

ASTRONOMIA

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Corso di Laurea in Fisica, Curriculum di Astrofisica

MATTEO CHERI

APPUNTI DEL CORSO DI ASTRONOMIA

GIUGNO 2018

VERSIONE 0.2

ASTRONOMIA

APPUNTI DEL CORSO DI ASTRONOMIA

SCRITTO DA

MATTEO CHERI

*Corso di Laurea in Fisica, Curriculum di Astrofisica
Sapienza Università di Roma*



GIUGNO 2018

VERSIONE 0.2

Indice

1	Introduzione	7
1.1	Distanze Astronomiche e Cande Standard	7
1.2	Cande di Livello I	7
1.2.1	Parallasse	7
1.2.2	Luminosità	8
1.2.3	Magnitudini	8
1.3	Cande di Livello II	9
1.3.1	Supernovae Ia	9
2	Meccanica Celeste, Sistemi di Coordinate	11
2.1	Coordinate Celesti	12
2.1.1	Coordinate Equatoriali	12
2.1.2	Coordinate Altazimutali	14
2.1.3	Montature	14
2.2	Dinamica Celeste	15
3	Ottica Astronomica e Fotometria	17
3.1	Telescopi	17
3.1.1	Diffrazione	19
3.2	Rifrazione Atmosferica, Seeing	19
3.3	Interferometria, Array di Telescopi	19
3.4	Fotometria	20
3.4.1	Colore	24
4	Spettri Stellari	27
4.1	Righe Spettrali	27
4.2	Interpretazione degli Spettri	29
4.2.1	Equazione di Saha	29
4.3	Classificazione Stellare	30
4.3.1	Righe Molecolari e Stati Roto-Vibrazionali	34
4.3.2	Legge di Salpeter	34

5	Modello Standard Stellare	35
5.1	Equilibrio Stellare	35
5.2	Tempo Scala di Kelvin-Helmholtz	37
6	Collasso Gravitazionale	39
6.1	Nubi Molecolari e Parametri di Jeans	40
7	Astrofisica Nucleare	41
7.1	Reazioni Nucleari in un Plasma	42
7.2	Opacità	46
7.2.1	Stelle di Massa Intermedia o Massiccia ($M > 1.5 M_{\odot}$)	47
7.2.2	Stelle di Piccola Massa ($M \sim M_{\odot}$)	47
7.2.3	Stelle di Piccolissima Massa ($M < 0.4 M_{\odot}$)	47
8	Fine dell'Evoluzione Stellare	49
8.1	Collasso Gravitazionale e Supernovae	50
8.2	Classificazione delle Supernovae	50
9	Meccanica Celeste ed Orbitale	53
9.1	Problema dei Due Corpi	54
9.2	Problema degli N Corpi	57
9.3	Sistemi Binari	58
9.3.1	Determinazione delle Masse di un Sistema Binario	59

Nota

Questi appunti di Astronomia sono stati presi dal sottoscritto durante le lezioni tenute dal Professore Straniero nel secondo semestre dell'A.A.2017/2018.

Essendo una prima versione è molto probabile la presenza di errori ed imprecisioni.

Per qualsiasi commento o precisazione lascio qua la mia mail istituzionale.

cheri.1686219@studenti.uniroma1.it

Questi appunti sono stati scritti in L^AT_EX 2_ε



1 Introduzione

1.1 Distanze Astronomiche e Candele Standard

In Astronomia, le distanze valutate sono enormi, anche rimanendo nel sistema solare troviamo misure che vanno dall'ordine di 10^3 km fino ad arrivare a misure dell'ordine di circa $10^6 - 10^7 \text{ km}$.

Per questo motivo, sono state introdotte nuove unità di misura, come gli anni luce, i parsec, e le unità astronomiche.

Riportiamo qua sotto i valori di alcune misure astronomiche

- $R_{\oplus} = 6380 \text{ km} = 6 \times 10^8 \text{ cm}$
- $R_{\odot} = 6.9 \times 10^{11} \text{ cm}$
- $1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{13} \text{ cm}$
- Distanza Sole-Proxima Centauri 1.31 pc
- $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{18} \text{ cm}$

1.2 Candele di Livello I

Per stimare la distanza di un oggetto è possibile usare diversi metodi, questi si dividono in I e II livello.

Esempi di candele di primo livello sono le stelle variabili Cefeidi, la cui luminosità è proporzionale al ciclo di espansione e contrazione della stessa.

1.2.1 Parallasse

È possibile calcolare la distanza di un oggetto astronomico tramite la misura della parallasse dell'oggetto sulle stelle lontane in un mezzo periodo di orbita terrestre.

La distanza calcolata per un oggetto con una parallasse di 1 arcsec è definita essere di 1 parsec .

Se la parallasse di un oggetto è conosciuta, allora è possibile calcolare la sua distanza con

l'utilizzo della trigonometria, ed utilizzando l'approssimazione al prim'ordine per angoli di parallasse α piccoli $\tan(\alpha) \simeq \alpha + o(\alpha^2)$, notiamo che, dato che $[\alpha] = \text{arcsec}$, allora la distanza è data da $pc = \text{arcsec}^{-1}$

$$d_{pc} = \frac{1}{\alpha} \quad (1.1)$$

1.2.2 Luminosità

Un altro metodo per calcolare la distanza di un oggetto astronomico è, utilizzando l'approssimazione di corpo nero, calcolare la sua luminosità. Notiamo che

$$\mathcal{L} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (1.2)$$

Dove R è il raggio dell'oggetto considerato e σ la costante di Stefan-Boltzmann.

Il flusso F misurato a terra è inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza

$$F = \frac{\mathcal{L}}{4\pi d^2} \quad (1.3)$$

È quindi possibile stimare la distanza di un oggetto di cui conosciamo la sua luminosità, tramite la formula

$$d = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{4\pi F}} \quad (1.4)$$

1.2.3 Magnitudini

La magnitudine è una scala d'intensità luminosa.

Sono presenti due tipologie di magnitudine, la *Magnitudine apparente* (m) e la *Magnitudine assoluta* (M).

La magnitudine apparente è la magnitudine dell'oggetto, calcolata considerando il flusso ricevuto a terra

$$m = k - 2.5 \log_{10}(F) \quad k \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

La magnitudine assoluta invece, è la magnitudine dell'oggetto se fosse posto a 10 pc di distanza da noi

$$M = m + 5 - 5 \log_{10}(d) \quad (1.6)$$

Combinando le due magnitudini è possibile costruire il cosiddetto *modulo di distanza*

$$M - m = 2.5 \log_{10} \left(\frac{F_{10pc}}{F} \right) = 2.5 \log_{10} \left(\frac{d^2}{10^2} \right) \quad (1.7)$$

Nel piano osservativo è utile considerare magnitudine e luminosità solari, dai valori ben conosciuti

$$M = M_{\odot} - 2.5 \log_{10} \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_{\odot}} \right)$$

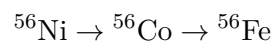
La costante che troviamo nel calcolo della magnitudine apparente è determinabile empiricamente utilizzando una stella di riferimento nella banda di frequenze considerata. Un esempio, nella banda del visibile, è utilizzare la stella Vega, ed indicare la magnitudine nel visibile della stessa come 0, i.e $m_V^{\text{Vega}} = 0$.

1.3 Candele di Livello II

Per misurare distanze dell'ordine del Mpc è necessario introdurre una nuova tipologia di candele standard, dette del secondo livello, ad esempio utilizzando le Supernovae di tipo Ia

1.3.1 Supernovae Ia

Le Supernovae Ia sono una tipologia di nova, ottenuta quando una nana bianca, cioè la rimanenza del nucleo di una stella dell'ordine della massa solare, raggiunge la *massa di Chandrasekhar*, che per nane bianche della tipologia Carbonio-Ossigeno è dell'ordine di $1.4 M_{\odot}$. La curva di luce ottenuta è data dal decadimento radioattivo dato dalla formula



Dato che conosciamo l'half life di ognuno di questi isotopi, possiamo misurarne l'abbondanza, e stimare poi la luminosità dell'oggetto tramite la relazione $\mathcal{L} \propto M_{Ni}$. Questo tipo di candele, è visibile fino a distanze con redshift $z \approx 1$

2 Meccanica Celeste, Sistemi di Coordinate

Per poter orientarsi nella sfera celeste, è utile introdurre un sistema di coordinate sulla stessa. Questo sistema di coordinate è basato sull'orbita e rotazione terrestre.

È possibile indicare due piani principali, il *piano equatoriale* ed il *piano dell'eclittica*.

Questi due piani sono separati dall'angolo d'inclinazione dell'asse di rotazione terrestre con il piano dell'orbita

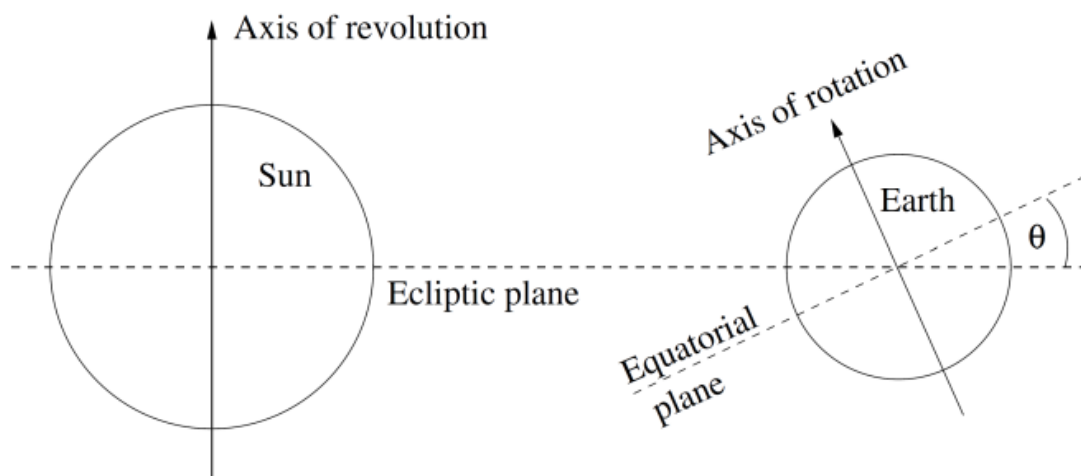


Figura 2.1: Piano dell'eclittica e piano equatoriale, ricordiamo che $\theta = 23.5^\circ$

Il punto di congiunzione su questi due piani è chiamato *punto vernale*, indicato con Υ .

È necessario tenere conto dei moti propri terrestri per costruire un buon calendario e conseguentemente un sistema di coordinate stellari, quindi è necessario valutare precessione e nutazione dell'asse di rotazione terrestre. La prima, indotta principalmente dalle perturbazioni lunari e solari sulla rotazione terrestre. Questo moto implica un anticipo degli equinozi di $50.26''$ per anno, portando quindi ad un ciclo completo di precessione di

26000 y . La precessione, porta al cambio di stella di riferimento come *stella polare*.

Il moto di nutazione terrestre invece, è l'oscillazione dell'asse terrestre, con un ciclo di 18.6 y .

Considerando questi moti, è possibile comporre due calendari, con due definizioni di *anno* differenti

- L'anno *siderale*, che corrisponde ad una rivoluzione completa della terra attorno al sole, e porta ad una precessione degli equinozi di 1 giorno ogni 70 anni
- L'anno *tropico*, che corrisponde ad una rivoluzione intorno al sole di $359^{\circ}59'10''$, è il calendario comunemente utilizzato, ma causa un cambiamento delle coordinate stellari

Il giorno siderale è considerato come il tempo impiegato dalla terra per effettuare una rotazione di 360° , è più lungo del giorno ordinario, quindi ogni anno si ha circa 1 giorno siderale in più

I tempi scala per ogni moto che cambia la posizione osservata di un oggetto astronomico saranno quindi

- Rotazione 1 d
- Rivoluzione 1 y
- Precessione 2.6×10^4 y
- Moto proprio stellare 10^8 y

2.1 Coordinate Celesti

Sono presenti due tipologie principali di coordinate celesti:

- Coordinate equatoriali
- Coordinate altazimutali

2.1.1 Coordinate Equatoriali

Le coordinate equatoriali sono date da due variabili principali, l'ascensione retta $\alpha \in (0h, 24h)$ e declinazione $\delta \in (-90^{\circ}, 90^{\circ})$

L'ascensione retta è calcolata ponendo il punto vernale Υ come $0h0m0s$, la declinazione partendo dall'equatore celeste.

