

# FISICA DELL'ATMOSFERA

---

*Università degli Studi di Roma "La Sapienza"*  
*Corso di Laurea in Fisica, Curriculum di Astrofisica*

MATTEO CHERI

APPUNTI DEL CORSO DI FISICA DELL'ATMOSFERA

FEBBRAIO 2018

VERSIONE SUCCO DI FRUTTA



---

---

# FISICA DELL'ATMOSFERA

---

---

APPUNTI DEL CORSO DI FISICA DELL'ATMOSFERA

SCRITTO DA

MATTEO CHERI

*Corso di Laurea in Fisica, Curriculum di Astrofisica  
Sapienza Università di Roma*

$\boxed{MC}$

FEBBRAIO 2018

VERSIONE SUCCO DI FRUTTA



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>9</b>
1.1	Previsioni Meteo-Climatologiche . . . . .	9
1.1.1	Modello Previsionale Meteorologico . . . . .	10
1.2	Coordinate Geografiche Naturali . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Il Pianeta Terra</b>	<b>15</b>
2.1	Bilancio Energetico Terra-Sole . . . . .	15
2.2	L'Atmosfera . . . . .	16
2.2.1	Struttura Verticale . . . . .	17
2.3	Oceani . . . . .	21
2.3.1	Criosfera . . . . .	22
2.4	Cicli Chimico-Fisici . . . . .	23
2.4.1	Ciclo dell'Acqua . . . . .	23
2.4.2	Ciclo del Carbonio . . . . .	23
<b>I</b>	<b>Termodinamica Atmosferica</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>Concetti Fondamentali</b>	<b>27</b>
3.0.1	Equazione di Stato . . . . .	27
3.0.2	Legge di Dalton . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Termodinamica dell'Aria Secca</b>	<b>31</b>
4.1	Equilibrio Idrostatico . . . . .	31
4.2	Geopotenziale . . . . .	32
4.3	Prima Legge della Termodinamica . . . . .	33
4.3.1	Temperatura Potenziale . . . . .	34
4.4	Stabilità Atmosferica . . . . .	35
4.4.1	Stabilità Atmosferica e Temperatura Potenziale . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Termodinamica dell'Aria Umida</b>	<b>39</b>
5.1	Grandezze Fondamentali . . . . .	39
5.1.1	Pressione di Saturazione . . . . .	39
5.2	Entalpia . . . . .	40

5.3	Umidità . . . . .	40
5.3.1	Rapporto di Mescolamento . . . . .	41
5.3.2	Umidità Specifica . . . . .	41
5.3.3	Rapporto di Mescolamento di Saturazione . . . . .	41
5.3.4	Umidità Relativa . . . . .	41
5.4	Temperature . . . . .	42
5.4.1	Temperatura Virtuale . . . . .	42
5.4.2	Temperatura di Dew Point . . . . .	42
5.5	Acqua Precipitabile . . . . .	42
5.6	Condensazione . . . . .	43
5.6.1	Raffreddamento Diabatico . . . . .	43
5.6.2	Mescolamento Isobarico . . . . .	43
5.6.3	Espansione Adiabatica per Sollevamento . . . . .	44
5.7	Temperatura Potenziale Equivalente . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Diagrammi Termodinamici</b>	<b>47</b>
6.1	Diagramma SkewT . . . . .	48
6.1.1	Stabilità del Profilo di Temperatura . . . . .	48
6.1.2	Energie . . . . .	49
<b>II</b>	<b>Dinamica Atmosferica</b>	<b>51</b>
<b>7</b>	<b>Fluidodinamica Atmosferica</b>	<b>55</b>
7.1	Concetti Fondamentali . . . . .	55
7.1.1	Coordinate Naturali . . . . .	56
7.1.2	Tensori Cartesiani . . . . .	57
7.2	Tensori in Fluidodinamica . . . . .	58
7.2.1	Strain . . . . .	58
7.2.2	Rotazioni . . . . .	58
7.3	Circolazione . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Equazioni di Conservazione e Dinamica dei Fluidi Viscosi</b>	<b>61</b>
8.0.1	Equazione di Continuità . . . . .	61
8.0.2	Equazione di Eulero . . . . .	62
8.0.3	Conservazione della Quantità di Moto . . . . .	63
8.1	Equazione di Navier-Stokes in un Sistema Rotante . . . . .	64
<b>9</b>	<b>Approssimazione Geostrofica</b>	<b>67</b>
9.1	Bilancio Geostrofico . . . . .	67
9.2	Onde di Gravità . . . . .	68
9.3	Vento Ageostrofico . . . . .	69
9.4	Bilancio Idrostatico . . . . .	69
9.5	Coordinate Isobariche . . . . .	69

9.5.1	Velocità Verticale Isobarica . . . . .	70
9.5.2	Conservazione dell'Impulso in Coordinate Isobariche . . . . .	70
9.5.3	Equazione di Continuità in Coordinate Isobariche . . . . .	71
9.5.4	Equazione dell'Energia Termodinamica in Coordinate Isobariche . . . . .	71
9.6	Forze Viscose . . . . .	72
9.7	Vento di Gradiente . . . . .	74
9.7.1	Flusso Inerziale . . . . .	75
9.8	Variazione del Vento Geostrofico con la Quota . . . . .	76
9.9	Vento Termico . . . . .	77
9.10	Bilancio Atmosferico . . . . .	78
9.11	Velocità Verticale . . . . .	79
9.12	Circolazione . . . . .	80
9.13	Vorticità . . . . .	81
<b>III</b>	<b>Trasferimento Radiativo</b>	<b>83</b>
<b>10</b>	<b>Grandezze Fondamentali</b>	<b>85</b>
10.1	Radianza Spettrale . . . . .	85
10.2	Irradianza o Densità di Flusso . . . . .	85
10.2.1	Radianza Collimata . . . . .	85
10.2.2	Flusso . . . . .	86
10.3	Emissione di Corpo Nero . . . . .	86
10.4	Emissione Solare . . . . .	86
10.5	Assorbimento, Emissione e Legge di Kirchhoff . . . . .	87
10.6	Assorbimento ed Emissione . . . . .	87
10.6.1	Ossigeno e Ozono . . . . .	88
10.7	Temperatura di Brillanza . . . . .	88
10.8	Scattering . . . . .	89
10.8.1	Scattering di Rayleigh . . . . .	89
10.8.2	Sezione d'Urto di Scattering . . . . .	91
10.8.3	Aerosol . . . . .	91
<b>11</b>	<b>Trasferimento Radiativo</b>	<b>93</b>
11.0.1	Radiazione Solare . . . . .	94
11.0.2	IR Termico e Spettro Terrestre . . . . .	94
11.0.3	Approssimazion Piano-Parallela . . . . .	95
11.1	Riscaldamento Solare . . . . .	96
11.2	Raffreddamento IR . . . . .	97
<b>12</b>	<b>Chimica Atmosferica</b>	<b>99</b>
12.1	Ozono . . . . .	100
12.1.1	Modello Fotochimico di Chapmann . . . . .	101

***Nota***

Questi appunti di Fisica dell'Atmosfera sono stati presi dal sottoscritto durante le lezioni tenute dal Professore Cacciani nel secondo semestre dell'A.A. 2016/2017.

Essendo una prima versione è molto probabile la presenza di errori ed imprecisioni.

Per qualsiasi commento o precisazione lascio qua la mia mail istituzionale.

**cheri.1686219@studenti.uniroma1.it**



## Siti Utili

<http://gis.ncdc.noaa.gov> Geographic Information System, National Climatic Data Center, National Oceanic and Atmospheric Administration

<http://weather.uwyo.edu/upperair/sounding.html> University of Wyoming, Department of Atmospheric Science sounding catalog

<https://www.eumetsat.int> **E**Uropean organisation for the exploitation of **MET**eorological **SAT**ellites

<https://www.ecmwf.int> European Center for Medium-Range Weather Forecasts

<http://cetemps.aquila.infn.it> Center of Excellence Telesensing of Environment and Model Prediction of Severe Events

<https://dust.aemet.es> Barcelona Dust Forecast Center

<https://ready.arl.noaa.gov/READYcmnet.php> Air Resource Laboratory, NOAA

<http://tropic.ssec.wisc.edu/real-time/mimic-tpw/global/main.html> Morphed Integrated Microwave Imagery at CIMSS Total Precipitable Water, MIMIC-TPW

<http://tropic.ssec.wisc.edu> Cooperative Institute for Meteorological Satellite Studies, Tropical Cyclones



# Capitolo 1

## Introduzione

Le geoscienza è la branca della scienza che si occupa dello studio del pianeta terra e si dirama in più sottocampi di studio specifici

- Terra Solida (geologia, sismologia, vulcanologia)
- Oceanografia
- Glaciologia
- Scienze Naturali
- Scienze Atmosferiche
  - Chimica dell'Atmosfera (composizione ed inquinamento)
  - Fisica dell'Atmosfera (meteorologia, climatologia, studio della ionosfera e dei fulmini)

In questo corso, viene studiata in specifico, la fisica dell'atmosfera, con una particolare concentrazione sulla meteorologia ed in parte sulla climatologia terrestre.

La *meteorologia* si occupa di creare dei modelli deterministici di previsioni meteorologiche (entro i 10 giorni), ristrette ad un dato luogo e tempo.

### 1.1 Previsioni Meteo-Climatologiche

La *previsione climatologica* si occupa di creare modelli mediati su scale di tempi intorno ai 30 anni, basate su proiezioni su delle appropriate condizioni al contorno fino a 10-20 anni. Le previsioni annuali sono modellizzate su fenomeni ben noti, come el niño o la temperatura superficiale dei mari, in questi casi si parla di previsioni stagionali. Contrariamente alle previsioni climatologiche, le previsioni meteorologiche modellizzano il meteo in un raggio di tempo molto minore, che comporta problematiche aggiuntive, tra cui la necessità di utilizzare tecniche di integrazione numeriche.

A partire dagli anni '50 sono stati introdotti i modelli numerici computerizzati, e con essi le *NWP* (*Numerical Weather Prediction*), che, per ottenere la previsione, risolvono un sistema di 7 equazioni differenziali

1. Conservazione della quantità del moto in 3D
2. Conservazione della massa dell'aria secca
3. Conservazione dell'energia termodinamica
4. Conservazione della quantità d'acqua
5. Equazione di stato dei gas perfetti

Il sistema è con 7 incognite (Temperatura, Pressione, Densità, Vento, Umidità), quindi è chiuso, ma non è stata ancora trovata una soluzione esatta.

Le prime soluzioni numeriche di questo sistema sono state trovate da Richardson, che integrò le equazioni con un regolo calcolatore con passi temporali di 6 ore, ottenendo previsioni inesatte dato il passo d'integrazione inesatto.

Il metodo di approssimazione moderno è stato raffinato con l'avvento dei calcolatori nel dopoguerra, eliminando termini piccoli dall'equazione, ottenendo l'approssimazione *quasi-geostrofica*. Con questo metodo di previsione si ottengono risultati affidabili a 3-4 giorni.

Le integrazioni odierne, con calcolatori più potenti, non vanno oltre i 10 giorni, data dai comportamenti caotici delle equazioni in tempi lunghi, data la loro non linearità e alla suscettibilità alle perturbazioni. Il problema viene aggirato utilizzando previsioni di ensemble, sfruttando la meccanica statistica.

### 1.1.1 Modello Previsionale Meteorologico

Per modellizzare il sistema e costruire la previsione meteorologica, è necessario seguire uno schema.

Innanzitutto è necessario scegliere la griglia geografica ed il passo temporale. Il passo migliore è dato dalla scelta

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v_{max}}$$

Dove  $v_{max}$  è la velocità massima di propagazione dei fenomeni atmosferici. In generale  $v_{max} \approx v_{suono}$ . Il  $\Delta l$  scelto sarà quindi in funzione della griglia geografica, da determinare.

Dall'equazione precedente è evidente che, più è grande la scala spaziale, più è possibile aumentare il passo temporale e prevedere più lontano nel tempo con meno passi d'integrazione. Alternativamente, per mantenere la precisione spaziale, è utile filtrare le onde più veloci, riducendo  $v_{max}$ .

Il secondo passaggio per costruire il modello, è quello di recuperare le condizioni iniziali su cui integrare le equazioni. Questi dati vengono ottenuti da più mezzi, principalmente da

- Stazioni meteorologiche da terra
- Radiosonde
- Satelliti

Le stazioni meteorologiche raccolgono i dati da terra, e circa ogni 30 minuti, inviano in atmosfera un pallone aerostatico con una radiosonda.

Per coprire le zone marine, dove non è possibile costruire stazioni o inviare costantemente dei palloni aerostatici, risultano utili i satelliti, che misurano direttamente la radiazione emessa dall'atmosfera, ottenendo una copertura più omogenea.

I satelliti utilizzati sono di due tipi, quelli geostazionari, che volano con la stessa velocità angolare della terra, e satelliti ad orbita polare.

I primi volano ad una quota che è possibile determinare dalle equazioni di gravitazione di Newton

$$m_{sat}\omega^2 r = \frac{Gm_{sat}M_T}{r^2} \longrightarrow r = \left( \frac{M_T G}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 42100 \text{ km} \rightarrow z = r - R_T \approx 36000 \text{ km}$$

Data l'alta quota, la risoluzione dei dati è relativamente bassa.

I satelliti ad orbita polare invece seguono i meridiani terrestri. Essendo più vicini alla superficie orbitano più velocemente e ogni volta su aree diverse. La quota a cui viaggiano è di  $z \approx 600 - 800 \text{ km}$ , facendo un giro in circa 10-12 giorni. Data la rivoluzione in così tanto tempo, non sono capaci di registrare fenomeni che avvengono in tempi brevi, come i cicloni.

Ultimamente, posso ricavare i dati eseguendo misure da terra, con il vantaggio di avere accesso fisico allo strumento. In questo modo, è possibile validare i dati provenienti dal satellite, con *RADAR*, *SODAR*, *LIDAR* (Radio-Sound-Light Detection And Imaging).

Questo modello di previsione porta vari problemi tecnici, tra cui

- Sono necessari circa 5 milioni di dati per le condizioni iniziali
- I dati devono essere interpolati nella griglia
- È necessario integrare numericamente le equazioni differenziali al primo e second'ordine

### Modello Previsionale Climatologico

Per i modelli climatologici l'integrazione è simile ai modelli meteorologici, ma è necessario tener conto dell'interazione oceanica, dell'attività umana e vulcanica, della variazione di radiazione solare, tutte quante perlopiù non prevedibili. Per ovviare al problema si costruiscono scenari su cui si fanno correre dei modelli, ottenendo dei range indicativi su larga scala temporale ( $\sim 100 \text{ y}$ ) su cui cadono i diversi scenari

## 1.2 Coordinate Geografiche Naturali

Nello studio dell'atmosfera si utilizzano le *coordinate sferiche geocentriche rotanti*, una versione modificata delle coordinate sferiche, centrate sul centro terrestre e rotanti alla stessa velocità della superficie terrestre.

Le coordinate scelte sono date dalla terna ordinata  $(\lambda, \phi, r)$ , dove nelle superfici a  $\lambda = \text{const}$  si hanno i meridiani, nelle superfici a  $\phi = \text{const}$  i paralleli, e con  $r$  la distanza dal centro terrestre. Si possono determinare dei paralleli e meridiani di riferimento, che saranno

$$\begin{cases} \phi = 0 & \text{Equatore, } \phi \in (-90^\circ, 90^\circ) \\ \lambda = 0 & \text{Greenwich, } \lambda \in (-180^\circ, 180^\circ) \end{cases}$$

Ponendo  $r = R_T$  posso trasformare il tutto in un sistema di coordinate solidale con la superficie terrestre.

Definisco le velocità come

$$\underline{v} = \begin{cases} v_x = R_T \cos \phi \frac{d\lambda}{dt} & \text{Velocità Zonale} \\ v_y = R_T \frac{d\phi}{dt} & \text{Velocità Meridianale} \\ v_z = \frac{dr}{dt} & \text{Velocità Verticale} \end{cases}$$

Con queste coordinate definisco il vento  $\underline{V} = (u, v, w)$ . Il vento proveniente da E in direzione W è detto *easterly*, il vento proveniente da N in direzione S è detto *Northerly*, il vento proveniente da W verso E *Westerly* ed il vento proveniente da S verso N *Southerly*. Data  $z = r - R_T$  consideriamo un campo scalare  $f(\lambda, \phi, z, t)$ . Posso definire allora delle medie integrali della funzione come

$$\begin{cases} \bar{f}_\lambda = \frac{1}{2\pi} \int f d\lambda & \text{Media Zonale} \\ \bar{f}_\phi = \frac{1}{\pi} \int f d\phi & \text{Media Meridianale} \\ \bar{f}_z = \frac{1}{\Delta z} \int f dz & \text{Media Verticale} \\ \bar{f}_t = \frac{1}{\Delta t} \int f dt & \text{Media Temporale} \end{cases}$$

Ricordiamo che, poiché la terra è una sfera, per ottenere delle carte 2D, sono necessarie *proiezioni conformi*, come la proiezione di Mercatore, Lambert e la Polare stereografica.

### Dettagli Aggiuntivi

Poiché l'asse terrestre è inclinato di circa  $23^\circ$ , la radiazione solare incidente arriverà ad un angolo  $-\epsilon < \phi_\perp < \epsilon$  che varia periodicamente col tempo, con periodi di 1 anno solare.

Si ha  $\phi_{\perp} = 0^{\circ}$  sull'equatore durante gli equinozi.

Se definisco con  $\theta_0$  l'*angolo zenitale solare* posso scrivere

$$\cos \theta_0 = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos h$$

Dove  $\theta_0$  è definito nell'immagine successiva,  $-\epsilon < \delta < \epsilon$  è la *declinazione*, e  $h = \frac{2\pi t}{T}$  è l'*angolo orario*, dove  $t \in [0, 43200]$ s, quindi  $h \in [0, \pi]$

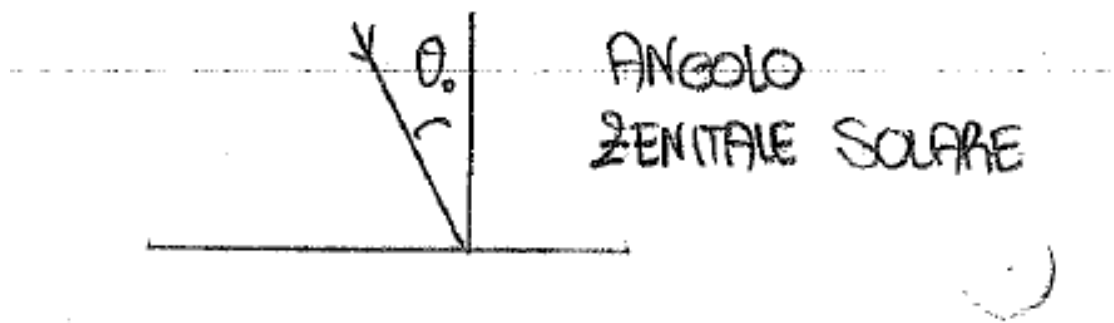


Figura 1.1: Definizione dell'angolo zenitale solare  $\theta_0$  rispetto alla verticale dello zenith





## Capitolo 2

# Il Pianeta Terra

Essendo la fisica dell'atmosfera una branca della fisica terrestre, è importante avere delle nozioni di base sul sistema terra, che saranno fondamentali per lo studio successivo del funzionamento dell'atmosfera terrestre

### 2.1 Bilancio Energetico Terra-Sole

Si definisce con *insolazione* la potenza per metro quadro ricevuta dalla radiazione solare sulla superficie terrestre (misurata al *TOA*, *Top Of Atmosphere*)

$$Q(\lambda, \phi, t) \quad \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

Si definisce con *Costante Solare* la potenza al  $m^2$  misurata alla distanza di 1 UA (dipendente dalla geometria dell'orbita)

$$\bar{Q}_{\lambda, \phi} = S = (1360 \pm 0.6) \frac{W}{m^2}$$

Prendendo la media zonale e meridionale dell'insolazione ottengo quindi

$$\frac{S}{4} \simeq 380 \frac{W}{m^2}$$

Il massimo ed il minimo dell'insolazione, si hanno nei pressi dell'equatore e dei poli. Il punto di massimo varia nel tempo.

#### Albedo

Si definisce con *Albedo* l'ammontare di radiazione riflessa dal pianeta, per la terra in media si ha  $A = 0.3$ . Quando la radiazione solare raggiunge il pianeta si possono avere due risultati

1. Riflessa dalle nubi e dal ghiaccio
2. Assorbita dal pianeta ( $\frac{S}{4}(1 - A)$ )

L'albedo varia da zona a zona, infatti, è più alto ai poli, nelle zone oceaniche dove si formano nubi e sulle zone desertiche.

