

# FORMA E DIMENSÕES DA TERRA

**Iris Pereira Escobar**

**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

**Departamento de Engenharia Cartográfica**

Rua São Francisco Xavier, 524, 4º andar, sl 4020B

20550-013 Rio de Janeiro – RJ

e-mail: irisesobar@terra.com.br

## 1. INTRODUÇÃO

### Qual é a forma da Terra? Quais são as suas dimensões?

Estas são perguntas simples e naturais quando se deseja estudar o planeta em que vivemos. Respondê-las, entretanto, exige algumas reflexões, a começar pelo grau de exatidão requerido nas respostas. Assim, para um observador muito distante, a Terra poderá ter a aparência de um ponto. Aproximando-se mais, o ponto começa adquirir dimensão e logo a Terra aparentará ser esférica. Mais próximo e poderá ser percebido um ligeiro achatamento e poder-se-á dizer que a Terra aparenta ser um elipsóide de revolução. Ondulações poderão ser percebidas na superfície, ao se aproximar mais ainda, de modo que agora a Terra já não pode ser representada por um corpo de forma regular e alguém poderá dizer que a Terra tem uma forma irregular específica que recebe o nome de geóide. Mas o problema não termina aí; um observador mais próximo perceberá saliências e reentrâncias que não permitem caracterizar a superfície do planeta como polida. A superfície envoltória da Terra, que encerra toda a sua massa, abstraindo a camada atmosférica, recebe simplesmente o nome de superfície física, cujos contornos são definidos pelas formas do relevo, descritas pela topografia.

Portanto, a forma e as dimensões da Terra podem ser definidas com diferentes graus de exatidão. Entretanto, se for observado o rigor científico, a sua superfície física é de difícil definição analítica e, normalmente é feita a partir de operações no âmbito da Geodésia que se consumam na representação cartográfica.

Para atingir o seu objetivo de determinar a forma e as dimensões da Terra, a Geodésia parte do estudo do seu campo da gravidade, considerando a estreita correlação deste campo com aquelas grandezas. Deste modo, o estudo dos parâmetros definidores do campo da gravidade terrestre fornecem os fundamentos necessários à definição da forma e das dimensões do planeta. A partir desses fundamentos são também estabelecidos os sistemas geodésicos de referência, que são a base da representação dos dados espaciais que se distribuem na superfície da Terra. Portanto, é conveniente começar o estudo da Cartografia pelo estudo do campo da gravidade da Terra.

## 2. CAMPO DA GRAVIDADE

### 2.1. Gravitação e Gravidade

A lei da gravitação universal, enunciada por Isaac Newton no fim do século dezessete, estabelece que duas partículas (massas concentradas num volume infinitamente pequeno) atraem-se mutuamente com uma força que é proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. A lei da gravitação pode ser expressa pela seguinte fórmula:

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.1)$$

onde  $f$  é a intensidade da força gravitacional,  $m_1$  e  $m_2$  são massas pontuais interativas;  $r$  é a distância entre elas; e  $G$  é um coeficiente de proporcionalidade conhecido como constante de gravitação. O valor de  $G$  no sistema CGS é  $6,672 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$  e no SI é  $6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ , adotado pela União Astronômica Internacional em 1976 (Vanicek & Krakiwsky, 1986, p.71).

Embora a atração gravitacional entre duas massas seja mútua, na prática, é usual distinguir-se dentre elas a atraída e a atrativa. Assim, se  $m$  é atraída por  $M$ , composta de várias partículas, a equação (2.1) pode ser escrita como a soma das atrações exercidas sobre  $m$  pelas partículas de  $M$ . Quando a massa  $M$  é contínua, as massas consideradas sobre o total volume,  $v$ , do corpo são integradas, em vez de serem somadas. Então a seguinte equação vetorial pode ser escrita:

$$\vec{F}^g = -Gm \int_v \frac{dM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.2)$$

onde  $dM = \rho dv$ , sendo  $\rho$  a massa específica do corpo. Esta equação pode ser usada para estudar a força gravitacional exercida pela Terra sobre corpos cujas dimensões possam ser consideradas negligenciáveis em comparação com a da Terra.

Além da força gravitacional, uma outra força,  $\vec{F}^x$ , atua sobre as massas vinculadas à Terra, como consequência de seu movimento de rotação. Essa força é chamada de *força centrífuga*. Considerando-se uma rotação com velocidade angular constante  $\omega$ , com um raio de rotação  $\vec{p}$ , em torno de um eixo considerado fixo em relação à Terra (Fig. 2.1) tem-se:

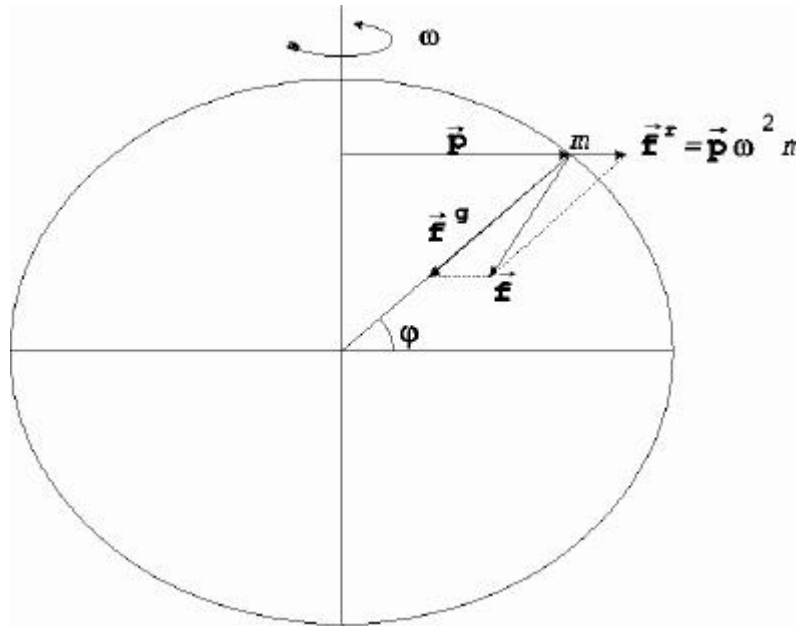


Fig. 2.1 - Componentes da força da gravidade.

$$\vec{F}^x = \vec{p} \omega^2 m \quad (2.3)$$

A resultante entre as forças gravitacional e centrífuga constitui o que é conhecido como força da gravidade, ou seja,

$$\vec{F} = \vec{F}^g + \vec{F}^x,$$

ou

$$\vec{f} = -Gm \int_v \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dM + \vec{p} w^2 m \quad (2.4)$$

Pode-se dizer que a massa  $M$  da Terra produz um efeito físico no espaço em torno de si, chamado de campo da gravidade, percebido através da força exercida sobre outra massa  $m$ , situada nessa região.

O *campo da gravidade*  $\vec{g}$ , normalmente chamado apenas *gravidade*, produzido pela Terra em um determinado ponto, pode ser definido como a força exercida por unidade de massa colocada naquele ponto. Então

$$\vec{g} = -G \int_v \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} dM + \vec{p} w^2 \quad (2.5)$$

cuja intensidade,  $g$ , negligenciando a pequena diferença de direção entre a resultante e a componente gravitacional, face à pequena intensidade da componente centrífuga, é dada por

$$g = G \int_v \frac{1}{r^2} dM - p w^2 \cos j \quad (2.6)$$

onde  $j$  é a latitude geocêntrica.

No SI a intensidade do campo da gravidade é expressa em metros por segundo ao quadrado ( $m.s^{-2}$ ) e equivale dimensionalmente a uma aceleração. Entretanto admite-se o  $gal = cm.s^{-2}$ , em homenagem a Galileu, como unidade CGS temporariamente tolerada, face ao seu uso tradicional. As pequenas variações da gravidade são expressas usualmente em miligal (mGal), microgal ( $\mu Gal$ ) ou nanometro por segundo ao quadrado ( $nm.s^{-2}$ ). Assim,

$$1 \text{ gal} = 10^{-2} m.s^{-2},$$

$$1 \text{ mGal} = 10^{-5} m.s^{-2} \text{ e}$$

$$1 \mu Gal = 10^{-8} m.s^{-2}.$$

A intensidade da gravidade na superfície da Terra varia entre aproximadamente 978 gals no equador e 983 gals nos polos, isto é, dentro de 5 gals. Considerando o valor de  $w = 72,92115 \times 10^{-6} \text{ rd.s}^{-1}$ , a componente centrífuga é cerca de 1/288 do valor total da força da gravidade e varia de zero nos polos a 3,4 gals no equador. Apesar de sua pequena intensidade, se comparada com a componente gravitacional, a componente centrífuga atua como a causa básica da variação da gravidade na superfície da Terra. O achatamento nas regiões polares também contribui para esse efeito, aumentando da mesma forma o valor da gravidade nos polos.

## 2.2. Potencial da Gravidade.

Sabe-se que o campo da gravidade é conservativo e que, portanto, possui um correspondente potencial escalar  $W = W(x, y, z)$ , tal que

$$\vec{g} = \text{grad } W.$$

Esse escalar é conhecido como potencial da gravidade e pode ser definido como a energia potencial por unidade de massa colocada no campo da gravidade. O potencial da gravidade é então expresso em  $m^2.s^{-2}$ .

O potencial da gravidade da Terra, também chamado *geopotencial*, pode ser escrito como a soma do potencial gravitacional,  $W^g$ , com o potencial de rotação ou centrífugo,  $W^r$ . Assim, para

$$W^g = G \int_v \frac{1}{r} dM \quad (2.7)$$

e

$$W^r = \frac{1}{2} \omega^2 r^2, \quad (2.8)$$

$$W = W^g + W^r$$

e

$$\vec{g} = \text{grad} (W^g + W^r) = \text{grad} W^g + \text{grad} W^r. \quad (2.9)$$

É importante observar que o potencial de rotação age somente sobre os corpos ou partículas vinculados à Terra, incluindo a atmosfera. Assim, corpos que não giram com a Terra estão isentos do potencial centrífugo, estando sujeitos apenas ao potencial gravitacional, e.g., os satélites artificiais.