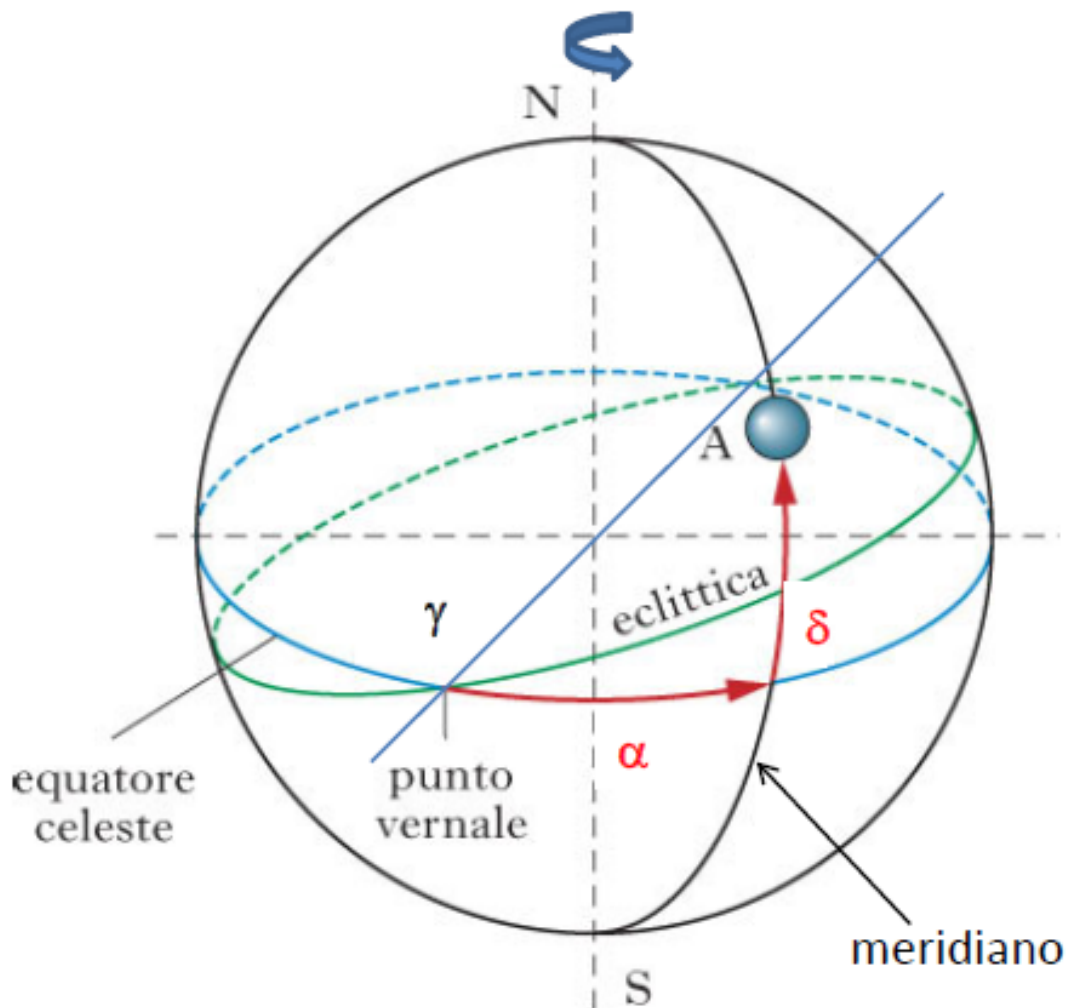


Figura 2.2: Coordinate Equatoriali

Questo tipo di coordinate è indipendente dalla rotazione celeste, ma non dai moti come quello di precessione.

Ogni 50 anni vengono aggiornati i cataloghi stellari. I cataloghi attualmente in uso prendono il nome di *J2000* e si riferiscono all'aggiornamento fatto nel 2000.

Per effettuare osservazioni astronomiche con telescopi a montatura equatoriale è necessario conoscere le coordinate geografiche del luogo e l'orario dell'osservazione, in modo da poter effettuare le correzioni relative alla rotazione terrestre.

2.1.2 Coordinate Altazimutali

Le coordinate altazimutali sono create posizionando un piano tangente al punto dell'osservazione astronomica. La retta normale al piano va dal Nadir fino allo Zenith del punto d'osservazione.

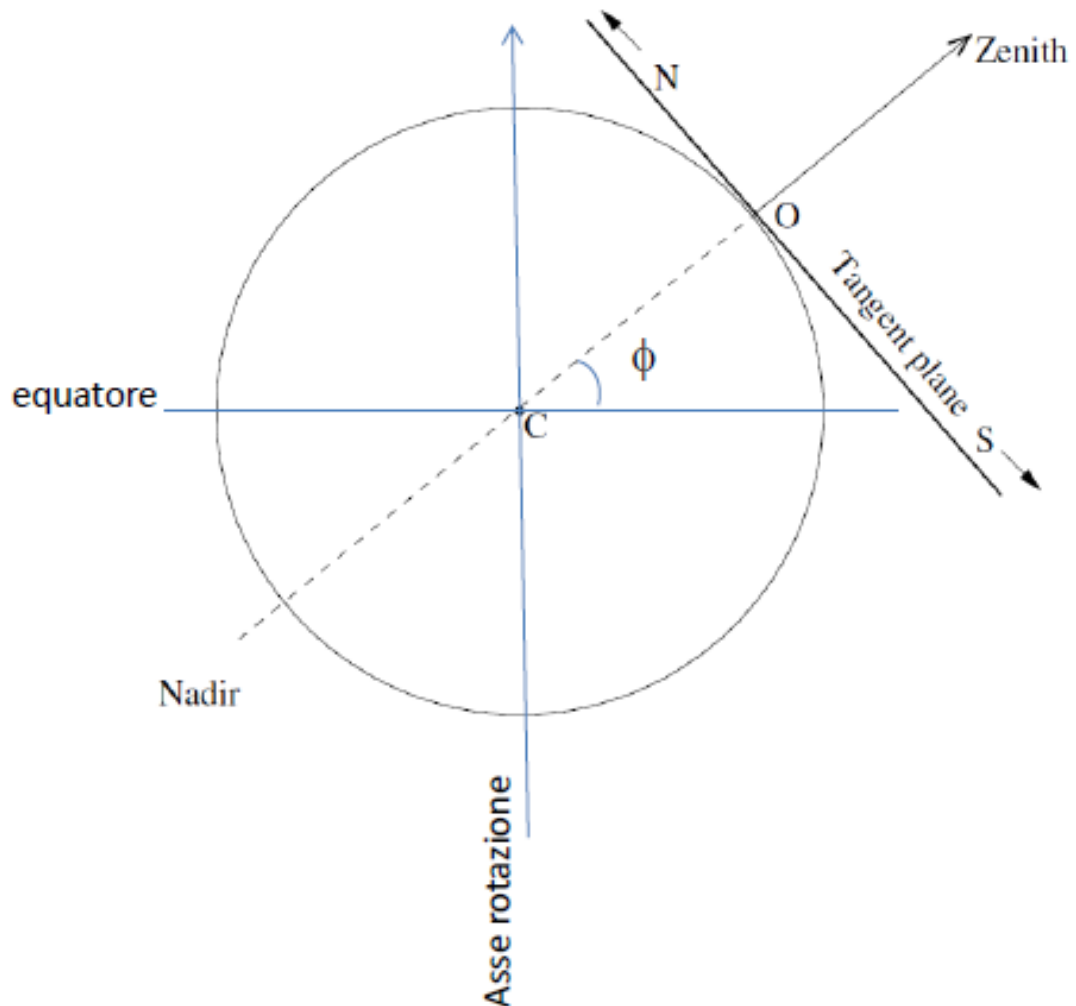


Figura 2.3: Coordinate Altazimutali o Locali

Le coordinate piane sono date dall'Azimuth A in direzione Est-Ovest e l'elevazione a in direzione Nord-Sud.

2.1.3 Montature

Esistono due tipi di montature per telescopi, a seconda della tipologia di coordinate celesti utilizzabili.

Le due montature sono infatti chiamate *equatoriale* ed *azimutale*.

Per la montatura equatoriale, è necessario effettuare delle correzioni .

per avere l'ascensione retta di una stella è necessario trovare l'angolo orario del punto vernale è necessario trovare l'*angolo orario*, che è l'angolo dato tra il meridiano NZS, detto *mezzocielo* e la proiezione dell'astro osservato sull'equatore celeste (MOP). Per un oggetto con angolo orario h e ascensione retta α troviamo che l'angolo del punto vernale sarà

$$\Upsilon = h + \alpha \quad (2.1)$$

Dopo che è stato trovato Υ è possibile determinare gli angoli orari di un qualsiasi oggetto con coordinate equatoriali (α, δ) . Questo passaggio è chiamato di *pointing* dell'astro, il passaggio successivo sarà il *tracking*, dato che l'angolo orario h varia con il tempo, data la rotazione terrestre.

Data questa conformazione, la montatura equatoriale di un telescopio è più complicata dal punto di vista meccanico, ma, dato l'adattamento alle coordinate celesti è necessario un solo motore per effettuare il tracking, sull'asse dell'ascensione retta.

La montatura altazimutale invece è molto semplice meccanicamente, ma per effettuare il tracking sono necessari due motori, uno per asse, data la complicazione data dalla trasformazione tra coordinate equatoriali e locali

2.2 Dinamica Celeste

Poiché ogni oggetto celeste è in moto, ovvero ha un moto proprio (o intrinseco), è possibile calcolare il vettore di questo spostamento come la variazione nel tempo della RA e della declinazione, tramite il calcolo

$$\begin{cases} \mu_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} \\ \mu_\delta = \frac{d\delta}{dt} \end{cases} \quad (2.2)$$

il modulo di questa velocità è $\mu = \sqrt{\mu_\delta^2 + \mu_\alpha \cos^2(\delta)}$.

Questi moti sono calcolati in un sistema di riferimento non rotante ancorato sul sole, con unità di misura di *arcsec* y^{-1} .

La *velocità spaziale*, è la velocità dell'oggetto rispetto al sole, è data dalla somma della velocità radiale e trasversale dell'oggetto.

$$\underline{v} = \underline{v}_r + \underline{v}_t \quad \underline{v}_t = (v_\alpha, v_\delta)$$

Se ora poniamo con d la distanza in parsec dell'oggetto dal sole e μ il moto proprio in *arcsec* y^{-1}

$$v_t \simeq 4.74\mu d$$

Le velocità radiali sono trovate sfruttando l'effetto Doppler non relativistico, dove $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$ che è valido se $\frac{v_r}{c} \ll 1$

Notiamo che $v_\delta = \mu_\delta$ e $v_\alpha = d\mu_\alpha \cos \delta$

3 Ottica Astronomica e Fotometria

3.1 Telescopi

Nell'osservazione astronomica, è necessario tener conto delle aberrazioni delle ottiche dei telescopi.

Ci sono 6 tipi di aberrazione principale, riportati in figura

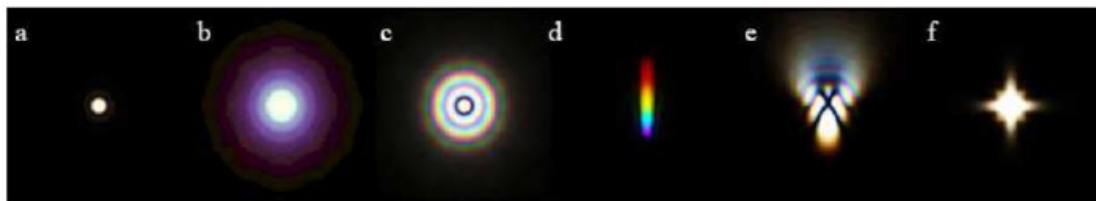
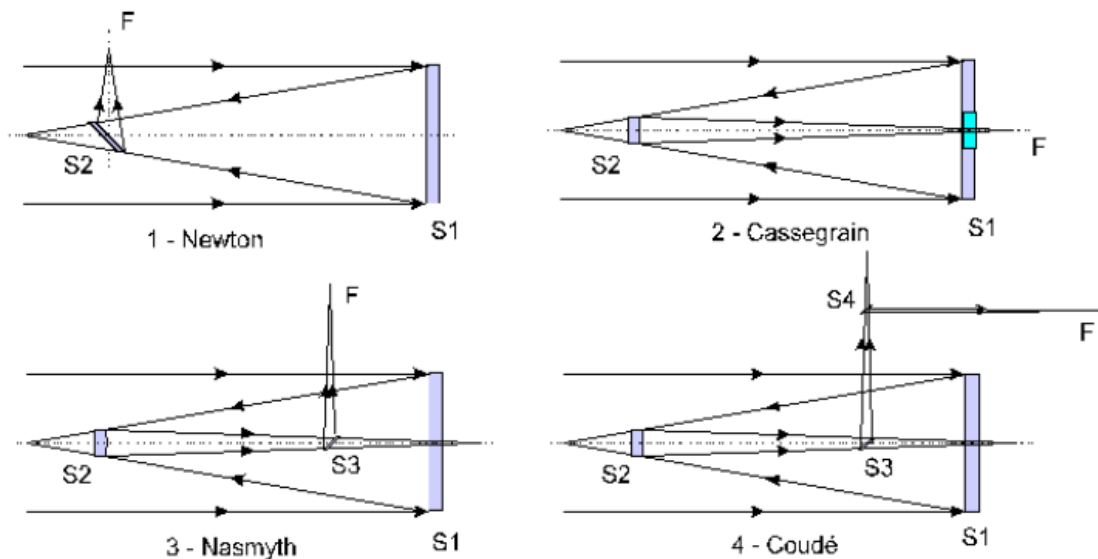


Figura 3.1: a) Nessuna aberrazione, b) Aberrazione sferica assiale, c) Aberrazione cromatica assiale, d) Aberrazione cromatica laterale, e) Coma, f) Astigmatismo assiale

Ci sono due tipi di telescopi, riflettori e rifrattori, a seconda del processo di deviazione della luce.

