (15)$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= \frac{(1 - t^2)^{1/2}}{2} \frac{d^2}{dt^2} (t^2 - 1) \\ &= \sqrt{1 - t^2} \\ &= \text{sen}\theta \quad , \end{aligned} \quad (16)$$

ou

$$\begin{aligned} P_{21}(t) &= \frac{(1 - t^2)^{1/2}}{2^2 2!} \frac{d^3}{dt^3} (t^2 - 1)^2 \\ &= \frac{\sqrt{1 - t^2}}{8} (16t + 8t) \\ &= 3t \sqrt{1 - t^2} \\ &= 3 \text{sen}\theta \cos\theta \quad . \end{aligned} \quad (17)$$

No caso particular em que $m = 0$, não há raízes $\sqrt{1 - t^2}$, $P_{nm}(t)$ é representado simplesmente por $P_n(t)$ e é denominado polinômio de Legendre. A partir da Equação 15, os polinômios de Legendre podem ser escritos como

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad . \quad (18)$$

Alternativamente, os polinômios de Legendre (18) a partir do grau $n = 2$ podem ser obtidos pela fórmula recursiva

$$P_n(t) = -\frac{n-1}{n} P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n} t P_{n-1}(t) \quad , \quad (19)$$

em que $P_2(t)$ é obtido utilizando $P_0(t)$ e $P_1(t)$, $P_3(t)$ é obtido utilizando $P_1(t)$ e $P_2(t)$, etc.

.....

2.3.1 Exercício

Determine os polinômios associados de Legendre de grau $n = 0$ e ordem $m = 0$ até grau $n = 3$ e ordem $m = 3$ utilizando a Equação 15.

2.3.2 Exercício

Determine os polinômios de Legendre de grau $n = 0$ até $n = 5$ utilizando a Equação 18. Em seguida, determine os polinômios de grau $n = 2$ até $n = 5$ utilizando a fórmula recursiva (Eq. 19). Por último, faça um gráfico dos polinômios de Legendre $P_n(t)$ de grau $n = 0$ até $n = 5$ para t no intervalo $[-1, 1]$.

.....

2.4 Equação de Laplace em coordenadas esféricas

Seja $V(r, \theta, \lambda)$ uma função harmônica que depende das coordenadas esféricas r , θ e λ (Fig. 2). Esta função satisfaz a equação de Laplace em coordenadas esféricas, que pode ser escrita como

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad . \quad (20)$$

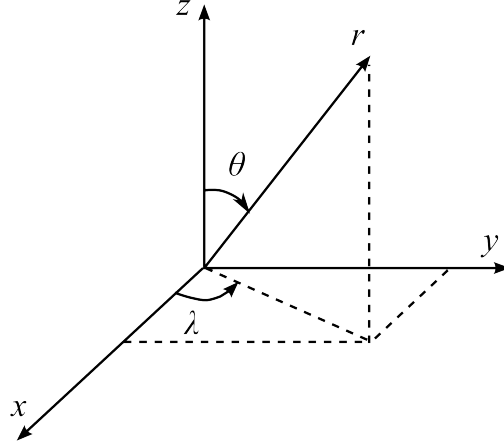


Figura 2: Sistema de coordenadas Cartesianas (x, y, z) e esféricas (r, θ, λ) .

Solução da Equação de Laplace em coordenadas esféricas

A equação de Laplace 20 pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis. Este método consiste em supor que a função $V(r, \theta, \lambda)$ pode ser reescrita como o produto entre três funções independentes:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r) g(\theta) h(\lambda) \quad . \quad (21)$$

O próximo passo consiste em determinar as funções $f(r)$, $g(\theta)$ e $h(\lambda)$. Para tanto, basta substituir a função $V(r, \theta, \lambda)$ dada pela Equação 21 na equação de Laplace 20. Esta substituição nos leva a conclusão de que a função $f(r)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 7. Tal como visto anteriormente, as funções $f_1(r)$ (Eq. 5) e $f_2(r)$ (Eq. 6) são soluções desta equação. Neste caso, mostra-se que a função $V(r, \theta, \lambda)$ pode ser escrita como:

$$V(r, \theta, \lambda) = r^n g(\theta) h(\lambda) \quad , \quad (22)$$

ou

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{1}{r^{(n+1)}} g(\theta) h(\lambda) \quad . \quad (23)$$

Estas funções são denominadas harmônicos esféricos sólidos. De forma análoga, mostra-se que a função $h(\lambda)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 10, que possui as soluções $h_1(\lambda)$ (Eq. 8) e $h_2(\lambda)$ (Eq. 9), e que a função $g(\theta)$ (Eq. 21) satisfaz a equação diferencial 11, cuja solução é dada pelos polinômios associados de Legendre $P_{nm}(\cos\theta)$ (Eq. 12). Os polinômios associados de Legendre $P_{nm}(\cos\theta)$ podem ser obtidos pela Equação 15, em que $t = \cos\theta$. Por fim, é possível mostrar que a função $V(r, \theta, \lambda)$ pode ser escrita de duas formas:

$$V_e(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \lambda) \quad , \quad (24)$$

ou

$$V_i(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} Y_n(\theta, \lambda) \quad , \quad (25)$$

em que

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad , \quad (26)$$

sendo A_{nm} e B_{nm} constantes e as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ dadas por

$$R_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\lambda) \quad (27)$$

e

$$S_{nm}(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \sen(m\lambda) \quad . \quad (28)$$

As funções $Y_n(\theta, \lambda)$ (Eq. 26) são denominadas harmônicos (esféricos) de superfície.

Relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ e $S_{nm}(\theta, \lambda)$

As constantes A_{nm} e B_{nm} (Eq. 26) podem ser determinadas por meio das relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 27) e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 28). Para tanto, vamos considerar $r = 1$ nas equações 24 e 25. Dessa maneira, estas equações são iguais a uma função $f(\theta, \lambda)$ que pode ser escrita em função dos harmônicos de superfície (Eq. 26) da seguinte forma

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] . \end{aligned} \quad (29)$$

De acordo com as relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 27) e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 28),

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad (30)$$

e

$$\iint_{\sigma} S_{nm}(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad (31)$$

para o caso em que $nm \neq op$. Já a integral

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad (32)$$

é sempre zero, independente dos valores de o e p . Nestas Equações, $\iint_{\sigma} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi}$ e $d\sigma = \sin\theta d\theta d\lambda$. Por outro lado, estas integrais são diferentes de zero quando $nm = op$. Neste caso,

$$\iint_{\sigma} R_{n0}^2(\theta, \lambda) d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \quad (33)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\sigma} R_{nm}^2(\theta, \lambda) d\sigma \\ \iint_{\sigma} S_{nm}^2(\theta, \lambda) d\sigma \end{aligned} \right\} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} . \quad (34)$$

Observe que estas integrais (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34) são avaliadas sobre a superfície σ de uma esfera com raio unitário, cuja área é igual a 4π .

Determinação das constantes A_{nm} e B_{nm}

Para determinar as constantes A_{nm} (Eqs. 26 e 29), basta multiplicar os dois lados da Equação 29 por $R_{op}(\theta, \lambda)$ (Eq. 27), integrar o resultado sobre a superfície σ de uma esfera com raio unitário e utilizar as relações de ortogonalidade (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34):

$$\begin{aligned} R_{op}(\theta, \lambda) f(\theta, \lambda) &= R_{op}(\theta, \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + B_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \\ &= [A_{00} R_{op}(\theta, \lambda) R_{00}(\theta, \lambda) + \\ &\quad B_{00} R_{op}(\theta, \lambda) S_{00}(\theta, \lambda) + \\ &\quad A_{10} R_{op}(\theta, \lambda) R_{10}(\theta, \lambda) + \\ &\quad B_{10} R_{op}(\theta, \lambda) S_{10}(\theta, \lambda) + \\ &\quad A_{11} R_{op}(\theta, \lambda) R_{11}(\theta, \lambda) + \\ &\quad B_{11} R_{op}(\theta, \lambda) S_{11}(\theta, \lambda) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad A_{op} R_{op}(\theta, \lambda) R_{op}(\theta, \lambda) + \\ &\quad B_{op} R_{op}(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad A_{nn} R_{op}(\theta, \lambda) R_{nn}(\theta, \lambda) + \\ &\quad B_{nn} R_{op}(\theta, \lambda) S_{nn}(\theta, \lambda)] \\ &= [\dots + A_{op} R_{op}^2(\theta, \lambda) + \dots] \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) R_{op}(\theta, \lambda) d\sigma &= \left[\dots + \iint_{\sigma} A_{op} R_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma + \dots \right] \\
&= \left[\dots + A_{op} \iint_{\sigma} R_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma + \dots \right] \cdot \quad (36) \\
&= A_{op} \iint_{\sigma} R_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma
\end{aligned}$$

De forma análoga, para determinar as constantes B_{nm} (Eqs. 26 e 29), basta multiplicar os dois lados da Equação 29 por $S_{op}(\theta, \lambda)$ (Eq. 28), integrar o resultado sobre a superfície σ de uma esfera com raio unitário e utilizar as relações de ortogonalidade (Eqs. 30, 31, 32, 33 e 34):

$$\iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) S_{op}(\theta, \lambda) d\sigma = B_{op} \iint_{\sigma} S_{op}^2(\theta, \lambda) d\sigma. \quad (37)$$

A partir das Equações 36 e 37 temos que

$$A_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) R_{n0}(\theta, \lambda) d\sigma, \quad (38)$$

$$A_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) R_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma, \quad m \neq 0, \quad (39)$$

e

$$B_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\sigma} f(\theta, \lambda) S_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma, \quad m \neq 0. \quad (40)$$

Normalização das funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ e $S_{nm}(\theta, \lambda)$