O incremento do geopotencial  $dW$  ao se fazer um deslocamento elementar  $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$  em uma direção arbitrária no campo da gravidade é dado por:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

ou, considerando que pela equação (2.9),

$$\vec{g} = (g_x, g_y, g_z) = \left( \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right)$$

conclui-se que

$$dW = \vec{g} \cdot d\vec{s}, \quad (2.10)$$

onde se obtém:

$$dW = g ds \cos(\vec{g}, \vec{s})$$

ou

$$\frac{dW}{ds} = g \cos(\vec{g}, \vec{s}) \quad (2.11)$$

ou, ainda,

$$\frac{dW}{ds} = g_s,$$

que é a componente da gravidade segundo a direção do deslocamento  $d\vec{s}$ .

### 2.2.1. Sentido Físico do Potencial da Gravidade.

A equação (2.10) mostra que o incremento do geopotencial é zero se o vetor deslocamento  $d\vec{s}$  for perpendicular à direção do vetor  $\vec{g}$ . Neste caso,

$$dW = 0$$

e

$$W = \text{constante} = C. \quad (2.12)$$

Esta é a equação de uma superfície em relação à qual a gravidade é sempre normal. Tal superfície é chamada de superfície de nível ou superfície equipotencial do campo da gravidade ou, simplesmente, *geope*, devido à constância do potencial nela.

Atribuindo valores diferentes à constante em (2.12) obtém-se uma família de superfícies equipotenciais que têm a propriedade de não se tocarem. Caso isso acontecesse, as duas superfícies teriam o mesmo potencial  $C$  no ponto comum e, de acordo com (2.12), isso significaria que todos os pontos de ambas as superfícies teriam o mesmo potencial  $C$ , isto é, as superfícies seriam totalmente coincidentes.

Devido à distribuição irregular de massa na Terra, os geopes possuem pequenas, porém significantes, irregularidades. Seus raios de curvatura variam irregularmente de ponto para ponto, provocando torções nas linhas de força em todas as direções. Portanto a vertical é uma curva reversa (Vanicek & Krakiwsky, 1986, p.85).

A equação (2.11) mostra que a derivada da função potencial em relação a qualquer direção é igual à componente do campo segundo essa direção. Quando uma massa pontual executa um deslocamento  $dH$  ao longo da linha de ação da gravidade (vertical), porém em sentido contrário, então  $\cos(\vec{g}, \vec{s}) = -1$  e

$$dH = - \frac{dW}{g} \quad (2.13)$$

onde  $H$  é chamada de altitude ortométrica e  $dW$  é o incremento do potencial na passagem de uma superfície para outra infinitamente próxima. Esta equação fornece a conexão entre uma quantidade física, diferença de potencial, e uma quantidade geométrica, diferença de altitude, de geopes vizinhos.

De acordo com (2.13) a distância entre duas superfícies equipotenciais infinitamente próximas é inversamente proporcional à intensidade do campo. Pode-se, portanto, concluir que as superfícies equipotenciais não são paralelas, estão mais próximas quanto maior for a intensidade da gravidade. Assim, os geopes estão mais próximos nos polos do que no equador.

Como o incremento  $dW$  do potencial é constante na transferência de uma superfície para outra, não dependendo da posição do ponto na mesma, também não depende da trajetória seguida pelo ponto em seu deslocamento; é apenas função dos pontos extremos do percurso. Donde se conclui que o incremento do potencial  $dW$  em um circuito fechado é igual a zero.

O geope mais notável é o *geóide*, do qual faria parte a superfície dos oceanos, caso estes não estivessem sujeitos às ações das marés, ventos, correntes e outros fenômenos relacionados com a sua dinâmica. Portanto, compreende-se por *geóide* uma superfície equipotencial do campo da gravidade terrestre, coincidente com o nível imperturbado dos oceanos e que se prolonga sob os continentes de modo tal que a direção da gravidade lhe é perpendicular em todos os seus pontos. O *geóide* é uma superfície contínua e levemente ondulada, mas não é uma superfície analítica, sua curvatura varia descontinuamente com a densidade no interior da Terra (Heiskanen & Moritz, 1967, p.51). Portanto, a forma do *geóide*, como também de qualquer geope, é resultado da distribuição de massa na Terra.

Para pontos situados no exterior ou na superfície da Terra é válida a equação diferencial generalizada de Laplace:

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2w^2 \quad (2.14)$$

onde  $\Delta$  é o operador laplaciano.

No interior da Terra, o geopotencial  $W$  satisfaz a equação diferencial generalizada de Poisson (Dehlinger, 1978, p.25-26):

$$\Delta W = -4\pi G \rho + 2w^2, \quad (2.15)$$

onde  $\rho$  é a massa específica no ponto considerado. No espaço exterior ( $\rho = 0$ , negligenciando a massa específica do ar) a equação de Poisson iguala-se à de Laplace.

Para a componente gravitacional do potencial  $W^g$  é válida a equação:

$$\Delta W^g = 0$$

Funções deste tipo, onde o laplaciano é igual a zero, são chamadas de funções harmônicas e representam papel importante na solução do problema geodésico.

### 3. DESENVOLVIMENTO DO POTENCIAL GRAVITACIONAL ( $W^g$ ) EM SÉRIE DE HARMÔNICOS ESFÉRICOS

O cálculo do geopotencial gravitacional ( $W^g$ ), utilizando a fórmula tradicional, implica na solução da integral cujos limites de integração devem ser definidos. Neste caso, o limite de integração é a superfície física da Terra, que devido a sua irregularidade não pode ser expressa matematicamente, impossibilitando a definição dos limites de integração. Entretanto, o problema pode ser resolvido por outro processo, explorando a propriedade harmônica de  $W^g$  em pontos exteriores às massas da Terra, satisfazendo, portanto, à equação de Laplace:

$$\Delta W^g = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 W^g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W^g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W^g}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

A solução desta equação diferencial foi obtida por Legendre, após a substituição das coordenadas cartesianas do ponto (x,y e z) pelas respectivas coordenadas esféricas (r,v e  $\lambda$ ), sendo r o raio vetor, v a colatitude geocêntrica e  $\lambda$  a longitude. A solução obtida para  $W^g$  foi:

$$W^g = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(v), \quad (3.2)$$

onde

$$P_{nm}(v) = \frac{\sin^m v}{2^n} \sum_{k=0}^I \frac{(2n-2k)!(-1)^k}{(n-m-2k)!(n-k)!k!} t^{(n-m-2k)} \quad (3.3)$$

são as funções associadas de Legendre de grau n e ordem m, para I igual ao maior inteiro contido em (n-m)/2,  $A_{nm}$  e  $B_{nm}$  são coeficientes, relacionados com a distribuição de massas da Terra, dados por:

$$A_{nm} = G \int_T r'^n T_{nm} P_{nm}(v') \cos m\lambda' dm \quad (3.4)$$

$$B_{nm} = G \int_T r'^n T_{nm} P_{nm}(v') \sin m\lambda' dm \quad (3.5)$$

sendo:

$$\text{para } \begin{cases} m = 0 \Rightarrow T_{nm} = 1 \\ m \neq 0 \Rightarrow T_{nm} = \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.1 Exemplos de Funções Associadas de Legendre

Considerando  $t = \cos v$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 P_{00}(v) &= 1 \\
 P_{10}(v) &= t = \cos v \\
 P_{11}(v) &= \sin v \\
 P_{20}(v) &= \frac{1}{2}(3\cos^2 v - 1) \\
 P_{21}(v) &= 3\cos v \sin v \\
 P_{22}(v) &= 3\sin^2 v \\
 P_{30}(v) &= \frac{1}{2}(5\cos^3 v - 3\cos v) \\
 P_{40}(v) &= \frac{1}{8}(35\cos^4 v - 30\cos^2 v + 3)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Os gráficos destas funções polinomiais são apresentados na fig. 3.1.

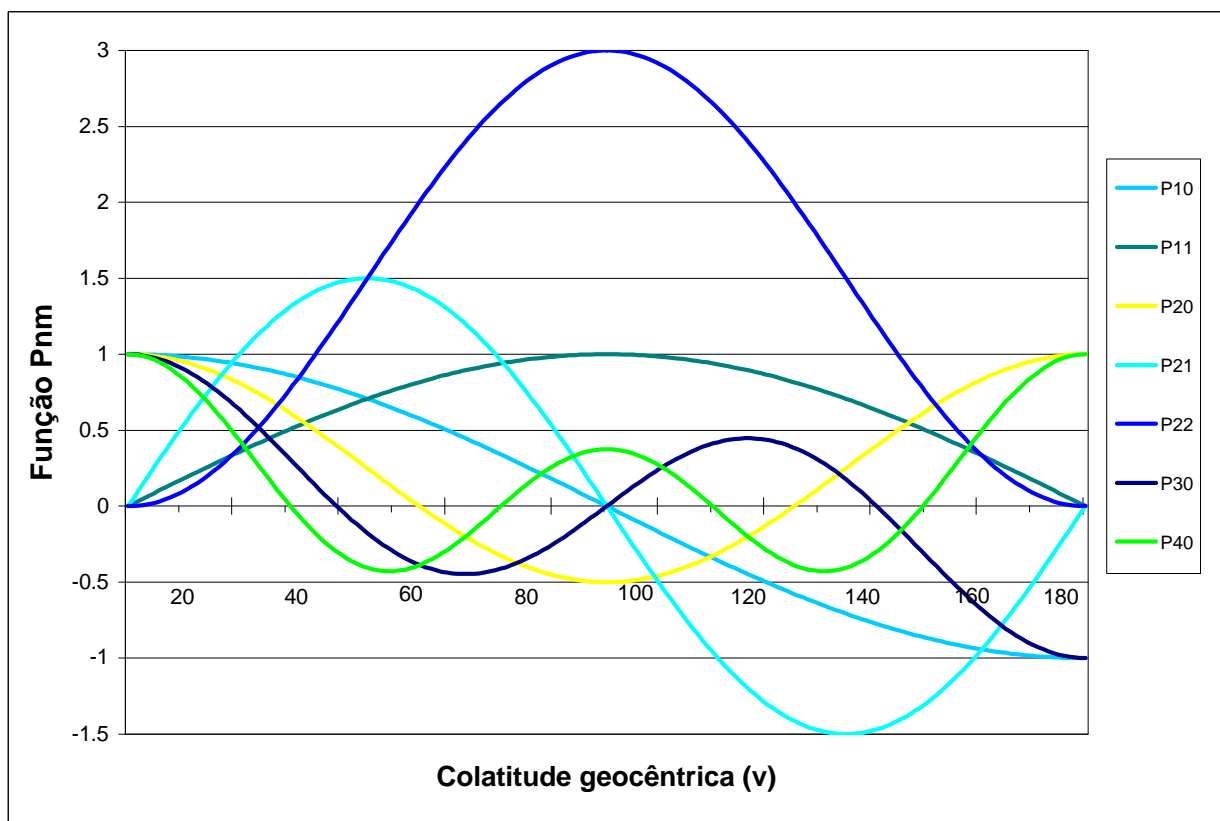


Fig. 3.1: Gráficos das funções associadas de Legendre



### 3.2. Representação Geométrica dos Harmônicos Esféricos Zonais

Quando  $m=0$  os polinômios são funções apenas de  $\cos v$  e os respectivos termos são chamados de harmônicos esféricos zonais. Neste caso, se o grau do polinômio for ímpar o mesmo terá apenas potências ímpares de  $\cos v$ . Caso contrário, todas as potências serão pares.