Per i riflettori con schema Newtoniano (il più semplice), troviamo che il telescopio Richey-Creti n-Cassegrain riduce il coma, mentre il Nasmyth ed il Coud  rimangono pi  compatti riducendo il coma.



In generale, per ogni telescopio, ci sono delle grandezze intrinseche

- Diametro
- Lunghezza focale
- Qualità dell'immagine in asse
- Qualità dell'immagine fuori asse

E delle grandezze derivate

- Dimensione dell'immagine sul piano focale
- Luminosità
- Potere risolutivo

Per lunghezza focale si intende la distanza tra lo specchio primario ed il fuoco finale del telescopio.

Il rapporto tra fuoco e diametro dello specchio primario (detto anche *apertura*) è detto rapporto focale.

$$R_f = \frac{f}{D}$$

La dimensione sul piano focale di un oggetto esteso è data da

$$\Delta y = f \tan \theta \simeq f \theta$$

Con θ l'angolo sotteso in cielo.

La Luminosità L del telescopio è inversamente proporzionale al rapporto focale R_f , ed è necessaria per determinare i tempi d'esposizione per ottenere il rapporto sound-noise desiderato.

3.1.1 Diffrazione

La luce che passa attraverso l'obiettivo del telescopio è soggetta ad un effetto di diffrazione detto disco di Airy, che provoca la visione di frange circolari attorno ad una sorgente centrale.

Tramite il criterio di Rayleigh è possibile calcolare la minima separazione teorica risolvibile da un obiettivo, con λ la lunghezza d'onda della radiazione

$$\theta_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (3.1)$$

Data questa diffrazione, l'oggetto puntiforme viene distribuito su un'area circolare, con distanza angolare θ tra il massimo ed il primo minimo della curva d'intensità. Questa funzione è nota come Point Spread Function (PSF).

3.2 Rifrazione Atmosferica, Seeing

Poiché nelle osservazioni da terra è necessario valutare anche la presenza dell'atmosfera, è necessario determinare l'indice di rifrazione della stessa, poiché la rifrazione atmosferica provoca uno spostamento angolare dell'oggetto $\delta\theta$. Ponendoci in approssimazione piano-parallela e ponendo $n = 1$ fuori atmosfera, troviamo che

$$\sin \theta = n_0 \sin \xi$$

Definendo $\delta\theta = \theta - \xi$ troviamo che

$$\sin(\delta\theta + \xi) = \sin \delta\theta \cos \xi + \cos \delta\theta \sin \xi = n_0 \sin \xi$$

Che, per piccoli angoli di rifrazione ξ si riduce a

$$\delta\theta \simeq (n_0 - 1) \tan \xi$$

Purtroppo l'atmosfera non è un mezzo ideale, quindi è necessario anche considerare la turbolenza atmosferica, che da una variazione rapidissima degli indici di rifrazione n_i atmosferici, portando ad un cambiamento casuale di $\delta\theta$ portando ad un effetto di *blurring*. Nelle ottiche moderne, su telescopi grandi, sono montate delle ottiche adattive, che deformano lo specchio molto velocemente, correggendo le perturbazioni atmosferiche sul *seeing*.

3.3 Interferometria, Array di Telescopi

Sfruttando l'esperimento di Young, è possibile ricostruire un'immagine tramite le frange d'interferenza del flusso di fotoni della sorgente.

Per due telescopi separati da una baseline B è possibile calcolare che l'intensità totale sarà

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi)$$

Dove

$$\Phi = 2\pi \frac{B \sin(\Theta)}{\lambda}$$

E se la sorgente del flusso è la stessa

$$I = 2I_0(1 + \cos(\Phi))$$

In generale, data la presenza di diffrazione otteniamo che I dipende dalla risoluzione angolare Θ tramite la relazione

$$I(\Theta) = B(\Theta) \left(I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left(2\pi \frac{B \sin(\Theta)}{\lambda} \right) \right)$$

Dove $B(\Theta)$ è la funzione di Airy.

La differenza nel campionamento tra un singolo telescopio ed un interferometro è che il telescopio singolo campiona tutte le frequenze spaziali da $\nu_s = 0$ a $\nu_s = \frac{D}{\lambda}$, mentre un interferometro campiona una frequenza spaziale $\nu_s = \frac{B}{\lambda}$ alla volta.

3.4 Fotometria

Per lo studio fotometrico di una sorgente è necessario utilizzare la Meccanica Quantistica Statistica Relativistica, poiché le particelle in studio sono i fotoni γ , particelle ultrarelativistiche.

Notiamo che per il principio di Heisenberg, il volume di una singola particella nello spazio delle fasi è $8\pi^3 \hbar^3$, quindi, il numero di particelle in un elemento $d\tau$ sarà

$$d\tau = \frac{g}{8\pi^3 \hbar^3} d^3p dV$$

Con g la degenerazione dello stato.

Sia $f(p)d^3p$ la pdf del numero di particelle, allora troviamo che il numero totale di particelle è

$$n = \frac{g}{8\pi^3 \hbar^3} \iint_{\Gamma^{2n}} f(p) d\tau = \frac{gV}{8\pi^3 \hbar^3} \int_0^\infty f(p) d^3p \quad (3.2)$$

La funzione $f(p)$ è la distribuzione data da

$$f(p) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{kT}} \pm 1} \quad (3.3)$$

Con μ potenziale chimico ed ϵ energia della particella.

Per i Fermioni utilizzeremo il segno $+$ e per i Bosoni il segno $-$.

Ricordiamo che in meccanica relativistica l'energia di una particella si scrive come

$$\epsilon = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Che, per particelle ultrarelativistiche come i fotoni si riduce a $\epsilon = pc$, per gli elettroni o i positroni, quest'approssimazione è valida se e solo se si trovano in un sistema con

temperature $T > 10^{10} K$.

Notando che $d^3p = 4\pi^2 p^2 dp$ è possibile trasformare l'integrale precedente (valutando un volume unitario)

$$n = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{kT}} \pm 1} dp$$

Per una particella relativistica qualsiasi $\epsilon = pc$, la densità di energia \mathcal{U} sarà

$$\mathcal{U} = \frac{gc}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^3}{e^{\frac{pc - \mu}{kT}} \pm 1} dp \quad (3.4)$$

Nel caso che le particelle considerate siano fotoni abbiamo che $\epsilon = h\nu$, $p = \frac{h\nu}{c}$, $\mu = 0$, $g = 2$.

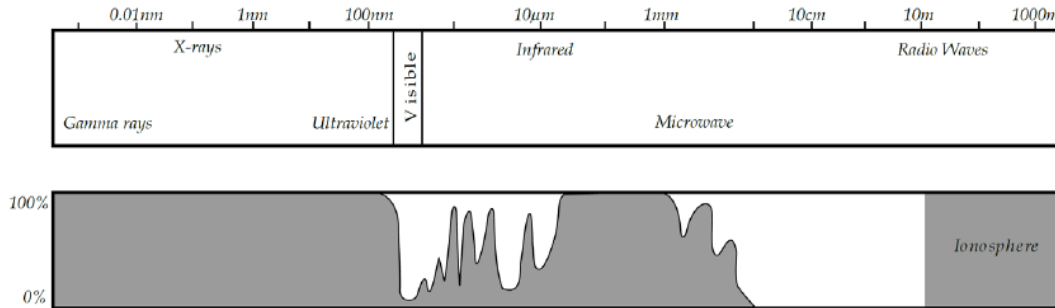
Effettuando la sostituzione $x = \frac{pc}{kT} = \frac{h\nu}{kT}$ abbiamo

$$\mathcal{U} = \frac{k^4 T^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

L'ultimo integrale converge a $\frac{\pi^4}{15}$, e sostituendolo nella formula troviamo che

$$\mathcal{U} = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4 = aT^4 \quad (3.5)$$

Dato che l'atmosfera non fa passare tutte le frequenze dei fotoni, ci sono degli intervalli di lunghezze d'onda λ che hanno un assorbimento parziale o totale dei fotoni da sorgenti extraterrestri, è riportata un immagine esemplificativa di sotto



Dalla formula per la densità di energia calcolata prima, è possibile effettuare una sostituzione per poter trovare lo spettro teorico dei fotoni.

Ricordando che

$$\begin{cases} dp = \frac{h}{c} d\nu \\ g = 2 \end{cases}$$

La densità di particelle sarà data allora da

$$n_\nu d\nu = \frac{c}{\pi^2 \hbar^3} \frac{p^2}{e^{\frac{pc}{kT}} - 1}$$

$$n_\nu d\nu = \frac{8\pi^3 c}{\pi^2 h^3} \frac{\frac{h^3 \nu^2}{c^3} d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Moltiplicando per ϵ_γ otteniamo poi la densità di energia specifica dei fotoni come ricercato

$$\mathcal{U}_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (3.6)$$

Esaminando il caso di una radiazione termica emessa da una sorgente generica incidente su un piano, possiamo calcolare i vari parametri descrittivi della stessa.

Il primo parametro utile è l'*intensità*, cioè l'energia che attraversa A per unità di tempo, superficie ed angolo solido.

Valutando i fotoni a frequenze ν , $\nu + d\nu$ troviamo che, l'intensità specifica è

$$I_\nu = \frac{dE}{cdtd\Omega \cos \theta dA} \quad (3.7)$$

E l'intensità totale su tutto lo spettro, detta *bolometrica*

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu \quad (3.8)$$

Quindi, supponendo una sorgente di corpo nero, possiamo dedurre che la densità d'energia specifica sarà

$$\mathcal{U}_\nu = \int_\Omega \frac{I_\nu}{c} d\Omega = 4\pi \frac{I_\nu}{c} \quad (3.9)$$

Combinando le equazioni 3.6 e 3.9 e ricordando che la sorgente è un corpo nero, troviamo che l'intensità specifica sarà data dalla distribuzione di Planck

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (3.10)$$

E, ricordando che $\nu = \frac{c}{\lambda}$

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} \quad (3.11)$$

Dalla definizione di spettro bolometrico, troviamo che integrando su tutto \mathbb{R}^+ il risultato dell'integrazione di 3.10 e 3.11 è uguale, e lo indicheremo con B

La linea dei massimi degli spettri $B_\lambda(T)$ si può trovare tramite la legge di Wien

$$\lambda_{max} T = 0.290 \text{ cm K} \quad (3.12)$$

Tramite questa semplice relazione lineare è possibile calcolare i massimi dello spettro di vari oggetti astrofisici, ad esempio, il massimo dell'emissione Solare (a 5800 K si avrà

a 5000 corrispondente alla luce verde, invece una nube molecolare a 500 K avrà un massimo nell'infrarosso termico, a 60000 .

Integrando l'equazione 3.10, otteniamo che l'intensità bolometrica B sarà data dall'equazione

$$B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

E ricordando che

$$\mathcal{U} = aT^4 = \frac{4\pi B}{c}$$

Troviamo che

$$B = \frac{ac}{4\pi} T^4$$

Sostituendo $a = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3}$ troviamo infine

$$B = \frac{\pi k^4}{60\hbar^3 c^2} T^4 \quad (3.13)$$

Dove $\frac{\pi k^4}{60\hbar^3 c^2} = \frac{\sigma}{\pi}$, che è la costante di Stefan-Boltzmann.

Integrando su tutto l'angolo solido la 3.13, risulta che la potenza totale per unità di superficie è

$$\int_{\Omega} B \cos \theta d\Omega = \pi B = \sigma T^4$$

La luminosità bolometrica, infine, sarà data da

$$\mathcal{L} = S\sigma T^4$$

Ricordiamo che la magnitudine apparente (bolometrica) m è data da $m = cost - 2.5 \log(F)$, e che in generale il flusso integrato dipende dall'efficienza del telescopio (S_ν) e dall'efficienza quantica della CCD (η_ν)

$$F = \int_{\mathbb{R}^+} S_\nu \eta_\nu F_\nu d\nu$$

Per poter ottenere flussi solo entro un certo intervallo di lunghezze d'onda, è utile l'utilizzo di filtri passabanda. Nel *sistema fotometrico standard* il sistema di filtri più utilizzato è quello del sistema Johnson-Cousins, che dividono parte dello spettro elettromagnetico in 5 bande: U,B,V,R,I.