Em geofísica, a descrição do campo de gravidade e do campo geomagnético é feita por meio dos harmônicos esféricos (Eqs. 24 e 25). Contudo, por conveniência, a descrição destes campos não é feita utilizando-se as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$

(Eq. 30) e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 31). Ao invés destas funções, são utilizadas as funções normalizadas

$$\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) = c_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) \quad (41)$$

e

$$\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) = c_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda) . \quad (42)$$

Para descrever o campo de gravidade, os coeficientes c_{nm} (Eqs. 41 e 42) são

$$c_{n0}^{gr} = \sqrt{2n+1} \quad (43)$$

e

$$c_{nm}^{gr} = \sqrt{2(2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}, \quad m \neq 0. \quad (44)$$

Para descrever o campo geomagnético, os coeficientes c_{nm} (Eqs. 41 e 42) são

$$c_{n0}^{ge} = 1 \quad (45)$$

e

$$c_{nm}^{ge} = \sqrt{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}, \quad m \neq 0. \quad (46)$$

.....

2.4.1 Exercício

Utilizando as relações de ortogonalidade entre as funções $R_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 30) e $S_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 31), determine

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\bar{R}_{nm}^{gr}(\theta, \lambda) \right]^2 d\sigma ,$$

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\bar{S}_{nm}^{gr}(\theta, \lambda) \right]^2 d\sigma ,$$

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\bar{R}_{nm}^{ge}(\theta, \lambda) \right]^2 d\sigma$$

e

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[\bar{S}_{nm}^{ge}(\theta, \lambda) \right]^2 d\sigma ,$$

em que $\iint_{\sigma} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi}$ e $d\sigma = \sin\theta d\theta d\lambda$. Nestas integrais, $\bar{R}_{nm}^{gr}(\theta, \lambda)$ e $\bar{S}_{nm}^{gr}(\theta, \lambda)$ representam as funções normalizadas $\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 41) e $\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 42) utilizando-se os coeficientes c_{n0}^{gr} (Eq. 43) e c_{nm}^{gr} (Eq. 44). Analogamente, $\bar{R}_{nm}^{ge}(\theta, \lambda)$ e $\bar{S}_{nm}^{ge}(\theta, \lambda)$ representam as funções normalizadas $\bar{R}_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 41) e $\bar{S}_{nm}(\theta, \lambda)$ (Eq. 42) utilizando-se os coeficientes c_{n0}^{ge} (Eq. 45) e c_{nm}^{ge} (Eq. 46).

.....

Expansão da função inverso da distância e fórmula da decomposição

Considere dois pontos P e P' separados por um ângulo ψ e uma distância l (Figura 3). De acordo com a lei dos cossenos, a distância l é dada por

$$l^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\psi , \quad (47)$$

em que

$$\cos\psi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\lambda' - \lambda) . \quad (48)$$

A partir da Equação 47, é possível escrever

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\psi}} . \quad (49)$$

Sabe-se que, se $r' < r$, a função $1/l$ (Eq. 49) pode ser descrita pela expansão

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi), \quad (50)$$

em que $P_n(t) = P_n(\cos\psi)$ (Eqs. 18 e 19) são os Polinômios de Legendre.

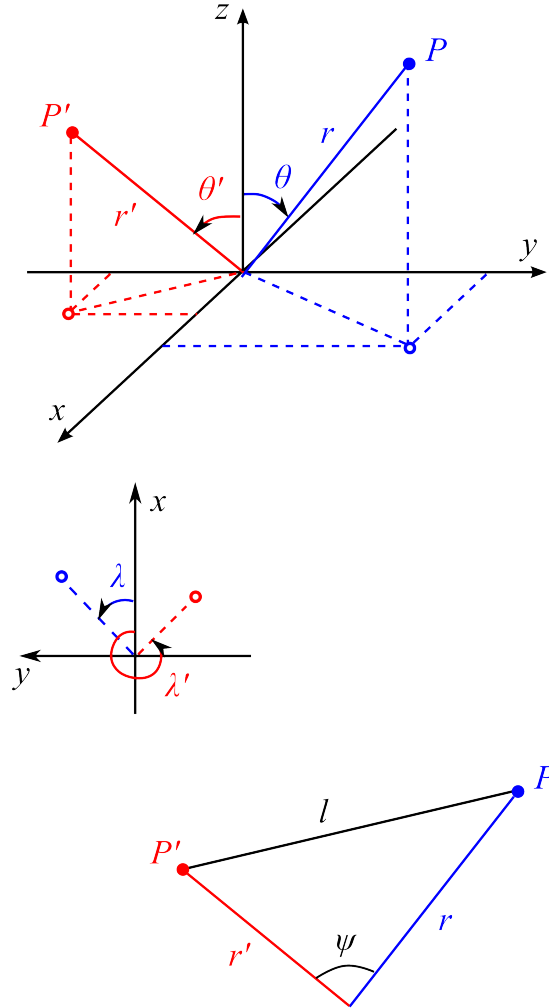


Figura 3: Distância l entre um ponto P e outro ponto P' de um sistema de coordenadas esféricas.