# Introdução a métodos potenciais

Vanderlei C. Oliveira Jr.

2025

# O curso

- Sistemas de Coordenadas
- Campo de gravidade da Terra
- Campo magnético da Terra
- Elementos de teoria do potencial
- Gravimetria
- Magnetometria
- Modelagem direta
- Separação regional residual
- Técnicas para detecção de bordas
- Deconvolução de Euler
- Transformações de campos potenciais
- Inversão

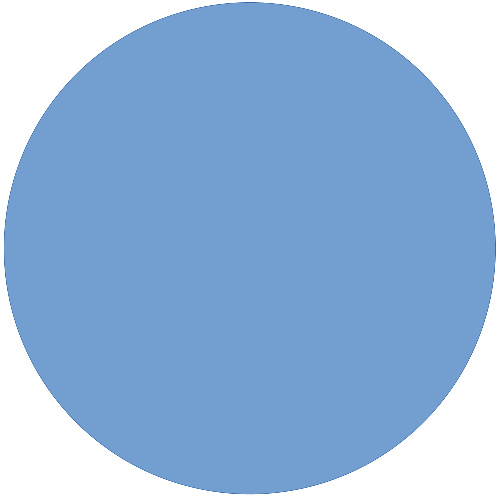
# O curso

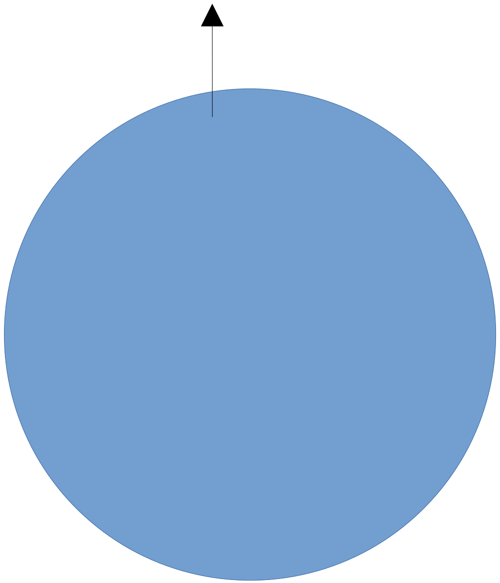
- Sistemas de Coordenadas
- **Campo de gravidade da Terra**
- **Campo magnético da Terra**
- Elementos de teoria do potencial
- Gravimetria
- Magnetometria
- Modelagem direta
- Separação regional residual
- Técnicas para detecção de bordas
- Deconvolução de Euler
- Transformações de campos potenciais
- Inversão

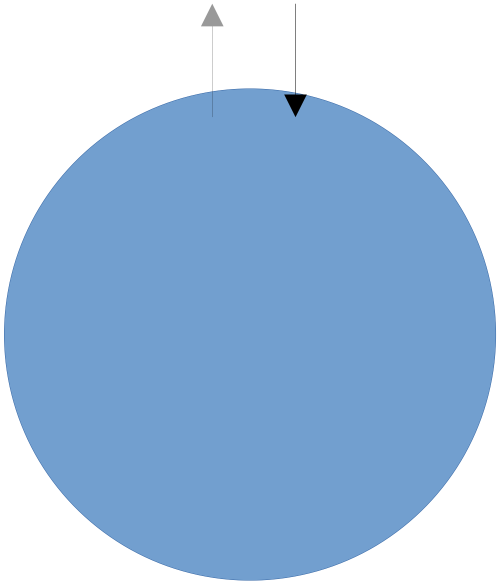
# O curso

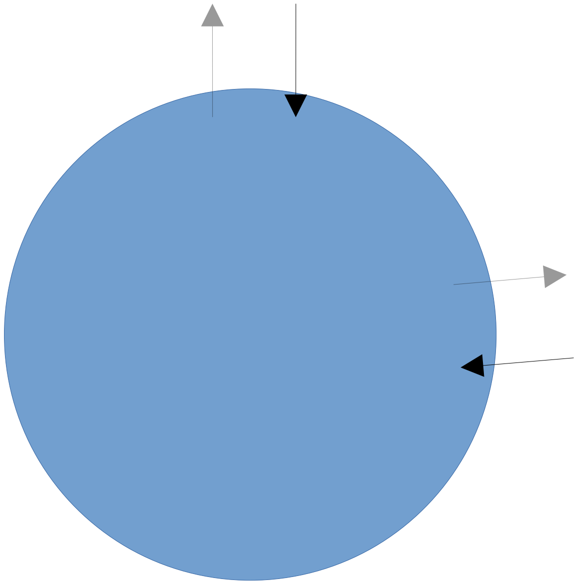
- Sistemas de Coordenadas
- **Campo de gravidade da Terra**
- **Campo magnético da Terra**
- Elementos de teoria do potencial
- Gravimetria
- Magnetometria
- Modelagem direta
- Separação regional residual
- Técnicas para detecção de bordas
- Deconvolução de Euler
- Transformações de campos potenciais
- Inversão

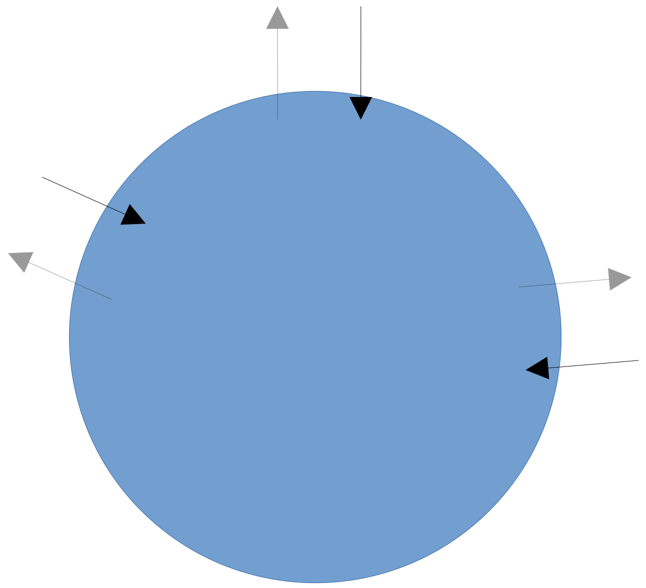
O quê acontece quando a gente pula ou joga um objeto para cima?

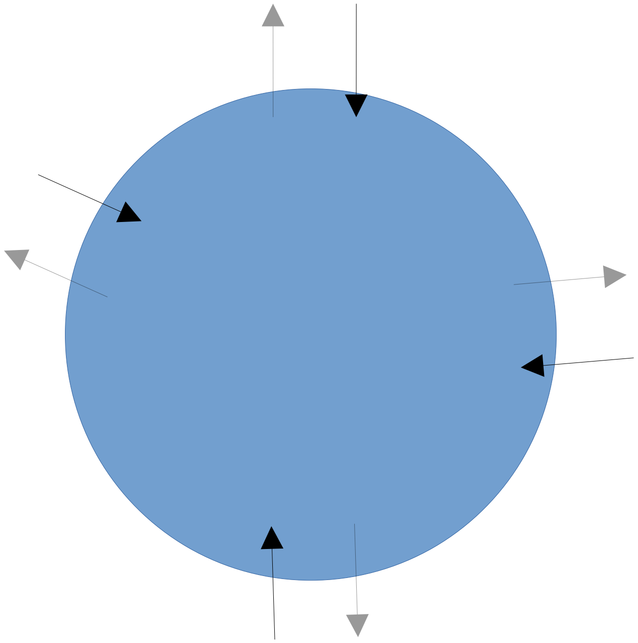




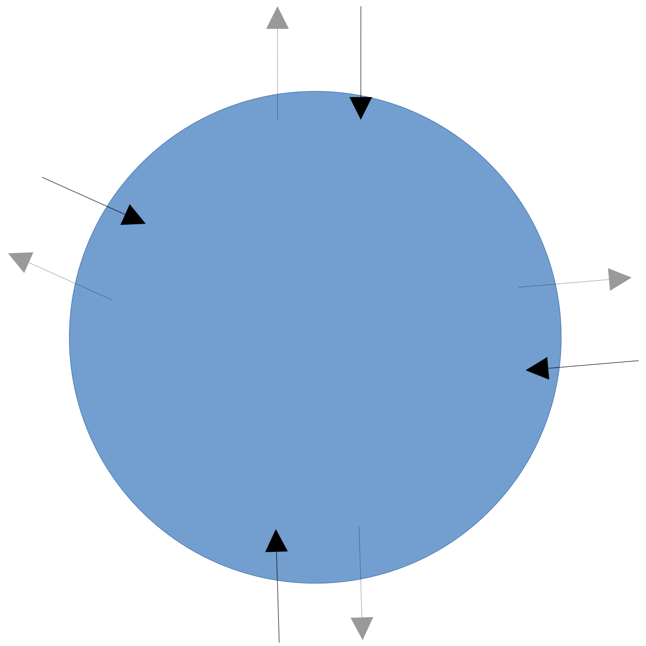






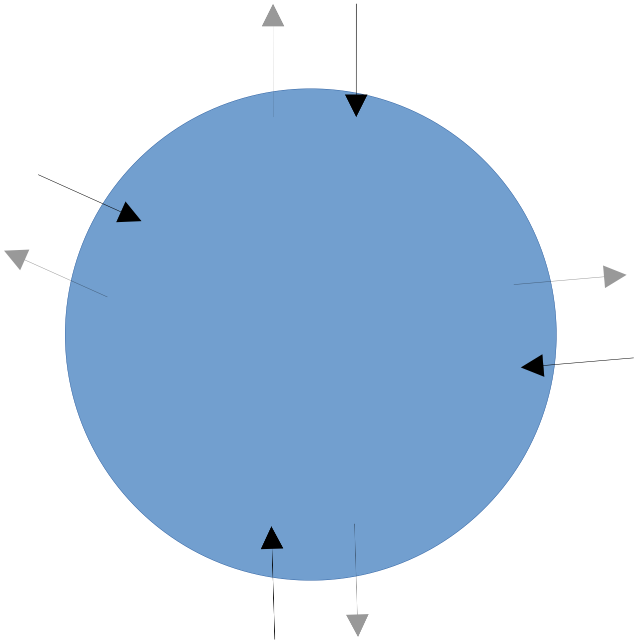


Um objeto de massa m na superfície da Terra experimenta uma força que aponta, aproximadamente, para o centro da Terra.



Um objeto de massa m na superfície da Terra experimenta uma força que aponta, aproximadamente, para o centro da Terra.

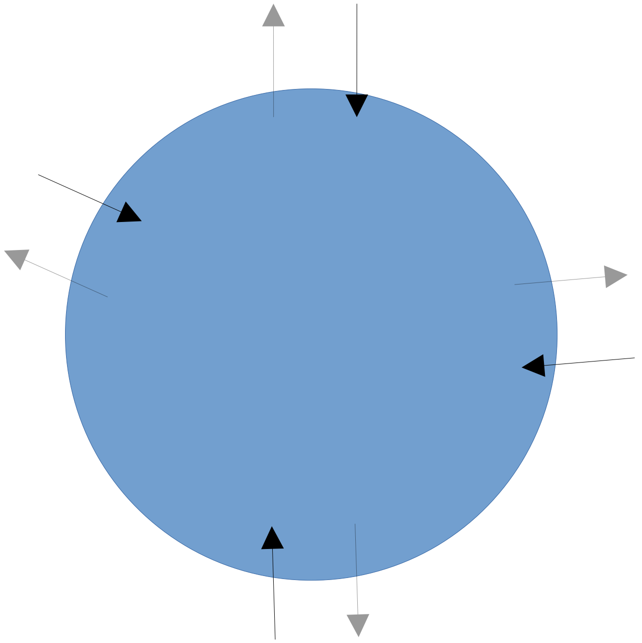
Esta força diminui a intensidade à medida em que o objeto se afasta da Terra.



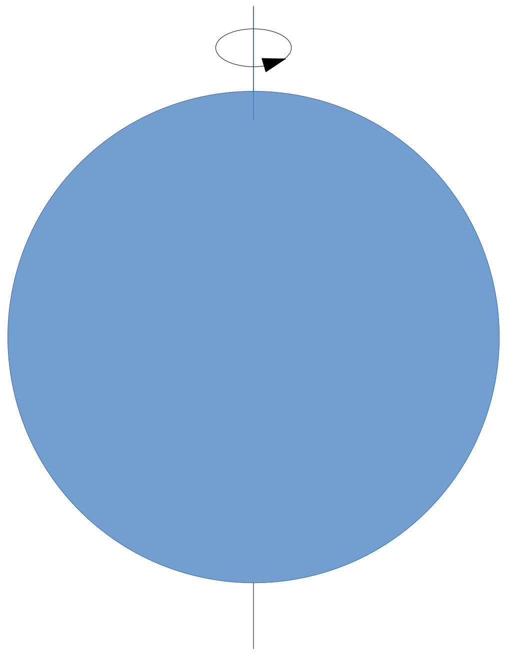
Um objeto de massa m na superfície da Terra experimenta uma força que aponta, aproximadamente, para o centro da Terra.

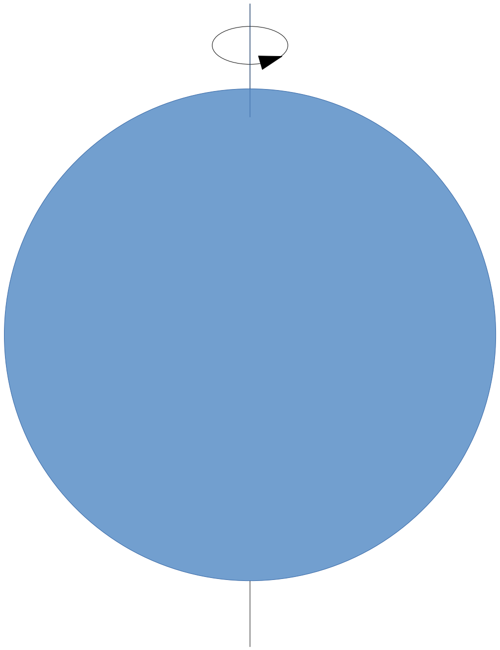
Esta força diminui a intensidade à medida em que o objeto se afasta da Terra.

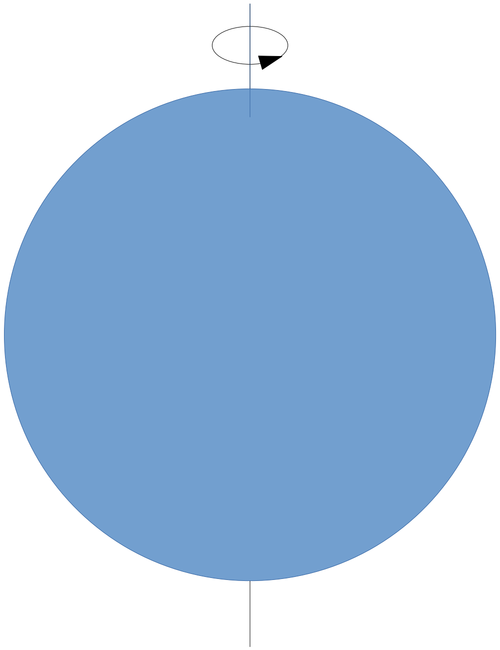
Além disso, sabemos que a Terra gira em torno de si mesma.

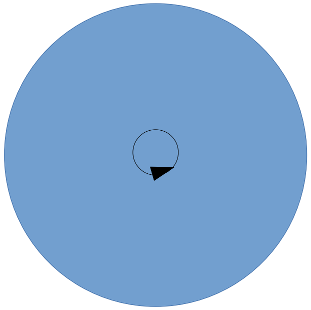


Além disso, sabemos que a Terra gira em torno de si mesma.