La costante che ritroviamo nel calcolo della magnitudine, detta punto zero, è calcolata in modo che siano 0 le magnitudini U,B,V,R,I di una stella ideale, ottenuta dalla media di flussi di un campo di stelle con la categoria spettrale AV0.

Altri sistemi utilizzano la stella più brillante della categoria AV0, Vega.

È possibile adattare i filtri a seconda della tipologia di lavoro che uno strumento di misura deve effettuare, e grazie a questa generalizzazione, è possibile aggiungere altre bande nell'infrarosso (IR), queste vengono date dal sistema 2MASS JHK, e le bande sono J,H,K,L,M,Q.

3.4.1 Colore

Grazie all'utilizzo dei filtri, è possibile calcolare la magnitudine in una data banda, ed è quindi possibile trovare i così detti *indici di colore*.

Prendendo come esempio la banda B e la banda V (luce blu e visibile), abbiamo la formula per l'indice di colore $B - V$

$$B - V = m_B - m_V = M_B - M_V \quad (3.14)$$

Ricordando che la magnitudine scala inversamente al flusso, abbiamo che un indice $B - V$ alto implica un flusso maggiore nella banda V rispetto alla B e viceversa. La formula è di facile generalizzazione alle altre bande.

Questi indici sono strettamente connessi alla temperatura superficiale effettiva della stella, cioè la temperatura di un corpo nero alla stessa temperatura media della stella.

Ricordando la legge di Stefan-Boltzmann, la relazione tra luminosità e potenza e luminosità e flusso, troviamo che

$$F = \frac{\mathcal{L}}{4\pi d^2} = \frac{R^2 \sigma T_e^4}{d^2} \quad (3.15)$$

Dove R è il raggio stellare, T_e la temperatura equivalente di corpo nero e d la distanza. Riprendendo l'equazione ??, sostituendo la definizione di magnitudine e approssimando il flusso misurato a quello di un corpo nero, otteniamo che

$$B - V = -2.5 \log \left(\frac{B_B}{B_V} \right) = f(T) \quad (3.16)$$

Dove $f(T)$ è una funzione della sola temperatura. Disegnando un grafico in scala logaritmica con le misurazioni dell'indice di colore sull'ascissa e la luminosità in ordinata, otteniamo il *Diagramma Colore-Magnitudine*, che è una variante del diagramma di Hertzsprung-Russel

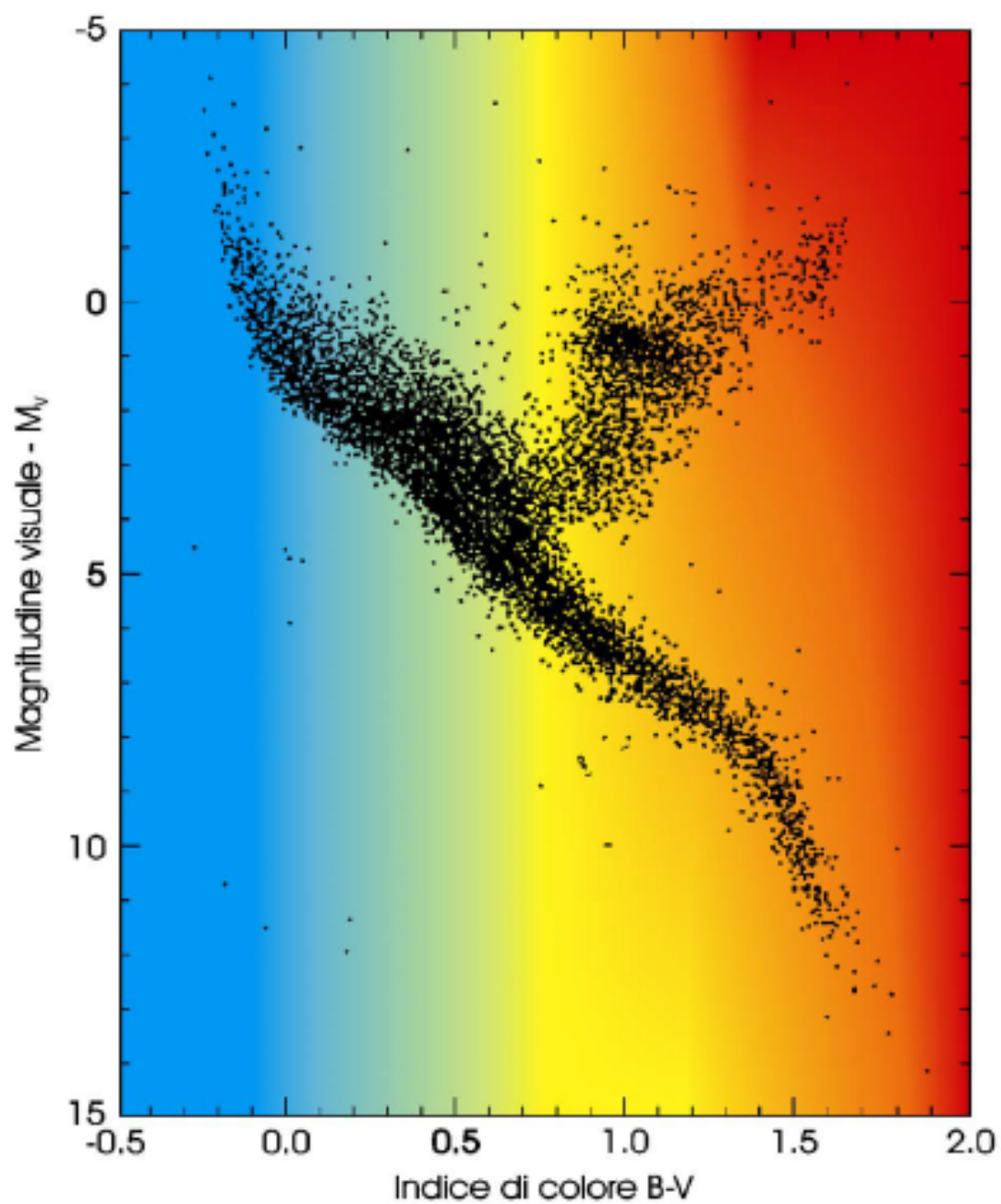


Figura 3.2: Diagramma Colore-Magnitudine, le distanze sono state misurate da Hipparcos

Tramite l'utilizzo invece, di diagrammi del tipo Colore-Colore, è possibile determinare

l'assorbimento interstellare e l'arrossamento, tramite la formula

$$B - V = (B - V)_0 + E(B - V)$$

Con $B - V$ il colore misurato, $(B - V)_0$ il colore senza arrossamento e $E(B - V)$ l'arrossamento

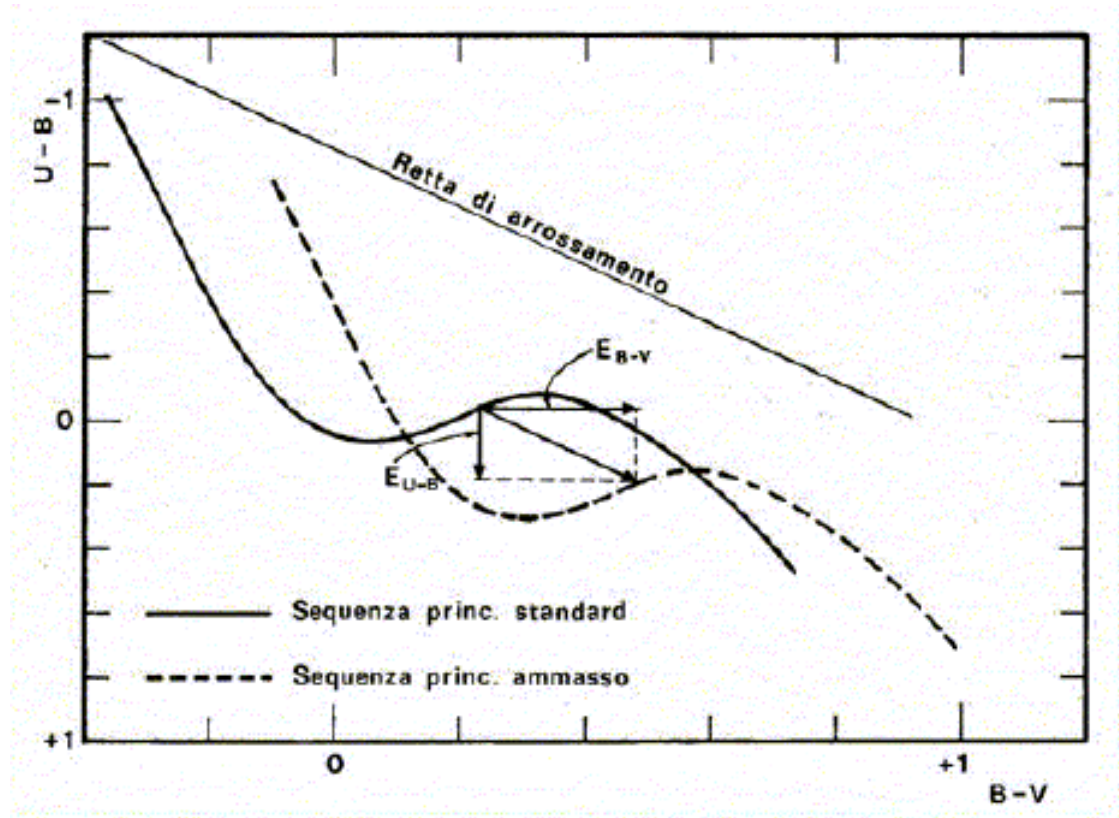


Figura 3.3: Diagramma Colore-Colore

4 Spettri Stellari

Le stelle possono essere approssimate come dei corpi neri, circondati da un'atmosfera otticamente sottile, detta fotosfera.

La radiazione di corpo nero passante attraverso questo strato (sottile, rispetto alla stella), viene modificata dalle molecole presenti, tramite l'assorbimento dei fotoni in arrivo dalle zone più interne. In alcuni casi particolari è altresì presente l'emissione di fotoni.

4.1 Righe Spettrali

Lo spettro di una stella generica può essere costellato di righe di assorbimento o di emissione.

Queste righe sono date dal comportamento quantistico degli atomi, che assorbono o emettono un fotone con energia uguale alla differenza di energia tra il livello d'energia iniziale e finale a cui passa l'elettrone. Poichè i livelli energetici sono ben determinati e distinti per ogni atomo, è possibile determinare l'elemento che ha assorbito o emesso questo fotone, e determinare poi se sia eccitato o meno. In notazione spettroscopica, si indica con I l'elemento neutro, e con i successivi numeri romani i diversi livelli di ionizzazione.

Le righe spettrali sono caratterizzate da tre fattori principali

1. Lunghezza d'onda centrale
2. Larghezza della riga
3. Strength.

Lunghezza d'Onda Centrale

Prendendo come esempio l'Idrogeno, è possibile calcolare la frequenza centrale della riga di emissione (o assorbimento) tramite la semplice considerazione che $E_\gamma = h\nu$.

Ponendo come E la differenza di energia tra i due livelli, quindi troviamo

$$\nu = E_{n+1} - E_n$$

Dove n è il numero quantico principale.

Per motivi di ragione storica, le prime righe d'assorbimento dell'idrogeno prendono il nome di chi è stato il primo ad osservarle.

In particolare, la serie di righe d'assorbimento che vanno da $n = 2$ a $n = 4$ sono dette *righe di Balmer*, e sono indicate con le prime 4 lettere dell'alfabeto greco.

Tra le altre serie di righe spesso ritrovate in campo astronomico troviamo la *serie di Lyman* e la *serie di Paschen*.

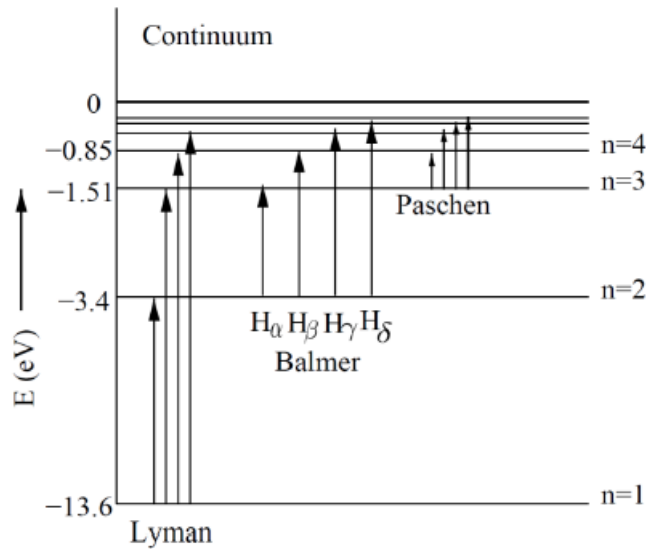


Figura 4.1: Schema delle prime tre serie di righe per l'atomo d'idrogeno

Larghezza e Strength

La larghezza della riga è indicata con Γ e si trova misurando a mezz'altezza la larghezza della riga spettrale.