Grazie a questo, possiamo avere una stima dell'assorbimento della radiazione solare dalla superficie terrestre, alta ai poli (data la somma dell'insolazione e dell'albedo), che cala verso i poli, con somma totale nulla. Considerando anche l'emissione terrestre nell'infrarosso notiamo che la somma totale rimane nulla, ma non localmente, i poli emettono più di quanto assorbono, mentre i deserti no, per motivi climatici.

### Trasporto Inteno di Energia

Il trasporto interno dell'energia è dovuto agli oceani e all'atmosfera terrestre. Il flusso netto di energia è massimo alle medie latitudini. L'andamento del flusso atmosferico è simmetrico, mentre quello oceanico è più efficiente a Nord, data la maggiore presenza di terre emerse che ostacolano i flussi freddi dal polo

## 2.2 L'Atmosfera

L'atmosfera terrestre ha una massa di  $M_{atm} = 5.3 \times 10^{18}$  kg,  $\Delta z \approx 100$  km.

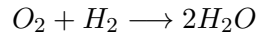
L'atmosfera è composta da

Elemento	Presenza percentuale
$N_2$	78.8%
$O_2$	20.95%
$Ar$	0.93%
$CO_2$	380ppm
$Ne$	18ppm
$He$	5ppm
$CH_4$	1.75ppm
$Kr$	1ppm
$H_2$	0.5ppm
$O_3$	0.01 – 0.1ppm
$H_2O$	0 – 5%
$N_2O$	0.3ppm

L'atmosfera, come tutto il sistema terra si è evoluta nel tempo. Da carotaggi e studi dell'atmosfera primordiale, sappiamo che era principalmente composta da  $CO_2$ ,  $H_2O$ ,  $N_2$ ,  $H_2$ . Si presume che una prima atmosfera sia stata spazzata via da collisioni planetarie o dal vento solare in un periodo di assenza di campo geomagnetico.

È stato introdotto poi l' $O_2$  durante la biogenesi, 3.8 Gy fa. Essendo un composto

estremamente reattivo, ha reagito con l' $H_2$  presente in atmosfera, creando il vapore d'acqua



Altro ossigeno invece ha reagito con le terre emerse per ossidazione, mentre, l' $H_2$ , essendo un gas leggerissimo, è diminuito nel tempo, sfuggendo dall'atmosfera.

Solo  $\sim 2.4 - 2.2$  Gy fa si è creato lo strato d'Ozono e l'ossigeno ha raggiunto i livelli attuali, in alta atmosfera, che filtra la luce solare e permette l'evoluzione della vita terrestre complessa.

### 2.2.1 Struttura Verticale

Le equazioni che governano l'andamento verticale delle grandezze fondamentali sono

$$\begin{aligned}\rho(z) &= \rho_0 e^{-\frac{z}{H}} \\ p(z) &= p_0 e^{-\frac{z}{H}} \\ l(z) &= l_0 e^{-\frac{z}{H}}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dove è stata indicata la densità con  $\rho$ , la pressione con  $p$  e il libero cammino medio con  $l$ . Con  $H$  è indicata l'*e-folding depth*, di circa 7-8 km.

Invertendo la relazione per la pressione, è possibile quindi misurare la quota in termini della pressione

$$z = -H \ln \frac{p}{p_0}$$

In base all'andamento verticale della temperatura ( $T$ ) invece, possiamo dividere l'atmosfera in più sezioni

- Troposfera, decrescita dell'80%, presenza di fenomeni meteorologici
- Stratosfera, crescita, inhibited vertical mixing, ozono
- Mesosfera, decrescita
- Termosfera, crescita per fotodissociazione e fotoionizzazione

Tra le "sfere" sono presenti le pause, dove la temperatura rimane costante.

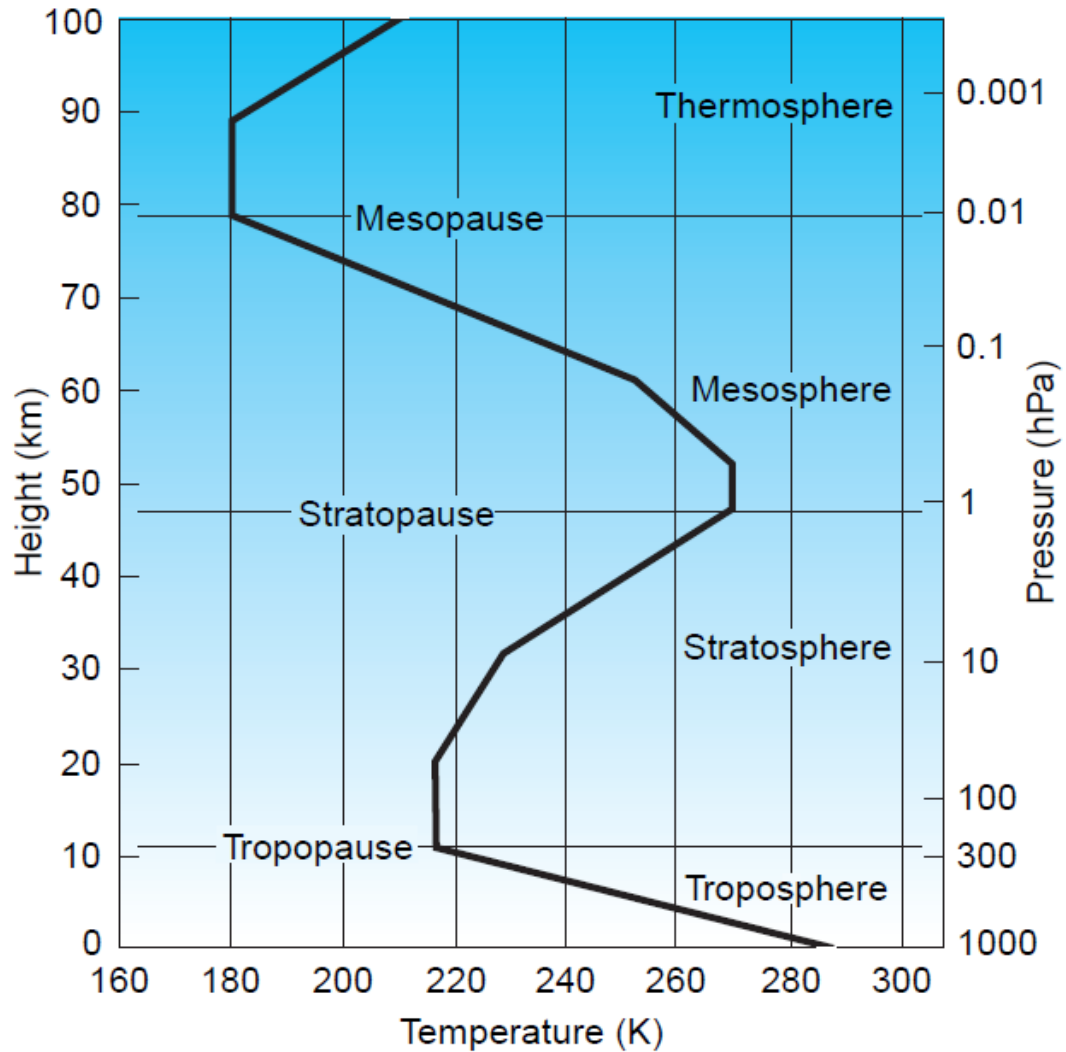


Figura 2.1: Divisione in strati dell'atmosfera, secondo l'andamento del gradiente di Temperatura

Facendo una media zonale e temporale della temperatura, possiamo studiare l'andamento tra poli ed equatore della temperatura, durante tutto l'anno. È chiaro un gradino di temperatura a  $\lambda \approx 30^\circ$ , dato dalla presenza dei *Jet Stream* nella tropopausa.

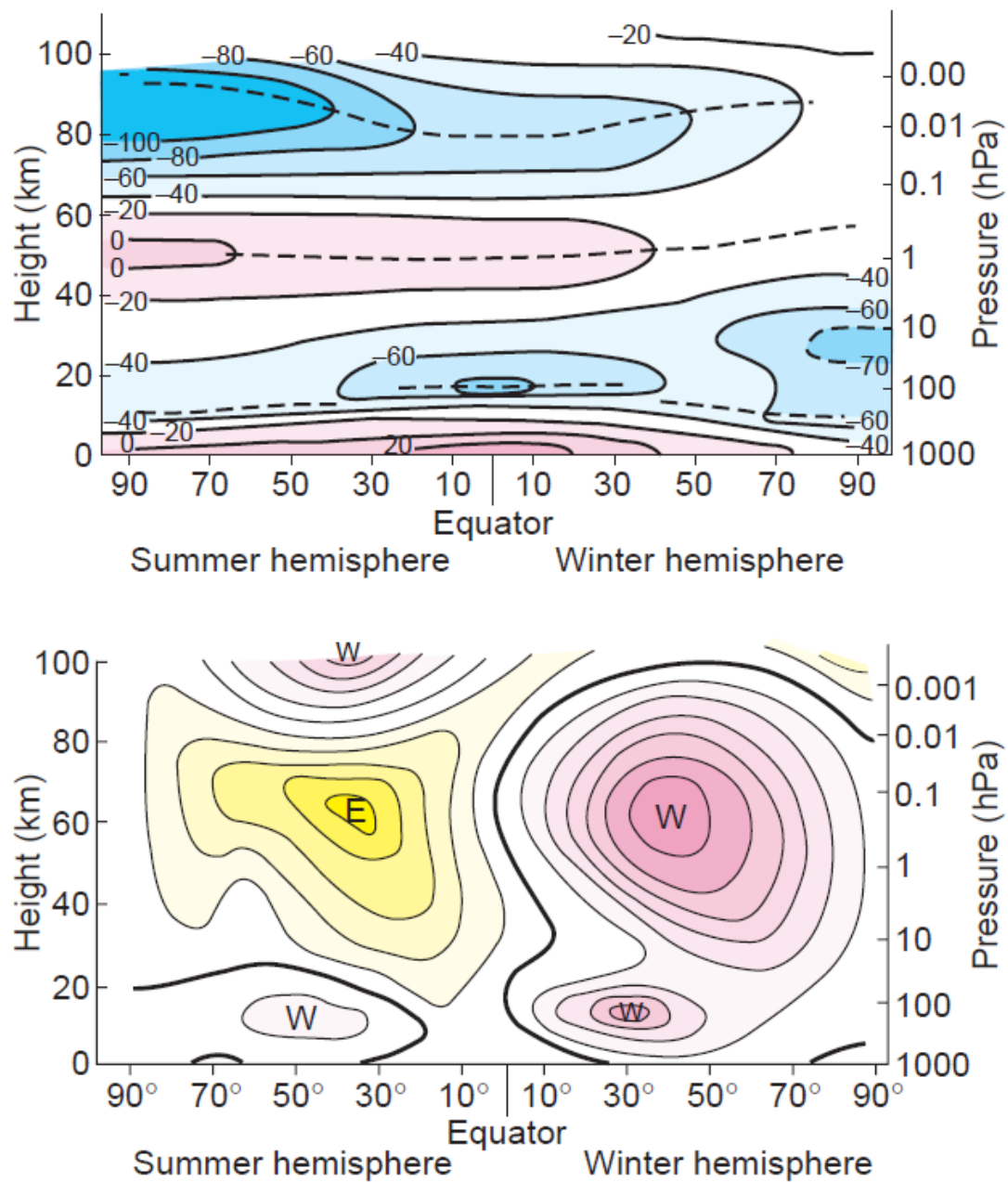


Figura 2.2: Media zonale e stagionale della Temperatura, le linee tratteggiate corrispondono alle pause tra i vari strati

È facile notare come l'altezza della tropopausa vari con la latitudine, avendo un minimo ai poli ed un massimo intorno all'equatore.

La distribuzione d'energia su larga scala, attraverso le varie latitudini viene effettuata perlopiù dalla turbolenza su grande scala, attraverso i cicloni, che prendono energia dai Jet-Streams.

La nomenclatura delle varie circolazioni è

- Circolazione Ciclonica: antioraria a N ed oraria a S
- Circolazione Anticiclonica: oraria a N ed antioraria a S

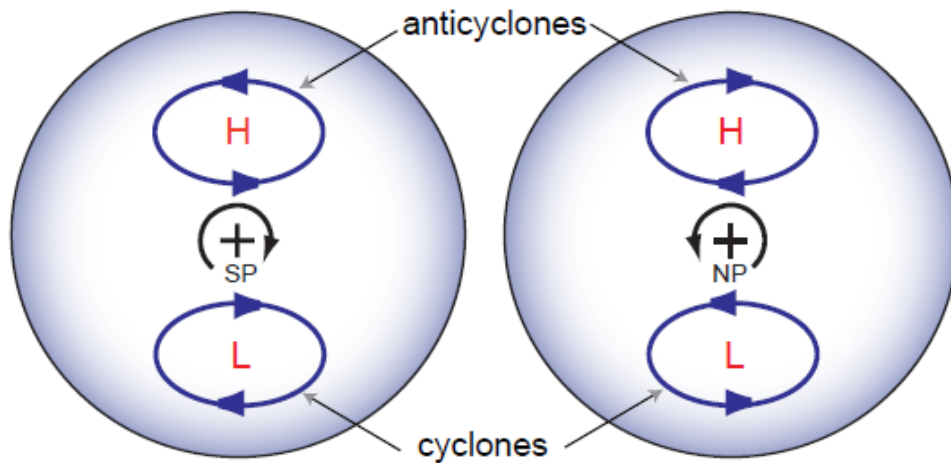


Figura 2.3: Schema per la notazione sulle circolazioni (NP=North Pole, SP=South Pole)

La circolazione ciclonica avviene attorno a pressioni basse, mentre quella anticiclonica attorno a pressioni alte.

Effettuando lo studio su un modello ideale di *acquaplanet*, senza terre emerse il tutto risulta più chiaro, infatti senza le terre emerse l'andamento delle circolazioni è chiaro, e si ritrovano formazioni cicloniche sui poli, anticicloniche sugli equatori e sia cicloniche che anticicloniche negli oceani.

Data la circolazione anticiclonica equatoriale e quella ciclonica polare si creano dei venti diretti verso l'equatore, ben conosciuti come *venti Alisei* o *trade winds*, che contribuiscono a formare le *Celle di Hadley*. Alla fine delle celle di Hadley, sui tropici, si formano i Jet Streams.

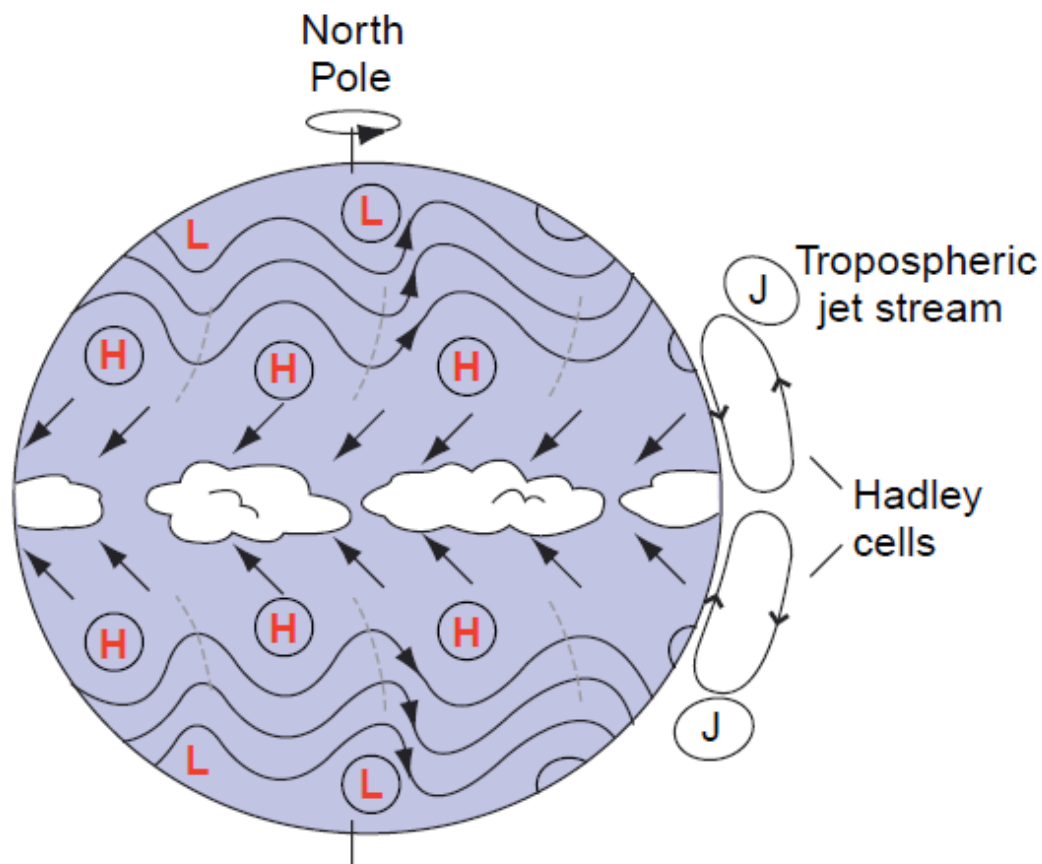


Figura 2.4: Visione approssimata del pianeta terra come acquaplanet (senza terre emerse)

**Monsoni e Precipitazioni** I monsoni sono dovuti alla diversa capacità termica tra continenti ed oceani, avvengono a Luglio e Gennaio nelle zone tropicali. L'inclinazione terrestre, contribuisce alla modificazione dell'andamento dei venti, causando appunto i monsoni per l'aumento del diverso irraggiamento solare tra le stagioni.

All'emisfero sud il cambio stagionale è meno netto per la maggiore presenza di oceani rispetto alle terre emerse. Il massimo delle precipitazioni si ha sull'equatore, tranne a giugno che si ha nelle zone Monsoniche.

## 2.3 Oceani

Gli oceani coprono il 70% della superficie terrestre (mari interni inclusi). La profondità media è di 3700 m e la profondità massima si ha nella *Fossa delle Marianne*, con una profondità di 11000 m.

I dati salienti per gli oceani sono

Grandezza	Valore
$V$	$1.35 \times 10^9 \text{ km}^3$
$\rho$	$10^3 \text{ kg/m}^3$
$\bar{T}$	$3.6^\circ\text{C}$
Salinità	$\approx 3.47\%$

L'acqua terrestre si trova perlopiù negli oceani sotto forma di acqua salata.

Le temperature marine si distribuiscono verticalmente come nel caso atmosferico, ed il gradiente della pressione è termoclino.

### Salinità

L'andamento della salinità oceanica segue dei pattern particolari. Infatti, la salinità maggiore si ha nei pressi delle zone di massima evaporazione, i tropici. Non è il caso dell'equatore poiché l'evaporazione viene compensata dalle precipitazioni.

La salinità è altresì la causa della non linearità della relazione tra  $T$  e  $\rho$  dato che modifica il punto crioscopico. Nelle acque dolci, a differenza delle acque salate, si congela solo la superficie.

### Circolazione Oceanica

La circolazione oceanica si divide in due modi differenti

- Circolazione Superficiale
- Circolazione Termoalina

La *circolazione superficiale* è dovuta all'attrito con i venti, quindi rispetta il loro andamento. Le temperature delle diverse correnti superficiali possono essere molto diverse.

La *circolazione termoalina* invece si svolge nelle acque profonde, ed è dovuta all'aumento di densità dato dall'abbassamento di temperatura. Questa circolazione è fondamentale per la vita, dato che il nutrimento dei pesci si forma nei fondali, ed il rimescolamento dato dalla circolazione termoalina è *fondamentale*.

#### 2.3.1 Criosfera

La *criosfera* è l'insieme di terre emerse *ghiacciate*. La maggior parte dei ghiacciai si trovano in Antartide e in Groenlandia.

Gli Iceberg sono grossi volumi di ghiaccio marino in movimento attraverso i canali dell'artico. Essendo un fluido anch'esso, in Antartide, la calotta polare si muove scivolando sulla terraferma su tempi molto lunghi.



## 2.4 Cicli Chimico-Fisici

I due cicli principali sono il *ciclo dell'acqua* ed il *ciclo del carbonio*.

### 2.4.1 Ciclo dell'Acqua

Il primo ciclo dell'acqua è dato dall'invarianza della quantità d'acqua in atmosfera, portando quindi all'esistenza di un trasporto d'acqua.