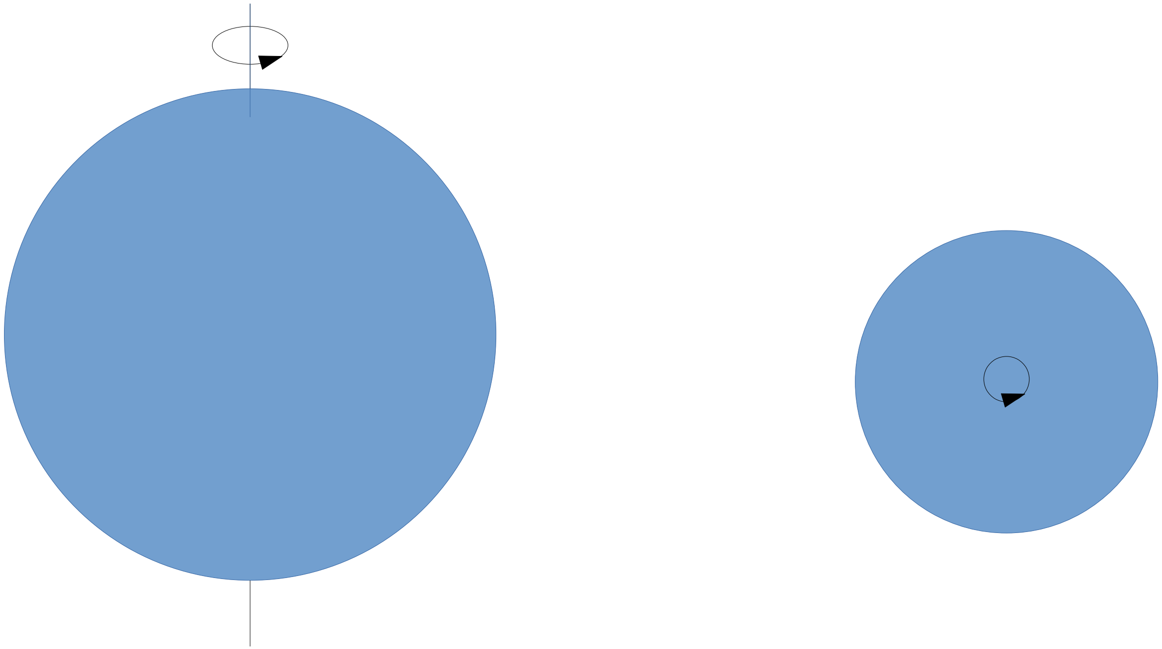


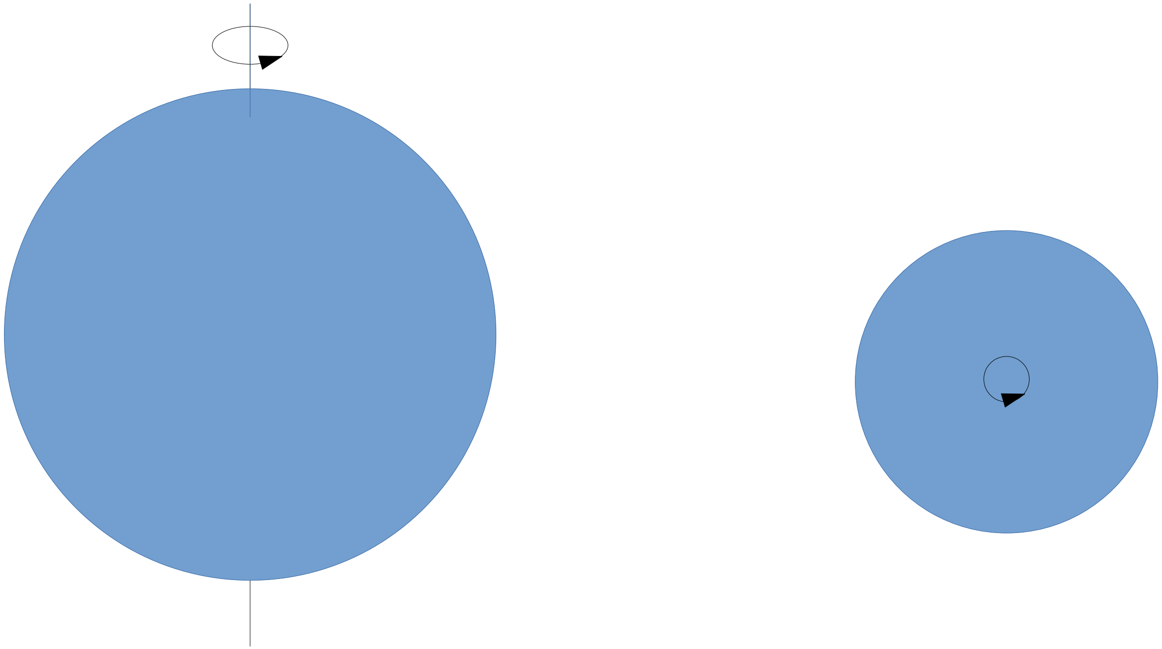


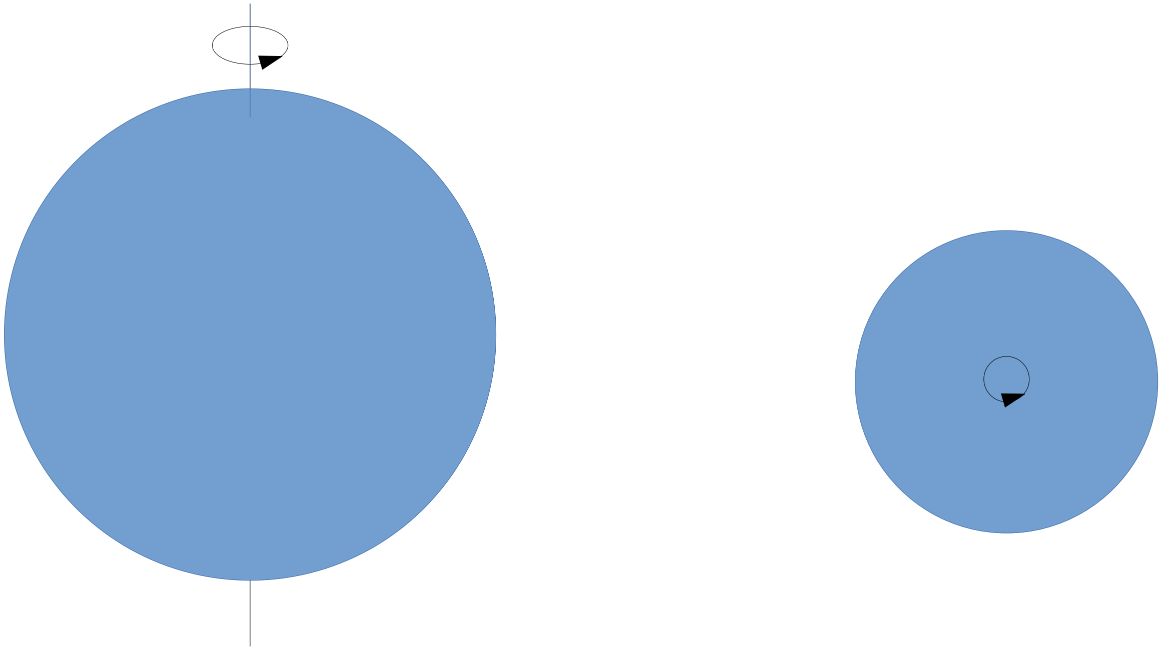


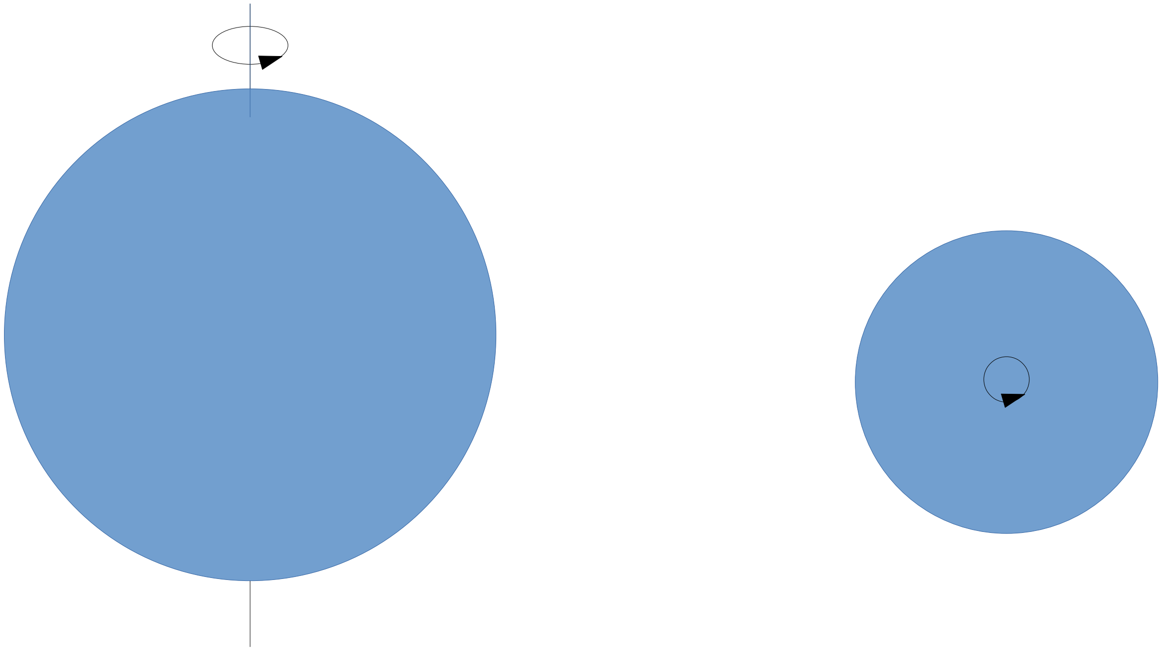


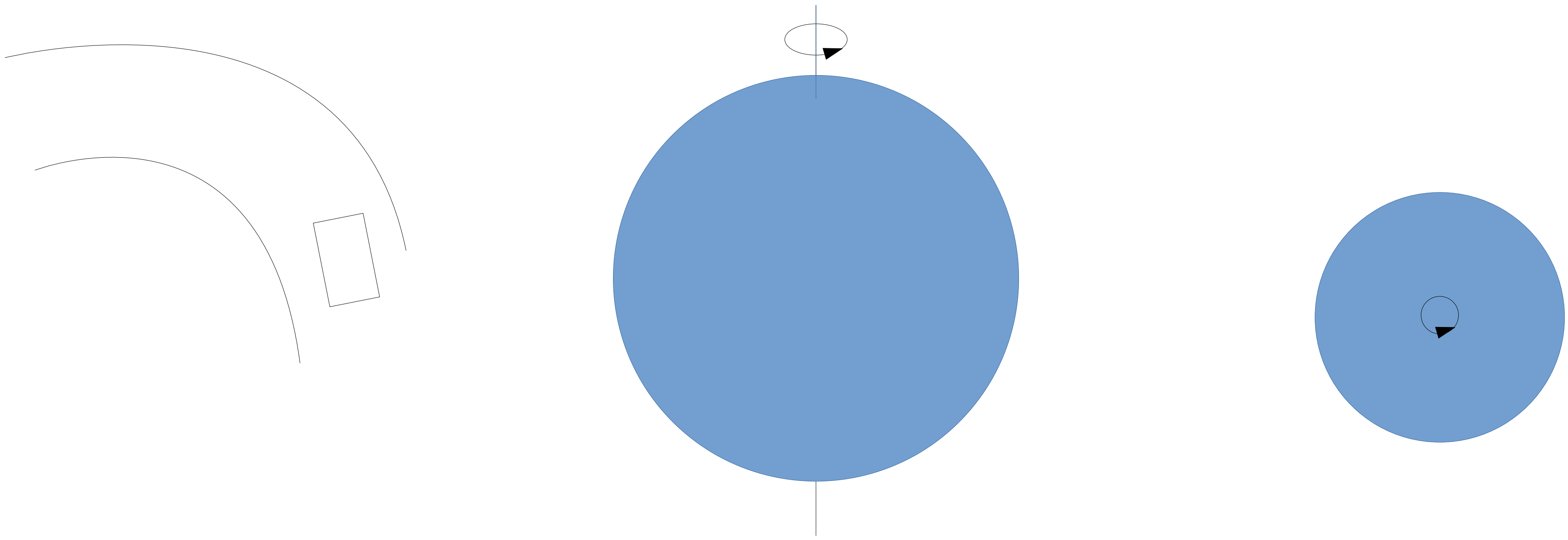
Olhando sobre o
eixo de rotação

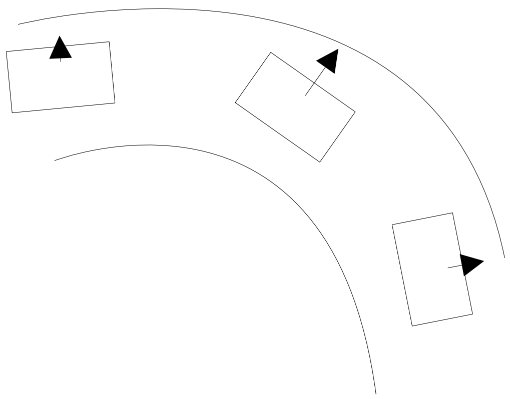
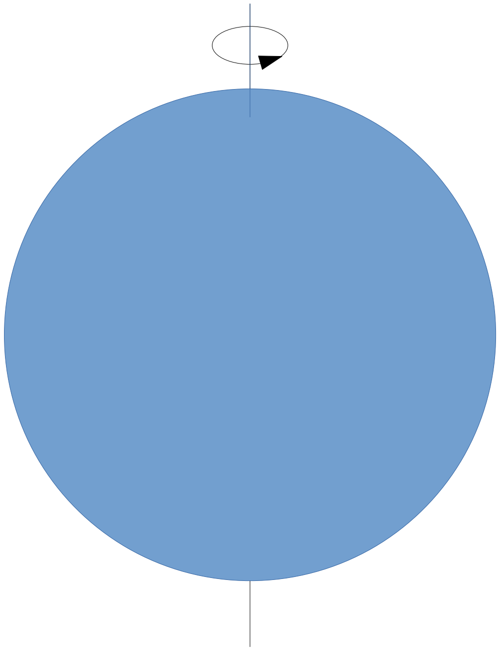
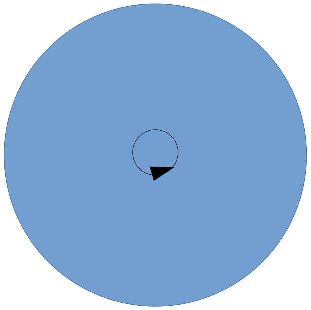




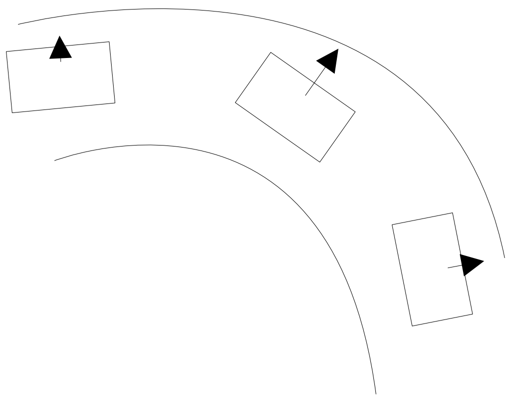


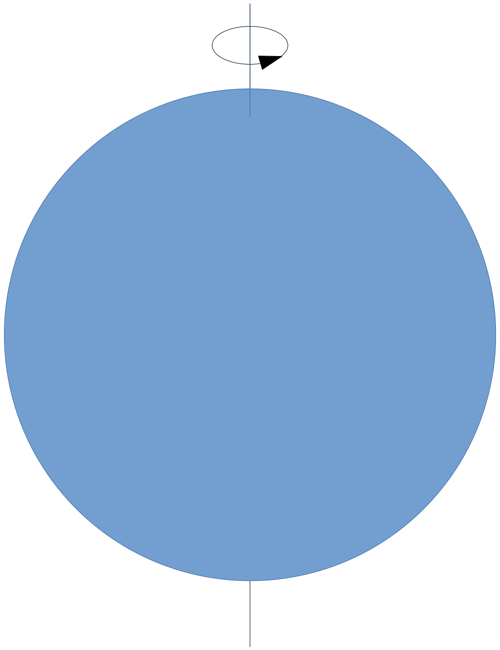


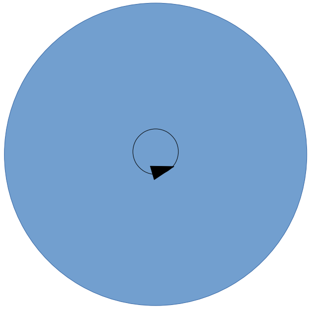


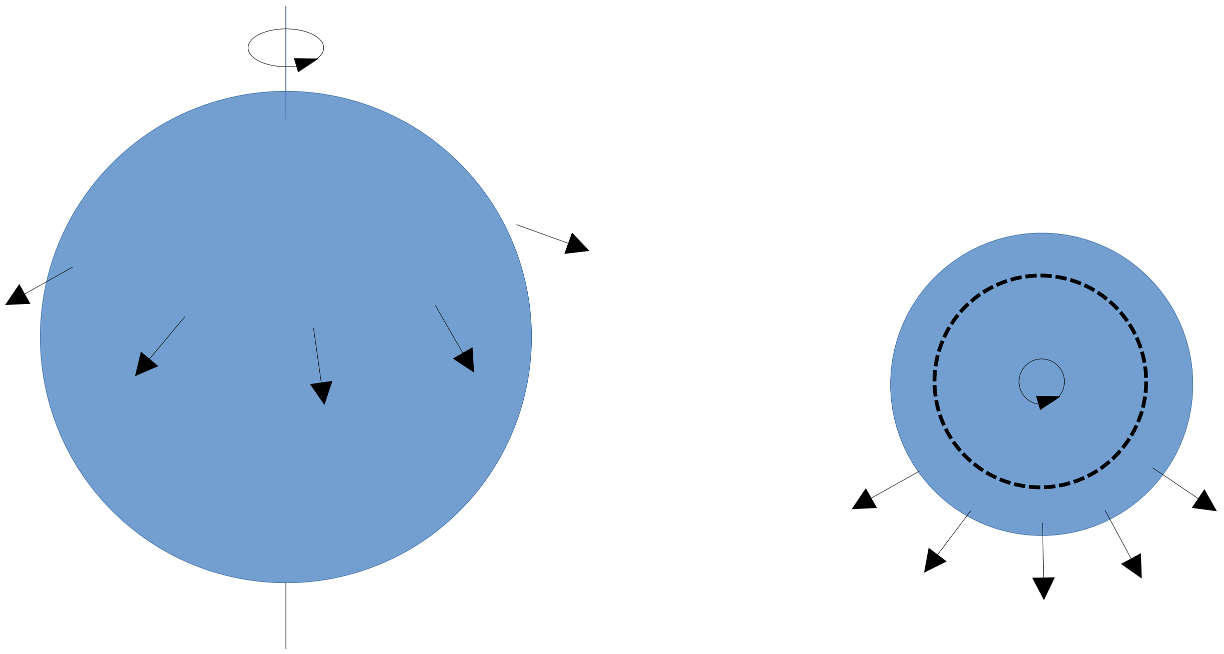




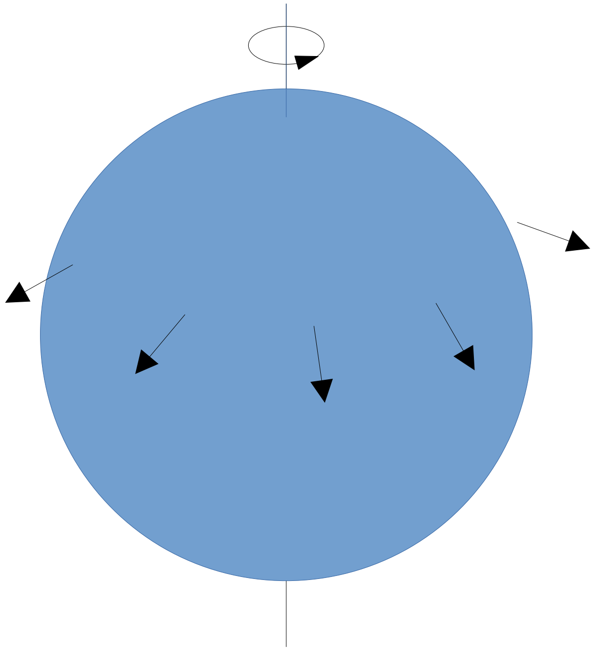
Quem está dentro do carro experimenta uma força para fora da curva.