$$P_{n,0}(v)$$

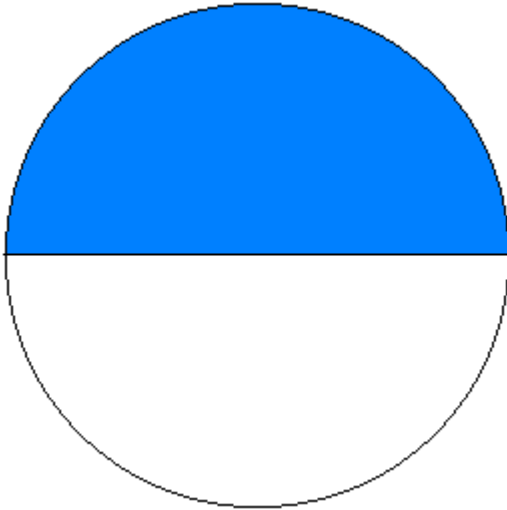


Fig. 3.2:  $P_{1,0}(v)$

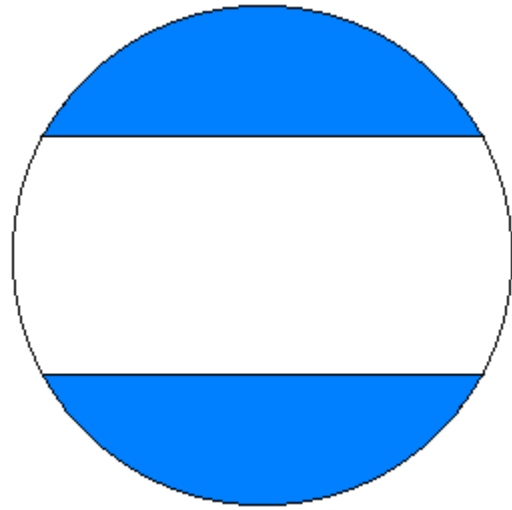


Fig 3.3:  $P_{2,0}(v)$

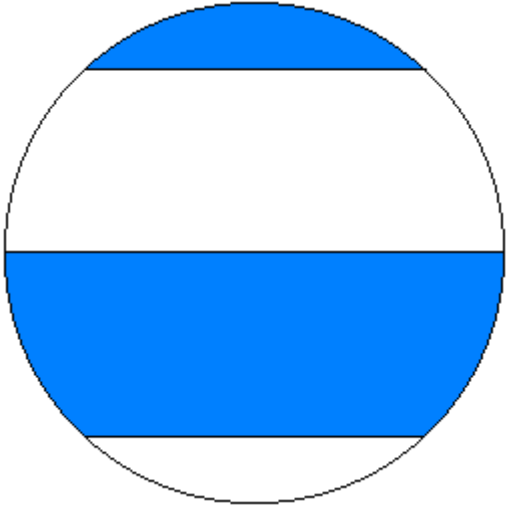


Fig. 3.4:  $P_{3,0}(v)$

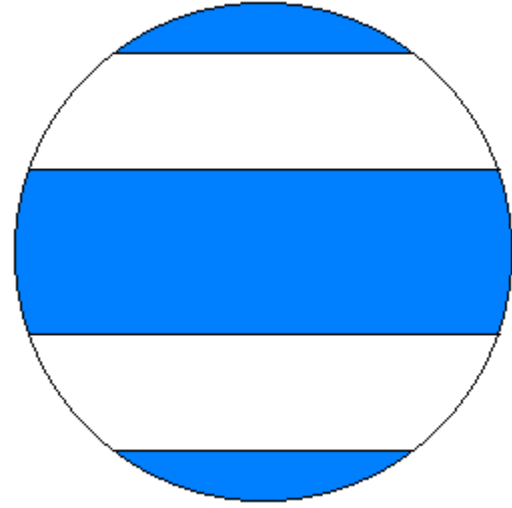


Fig. 3.5:  $P_{4,0}(v)$

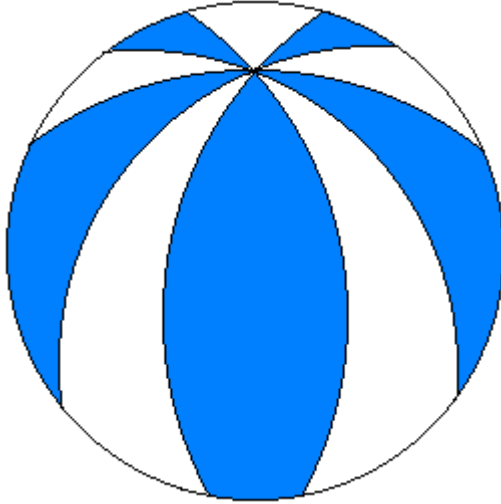
Anulam-se ao longo de  $n$  paralelos, dividindo a superfície esférica em zonas alternadamente positivas e negativas

### 3.3. Representação Geométrica dos Harmônicos Esféricos Setoriais

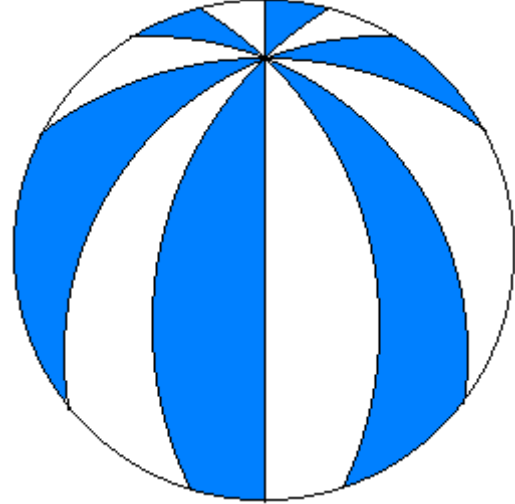
Quando  $m=n$  os polinômios são funções apenas de  $\sin v$ , que são sempre positivas, por este motivo os respectivos termos ( $r^{-(n+1)}A_{nm}P_{nm}(v) \cos m\lambda$  e  $r^{-(n+1)}B_{nm}P_{nm}(v) \sin m\lambda$ ) alternam o sinal

em função da longitude, anulando-se ao longo de  $2m$  meridianos igualmente espaçados. Estes termos são chamados de harmônicos esféricos setoriais. Analogamente ao caso anterior, se o grau do polinômio for ímpar o mesmo terá apenas potências ímpares de  $\sin v$ . Caso contrário, todas as potências serão pares.

$P_{nn}(v) \cos n\lambda$  e  $P_{nn}(v) \sin n\lambda$



**Fig. 3.5:**  $P_{55}(v) \cos 5\lambda$  ou  $P_{55}(v) \sin 5\lambda$



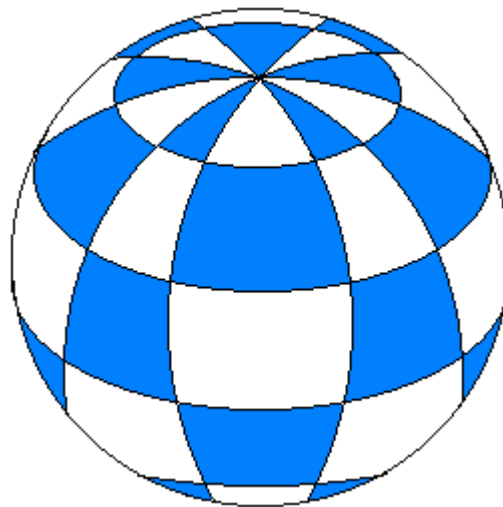
**Fig. 3.6:**  $P_{66}(v) \cos 6\lambda$  ou  $P_{66}(v) \sin 6\lambda$

Anulam-se em  $2n$  meridianos que dividem a superfície esférica em setores com amplitude de  $\pi/n$ .

### 3.4. Representação Geométrica dos Harmônicos Esféricos Tesserais

Quando  $m \neq n$  e  $m \neq 0$  os respectivos termos são chamados de tesserais, os polinômios são funções tanto de  $\cos v$  como de  $\sin v$ .

$P_{nm}(v) \cos m\lambda$  ou  $P_{nm}(v) \sin m\lambda$



**Fig. 3.7:**  $P_{95}(v) \cos 5\lambda$  ou  $P_{95}(v) \sin 5\lambda$

Anulam-se em n-m paralelos e 2m meridianos igualmente espaçados.

### 3.5. Significados Físicos dos Harmônicos Esféricos

A título de exemplo, serão analisados os harmônicos de grau zero, um e dois para entendimento dos respectivos significados físicos.

#### a) Termo do grau zero .

Fazendo  $n=m=0$  na (3.2), tem-se:

$$\frac{A_{0,0}}{r} = \frac{GM}{r}, \quad (3.8)$$

já que pela (3.4)  $A_{0,0} = GM$ .

Assim, o termo do grau zero significa o potencial de uma esfera de massa  $M$  homogênea, ou disposta em camadas esféricas homogêneas, sobre um ponto exterior situado a uma distância  $r$  do seu centro.