È possibile definire successivamente la larghezza equivalente W , calcolabile in questo modo

$$W = \int_0^\infty f(\nu) d\nu$$

$$\frac{F(\nu)}{B(\nu)} = 1 \pm f(\nu)$$

Il segno di $f(\nu)$ è determinato a seconda che la riga sia d'emissione (+1) o d'assorbimento (-1).

Approssimando il profilo della riga con una distribuzione Lorentziana sulle frequenze

$L(\nu)$, è possibile determinare $f(\nu)$ da W

$$f(\nu) = WL(\nu)$$

$$L(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)}{(\nu - \nu_c)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

Lo spread Lorentziano delle righe d'emissione è spiegato dal principio d'indeterminazione sull'energia, infatti

$$\Delta E \Delta t = \hbar$$

Data la natura energetica della temperatura, anche l'effetto doppler dato dall'agitazione termica molecolare contribuisce all'allargamento (o rimpicciolimento) delle righe.

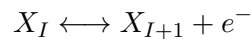
4.2 Interpretazione degli Spettri

Per poter interpretare gli spettri stellari, è necessario essere a conoscenza dello stato di ionizzazione e della popolazione dei livelli, ad esempio, nelle atmosfere stellari ricche d'idrogeno, le righe di Balmer sono visibili solo nel caso che vi siano presenti atomi eccitati al livello $n = 2$

4.2.1 Equazione di Saha

L'equazione di Saha ci permette di determinare la popolazione dei diversi stati di ionizzazione. Nel caso di un'atmosfera in equilibrio termodinamico locale è possibile considerare lo stato di ionizzazione e lo stato successivo di un certo elemento X .

Le popolazioni X_I e X_{I+1} saranno legate dall'equazione



Dove gli e^- nel membro di destra sono gli elettroni liberati nella ionizzazione

Prendendo la densità numerica di particelle $n = \frac{g}{2\pi\hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1} dp$ e considerando il

limite classico per $e^{\frac{E-\mu}{kT}} \gg 1$ ritroviamo l'equazione di Maxwell-Boltzmann.

Ponendo un'energia relativistica, abbiamo

$$E = \sqrt{\frac{p^2}{2m} + m_e^2 c^4}$$

Ed integrando n otteniamo la densità per gli elettroni liberi n_e

$$n_e = 2e^{\frac{\mu_e}{kT}} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_e c^2}{kT}}$$

Assumendo che tutti gli elettroni nei diversi stati eccitati seguano una distribuzione di Maxwell-Boltzmann è possibile calcolare il rapporto di densità numeriche di elettroni nei diversi stati, dove g_i è la degenerazione del livello considerato

$$\frac{n_{Ij}}{n_{I1}} = \frac{g_{Ij}}{g_{I1}} e^{-\frac{E_{Ij}-E_{I1}}{kT}}$$

La densità totale sarà quindi

$$n_I = \sum_{j=1}^{\infty} n_{Ij} = \frac{n_{I1}}{g_{I1}} Z_I(T)$$

Dove con $Z(T)$ sono state indicate le funzioni di partizione

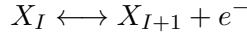
$$Z_I = g_1 + \sum_{\alpha=2}^{\infty} g_{\alpha} e^{-\frac{E_{\alpha}-E_1}{kT}}$$

Ponendo $E_I = \frac{p^2}{2m_I} + m_I c^2$ otteniamo infine, per gli elettroni

$$n_I = Z_I(T) e^{\frac{\mu_I}{kT}} \left(\frac{2\pi m_I kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_I c^2}{kT}}$$

$$n_{I+1} = Z_{I+1}(T) e^{\frac{\mu_{I+1}}{kT}} \left(\frac{2\pi m_{I+1} kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_{I+1} c^2}{kT}}$$

Quindi, per una reazione del tipo



Dove è supposto un equilibrio termodinamico locale

$$\begin{cases} \mu_I = \mu_{I+1} + \mu_e \\ m_I = m_{I+1} + m_e - \frac{\chi_I}{c^2} \end{cases}$$

Con χ_I il potenziale di ionizzazione, si ottiene l'*equazione di Saha* per i rapporti tra un livello di ionizzazione ed il suo successivo

$$\frac{n_{I+1}}{n_I} = e^{-\frac{\mu_e}{kT}} \frac{Z_{I+1}(T)}{Z_I(T)} e^{\frac{(m_I - m_{I+1})c^2}{kT}} \quad (4.1)$$

4.3 Classificazione Stellare

Un primo tentativo di classificazione di questi spettri è stato fatto da Padre Secchi nel XIX secolo, che divise le stelle in 4 categorie principali

- Tipo 1, per le stelle Blu-Bianche (e.g. Sirio)
Sottotipo 1 Orionis, per le stelle di tipo 1 con bande strette

- Tipo 2, per le stelle Gialle-Arancioni (e.g. Sol, Capella, Procione, Arturo, Aldebaran)
- Tipo 3, per le stelle con spettri a banda larga (e.g. Betelgeuse)
- Tipo 4, per le stelle Rosse-Scure con bande del carbonio
- Tipo 5, per le stelle con linee d'emissione (e.g. Sheliak)

Successivamente, un gruppo di ricerca di Harvard nei primi anni del '900, ha definito la classificazione spettrale utilizzata dagli astrofisici moderni, la cosiddetta *classificazione di Harvard*.

La classificazione segue l'ordine **O, B, A, F, G, K, M** e, ad ogni lettera, corrispondono stelle con una morfologia spettrale differente.

La classificazione base di Harvard è data dalla seguente tabella

Classe	Caratteristiche Spettrali	Colore	Temperatura
O	HeI, HeII, weak H	Blu	$T > 31000\text{ K}$
B	HeI, H	Blu-Bianco	$9570\text{ K} < T < 31000\text{ K}$
A	H, metalli ion	Bianco	$7100\text{ K} < T < 9750\text{ K}$
F	weak H, metalli ion	Giallo-Bianco	$5950\text{ K} < T < 7100\text{ K}$
G	weak H, metalli ion e non	Giallo	$5250\text{ K} < T < 5950\text{ K}$
K	weak H, metalli	Arancione	$3950\text{ K} < T < 5250\text{ K}$
M	metalli, molecole	Rosso	$2000\text{ K} < T < 3950\text{ K}$

Una versione aggiornata della classificazione di Harvard è quella di Harvard-Yerkes, che tiene conto delle differenze spettrali e aggiunge tre classi stellari.

Classe	Tipologia di Stella	Caratteristiche Spettrali	Temperatura
O	//	HeI, HeII, weak H	$T > 31000\text{ K}$
B	//	HeI, H	$9570\text{ K} < T < 31000\text{ K}$
/W (C-N-O)	Wolf Rayet Slash	HeI, HeII, H, emissione	$T > 9570\text{ K}$
A	//	H, metalli ion	$7100\text{ K} < T < 9750\text{ K}$
F	//	weak H, metalli ion	$5950\text{ K} < T < 7100\text{ K}$
G	//	weak H, metalli ion e non	$5250\text{ K} < T < 5950\text{ K}$
K	//	weak H, metalli	$3950\text{ K} < T < 5250\text{ K}$
M	//	metalli, molecole	$2000\text{ K} < T < 3950\text{ K}$
L	Nana Rossa	Metalli, Metalli alcalini	$1500\text{ K} < T < 2000\text{ K}$
T	Nana Bruna	Bande del Metano	$550\text{ K} < T < 1500\text{ K}$
Y	Subnana Bruna	Bande dell'Ammoniaca	$250\text{ K} < T < 550\text{ K}$
W (C-N-O)	Wolf Rayet	Presenza di Emissione	//
C	Stella di Carbonio	Bande del ^{12}CN e ^{13}CN	//
S	Stella di Zirconio	Bande del ZrO	//
D	Nana Bianca	//	//

Codice	Peculiarità
P	Nana Bianca magnetica con polarizzazione dello spettro
E	Linee d'emissione
H	Nana Bianca magnetica senza polarizzazione
V	Variabile
PEC	Peculiarità spettrali

Accanto alla classificazione di Harvard-Yerkes, si aggiunge la classificazione MKK, che tiene conto dello stadio evolutivo della stella

Codice	Tipologia	Esempio
Ia ⁺ oppure 0	Ipergiganti	Cygnus OB2#12
Ia	Supergiganti luminose	η CMa
Iab	Supergiganti mediamente luminose	γ Cyg
Ib	Supergiganti	ζ Per
II	Giganti luminose	β Lep
III	Giganti	Acturus
IV	Subgiganti	γ Cas
V	Sequenza principale	Achenar
sd-	Subnane	HD 149382
D-	Nane Bianche	Van Maanen 2

Le particolarità spettrali sono poi riassunte in una seconda tabella

Codice	Peculiarità
:	valore spettrale non chiaro
...	peculiarità non specificate
!	peculiarità speciali
comp	spettro composito
e	presenza di linee d'emissione
[e]	presenza di linee d'emissione non permesse
er	presenza di un centro d'emissione inverso
eq	profilo di emissione del tipo P-Cygni
f	linee di emissione di NIII e HeII
f*	linee di emissione $\lambda_{NIV} > \lambda_{NIII}$
f+	linee di emissione SiIV e NIII
(f)	linee di emissione NIII con linee HeII deboli o assenti
(f+)	
((f))	forti linee di emissione del HeII, linee di emissione del NIII deboli o assenti
((f*))	
h	stella di Wolf Rayet con linee di emissione dell'H
ha	stella di Wolf Rayet con linee di emissione ed assorbimento dell'H
He wk	linee d'emissione dell'He deboli
k	assorbimento interstellare
m	caratteristiche metalliche nello spettro
n	assorbimento nebuloso
nn	assorbimento diffuso
neb	spettro di una nebulosa misto allo spettro stellare
p	peculiarità non specificata
pq	spettro peculiare (i.e. Nova)
q	presenza di linee di redshift e blueshift
s	linee di assorbimento nitide e strette
ss	linee di assorbimento nitide e strettissime
sh	spettro di una shell star (presenti polveri in orbita)
var or v	stella variabile
wl or wk or w	linee di assorbimento o emissione deboli
[Elemento]	assorbimento anormale dato dall'elemento in questione

Nella classificazione di Harvard ed Harvard-Yerkes MKK, sono presenti 9 sottoclassi indicate con un numero da 0 a 9, relazionate alla temperatura superficiale della stella. Maggiore è il numero della classe, minore è la temperatura superficiale, ad esempio, una stella di tipo O0 è una stella con temperatura superficiale con $T_e \geq 3500$ K.

I valori di massa, raggio e temperatura si possono ricavare facilmente dall'equazione di Stefan-Boltzmann e dalla *relazione di massa-luminosità* (per stelle di sequenza principale)

$$\mathcal{L} = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$$

$$\mathcal{L} \propto M^{3.5}$$

Nel caso di stelle evolute, la relazione massa-luminosità cambia molto rapidamente, e la relazione precedente non è più valida.

4.3.1 Righe Molecolari e Stati Roto-Vibrazionali

Nelle stelle più fredde, a seconda della composizione, è possibile la formazione di molecole, che presentano righe di assorbimento ed emissione relative all'eccitazione o alla diseccitazione di stati elettronici, dovuti a moti rotovibrazionali quantizzati.

Un esempio comune è dato da una molecola biatomica come il CO, che può essere pensata come un oscillatore armonico in rotazione attorno al baricentro. Gli stati vibrazionali dipendono dal numero quantico n , mentre quelli rotazionali dipendono dal momento angolare totale del sistema. Le righe corrispondenti si trovano nell'IR medio.

4.3.2 Legge di Salpeter

La funzione di distribuzione delle masse stellari segue una legge di potenza, data dalla *legge di Salpeter*

$$\frac{dN}{dM} \propto M^{-\alpha} \quad \alpha \approx 2.3$$

Tempo Scala e Relazione Massa-Luminosità

Per le stelle di sequenza principale la relazione massa-luminosità è non lineare, ed è data da

$$\mathcal{L} \propto M^\beta \quad 3 < \beta < 4$$

Il tempo scala evolutivo sarà invece dato da

$$\tau \frac{\epsilon M Q}{\mathcal{L}} \propto M^{-\beta+1}$$

Dove $Q = 26 \frac{\text{MeV} N_a}{4}$ è l'energia prodotta nella fusione di 1 g di Idrogeno in Elio, ed ϵ è la frazione di Idrogeno bruciata durante la main sequence ($\sim 10\%$ della massa totale)

5 Modello Standard Stellare

Il modello matematico più basico possibile di una stella è dato dallo studio di un oggetto in simmetria sferica, autogravitante in equilibrio termico e dinamico.