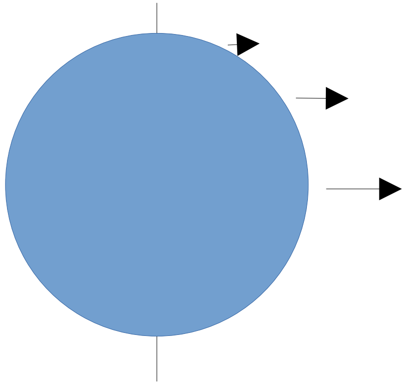


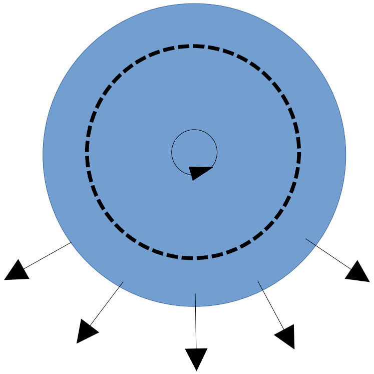




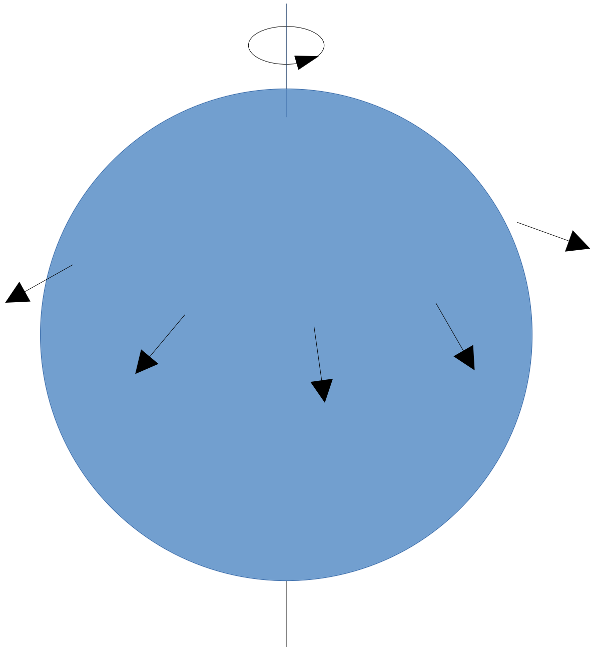


Olhando perpendicular ao eixo de rotação

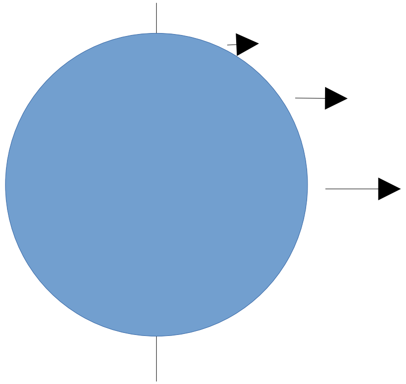


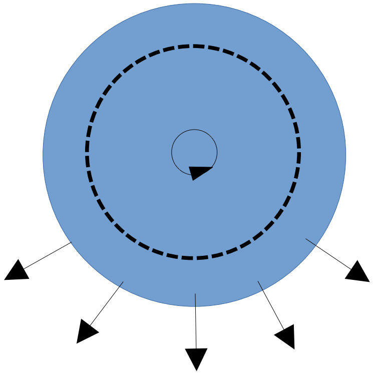


Um objeto de massa m na superfície da Terra experimenta uma força que aponta para fora da Terra, na direção perpendicular ao eixo de rotação.



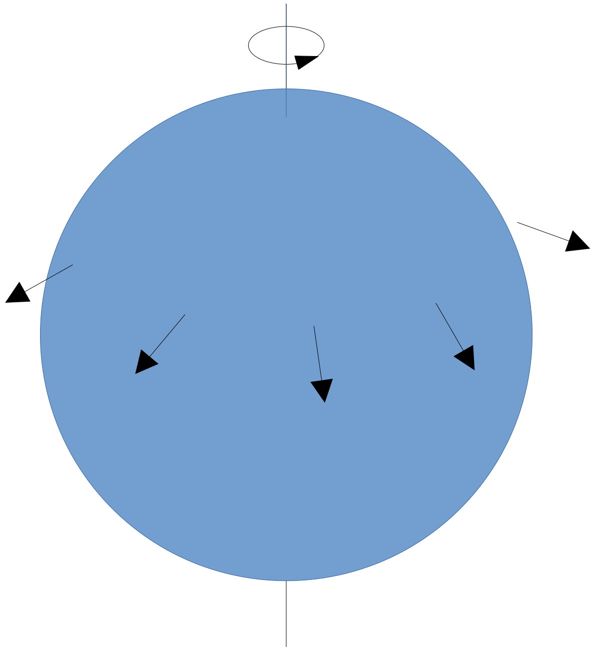
Olhando perpendicular ao eixo de rotação



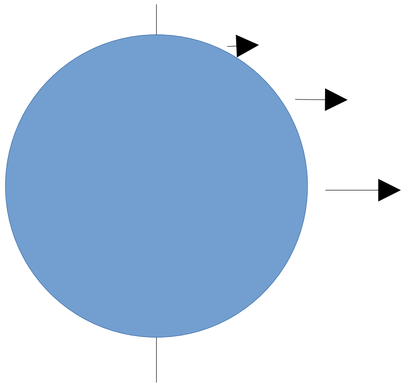


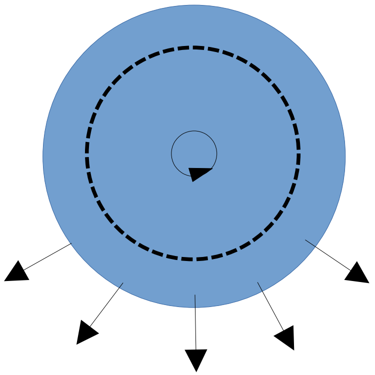
Um objeto de massa m na superfície da Terra experimenta uma força que aponta para fora da Terra, na direção perpendicular ao eixo de rotação.

Esta força aumenta com a distância até o eixo de rotação da Terra.

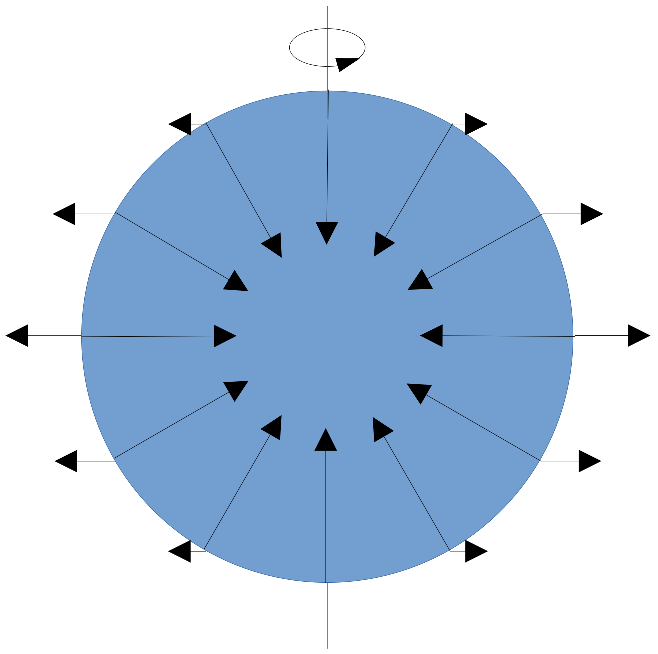


Olhando perpendicular ao eixo de rotação

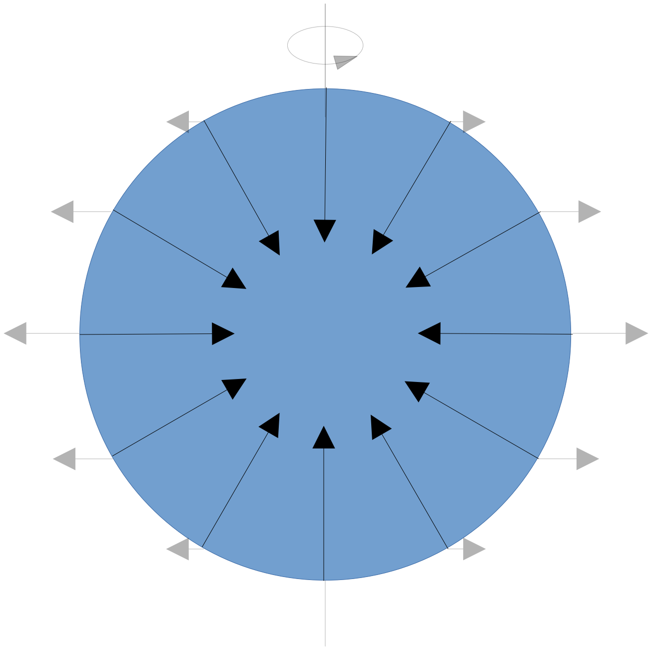




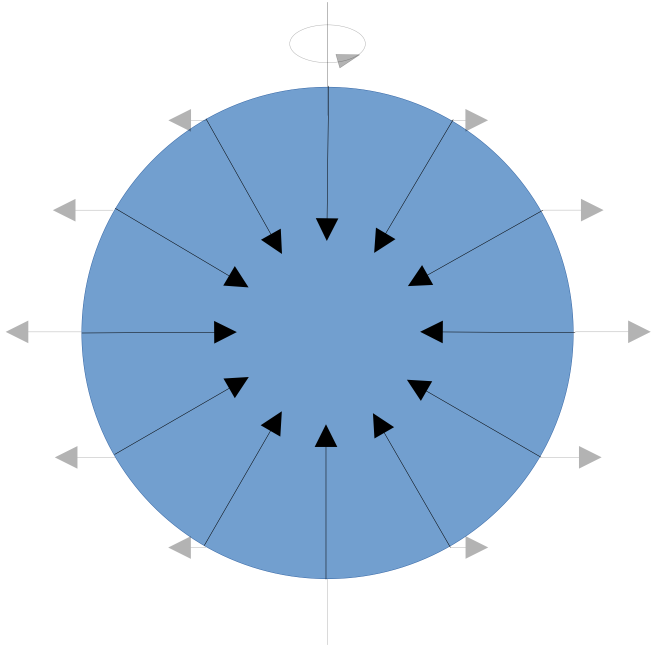
Um objeto de massa m na superfície da Terra experimenta uma força resultante (**força de gravidade**) que é a soma daquela que aponta, aproximadamente, para o centro da Terra (**força gravitacional**) e aquela que aponta para fora da Terra, perpendicular ao eixo de rotação (**força centrífuga**).



Um objeto de massa m na superfície da Terra experimenta uma força resultante (**força de gravidade**) que é a soma daquela que aponta, aproximadamente, para o centro da Terra (**força gravitacional**) e aquela que aponta para fora da Terra, perpendicular ao eixo de rotação (**força centrífuga**).



Um objeto de massa m na superfície da Terra experimenta uma força resultante (**força de gravidade**) que é a soma daquela que aponta, aproximadamente, para o centro da Terra (**força gravitacional**) e aquela que aponta para fora da Terra, perpendicular ao eixo de rotação (**força centrífuga**).



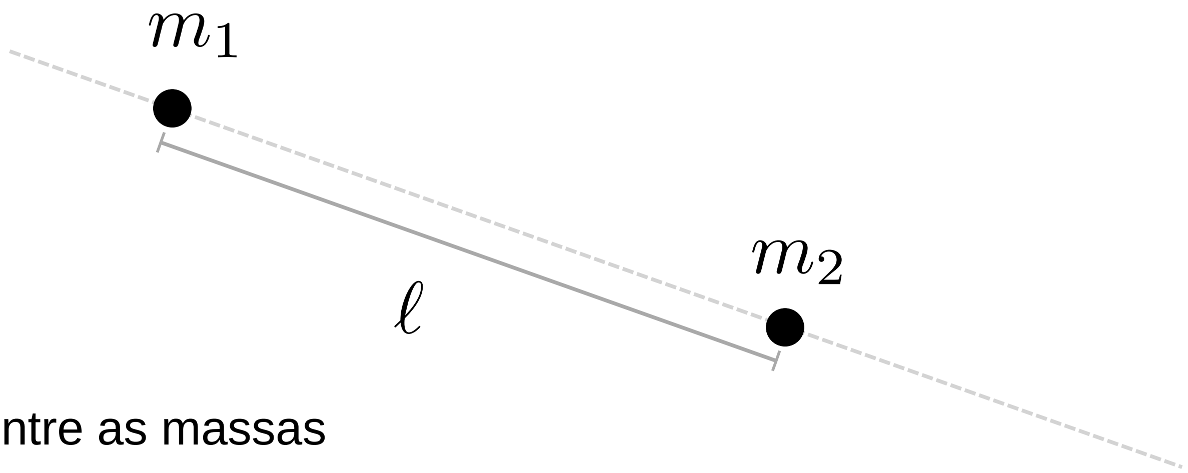
Para entender a força gravitacional entre corpos 3D, precisamos entender:

(i) A força gravitacional entre corpos pequenos;

(ii) Que um corpo 3D é formado por um conjunto de corpos pequenos (pedaços) e

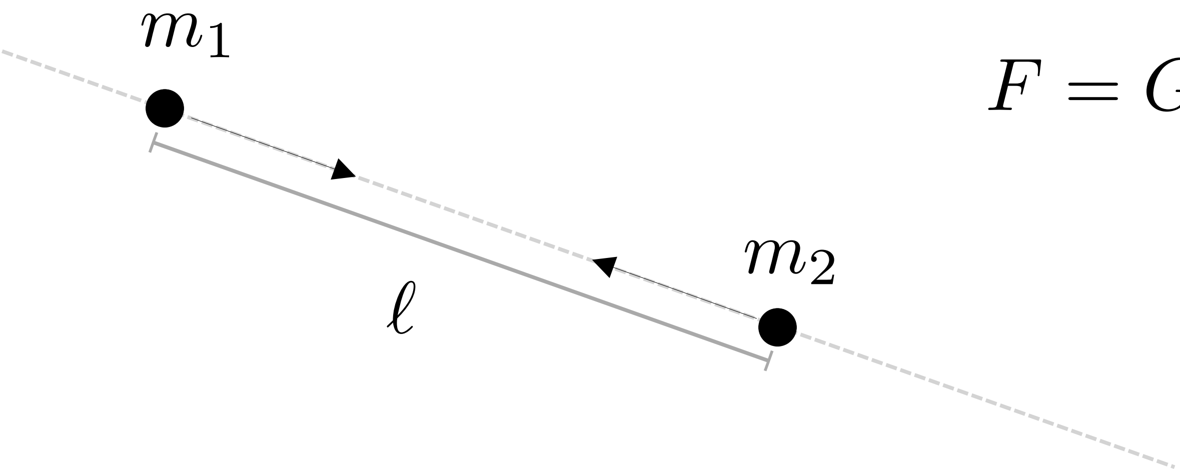
(iii) Que a força gravitacional exercida por um corpo 3D é a resultante da força gravitacional exercida por cada um de seus pedaços.

Considere duas massas
pontuais ...