#### b) Termos do 1º grau.

Neste caso tem-se três termos, um zonal e dois setoriais, ou seja:

- 1- Fazendo  $n=1$  e  $m=0$  na (3.2), tem-se o termo zonal:  $r^{-2} A_{1,0} P_{1,0}(v) = r^{-2} A_{1,0} \cos v$ . Este termo se anula sobre o equador ( $v=90^\circ$ ), alternando o sinal entre os hemisférios norte e sul.
- 2- Fazendo  $n=1$  e  $m=1$  na (3.2), tem-se os dois termos setoriais:  $r^{-2} B_{1,1} P_{1,1}(v) \sin \lambda$  e  $r^{-2} A_{1,1} P_{1,1}(v) \cos \lambda$ . Como as funções associadas setoriais são sempre positivas e  $r$ ,  $B_{1,1}$  e  $A_{1,1}$  são constantes, a variação dos sinais destes termos dependem exclusivamente de  $\sin \lambda$  e  $\cos \lambda$ , que se anularão respectivamente para  $\lambda = 0^\circ$  e  $180^\circ$  e  $\lambda = 90^\circ$  e  $270^\circ$ . Assim, no primeiro caso, o sinal se alternará entre os hemisférios leste e oeste e no segundo caso entre dois hemisférios defasados de  $90^\circ$  em relação aos anteriores.

Portanto, os termos do 1º grau indicam aumento de potencial ou massa de um hemisfério em relação ao hemisfério oposto (fig. 3.2). Evidentemente isto só ocorrerá se a origem do sistema de coordenadas não coincidir com o centro de massa da Terra. Este fato pode ser comprovado pela análise dos coeficientes. Com efeito, das equações (3.4) e (3.5), substituindo-se as coordenadas esféricas ( $r'$ ,  $v'$  e  $\lambda'$ ) pelas respectivas coordenadas cartesianas ( $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ ), chega-se a:

$$A_{1,0} = G \int_T z' dm, \quad A_{1,1} = G \int_T x' dm \quad \text{e} \quad B_{1,1} = G \int_T y' dm. \quad (3.9)$$

Se a origem do sistema de coordenadas for coincidente com o centro de massa da Terra estas integrais serão nulas e os termos se anularão.

### c) Termo zonal do 2º grau

Fazendo  $n=2$  e  $m=0$  na (3.2), obtém-se o termo zonal do 2º:

$$r^{-3} A_{2,0} P_{2,0}(v) = r^{-3} A_{2,0} \frac{3}{2} \left( \cos^2 v - \frac{1}{3} \right), \quad (3.10)$$

Procedendo de forma análoga àquela usada para calcular os coeficientes do 1º grau, é possível demonstrar que:

$$A_{2,0} = -G \left( C - \frac{A+B}{2} \right), \quad (3.11)$$

Sendo, A, B e C os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados X, Y e Z, dados por:

$$A = \int_T (y'^2 + z'^2) dm, \quad B = \int_T (x'^2 + z'^2) dm, \quad C = \int_T (x'^2 + y'^2) dm. \quad (3.12)$$

Assim, como  $r$  e  $A_{2,0}$  são constantes, o sinal deste termo variará exclusivamente em função da expressão  $(\cos^2 v - 1/3)$ , que se anula para os paralelos  $v = 54^\circ 44' 08''$  e  $v = 125^\circ 15' 52''$ , dividindo a superfície terrestre em três zonas esféricas, duas polares e uma equatorial, alternadamente positivas e negativas (fig. 3.3). Este termo tem particular importância na Geodésia porque sua geometria tem a propriedade de revelar a contribuição da forma elipsoidal da Terra.

### 3.6. Os Coeficientes ( $J_{nm}$ , $K_{nm}$ ) e ( $C_{nm}$ , $S_{nm}$ )

Costuma-se substituir os coeficientes  $A_{nm}$  e  $B_{nm}$  por suas respectivas formas adimensionais  $J_{nm}$  e  $K_{nm}$ , dados por:

$$J_{nm} = -\frac{A_{nm}}{GMa^n} \quad \text{e} \quad K_{nm} = -\frac{B_{nm}}{GMa^n} \quad (3.13)$$

ou seja:

$$J_{nm} = -\frac{1}{M} \int_T \left( \frac{r'}{a} \right)^n T_{nm} P_{nm}(v') \cos m l' dm \quad \text{e} \quad K_{nm} = -\frac{1}{M} \int_T \left( \frac{r'}{a} \right)^n T_{nm} P_{nm}(v') \sin m l' dm. \quad (3.14)$$

Assim, a equação do geopotencial gravitacional pode ser escrita em função de  $J_{nm}$  e  $K_{nm}$  como:

$$W^g = -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (J_{nm} \cos mI + K_{nm} \sin mI) P_{nm}(v), \quad (3.15)$$

Em Geodésia é mais comum a utilização da forma plenamente normalizada das funções associadas de Legendre  $\bar{P}_{nm}(v)$  dadas por:

$$\bar{P}_{nm}(v) = p_{nm} P_{nm}(v), \quad (3.16)$$

onde

$$p_{nm} = \sqrt{\frac{H(n-m)!(2n+1)}{(n+m)!}} \quad \text{para} \quad \begin{cases} m=0 \Rightarrow H=1 \\ m \neq 0 \Rightarrow H=2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Neste caso, os coeficientes plenamente normalizados  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$  são dados por:

$$C_{nm} = -\frac{J_{nm}}{p_{nm}} \quad \text{e} \quad S_{nm} = -\frac{K_{nm}}{p_{nm}} \quad (3.18)$$

e a equação de  $W^g$  pode ser escrita como

$$W^g = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(v), \quad (3.19)$$

Os coeficientes dos harmônicos esféricos da série do geopotencial de atração ( $W^g$ ) são dependentes da distribuição de massa na Terra. Pode-se observar que as coordenadas com linha, que dizem respeito aos elementos infinitesimais de massa  $dm$ , estão encerradas nas integrais que definem aqueles coeficientes. Considerando a geometria dos harmônicos esféricos, pode-se concluir que o valor de um determinado coeficiente será tanto maior quanto maior for a correlação existente entre a geometria segundo a qual as massas se distribuem e a geometria do harmônico esférico correspondente. Assim, o geopotencial gravitacional é composto pelo somatório das contribuições das diferentes distribuições espaciais de massa que formam a Terra. Os coeficientes funcionam como pesos que expressam as contribuições relativas de cada parcela do somatório.

O cálculo dos valores dos coeficientes depende da definição dos limites de integração, que no caso é a superfície física do planeta, cuja irregularidade impede a sua definição matemática. Ter-se-ia retornado ao problema original da solução da equação do geopotencial não fosse a possibilidade de contar com a importante contribuição tecnológica dos satélites artificiais, que postos em órbita da Terra tornam-se verdadeiros sensores do seu potencial gravitacional. O conhecimento dos valores de  $W^g$  em diversos pontos da órbita do satélite, cujas coordenadas  $r$ ,  $v$  e  $\lambda$  são conhecidas, deixa como incógnitas na expressão em série de  $W^g$  apenas os coeficientes  $C_{nm}$  e  $S_{nm}$ . Assim, o monitoramento das órbitas dos satélites artificiais permite a montagem de hipersistemas de equações lineares, cujas soluções resultam na determinação experimental dos coeficientes da série. Logicamente, como a série é infinita, torna-se necessário o seu truncamento de modo a compatibilizar a quantidade de incógnitas com a quantidade e resolução dos dados. O conjunto de coeficientes assim determinados é conhecido como *modelo geopotencial*. O “NIMA – National Imagery and Mapping Agency” e a “OSU – Ohio State University”, nos Estados Unidos da América, são instituições que têm se destacado internacionalmente na determinação e disseminação de modelos geopotenciais desenvolvidos até grau e ordem 360. O modelo divulgado mais recentemente recebeu a designação de EGM-96 e pode ser encontrado e copiado na página da internet do NIMA.

Uma amostra do modelo geopotencial EGM-96, contendo inclusive os desvios-padrão dos coeficientes ( $\sigma_C$  e  $\sigma_S$ ) até o grau e ordem 6, é dada na tabela 3.1:

n	m	$C_{nm}$	$S_{nm}$	$\sigma_C$	$\sigma_S$
2	0	-0.484165371736E-03	0.000000000000E+00	0.35610635E-10	0.00000000E+00
2	1	-0.186987635955E-09	0.119528012031E-08	0.10000000E-29	0.10000000E-29
2	2	0.243914352398E-05	-0.140016683654E-05	0.53739154E-10	0.54353269E-10
3	0	0.957254173792E-06	0.000000000000E+00	0.18094237E-10	0.00000000E+00
3	1	0.202998882184E-05	0.248513158716E-06	0.13965165E-09	0.13645882E-09
3	2	0.904627768605E-06	-0.619025944205E-06	0.10962329E-09	0.11182866E-09
3	3	0.721072657057E-06	0.141435626958E-05	0.95156281E-10	0.93285090E-10
4	0	0.539873863789E-06	0.000000000000E+00	0.10423678E-09	0.00000000E+00
4	1	-0.536321616971E-06	-0.473440265853E-06	0.85674404E-10	0.82408489E-10
4	2	0.350694105785E-06	0.662671572540E-06	0.16000186E-09	0.16390576E-09
4	3	0.990771803829E-06	-0.200928369177E-06	0.84657802E-10	0.82662506E-10
4	4	-0.188560802735E-06	0.308853169333E-06	0.87315359E-10	0.87852819E-10
5	0	0.685323475630E-07	0.000000000000E+00	0.54383090E-10	0.00000000E+00
5	1	-0.621012128528E-07	-0.944226127525E-07	0.27996887E-09	0.28082882E-09
5	2	0.652438297612E-06	-0.323349612668E-06	0.23747375E-09	0.24356998E-09
5	3	-0.451955406071E-06	-0.214847190624E-06	0.17111636E-09	0.16810647E-09
5	4	-0.295301647654E-06	0.496658876769E-07	0.11981266E-09	0.11849793E-09
5	5	0.174971983203E-06	-0.669384278219E-06	0.11642563E-09	0.11590031E-09
6	0	-0.149957994714E-06	0.000000000000E+00	0.14497863E-09	0.00000000E+00
6	1	-0.760879384947E-07	0.262890545501E-07	0.22415138E-09	0.21957296E-09
6	2	0.481732442832E-07	-0.373728201347E-06	0.27697363E-09	0.28105811E-09
6	3	0.571730990516E-07	0.902694517163E-08	0.19432407E-09	0.18682712E-09
6	4	-0.862142660109E-07	-0.471408154267E-06	0.15229150E-09	0.15328004E-09
6	5	-0.267133325490E-06	-0.536488432483E-06	0.89838470E-10	0.87820905E-10
6	6	0.967616121092E-08	-0.237192006935E-06	0.11332010E-09	0.11518036E-09