In formule, indicando con  $E$  la quantità d'acqua evaporata, con  $P$  la quantità precipitata e con  $F$  il flusso d'acqua

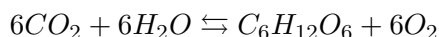
$$E - P = \nabla \cdot F$$

Per questo non avviene un accumulo o una perdita globale di acqua in atmosfera.

### 2.4.2 Ciclo del Carbonio

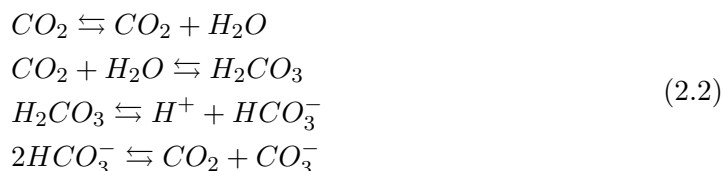
Il ciclo del carbonio avviene tra la superficie terrestre e l'atmosfera. Nella seconda troviamo perlopiù composti del carbonio come  $CO_2$  e  $CH_4$ , sulla superficie invece, lo troviamo sottoforma di composti organici, sedimenti, fossili e disciolto negli oceani.

Il carbonio superficiale viene "raccolto" dall'atmosfera dalla biosfera, attraverso la fotosintesi.

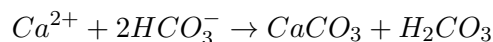


Dopo la morte delle piante viene sotterrato nella crosta che lo porta al mantello terrestre per subduzione. Dalla crosta ritorna in atmosfera tramite eventi meteorologici, nel mentre dal mantello può tornare sulla crosta dall'espansione del fondale marino e tramite il vulcanismo.

Alternativamente, il carbonio atmosferico, si può discogliere in acqua tramite il seguente ciclo



Un altro importante processo chimico è dato dalla dissoluzione delle conchiglie di organismi marini



L'andamento atmosferico della  $CO_2$  segue dei pattern oscillatori su lunghi periodi nelle zone popolate da piante, mentre mantiene un andamento stabile ai poli.

Da entrambi gli andamenti è evidente la crescita della quantità di  $CO_2$  atmosferica, data dall'incessante inquinamento atmosferico.



Parte I

**Termodinamica Atmosferica**



## Capitolo 3

# Concetti Fondamentali

L'atmosfera terrestre può essere considerata come un sistema termodinamico ideale, uniforme e stazionario.

Le variabili termodinamiche usate per descriverlo sono la Temperatura ( $T$ ), la Pressione ( $p$ ), la densità ( $\rho$ ) ed il volume ( $V$ ). L'elemento fondamentale di aria è detto *Air Parcel*, che corrisponde a circa  $10^{23}$  molecole per  $\text{m}^3$ . Le grandezze considerate sono mediate, infatti il tutto cambia lentamente nel tempo e le trasformazioni di conseguenza possono essere considerate quasi-statiche.

La validità delle approssimazioni si ha che il cammino libero medio  $l$ , in condizioni atmosferiche standard ( $T = 273.16 \text{ K}$ ,  $p = 1000 \text{ hPa}$ ), deve essere  $l \sim 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ , più piccolo del pacchetto d'aria ma più grande delle molecole.

Le unità di misura utilizzate sono quelle del Sistema Internazionale, la densità in  $\text{kg}/\text{m}^3$ , e la pressione in hPa. Altre unità di misura comuni per la pressione sono i mbar, le atmosfere e i Torr. Le conversioni tra unità sono

$$1 \text{ mbar} = 1 \text{ hPa}, 1 \text{ atm} = 760 \text{ Torr} = 1013 \text{ hPa}$$

Siccome i vincoli del sistema variano lentamente, tutti i processi saranno reversibili.

Si può considerare l'air parcel come un sistema isolato, infatti, le differenze di pressione attraverso il pacchetto si propagano con la velocità del suono, portando rapidamente il tutto in equilibrio.

### 3.0.1 Equazione di Stato

Si può considerare che in condizioni di atmosfera standard, l'aria secca si comporti come un gas perfetto. Infatti, la densità numerica di molecole nel pacchetto sarà di  $n = 2.687 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . Questo valore è detto *numero di Loschmidt* e ci permette di dire che una particella occupa  $2.7 \times 10^{-26} \text{ m}^3$  e ha un cammino libero medio  $l = 330$ .

La pressione atmosferica a livello del mare vale  $10^5 \text{ Pa}$  ed è una forza di superficie. Considerando delle molecole confinate da una parete, abbiamo che  $\frac{1}{6}$  del totale si muoveranno

verso la parete. Utilizzando la legge dei gas perfetti abbiamo che

$$\begin{aligned}
 V &= S \cdot A = vtA \\
 N_i &= \frac{V}{6}n = \frac{1}{6}nvtA \\
 \Delta q &= 2mvN_i = \frac{1}{3}nmv^2tA \\
 P &= \frac{F}{A} = \frac{1}{3}nmv^2 = \frac{1}{3}n \cdot 2 \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{2}{3}n \left( \frac{3}{2}k_B T \right) = nk_B T
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dove si è posto

$$n = \frac{N}{V} \quad M = Nm \quad \rho = \frac{M}{V}$$

Quindi

$$pV = Nk_B T = \frac{M}{m}k_B T = MRT$$

Dove  $R = k_B/m$  è la costante dei gas specifica.

Possiamo inoltre scrivere

$$p = \rho RT$$

Con  $\rho = \frac{M}{V}$  il volume specifico.

Possiamo inoltre considerare il concetto di mole. 1 mol corrisponde ad una quantità di sostanza, il cui peso in grammi equivale al peso molecolare. In 1 mol si trovano  $N_A$  molecole, dove  $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  è il numero di Avogadro. Di conseguenza, indicando con  $n$  il numero di moli si ha

$$\begin{aligned}
 N &= N_A n \\
 pV &= Nk_B T = N_A n k_B T \\
 pV &= NR^* T = MRT
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dove  $R^*$  è la costante universale dei gas,  $R^* = N_A k_B$ . Se il peso molecolare del gas considerato è  $\mathcal{M}$  si ha

$$N = \frac{\mathcal{M}}{M} \quad R = \frac{R^*}{\mathcal{M}}$$

### 3.0.2 Legge di Dalton

La legge di Dalton ci permette di lavorare su gas misti. Infatti, per una miscela di  $n$  gas

$$\begin{aligned}
 p_{tot} &= \sum_{i=1}^n p_i \\
 p_i &= \rho_i R_i T \\
 p_{tot} &= \sum_{i=1}^n \rho_i R_i T = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\rho} R_i \rho T \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{M} R_i \rho T
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Possiamo definire dall'equazione precedente la costante dei gas efficace

$$R_{eff} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n M_i R_i$$

Da cui si può ricavare la legge dei gas perfetti per una miscela

$$p = \rho R_{eff} T$$

Similmente, la massa molecolare efficace sarà

$$\mathcal{M}_{eff} = \frac{R^*}{R_{eff}}$$

Per l'aria secca, abbiamo che, prendendo le concentrazioni percentuali degli elementi che compongono l'atmosfera

$$\begin{aligned} R_{N_2} &= \frac{k_B}{M_{N_2}} = \frac{k_B}{\mathcal{M}u} = \frac{k_B}{28u} \\ R_{O_2} &= \frac{k_B}{32u} \\ R_{Ar} &= \frac{k_B}{40u} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Di conseguenza, indicando la costante dei gas efficace dell'aria secca con  $R_d$

$$R_d = \sum_{i=1}^3 \frac{M_i}{M} R_i = \left( \frac{0.78}{28} + \frac{0.21}{32} + \frac{0.01}{40} \right) \frac{k_B}{u} = 287 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1}$$

La massa molecolare efficace sarà

$$\mathcal{M}_d = \frac{R^*}{R_d} = 28.97 \text{ g/mol}$$





## Capitolo 4

# Termodinamica dell'Aria Secca

### 4.1 Equilibrio Idrostatico

Consideriamo un volumetto d'aria. La forza di pressione tra  $z$  e  $\delta z$  sarà

$$F_p(z + \delta z) = - \left( F_p(z) + \frac{\partial F_p}{\partial z} \delta z \right)$$

Ma poiché  $p = \frac{F_p}{\delta x \delta y}$  si ha

$$\begin{aligned} F_p(z + \delta z) + F_p(z) &= -\frac{\partial F_p}{\partial z} \delta z = -\frac{\partial p}{\partial z} A \delta z = -\frac{\partial p}{\partial z} dV = dF_p \\ dF_p &= -gdM = -\rho g dV \end{aligned} \quad (4.1)$$

Si ha equilibrio idrostatico quando la forza gravitazionale è bilanciata dalla forza di pressione

$$\begin{aligned} F_g + F_p &= 0 \\ -\rho g V - \frac{\partial p}{\partial z} V &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \end{aligned} \quad (4.2)$$

Quest'equazione è detta *Equazione dell'Idrostatica*. Integrando nel caso di aria secca, troviamo

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{RT} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{p}{RT} g \\ p(z) &= p(z_0) e^{-\frac{1}{R} \int_{z_0}^z \frac{g}{T} dz} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ipotizzando che  $T$  e  $g$  siano costanti si ha

$$p(z) = p(z_0) e^{-\frac{g}{RT}(z-z_0)} = p(z_0) e^{-\frac{z-z_0}{H}}$$

Dove  $H$  è l'altezza di scala.

Nel caso che  $T$  non sia costante, si può utilizzare la temperatura media, definita come

$$\bar{T} = \frac{\int_{p_1}^{p_2} T d \ln p}{\int_{p_1}^{p_2} d \ln p}$$

Inoltre, partendo dall'equazione dell'idrostatica

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -\frac{g}{RT} dz \\ T d \ln p &= -\frac{g}{R} dz \\ \int_{p_1}^{p_2} T d \ln p &= \bar{T} \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} (z_2 - z_1) \\ z_2 - z_1 &= -\frac{R}{g} \bar{T} \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{R}{g} \bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

L'ultima equazione è l'*equazione ipsometrica*

$$\Delta z = \frac{R}{g} \bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Dall'equazione ipsometrica risulta evidente che se la temperatura media aumenta in un punto, lo strato di atmosfera tra  $p_1$  e  $p_2$  si ispessisce nel punto e si ha un abbassamento di pressione in  $z_1$ .

Poiché  $p$  decresce monotonamente con  $z$  si ha

$$\begin{aligned} p(z_1, x_0) &= p_2 < p_1 \\ z(p_1, x_0) &= z_0 < z_1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

## 4.2 Geopotenziale

Possiamo definire un *Geopotenziale gravitazionale*  $\Phi$  tramite la seguente equazione

$$\begin{aligned} d\Phi &= g dz \\ \Phi_2 - \Phi_1 &= \int_{z_0}^{z_1} g(z) dz \end{aligned} \quad (4.6)$$

Imponendo che  $\Phi(0) = 0$  si ha

$$\Phi(z) = \int_0^z g(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

Si definisce *Altezza Geopotenziale*  $Z$  la grandezza

$$Z = \frac{\Phi(z)}{g_0} = \frac{1}{g_0} \int_0^z g(\tilde{z}) d\tilde{z}$$

È chiaro che l'altezza geopotenziale coincide con l'altezza se e solo se  $g \simeq g_0$

### 4.3 Prima Legge della Termodinamica

La prima legge della termodinamica, afferma che il differenziale dell'energia interna  $U$  è dato dal differenziale del calore assorbito  $Q$  meno il differenziale del lavoro fatto  $W$

$$dU = dQ - dW$$

L'unico lavoro possibile, nel caso dell'atmosfera, è il lavoro di compressione ed espansione

$$dW = pA\delta l$$

Se  $p$  è definita lungo tutta la trasformazione, allora

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Il primo principio, quindi diventa

$$dU = dQ - p dV$$

Per un gas perfetto, definendo con  $f$  i gradi di libertà, si ha che l'energia interna è

$$U = \frac{f}{2} N k_B T$$

Dalla definizione di  $N$ , abbiamo che

$$U = \frac{f}{2} M R T$$

Il calore specifico per unità di massa, è definito come

$$c_v = \frac{f}{2} R$$

Di conseguenza,  $dU$  diventa

$$dU = M c_v dT = dQ - p dV$$

Le trasformazioni atmosferiche, essendo adiabatiche in prima approssimazione, hanno  $dQ = 0$ , quindi, per pacchetti di aria secca

$$M c_v dT = -p dV$$

Quindi, per trasformazioni a  $p$  costante

$$\begin{aligned} M c_p dT &= dQ_p \\ M c_v dT &= M c_p dT - p dV \\ d(pV) &= p dV \\ M c_v dT &= M c_p dT - d(pV) = M c_p dT - M R dV \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dall'ultima equazione si trova la *Relazione di Mayer*

$$c_v + R = c_p$$

Per l'aria secca

$$\begin{aligned} c_p &= 1004 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1} \\ c_v &= 717 \text{ JK}^{-1}\text{kg}^{-1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dalle relazioni per le adiabatiche, si ha

$$Mc_v dT = -pdV \quad V = \frac{RT}{p}M$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} dV &= M \left( \frac{R}{p} dT - \frac{R}{p^2} dp \right) \\ Mc_v dT &= M \left( -R dT + \frac{R}{p} T dp \right) \\ c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dT}{T} &= R \frac{dp}{p} \\ c_p \frac{dT}{T} &= R \frac{dp}{p} \\ \frac{dT}{T} &= \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} := \chi \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Integrando l'ultima equazione, si ottiene l'*equazione di Poisson* per trasformazioni adiabatiche

$$\begin{aligned} \ln \frac{T}{T_0} &= \chi \ln \frac{p}{p_0} \\ \frac{T}{T_0} &= \left( \frac{p}{p_0} \right)^\chi \end{aligned} \quad (4.10)$$

#### 4.3.1 Temperatura Potenziale

Si può definire, dall'equazione di Poisson, la *temperatura potenziale*  $\theta(T, p)$ . Definendo  $p_0 = 1000 \text{ hPa}$ , si ha

$$\theta = T \left( \frac{1000}{p} \right)^\chi$$

Questa, è la temperatura che avrebbe un pacchetto d'aria portato adiabaticamente dalla pressione a cui si trova, fino alla pressione  $p_0 = 1000 \text{ hPa}$ .

Quindi, dato un pacchetto a pressione e temperatura  $(p, T)$ , se portato adiabaticamente in  $(p_1, T_1)$  si ottiene

$$\begin{aligned} T_1 &= T \left( \frac{p_1}{p} \right)^\chi \\ \theta_1 &= T_1 \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^\chi = T \left( \frac{p_1}{p} \right)^\chi \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^\chi = \theta \end{aligned} \quad (4.11)$$

Di conseguenza,  $\theta$  è una proprietà intrinseca della massa d'aria che si muove adiabaticamente su superfici a temperatura potenziale costante.

### Lapse Rate Adiabatico Secco

Se un pacchetto d'aria si sposta verticalmente e adiabaticamente, si può studiare la variazione di temperatura usando l'equazione di Poisson.

Per definizione di temperatura potenziale

$$T = \theta \left( \frac{p}{p_0} \right)^\chi$$

Quindi, derivando rispetto a  $z$ , si ha

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{a,d} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \theta \left( \frac{p}{p_0} \right)^\chi \right] = \\ &= \chi \theta \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\chi-1} \left( \frac{1}{\rho_0} \right) \frac{\partial p}{\partial z} = \\ &= -\frac{\theta}{\rho} \left( \frac{p}{p_0} \right)^\chi \rho g = -\chi \frac{T}{p} \rho g = -\chi \frac{T}{p} \left( \frac{p}{RT} \right) = -\frac{g}{c_p} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Quindi, definendo il *Lapse rate adiabatico secco*  $\Gamma_d$  con il gradiente di pressione, si ha

$$\Gamma_d = - \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{a,d} = \frac{g}{c_p} \approx -10 \text{Kkm}^{-1}$$

## 4.4 Stabilità Atmosferica

La presenza di uno spostamento delle masse d'aria è data da uno sbilancio delle forze agenti sul pacchetto stesso. Questo sbilanciamento può essere dato dall'aria che sbatte contro una montagna, o sui fronti d'aria con temperature diverse, ma in entrambi i casi l'aria fredda scivola sotto l'aria calda meno densa, creando un gradiente di pressione esterno al gradiente atmosferico.

Studiando questo problema con le leggi della termodinamica, e supponendo l'ambiente in equilibrio idrostatico, si ha che, definendo con  $a$  l'accelerazione (definiamo con  $(-)_a$  il pacchetto e con  $(-)_e$  l'ambiente)

$$\rho_a a = -\rho_a g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

Di conseguenza, invertendo la relazione e aggiungendo il contributo atmosferico

$$\begin{aligned} \rho_a a &= -\rho_a g + \rho_e g \\ \rho_a \frac{d^2 z}{dt^2} &= (\rho_e - \rho_a) g \end{aligned} \quad (4.13)$$

Poiché la pressione del pacchetto e dell'ambiente sarà in equilibrio, cioè

$$\rho_e = \frac{p}{R_d T_e} \quad \rho_a = \frac{p}{R_d T_a}$$

Si ha

$$\frac{1}{T_a} \frac{d^2 z}{dt^2} = \left( \frac{T_a - T_e}{T_a T_e} \right) g$$

Approssimando con Taylor, al prim'ordine, le temperature, abbiamo che

$$\begin{aligned} T_a &\approx T(z_0) + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_a \Delta z = T_0 - \Gamma_{a,d} \Delta z \\ T_e &= T_0 - \Gamma_{e,d} \Delta z \end{aligned} \tag{4.14}$$

E di conseguenza, l'equazione differenziale in  $z$  diventa

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\Gamma_e - \Gamma_a}{T_0} g \Delta z \\ \Delta z &= \Delta z_0 e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dove, si ha che

$$\omega = \sqrt{(\Gamma_{a,d} - \Gamma_{e,d}) \frac{g}{T_0}}$$

Dividendo per  $2\pi$  si ottiene una frequenza, che è la *Frequenza di Brunt-Väisälä*

$$f_{BV} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(\Gamma_{a,d} - \Gamma_{e,d}) \frac{g}{T_0}}$$

Se  $f$  è reale, si hanno oscillazioni attorno a  $z_0$ , mentre se è immaginaria si ha che il pacchetto continua a salire indefinitamente.

Questo ci permette di definire un vincolo su  $\Gamma$ , dando le condizioni per la stabilità atmosferica

$$\begin{aligned} \Gamma_a &> \Gamma_e && \text{Stabile} \\ \Gamma_a &= \Gamma_e && \text{Neutra} \\ \Gamma_a &< \Gamma_e && \text{Instabile} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= \frac{g}{c_p} = - \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{a,d} \\ \Gamma_d &= - \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_e \end{aligned} \tag{4.17}$$

È facile notare che più è alta la frequenza di Brunt-Väisälä, più è stabile l'atmosfera.

#### 4.4.1 Stabilità Atmosferica e Temperatura Potenziale

Ricordando la definizione di temperatura potenziale tramite l'equazione di Poisson, e derivando rispetto a  $z$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \left(\frac{p_0}{p}\right)^\chi \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\chi T}{p} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\chi-1} \frac{\partial p}{\partial z} = \\
 &= \frac{1}{T} \theta \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\theta \chi}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\theta}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\chi \theta}{p} \frac{gp}{R_d T} = \frac{\theta}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{R_d g \theta}{c_p T R} \\
 \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p} = \Gamma_{a,d} - \Gamma_{e,d}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Poiché  $T/\theta > 0$  sempre, le condizioni sul lapse rate possono essere scritte in funzione di  $\theta$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta}{\partial z} &> 0 && \text{Stabile} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0 && \text{Neutra} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial z} &< 0 && \text{Instabile}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Risulta ovvio che la temperatura potenziale dell'ambiente cresce con la quota





## Capitolo 5

# Termodinamica dell'Aria Umida

L'aria umida, studiata dal punto di vista termodinamico, è un sistema *eterogeneo*, cioè formato da più sistemi omogenei.

L'acqua rende il sistema eterogeneo poiché è presente in più fasi. Il numero di gradi di libertà di un sistema eterogeneo si può calcolare tramite la *formula di Gibbs*. Se indichiamo con  $f$  i gradi di libertà, con  $\phi$  le fasi e con  $s$  il numero di specie chimiche, abbiamo

$$f = s - \phi + 2$$

### 5.1 Grandezze Fondamentali

Per lo studio dell'aria umida, sono necessarie ulteriori grandezze. Tra queste grandezze abbiamo

- Pressione di Saturazione
- Entalpia
- Umidità
- Temperature

#### 5.1.1 Pressione di Saturazione

Venga preso un gas in un pistone. Comprimendolo, la temperatura cala, ed il gas smette di comportarsi come un gas ideale.