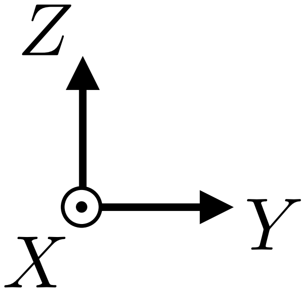



Distância entre as massas pontuais

Neste caso, Isaac Newton propôs que a intensidade $F$ da força gravitacional é proporcional ao produto das massas $(m_1\ m_2)$ e inversamente proporcional ao quadrado da distância $\ell$ entre elas:

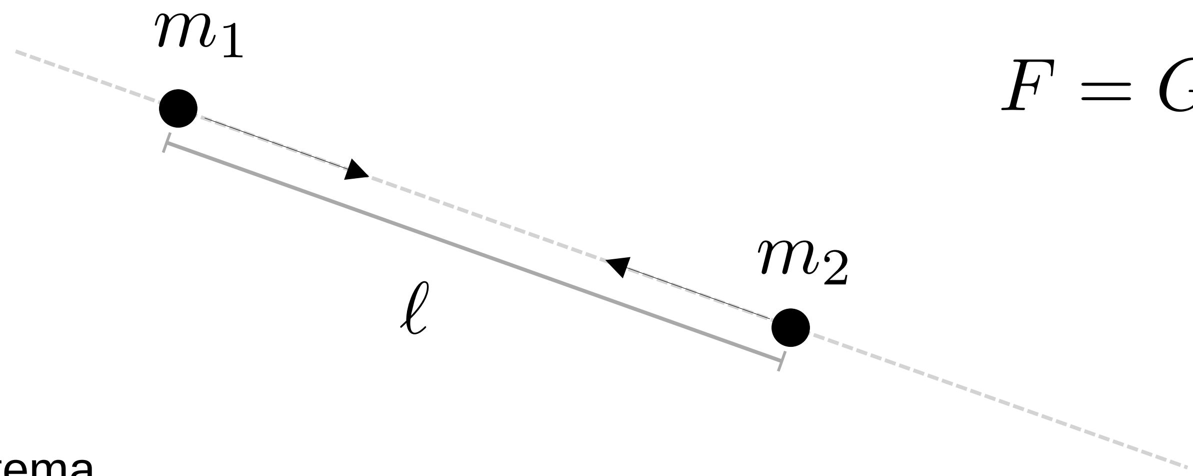



$$F = G\frac{m_1\, m_2}{\ell^2}$$

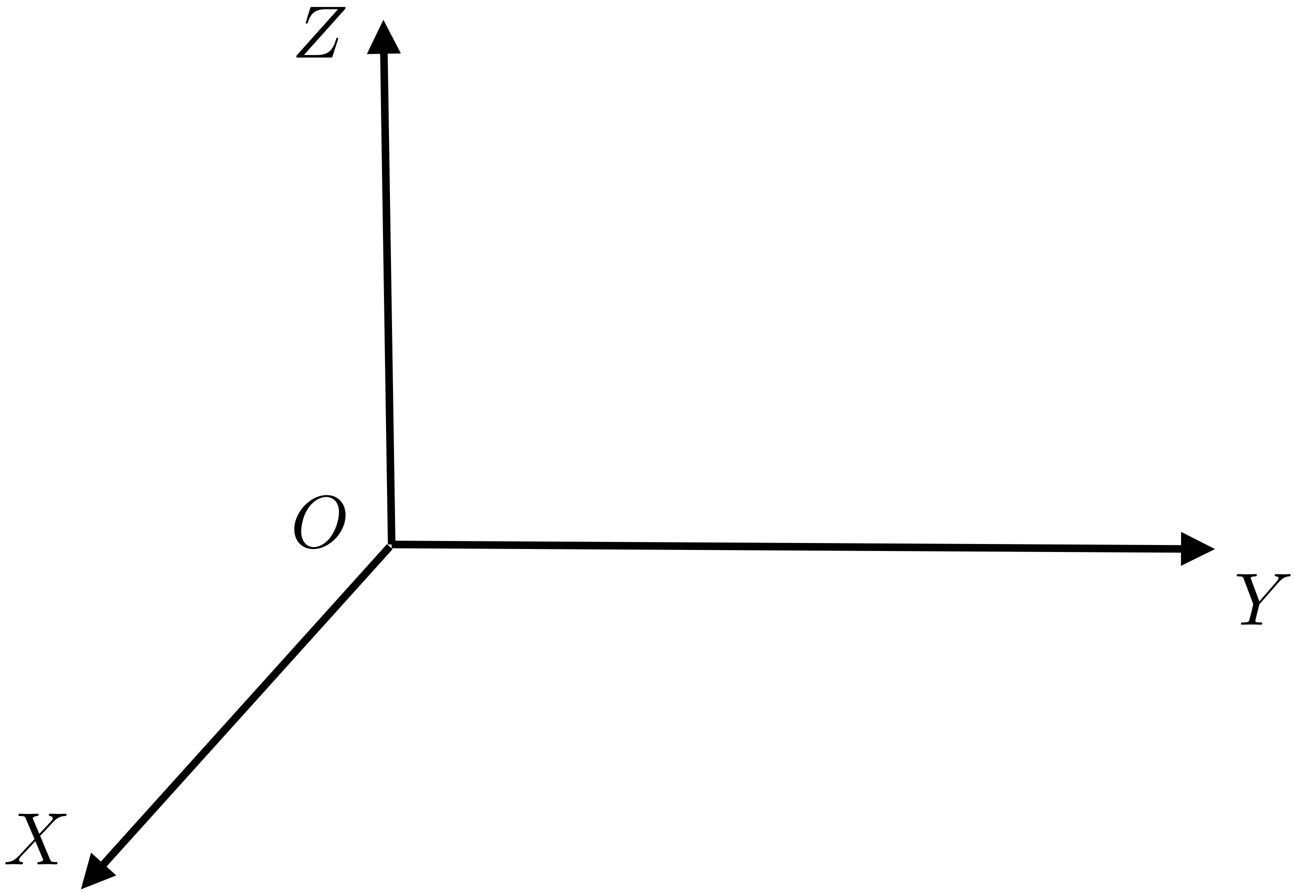


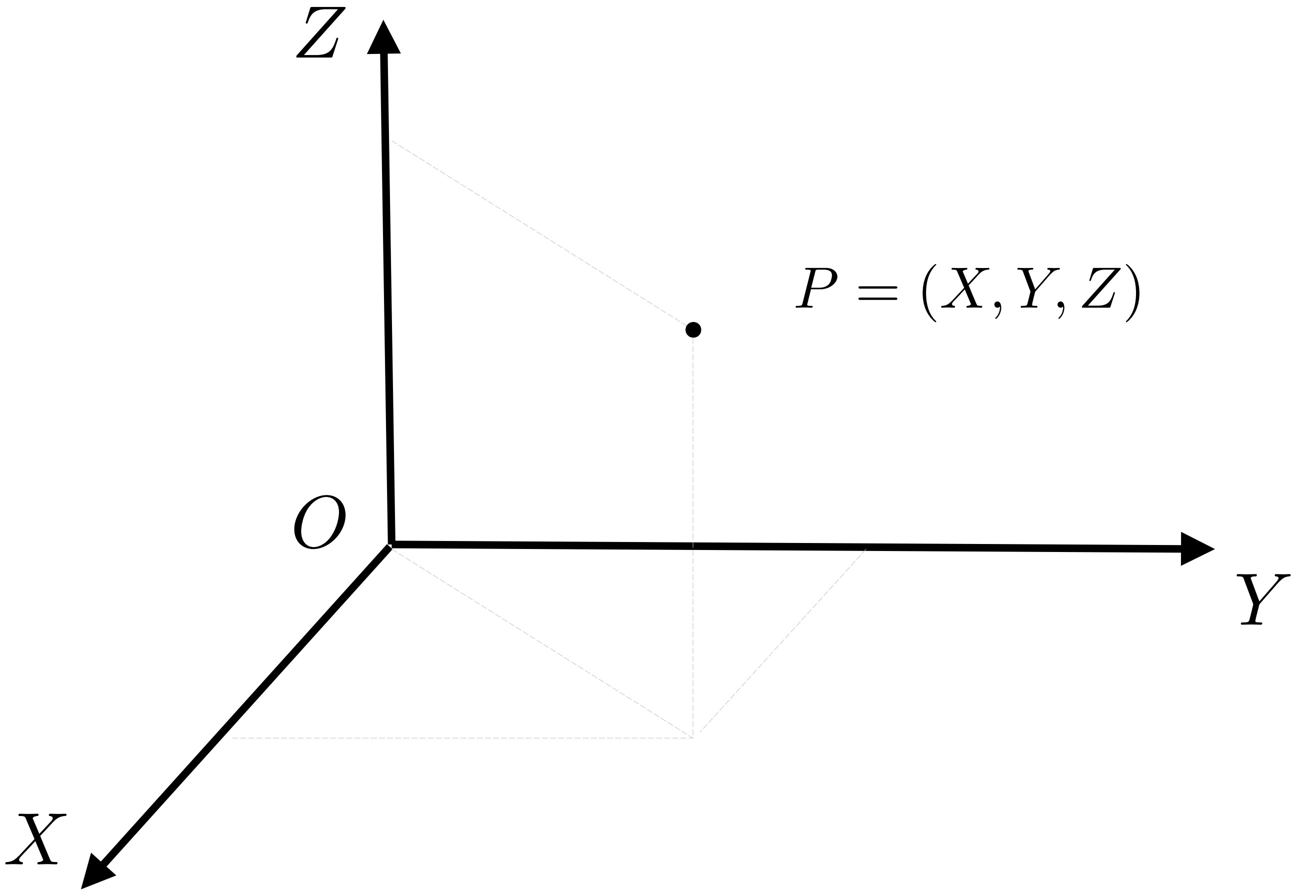

Neste caso, Isaac Newton propôs que a intensidade $F$ da força gravitacional é proporcional ao produto das massas $(m_1 \; m_2)$ e inversamente proporcional ao quadrado da distância $\ell$ entre elas:

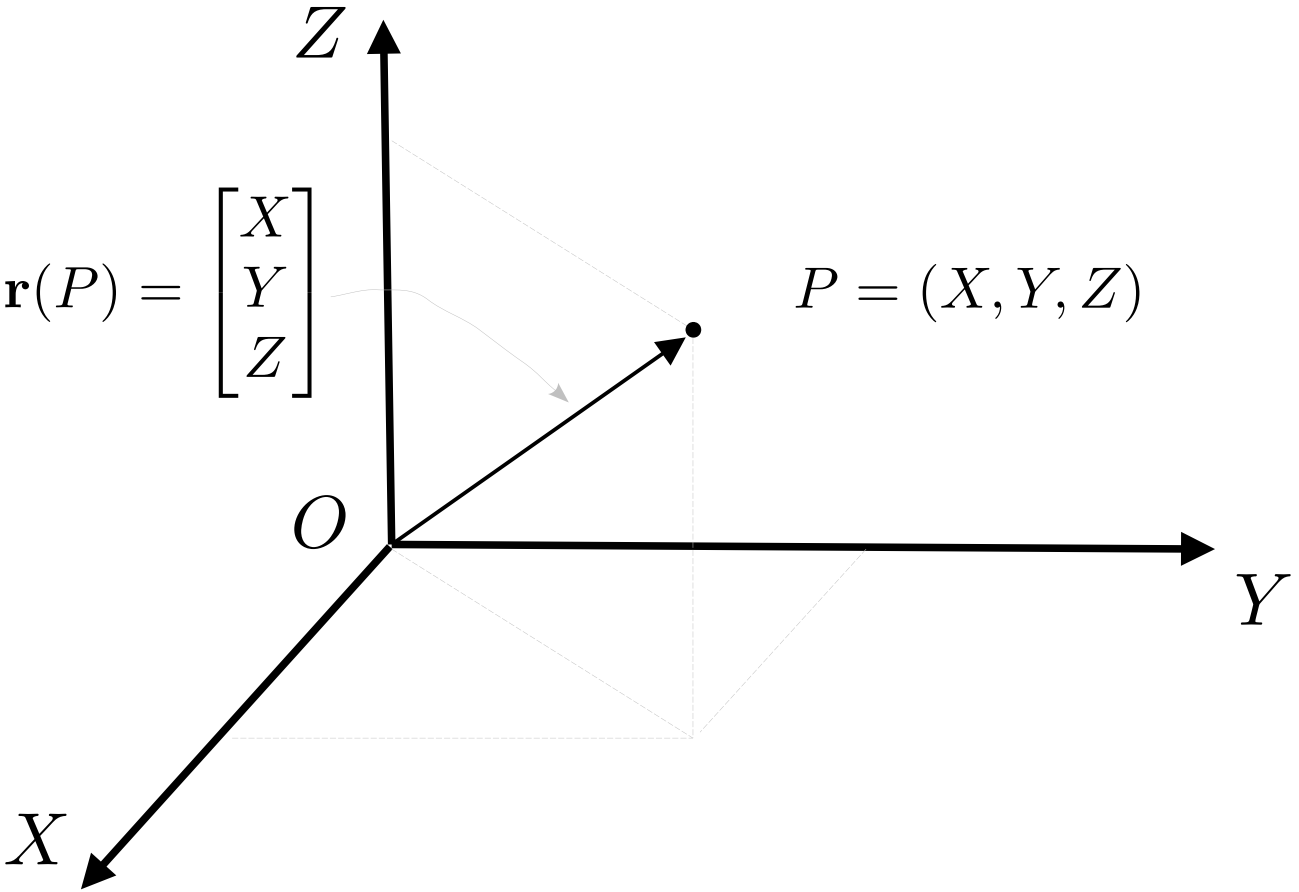
$$F = G\frac{m_1 \, m_2}{\ell^2}$$




Considere um sistema arbitrário de coordenadas Cartesianas ...

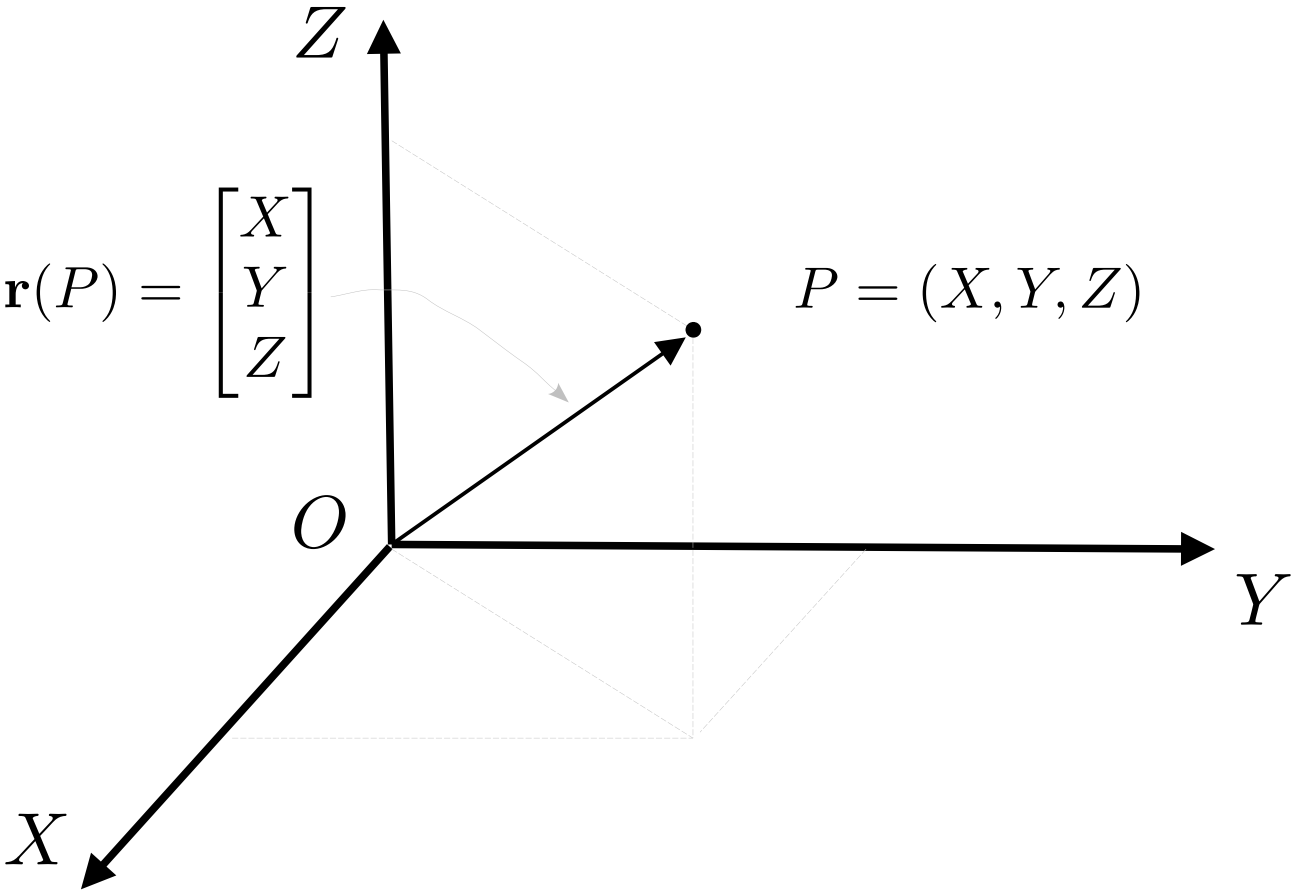

Z
O
Y
X

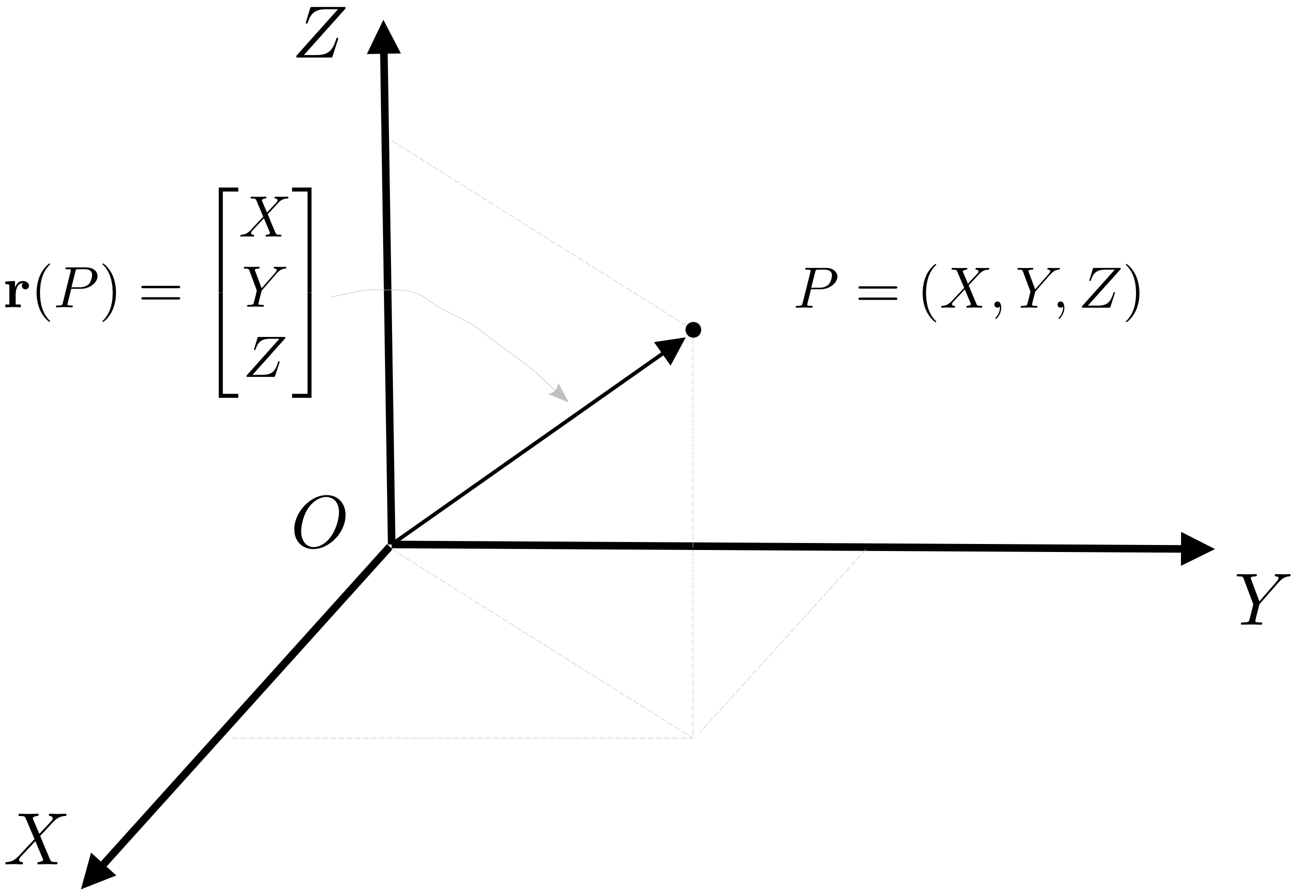

Z
$P = (X, Y, Z)$
O
Y
X


Z
$\mathbf{r}(P) = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$
$P = (X, Y, Z)$
O
Y
X