Tabela 3.1: Coeficientes do Modelo Geopotencial EGM96

### 3.7. Fórmulas de recorrência

O cálculo das funções associadas de Legendre pela equação (3.3), envolve cálculos de fatoriais, cujos valores numéricos podem ser muito grandes, dificultando, e às vezes impossibilitando, o cálculo daquelas funções. Para contornar esta dificuldade, são utilizadas fórmulas que permitem o cálculo de uma função com base nos valores de outras previamente calculadas. Estas fórmulas são conhecidas com fórmulas de recorrência. São válidas as seguintes equações:

a) Para  $m = n$  ( $\bar{P}_{3,3}; \bar{P}_{4,4}; \bar{P}_{5,5}; \dots; \bar{P}_{n,n}$ ):

$$\bar{P}_{n,n} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n} * \text{sen}(v) * \bar{P}_{n-1,n-1} \quad (3.20)$$

Portanto, a partir de  $P'_{2,2}$ , todos os outros termos  $P'_{n,n}$  podem ser calculados.

b) Para  $m = n-1$  ( $\bar{P}_{3,2}; \bar{P}_{4,3}; \bar{P}_{5,4}; \dots; \bar{P}_{n,n-1}$ ):

$$\bar{P}_{n,n-1} = \sqrt{2n+1} * \cos(v) * \bar{P}_{n-1,n-1} \quad (3.21)$$

Portanto, a partir dos valores calculados no item a, podem ser calculados todos os valores  $P'_{n,n-1}$ .

c) Para os demais termos :

$$\bar{P}_{n,m} = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+m}\sqrt{n-m}} \left( \sqrt{2n-1} * \cos(v) * \bar{P}_{n-1,m} - \frac{\sqrt{n+m-1}\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{2n-3}} * \bar{P}_{n-2,m} \right) \quad (3.22)$$

Assim, a partir dos valores calculados nos itens anteriores, todos os demais termos podem ser calculados.

#### 4. MODELOS DE REPRESENTAÇÃO DA TERRA

O termo zonal do segundo grau do desenvolvimento de geopotencial gravitacional em série de harmônicos esféricos reflete a contribuição das anomalias de massa, em relação à Terra esférica, dispostas segundo três zonas esféricas, duas polares e uma equatorial. Como já foi visto, este termo é dado por:

$$r^{-3}A_{2,0}P_{2,0}(v) = r^{-3}A_{2,0}\frac{3}{2}(\cos^2 v - \frac{1}{3}), \quad (4.1)$$

anulando-se ao longo dos paralelos  $v = 54^\circ 44' 08''$  e  $v = 125^\circ 15' 52''$  e alternando o sinal da anomalia de massa entre as zonas. O sinal positivo ou negativo depende de  $A_{2,0}$ ; se este fosse positivo as anomalias seriam positivas nas regiões polares e negativa na região equatorial, o que indicaria deficiência de massa na região equatorial e excesso nas regiões polares, em relação à forma esférica, revelando a geometria de um elipsóide de revolução alongado nos polos. Observando a tabela de coeficientes do EGM-96, verifica-se que o coeficiente  $C_{2,0}$  é negativo. Como  $A_{2,0}$  tem o mesmo sinal de  $C_{2,0}$ , as anomalias de massa são negativas nas regiões polares e positiva na região equatorial, o que aponta para um excesso de massa equatorial e deficiências nas regiões polares, geometria compatível com um elipsóide de revolução achatado nos polos.

A relevância da geometria elipsoidal na composição total do geopotencial é revelada pelo valor do coeficiente deste termo. Assim, o coeficiente  $C_{2,0}$  revela o quanto um elipsóide de revolução é adequado como modelo de representação da Terra. Da tabela de coeficientes é possível constatar que o valor de  $C_{2,0}$  é cerca de 1000 vezes maior do que os demais coeficientes.

Assim, a análise da equação do geopotencial revela uma terra primeiramente esférica, com um achatamento polar e outras deformações menos relevantes. Esta conclusão é particularmente importante para a Cartografia porque, sendo a superfície física do planeta de forma irregular, torna-se difícil a sua utilização como superfície de referência, devido à complexidade de sua geometria, que dificulta o estabelecimento de um sistema de coordenadas a ela referido. A solução do problema é obtida pela adoção de um modelo geométrico regular suficientemente próximo da superfície física da Terra, que possa ser utilizado como superfície de referência para um sistema de coordenadas. Assim, para atender finalidades práticas que não requeiram grande exatidão geométrica (tais como mapeamento global em escalas pequenas) o modelo esférico é normalmente utilizado. Entretanto, quando se deseja maior exatidão é conveniente a utilização do elipsóide de revolução como modelo geométrico regular.

Outros modelos geométricos para representação da Terra podem surgir da análise dos termos do desenvolvimento do geopotencial em série de harmônicos esféricos; entretanto, quanto mais termos forem envolvidos mais complexas serão as figuras representativas. Até o momento, não foram apresentadas razões de ordem física ou prática que justifiquem a adoção de um modelo mais complexo que o elipsóide de revolução.



## 4.1. A Terra Normal

Chama-se *Terra Normal* ao elipsóide de revolução, com ligeiro achatamento polar, dotado de movimento de rotação em torno de seu eixo menor, coincidente com o eixo principal de inércia polar da Terra, e com massa e velocidade angular iguais às desta. Esta Terra fictícia é geradora do *campo da gravidade normal*, cuja intensidade é denotada por  $\mathbf{g}$ . O potencial da gravidade da Terra normal é chamado de *esferopotencial*, normalmente representado pela letra  $U$ . As superfícies equipotenciais do campo da gravidade da Terra normal são comumente chamadas de *esferopes*, sendo o mais notável destes a própria superfície do elipsóide.

A Terra Normal está vinculada a um sistema cartesiano geocêntrico XYZ, onde o eixo X (equatorial) é o que cruza o primeiro meridiano, definido pelo “Bureau International de l’Heure (BIH)”, e o eixo Z (polar) é o eixo de rotação do elipsóide, paralelo à direção do eixo médio de rotação da Terra, definida pelo “Conventional International Origin (CIO) for Polar Motion”.

## 5. ESFEROPOTENCIAL

Analogamente ao geopotencial, o eferopotencial também é composto pela soma do esferopotencial de atração ( $U^g$ ) com o potencial centrífugo ( $U^r$ ). Este último é o mesmo que entra na composição do geopotencial ( $U^r = W^r$ ), porém a parcela gravitacional do esferopotencial difere da do geopotencial pelo limite de integração que agora é a superfície de elipsóide de revolução. Assim,

$$U = U^g + U^r$$

onde

$$U^g = G \int_E \frac{dm}{r} \quad \text{e} \quad U^r = \frac{1}{2} p^2 \omega^2. \quad (5.1)$$

Tecendo-se algumas considerações sobre a geometria do elipsóide de revolução, é possível chegar-se ao desenvolvimento de  $U^g$  em série de harmônicos esféricos, a partir da equação da série de  $W^g$ . Assim, considerando a simetria do elipsóide,  $U^g$  não pode ser dependente da longitude, nem tampouco do sinal da latitude. Então, os harmônicos esféricos setoriais e tesserais de qualquer grau são excluídos por apresentarem dependência da longitude e os zonais ímpares também são excluídos por apresentarem potências ímpares de  $\cos v$  que os tornam dependentes do sinal de  $v$ . Portanto, utilizando o sobrescrito  $U$  para os coeficientes  $C$ , para distiguilos dos coeficientes do Geopotencial,

$$U^g = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} C_{2n,0}^U \bar{P}_{2n,0}(v) \right] \quad (5.2)$$

e

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} C_{2n,0}^U \bar{P}_{2n,0}(v) \right] + \frac{1}{2} (\omega r \sin v)^2 \quad (5.3)$$

ou

$$U = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n,0}^U P_{2n,0}(v) \right] + \frac{1}{2} (\omega r \sin v)^2. \quad (5.4)$$

Heiskanen & Moritz [1967] fornecem a equação dos coeficientes  $J_{2n,0}^U$  em função de  $J_{2,0}^U$ :

$$J_{2n,0}^U = (-1)^{n+1} \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left( 1 - n + 5n \frac{J_{2,0}^U}{e^2} \right) \quad (5.5)$$

onde

$$J_{2,0}^U = \frac{2}{3} * \left( f - \frac{m_1}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{9 * m_1 * f}{14} \right), \quad (5.6)$$

$m_1$  é a razão entre a componente centrífuga e a componente gravitacional da gravidade no equador, dada por:

$$m_1 = \frac{\omega^2 a^3}{GM}, \quad (5.7)$$

$f$  é o achatamento do elipsóide e  $e$  a primeira excentricidade dada por:

$$e^2 = 2f - f^2 \quad (5.8)$$

### 5.1. O coeficiente $J_{2,0}$

Como já foi demonstrado anteriormente, o coeficiente do harmônico esférico zonal do segundo grau, no desenvolvimento do geopotencial em série, está relacionado com o achatamento polar da Terra e, portanto, com a geometria do elipsóide de revolução. O coeficiente  $J_{2,0}$  é conhecido como fator dinâmico de forma e é um dos três parâmetros primários definidores do elipsóide de referência; os outros dois são o semi-eixo maior,  $a$ , e a constante dada pelo produto  $GM$ .