Raggiunta una certa temperatura critica  $T_c$  avviene la condensazione. La pressione di saturazione dell'acqua viene indicata con  $e_s(T)$  e l'espressione analitica viene determinata dall'*equazione di Clausius Clapeyron*

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L}{R_w T} e_s$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$e_s(T) = e_s(T_0) e^{-\frac{R_w}{L} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

Prendendo come riferimento il punto triplo si può trovare una forma approssimata dell'espressione

$$\begin{aligned} e_s(T) &= 2.497 \times 10^9 e^{-\frac{5417}{T}} \\ \ln \frac{e_s}{6.11} &= 19.83 - \frac{5417}{T} \end{aligned} \quad (5.1)$$

## 5.2 Entalpia

L'entalpia è un potenziale termodinamico, che per trasformazioni isobare corrisponde al calore fornito al sistema.

Scrivendo il primo principio della termodinamica e confrontando l'entalpia con l'energia interna, che corrisponde al calore fornito a volume costante, si trova

$$\begin{aligned} dU &= dQ - p dV \longrightarrow U = M c_v dT \\ dH &= dQ + V dp \longrightarrow H = M c_p dT \end{aligned} \quad (5.2)$$

Prendendo la derivata temporale dell'entalpia possiamo derivare l'*equazione della termodinamica*

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{dQ}{dt} + V \frac{dp}{dt} \\ M c_p \frac{dT}{dt} &= \frac{dQ}{dt} + V \frac{dp}{dt} \\ c_p \frac{dT}{dt} &= \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\theta}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{R\theta}{\rho c_p} \frac{dp}{dt} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Sostituendo l'espressione della pressione data nella riscrittura del primo principio troviamo la forma finale dell'*equazione della termodinamica*

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

## 5.3 Umidità

Per poter valutare sistemi eterogenei dentro un pacchetto d'aria, è utile introdurre nuove variabili che permettono di caratterizzare la percentuale di vapor d'acqua.

### 5.3.1 Rapporto di Mescolamento

Indicando con  $M_v$  la massa di vapore e con  $M_d$  la massa di aria secca, indichiamo il *rapporto di mescolamento* come

$$w = \frac{M_v}{M_d}$$

Il rapporto di mescolamento è comunemente misurato in g/kg. Sostituendo le espressioni di  $M_v$  e  $M_d$  dalla legge dei gas perfetti troviamo

$$\begin{aligned} M_v &= \frac{eV}{R_w T} \\ M_d &= \frac{pV}{R_d T} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Sostituendo in  $w$

$$\begin{aligned} w &= \frac{eV}{R_w T} \frac{R_d T}{pV} \\ w &= \frac{R_d}{R_w} \frac{e}{p} = \epsilon \frac{e}{p} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dove  $\epsilon = \frac{R_d}{R_w} \approx 0.622$  è un parametro adimensionale. È ovvio che, essendo un rapporto tra masse,  $w$  non varia con la temperatura e la pressione

### 5.3.2 Umidità Specifica

Posso modificare l'espressione di  $w$ , includendo la massa totale del pacchetto al posto della massa di aria secca, per poter avere una percentuale di vapor d'acqua rispetto alla massa totale del pacchetto. Indicando con  $q$  questo valore, abbiamo

$$q = \frac{M_v}{M_{tot}} = \epsilon \frac{e}{p + e} \approx w$$

### 5.3.3 Rapporto di Mescolamento di Saturazione

Sostituendo nel rapporto di mescolamento la pressione di saturazione dell'acqua, posso definire una nuova massa  $M_s$ , che indica la massa d'acqua necessaria per saturare il pacchetto d'aria. Nel caso che  $w_s = w$  abbiamo la condizione di saturazione del pacchetto, dato che la pressione parziale dell'acqua coincide con la pressione di saturazione alla temperatura data.

In formule

$$w_s = \frac{M_s}{M_d} \cong \epsilon \frac{e_s(T)}{p}$$

### 5.3.4 Umidità Relativa

Posso definire con  $RH$  l'umidità relativa di un pacchetto d'aria come il rapporto percentuale tra il rapporto di mescolamento e il rapporto di mescolamento di saturazione

$$RH = 100 \frac{w}{w_s}$$

Sostituendo le espressioni analitiche dell'umidità troviamo infine

$$RH = 100 \frac{e}{e_s(T)}$$

## 5.4 Temperature

### 5.4.1 Temperatura Virtuale

Dalla relazione delle leggi dei gas perfetti per l'aria umida e per l'aria secca, posso definire una nuova costante dei gas *efficace*  $R_u$  trovo

$$\begin{aligned} R_u &= \frac{M_d}{M} R_d + \frac{M_v}{M} R_w = \frac{M_d}{M} R_d \left( 1 + \frac{M_v R_w}{M_d R_d} \right) \\ R_u &= \frac{M_d R_d}{M_d + M_v} \left( 1 + \frac{w}{\epsilon} \right) = \frac{1}{1 + w} \left( 1 + \frac{w}{\epsilon} \right) R_d \end{aligned} \quad (5.6)$$

Sviluppando in serie  $1/(1 + w)$  e troncando al second'ordine

$$R_u \cong (1 - w + w^2)(1 + 1.607w)R_d \cong (1 + 0.607w)R_d$$

La legge dei gas diventa

$$p = \rho R_u T = \rho(1 + 0.607w)R_d T$$

Definendo la *temperatura virtuale*  $T_u$  con  $(1 + 0.607w)T$  ottengo

$$p = \rho R_d T_u$$

Da cui

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{R_d T_u} \\ p_d &= \frac{p}{R_d T} \end{aligned} \quad (5.7)$$

### 5.4.2 Temperatura di Dew Point

La temperatura di dew point, è la temperatura per cui ad una data pressione si ha saturazione, cioè

$$w_s(T_D, p) = w$$

L'espressione analitica della temperatura di dew point si ha dall'espressione di  $w_s$ , ed è

$$T_D = \frac{1}{\frac{1}{273.16} - \frac{R_w}{L} \ln \left( \frac{wp}{6.11\epsilon} \right)}$$

## 5.5 Acqua Precipitabile

Si può stimare la quantità totale di vapore atmosferico su una superficie di  $1\text{m}^2$ , Questa grandezza è misurata in  $\text{kg}/\text{m}^2$  e comunemente riportata in  $\text{mm}$ . Considerando solo le nubi, ha un valor medio di  $0.5\text{mm}$

## 5.6 Condensazione

La condensazione di un pacchetto d'aria può avvenire a seguito di tre processi fisici principali

1. Raffreddamento diabatico
2. Mescolamento isobarico
3. Sollevamento

### 5.6.1 Raffreddamento Diabatico

Si ha il raffreddamento diabatico quando la massa d'aria viene a contatto con il terreno freddo, formando brina o rugiada sul terreno, oppure tramite la mancanza di compensazione dell'irraggiamento solare durante la notte

### 5.6.2 Mescolamento Isobarico

Considerando due masse d'aria che si miscelano a pressione costante, abbiamo che la temperatura ed il mixing ratio finali saranno dati dalla media pesata di quelli delle due masse d'aria

$$T_f = \frac{M_1 T_1 + M_2 T_2}{M_1 + M_2}, \quad w_f = \frac{M_1 w_1 + M_2 w_2}{M_1 + M_2}$$

Prendendo come esempio due masse non sature con parametri iniziali

$$\begin{aligned} p &= 1000 \text{ hPa}, & T_1 &= 273 \text{ K}, & RH &= 90\% \\ M_1 &= M_2, & T_2 &= 293 \text{ K}, & RH &= 90\% \end{aligned} \quad (5.8)$$

Si ha

$$w = \frac{RH}{100} w_s = \frac{RH}{100} \frac{\epsilon e_s}{p} = \frac{RH \epsilon}{100 p} 2.497 \times 10^9 e^{-\frac{5417}{T}}$$

Da cui

$$\begin{aligned} w_1 &= 3.4 \text{ g/kg} \\ w_2 &= 12.9 \text{ g/kg} \quad T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} = 283 \text{ K}, \quad w_f = \frac{w_1 + w_2}{2} = 8.2 \text{ g/kg} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Inserendo i valori finali per il mixing ratio di saturazione troviamo

$$\begin{aligned} e_s(T_f) &= 2.497 \times 10^9 e^{-\frac{5417}{T_f}} \\ w_s(T_f) &= 7.6 \text{ g/kg} < w_f \end{aligned} \quad (5.10)$$

Questo ci porta a dire che è avvenuta condensazione. Essendo l'altezza di 1000 hPa, ciò corrisponde alla formazione di nebbia.

### 5.6.3 Espansione Adiabatica per Sollevamento

Sia dato un pacchetto d'aria con una data  $w$  ad una certa quota  $p$ . Scrivendo le relazioni di decadimento esponenziale per la pressione parziale  $e$  troviamo

$$e(z) = \frac{w}{\epsilon} p = \frac{w}{\epsilon} p(z_0) e^{-\frac{z-z_0}{H}} = e(z_0) e^{-\frac{z-z_0}{H}}$$

Imponendo la definizione sulla pressione parziale di saturazione troviamo

$$e_s(z) = 6.11 e^{-\frac{L}{R_w} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{273.16} \right)}$$

Poiché il pacchetto d'aria si muove adiabaticamente, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} T &= T_0 - \Gamma_d(z - z_0) \\ \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} &= \frac{\Gamma_d(z - z_0)}{TT_0} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Sostituendo nell'espressione di  $e_s(z)$  troviamo

$$e_s(z) = e_s(z_0) e^{-\frac{L\Gamma_d}{R_w T_0^2} (z - z_0)}$$

L'altezza di scala per l'e-folding della pressione parziale di saturazione sarà quindi

$$H_w = \frac{R_w T_0^2}{L\Gamma_d} \cong 1.7 \text{ km}$$

Ricordando la definizione di  $w$  e  $w_s$  sappiamo di avere condensazione quando  $w = w_s$ , e di conseguenza  $e = e_s$ . Chiamando quest'altezza  $z_{LCL}$ , o *Lifting Condensation Layer*, troviamo, imponendo l'uguaglianza dei vapori parziali

$$\begin{aligned} e_s(z_0) e^{\frac{z_{LCL} - z_0}{H_w}} &= e(z_0) e^{-\frac{z_{LCL} - z_0}{H}} \\ \frac{e(z_0)}{e_s(z_0)} &= \frac{RH(z_0)}{100} = e^{(z_{LCL} - z_0) \left( \frac{1}{H} - \frac{1}{H_w} \right)} \\ z_{LCL} &= z_0 + \frac{\ln \left( \frac{100}{RH(z_0)} \right)}{\left( \frac{1}{H_w} - \frac{1}{H} \right)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

### Lapse Rate dell'Aria Umida

Poiché il  $\Gamma_d$  dell'aria non satura è quello dell'aria secca, per tener conto di condensazione ed evaporazione è necessario definire un nuovo lapse rate per l'aria umida. Le equazioni della termodinamica saranno

$$\begin{aligned} dH &= Mc_p dT = dQ + V dp \\ dQ &= -L dM_v = -M L dw_s \\ Mc_p dT &= -M L dw_s + V dp \\ c_p dT &= -L dw_s - \frac{g}{\rho} dp \end{aligned} \quad (5.13)$$

Sostituendo nell'ultima l'equazione ipsometrica, ottengo

$$\begin{aligned} c_p dT &= -L dw_s - g \frac{dz}{dp} dp \\ \frac{dT}{dz} &= -\frac{L}{c_p} \frac{dw_s}{dz} - \frac{g}{c_p} = -\Gamma_m \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dove con  $\Gamma_m$  è indicato il lapse rate per l'aria umida (il pedice m deriva dall'Inglese *moist*, "umido")

$$\Gamma_m = -\frac{dT}{dz} = \Gamma_d + \frac{L}{c_p} \frac{dw_s}{dz}$$

Prendendo la definizione di differenziale di una funzione di più variabili e la definizione di  $w_s$  otteniamo che la derivata verticale di  $w_s$  sarà

$$\frac{dw_s}{dz} = \frac{\partial w_s}{\partial T} \frac{dT}{dz} + \frac{\partial w_s}{\partial p} \frac{dp}{dz}$$

Dalla definizione di  $\Gamma_m$  e dall'equazione di Clausius-Clapeyron, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{dw_s}{dz} &= -\frac{\epsilon \Gamma_m}{p} \frac{\partial e_s}{\partial T} + \epsilon \frac{e_s(T)}{p^2} \rho g \\ \frac{\partial e_s}{\partial T} &= \frac{L e_s}{R_w T^2} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Sostituendo quindi nell'espressione della derivata di  $w_s$  abbiamo

$$\frac{dw_s}{dz} = -\Gamma_m \frac{\epsilon L e_s}{p R_w T^2} + \frac{w_s \rho g}{p}$$

E di conseguenza

$$\Gamma_m = \frac{1 + \frac{L w_s}{R_d T}}{1 + \frac{L^2 w_s}{c_p R_w T^2}} \Gamma_d$$

## 5.7 Temperatura Potenziale Equivalente

Dall'equazione della termodinamica e dalla definizione di  $w_s$  sappiamo che

$$c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dq}{dt} = -L \frac{dw_s}{dt}$$

Poiché nel caso della condensazione  $p$  è costante, otteniamo

$$\begin{aligned} dw_s &= \epsilon \frac{de_s}{p} = \frac{\epsilon L e_s}{p R_w T^2} dT \\ \frac{dw_s}{T} &= \frac{\epsilon L e_s}{p R_w T^3} dT = \frac{w_s L}{R_w T^2} dT \\ d\left(\frac{w_s}{T}\right) &= \frac{dw_s}{T} - \frac{w_s}{T^2} dT \\ d\left(\frac{w_s}{T}\right) &= \frac{w_s}{T^2} \left(\frac{L}{R_w T} - 1\right) dT \simeq \frac{w_s L}{R_w T^3} dT = \frac{dw_s}{T} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Dall'equazione della termodinamica, abbiamo

$$\begin{aligned} c_p \frac{T}{\theta} d\theta &= -L dw_s \\ c_p d \ln \theta &= -L d \left( \frac{w_s}{T} \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ponendo  $\ln(\theta(w_s = 0)) = \ln \theta_e$  abbiamo

$$\ln \frac{\theta}{\theta_e} = -\frac{L w_s}{c_p T}$$

Di conseguenza

$$\theta_e = \theta e^{\frac{L w_s}{c_p T}}$$

Dove,  $\theta_e$  è la *temperatura potenziale equivalente*. Per la definizione della stessa, lungo una trasformazione adiabatica umida è conservata



## Capitolo 6

# Diagrammi Termodinamici

I diagrammi termodinamici atmosferici, sono diagrammi che permettono di simulare processi atmosferici, riportando i profili verticali di T e U misurati dalle radiosonde. Sono necessari per studiare la stabilità dell'atmosfera.

In questi diagrammi sono riportati 5 gruppi di linee

1. Isobare, orizzontali
2. Isoterme, verticali
3. Linee a  $w_s$  costante
4. Linee a  $\theta$  costante (adiabatiche secche)
5. Linee a  $\theta_e$  costante (adiabatiche umide)

Il lavoro su questo diagramma, come per ogni lavoro termodinamico, sarà dato dall'integrale di linea lungo la curva della trasformazione.

Nel caso particolare di un ciclo nei diagrammi atmosferici, si ha

$$\oint T d \ln p = \oint \frac{1}{R\rho} dp = \underbrace{\frac{1}{R} \oint d \left( \frac{p}{\rho} \right)}_{=0} - \frac{1}{R} \oint p d \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{R} \oint p d\alpha$$

Se l'equilibrio idrostatico non è verificato, si ha, dall'equazione di Brunt-Väisälä e dal secondo principio della dinamica

$$\frac{F}{M} = \frac{T_a - T_e}{T_e} g$$

E la forza  $F$  compie un lavoro per unità di massa, si ha

$$\Delta L = \int_{z_0}^z \frac{F}{M} dz = - \int_{z_0}^z (T_a - T_e) \frac{R_d}{pg} \frac{dp}{dz} dz = -\frac{R_d}{g} \int_{p_0}^p (T_a - T_e) d \ln p$$

## 6.1 Diagramma SkewT

Una variante di diagramma termodinamico, comunemente usato, è il diagramma *SkewT-log p*. È equivalente al diagramma presentato precedentemente, solo che le isoterme sono ruotate di  $45^\circ$ .

Per calcolare le grandezze fondamentali in un grafico SkewT, bastano pochi passaggi. La  $T_D$  si ricava ricordando che  $w_s(T_D, p) = w$ , che ci permette, invertendo la relazione, di trovare il mixing ratio e l' $RH$ .

Per calcolare  $e, e_s$  basta invertire le relazioni tra le pressioni parziali ed i mixing ratio

$$w_i = \epsilon \frac{e_i}{p}$$

Di conseguenza

$$e_i = \frac{w_i p}{\epsilon} \approx \frac{w_i p}{0.622}$$

### 6.1.1 Stabilità del Profilo di Temperatura

Per verificare la stabilità atmosferica esistono due metodi principali

1. Air Parcel Method
2. Layer Method

Il primo metodo sfrutta le relazioni tra i lapse rate calcolati in precedenza. Generalmente, si ha

$$\begin{array}{ll} \Gamma_e > \Gamma_d > \Gamma_m & \text{Assolutamente Instabile} \\ \Gamma_d > \Gamma_m > \Gamma_e & \text{Assolutamente Stabile} \\ \Gamma_d > \Gamma_e > \Gamma_m & \text{Condizionatamente Stabile o Instabile} \end{array} \quad (6.1)$$

Il secondo metodo invece, sfrutta altre tecniche, che prevedono il sollevamento graduale di uno strato atmosferico. In generale, si possono avere 4 risultati diversi

1. Sollevamento di uno strato non saturo con un profilo superadiabatico
2. Sollevamento di uno strato di inversione
3. Sollevamento di uno strato stabile con la base vicina alla condensazione
4. Sollevamento di uno strato instabile con il top vicino alla condensazione

Nel primo caso si ha che la pendenza continua ad aumentare sollevando lo strato, essendo sempre più stabile. Nel secondo caso invece, lo strato tende a destabilizzarsi durante il sollevamento, nel terzo e quarto caso la pendenza ruota data la saturazione di uno dei due punti dello strato scelto

### 6.1.2 Energie

Le due energie calcolabili dal diagramma SkewT sono

- CAPE
- CIN

La prima è la *Convective Available Potential Energy*, la seconda è la *Convective INhibition*. Queste due energie sono fondamentali per valutazioni dinamiche dell'atmosfera, infatti l'energia potenziale CAPE si può trasformare in energia cinetica (vento) in un processo molto inefficiente, dato che il centro di massa si sposta di poco. L'efficienza di questa conversione è appunto del circa dello 0.2%



**Parte II**

**Dinamica Atmosferica**



La Dinamica Atmosferica viene studiata in più scale

- Microscala, per distanze  $< 1$  km e tempi  $< 1$  h
- Mesoscala, per distanze  $1 < l < 1000$  km e tempi  $1 < t < 24$  h
- Scala Sinottica, per distanze  $1000 < l < 6000$  km e tempi  $1 < t < 7$  d
- Scala Planetaria, per distanze  $l > 6000$  km e tempi  $t > 7$  d

In questo corso, tratteremo principalmente la scala sinottica.





## Capitolo 7

# Fluidodinamica Atmosferica

Per poter studiare a fondo la dinamica atmosferica, è necessario utilizzare gli strumenti della fluidodinamica.

Le leggi principali sono date dalla legge dei gas perfetti e dalle leggi di conservazione. In formule

1. Conservazione dell'energia termodinamica:  $c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dq}{dt}$
2. Conservazione della massa:  $\frac{dm}{dt} = S - P$
3. Conservazione della quantità di moto:  $\frac{dMv}{dt} = \sum \underline{F}$
4. Legge dei Gas Perfetti:  $pV = MRT$

La distinzione tra fluidi e solidi è netta, ed è data dalla reazione alle forze, infatti un fluido reagisce con grandi deformazioni, invece un solido reagisce con piccole deformazioni. Inoltre, i fluidi, tendono ad occupare tutto il volume a disposizione, e possono essere di due tipi principali:

- Gas, comprimibili
- Liquidi, incompressibili

### 7.1 Concetti Fondamentali

Tra i concetti fondamentali della fluidodinamica troviamo

1. Linee di Flusso
2. Traiettorie
3. Streadlines

Le linee di flusso, o *Streamlines* sono linee parallele in ogni punto alla velocità. Più sono fitte, più è alta la velocità del flusso.