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(P_i)$$

$$P_i = (X_i, Y_i, Z_i)$$






$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(P_i)$$

$$P_i = (X_i, Y_i, Z_i)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}(P')$$

$$P' = (X', Y', Z')$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(P_i)$$

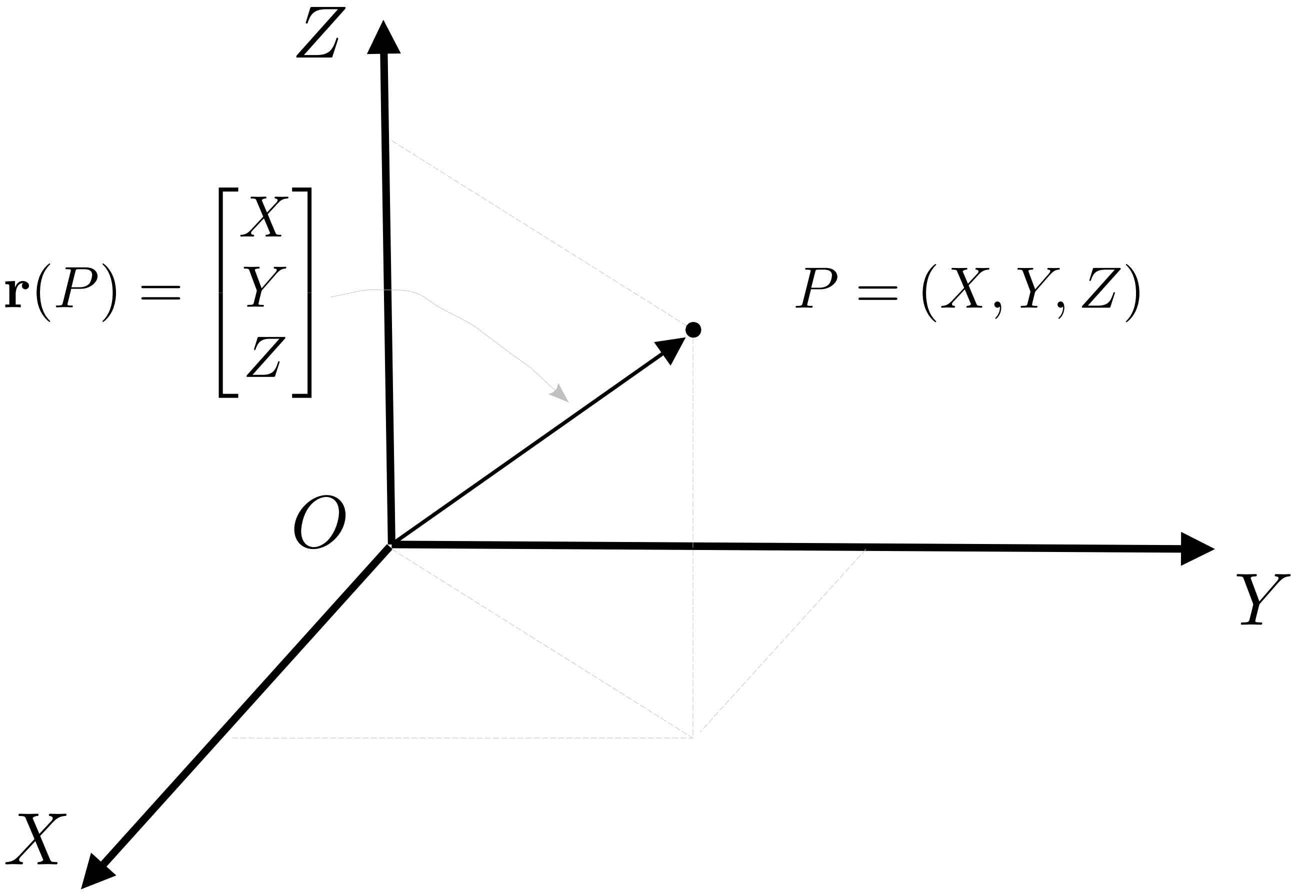
$$P_i = (X_i, Y_i, Z_i)$$

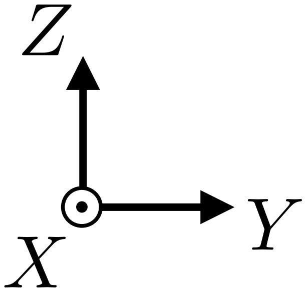
$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}(P')$$

$$P' = (X', Y', Z')$$

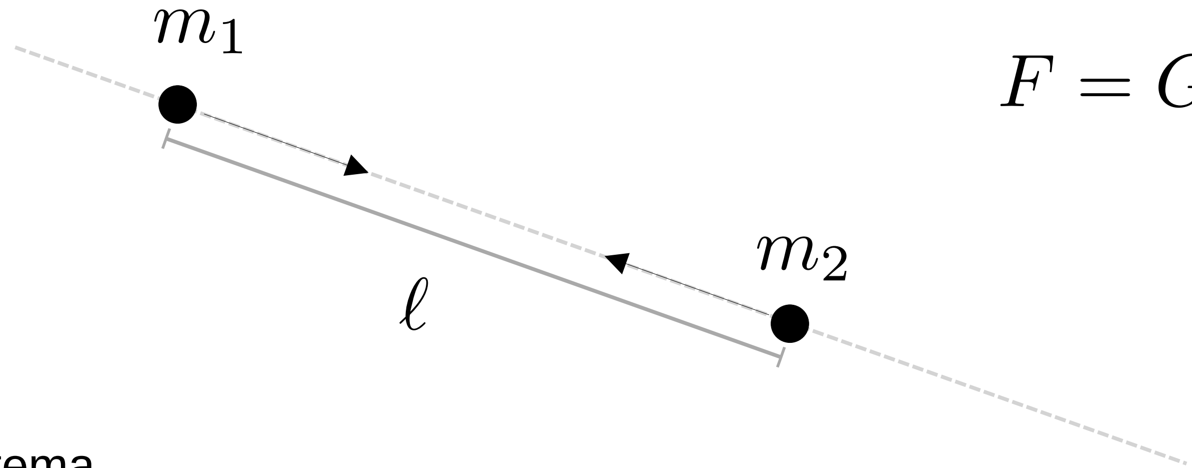
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(P)$$

$$P = (X, Y, Z)$$





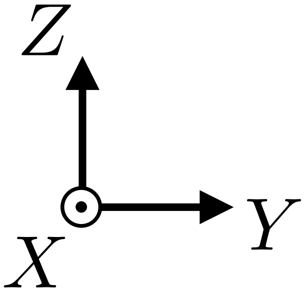

Neste caso, Isaac Newton propôs que a intensidade $F$ da força gravitacional é proporcional ao produto das massas $(m_1 \; m_2)$ e inversamente proporcional ao quadrado da distância $\ell$ entre elas:

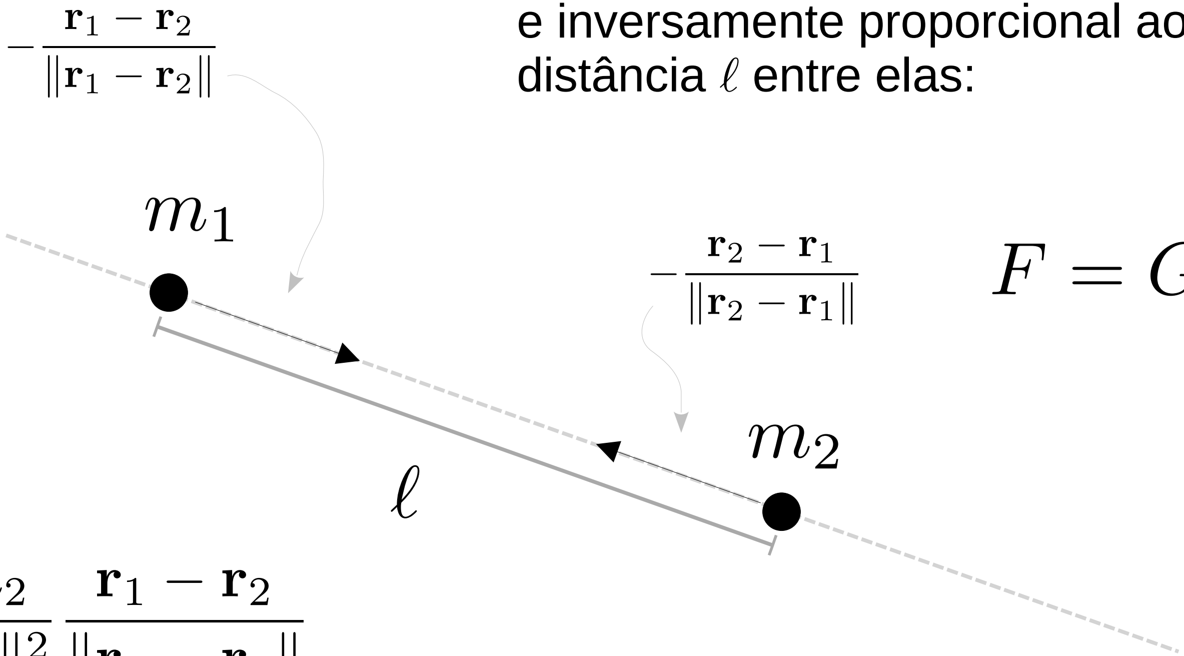



$$F = G\frac{m_1\,m_2}{\ell^2}$$

Considere um sistema arbitrário de coordenadas Cartesianas ...

Neste caso, Isaac Newton propôs que a intensidade $F$ da força gravitacional é proporcional ao produto das massas $(m_1\ m_2)$ e inversamente proporcional ao quadrado da distância $\ell$ entre elas:



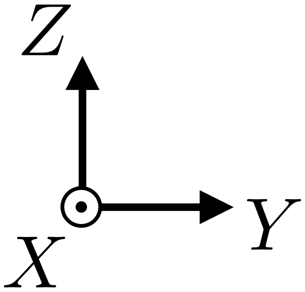

$$F = G\,\frac{m_1\,m_2}{\ell^2}$$

$$\ell = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$$

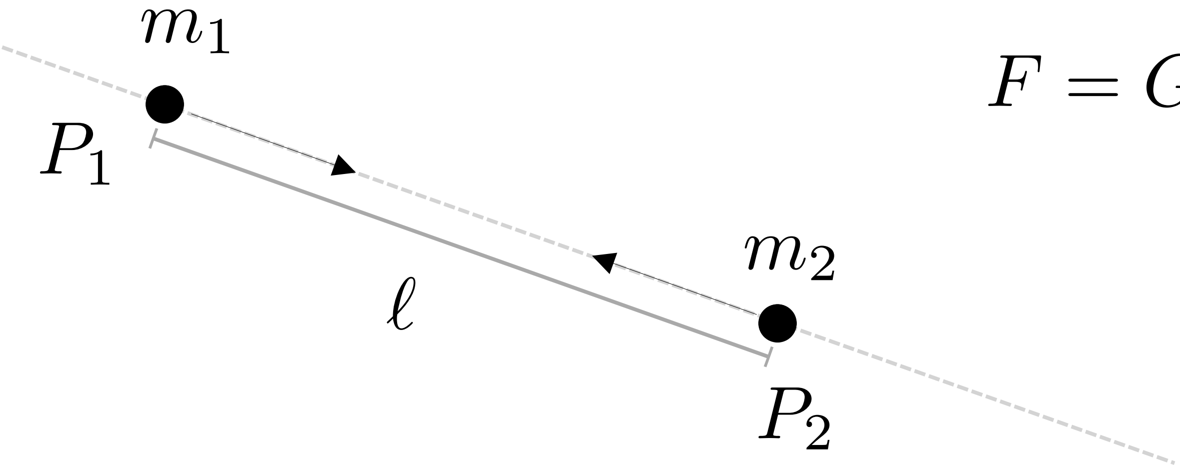
$$\mathbf{F}_1 = -\frac{G\,m_1\,m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2}\,\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{G\,m_1\,m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2}\,\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$



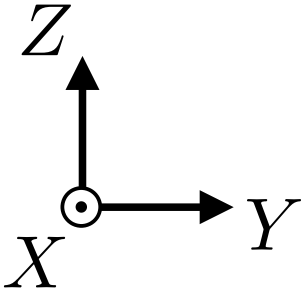

Neste caso, Isaac Newton propôs que a intensidade $F$ da força gravitacional é proporcional ao produto das massas $(m_1\ m_2)$ e inversamente proporcional ao quadrado da distância $\ell$ entre elas:




$$F = G\frac{m_1\, m_2}{\ell^2}$$

$$\ell = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$$

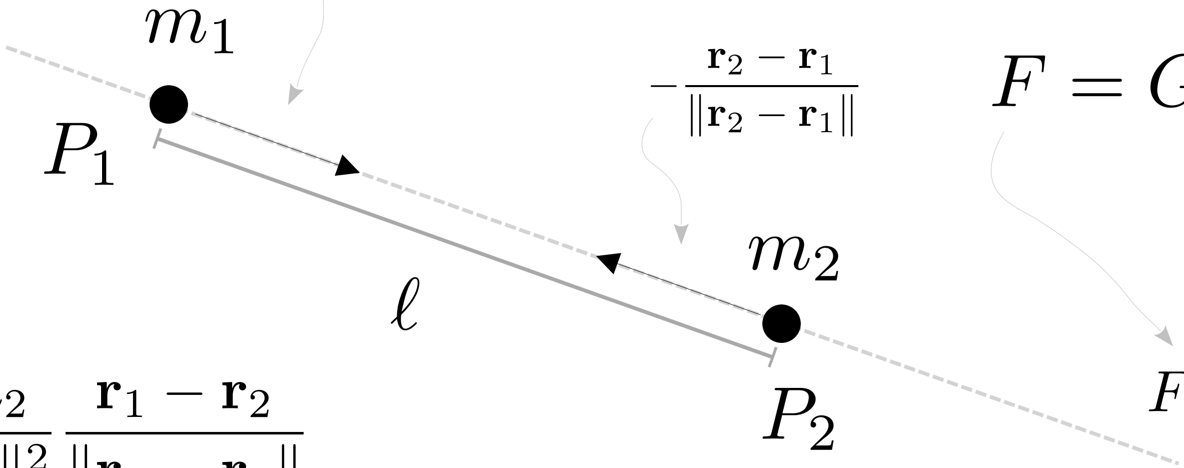
$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$