Das equações (3.17) e (3.18), tem-se:

$$C_{nm} = -\frac{J_{nm}}{P_{nm}}$$

e

$$P_{nm} = \sqrt{\frac{H(n-m)!(2n+1)}{(n+m)!}} \quad \text{para} \quad \begin{cases} m=0 \Rightarrow H=1 \\ m \neq 0 \Rightarrow H=2 \end{cases}$$

assim, para  $m=0$  e  $n=2$ ,

$$J_{2,0} = -C_{2,0} \sqrt{5}.$$

Como, pela tabela 3.1, para o EGM-96

$$C_{2,0} = -0,484165371736E-03,$$

então

$$J_{2,0} = 10826,267 \times 10^{-7}$$

Os parâmetros primários definidores do Sistema Geodésico de Referência 1967 (GRS-67), utilizado no Brasil, são:

$$a = 6378160 \text{ m}$$

$$GM = 398603 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$J_{2,0}^U = 10827,067 \times 10^{-7}$$

A partir desses parâmetros derivam-se os demais parâmetros elipsoidais. Das equações (5.6) e (5.7) o *achatamento*,  $f$ , pode ser obtido iterativamente pela fórmula:

$$f = \frac{3}{2} J_{2,0}^U + \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} f^2 - \frac{9}{14} m_1 f. \quad (5.9)$$

Para  $\omega = 0,72921151467 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$ , obtém-se da (5.7):

$$m_1 = 0,003461407.$$

Tomando-se para valor preliminar  $f_0 = 1/300$ , chega-se em duas iterações ao valor de

$$f = 0,003 \ 352 \ 924$$

ou

$$f = 1/298,247.$$

## 5.2. Gravidade normal ( $\gamma$ )

O valor de  $g$  depende da distância ao centro de massa da Terra e da latitude geográfica  $j$ . Face à simetria rotacional  $g$  independe da longitude e na superfície do elipsóide de referência é geralmente denotado por  $g$ : A fórmula usada para calcular  $\gamma_0$  foi deduzida por C. Somigliana em 1929 [Moritz, 1984], com base no teorema de Clairaut (devido a Alexis Clairaut), que relaciona o achatamento terrestre com a força centrífuga e a gravidade normal no equador [Heiskanen & Moritz, 1967]. Assim,

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 \phi + b\gamma_p \sin^2 \phi}{(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \quad (5.10)$$

onde  $\phi$  é a latitude geodésica;  $\gamma_e$  e  $\gamma_p$  são os valores da gravidade normal no equador e nos polos; respectivamente,  $a$  é o semi-eixo maior e  $b$  é o semi-eixo menor do elipsóide.

Moritz [1984] apresenta uma equação obtida do desenvolvimento em série da equação de Somigliana, onde os termos da série são potências de  $\sin \phi$ :

$$\gamma_0 = \gamma_e \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \sin^{2n} \phi \right) \quad (5.11)$$

para

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}e^2 + k, \\ a_4 &= \frac{3}{8}e^4 + \frac{1}{2}e^2k, \\ a_6 &= \frac{5}{16}e^6 + \frac{3}{8}e^4k, \\ a_8 &= \frac{35}{128}e^8 + \frac{5}{16}e^6k, \end{aligned} \quad (5.12)$$

sendo  $e$  a excentricidade do elipsóide e  $k$  dado por:

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1 \quad (5.13)$$

Tomando valores para  $k$  e  $e$ , relativos ao elipsóide de referência, obtém-se a respectiva fórmula de gravidade normal.

A fórmula da gravidade normal mais recentemente adotada pela Associação Internacional de Geodésia (IAG) é a *fórmula internacional da gravidade 1980*:

$$\gamma_0 = 978\,032,67715(1 + 0,005\,279\,041\,4 \sin^2\phi + 0,000\,023\,271\,8 \sin^4\phi + 0,000\,000\,126\,2 \sin^6\phi + 0,000\,000\,000\,7 \sin^8\phi) \text{ mGal} \quad (5.14)$$

com precisão de 0,1  $\mu\text{Gal}$ .

É comum encontrar os modelos mais antigos truncados na potência do quarto grau em  $\sin \phi$  que expressando este último termo em função de  $\sin^2 2\phi$  resulta em:

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2\phi - \beta' \sin^2 2\phi) \quad (5.15)$$

Em 1930 a IAG adotou, em Estocolmo, a fórmula:

$$g_0 = 978\,049,0(1 + 0,005\,2884 \sin^2 j - 0,000\,0059 \sin^2 2j) \text{ mGal}, \quad (5.16)$$

recomendando o seu uso para todos os trabalhos gravimétricos. Esta fórmula tornou-se conhecida como *fórmula internacional da gravidade*.

Em 1964 a União Astronômica Internacional (IAU) adotou o Sistema de Constantes Astronômicas; em 1967, a Assembléia Geral da IAG aprovou novos parâmetros para o elipsóide de referência, coerentes com a decisão da IAU, e recomendou o Sistema Geodésico de Referência 1967, cujas constantes básicas são:

$$a = 6\,378\,160 \text{ m}$$

$$GM = 398\,603 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{s}^{-2}$$

$$J_2 = 10\,827 \times 10^{-7}$$

onde  $J_2$  é o coeficiente do termo do 2º grau no desenvolvimento do esferopotencial em série de harmônicos esféricos. Destas constantes básicas derivam os seguintes valores:

$$f^{-1} = 298,247$$

$$f = 0,003\,352\,9237$$

$$\omega = 72\,921\,151\,467 \times 10^{-15} \text{ rd/s}$$

$$m_1 = 0,003\,449\,8014 \quad (5.17)$$

$$g_e = 978\,031,846 \text{ mGal}$$

$$g_p = 983\,217,730 \text{ mGal}$$

$$b = 0,005\,302\,3655$$

$$b' = 0,000\,0059$$

cuja gravidade normal é expressa pela fórmula:

$$g_0 = 978031,85(1 + 0,005\,3024 \sin^2 j - 0,000\,0059 \sin^2 2j) \text{ mGal} \quad (5.18)$$

ou, equivalentemente,

$$g_0 = 978\,031,85(1 + 0,005\,278\,895 \sin^2 j + 0,000\,023\,462 \sin^4 j) \text{ mGal}, \quad (5.19)$$

com precisão de 4  $\mu\text{Gal}$ . Esta equação foi chamada de *fórmula internacional da gravidade 1967*.

### 5.3. Potencial anômalo (T)

Chama-se potencial anômalo ou potencial perturbador, T, à diferença entre o geopotencial (W) e o esferopotencial (U) em um mesmo ponto:

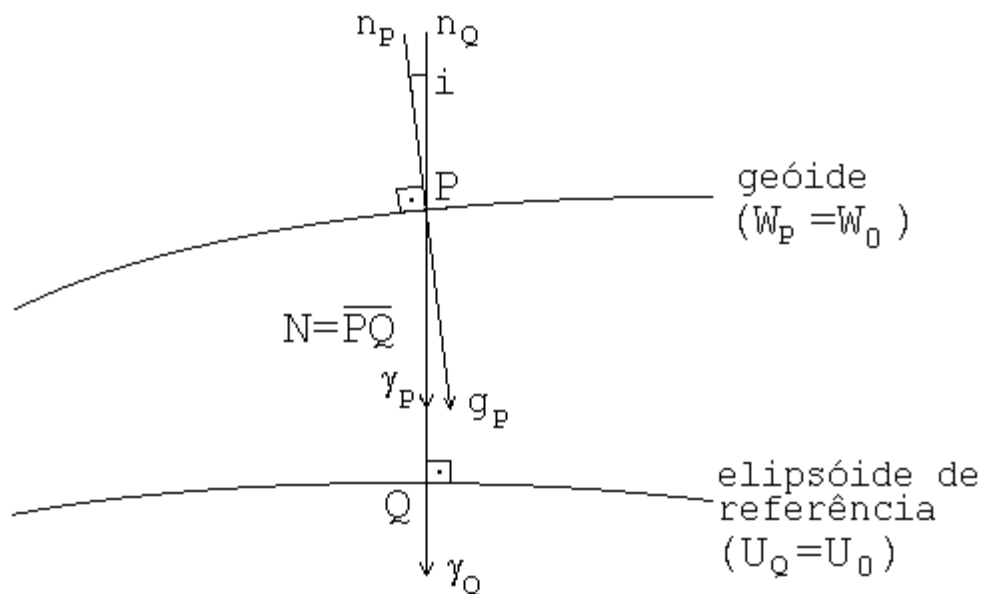
$$T = W - U \quad (5.20)$$

T traduz o efeito das massas anômalas visíveis e invisíveis, cuja soma é nula, independe do potencial de rotação e é uma função harmônica, que satisfaz a equação de Laplace (3.1), e, portanto,

$$\Delta T = 0$$

A figura abaixo mostra, em seção normal, as superfícies do geóide e do elipsóide de referência, onde,

- N é a distância ou altura ou ondulação geoidal;
- i é o desvio ou deflexão da vertical;
- $\mathbf{g}_P$  é o vetor da gravidade no ponto P;
- $\gamma_P$  e  $\gamma_Q$  são vetores da gravidade normal em P e Q;
- $n_P$  e  $n_Q$  são as direções da vertical e da normal nos pontos P e Q, respectivamente.



### 5.4. Anomalia e distúrbio da gravidade ( $\overrightarrow{\Delta g}$ e $\overrightarrow{\delta g}$ )

Considerando que o ponto Q é a projeção do ponto P (no geóide) sobre o elipsóide, o vetor *anomalia da gravidade*  $\overrightarrow{\Delta g}$  é dada por:

$$\overrightarrow{\Delta g} = \vec{g}_p - \vec{\gamma}_q. \quad (5.21)$$

A diferença entre os módulos de  $g_p$  e  $\gamma_q$ ,

$$\Delta g = g_p - \gamma_q, \quad (5.22)$$

é definida como anomalia da gravidade e o ângulo  $i$  entre os dois vetores é o *desvio ou deflexão da vertical*. A anomalia da gravidade é, portanto, a diferença entre a gravidade real em P (geóide) e a gravidade normal em Q (elipsóide de referência). A diferença entre os dois vetores, no mesmo ponto P é denominada *vetor distúrbio da gravidade*,  $\overrightarrow{\delta g}$ , ou seja,

$$\overrightarrow{\delta g} = \vec{g}_p - \vec{\gamma}_p; \quad (5.23)$$

a diferença entre os módulos é chamada de *distúrbio da gravidade*,  $\delta g_p$ ,

$$\delta g_p = g_p - \gamma_p; \quad (5.24)$$

O ângulo entre os dois vetores é praticamente igual ao desvio da vertical uma vez que  $\vec{\gamma}_p$  e  $\vec{\gamma}_q$  têm, aproximadamente a mesma direção (o valor do desvio da vertical pode variar entre 1" e 10" em terrenos planos [Torge, 1980]). Sabendo-se que  $\vec{g}_p$  é o gradiente de  $W_p$  e  $\vec{\gamma}_p$  é o gradiente de  $U_p$ ,

$$\overrightarrow{\delta g} = \mathbf{grad} (W_p - U_p) = \mathbf{grad} T_p. \quad (5.25)$$