Le traiettorie sono i percorsi delle singole masse d'aria, sono coincidenti con le linee di flusso solo se il flusso è stazionario.

Le *Steadlines* sono le posizioni di tutte le particelle passate per un dato punto

### 7.1.1 Coordinate Naturali

Scegliendo una terna ortogonale e parallela al moto del flusso si possono determinare tre versori principali  $(\hat{s}, \hat{n}, \hat{k})$ , da cui possiamo definire delle nuove grandezze.

Dato il campo di velocità del fluido  $\underline{v}$ , definiamo

- Shear
- Curvatura
- Diffluenza/Confluenza
- Stretching
- Vorticità
- Divergenza
- Deformazione (Stretching e/o Shearing)

Lo *Shear* è il tasso di variazione di  $\underline{v}$  nella direzione  $-\hat{n}$

$$-\frac{\partial \underline{v}}{\partial n}$$

La *Curvatura* è data dal tasso di variazione di  $\underline{v}/|\underline{v}|$  nella direzione del vento

$$\underline{v} \frac{\partial \psi}{\partial s}$$

La *Diffluenza/Confluenza* è direttamente legata alla curvatura, ed è data da

$$\underline{v} \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

Lo *Stretching* è la variazione della velocità lungo la sua stessa direzione

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial s}$$

Combinando queste, otteniamo *Divergenza* e *Vorticità* La Vorticità è data dalla somma di Shear e Curvatura

$$\zeta = \underline{v} \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\partial \underline{v}}{\partial n}$$

La Divergenza è data dalla somma di diffidenza e di stretching

$$\text{div}_H = \underline{v} \frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial s}$$

In coordinate cartesiane, possiamo riscrivere vorticità e divergenza come

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla \wedge \underline{v} \\ \text{div}_H \underline{v} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla_H \cdot \underline{v} \\ \underline{v} &= (u, v, w) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Le deformazioni di stretching e shearing saranno invece, rispettivamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \tag{7.2}$$

### 7.1.2 Tensori Cartesiani

Per poter descrivere le forze di volume è necessario utilizzare il formalismo vettoriale, che non può essere più utilizzato per una descrizione approfondita per le forze di superficie, che dipendono da com'è orientata la stessa, per questo è necessario introdurre il concetto di *tensore*.

Prendendo la superficie liscia di un volumetto possiamo prendere due grandezze principali, la direzione della normale della superficie e la direzione della forza. Compattandole in un unico oggetto otteniamo  $\tau_{ij}$ , un tensore di rango 2 rappresentabile con una matrice  $3 \times 3$ .

Si può trovare una definizione di tensore nel cambiamento di coordinate, infatti, è detto un tensore un oggetto che si trasforma come due o più vettori in seguito ad una rotazione degli assi

$$\tau'_{ij} = c_{mi} c_{nj} \tau_{mj}$$

Dove è stata utilizzata la convenzione di Einstein per l'analisi tensoriale, che ci permette di non indicare la somma per gli indici ripetuti

$$\sum_i x_i c_{ij} = x_i c_{ij}$$

### Differenziazione di Vettori e Tensori

Posso applicare le stesse regole dell'analisi al calcolo tensoriale, nel caso particolare di tensori abbiamo che, definendo  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  l'operatore gradiente otteniamo, se  $\underline{\tau} = \tau_{ij}$  è un

tensore, e  $\underline{u} = u_i$  un vettore

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{u} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} && \text{Scalare} \\ \operatorname{div} \underline{\tau} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} && \text{Vettore} \\ \nabla \underline{v} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} && \text{Tensore} \end{aligned} \tag{7.3}$$

Cioè, l'operatore di differenziazione aumenta di un grado il rango del tensore, o lo riduce di uno nel caso che sia moltiplicato scalarmente con l'oggetto in questione.

## 7.2 Tensori in Fluidodinamica

In fluidodinamica, si possono definire più grandezze con l'utilizzo di tensori, tra le prime grandezze definibili trovo la deformazione di un oggetto, lo *Strain*, indicato con  $e_{ij}$ .

### 7.2.1 Strain

Il rate di deformazione è dato dalle componenti diagonali, la deformazione volumica da gli elementi fuori diagonali di questo tensore.

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Dove, con  $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$  è indicato il vettore di deformazione.

### 7.2.2 Rotazioni

Scrivendo il differenziale della velocità di un fluido come

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

Posso definire, tramite la scomposizione del gradiente di velocità la seguente relazione

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Definendo il secondo tensore, che è antisimmetrico, come il tensore di rotazione, ottengo che

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= e_{ij} + 2r_{ij} = e_{ij} - \epsilon_{ijk}\omega_k \\ du_i &= \left( e_{ij} + \frac{1}{2}r_{ij} \right) dx_j\end{aligned}\tag{7.4}$$

### 7.3 Circolazione

Un'altra grandezza fondamentale è la rotazione del fluido. Prendendo la velocità angolare di rotazione di due linee inizialmente ortogonali, abbiamo che, se definiamo la prima con  $\alpha$  e la seconda con  $\beta$

$$\begin{aligned}\omega_\alpha &= -\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \omega_\beta &= \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \langle \omega \rangle &= \frac{1}{2}(\omega_\alpha + \omega_\beta) = \frac{1}{2}\zeta\end{aligned}\tag{7.5}$$

Estrapolando il tutto in 3 dimensioni

$$\begin{aligned}\underline{\omega} &= \nabla \wedge \underline{u} \\ \omega_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\end{aligned}\tag{7.6}$$

Definendo la circolazione come la circuitazione di  $\underline{u}$  sulla superficie su cui stiamo valutando il fluido otteniamo

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint_S \underline{u} d\underline{S} \\ \Gamma &= \int_{\partial S} \nabla \wedge \underline{u} d\underline{t} = \int_{\partial S} \underline{\omega} d\underline{t}\end{aligned}\tag{7.7}$$



## Capitolo 8

# Equazioni di Conservazione e Dinamica dei Fluidi Viscosi

### 8.0.1 Equazione di Continuità

L'equazione di continuità deriva dalla necessità di conservazione della massa nel moto di un fluido.

Indicando con  $m$  la massa e con  $V$  il volume del fluido considerato, possiamo definire il campo di densità come

$$\rho(x, y, z; t) = \frac{dm}{dV}$$

Risolvendo per  $m$  troviamo che

$$m = \int_V \rho(x, y, z; t) V$$

Per la conservazione della massa, dobbiamo avere che la massa all'interno del volume considerato deve rimanere invariata nel tempo, cioè che la variazione di massa all'interno del volume  $V$  dev'essere necessariamente controbilanciata dall'entrata (o uscita) di massa dal bordo del volume  $\partial V$ , quindi, utilizzando la definizione di integrale di superficie e densità di momento, otteniamo

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, y, z; t) V = - \oint_{\partial V} \rho v_{ii}$$

Data l'invarianza nel volume nel tempo e la continuità del campo di densità è possibile portare la derivazione sotto segno d'integrale

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} V = - \oint_{\partial V} \rho v_{ii}$$

Per il teorema della divergenza, è possibile trasformare l'integrale di superficie in un integrale di volume, ottenendo quindi l'*equazione di continuità* in forma integrale

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} V + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) V = 0 \quad (8.1)$$

Per il primo principio del calcolo delle variazioni abbiamo che per poter avere un integrale nullo l'integrando deve essere identicamente nullo, applicandolo, si ottiene l'equazione di continuità in forma differenziale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (8.2)$$

Sviluppando la derivazione del prodotto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8.3)$$

Quest'equazione esprime la conservazione della massa. Introducendo l'operatore di derivazione Lagrangiana, che indica la derivazione lungo il cammino del moto, come

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Possiamo riscrivere l'equazione di continuità come

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8.4)$$

Per definizione di derivata Lagrangiana e derivata parziale temporale, abbiamo che, se  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  il fluido è *stazionario*, se  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  il fluido è *incomprimibile*.

Il prodotto  $\rho v_i$  è anche indicato con  $j_i$ , detto *vettore densità di flusso di massa*. Utilizzando questa definizione, otteniamo l'equazione di continuità in forma più compatta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8.5)$$

### 8.0.2 Equazione di Eulero

Venga considerato un certo volume  $V$  nel fluido, la forza totale agente su questo volume è data dall'integrale

$$F_i^{(V)} = - \oint_{\partial V} p_i$$

Trasformando l'integrale in un integrale di volume, troviamo

$$- \oint_{\partial V} p_i = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} V$$

Quest'equazione, ci indica come, per ogni elemento di volume  $V$  è presente una forza  $-\partial_i p$ .

Intercambiando la massa del fluido con la densità, possiamo quindi scrivere il secondo principio della dinamica per questa forza

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$



Espandendo la derivata Lagrangiana e dividendo per  $\rho$ , otteniamo

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (8.6)$$

Nel caso il fluido sia immerso in un campo gravitazionale  $\underline{g}$ , è necessario aggiungere al secondo membro la forza di volume data dalla gravità

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i$$

### 8.0.3 Conservazione della Quantità di Moto

Partendo dal secondo principio della dinamica, sappiamo che la derivata del momento sarà uguale alla somma delle forze agenti sul sistema. Nel caso della Fisica dell'Atmosfera avremo due forze principali, la forza di gravità, una forza di volume, e la forza di pressione, che è di superficie.

Scrivendo l'equazione di Newton, troviamo che per un pacchetto d'aria di massa  $M$  abbiamo, passando in coordinate solidali con la superficie terrestre

$$\begin{aligned} \frac{\underline{F}_g}{M} &= -\frac{GM_T}{r^2} \hat{r} = -\underline{g}^*(r) \\ r &= R_T + z \\ g^* &= \frac{GM_T}{(R_T + z)^2} = g_0^* \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} \\ g_0^* &= 9.8 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Per  $z \lesssim 50 \text{ km}$  si ha  $z \ll R_T$ , quindi  $g^* \approx g_0^*$ .

Definendo la forza di superficie come la divergenza del tensore degli sforzi  $\tau_{ij}$  abbiamo che

$$\frac{dF_s}{dA} = n_i \tau_{ij}$$

Di conseguenza, se la pressione termodinamica è isotropa, otteniamo

$$p = -\frac{1}{3} \tau_{ii}$$

Nel caso che il volume sia in movimento, posso scrivere

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$$

Ipotizzando che  $\sigma_{ij}$  sia legato a  $e_{ij}$  linearmente, posso scrivere

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl} e_{kl}$$

Dove  $K_{ijkl}$  è un tensore di rango 4, detto *stiffness tensor*. Supponendo che il fluido sia localmente isotropo, e dalle considerazioni sulla simmetria di  $e_{ij}$  e di  $\sigma_{ij}$  il tensore  $K_{ijkl}$  si riduce alla forma

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Di conseguenza, la relazione tra i tensori di stress e strain è

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}$$

Ricordando che  $e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$  otteniamo infine

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + 2\mu e_{ij}$$

Sommando la componente della pressione per riottenere il tensore  $\tau_{ij}$  otteniamo infine

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + 2\mu e_{ij}$$

Sommando le forze di volume, e prendendo la divergenza del tensore degli sforzi, ottengo infine la conservazione del momento, conosciuta come l'*equazione di Navier-Stokes*

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\rho g_0^* \delta_{i3} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)$$

Aggiungendo l'assunzione di Stokes, che implica  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  otteniamo infine

$$\tau_{ij} = - \left( p + \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

Il coefficiente  $\mu$  è detto *viscosità dinamica*.

Supponendo  $\mu$  costante nello spazio, derivando otteniamo infine

$$\rho \frac{du_i}{dt} = -\rho g_0^* \delta_{i3} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)$$

Definendo il *coefficiente di viscosità cinematica* come  $\nu = \mu/\rho$  otteniamo infine, in notazione vettoriale

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -g_0^* \delta_{i3} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left( \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \right)$$

Nel caso che il fluido sia inviscido ( $\nu = 0$ ), l'equazione di Navier Stokes si riduce all'equazione di Eulero

## 8.1 Equazione di Navier-Stokes in un Sistema Rotante

Nella dinamica atmosferica, essendo le coordinate utilizzate non inerziali, è necessario definire l'equazione di Navier-Stokes in un sistema rotante.

Definendo un secondo sistema inerziale, possiamo scrivere, indicando con  $\frac{dT}{dt}$  la derivata nel sistema inerziale, che, per una generica grandezza vettoriale  $\underline{A}$  abbiamo

$$\frac{dT\underline{A}}{dt} = \frac{d\underline{A}}{dt} + \Omega \wedge \underline{A}$$

Dove,  $\Omega$  è la velocità angolare del sistema rotante.

Ponendo  $\underline{A} = \underline{r}$  otteniamo quindi, segnando con  $\underline{u}_a$  la velocità non inerziale

$$\begin{aligned}\frac{d_T \underline{u}_a}{dt} &= \frac{d \underline{u}_a}{dt} + \Omega \wedge \underline{u}_a \\ \frac{d_T \underline{u}_a}{dt} &= \frac{d \underline{u}}{dt} + \Omega \wedge \frac{d \underline{r}}{dt} + \Omega \wedge \underline{u} + \Omega \wedge \Omega \wedge \underline{r} \\ \frac{d \underline{u}}{dt} + 2\Omega \wedge \underline{u} - \Omega^2 \underline{r} &= -g_0^* \hat{k} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{f}_r\end{aligned}\tag{8.8}$$

Sostituendo nell'equazione di Navier-Stokes, otteniamo

$$\frac{d \underline{u}}{dt} = -g_0^* \hat{k} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left( \nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \underline{u} \right) - 2\Omega \wedge \underline{u} + \Omega^2 \underline{r}$$

Possiamo definire la forza centrifuga di un geoide come

$$\underline{g}_0 = \underline{g}_0^* + \Omega^2 \underline{r}$$

Sostituendo nell'equazione precedente, ponendo  $\hat{k}$  perpendicolare alla superficie terrestre, otteniamo

$$\frac{d \underline{u}}{dt} = -g_0 \hat{k} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left( \nabla^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \nabla \nabla \cdot \underline{u} \right) - 2\Omega \wedge \underline{u}$$

Per la conservazione del momento angolare, abbiamo che, ad un raggio (a  $r = R_f$ )

$$\begin{aligned}L &= m R_f^2 \Omega_f & \Omega_f &= \Omega \frac{r^2}{R_f^2} \\ \Omega_f &= \Omega + \Omega' = \Omega + \frac{u}{R_f} = \Omega \frac{r^2}{R_f^2} \\ u &= \frac{r^2 - R_f^2}{R_f} \Omega\end{aligned}\tag{8.9}$$

Per  $R_f < R$ , cioè muovendomi verso i poli, ottengo che  $u > 0$  quindi, le masse d'aria ottengono una velocità zonale da W verso E, e viceversa muovendomi verso l'equatore. Questo fenomeno è alla base dei *Trade Winds*, conosciuti in italiano come gli Alisei. Esplicitando il termine di Coriolis  $\Omega \wedge \underline{v}$  ottengo

$$\Omega \wedge \underline{v} = \Omega(w \cos \phi + v \sin \phi) \hat{i} + \Omega u \sin \phi \hat{j} - \Omega u \cos \phi \hat{k}$$

Sostituendo nell'equazione di Navier-Stokes, e scrivendola per componenti, ottengo

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega(w \cos \phi - v \sin \phi) + f_{r,x} \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \Omega u \sin \phi + f_{r,y} \\ \frac{dw}{dt} = -g_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega u \cos \phi + f_{r,z} \end{cases}$$

Riunendole e mettendo in evidenza il termine d'avvezione, ottengo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega(2 \cos \phi - v \sin \phi) + f_{r,x}$$

Passando in coordinate sferiche, infine, si ottiene, ponendo  $R_T = a$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \phi - 2\Omega w \cos \phi + f_{r,x} \\ \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi + f_{r,y} \\ \frac{dw}{dt} + \frac{u^2 + v^2}{a} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \phi + f_{r,z} \end{aligned} \quad (8.10)$$

## Capitolo 9

# Approssimazione Geostrofica

Lavorando nella scala sinottica si può approssimare l'equazione di Navier-Stokes utilizzando l'*approssimazione geostrofica*.

Poiché i tempi scala orizzontali  $T_H \approx 10^5$  s e quello verticale è  $T_z \approx 10^6$  s posso supporre nulle le variazioni verticali per tempi minori del tempo scala ed utilizzare solo le prime due componenti dell'equazione di Navier-Stokes.

Poiché la viscosità può essere trascurata, posso riscrivere l'equazione di Navier-Stokes come

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2v\Omega \sin \phi = 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2u\Omega \sin \phi = 0 \end{cases}$$

Utilizzando il *gradiente orizzontale*  $\nabla_H$  e definendo il vento geostrofico  $\underline{V}_g = (u_g, v_g)$  ottengo

$$-\frac{1}{\rho} \nabla_H p = f \underline{k} \wedge \underline{V}_g$$

Che ci indica che il gradiente di pressione è bilanciato dalla forza di Coriolis, dove con  $f = 2\Omega \sin \phi$  Notiamo dall'equazione, che il vento geostrofico ha sempre le basse pressioni alla sua sinistra.

### 9.1 Bilancio Geostrofico

Per avere il bilancio geostrofico l'equazione definita precedentemente dev'essere soddisfatta, cioè la forza di pressione dev'essere uguale ed opposta alla forza di Coriolis.

Scrivendo quindi

$$\begin{aligned} \underline{F}_p &= -\frac{1}{\rho} \nabla_H p \\ \underline{F}_c &= -f \underline{k} \wedge \underline{V}_g \end{aligned} \tag{9.1}$$

Abbiamo che, risolvendo l'equazione

$$\underline{V}_g = \frac{1}{fg} \hat{k} \wedge \nabla_H p$$

E di conseguenza

$$\nabla \cdot \underline{V}_g = 0$$

Dalla vorticità  $\zeta = (\nabla \wedge \underline{v})_z$  abbiamo inoltre che

$$\zeta_g = (\nabla \wedge \underline{V}_g)_z = \frac{1}{\rho g} \nabla_H^2 p \propto -p$$

È facile notare che per ottenere delle previsioni valide, è necessario avere un'approssimazione meno forte, poiché nell'approssimazione geostrofica non compaiono le derivate temporali.

Reinserendole e considerando termini più grandi, ottengo

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \end{aligned} \tag{9.2}$$

Si riotterranno le equazioni del vento geostrofico solo se entrambi le variazioni temporali sono nulle.

## 9.2 Onde di Gravità

Se la pressione è  $p = p(y)$ , e  $\frac{\partial p}{\partial y} = -c$ , le equazioni si riducono

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 0 \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \tag{9.3}$$

Il fluido sarà quindi in moto verso N. Per  $t > 0$

$$\frac{du}{dt} = fv > 0$$

Ed il fluido subirà un'accelerazione dovuta alla forza di Coriolis. Questo avverrà fino a quando  $u = u_g$  ed il sistema inizierà ad oscillare attorno a questa posizione di equilibrio. Queste onde di gravità sono la ragione per cui, durante l'inverno polare settentrionale, le onde di gravità provenienti da S rompono il vortice creato dalle basse temperature. Poiché al polo sud questo non avviene, il buco nell'ozono si osserva perlopiù in Antartide.

### 9.3 Vento Ageostrofico

Definisco il *vento ageostrofico*  $\underline{V}_a$  come la differenza tra vento vero e vento geostrofico

$$\underline{V}_a = \underline{v} - \underline{V}_g$$

Poiché il vento geostrofico non accelera ed il vento vero si scompone in  $\underline{V}_a + \underline{V}_g$  posso scrivere l'approssimazione geostrofica come

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{v}}{dt} &= -f\hat{k} \wedge \hat{V}_a \\ \nabla \cdot \underline{v} &= \nabla \cdot \underline{V}_a \end{aligned} \tag{9.4}$$

### 9.4 Bilancio Idrostatico

Approssimando le equazioni di Navier-Stokes nel caso verticale, posso scrivere senza troppi problemi l'equazione dell'equilibrio idrostatico atmosferico come

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Su scala sinottica, l'atmosfera verticale può essere considerata in perfetto equilibrio idrostatico.