Neste caso, Isaac Newton propôs que a intensidade $F$ da força gravitacional é proporcional ao produto das massas $(m_1 \; m_2)$ e inversamente proporcional ao quadrado da distância $\ell$ entre elas:

$$-\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$$

$$-\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}$$




$$F = G\,\frac{m_1\, m_2}{\ell^2}$$

$$\ell = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$$

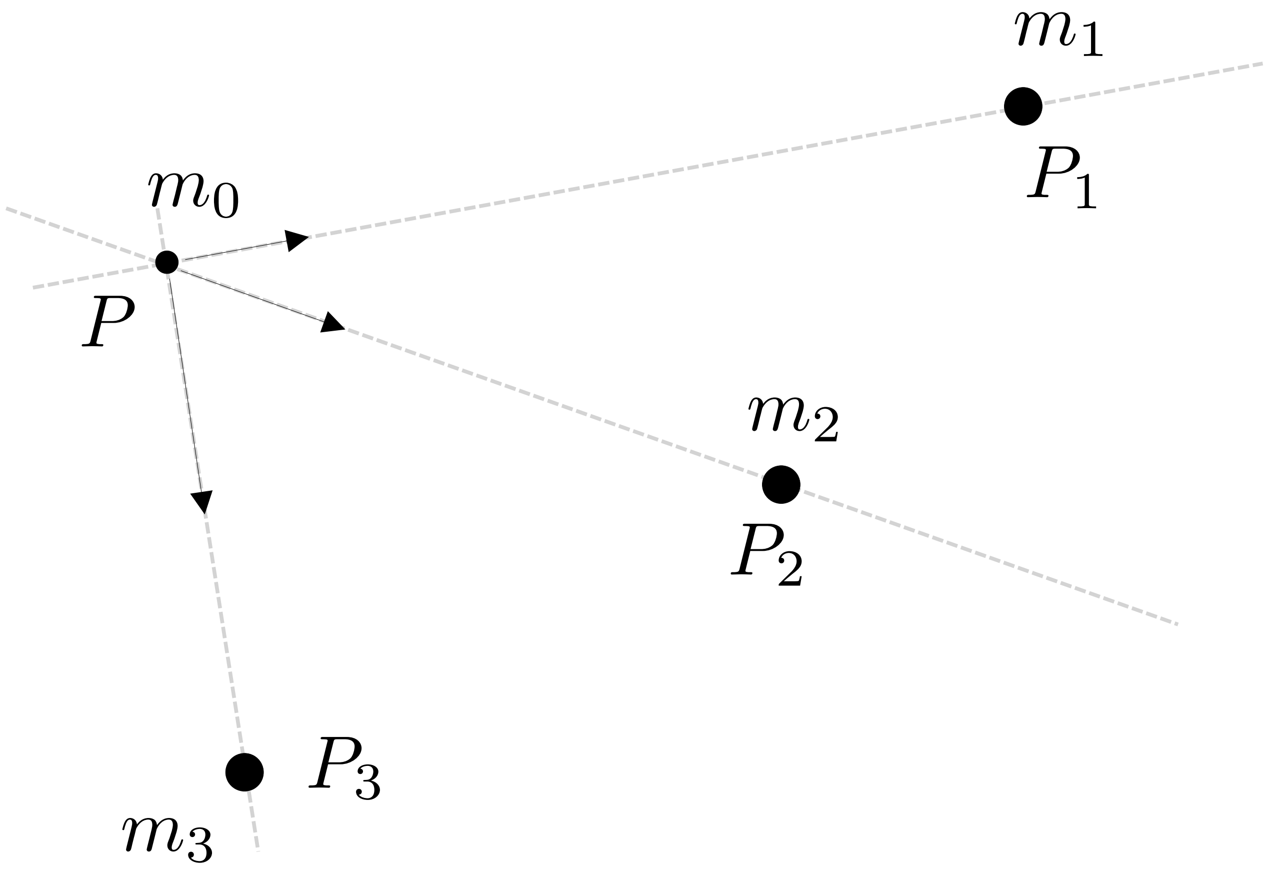
$$F = \|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}_2\|$$

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{G\, m_1\, m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2}\,\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|}$$

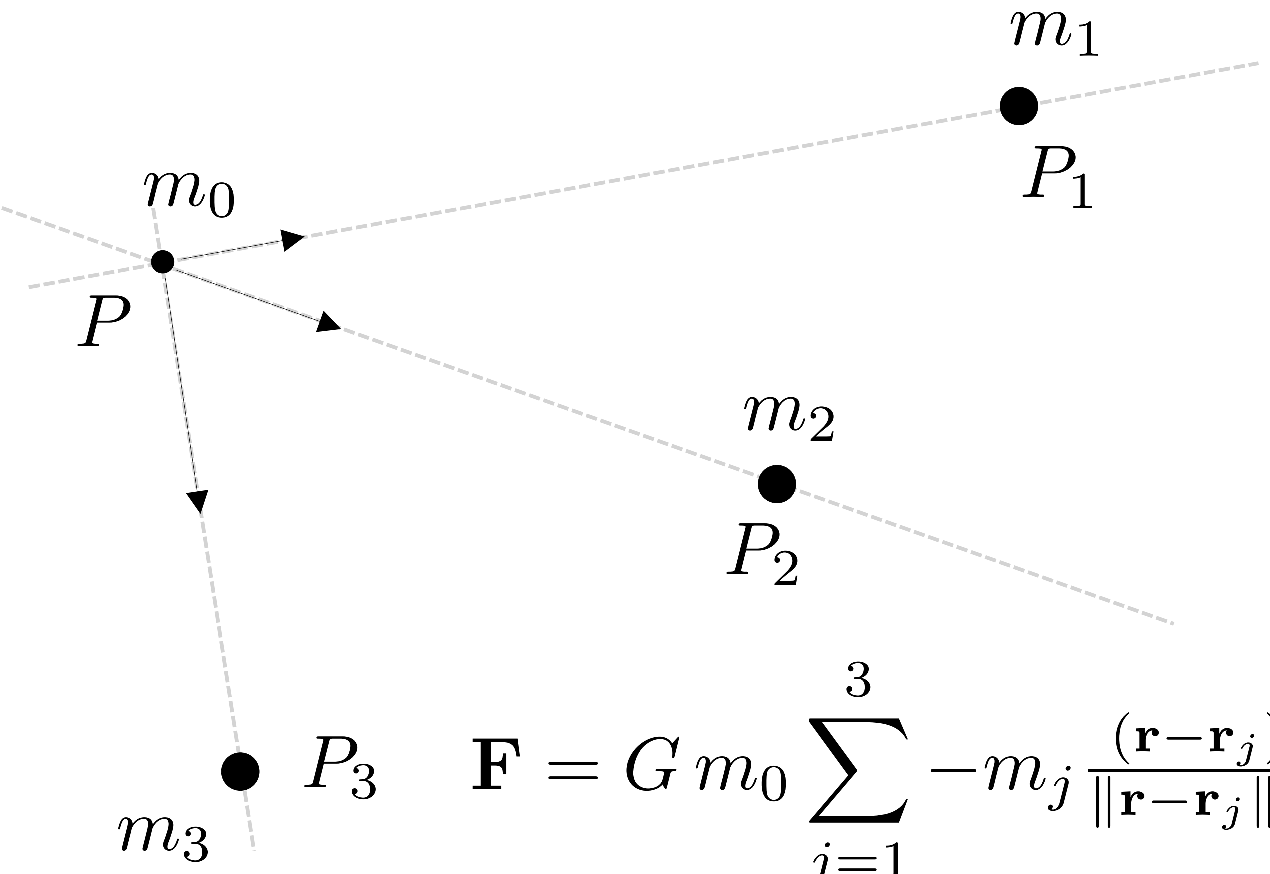
$$\mathbf{F}_2 = -\frac{G\, m_1\, m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2}\,\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

Considere agora a força exercida em uma massa $m_0$ por um conjunto de massas $m_j$

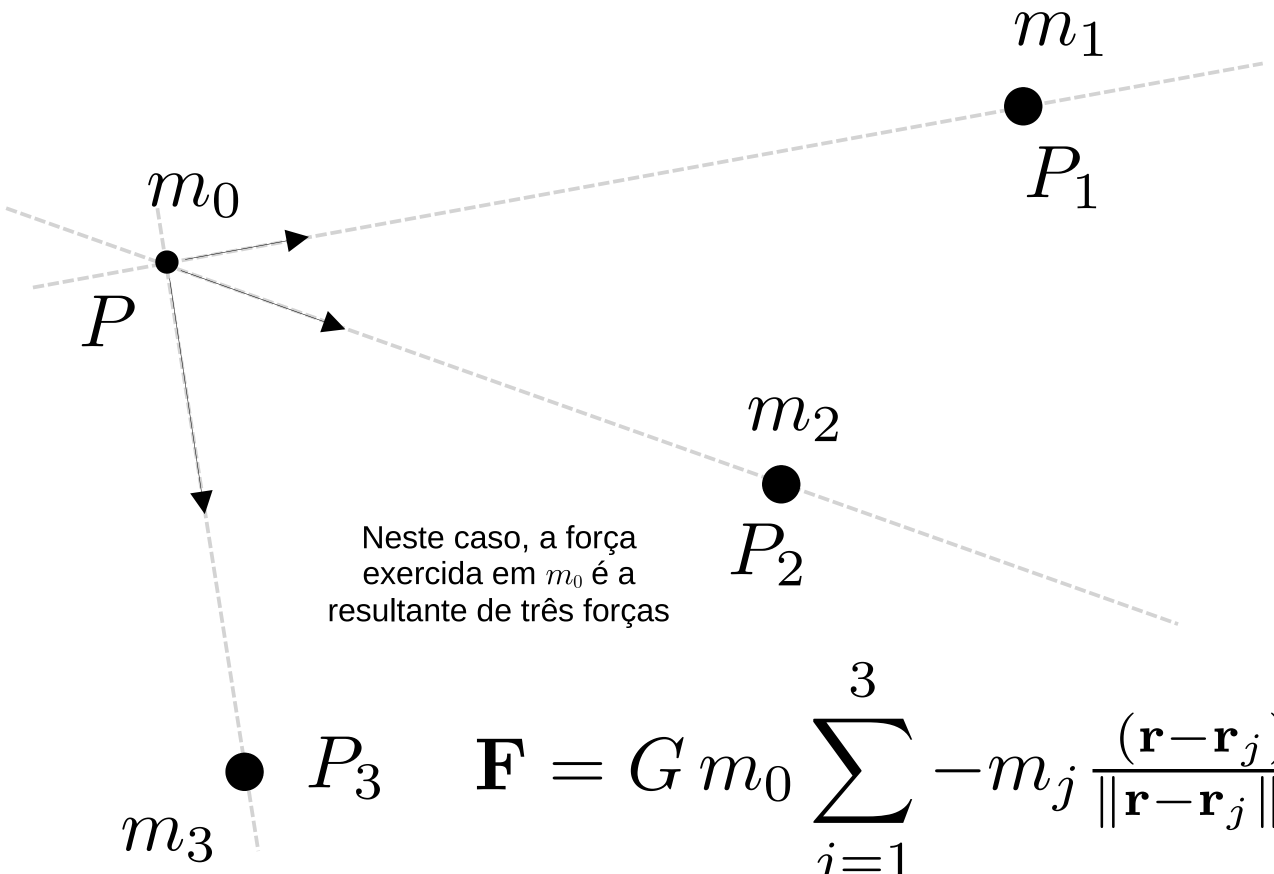


Considere agora a força exercida em uma massa $m_0$ por um conjunto de massas $m_j$




$$\mathbf{F} = G\, m_0 \sum_{j=1}^{3} -m_j \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\|^3}$$

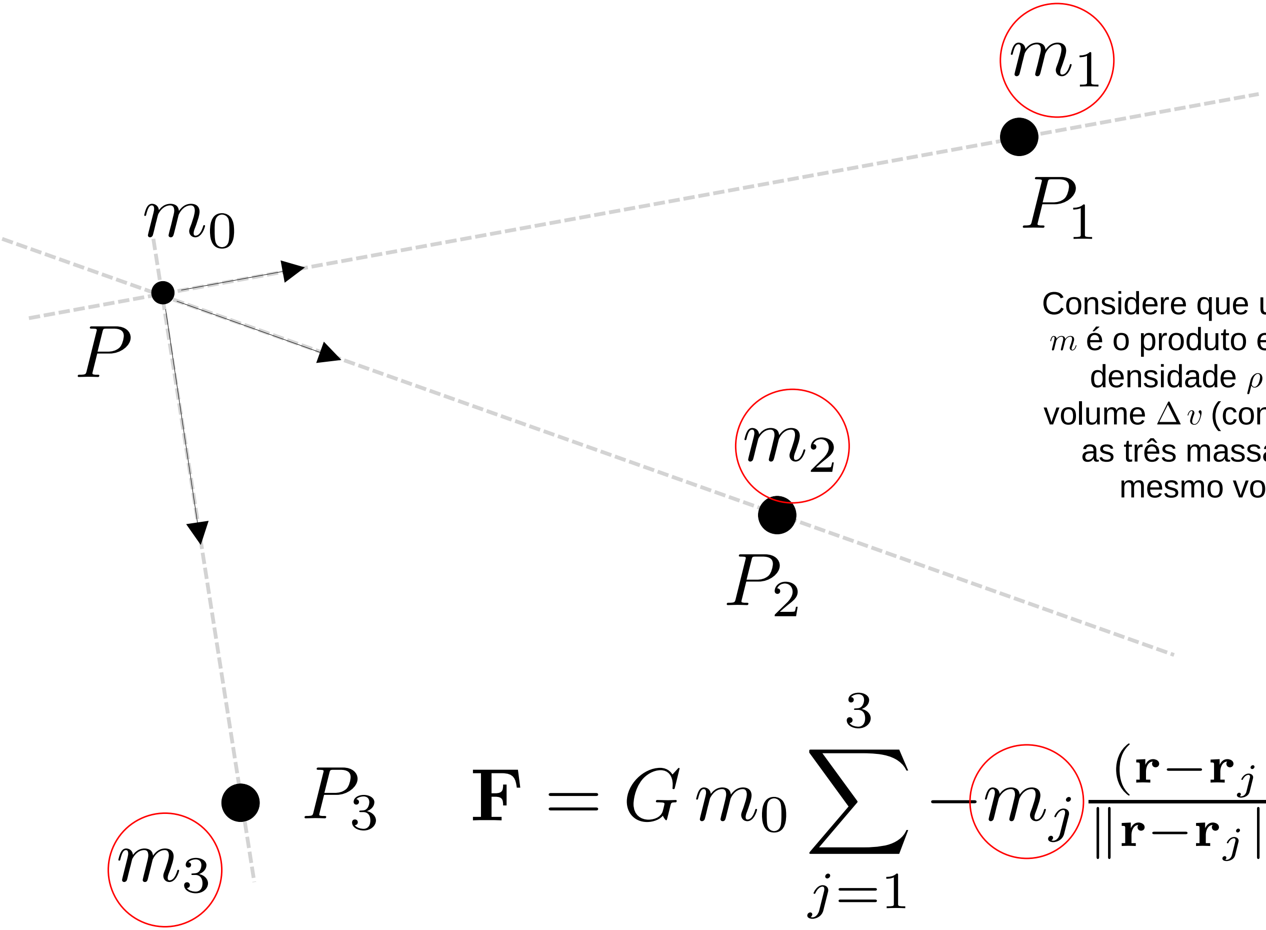
Considere agora a força exercida em uma massa $m_0$ por um conjunto de massas $m_j$




Neste caso, a força exercida em $m_0$ é a resultante de três forças

$$\mathbf{F} = G\, m_0 \sum_{j=1}^{3} -m_j \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\|^3}$$

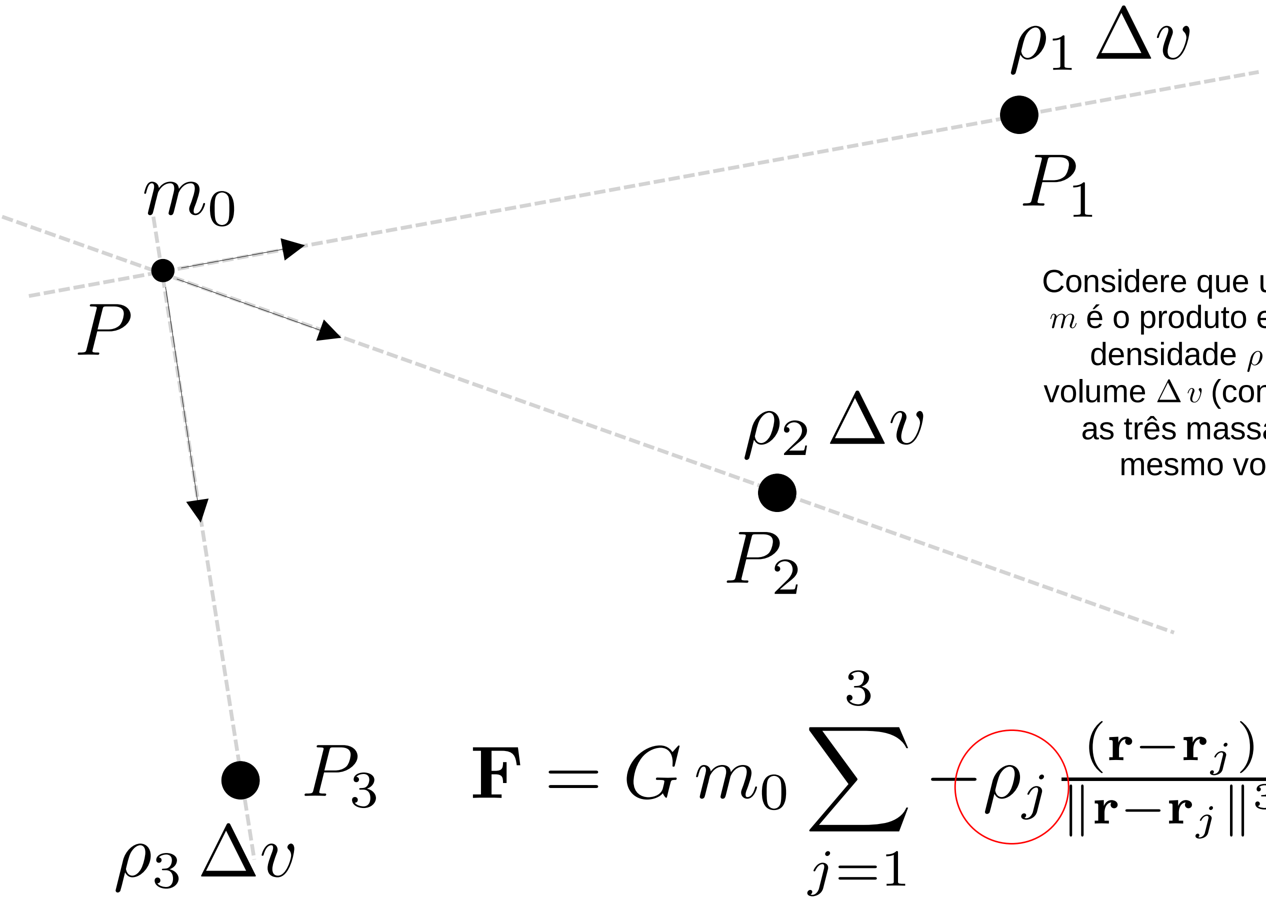
Considere agora a força exercida em uma massa $m_0$ por um conjunto de massas $m_j$