Sendo a direção da vertical e da normal praticamente coincidentes, isto é,  $n_p$  é aproximadamente igual a  $n_q$ , tem-se, [Heiskanen & Moritz, 1967]

$$\delta g_p = -\frac{\partial W}{\partial n_p} + \frac{\partial U}{\partial n_q} = -\frac{\partial W}{\partial n_q} + \frac{\partial U}{\partial n_q} = -\frac{\partial T}{\partial n_q} = -\frac{\partial T}{\partial h}, \quad (5.26)$$

onde  $h$  é a altitude geométrica contada ao longo da normal. Considerando que a diferença de potencial é dada pela energia despendida no deslocamento, obtemos

$$dU = U_p - U_0 = U_p - U_q = -\gamma_q N.$$

Então,

$$U_p = U_q - \gamma_q N$$

e

$$T_p = W_p - U_q + \gamma_q N, \quad (5.27)$$

Cuja derivada em relação a  $h$  é

$$\frac{\partial T_p}{\partial h} = \frac{\partial W_p}{\partial h} - \frac{\partial U_Q}{\partial h} + N \frac{\partial \gamma_Q}{\partial h} = -g_p + \gamma_Q + N \frac{\partial \gamma_Q}{\partial h} = -\Delta g + N \frac{\partial \gamma_Q}{\partial h}$$

Utilizando a aproximação entre geóide e elipsóide, tem-se que

$$W_p = U_Q$$

então, da (5.27), obtém-se:

$$T_p = \gamma_Q N, \quad (5.28)$$

conhecida como *fórmula de Bruns*, que correlaciona a altura geoidal com o potencial anômalo. Onde se conclui que

$$N = \frac{T}{g} \quad (5.29)$$

e

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + N \frac{\partial \gamma}{\partial h} \quad (5.30)$$

que é conhecida como a *equação fundamental da Geodésia Física* [Heiskanen & Moritz, 1967] e mostra que magnitudes das anomalias da gravidade dependem:

- a) da distribuição de massa no interior da Terra, principalmente na crosta (1º termo).
- b) de  $N$  e  $i$  (2º termo).

Assim, a partir do conhecimento das anomalias da gravidade sobre a superfície total da Terra, a altura geoidal,  $N$ , e o desvio da vertical,  $i$ , podem ser determinadas ( a solução deste problema é considerada na Geodésia Física). Quando as medidas gravimétricas são utilizadas para fins geológicos, leva-se em conta a relação entre anomalias e distribuição de massa; as influências de  $N$  e  $i$  são, então, negligenciadas ou consideradas na forma de pequenas correções. Como a variação na altura do geóide é pequena e gradual e a magnitude de  $i$  é muito pequena, o fator de correção aplicável varia muito pouco de ponto para ponto e na prática é considerado constante em áreas não muito extensas.

Como o potencial anômalo é uma função harmônica, é possível expandí-lo em série de harmônicos esféricos. Com efeito, considerando que

$$T = W - U \quad (5.31)$$

chega-se a

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(v). \quad (5.32)$$

onde os coeficientes  $\delta C_{nm}$  e  $\delta S_{nm}$  são dados por [Schwarz et al., 1990]:



$$\begin{aligned}\delta C_{2n,0} &= C_{2n,0} - C_{2n,0}^U; & (\text{coeficientes zonais pares}) \\ \delta C_{nm} &= C_{nm} \quad \text{e} \quad \delta S_{nm} = S_{nm} & (\text{demais coeficientes})\end{aligned}\tag{5.33}$$

### 5.5. Altura geoidal e anomalia da gravidade em série de harmônicos esféricos

A ondulação ou altura geoidal associada a um modelo geopotencial em um dado ponto  $P(v, \lambda)$  é dada pela fórmula de Bruns (5.29):

$$N = \frac{1}{\gamma} \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(v). \tag{5.34}$$

Na equação (5.30), o cálculo da derivada parcial de  $\gamma$  em relação a  $h$  é feito normalmente com base na aproximação do elipsóide à esfera. Assim, para um ponto distando  $r$  de uma terra esférica de massa  $M$  sem rotação, pode-se escrever:

$$g \cong \frac{GM}{r^2}$$

e

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -\frac{2GM}{r^3} = -\frac{2\gamma}{r}.$$

Assim, das equações (5.30) e (5.32), considerando a aproximação esférica, chega-se a

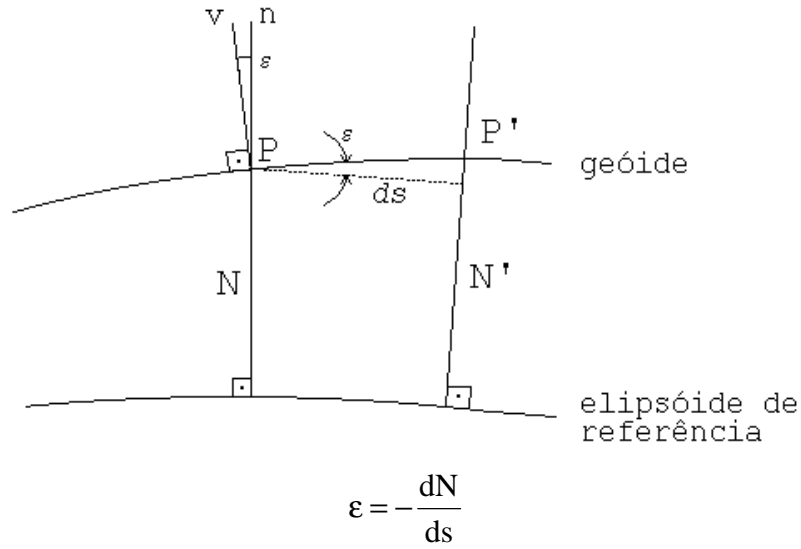
$$\Delta g = \gamma \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n (n-1) \sum_{m=0}^n (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(v). \tag{5.35}$$

Na prática, o somatório dos termos referentes ao grau  $n$  dos harmônicos esféricos é truncado em um valor finito que depende do modelo de geopotencial utilizado. Os modelos mais recentes são derivados de observações de satélites complementadas pela determinação de anomalias da gravidade em pontos na superfície da Terra (inclusive oceânicas), que aumentam o número de equações no sistema a ser invertido e melhoram a precisão dos coeficientes de graus mais elevados, por estarem mais próximos das fontes das anomalias.

### 5.6. Componentes principais do desvio da vertical, em série de harmônicos esféricos

A inclinação  $i$  entre o geóide e o elipsóide de referência em um determinado ponto é dada pelo ângulo entre a vertical e a normal no mesmo ponto e é denominada *desvio da vertical*. O ângulo  $i$  normalmente é decomposto em duas componentes perpendiculares entre si, uma na direção norte-sul ou *componente meridiana*  $x$ , e outra na direção leste-oeste ou *componente do 1º vertical*  $h$ .

Considerando um plano vertical de azimuth arbitrário, figura abaixo,  $ds$  é a distância infinitesimal entre dois pontos P e P', contada positivamente para o norte, e  $\varepsilon$  é a componente do desvio da vertical segundo esse plano arbitrário. Tem-se:



Para uma seção meridiana,  $ds = R d\phi$ , a componente meridiana  $\xi$  é dada por:

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi}. \quad (5.36)$$

sendo  $\phi = 90^\circ - v$ .

A derivada de N em relação a  $\phi$  pode ser obtida a partir da equação (5.34). Assim,

$$\frac{\partial N}{\partial \phi} = \frac{GM}{\gamma \cdot r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial P_{nm}(v)}{\partial \phi} \quad (5.37)$$

onde

$$\frac{\partial P_{nm}(v)}{\partial \phi} = \frac{1}{\sin(v)} \left( n \bar{P}_{nm}(v) \cos(v) - \frac{\sqrt{n-m} \sqrt{n+m} \sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}} \bar{P}_{n-1,m}(v) \right) \quad (5.38)$$

Para uma seção de primeiro vertical,  $ds = R \cos \phi d\lambda$ , a componente do primeiro vertical  $\eta$  é dada por:

$$\eta = -\frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}. \quad (5.39)$$

onde

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n m (-\delta C_{nm} \sin m\lambda + \delta S_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_{nm}(v) \quad (5.40)$$

Neste caso o elemento de arco do primeiro vertical foi considerado igual ao elemento de arco de longitude, tendo em vista os valores infinitesimais aqui tratados e, também, dos pequenos valores que o desvio da vertical assume, sendo da ordem de alguns segundos.

## 6. DETERMINAÇÃO GRAVIMÉTRICA DO GEÓIDE

### 6.1. Fórmula de Stokes

A fórmula de Stokes (George Gabriel Stokes), desenvolvida em 1849, permite o cálculo das ondulações geoidais  $N(v, \lambda)$  a partir dos valores de anomalia da gravidade  $\Delta g(v', \lambda')$ , obtidos na superfície da Terra, considerada como esférica:

$$N(v, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{v'=0}^{\pi} \Delta g(v', \lambda') S(\psi) \sin v' dv' d\lambda', \quad (6.1)$$

sendo  $v$  e  $v'$  as co-latitudes,  $\lambda$  e  $\lambda'$  as longitudes e  $\psi$  a distância esférica entre estes pontos, tal que:

$$\cos \psi = \cos v \cos v' + \sin v \sin v' \cos(\lambda' - \lambda) \quad (6.2)$$

e

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_{n0}(\psi)$$

ou,

$$S(\psi) = \cos \psi + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left[ \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right] \quad (6.3)$$

Designando por  $ds = R^2 \sin v' dv' d\lambda'$  a área de uma quadrícula elementar, tem-se:

$$N(v, \lambda) = \frac{1}{4\pi\gamma R} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{v'=0}^{\pi} \Delta g(v', \lambda') S(\psi) ds. \quad (6.4)$$

### 6.2. Considerações sobre a aplicação da fórmula de Stokes

As hipóteses consideradas no desenvolvimento de Stokes impõem algumas restrições de aplicabilidade de sua fórmula, vistas a seguir:

- (a) Stokes utilizou um modelo esférico de aproximação do geóide e, portanto, erros relativos da ordem do achatamento terrestre serão negligenciados. Sendo o achatamento do elipsóide de referência aproximadamente igual a 0,003, o erro relativo nas alturas geoidais  $N$  é de  $0,003N$ , o que pode resultar em erro absoluto de 30 cm para um valor de  $N$  igual a 100 metros. No Brasil, onde o valor de  $N$  varia de 20 a -30 metros, este erro não ultrapassa os 10 cm.
- (b) Os limites de integração na fórmula de Stokes se estendem à superfície total da Terra, o que significa dizer que os levantamentos gravimétricos devem prover uma cobertura total da superfície do globo (inclusive os oceanos).
- (c) O método de Stokes requer que o potencial anômalo seja uma função harmônica no espaço exterior às massas da Terra, o que implica na necessidade de remoção total das massas externas ao geóide para sua determinação, que por sua vez dá origem ao chamado efeito indireto.
- (d) Para determinações precisas do geóide em regiões de relevo muito acentuado, o efeito indireto deve ser necessariamente incluído no cálculo de  $N$ . A não consideração deste efeito pode produzir erros de até 10 vezes a altura geoidal.
- (e) Considerando que a figura do elipsóide é o modelo mais aproximado da forma da Terra, Stokes adotou como hipóteses dinâmicas e geométricas, que haja coincidência dos respectivos (i) eixo de rotação, (ii) centros de massa e volume, (iii) dos potenciais de gravidade na superfície, e (iv) das massas.