### 9.5 Coordinate Isobariche

Per poter calcolare il vento geostrofico necessito la pressione e la densità, che sono spesso difficili da misurare. Supponendo che i piani a  $p = \text{cost}$  siano paralleli ad  $y$  ma con una certa inclinazione rispetto ad  $x$  posso scrivere

$$\delta p = p(0, 0) + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z$$

Poiché il movimento avviene su una superficie a  $p = \text{cost}$  posso scrivere

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z \delta x + \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_x \delta z = 0$$

Usando la definizione di Geopotenziale  $d\Phi = g dz$  si ha usando l'equazione ipsometrica

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z \delta x - \rho g \delta z &= 0 \\ \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_z &= \rho \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_p & \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_z &= \rho \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_p \end{aligned} \tag{9.5}$$

Allora, riunendo il tutto

$$-\frac{1}{\rho}\nabla_z p = \nabla_p \Phi$$

Che posso riscrivere utilizzando l'approssimazione geostrofica per elidere  $\rho$

$$-\nabla_p \Phi - f \hat{k} \wedge \underline{V}_g = 0$$

Di conseguenza

$$\underline{V}_g = \frac{g_0}{f} \hat{k} \wedge \nabla_p z$$

Dall'ultima risulta evidente che ad un minimo di altezza a pressione costante risulta un minimo di pressione ad altezza costante.

### 9.5.1 Velocità Verticale Isobarica

Poiché

$$\frac{1}{\rho}\nabla_z p = \nabla_p \Phi = g \nabla_p z$$

Possiamo usare l'equazione di Eulero per poter definire  $w$  in coordinate isobariche

$$\begin{aligned} w &= \frac{dz}{dt} & \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho g \\ \omega &= \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{v}_H \cdot \nabla_H p + w \frac{\partial p}{\partial z} \\ \omega &= \frac{\partial p}{\partial t} + \underline{v}_H \cdot \nabla_H p - \rho g w \end{aligned} \tag{9.6}$$

Poiché la variazione temporale di pressione è negligibile e poiché la velocità orizzontale è approssimabile con il vento geostrofico, posso scrivere che

$$\underline{V}_H \cdot \nabla_H p \approx \underline{V}_g \cdot \nabla_H p = 0$$

La velocità verticale isobarica sarà in prima approssimazione

$$\omega = \frac{dp}{dt} \simeq -\rho g w$$

### 9.5.2 Conservazione dell'Impulso in Coordinate Isobariche

Riscrivendo la derivazione totale in coordinate isobariche abbiamo che

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v}_H \nabla_H + \omega \frac{\partial}{\partial p}$$



Utilizzando le approssimazioni definite prima in termini del geopotenziale, otteniamo le equazioni di Navier-Stokes come

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + fv \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - fu \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} &= -\frac{1}{\rho}\end{aligned}\tag{9.7}$$

### 9.5.3 Equazione di Continuità in Coordinate Isobariche

Sostituendo ciò che è stato trovato prima e scrivendo l'equazione ipsometrica, troviamo che

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

Notiamo che in questa forma approssimata dell'equazione di continuità, non compare il tempo e non compare la densità

### 9.5.4 Equazione dell'Energia Termodinamica in Coordinate Isobariche

Dato che per una trasformazione isobara possiamo definire l'Entalpia come

$$\Delta H = Mc_p \Delta T = \oint dw + V \delta p$$

E poiché  $1/\rho = \alpha$ ,  $dp/dt = \omega$ , e  $J = (1/m)(\oint Q/dt)$  Posso scrivere

$$c_p \frac{dT}{dt} = J + \alpha \omega$$

In coordinate isobariche

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{J}{c_p} + \frac{\alpha}{c_p} \omega$$

Sostituendo l'espressione di  $\Gamma_d$  trovo

$$\frac{\alpha}{c_p} = \frac{g}{c_p} \frac{\alpha}{g} = \Gamma_d \frac{\alpha}{g}$$

Da cui, reinserendolo nell'equazione dell'energia, troviamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \left(\frac{\partial T}{\partial p} - \Gamma_d \frac{\alpha}{g}\right) \omega &= \frac{J}{c_p} \\ \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\partial T}{\partial z} \frac{1}{\rho g} = \Gamma_e \frac{1}{\rho g} = \frac{\alpha}{g} \Gamma_e \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\alpha}{g} (\Gamma_e - \Gamma_d) \omega &= \frac{J}{c_p}\end{aligned}\tag{9.8}$$

Ricordando la relazione tra  $\Gamma_e$  e  $\Gamma_d$  troviamo

$$\Gamma_e - \Gamma_d = -\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \rho g \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{gT}{\alpha \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

Sostituendo nell'equazione precedente troviamo infine

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Variazione Temporale}} + \underbrace{\underline{v}_H \cdot \nabla_H T}_{\text{Avvezione Horizontale}} + \underbrace{\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \omega}_{\text{Avvezione Verticale}} = \frac{J}{c_p} \quad (9.9)$$

Che è l'equazione della conservazione dell'energia termodinamica in coordinate isobariche

## 9.6 Forze Viscose

Supponendo che il vento  $\underline{v}$  non sia diretto come il vento geostrofico  $\underline{V}_g$  e supponiamo

$$\begin{aligned} \underline{F}_r &= -a\underline{v} \\ |\underline{F}_c| &= c_0 = fv < |\underline{F}_p| = p \end{aligned} \quad (9.10)$$

Compenso gli effetti della forza di Coriolis bilanciando

$$\begin{aligned} P \cos \psi &= c_0 = fv \\ P \sin \psi &= F_r = av \\ \tan \psi &= \frac{a}{f} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Quadrando e sommando

$$\begin{aligned} P^2(\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) &= (f^2 + a^2)v^2 \\ v &= f \frac{1}{\sqrt{f^2 + a^2}} = \frac{P}{f} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{f}\right)^2}} = V_g \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{f}\right)^2}} \end{aligned} \quad (9.12)$$

Aggiungendo il termine di forze di stress  $f_r$ , definito come

$$f_{r,i} = \nu \left( \partial_k \partial_k u_i + \frac{1}{3} \partial_i \partial_k u_k \right)$$

E supponendo che il fluido sia incomprimibile abbiamo che

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{u} &= 0 \\ \underline{f}_r &= \nu \nabla^2 \underline{u} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Sostituendo nell'equazione del bilancio geostrofico otteniamo l'equazione del *classical Ekman layer*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + \nu \nabla^2 u &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + \nu \nabla^2 v &= 0 \end{aligned} \quad (9.14)$$

Se consideriamo solo le variazioni di quota, con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} z = 0 & u = v = 0 \\ z \rightarrow \infty & u = u_g, v = v_g \end{cases}$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial y} \\ v_g &= -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (9.15)$$

E

$$\begin{aligned} -f(v_g - v) + \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 \\ -f(u_g - u) + \nu^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (9.16)$$

Scrivendo il vento come una variabile complessa del tipo  $\underline{v} = v + iu$  e risolvendo per la variabile complessa

$$\begin{aligned} f(iu_g - iu) + \nu \frac{\partial^2 \underline{v}}{\partial z^2} &= 0 \\ \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) &= -f(iu_g - v_g) + f(iu - v) \\ \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) &= -if(iu_g - v_g) + if(u + iv) \\ \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) - if(iu_g - v_g) &= -if(u + iv) \end{aligned} \quad (9.17)$$

Ponendo per semplicità  $v_g = 0$  tramite una rotazione degli assi, troviamo

$$\nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) = if(u + iv) + ifu_g$$

Quest'equazione ammette soluzione

$$u + iv = Ae^{z\sqrt{\frac{if}{\nu}}} + Be^{-z\sqrt{\frac{if}{\nu}}} + u_g$$

Imponendo le condizioni al contorno, troviamo che, per poter convergere, troviamo

$$A = 0, \quad B = -u_g$$

E, inoltre

$$\begin{aligned} u + iv &= -u_g e^{-z\sqrt{\frac{if}{\nu}}} + u_g \\ \sqrt{\frac{if}{\nu}} &= \sqrt{2i} \sqrt{\frac{f}{2\nu}} = (1+i)\gamma \quad \gamma = \sqrt{\frac{f}{2\nu}} \\ u + iv &= u_g (1 - e^{(1+i)\gamma z}) = u_g (1 - e^{-\gamma z} e^{-i\gamma z}) \\ u + iv &= u_g (1 - e^{-\gamma z} \cos(\gamma z) + ie^{-\gamma z} \sin(\gamma z)) \end{aligned} \quad (9.18)$$

Uguagliando parte reale ed immaginaria, troviamo

$$\begin{aligned} u &= u_g (1 - e^{\gamma z} \cos(\gamma z)) \\ v &= u_g e^{-\gamma z} \sin(\gamma z) \end{aligned} \quad (9.19)$$

Che è l'equazione parametrica della *Spirale di Ekman*

## 9.7 Vento di Gradiente

Sia considerato un campo di pressione con linee di livello equispaziate. Se le linee hanno una curvatura, anche se sono equispaziate, il fluido subisce un'accelerazione. Ricordando per il moto orizzontale

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla_p \Phi - f \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{v}$$

Possiamo definire la *circolazione ciclonica*, quando il raggio di curvatura  $r_c > 0$ . Scrivendo l'equazione precedente in coordinate naturali

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \hat{\mathbf{s}} + v \frac{d\hat{\mathbf{s}}}{dt} \\ \delta\psi &= \frac{\delta s}{|r_c|} \rightarrow \left| \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial s} \right| = \frac{1}{|r_c|} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Per definizione di  $\hat{\mathbf{s}}$  troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial s} &= \frac{\hat{\mathbf{n}}}{r_c} \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial t} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{v}{r_c} \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (9.21)$$

Da cui

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \hat{\mathbf{s}} + \frac{v^2}{r_c} \hat{\mathbf{n}}$$

Riscrivendo l'accelerazione di Coriolis ed il gradiente di pressione in coordinate naturali troviamo

$$\begin{aligned} -f \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{v}} &= -fv \hat{\mathbf{n}} \\ -\nabla_p \Phi &= -\frac{\partial \Phi}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (9.22)$$

Sostituendo nella prima equazione troviamo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \hat{\mathbf{n}} - fv \hat{\mathbf{n}} \\ \frac{v^2}{r_c} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial n} - fv \end{aligned} \quad (9.23)$$

Riunendo il tutto

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} + \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial n} - fv \right) \hat{\mathbf{n}}$$

Supponendo che  $f$  ed  $r_c$  siano costanti, e che

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = g_0 \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

Il sistema si riduce a

$$\frac{v^2}{r_c} = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} - fv$$

Considerando i casi dove  $-\frac{\partial \Phi}{\partial n} - fv \gg \frac{v^2}{r_c}$  e viceversa, troviamo, nel secondo caso che il campo di pressione è uniforme, e nel caso che ci troviamo a basse latitudini otteniamo  $-\frac{\partial \Phi}{\partial n} \simeq \frac{v^2}{r_c}$

### 9.7.1 Flusso Inerziale

Nel caso che consideriamo un flusso inerziale, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{r_c} - fv \\ v = -fr_c \end{aligned} \tag{9.24}$$

È chiara l'impossibilità nel caso atmosferico, poiché sono presenti forze apparenti nel sistema atmosferico.

Riscrivendo in termini del Geopotenziale, ed imponendo che  $v$  sia reale, (per ovvie ragioni fisiche), troviamo

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{r_c} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad v = \pm \sqrt{-R \frac{\partial \Phi}{\partial n}} \\ R &> 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} < 0 \\ R &< 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} > 0 \end{aligned} \tag{9.25}$$

Queste casistiche sono entrambe possibili in atmosfera, ma poiché il vento geostrofico ha sempre le basse pressioni a sinistra la prima è più probabile.

Riprendendo l'equazione ed imponendo la conservazione del momento, troviamo che  $C_e = \frac{v^2}{r_c}$ ,  $C_o = -fv$ ,  $p = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  devono essere bilanciate, quindi

$$\begin{aligned} c_e &= p + C_o \\ v^2 + fr_c v + r \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= 0 \end{aligned} \tag{9.26}$$

Risolvendo per  $v$ , troviamo

$$v = -\frac{fr_c}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2 r_c^2}{4} - r_c \frac{\partial \Phi}{\partial n}}$$

Da quest'equazione possiamo distinguere 2 casi  $r_c < 0$  (circolazione anticiclonica,  $a$ ) e  $r_c > 0$  (circolazione ciclonica,  $c$ ).

Nel caso di circolazione anticiclonica possiamo distinguere due casi

- $a+$ ),  $\partial_n \Phi > 0$  il vento ha la bassa pressione a destra, quindi  $|p| + |C_o| = |c_e|$
- $a-$ ),  $\partial_n \Phi < 0$ , quindi  $|p| + |C_e| = |C_o|$

Per la circolazione ciclonica invece

- $c+$ ),  $\partial_n \Phi > 0$  (impossibile)
- $c-$ ),  $\partial_n \Phi < 0$ , quindi  $|p| = |C_e| + |C_o|$

Inserendo i valori per la velocità, troviamo che nel caso  $a+$  abbiamo un vento che scorre in verso opposto al vento geostrofico, portando ad una *circolazione anomala*. Nel caso  $a-$  troviamo un limite inferiore ad  $r_c$ , la velocità nella direzione del vento geostrofico (+) sarà maggiore della velocità in senso opposto (-), ma sempre minore della velocità del vento geostrofico, di conseguenza, la seconda sarà più probabile. La prima è detta alta anormale.

Nel caso di circolazione ciclonica  $c-$  troviamo che il vento scorre in senso opposto al vento geostrofico.

Ricapitolando tutti i casi possibili, troviamo

$$\begin{array}{llll}
 r_c < 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial n} > 0 & \text{Anticiclonica Bassa} & V_g < 0 < v \\
 r_c < 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial n} < 0 & \text{Anticiclonica Alta} & v_+ > v_- > V_g > 0 \\
 r_c > 0 & \frac{\partial \Phi}{\partial n} < 0 & \text{Ciclonica Bassa} & v_+ < V_g
 \end{array} \quad (9.27)$$

In presena di curvatura il vento vero viene approssimato dal vento geostrofico, considerando l'accelerazione centripeta, abbiamo il vento di gradiente

## 9.8 Variazione del Vento Geostrofico con la Quota

Per valutare la variazione di  $V_g$  con la quota supponiamo che la pressione vari solo con la quota

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H}} \quad z = -H \ln \frac{p}{p_0}$$

Considerando uno strato di spessore  $\Delta z = -H \ln \frac{p_T}{p_B}$ , e ricordando l'equazione ipso-merica, otteniamo

$$\Delta z = \frac{R_d}{g_0} \bar{T}_v \ln \frac{p_B}{p_T}$$

Da questo risulta ovvio che le isoterme sono parallele alle isobare, quindi

$$\begin{aligned}
 T &= \text{cost} \cdot p \\
 \rho(p, T) &= \rho(p)
 \end{aligned} \quad (9.28)$$

In questo caso l'atmosfera è detta *barotropica*, di conseguenza il vento geostrofico è nullo. Nel caso che la pressione abbia un andamento più complicato, del tipo

$$\begin{aligned} p &= p_0 e^{-\frac{1}{H}(z-ay)} \\ z - ay &= -H \ln \frac{p}{p_0} \end{aligned} \quad (9.29)$$

Preso uno strato  $\Delta z = -H \ln \frac{p_T}{p_B}$  trovo che, nel caso di atmosfera barotropica, il vento geostrofico non è nullo, infatti

$$u_g = -\frac{g_0}{f} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{g_0}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left( ay - H \ln \frac{p}{p_0} \right) = -\frac{g_0}{f} a$$

Dove  $a > 0$  è indipendente dalla quota.

Supponiamo ora

$$\begin{aligned} z &= a(p) - y - H \ln \frac{p_0}{p} \\ p &= p_0 e^{-\frac{1}{H}(z-a(p)-y)} \end{aligned} \quad (9.30)$$

Per definizione  $\partial_p a < 0$ , quindi

$$\begin{aligned} \Delta z &= (a(p_T) - a(p_B)) y - H \ln \frac{p_T}{p_0} = \Delta z(y) \\ \bar{T}_{B,T} &= \bar{T}_{B,T}(y) \\ u_g &= -\frac{g_0}{f} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{a(p)g_0}{f} = u_g(p) \end{aligned} \quad (9.31)$$

Poiché  $\partial_p a > 0$  otteniamo che  $\underline{V}_g$  presenta uno shear verticale.

Nel caso dell'atmosfera, al valore  $\max(u_g(p))$  troviamo i Jet-Stream.

## 9.9 Vento Termico

Dalla precedente relazione tra lo spessore di due livelli e la variazione di  $u_g$  con la quota, possiamo ricavare delle nuove relazioni sulla temperatura. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial p} &= \frac{1}{g_0} \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g_0} = -\frac{R_d T_v}{g_0 p} \\ \frac{\partial u_g}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \left( -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = -\frac{g_0}{f} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{g_0}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{RT}{g_0 p} \right) = \frac{R}{\rho p} \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial u_g}{\partial \ln p} &= \frac{r_c}{f} \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial v_g}{\partial \ln p} &= -\frac{r_c}{f} \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \quad (9.32)$$

Le ultime due si possono riscrivere come

$$-\frac{\partial v_g}{\partial \ln p} = \frac{r_c}{f} \hat{k} \wedge \nabla_p T$$

Quest'ultima è detta *equazione del vento termico*.

Usando la relazione  $p = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$ , sempre vera dalla soluzione dell'equazione ipsometrica possiamo dire che

$$-\frac{\partial V_g}{\partial \ln p} \propto \frac{\partial V_g}{\partial z} \propto \nabla_p T \propto \nabla_p z$$

Integrando l'equazione del vento termico ottengo

$$\begin{aligned} \int_{u_g(p_0)}^{u_g(p_1)} du_g &= \frac{r_c}{f} \int_{p_0}^{p_1} \frac{\partial T}{\partial y} d \ln p \\ u_g(p_1) - u_g(p_0) &= -\frac{r_c}{f} \int_{p_1}^{p_0} \frac{\partial T}{\partial y} d \ln p \end{aligned} \quad (9.33)$$

Per  $v_g$  il calcolo sarà analogo, valutando sull'asse x.

Definiamo il vento termico quindi, come

$$\begin{aligned} u_T &= u_g(p_1) - u_g(p_0) \\ v_T &= v_g(p_1) - v_g(p_0) \end{aligned} \quad (9.34)$$

Definendo la temperatura media verticale come

$$\int_{p_0}^{p_1} T d \ln p = \bar{T} \ln \frac{p_1}{p_0}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} u_T &= -\frac{r_c}{f} \ln \frac{p_0}{p_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \\ v_T &= \frac{r_c}{f} \ln \frac{p_0}{p_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \end{aligned} \quad (9.35)$$

Sostituendo nelle analoghe equazioni del vento geostrofico, otteniamo

$$\begin{aligned} \underline{V}_g &= \frac{g_0}{f} \hat{k} \wedge \nabla_p z \\ \underline{V}_T &= \frac{r_c}{f} \ln \frac{p_0}{p_1} \hat{k} \wedge \nabla_p \bar{T} \end{aligned} \quad (9.36)$$

Come nel caso del vento geostrofico, dove si presenta una forza dovuta a  $\nabla p$  ed alla forza di Coriolis  $C_o$ , otteniamo nel caso del vento termico, una "forza" che bilancia  $\nabla T$

$$\underline{F} = -f \ln \frac{p_0}{p_1} \underline{V}_T$$

## 9.10 Bilancio Atmosferico

Avendo definito tutte queste grandezze, abbiamo che il bilancio atmosferico è dato, principalmente, oltre ai bilanci termodinamici, al bilancio di



- Bilancio Geostrofico
- Bilancio Idrostatico
- Bilancio di Vento Termico

Nell'ultimo caso, il tutto può essere riassunto dal fatto che il vento termico ha sempre il vento più freddo a sinistra (dalla dipendenza da  $\nabla \bar{T}$ ).

Dividendo la rotazione di  $\underline{V}_T$  in due casi, abbiamo che

- Caso Antiorario (ciclonico): Avvezione Fredda
- Caso Orario (anticiclonico): Avvezione Calda

In generale, l'atmosfera è *baroclina*, cioè i piani isobarici cambiano pendenza con la quota, e quindi di conseguenza, il vento geostrofico varia con essi

## 9.11 Velocità Verticale

Data l'approssimazione per piccoli numeri della velocità verticale nelle precedenti variazioni, le equazioni precedenti non tengono conto della variazione di velocità verticale.