Considere que uma massa $m$ é o produto entre a sua densidade $\rho$ e o seu volume $\Delta v$ (considere que as três massas tem o mesmo volume)

$$\mathbf{F} = G\, m_0 \sum_{j=1}^{3} -m_j \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\|^3}$$

Considere agora a força exercida em uma massa $m_0$ por um conjunto de massas $m_j$

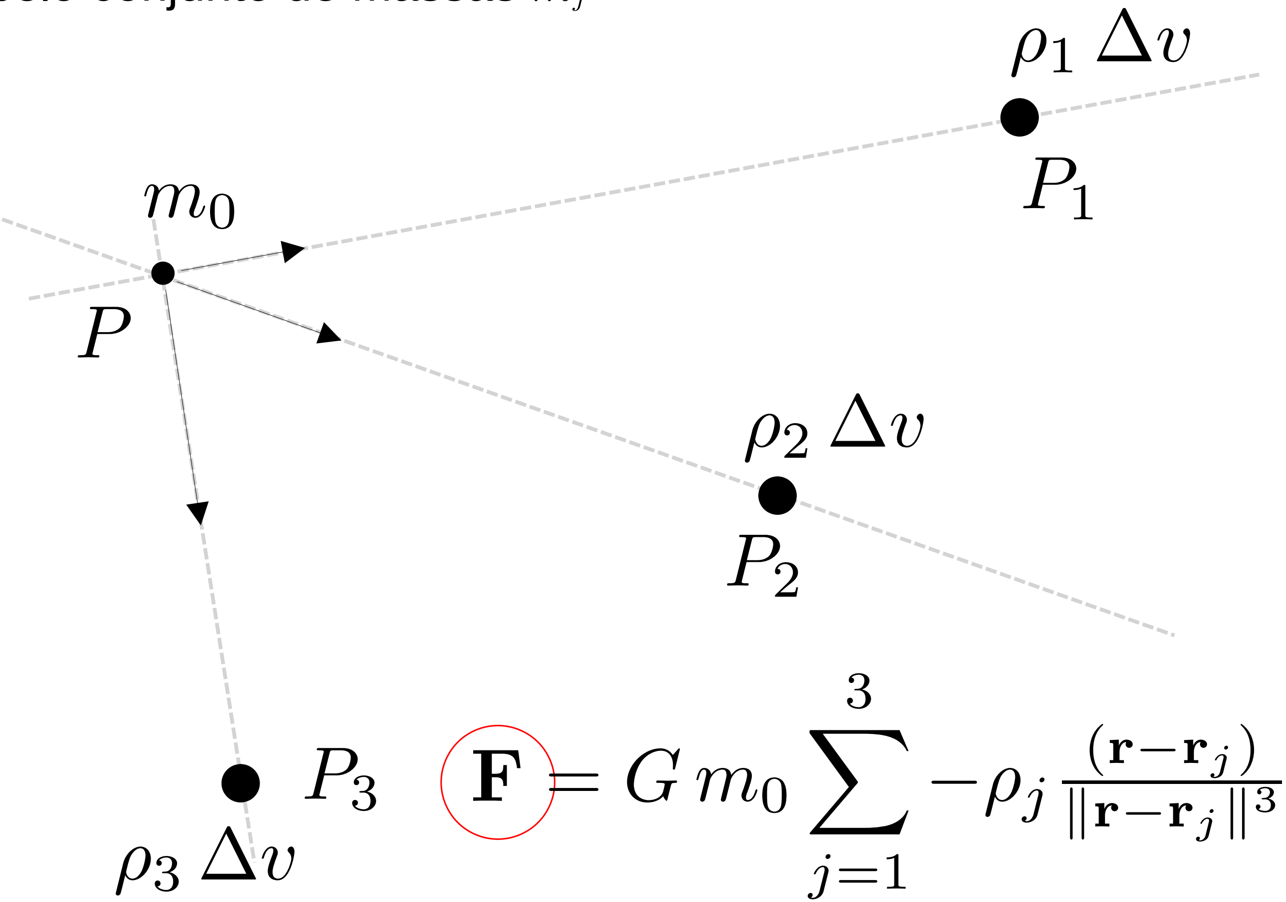



Considere que uma massa $m$ é o produto entre a sua densidade $\rho$ e o seu volume $\Delta v$ (considere que as três massas tem o mesmo volume)

$$\mathbf{F} = G\,m_0 \sum_{j=1}^{3} -\rho_j \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\|^3}\,\Delta v$$

Considere agora que não estamos mais interessados na força, mas sim na **aceleração** exercida em $m_0$ pelo conjunto de massas $m_j$

Lembre que:
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

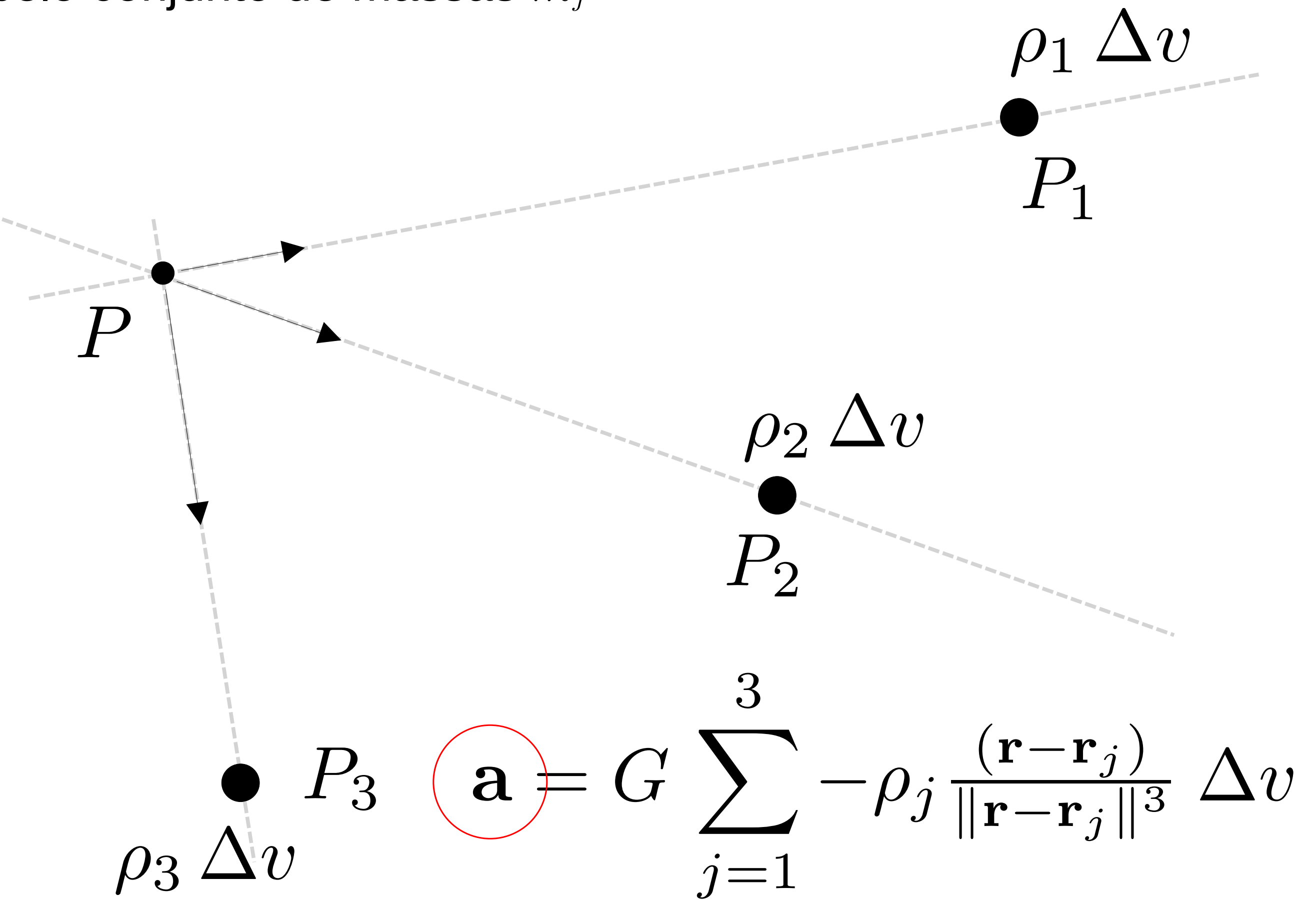



$$\mathbf{F} = G\, m_0 \sum_{j=1}^{3} -\rho_j \, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\|^3} \, \Delta v$$

Considere agora que não estamos mais interessados na força, mas sim na **aceleração** exercida em $m_0$ pelo conjunto de massas $m_j$

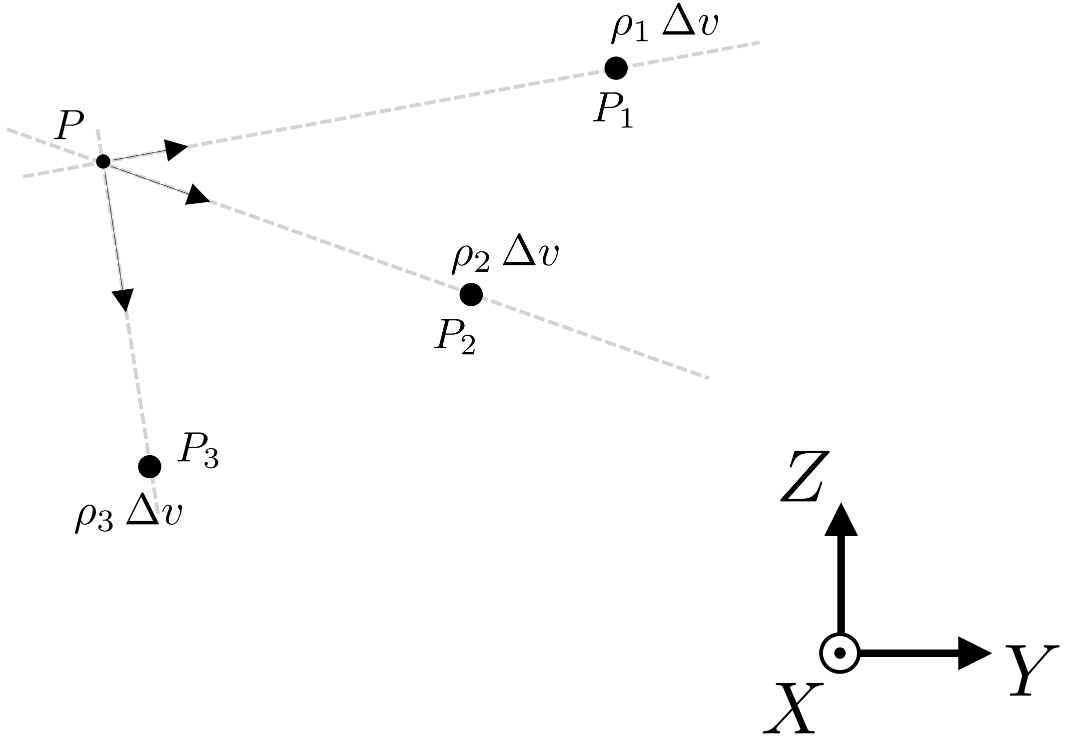
Lembre que:

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

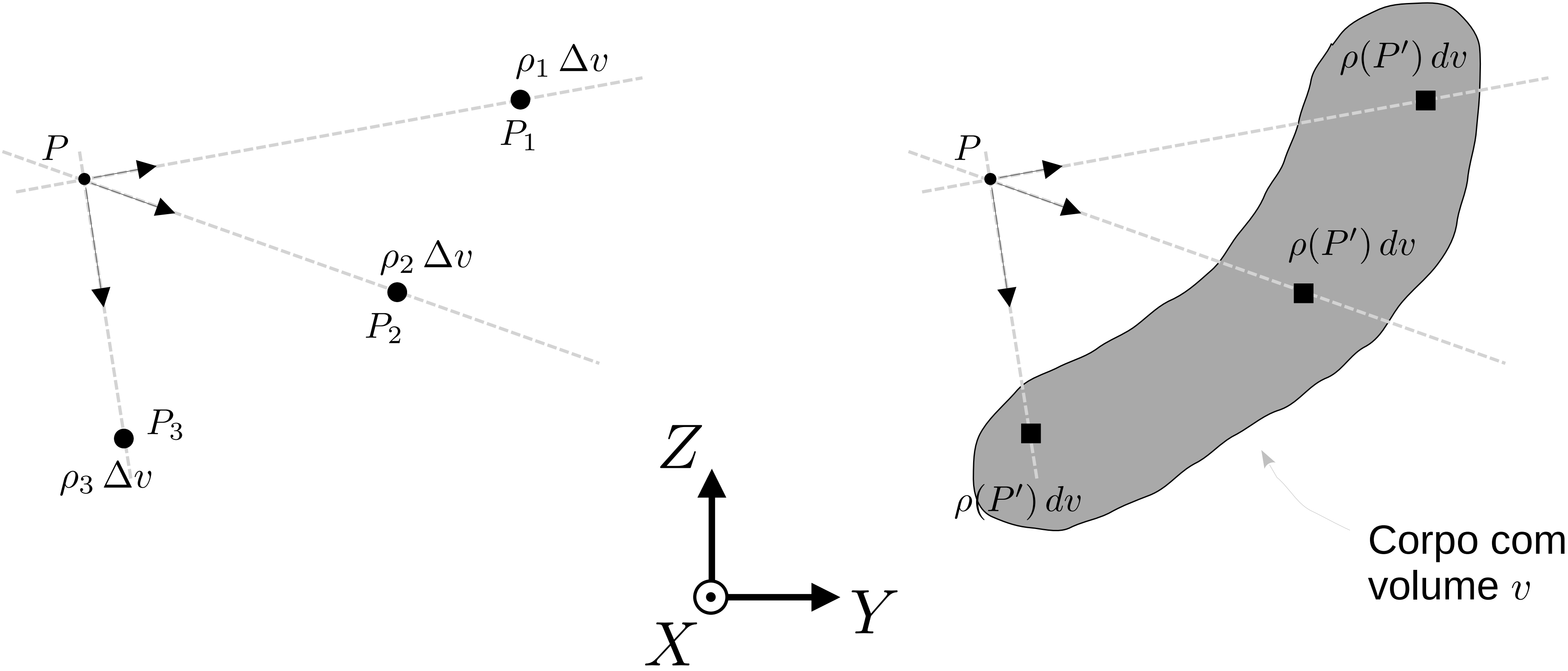



$$\mathbf{a} = G\sum_{j=1}^{3} -\rho_j \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\|^3}\,\Delta v$$

$$\mathbf{a} = G \sum_{j=1}^{3} -\rho_j \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\|^3} \Delta v$$



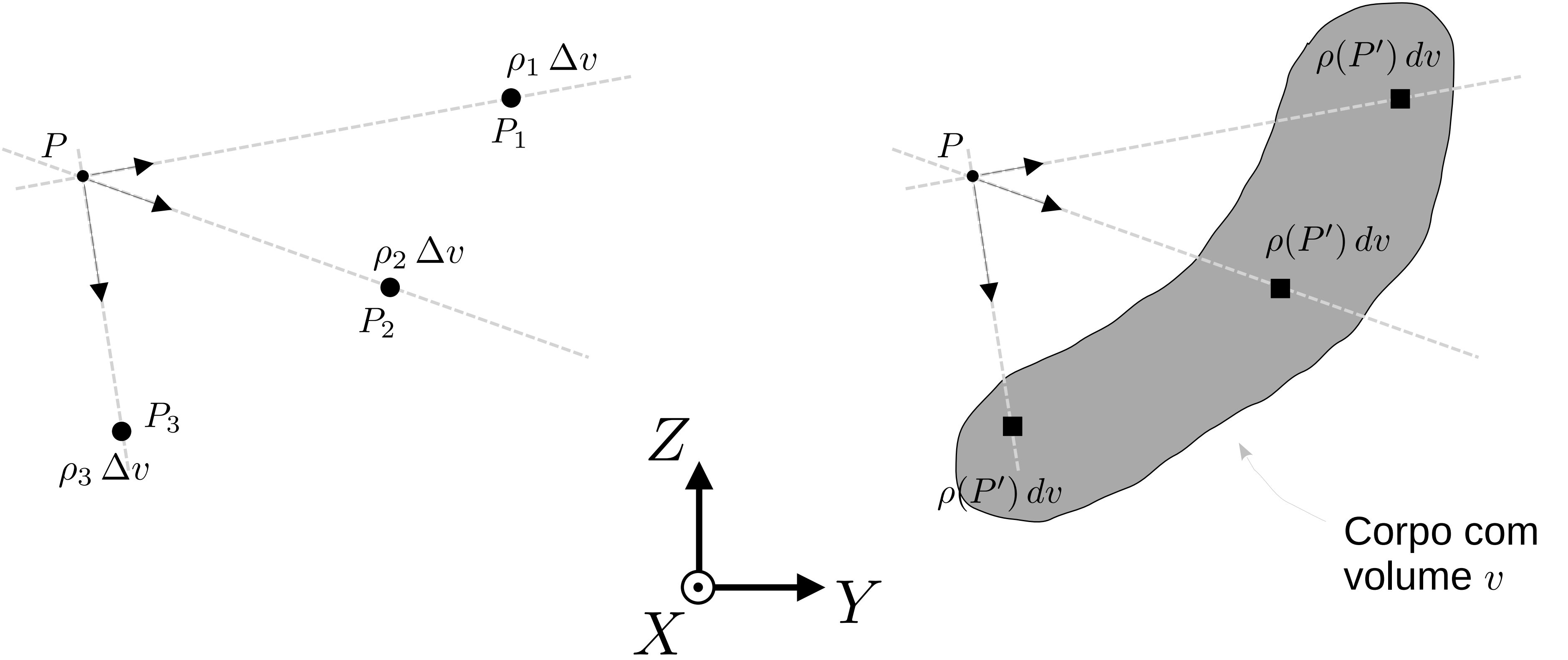
$$\mathbf{a} = G \sum_{j=1}^{3} -\rho_j \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\|^3} \, \Delta v$$