Le equazioni sono date dall'equilibrio idrostatico, dalla continuità della massa, dalla conduzione e dalla convezione e dalla conservazione dell'energia. Il modello idrostatico monodimensionale sarà quindi

$$\begin{cases} \frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \\ \frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \\ \frac{dT}{dM_r} = -\nabla \frac{GM_r T}{4\pi r^4 P} \\ \frac{d\mathcal{L}_r}{dM_r} = \epsilon_{grav} + \epsilon_{nuc} + \epsilon_\nu \end{cases} \quad (5.1)$$

5.1 Equilibrio Stellare

Per derivare l'equazione dell'equilibrio idrostatico si deriva considerando la differenza di pressione ad un raggio r ed ad un raggio $r + dr$, si ha che

$$dP = P(r + dr) - P(r)$$

La forza risultante della pressione del gas sarà quindi AdP , e dalla legge di Newton della gravitazione universale otteniamo

$$F_g = -\frac{GM(r)}{r^2}dm = -\frac{GM(r)\rho(r)A}{r^2}dr$$

All'equilibrio le forze devono essere equilibrate, quindi, ne consegue che

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

La massa contenuta in una shell sferica spessa dr invece sarà

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Integrando il tutto, otteniamo che la massa all'interno di una shell sferica di raggio r è

$$M(r) = M_r = 4\pi \int_0^r \rho(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r}$$

Moltiplicando l'equazione dell'equilibrio idrostatico per $4\pi r^3$ ed integrando su tutto il raggio della stella otteniamo

$$4\pi \int_0^R \frac{dP}{dr} r^3 dr = -4\pi \int_0^R \frac{GM(r)\rho(r)}{r} r^2 dr$$

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr = \rho dV$$

$$dV(r) = 4\pi r^2 dr$$

Integrando per parti il primo lato della prima equazione otteniamo

$$4\pi \int_0^R \frac{dP}{dr} r^3 dr = 4\pi r^3 P \Big|_0^R - 3 \int_0^R 4\pi P r^2 dr = -3 \int_0^V P dV$$

Il lato destro dell'equazione, dopo aver sostituito, diventa

$$- \int_0^M \frac{GM(r)}{r} dM(r) = \Omega_g$$

Dove Ω_g è l'energia gravitazionale. Riunendo le due equazioni otteniamo infine

$$-3 \int_0^V P dV = \Omega_g$$

Per ricavare un'espressione analitica per la pressione è utile passare dalla teoria cinetica dei gas, infatti, se poniamo ϵ_k l'energia cinetica del gas, abbiamo

$$\epsilon_k = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} \frac{N_a}{\mu} k T$$

Supponendo che valga la legge dei gas perfetti non relativistici otteniamo

$$PV = N k T$$

$$\frac{P}{\rho} = \frac{N_a}{\mu} k T$$

$$\epsilon_k = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho}$$

Sostituendo un'altra volta nel lato sinistro dell'equazione dell'equilibrio idrostatico otteniamo

$$\begin{aligned} -3 \int_0^V P dV &= -2 \int_0^M \epsilon_k dM = -2E_i = -\Omega_g \\ 2E_i + \Omega_g &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Che è la definizione del teorema del Viriale.

Nel caso generale, ponendo $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho} &= (\gamma - 1)\epsilon_k \\ 3(\gamma - 1)E_i + \Omega_g &= 0 \end{aligned}$$

Per un gas perfetto monoatomico $\gamma = \frac{5}{3}$ e l'equazione si riduce a quella ritrovata precedentemente, al contrario, per un gas relativistico si ha $\gamma = \frac{4}{3}$.

L'energia totale sarà

$$W = E_i + \Omega_g = -\frac{\Omega_g}{3(\gamma - 1)} + \Omega_g = \frac{3\gamma - 4}{3\gamma - 3}\Omega_g$$

La struttura sarà stabile per $\gamma > \frac{4}{3}$ ed $W < 0$.

Poiché le stelle irradiano energia elettromagnetica dalla superficie, abbiamo che per la conservazione dell'energia

$$\mathcal{L} = -\frac{dW}{dt} = -\frac{3\gamma - 4}{3\gamma - 3} \frac{d\Omega_g}{dt}$$

Se $\gamma = \frac{5}{3}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{d\Omega_g}{dt}$$

5.2 Tempo Scala di Kevin-Hemholtz

Scrivendo l'energia gravitazionale in forma integrale abbiamo

$$\Omega_g = \int_0^{M_t} \frac{GM(r)}{r} dM = q \frac{GM_t^2}{R}$$

Dove q è un fattore che vale circa 1 per le stelle di sequenza principale e per i core stellari. IL tempo scala di contrazione gravitazionale, anche detto tempo scala termico, è dato da

$$\tau_{KH} = \frac{GM^2}{R\mathcal{L}}$$

Questo tempo indica il tempo di vita di una stella con raggio R e massa M con luminosità \mathcal{L} nel caso che l'unica energia disponibile fosse quella gravitazionale. Per una stella simile al sole il tempo risulta dell'ordine di $10^7 \sim 10^8$ y ed è molto minore rispetto al lifetime effettivo della stella. Infatti, è necessario aggiungere la fusione nucleare come

fonte d'energia della stella.

Ricordando la relazione massa-luminosità otteniamo che il *tempo scala nucleare* sarà dato da

$$\tau_{nuc} = \frac{\epsilon M Q}{\mathcal{L}} \propto M^{-3}$$

6

Collasso Gravitazionale

Introducendo il collasso gravitazionale di un oggetto, è necessario definire un ulteriore tempo di scala, il così detto tempo di scala dinamico o di free fall, indicato con τ_{ff} . Questo indica il tempo impiegato da una perturbazione alla velocità del suono per attraversare un oggetto di raggio R .

Scrivendo la velocità del suono c_s e dividendo il raggio R per essa otteniamo

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \longrightarrow t = \frac{R}{c_s} \approx \sqrt{\frac{\rho}{P}} R \quad (6.1)$$

Dall'equazione dell'equilibrio idrostatico troviamo inoltre

$$\frac{GM}{r^2} \rho = -\frac{dP}{dr} \approx -\frac{P_c - P_s}{r_c - r_s} \approx \frac{P}{R} \rightarrow \frac{P}{\rho} \approx \frac{GM}{R} \quad (6.2)$$

Sostituendo nell'equazione (6.1) troviamo infine

$$\tau_{ff} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \sqrt{\frac{1}{G \langle \rho \rangle}} \quad (6.3)$$

Inserendo i valori medi è facile notare che τ_{ff} è decisamente più piccolo del tempo di Kevin-Helmholtz e del tempo di scala nucleare, ergo vale la relazione

$$\tau_{ff} \ll \tau_{KH} \ll \tau_{nuc}$$

Questa relazione ci permette di distinguere 3 fasi nell'evoluzione stellare, ognuna governata da tempi di scala differenti:

1. Fase Dinamica: Una nube molecolare collassa, si forma una protostella. Il tempo di scala è τ_{ff}
2. Fase Termica: La protostella evolve in uno stato d'equilibrio idrostatico e termodinamico. Il tempo scala è τ_{KH}
3. Fase Nucleare: Cominciano le reazioni nucleari nel nucleo della nuova stella, che si installa nella sequenza principale. Il tempo scala è τ_{nuc}

6.1 Nubi Molecolari e Parametri di Jeans

Considerando una nube di gas uniforme di massa M , raggio totale R , Temperatura T e densità ρ uniformi.

L'energia potenziale gravitazionale è

$$E_g = \int_0^R 4\pi r^2 \frac{GM(r)}{r} \rho dr = \int_0^M \frac{GM(r)}{r} dM = q \frac{GM^2}{R} \quad (6.4)$$

Assumendo che valga l'equazione di stato dei gas perfetti, si ha

$$E_i = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} \frac{M N_a k_B T}{\mu} \quad (6.5)$$

Dove N è il numero totale di particelle, e N_a il numero di Avogadro.

La condizione per l'instabilità della nube è relazionata a queste due energie.

La relazione che governa questo bilancio d'energia è

$$E_i < E_g \longrightarrow \frac{M N_a k_B T}{\mu} < \frac{GM^2}{R} \quad (6.6)$$

Poiché $\rho \approx M/R^3$ si ottengono i *parametri di Jeans per l'instabilità*

$$\begin{cases} M > \left(\frac{N_a k_B}{\mu G} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{T^3}{\rho}} = M_J \\ R > \sqrt{\frac{N_a k_B T}{\mu \rho G}} = R_J \end{cases} \quad (6.7)$$

Considerando le regioni di formazione stellare, si osserva la presenza di zone con densità alte. Quando la loro massa (o il loro raggio) superano il valore critico di Jeans, collassano con un τ_{ff} medio di 2 Myr. Durante il collasso la temperatura rimane costante, anche se la densità aumenta, diminuendo la massa di Jeans, inducendo una frammentazione della nube che terminerà solo quando la materia diventa otticamente spessa, ergo si sono formate delle protostelle, che continuano ad evolversi per accrescimento del gas residuo. Le prime generazioni di stelle, essendo particolarmente massicce, si evolvono in fretta, terminando la loro vita in supernovae core collapse (SNe), la cui onda d'urto comprime il gas circostante, inducendo ulteriori collassi, che porteranno alla formazione di nuove stelle.

7

Astrofisica Nucleare

Le reazioni nucleari sono un concetto fondamentale in astrofisica, infatti sono ciò che permette alle stelle di contrastare la forza gravitazionale, permettono l'esistenza delle supernovae/novae ed LMXR, e sono l'origine degli elementi pesanti presenti nell'Universo. Osservando il grafico dell'abbondanza isotopica degli elementi nell'Universo, possiamo distinguere due parti principali, una di elementi leggeri (H, He, Li) creati durante una nucleosintesi primordiale, e gli elementi creati nei nuclei stellari e durante le supernovae, come gli elementi dal C al Au.

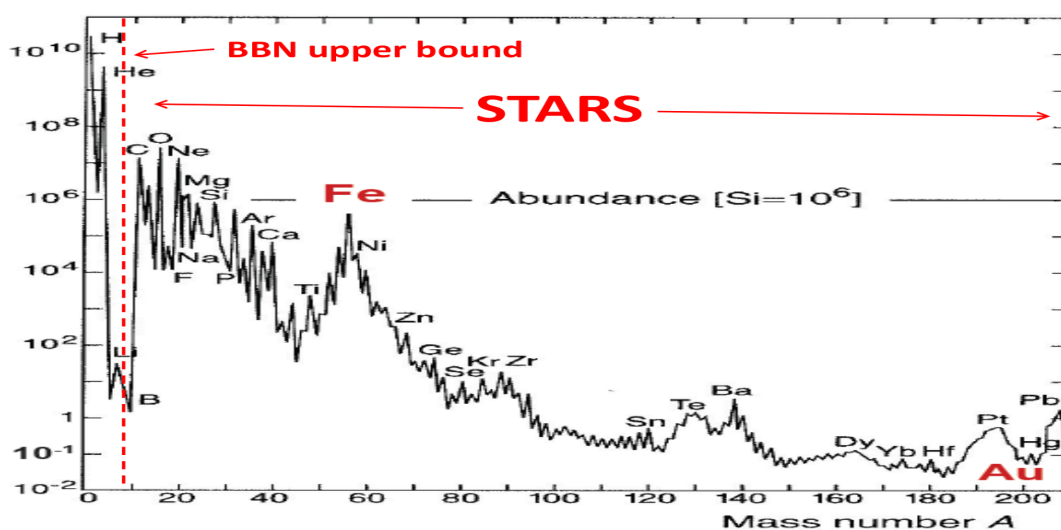


Figura 7.1: Abbondanza isotopica degli elementi della tavola periodica

Tutti gli elementi prima del ferro possono essere prodotti nei nuclei delle stelle della main sequence, mentre i nuclei più pesanti sono prodotti nelle supernovae con *s-processes* e *r-processes*.

L'esistenza di questi processi di fusione nucleare è giustificata dal fatto che la massa del nucleo, è minore rispetto alla somma delle masse, data data l'energia di legame. Questo permette di avere dell'energia in eccesso, rendendo quindi energeticamente utile questo

processo. In formule

$$E_{bind} = \Delta E = \Delta M_N c^2 = (M_N - Zm_p - Nm_n) c^2 \quad (7.1)$$

Effettuando i calcoli sperimentali per il calcolo della binding energy per nucleone, vediamo che si ha un massimo assoluto per ^{56}Fe , spiegando quindi perché nei nuclei stellari non vengono prodotti elementi più pesanti.

7.1 Reazioni Nucleari in un Plasma

Andiamo ora a considerare le forze in gioco nel caso di fusioni nucleari all'interno di un plasma. Le forze presenti saranno la forza di repulsione Coulombiana tra i nuclei e la forza nucleare forte all'interno dei nuclei. Queste forze saranno descritte da un potenziale Coulombiano e da un potenziale di Yukawa rispettivamente.

$$\begin{aligned} V_y(r) &= -\frac{g_s}{4\pi} e^{-r} \\ V_c(r) &= \frac{g_c}{4\pi r} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Dove con g_s e g_c sono le degenerazioni degli stati quantistici.