Riprendendo l'equazione di conservazione della massa in coordinate isobariche abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

E, la velocità verticale  $\omega$  è

$$\omega \simeq -\rho g w = \frac{dp}{dt}$$

Modificando la prima equazione, ottengo

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \underbrace{-\nabla_H \cdot \underline{v}}_{\text{Convergenza}}$$

Integro l'equazione, e ottengo infine, assumendo  $\omega(p_0) = 0$  al TOA

$$\omega(p) = - \int_{p_0}^p \nabla_H \cdot \underline{v} dp$$

E dalla definizione di vento vero, ottengo

$$\nabla_H \cdot \underline{v} = \nabla_H \cdot (\underline{V}_g + \underline{V}_a) = \nabla_H \cdot \underline{V}_a$$

Quest'ultima relazione è di difficile integrazione, ma partendo dall'equazione differenziale iniziale, posso dedurre che

- Se  $\nabla_H \cdot \underline{v} < 0$  ho convergenza e l'aria sale (bassa pressione)
- Se  $\nabla_H \cdot \underline{v} > 0$  ho divergenza e l'aria scende (alta pressione)

## 9.12 Circolazione

Nelle parti precedenti, è stata definita la *circolazione* come

$$C = \oint \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

Una quantità positiva se l'integrale viene fatto su un percorso in senso antiorario, cioè, se  $C > 0$  abbiamo una situazione ciclonica nell'emisfero N e viceversa.

Consideriamo ora un anello di fluido in rotazione rigida. Definendo la direzione  $\hat{s}$  tangente al moto del fluido e la direzione  $\hat{n}$  normale a sinistra, otteniamo

$$\underline{r} = -\hat{n}r$$

Otteniamo, quindi

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \Omega \wedge \underline{r} = \Omega r (\hat{k} \wedge \hat{n}) = \Omega r \hat{s} \\ C &= \oint \underline{v} \cdot d\underline{s} = \oint \Omega r \hat{s} \cdot \underline{r} d\lambda \hat{s} = \oint \Omega r^2 d\lambda = 2\Omega A \end{aligned} \quad (9.37)$$

Calcolando la circolazione in un sistema integrale, otteniamo dall'equazione di Eulero, la definizione di *circolazione assoluta*

$$\begin{aligned} C_a &= \oint \underline{V}_a \cdot d\underline{s} \\ \frac{d_a \underline{V}_a}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} \\ \oint \frac{d_a \underline{V}_a}{dt} d\underline{s} &= - \oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\underline{s} + \oint \underline{g} d\underline{s} \end{aligned} \quad (9.38)$$

Dato che la derivata totale di  $\underline{V}_a \cdot d\underline{s}$  è uno scalare, indipendente dal sistema di riferimento, abbiamo

$$\frac{d_a \underline{V}_a d\underline{s}}{dt} = \frac{d \underline{V}_a d\underline{s}}{dt} = \frac{d \underline{V}_a}{dt} \cdot d\underline{s} + \underline{V}_a \cdot \frac{d d\underline{s}}{dt}$$

E poiché

$$d\underline{s} = du \hat{i} + dv \hat{j} + dw \hat{k}$$

Derivando e sostituendo, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d_a \underline{V}_a}{dt} \cdot d\underline{s} &= \frac{d \underline{V}_a \cdot d\underline{s}}{dt} - \underline{V}_a \cdot d \underline{V}_a \\ \oint \frac{d_a \underline{V}_a}{dt} \cdot d\underline{s} &= \oint \frac{d \underline{V}_a \cdot d\underline{s}}{dt} - \underbrace{\frac{1}{2} \oint dV_a^2}_{=0} = \oint \frac{d \underline{V}_a \cdot d\underline{s}}{dt} \end{aligned} \quad (9.39)$$

Se il circuito di integrazione è indipendente dal tempo, posso portare fuori la derivazione ed ottenere che, la derivata della circolazione assoluta  $C_a$  è

$$\frac{dC_a}{dt} = - \oint \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\underline{s} = - \underbrace{\oint \frac{1}{\rho} dp}_{\text{Integrale Baroclino}} \quad (9.40)$$

Nel caso che l'atmosfera sia baroclina, ottengo che

$$\frac{dC_a}{dt} = 0$$

Detto *Teorema della Circuitazione di Kelvin*.

Infatti, se l'atmosfera è barotropica e le superfici isobare sono parallele alle isoterme, e  $\nabla p \propto \nabla T \propto \nabla \rho$ , integrando l'equazione ottengo

$$\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{s} \propto d \ln p$$

Il quale integrale su un circuito chiuso è nullo.

Dato che il sistema di coordinate scelto è rotante, abbiamo che la velocità assoluta sarà somma di due componenti, e di conseguenza, la circuitazione (dalla linearità dell'integrale) sarà somma di due componenti.

$$C_a = C + C_e$$

Calcolando esplicitamente e applicando il teorema di Stokes, abbiamo che

$$\oint \mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{s} = \iint \nabla \wedge \mathbf{v}_e \cdot \hat{n} dA$$

Dato che  $\nabla \wedge \Omega \wedge \mathbf{r} = 2\Omega$ , inserendolo nel conto troviamo che

$$\oint \mathbf{v}_e \cdot d\mathbf{s} = 2\Omega \sin \phi A = fA = C_e$$

Da cui

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC_a}{dt} - \frac{dC_e}{dt} = \frac{dC_a}{dt} - \frac{d}{dt} fA$$

## 9.13 Vorticità

Definisco la vorticità come il rotore della velocità del vento.

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}$$

In prima analisi di scala, dato che i fenomeni atmosferici avvengono sul piano  $xy$ , possiamo trascurare le vorticità sull'asse  $x$  e  $y$  e concentrarci sulla vorticità sull'asse  $z$ , anche se piccole inclinazioni fanno entrare le altre componenti della vorticità con contributi importanti.

Prendendo la vorticità assoluta  $\omega_a$  indichiamo con

$$\begin{aligned} \eta &= \omega_{az} \\ \zeta &= \omega_z \end{aligned} \tag{9.41}$$

Posso legare le due grandezze utilizzando la definizione di vento assoluto, e ricordando che  $\nabla \wedge \underline{v}_e = 2\Omega$  Si ha infatti

$$\begin{aligned}\eta &= (\nabla \wedge \underline{V}_a)_z \\ \zeta &= (\nabla \wedge \underline{V})_z \\ 2\hat{k} \wedge \Omega &= 2\Omega \sin \phi = f \\ \eta &= \zeta + f\end{aligned}\tag{9.42}$$

Dalla definizione di Circolazione, e dal teorema di stokes, possiamo definire altresì

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{dC}{dA} \\ \eta &= \frac{dC_a}{dA}\end{aligned}\tag{9.43}$$

La derivata temporale di queste quantità strettamente legate è, quindi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \hat{k} \cdot \left( \nabla \wedge \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla v \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla u \right) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \right)\end{aligned}\tag{9.44}$$

Prendendo la differenza delle ultime due equazioni, e ricordando che  $\eta = \zeta + f$  troviamo che

$$\begin{aligned}\eta &= \zeta + f = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial t} = 0\end{aligned}\tag{9.45}$$

E di conseguenza

$$\frac{d\eta}{dt} = -\eta \nabla_H \cdot \underline{V} + \frac{1}{\rho^2} \{\rho, p\}_{xy} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \right)\tag{9.46}$$

Tramite quest'ultima equazione, posso creare previsioni, dato che una volta nota  $\eta$  posso ricostruire il campo di velocità del vento

**Parte III**

**Trasferimento Radiativo**



## Capitolo 10

# Grandezze Fondamentali

### 10.1 Radianza Spettrale

Se consideriamo un differenziale d'energia  $dE$  che attraversa un area infinitesima perpendicolare alla direzione di propagazione, che proviene da direzioni contenute in un angolo solido, attorno a  $\Omega(\theta, \phi)$  in un tempo infinitesimo  $dt$  con un range di lunghezze d'onda  $d\lambda$ , posso esprimere quest'energia come

$$d^4E_\lambda(\theta, \phi, t) = I_\lambda(\theta, \phi, t) dA_\perp d\Omega dt d\lambda$$

Dove  $I_\lambda$  è una grandezza finita che serve come costante di proporzionalità, detta *radianza* o *intensità spettrale*.

Dal teorema di Gauss  $dA_\perp = \cos\theta dA$  e integrando su  $\lambda$ , ottengo

$$I(\theta, \phi, t) = \int_{\Delta\lambda} I_\lambda(\theta, \phi, t) d\lambda$$

Dove  $I_\lambda$  ha dimensioni di  $\text{Wm}^{-2}\mu\text{m}^{-1}\text{sr}^{-1}$ , e  $I$  ha dimensioni di  $\text{Wm}^{-2}\text{sr}^{-1}$

### 10.2 Irradianza o Densità di Flusso

Definisco l'Irradianza come l'integrale della radianza spettrale che attraversa la superficie  $dA$  in un angolo solido  $\Omega$

$$F_\lambda(t) = \int_{\Omega} I_\lambda(\theta, \phi, t) \cos\theta d\Omega = \int_{\Delta\theta} \int_{\Delta\phi} I_\lambda(\theta, \phi, t) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

#### 10.2.1 Radianza Collimata

Definisco un set di coordinate  $(\theta_0, \phi_0)$  con l'angolo zenitale e azimutale solare. Ottengo che

$$I_\lambda(\theta, \phi) = I_{\lambda, \text{sole}} \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0)$$

E di conseguenza

$$F_{\lambda,Sf} = \int_{Sf} I_{\lambda,sole} \cos \theta d\Omega = I_{\lambda,sole} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) d\theta d\phi$$

Dalla definizione della misura di Lebesgue della Delta di Dirac, ottengo

$$F_{\lambda,Sf} = I_{\lambda,sole} \cos \theta_0$$

### 10.2.2 Flusso

Definisco il *flusso* come l'integrale dell'irradianza in una data area ortogonale alla direzione di provenienza della radiazione elettromagnetica

$$f_\lambda(t) = \int_A F_\lambda(t) dA$$

## 10.3 Emissione di Corpo Nero

Definisco un corpo nero, un corpo che emette seguendo la legge di corpo nero di Planck, cioè

$$I_\lambda(\theta, \phi, t) = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\pi\lambda^5 \left( e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right)}$$

Integrando su tutte le lunghezze d'onda otteniamo la *Radianza* o *Intensità* di un corpo nero

$$B(T) = \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \frac{2\pi^3 k_B^2}{15h^3 c^2} T^4$$

Integrando ulteriormente in una semisfera, otteniamo la legge di Stefan-Boltzmann

$$F(T) = \pi B(T) = \sigma T^4$$

I massimi del corpo nero saranno dati dalla legge di Wien

$$\lambda_{max} = \frac{a}{T} \approx 2.9 \text{ cmK}$$

## 10.4 Emissione Solare

Considerando il sole come un corpo nero a  $T \simeq 5800 \text{ K}$ , ottengo dalla legge di Wien che il massimo dell'emissione sarà

$$\lambda_{max,sole} = \frac{a}{5800 \text{ K}} = 0.5 \text{ } \mu\text{m} = 500 \text{ nm}$$

Questo è l'esatto centro della regione visibile dello spettro.

Il flusso vale  $f = 4 \times 10^{27} \text{ W}$ . Lo spettro totale che raggiunge la Terra, misurato dai satelliti, è detto *Total Solar Irradiance* o *Costante Solare*

$$S = 1360 \text{ Wm}^{-2}$$



## 10.5 Assorbimento, Emissione e Legge di Kirchhoff

Definisco l'*Emissività Spettrale*  $\varepsilon_\lambda$  come

$$\varepsilon_\lambda = \frac{I_{\lambda,em}}{B_\lambda(T)}$$

Analogamente, definisco l'Assorbività  $\alpha_\lambda$ , la riflettanza  $R_\lambda$  e la trasmittanza  $T_\lambda$  come

$$\begin{aligned}\alpha_\lambda &= \frac{I_{\lambda,ass}}{B_\lambda} \\ R_\lambda &= \frac{I_{\lambda,rif}}{I_{\lambda,inc}} \\ T_\lambda &= \frac{I_{\lambda,tras}}{I_{\lambda,inc}}\end{aligned}\tag{10.1}$$

La *Legge di Kirchhoff*, ci afferma che, ad una data  $\lambda$ , vale

$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$$

Nel caso atmosferico, supponendo di sovrapporre uno strato nelle regioni del visibile e dell'infrarosso, si ha

$$\varepsilon_v = \alpha_v \quad \varepsilon_{IR} = \alpha_{IR}$$

Trasportando questa relazione al TOA, alla temperatura  $T_A$  e notando che devono essere in equilibrio sia al TOA che nell'atmosfera devono essere bilanciate, ottengo, valutando nell'ultima equazione il bilancio in superficie

$$\begin{aligned}F_{IR} &= (1 - \alpha_{IR})\sigma T_S^4 + \varepsilon_{IR}\sigma T_A^4 \\ \alpha_v F_{IR} + \alpha_{IR}\sigma T_S^4 &= 2\varepsilon_{IR}\sigma T_A^4 \\ (1 - \alpha_v)F_{IR} + \varepsilon_{IR}\sigma T_A^4 &= \sigma T_S^4\end{aligned}\tag{10.2}$$

Risolvendo per  $T_A$  e  $T_S$  che sono le uniche due incognite, trovo

$$\begin{aligned}T_S &= \sqrt[4]{\frac{2 - \varepsilon_v}{2 - \varepsilon_{IR}}} T_E \\ T_A &= \sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon_{IR}} - \frac{1 - \varepsilon_{IR}}{\varepsilon_{IR}} \left(\frac{T_S}{T_E}\right)^4} T_E\end{aligned}\tag{10.3}$$

Dove è stato posto  $F_{IR} = \sigma T_E^4$

## 10.6 Assorbimento ed Emissione

L'energia di una molecola di GAs può essere scritta come la somma dell'energia rotazionale, vibrazionale e l'energia base della molecola, tutte quantizzate, sommata all'energia traslazionale, che è continua

$$E = E_{rot} + E_{vib} + E_{el} + E_{tras}$$

Per le energie dove l'energia traslazionale è molto maggiore alle altre, abbiamo

$$E = \frac{3}{2}k_B T$$

Negli altri casi

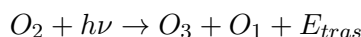
$$\Delta E = h\tilde{\nu} = h\frac{c}{\lambda}$$

In atmosfera, particolarmente, abbiamo  $E > E_R$  e  $E < E_v < E_{el}$  confrontabile con i livelli rotazionali molecolari, che creano spettri complessi.

Se un fotone ha energia sufficiente, può dissociare la molecola, la quale energia in eccesso andrà in  $E_T$ , generando calore.

### 10.6.1 Ossigeno e Ozono

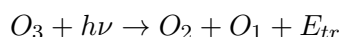
Nel caso di una molecola di  $O_2$  si ha che ad una regione continua ne segue una con bande sovrapposte al continuo, dove l'ossigeno è eccitato e crea legami con molta facilità



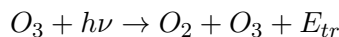
L'ozono segue un ciclo particolare di eccitazione e diseccitazione dato da due bande principali

- Le *Bande di Hartley*
- Le *Bande di Hugging*

Nelle bande di Hartley, si ha la seguente reazione



Per le bande di Hugging, si ha invece



Le altre molecole presenti in atmosfera danno righe di assorbimento nell'infrarosso termico. Data l'assenza di molecole che assorbono tra  $8 - 13 \mu m$  si ha una *finestra atmosferica*.

Altre finestre si trovano nel vicino infrarosso.

## 10.7 Temperatura di Brillanza

La temperatura di brillanza, è la temperatura necessaria perché un emettitore possa comportarsi come un corpo nero alla stessa temperatura e lunghezza d'onda.

## 10.8 Scattering

La *diffusione*, conosciuta in inglese come *scattering* è dipendente da due fattori principali

1. Dimensioni dello "scatteratore"
2. Lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica

Esistono diverse tipologie di scattering, tra tutte, lo *scattering di Rayleigh* e lo *scattering di Mie* sono le due tipologie principali per lo studio dello scattering atmosferico.

### 10.8.1 Scattering di Rayleigh

Venga considerata della materia, in cui passa attraverso un campo elettrico  $\underline{E}$  incidente, producendo un dipolo  $\underline{p}$  che inizierà ad oscillare, e di conseguenza, irradiare.

Il momento di dipolo sarà proporzionale al campo, e data una forma analitica del campo incidente  $\underline{E}_i$  si ha

$$\begin{aligned}\underline{E}_i &= \underline{E}_0 e^{-ik(r-ct)} \\ \underline{p} &= \alpha \underline{E}_i\end{aligned}\tag{10.4}$$

Dove  $\alpha$  è la polarizzabilità del mezzo, anche se solitamente è un tensore, data la presenza di simmetrie in atmosfera, può essere considerato uno scalare senza problemi.

Il dipolo indotto sarà quindi, infine

$$\underline{p} = \underline{p}_0 e^{-ik(r-ct)} = \alpha \underline{E}_0 e^{-ik(r-ct)}$$

Il campo diffuso, sarà quindi, dalla teoria dei dipoli

$$\underline{E} = \frac{1}{rc^2} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} \sin \gamma$$

Dove  $\gamma$  è l'angolo tra il momento scatterato e la direzione di osservazione.

Poiché il momento di dipolo è di facile derivazione, e vale  $\partial_t^2 \underline{p} = -k^2 c^2 \underline{p}$  si ha

$$\underline{E} = -\frac{\alpha k^2}{r} \underline{E}_0 e^{-ik(r-ct)} \sin \gamma$$

Determinando il piano di scattering dalla direzione di osservazione e quella di propagazione della luce abbiamo che, per costruzione

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\pi}{2} \\ \gamma_2 &= \frac{\pi}{2} - \theta\end{aligned}\tag{10.5}$$

Troviamo

$$\begin{aligned}E_{\perp} &= -\frac{\alpha k^2}{r} E_{0\perp} e^{-ik(r-ct)} \\ E_{\parallel} &= -\frac{\alpha k^2}{r} E_{0\parallel} e^{-ik(r-ct)} \cos \theta\end{aligned}\tag{10.6}$$

Riunendo le due componenti in un vettore di campo, abbiamo

$$\begin{pmatrix} E_{\perp} \\ E_{\parallel} \end{pmatrix} = \frac{\alpha k^2}{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0\perp} \\ E_{0\parallel} \end{pmatrix}$$

Indicando quindi, le intensità di campo come

$$\begin{aligned} I &= s|E|^2 \\ I_{\perp} &= s|E_{\perp}|^2 \\ I_{0\perp} &= s|E_{0\perp}|^2 \end{aligned} \quad s \in \mathbb{R} \quad (10.7)$$

Si ha

$$\begin{aligned} I_{\perp} &= \frac{\alpha^2 k^4}{r^2} I_{0\perp} \\ I_{\parallel} &= \frac{\alpha^2 k^4}{r^2} I_{0\parallel} \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (10.8)$$

È evidente che l'intensità incidente non dipenda dall'angolo di scattering, al contrario di  $I_{\parallel}$ , che dipenderà come  $\cos^2 \theta$  dall'angolo di scattering.

Nel caso di luce non polarizzata, come nel caso solare, avremo

$$\begin{aligned} I_{0\perp} &= I_{0\parallel} = \frac{I_0}{2} \\ I &= I_{\perp} + I_{\parallel} = \frac{\alpha^2 k^4}{r^2} (I_{0\perp} + I_{0\parallel} \cos^2 \theta) = \frac{\alpha^2 k^4 I_0}{2r^2} (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (10.9)$$

L'intensità minima sarà a  $\frac{\pi}{2}$ , e di conseguenza

$$I \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

Per  $\lambda$  corte si avrà molto più scattering, ed è per questo motivo che il cielo ci appare blu, essendo la luce blu a frequenze molto più corte rispetto alle altre bande di luce visibile. Posso definire la *funzione di fase*  $P(\cos \theta)$  come

$$\int_{4\pi} \frac{P(\cos \theta)}{4\pi} d\Omega$$

Poiché  $P(\cos \theta) = \cos \theta \cdot (1 + \cos \theta)$  posso normalizzare questa funzione come

$$P(\cos \theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta)$$

E potrò scrivere la radianza di dipolo come

$$I = \frac{32\alpha^2 \pi^4}{3r^2 \lambda^4} P(\cos \theta)$$

### 10.8.2 Sezione d'Urto di Scattering

Posso definire la sezione d'urto di scattering come  $\sigma_s = f/F_0$ , dove

$$\begin{aligned} F_{0,\lambda} &= \int_{\Delta\Omega_i} \\ f &= \int_A F_s dA \end{aligned} \quad (10.10)$$

Se  $A$  è una superficie di raggio  $r$  posso quindi scrivere

$$f = \frac{32\pi^4\alpha^2}{3\lambda^4} F_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi = \frac{32\pi^4\alpha^2 F_0}{3\lambda^4} 4\pi$$

Da cui

$$\sigma_s = \frac{128\pi^5\alpha^2}{\lambda^4}$$

Dove, definendo un indice di rifrazione  $m_\lambda$  posso indicare che

$$\alpha \propto \frac{m_\lambda - 1}{m_\lambda + 1}$$

### 10.8.3 Aerosol

L'aerosol è della materia condensata in aria, non in moto per propulsione propria (ergo non insetti, aerei, ma vius, batteri, pollini,...). Possono essere tutti approssimati ad una misura compresa tra  $0.03 \mu\text{m}$  e  $100 \mu\text{m}$ .