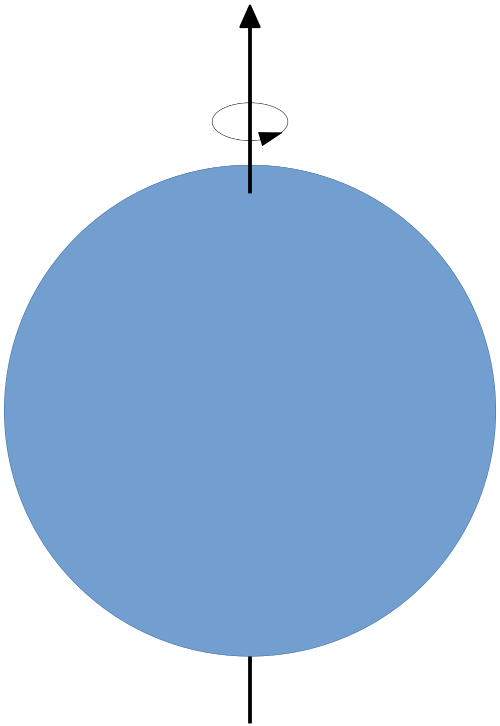


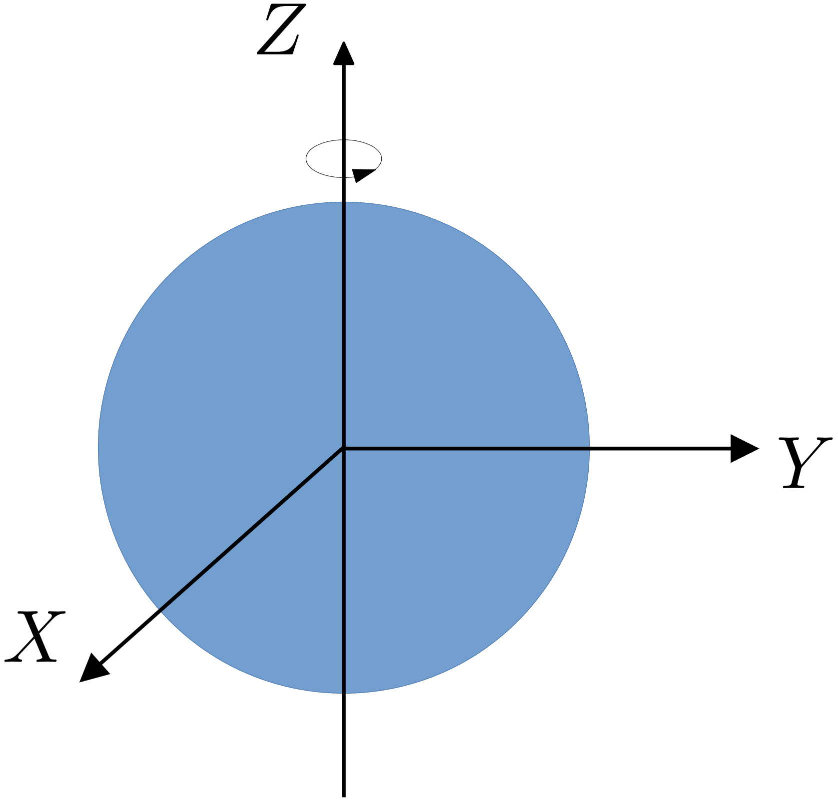
$$\mathbf{a} = G \sum_{j=1}^{3} -\rho_j \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j\|^3}\, \Delta v$$

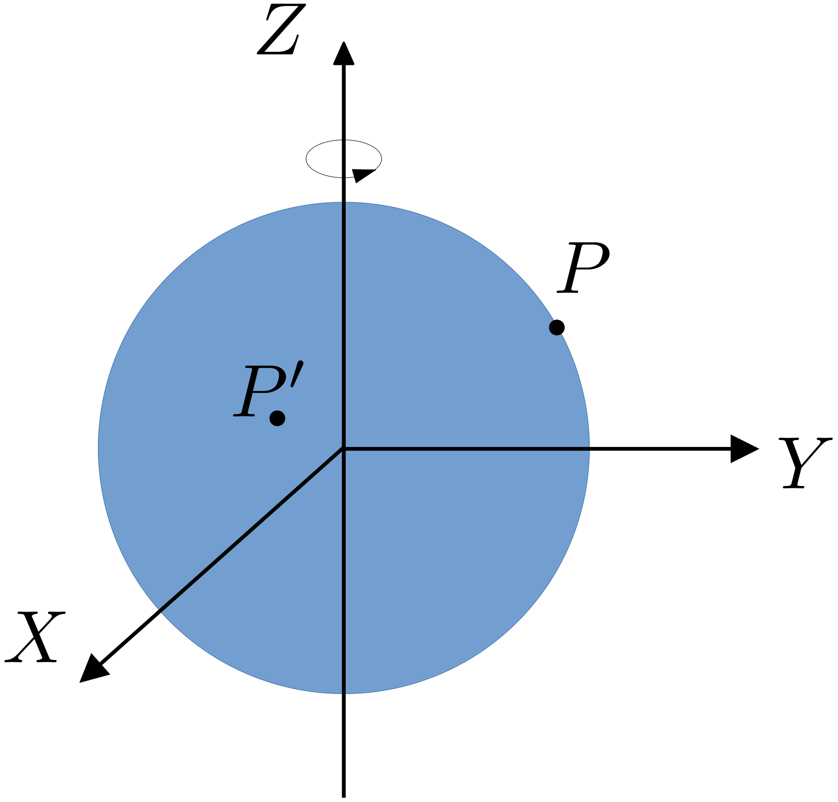
$$\mathbf{a}(P) = G \iiint_v -\rho(P') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}\, dv$$

$dv = dX\, dY\, dZ$

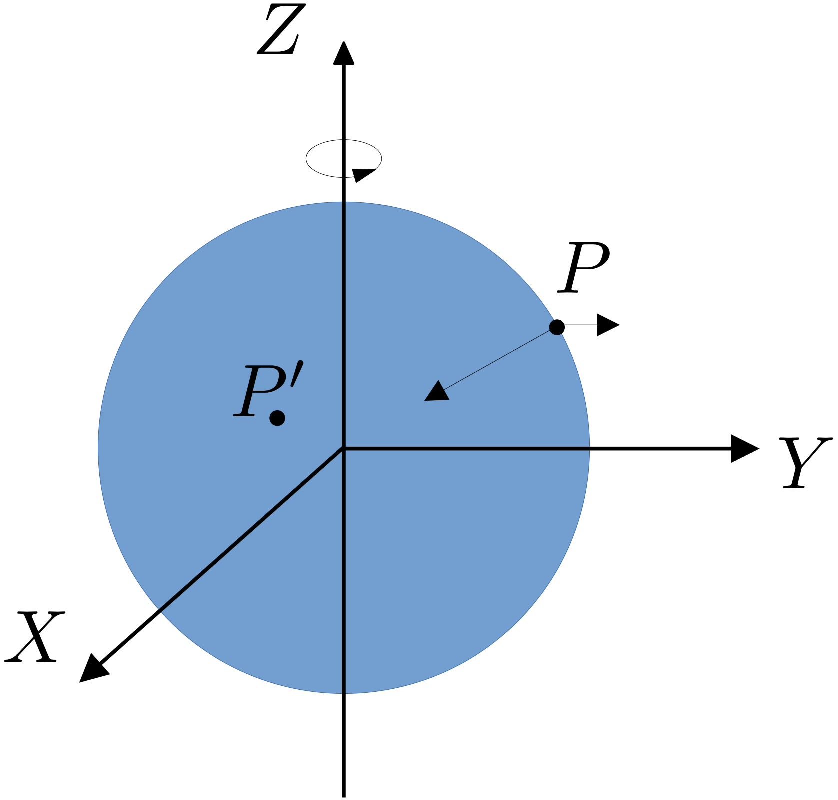





Z
Y
X



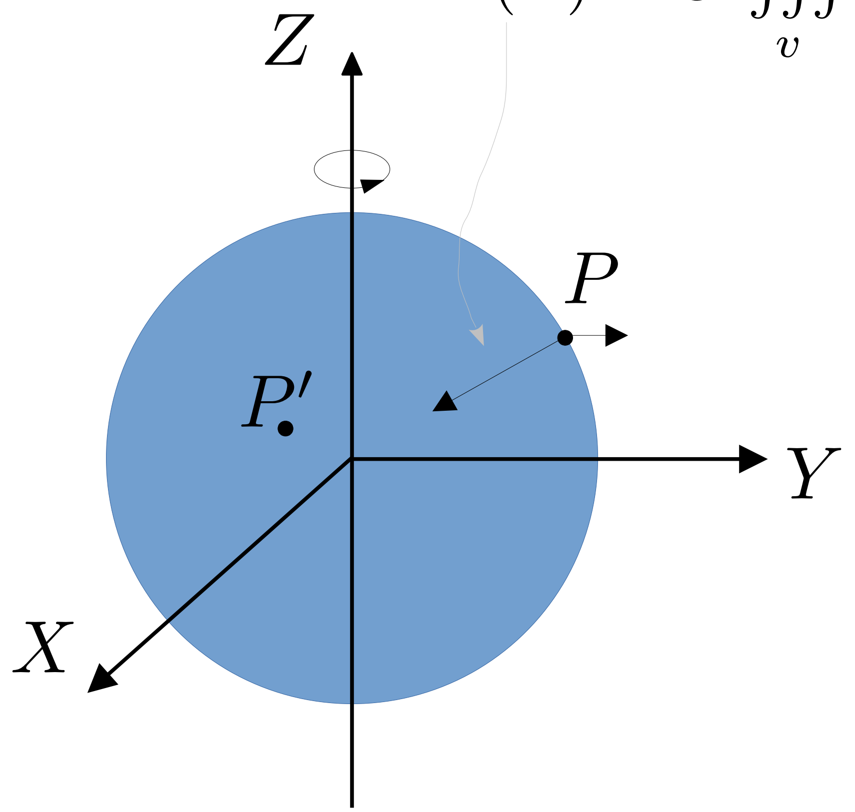
Z
P
P′
Y
X



$Z$
$P$
$P'$
$Y$
$X$

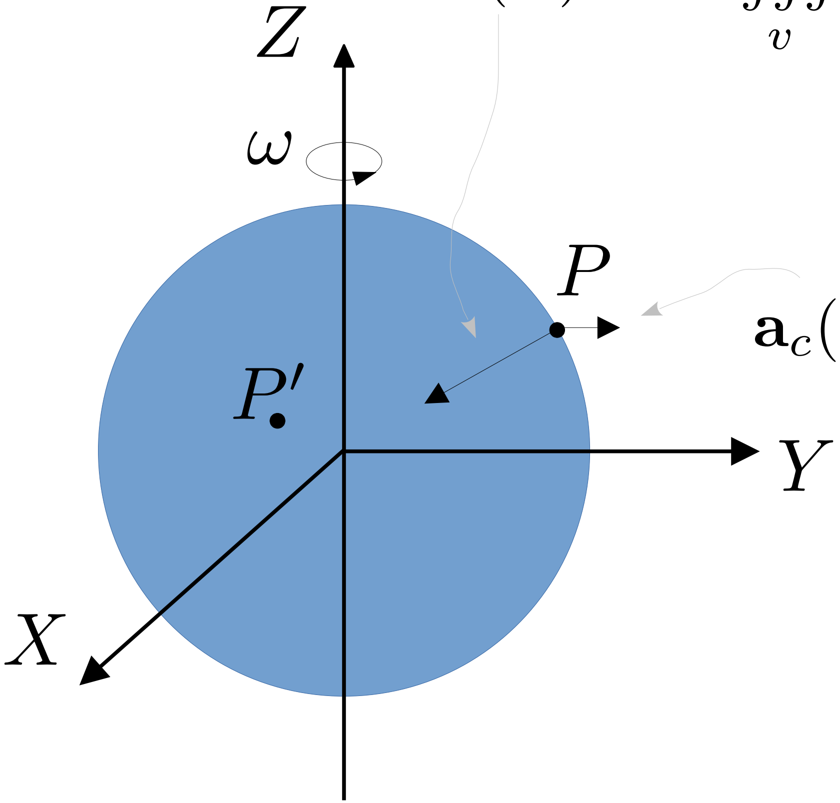
aceleração gravitacional

$$\mathbf{a}(P) = G \iiint\limits_v -\rho(P') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}\, dv$$



aceleração gravitacional

$$\mathbf{a}(P) = G \iiint_v -\rho(P') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}\, dv$$




aceleração centrífuga

$$\mathbf{a}_c(P) = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

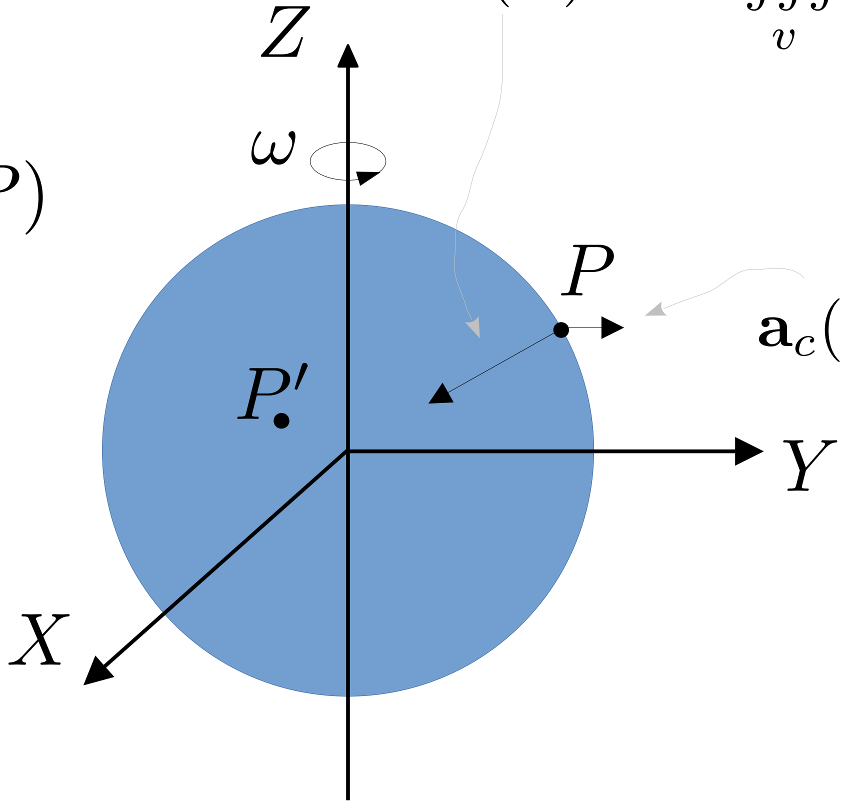
$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

aceleração gravitacional

$$\mathbf{a}(P) = G \iiint_v -\rho(P') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}\, dv$$

aceleração de gravidade

$$\mathbf{g}(P) = \mathbf{a}(P) + \mathbf{a}_c(P)$$




aceleração centrífuga

$$\mathbf{a}_c(P) = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

aceleração gravitacional

$$\mathbf{a}(P) = G \iiint\limits_{v} -\rho(P') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3} \, dv$$

aceleração centrífuga

$$\mathbf{a}_c(P) = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

aceleração de gravidade

$$\mathbf{g}(P) = \mathbf{a}(P) + \mathbf{a}_c(P)$$

aceleração gravitacional

$$\mathbf{a}(P) = G \iiint_v -\rho(P')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}\,dv$$

$$= \nabla V(P)$$

potencial gravitacional

$$V(P) = G \iiint_v \rho(P')\frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}\,dv$$

aceleração centrífuga

$$\mathbf{a}_c(P) = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$= \nabla \Phi(P)$$

potencial centrífugo

$$\Phi(P) = \frac{1}{2}\omega^2\left(X^2 + Y^2\right)$$

aceleração de gravidade

$$\mathbf{g}(P) = \mathbf{a}(P) + \mathbf{a}_c(P)$$

$$= \nabla W(P)$$

potencial de gravidade

$$W(P) = V(P) + \Phi(P)$$