Na prática, os dados gravimétricos, que são normalmente medidos na superfície física, são reduzidos matematicamente ao geóide (Lambert, 1930) e, devido à dificuldade de uma cobertura gravimétrica global, a fórmula de Stokes é modificada para a discretização dos elementos de superfície.

Em 1934, Hirvonen propôs um método de discretização, para solucionar o problema da determinação das ondulações geoidais nos continentes (Gemael, 1999). O método requer a subdivisão da superfície da Terra por um quadriculado geográfico regular (N-S, E-W), que tem sido usado desde então, conforme equação (6.1). A cada quadrícula, que representa uma célula para o cálculo discreto da fórmula de Stokes, pode ser associado um valor médio da anomalia da gravidade.

Santos & Escobar (2004) propuseram o métodos de integração por polígonos de Voronoy ou triângulos de Delonay que utilizam a seguinte equação:

$$N(\phi, \lambda) = \frac{1}{4\pi\gamma R} \sum_{i=1}^n S(\psi) \Delta g(\phi', \lambda') s_i(\phi', \lambda'), \quad (6.5)$$

onde  $\phi = 90^\circ - \nu$ ;  $\phi' = 90^\circ - \nu'$ ;  $n$  é o número de células em que a área de cobertura gravimétrica é discretizada e  $s_i(\phi', \lambda')$  é a área da célula de ordem  $i$ , cujo centro possui as coordenadas  $\phi'$  e  $\lambda'$ .

Quase todos os métodos utilizados para o cálculo da altura geoidal, seja no domínio do espaço - métodos de integração (Novák et al., 2001; Jiang and Duquenne, 1997; Lehmann, 1997) - ou da frequência - "Fast Fourier Transform (FFT)" (Schwarz et al., 1990; Kuroishi, 2001; Haagmans et al., 1993; Forsberg and Sideris, 1993; Stang van Hees, 1990), "Fast Hartley Transform (FHT)", "Fast T Transform (FTT)" (Ayhan, 1997)-, envolvem a discretização da superfície terrestre através do procedimento de gridagem. As anomalias da gravidade observadas, que normalmente não são uniformemente distribuídas, têm que ser interpoladas para se obter uma

informação em um "grid" regularmente espaçado. Devido à morfologia do geóide, em geral levemente ondulada, normalmente este processo não acarreta problemas, entretanto, utiliza-se uma informação interpolada em lugar dos dados originais, o que pode significar uma fonte de erro. Além disso, o processo de gridagem pode consumir muito tempo de processamento e é dependente da escolha da técnica de gridagem e do tamanho das células.

A tradicional técnica espacial 3D de colocação por mínimos quadrados (Tscherning et al., 2001; Forsberg and Tscherning, 1981; Denzel and Wenkel, 1987; Gil et al., 1993; Molina and Ussami, 1999) e os métodos de integração por polígonos de Voronoy ou triângulos de Delonay (Santos & Escobar, 2004), não utilizam a técnica de gridagem, baseando-se nos dados originais e na sua distribuição.

## 6.2. Desvio da vertical. Fórmulas de Vening Meinesz

Um dos métodos empregados para determinar as componentes  $\xi$  e  $\eta$  foi formulado pelo cientista holandês F. A. Vening Meinesz, em 1928, utilizando a relação existente entre as ondulações do geóide e a deflexão da vertical. Trata-se, portanto, de um método gravimétrico, similar ao formulado por Stokes para a determinação das alturas geoidais. As fórmulas de Vening Meinesz são as seguintes:

$$\xi = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos \alpha \cos \phi' d\phi' d\lambda' \quad (6.6)$$

e

$$\eta = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \alpha \cos \phi' d\phi' d\lambda'. \quad (6.7)$$

A diferencial da função de Stokes em relação a  $\psi$ , o termo  $S(\psi)/d\psi$ , é chamado função de Vening Meinesz, e é obtida da equação:

$$\frac{dS(\psi)}{d\psi} = -\frac{\cos \frac{\psi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\psi}{2}} + 8 \sin \psi - 6 \cos \frac{\psi}{2} - 3 \frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{\sin \psi} + 3 \sin \psi \ln \left[ \sin \frac{\psi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right]. \quad (6.8)$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aurenhammer, F (1991) **Voronoi diagrams: A survey of a fundamental geometric data structure**. ACM Comput Survey 23 (3): 345-405
- Ayan, M E (1997) **Updating and computing the geoid using two dimensional fast Hartley transform and fast T transform**. J Geod 71: 362-369
- Chauvenet, W (1854) **Treatise on Plane and Spherical Trigonometry**. J. B. Lippincott Co., Philadelphia, U. S. A.

- Denker, H, Wenzel, H -G (1987) **Local geoid determination and comparison with GPS results.** Bull Géod 61: 349-366
- Forsberg, R, Sideris, M G (1993) **Geoid computations by the multi-band spherical FFT approach.** Manusc Geod 18: 82-90
- Forsberg, R, Tscherning, C C (1981) **The use of height data in gravity field approximation by collocation.** J Geoph Res 86 (B9): 7843-7854
- Gemael, C (1999) **Introdução à Geodésia Física.** Ed. UFPR, Curitiba, Brazil Gil, A J, Sevilla, M J, Rodríguez-Caderot, G (1993) Geoid determination in central Spain from gravity and height data. Bull Géod 67: 41-50
- Haagmans, R, Min, E de, Gelderen, M von (1993) **Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes' integral.** Manusc Geod 18: 227-241
- Hees, G S van (1986) **Precision of the geoid, computed from terrestrial gravity measurements.** Manusc Geod 11: 86-98
- Heiskanen, W and Moritz, H (1967) **Physical Geodesy.** W. H. Freeman, San Francisco.
- Jiang, Z and Duquenne, H (1997) **On fast integration in geoid determination.** J Geod 71: 59-69
- Kuroishi, Y (2001) **An improved gravimetric geoid for Japan, JGEOID98, and relationships to marine gravity data.** J Geod 74 (11-12): 745-765
- Lambert, W D (1930) **The reduction of observed values of gravity to sea level.** Bull Géod 26: 107-181
- Li, J, Sideris, M G (1997) **Marine gravity and geoid determination by optimal combination of satellite altimetry and shipborne gravimetry data.** J Geod 71 (4): 209-216
- Lehman, R (1997) **Fast space-domain evaluation of geodetic surface integrals.** J Geod 71: 533-540
- Molina, E C, Ussami, N (1999) **The geoid in southeastern Brazil and adjacent region: new constraints on density distribution and thermal state of the lithosphere.** J Geodyn 28: 357-374
- Moritz, H (1984) **Geodetic Reference System 1980,** Bull Géod 58 (3): 388-398
- Nóvak, P, Vaníček, P, Véronneau, M, Holmes, S, Featherstone, W (2001) **On the accuracy of modified Stokes's integration in high-frequency gravimetric geoid determination.** J Geod 74 (9): 644-654
- Rapp, R H, Wang, Y M, Pavlis, N K (1991) **The Ohio State University 1991 geopotential and sea surface topography harmonic coefficient models.** Report No. 410, Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State Univ., Columbus
- Rapp, R H and Basíc (1992) **Oceanwide gravity anomalies from GEOS-3, Seasat and Geosat altimeter data.** Geoph Res Lett 19 (19): 1979-1982
- Rupert, J (1988) **A gravitational terrain correction program for IBM compatible personal computers,** Vol. 2.21, Geological Survey of Canada, GSC, Open File 1834
- Santos & Escobar (2004) **Discrete Stokes' integral by means of Voronoy and Delonay Diagrams.** Journal of Geodesy, approved.

- Sideris, M G, She, B B (1995) **A new, high-resolution geoid for Canada and part of the U. S. by the 1D-FFT method.** Bull Géod 69: 92-108
- Sideris, M G (1995) **Fourier geoid determination with irregular data.** J Geod 70(1-2): 2- 12
- Stokes, G G (1849) **On the variation of gravity on the surface of the earth. In: Mathematical and Physical Papers**, Vol. II, New York, pp 131-171 (from the Trans. Of the Cambridge Philos. Soc., Vol. VIII, pp 672-695)
- Schwarz, K P, Sideris, M G and Forsberg, R (1990) **The use of FFT techniques in physical geodesy.** Geoph J Int 100: 485-514
- Tscherning, C C, Radwan, A, Tealab, A A, Mahmoud, S M, Abd El-Monum, M, Hassan, R, El-Syaed, I and Saker, K (2001) **Local geoid determination combining gravity disturbances and GPS/levelling: a case study in the Lake Nasser Area, Aswan, Egypt.** J Geod 75 (7-8): 343-348

## REFERÊNCIAS NA INTERNET

- [1] Geometry in Action, Voronoi Diagrams, (2002).  
<http://www1.ics.uci.edu/~eppstein/gina/voronoi.html>
- [2] Natural Neighbors, What Are They?  
<http://members.iinet.net.au/~watson/natural.html>
- [3] School of Mathematics and Statistics – University of St Andrews, Scotland  
[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Indexes/Full\\_Alph.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Indexes/Full_Alph.html)