La concentrazione degli aerosol varia tra i  $10^6 - 10^7 \text{ cm}^{-3}$  nelle città ed intorno ai  $10^3 \text{ cm}^{-3}$  nelle campagne, questa grossa differenza è data, principalmente, dalla presenza dell'inquinamento antropico nelle zone cittadine, e della presenza del pluviscolo e dei pollini nelle campagne. È importante notare la *polar haze* presente ai poli, una nebbia di neve e ghiaccio sollevata dai venti polari.

Gli aerosol sono i principali nuclei di condensazione del vapor d'acqua atmosferico. Di questi, i principali aerosol capaci di essere nuclei di condensazione sono le polveri (naturali o antropiche) ed il sale marino.

Dalla dimensione degli stessi possiamo suddividere gli aerosol in 3 categorie

Gli aerosol possono essere approssimate a delle particelle sferiche omogenee, e lo scattering della luce da questi corpi viene studiato dalla *teoria di Mie*.

Possiamo definire il *size parameter*  $x$  come

$$x = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

Dove,  $r$  è il raggio della particella considerata. Se  $x \gtrsim 1$  è possibile applicare la teoria di Mie.

Si dice efficienza di scattering  $Q_s$  il parametro

$$Q_s = \frac{\sigma_s}{\pi r^2}$$

Dove

$$\frac{dN}{dt} = \sigma N_b \Phi_A \propto I$$

Per studiare dimensione e proprietà dell'aerosol vengono utilizzati LASER come i *LI-DAR*. Più sono importanti le frange di interferenza, meno è la radiazione assorbita.

## Capitolo 11

# Trasferimento Radiativo

Per poter descrivere correttamente il trasferimento radiativo, devo scrivere l'*equazione del trasporto radiativo*.

Considero uno strato di atmosfera compreso tra 0 ed  $S_1$ . Si ha una diminuzione della radianza per assorbimento e scattering, ed un aumento per emissione e scattering multiplo (più raro data la sezione d'urto trascurabile).

Avremo, quindi

$$\begin{cases} dI_{es} = -\tilde{k}I dM \\ dI_{em} = \tilde{j}dM \end{cases} \quad (11.1)$$

Poiché

$$\begin{aligned} dM &= \rho dV = \rho A dS \\ dI_{es} &= -\tilde{k}A\rho I dS = -k\rho I dS \end{aligned}$$

Dove  $k$  è una sezione d'urto per unità di massa.

Similmente, per  $I_{em}$  si ha

$$dI_{em} = j\rho dS$$

Definendo la *funzione di produzione*  $J$  come

$$J = \frac{j}{k}$$

Otteniamo, finalmente, che

$$\begin{aligned} dI &= dI_{es} + dI_{em} = k\rho(J - I)dS \\ \frac{dI}{k\rho dS} &= J - I \end{aligned} \quad (11.2)$$

Questa, è l'equazione generale del trasferimento radiativo.

### 11.0.1 Radiazione Solare

Nel caso della radiazione solare, dato che in atmosfera non ci sono corpi con la stessa temperatura di brillantezza della superficie solare, si ha  $J = 0$ . Di conseguenza

$$\begin{aligned}\frac{dI}{k\rho ds} &= -I \\ I(s) &= I(0)e^{-\int_0^s k\rho ds}\end{aligned}\tag{11.3}$$

Detta legge di *Beer-Lambert*.

Definendo  $l(s)$  come

$$l(s) = \int_0^s \rho(\tilde{s})d\tilde{s}$$

Si ha la legge di Beer-Lambert per strati sottili

$$I(s) = I(0)e^{-kl}$$

### 11.0.2 IR Termico e Spettro Terrestre

Prendendo tutte le grandezze radiative nella versione *specificata* (per lunghezza d'onda specifica), posso studiare lo spettro terrestre. Nell'IR termico, si ha  $J_\lambda \neq 0$ , e si può approssimare il tutto ad un corpo nero

$$J_\lambda = B_\lambda(T_e)$$

Definiamo lo *spessore ottico*  $\tau$  come

$$\begin{aligned}\tau_\lambda(s_1, s) &= \int_s^{s_1} k_\lambda(\tilde{s})\rho(\tilde{s})d\tilde{s} \\ d\tau_\lambda &= -k_\lambda\rho ds\end{aligned}\tag{11.4}$$

Sostituendo, quindi, alla variabile  $s$  lo spessore ottico, posso riscrivere l'equazione del trasporto radiativo come

$$\begin{aligned}\frac{dI}{k\rho ds} &= -\frac{dI}{d\tau} \\ \left(-\frac{dI}{d\tau}\right)e^{-\tau}d\tau &= (B - I)e^{-\tau}d\tau \\ -e^{-\tau}dI &= Be^{-\tau}d\tau - Ie^{-\tau}d\tau \\ -d(Ie^{-\tau}) &= Be^{-\tau}d\tau\end{aligned}$$

Integrando tra  $\tau(0) = \tau$  e  $\tau(s_1)$  ottengo

$$I(s_1) = \underbrace{I(0)e^{-\tau}}_{\text{Attenuazione}} + \underbrace{\int_0^\tau Be^{-\tilde{\tau}}d\tilde{\tau}}_{\text{Aumento Attenuato}}\tag{11.5}$$

Che è l'equazione di *Schwartzchild*.



### 11.0.3 Approssimazione Piano-Parallela

È possibile semplificare ulteriormente l'equazione del trasferimento radiativo nel caso atmosferico, trascurando la curvatura dell'atmosfera. Definendo  $\mu = \cos \theta$ , con  $\theta$  l'angolo tra la direzione di misurazione e lo zenith, posso riscrivere tutte le grandezze in funzione di  $z$ , dove

$$dz = \cos \theta ds$$

Allora

$$\tau_\lambda(z) = \int_z^\infty k_\lambda(\tilde{z}) \rho(\tilde{z}) dz$$

Riscrivendo l'equazione del trasporto radiativo in funzione di  $\mu$  otteniamo

$$-\mu \frac{dI_\lambda(\phi, \mu, \tau)}{d\tau} = J_\lambda(\phi, \mu, \tau) - I_\lambda(\phi, \mu, \tau) \quad (11.6)$$

Dalla definizione di  $\mu$  possiamo distinguere l'equazione per la radiazione entrante e quella per la radiazione uscente

$$\begin{aligned} -\mu \frac{dI_\lambda^\uparrow}{d\tau} &= J_\lambda - I_\lambda \\ \mu \frac{dI_\lambda^\downarrow}{d\tau} &= J_\lambda - I_\lambda \end{aligned} \quad (11.7)$$

Moltiplicando entrambe le equazioni per  $e^{\pm \frac{\tau}{\mu} \frac{d\tau}{\mu}}$  (con segno positivo per il flusso uscente dall'atmosfera e con segno negativo per quello entrante) e sottointendendo la monocromaticità della radiazione, otteniamo

$$\begin{cases} -dI^\uparrow e^{-\frac{\tau}{\mu}} = J^\uparrow e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu} - I^\uparrow e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu} \\ dI^\downarrow e^{\frac{\tau}{\mu}} = J^\downarrow e^{\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu} - I^\downarrow e^{\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu} \end{cases} \quad (11.8)$$

Integrando il flusso uscente tra  $\tau^*$  e  $\tau$  il flusso uscente, e tra 0 e  $\tau$  il flusso entrante, otteniamo

$$\begin{cases} I^\uparrow(\tau) = I^\uparrow(\tau^*) e^{-\frac{\tau^* - \tau}{\mu}} + \int_{\tau^*}^{\tau} J^\uparrow e^{-\frac{\tilde{\tau} - \tau}{\mu}} \frac{d\tilde{\tau}}{\mu} \\ I^\downarrow(\tau) = I^\downarrow(0) e^{-\frac{\tau}{\mu}} + \int_0^{\tau} J^\downarrow e^{-\frac{\tau - \tilde{\tau}}{\mu}} \frac{d\tilde{\tau}}{\mu} \end{cases} \quad (11.9)$$

Essendo  $\tau$  lo spessore ottico dello strato d'atmosfera, a  $\tau = 0$  ci troviamo al *TOA* (*Top Of Atmosphere*) e,  $\tau = \tau^*$  possiamo porlo come la quota della superficie terrestre. Il contributo degli strati intermedi è dato dagli integrali.  $I^\uparrow(0)$  può essere misurata dai satelliti, è l'emissione al TOA. ma poiché vale l'approssimazione di corpo nero, abbiamo

$$I_\lambda^\uparrow(\tau^*) = \varepsilon_{\lambda,s} B_\lambda(T_s)$$

Che può essere confrontato con  $I^\uparrow(0)$  nella finestra atmosferica, cioè dove  $J_\lambda^\uparrow(\tau) = 0$ ,  $\forall \tau$ . Analogamente, posso misurare la radianza proveniente dallo spazio

## 11.1 Riscaldamento Solare

Si indica con *Heating/Cooling rate* la derivata temporale della temperatura

$$\frac{\partial T}{\partial t}$$

La forma esplicita può essere trovata dalla prima legge in termini di entalpia

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Dove  $\partial_t Q = f$  è il flusso relativo.

Poiché  $f = FA$  possiamo riscrivere il tutto in termini di irradianza

$$\begin{aligned} F(S + dS) &\simeq F(S) + \frac{\partial F}{\partial S} dS \\ df &= (F_{IN} - F_{OUT}) dx dy = -\frac{\partial F}{\partial S} dV \\ \frac{df}{dV} &= -\frac{dF}{dS} \end{aligned}$$

Poiché  $dz = -ds$  posso riscrivere la prima legge della termodinamica

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial z} \quad (11.10)$$

Poiché vale

$$d \leq -\frac{1}{k\rho} d\tau$$

La prima legge diventa

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -k \frac{\partial F}{\partial \tau}$$

Possiamo riscrivere, usando la legge di Beer-Lambert, che

$$I(\tau) = I_{sun} e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}$$

E poiché la radianza è collimata, possiamo scrivere

$$F(\tau) = \mu_0 I_{sun} e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} = F_{sun} e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}$$

L'Heating/Cooling rate diventerà quindi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c_p \mu_0} F(\tau)$$

Poiché

$$\begin{aligned} \rho &\simeq \rho_0 e^{-\frac{z}{H}} \\ \tau &= \int_z^\infty k\rho d\tilde{z} \simeq k\rho_0 \int_z^\infty e^{-\frac{\tilde{z}}{H}} d\tilde{z} = Hk\rho \end{aligned}$$

Di conseguenza, poiché la variazione di  $k$  nello strato è trascurabile, abbiamo che

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\tau}{c_p \mu_0 \rho H} F(\tau) \quad (11.11)$$

Il massimo riscaldamento si può trovare cercando i punti critici di  $F(\tau)$ , cioè

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\tau}{H \mu} F(\tau) \right) &= 0 \\ \frac{F(\tau)}{H \mu_0} + \frac{\tau}{H \mu_0} \frac{\partial F}{\partial \tau} &= 0 \\ \frac{F}{H \mu_0} - \frac{\tilde{\tau}}{H \mu_0^2} F &= 0 \\ \tilde{\tau} &= \mu_0 \end{aligned}$$

Dalla definizione di  $\tilde{\tau}$  ricavo quindi, che

$$\tilde{z} = H \ln \left( \frac{k H \rho_0}{\mu_0} \right) \quad (11.12)$$

## 11.2 Raffreddamento IR

Calcoliamo il cooling rate partendo dalla somma dei flussi di energia entranti ed uscenti

$$F = F^\uparrow(z) - F^\downarrow(z)$$

Sostituendolo nell'equazione differenziale seguente

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial F}{\partial z}$$

Applicando l'approssimazione di atmosfera piano parallela, supponendo che le funzioni  $J$  siano funzioni di corpo nero e supponendo che dallo spazio non arrivi radiazione IR, ottengo, definendo la trasmittanza come

$$T \left( \frac{\tau}{\mu} \right) = e^{-\frac{\tau}{\mu}}$$

Posso riscrivere quindi,

$$\begin{aligned} I^\uparrow(\tau) &= B(\tau^*) T \left( \frac{\tau^* - \tau}{\mu} \right) - \int_\tau^{\tau^*} B(\tau') \frac{d}{d\tau'} T \left( \frac{\tau' - \tau}{\mu} \right) d\tau' \\ I^\downarrow &= \int_0^\tau B(\tau') \frac{d}{d\tau'} T \left( \frac{\tau' - \tau}{\mu} \right) d\tau' \end{aligned} \quad (11.13)$$

Integrando su tutto l'emisfero, ottengo l'irradianza totale

$$F^\uparrow = 2\pi \int_0^1 I^\uparrow \mu d\mu \quad (11.14)$$

Definendo la trasmittanza diffusa  $T^f$  come

$$T^f(\tau) = 2 \int_0^1 T\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \mu d\mu$$

Ed integrando le radianza entranti ed uscenti, ottengo

$$\begin{aligned} F^\uparrow(\tau) &= 2\pi \int_0^1 B(\tau^*) T\left(\frac{\tau^* - \tau}{\mu}\right) \mu d\mu - 2\pi \int_0^1 \int_\tau^{\tau^*} B(\tilde{\tau}) \frac{d}{d\tilde{\tau}} \left( T\left(\frac{\tilde{\tau} - \tau}{\mu}\right) \right) \mu d\tilde{\tau} d\mu \\ F^\downarrow(\tau) &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\tau B(\tilde{\tau}) \frac{d}{d\tilde{\tau}} \left( T\left(\frac{\tilde{\tau} - \tau}{\mu}\right) \right) \mu d\tilde{\tau} d\tau \end{aligned}$$

Essendo  $B(\tau)$  indipendente da  $\mu$ , e riscrivendo il tutto in termini di  $T^f$ , si ha

$$F^\uparrow(\tau) = \pi B(\tau^*) T^f\left(\frac{\tau^* - \tau}{\mu}\right) - \pi \int_\tau^{\tau^*} B(\tilde{\tau}) \frac{d}{d\tilde{\tau}} \left( T^f\left(\frac{\tilde{\tau} - \tau}{\mu}\right) \right) d\tau \quad (11.15)$$

Riscrivendo in termini di  $z$  e sommando le due irradianze, ottengo

$$F = F^\uparrow - F^\downarrow = \pi B(0) T^f(z) + \pi \int_0^\infty B(\tilde{z}) \frac{d}{d\tilde{z}} (T(\tilde{z} - z)) d\tilde{z} \quad (11.16)$$

Supponendo  $B(\tilde{z}) = 0$ , possiamo approssimare la derivata dell'irradianza come

$$\frac{\partial F}{\partial z} \propto \pi B(z) e^{-\frac{z}{\mu}}$$

Considerando il bilancio atmosferico, si ha che la stratosfera è in bilancio radiativo, mentre la troposfera è sbilanciata. Il bilancio troposferico è dato in forma di calore sensibile (come convezione e turbolenze) o come calore latente (condensazione del vapor d'acqua)

## Capitolo 12

# Chimica Atmosferica

I processi chimici atmosferici sono principalmente dati dalla fotodissociazione degli elementi chimici atmosferici



Dove  $\gamma$  è il coefficiente di fotodissociazione.

Il numero di molecole  $n_{AB}$  varierà secondo la legge

$$\frac{dn_{AB}}{dt} = -j n_{AB} \quad (12.2)$$

Dove  $j$  è definito come

$$j = \int_{\Delta\lambda} \phi(\lambda) \sigma_a F_{act}(\lambda) d\lambda$$

Dove, è stato definito con  $\phi$  la probabilità di dissociazione, con  $\sigma_a$  la sezione d'urto di assorbimento e  $F_{act}$  il flusso attinico.

Sia  $dE_\lambda$  l'energia incidente su uno strato  $dz$ . L'energia incidente sarà

$$dE_\lambda = I_\lambda A \cos \theta d\Omega dt d\lambda$$

Il numero di molecole colpite è  $dN_a = n A dS$ , e di conseguenza

$$\sigma_a = \frac{\frac{dE^{ass}}{dt}}{\frac{dE}{dt} \frac{dN_a}{dA}}$$

$$dE^{ass} = \sigma_a n dE dS = I_\lambda A \sigma_a n d\Omega dt d\lambda dz$$

Si dissocieranno quindi, una quantità di molecole  $N_d$ , cioè

$$dN_d = \phi(\lambda) d$$

E di conseguenza, nello strato considerato, il rate di dissociazione sarà

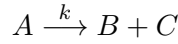
$$\frac{dN_d}{dt} = -A n d z \int_{\Delta\lambda} \underbrace{\left( \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\lambda(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \right)}_{\text{Flusso Attinico}} \sigma_a(\lambda) \phi(\lambda) d\lambda \quad (12.3)$$

Dividendo per l'unità di volume  $V = A d z$

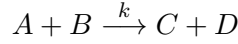
$$\frac{1}{V} \frac{dN_d}{dt} = -n \int_{\Delta\lambda} F_{act} \phi(\lambda) \sigma_a(\lambda) d\lambda \quad (12.4)$$

Esistono 3 tipologie di dissociazione

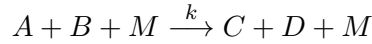
1. Fotodissociazioni del primo tipo



2. Fotodissociazioni del secondo tipo



3. Fotodissociazioni del terzo tipo



Rispettivamente, il numero di molecole dissociate seguiranno la legge

$$\begin{aligned} \frac{dn_A^I}{dt} &= -k n_A \\ \frac{dn_A^{II}}{dt} &= -k n_A n_B \\ \frac{dn_A^{III}}{dt} &= -k n_A n_B n_M \end{aligned}$$

## 12.1 Ozono

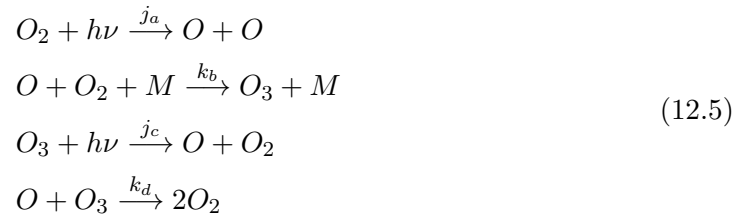
La densità di Ozono atmosferico si misura in *Dobson Units* (DU). Per determinare le DU è necessario prendere tutto l'Ozono presente in una colonna d'aria e viene portato a pressione e temperatura standard (1013 hPa, 273.16 K) e ne viene misurato lo spessore finale dello strato in unità di  $10^{-5}$  m. Per l'intera atmosfera, abbiamo che

$$\begin{aligned} n_d(z) &= n_d(z_{std}) e^{-\frac{z-z_{std}}{H}} \\ N_d &= A n_d(z_{std}) \int_{z_{std}}^{\infty} e^{-\frac{z-z_{std}}{H}} dz = A H n_d(z_{std}) \\ \frac{N_d}{n_d(z_{std})} &= V_{std} = A H \end{aligned}$$

Poiché  $H \approx 8$  km, abbiamo che l'Ozono atmosferico avrà una densità di circa 300 DU

**12.1.1 Modello Fotochimico di Chapmann**

L'Ozono presente in atmosfera può essere descritto tramite il *modello fotochimico di Chapmann*, che approssima correttamente, a meno di reazioni catalitiche e convezione atmosferica, il ciclo dell'ozono atmosferico







# Bibliografia

- [1] J. R. Holton. *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Elsevier Academic Press Publications, 2004.
- [2] P. V. Hobbs J. M. Wallace. *Atmospheric Science*. Elsevier Academic Press Publications, 2006.
- [3] E. M. Lifšits L. D. Landau. *Fisica Teorica Vol.6 Meccanica dei Fluidi*. Editori Riuniti, 2013.
- [4] K. N. Liou. *An Introduction to Atmospheric Radiation*. Elsevier Academic Press Publications, 2002.
- [5] G.R. North T. L. Erukhimova. *Atmospheric Thermodynamics*. Cambridge University Press, 2009.