Per la fusione di due nuclei definisco

$$\begin{aligned} v &= |v_j - v_k| \\ \mu &= \frac{A_j A_k}{A_j + A_k} \\ E &= \frac{1}{2} \mu v^2 \\ n_{jk}(E) &= \frac{n_j(E) n_k(E)}{1 + \delta_{jk}} \end{aligned}$$

Dove n_{jk} è il numero di coppie con energia nel centro di massa pari ad E .

Da questo definisco il rate monocromatico di reazione come

$$r = n_{jk}(E) \sigma(E) v(E) = \frac{n_j n_k}{1 + \delta_{jk}} \sigma(E) \sqrt{\frac{2E}{\mu}} \quad (7.3)$$

Con σ la sezione d'urto della fusione.

Inserendo lo spettro d'energia $f(E)$ il rate di fusione diventa

$$r = n_{jk} \sigma v f(E) dE = \frac{n_j n_k}{1 + \delta_{jk}} \sigma \sqrt{\frac{2E}{\mu}} f(E) dE \quad (7.4)$$

Considerando uno spettro di velocità di Maxwell-Boltzmann, possiamo scrivere

$$n_1(\mathbf{v}_1) n_2(\mathbf{v}_2) \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi kT)^3} e^{-\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{kT}} d^3 v_1 d^3 v_2$$

Passando al sistema di riferimento del centro di massa ho le trasformazioni

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{V} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{V} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\end{aligned}$$

Sostituendo, e definendo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ come la velocità relativa, ottengo

$$n_1 n_2 d^3 v_1 d^3 v_2 = n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi kT)^3} e^{-\frac{(m_1+m_2)V^2}{2kT} - \frac{\mu v^2}{2kT}} d^3 v_1 d^3 v_2$$

Essendo il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione pari ad 1, ho infine

$$n_1 n_2 d^3 V d^3 v = \left[\left(\frac{m_1 + m_2}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_1+m_2)V^2}{2kT}} d^3 V \right] \left[\left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} d^3 v \right] \quad (7.5)$$

Integrando il tutto il primo fattore risulta pari ad 1, poiché infatti la reazione nucleare deve dipendere dalle velocità relative e non da quella del centro di massa.

Il rate complessivo di fusioni sarà quindi l'integrale su tutte le energie.

Definendo $X_i = R/\rho$ ottengo

$$\begin{aligned}R(T) &= \frac{n_j n_k}{1 + \delta_{jk}} \int_0^\infty \sigma(E) \left(\frac{2E}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} f(E) dE \\ \langle \sigma v \rangle_{jk} &= \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \sigma(E) E e^{-\frac{E}{kT}} dE \\ n_j &= \frac{\rho N_A X_j}{A_j}\end{aligned}$$

Sostituendo in $R(T)$ ottengo

$$R(T) = \frac{1}{1 + \delta_{jk}} \frac{X_j X_k}{A_j A_k} \rho^2 N_A^2 \langle \sigma v \rangle_{jk} \quad (7.6)$$

Dove il termine $f(E)$ è definito come

$$f(E) = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{16E}{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} E e^{-\frac{E}{kT}} \quad (7.7)$$

La sezione d'urto $\sigma(E)$ indica la probabilità che avvenga una reazione tra coppie di particelle con energia E .

In generale essa indica la probabilità di penetrazione della barriera Coulombiana e della formazione del nucleo composto (probabilità nucleare)

$$\sigma(E) = P_C P_{nuc}$$

La penetrazione della barriera Coulombiana avviene grazie al tunneling quantistico, e la probabilità che avvenga questo evento è descritta da Gamow nel 1934 attraverso la seguente relazione

$$P_C(E) = e^{-\frac{2\pi Z_i Z_j e^2}{\hbar v}} = e^{-\frac{\sqrt{2}\pi Z_i Z_j e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{E}}} = e^{-\frac{b}{\sqrt{E}}} \quad (7.8)$$

La probabilità P_{nuc} è un invariante adiabatico per l'energia, ed avendo definito λ come $\lambda/2\pi$ possiamo scrivere

$$P_{nuc}(E) = \pi\lambda^2 = \pi\left(\frac{\hbar}{p}\right)^2 = \frac{\pi\hbar^2}{E} \longrightarrow \lambda = \frac{\hbar}{p} \quad (7.9)$$

Introducendo il fattore astrofisico $S(E)$ possiamo infine definire P_{nuc} come

$$P_{nuc}(E) = \frac{S(E)}{E}$$

E la sezione d'urto, essendo il prodotto di (7.8) e (7.9), abbiamo

$$\sigma(E) = \frac{1}{E} S(E) e^{-\frac{b}{\sqrt{E}}} \quad (7.10)$$

Dove

$$b = \frac{Z_i Z_j \pi e^2 \sqrt{2\mu}}{\hbar} \approx 0.99 Z_i Z_j \sqrt{\mu} \sqrt{\text{MeV}}$$

Dopo aver sostituito il tutto in $\langle\sigma v\rangle_{ij}$ otteniamo la definizione del *picco di Gamow*

$$\langle\sigma v\rangle = \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty S(E) e^{-\left(\frac{E}{kT} - \frac{b}{\sqrt{E}}\right)} dE \quad (7.11)$$

Derivando, si ottiene che il massimo (Dove viene quindi valutato il picco), si avrà per

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (7.12)$$

Nel caso di reazioni risonanti, dove in generale si ha una reazione del tipo



Abbiamo, definendo la *formula di Wigner* che le larghezze di risonanza Γ sono proporzionali alla differenza di energia

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \propto \Delta E$$

Ricordando che nella stesura matematica della reazione

$$\begin{aligned} \sigma_{nuc}(E) &= \pi\lambda^2 \omega \gamma \\ \pi\lambda^2 &\propto \frac{1}{E} \\ \omega &= \frac{2J+1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \\ \gamma &= \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{(E - E_\gamma)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Queste complicazioni, unite alle difficoltà sperimentali, impediscono la determinazione accurata di $S(E)$.

Ritornando alle reazioni nucleari generali, in particolare alle reazioni che avvengono all'interno dei nuclei stellari, possiamo definire una sesta equazione differenziale da accoppiare alle equazioni di struttura stellare.

Questa equazione aggiuntiva descrive i cambi chimici all'interno della stella, valutando il cambio di popolazione chimica Y_i nel tempo.

L'equazione differenziale è definita come

$$\frac{dY_i}{dt} = \sum_j c_j^i Y_j N_a \lambda_j + \sum_{jk} c_{jk}^i Y_j Y_k N_a^2 \rho \langle \sigma v \rangle_{jk} + \sum_{jkl} c_{jkl}^i Y_j Y_k Y_l N_a^3 \rho^2 \langle \sigma v \rangle_{jkl} \quad (7.15)$$

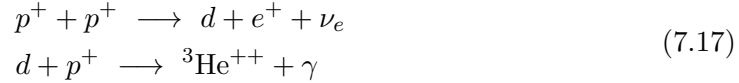
Dove

$$\begin{aligned} c_j^i &= \pm 1 \\ c_{jk}^i &= \pm \frac{1}{j!k!} = \pm \frac{i}{1 + \delta_{jk}} \\ c_{jkl}^i &= \pm \frac{1}{j!k!l!} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Quest'equazione indica l'abbondanza chimica degli elementi valutati.

Nel caso che le distruzioni siano molto più frequenti delle produzioni, l'abbondanza chimica sarà costante nel tempo, quindi la derivata di Y_i è nulla.

Prendendo come esempio la reazione del deuterio nella catena $p-p$ abbiamo la reazione



E poiché $\langle \sigma v \rangle_{dp} \gg \langle \sigma v \rangle_{pp}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{dY_d}{dt} &= \frac{1}{2} Y_p^2 \rho N_a^2 \langle \sigma v \rangle_{pp} - Y_d Y_p \rho N_a^2 \langle \sigma v \rangle_{dp} = 0 \\ Y_d &= \frac{1}{2} Y_p \frac{\langle \sigma v \rangle_{pp}}{\langle \sigma v \rangle_{dp}} \end{aligned}$$

Eseguendo gli stessi conti per le altre reazioni nucleari coinvolgenti la distruzione del deuterio, possiamo valutare il *tempo scala nucleare di distruzione* τ .

$$\begin{aligned} \frac{dY_d}{dt} &= -Y_d Y_p \rho N_a^2 \langle \sigma v \rangle_{dp} \\ \frac{dY_d}{Y_d} &= -Y_p \rho N_a^2 \langle \sigma v \rangle_{dp} dt = -\lambda dt \\ Y_d &= k e^{-\lambda t} \\ \tau &= \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{Y_p \rho N_a^2 \langle \sigma v \rangle_{dp}} \end{aligned}$$

La differenza tra involuppi convettivi e radiativi nelle stelle è determinata dal *criterio di Schwarzschild*, detto di *instabilità convettiva*, in formule

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{amb} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad} \quad (7.18)$$

Riformulando in termini delle derivate logaritmiche di temperatura e pressione otteniamo

$$\nabla_{rad} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{rad} > \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_S = \nabla_{ad}$$

Dove ∇_{ad} può essere riformulato in termini dell'equazione di stato termodinamica

$$\begin{aligned} \nabla_{ad} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma \chi_T} \\ \gamma &= \frac{C_p}{C_v} \\ \chi_T &= \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_S \end{aligned} \quad (7.19)$$

Abbiamo che

$$(\text{fotoni}) = 0.25 \leq \nabla_{ad} \leq 0.4 = (\text{gas perfetto})$$

E, sostituendo nel gradiente di temperatura radiativo le equazioni di struttura stellare

$$\nabla_{rad} = \frac{3\kappa r^2 P}{4a_B c G M_r T^4} \mathcal{F}_{rad} = \frac{3\kappa r^2 P}{4a_B G M_r T^4} \frac{\mathcal{L}_r}{4\pi r^2}$$

Con κ l'opacità del mezzo, dipendente dal cammino libero medio del fotone λ tramite la relazione $\lambda = 1/\kappa\rho$

7.2 Opacità

L'opacità del mezzo stellare è data dallo scattering dei fotoni. Lo scattering è scattering Thomson, la cui sezione d'urto è governata dalla formula

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (7.20)$$

Dato che l'opacità può essere riscritta con la formula $\kappa = \sigma n / \rho$, con n il numero di particelle “assorbenti” per unità di volume.

Riscrivendo l'opacità data da questo scattering, ed indicandola con κ_T , otteniamo che in media, negli strati interni di una stella, si ha

$$\langle \kappa_T \rangle \approx 0.2 (1 + X) \quad (7.21)$$

Con X la frazione di massa dell'Idrogeno.

I processi che possono provocare lo scattering di fotoni sono di 3 tipi

- Interazioni Bound-Bound nel caso di materia non ionizzata
- Interazioni Bound-Free nel caso di materia parzialmente ionizzata
- Interazioni Free-Free nel caso di materia completamente ionizzata

Inoltre, nel caso di atmosfere stellari particolarmente fredde, risultano importanti anche i contributi di transizioni rotovibrazionali delle molecole.

Nel caso di assorbimento di un fotone per interazione Bound-Bound, si ha una chiara dipendenza dalla frequenza, data dalla dipendenza della sezione d'urto dalla lunghezza d'onda. In questo caso possiamo scrivere

$$\frac{1}{\langle \kappa_{FF} \rangle} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu} \quad (7.22)$$

Questa media è detta *media di Rosseland*

Nel caso che vi sia più di un processo che interferisce con l'opacità del mezzo, è possibile scrivere in tal caso

$$\kappa_{tot} = \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{\kappa_n} \right)^{-1} \quad (7.23)$$

Ritornando al caso stellare, possiamo dividere il tutto in 3 casi

7.2.1 Stelle di Massa Intermedia o Massiccia ($M > 1.5 M_\odot$)

In questo caso, essendo le luminosità maggiori, le temperature centrali sono molto alte, e l'idrogeno viene bruciato tramite una reazione CNO.

Il trasporto radiativo non è sufficiente ed il nucleo è convettivo. Al contrario, essendo l'opacità bassa negli strati esterni data la totale ionizzazione dell'H, si hanno involuppi radiativi.

7.2.2 Stelle di Piccola Massa ($M \sim M_\odot$)

Le temperature al centro sono basse, e queste stelle bruciano l'H lentamente tramite catena $p - p$. Essendo il flusso piccolo, i core possono essere radiativi.

Nel caso degli strati esterni si hanno temperature più fredde, quindi l'H è parzialmente ionizzato o neutro, rendendo possibili interazioni Bound-Free o Bound-Bound, aumentando notevolmente l'opacità. Per questo gli involuppi sono convettivi.

7.2.3 Stelle di Piccolissima Massa ($M < 0.4 M_\odot$)

Le stelle di questo tipo sono notevolmente fredde, ai limiti della sequenza principale. L'idrogeno è quasi totalmente neutro negli strati esterni, e quindi dato il piccolo flusso e la presenza di atomi e molecole neutre o parzialmente ionizzate, portano la stella ad avere un'alta opacità in tutti gli strati, rendendo queste stelle totalmente convettive

8 Fine dell'Evoluzione Stellare

Per valutare gli ultimi istanti di vita di una stella è necessario considerare la Meccanica Statistica Quantistica, in particolare il gas di elettroni degenerare.

Il volume occupato da gli elettroni nello spazio delle fasi è dato (indicando con g la degenerazione dello stato e con $d\tau$ il volume infinitesimo nello spazio delle fasi)

$$g d\tau = g \frac{d^3 p d^3 q}{(2\pi\hbar)^3}$$

Per il principio di esclusione di Pauli $g = 2$ e nel volume di spazio infinitesimo (isotropo) otteniamo

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} 8\pi V p^2 dp = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp$$

Ipotizzando una degenerazione totale del gas, otteniamo che il numero di elettroni massimo N nella pila di momenti possibili (da 0 a p_F , con p_F il momento di Fermi)

$$N = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{V p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} \rightarrow p_F = (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \hbar \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (8.1)$$

Nel caso che il gas sia relativistico, quindi $\varepsilon_F \gg mc^2$ si ha $\varepsilon \approx pc$, quindi

$$E = \frac{Vc}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^3 dp = \frac{Vc}{4\pi^2 \hbar^3} p_F^4 = \frac{3\hbar c}{4} (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}} N \quad (8.2)$$

La pressione, essendo definita come $P = \frac{1}{3}U$ nel caso relativistico, è

$$P = \frac{1}{3} \frac{E}{V} = \frac{\hbar c}{4} (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (8.3)$$

Ma, dal teorema del Viriale

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho}{r^2} \quad (8.4)$$

Cioè, integrando e sostituendo, si ha

$$P = \frac{2}{3}U$$
$$T = \int U dV$$

E, di conseguenza

$$2T + \Omega_g = 0 \quad (8.5)$$

Nell'evoluzione stellare la densità aumenta con l'evolversi della stella, e quando arriva ad un punto critico (quando il core è principalmente di ^{56}Fe) si ha che la degenerazione elettronica (non relativistica) ferma il collasso, fornendo pressione a livello quantistico. Contrariamente, nel caso di degenerazione relativistica, il collasso non viene fermato, e quindi il nucleo continua la contrazione indefinitivamente.

È possibile definire una massa limite per le stelle, che viene chiamata *Massa di Chandrasekar*, che è la massa limite che può avere il nucleo. Essa dipende dall'abbondanza Y_e nella stella, ed è calcolata come

$$M_{Ch} = 5.83Y_e^2 \quad (8.6)$$

Nel caso di stelle piccole, si ha che $Y_e = 0.5$, quindi $M_{Ch} = 1.457 M_\odot$

8.1 Collasso Gravitazionale e Supernovae

Il collasso gravitazionale delle stelle avviene quando il nucleo della stella raggiunge la massa di Chandrasekhar. Sono possibili diversi risultati dal collasso gravitazionale di una stella, per le stelle piccole il risultato è una *Nana Bianca*, un core remnant densissimo composto principalmente da H, He, C ed O. È formata da un nucleo di elettroni altamente degeneri con degli ioni di C ed O come reservoir di energia. Gli strati esterni invece sono composti principalmente da elettroni non degeneri, rendendoli altamente isolanti.

In un diagramma H-R, si trovano instaurate su una seconda sequenza in basso a sinistra, data la loro elevata temperatura e la massa piccola.

Nel caso di stelle massicce, capaci di bruciare con una catena CNO, il risultato del collasso finale è una Supernova.

Durante una Supernova di una stella massiccia, si hanno due reazioni principali



A seconda della degenerazione degli elettroni il collasso può fermarsi e lasciare una *Stella di Neutroni*.

8.2 Classificazione delle Supernovae

Le Supernovae, abbreviate SNe, si possono classificare attraverso la morfologia delle curve di luce e dallo spettro emesso.

Le due categorie principali sono SNe di tipo I e di tipo II.

Le SNe di tipo I sono caratterizzate dall'assenza delle righe dell'idrogeno e sono ulteriormente divise in SNeIa, SNeIb, SNeIc, le SNeIa presentano forti righe del Si, e sono causate dall'esplosione termonucleare delle nane bianche, dopo aver accresciuto massa oltre la M_{Ch} da delle stelle compagne.

Le SNeIb ed SNeIc sono caratterizzate dall'assenza di righe del Si, e rispettivamente dalla presenza o assenza delle righe del He.

Le SNe II sono caratterizzate dalla presenza di righe dell'Idrogeno, ed insieme alle SNe Ib e Ic sono provocate dal collasso del nucleo stellare e dal rimbalzo degli involucri.

Risultano molto utili le SNe Ia, data la loro luminosità pressoché standard, data la provenienza delle stesse ed il processo pressoché uguale, che rende la loro luminosità ad uguale distanza praticamente uguale, rendendole ottime candele standard per la misura delle distanze, fino a redshift $z \approx 1$

9 Meccanica Celeste ed Orbitale

Per poter parlare di Meccanica Orbitale a livello astronomico, è necessario indicare le 3 *leggi di Keplero*, leggi fondamentali della Meccanica Celeste.

La prima legge di Keplero afferma che l'orbita di un pianeta attorno al sole giace su ellisse piana, con il sole su uno dei due fuochi della stessa.

La seconda legge indica che l'area "spazzata" dal raggio dell'orbita è proporzionale al tempo impiegato per percorrere quell'area. In formule (con k costante)

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= k \\ k &= \frac{A}{T} = \frac{\pi ab}{T}\end{aligned}\tag{9.1}$$

Dove a è il semiasse maggiore, b il semiasse minore dell'ellisse.

Da questa passiamo alla terza legge, che indica che il quadrato del periodo dell'orbita è proporzionale al cubo del semiasse maggiore. In formule

$$T^2 = ca^3\tag{9.2}$$

Con c una costante di proporzionalità indipendente dal pianeta considerato.

La conica che descrive un'orbita, in coordinate polari, è descritta come segue

$$\frac{1}{r} = p(1 + e \cos(\theta))\tag{9.3}$$

Dove e è una costante dipendente dal tipo di conica formata dall'orbita.

Ci sono 3 casi possibili

1. $e < 1$ L'orbita è chiusa ed è un'ellisse
2. $e = 1$ L'orbita è circolare
3. $e > 1$ L'orbita è aperta ed è un'iperbole

Nel primo caso $e < 1$, e l'orbita è un'ellisse. La caratteristica principale dell'ellisse è che la somma distanza da un punto del bordo verso i due fuochi è costante. Indicando con P il punto e con F_1 ed F_2 i due fuochi, otteniamo

$$PF_1 + PF_2 = k\tag{9.4}$$

Con k costante.

Al pericentro e all'apocentro abbiamo che $\cos(\theta) = \pm 1$, e quindi, riprendendo l'equazione della conica, otteniamo

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{1}{p(1+e)} \\ r_a &= \frac{1}{p(1-e)} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Essendo $2a = r_p + r_a$ si ottiene

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{p(1-e^2)} \\ p &= \frac{1}{a(1-e^2)} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Con p una costante

Indicando con E il centro, essendo le distanze dei fuochi dal centro uguali, si ha che $EF_i = ae$, infatti

$$r_p = a - c = \frac{1}{p(1-e^2)} = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e) \quad (9.7)$$

Analogamente si trova che

$$b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1-e^2) \quad (9.8)$$

Infatti $b^2 = r_b^2 - a^2c^2 = a^2 - a^2e^2$, poiché per definizione $2r_b = 2a$

9.1 Problema dei Due Corpi

Venga considerato un sistema isolato formato da due masse puntiformi, interagenti solo attraverso la forza gravitazionale newtoniana.

Nel sistema del centro di massa si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (9.9)$$

Successivamente $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ verrà indicato con \mathbf{r} . Nel sistema di riferimento del centro di massa si ha che $\mathbf{V} = \text{const.}$. Ponendo per comodità $\mathbf{R} = 0$ si ha che anche $\mathbf{V} = 0$. Conseguenza da (9.9) che

$$\mathbf{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_2 = 0 \longrightarrow \mathbf{v}_2 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_1 \quad (9.10)$$

Cioè le due velocità sono parallele e complanari.

Essendo la forza gravitazionale radiale, il momento angolare totale delle forze sarà nullo.

e di conseguenza il momento della quantità di moto è costante

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \rightarrow \mathbf{L} = \text{const.} \quad (9.11)$$

Di conseguenza \mathbf{L} è il primo integrale del moto. Questa conservazione implica che il moto dev'essere piano.

Indicando ora la massa ridotta μ come

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (9.12)$$

Possiamo scrivere il modulo del momento angolare come

$$\begin{aligned} L &= r_1 m_1 v_1 \sin \alpha_1 + r_2 m_2 v_2 \sin \alpha_2 \\ L &= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \frac{d\theta}{dt} \\ L &= \left[m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \right)^2 \right] \frac{d\theta}{dt} \\ L &= \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

Si ottiene di conseguenza

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \quad (9.13)$$

Che è semplicemente la terza legge di Keplero, riformulata come la conservazione del momento angolare.

Il terzo integrale del moto è dato dall'energia meccanica del sistema

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} \mu \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2}_T + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}}_{V(r)} \quad (9.14)$$

Dove $k = Gm_1 m_2$.

Questa è un'equazione differenziale del prim'ordine rispetto a \mathbf{r} , e notando che

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2}$$

Sostituendo nella definizione dell'energia, si ottiene infine l'equazione differenziale che definisce l'orbita del corpo

$$\frac{dr}{d\theta} = r \sqrt{\frac{2\mu r^2}{L^2} r^2 + \frac{2k\mu}{L^2} r - 1} = f(\theta) \quad (9.15)$$

Separando le variabili ed integrando l'equazione differenziale si ottiene

$$\int d\theta = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2k\mu}{L^2}u - u^2}} du, \quad du = \frac{1}{r^2} dr$$

$$\theta = \theta_0 - \arccos\left(\frac{\frac{L^2 u}{k\mu} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}}\right)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \right] \cos(\theta - \theta_0)$$

(9.16)

Che è l'equazione di una conica con eccentricità

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$$

E con parametro p

$$p = \frac{\mu k}{L^2}$$

Ritornando al caso delle leggi di Keplero si ha che sono valide per $e < 1$, con $\mu = m_p$ la massa del pianeta, data la grossa differenza nel sistema pianeta-sole, poiché

$$\mathbf{r}_\odot \approx 0$$

$$\mathbf{r}_p = \frac{m_\odot}{m_\odot + m_p} \mathbf{r} \approx \mathbf{r}$$
(9.17)

Per la terza legge di Keplero, si ha che, integrando l'area spazzata per un'orbita intera

$$T \frac{L}{2\mu} = \pi ab$$

Riscrivendo la relazione tra b, a, e si ottiene

$$T = \pi a^2 \frac{2\mu}{L} \sqrt{1 - e^2}$$
(9.18)

Sostituendo $p = \frac{\mu k}{L^2}$ e $a = \frac{1}{p(1-e^2)}$ si ottiene

$$T = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu}{k}} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}$$
(9.19)

Ponendo $m_1 \gg m_2$ si ha infine

$$\frac{2\pi}{\sqrt{G(m_\odot + m_p)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{Gm_\odot}}$$
(9.20)

9.2 Problema degli N Corpi

È possibile descrivere matematicamente un problema analogo, che è il problema degli N corpi, dove, invece di esserci solo 2 corpi nel sistema ne sono presenti N .

Sfortunatamente il sistema non è integrabile, ma è possibile descriverlo con delle equazioni matematiche.

Ponendo il raggio vettore tra il corpo i ed il corpo j come

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$$

Possiamo scrivere il potenziale gravitazionale $U(r_{ij})$ come

$$U(r_{ij}) = \frac{k_{ij}}{r_{ij}}$$

Dove $k_{ij} = Gm_i m_j$.

Scrivendo la Lagrangiana del sistema otteniamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{ij}^{i \neq j} U_{ij} \quad (9.21)$$

Che ci porta alle 3N equazioni del moto

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{ij}^{i \neq j} \mathbf{F}_{ij} \quad (9.22)$$

Dove \mathbf{F}_{ij} è la forza gravitazionale esercitata dal corpo i -esimo al corpo j -esimo.

Moltiplicando queste equazioni del moto per \mathbf{r}_i otteniamo la relazione

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (m_i \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) - m_i \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right] = \frac{d^2 I}{dt^2} - 2T = \sum_{ij}^{i \neq j} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_{ij} \quad (9.23)$$

Dove

$$I = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \quad (9.24)$$

È il momento d'inerzia del sistema.

Reinserendolo nelle equazioni del moto possiamo scrivere

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2T - \sum_{ij}^{i \neq j} \frac{dU_{ij}}{dr_{ij}} r_{ij} \quad (9.25)$$

Utilizzando un potenziale gravitazionale otteniamo che la derivata di U_{ij} sarà $\propto -sU_{ij}/r_{ij}$. E si ottiene infine

$$2T + sU = \frac{d^2 I}{dt^2} \quad (9.26)$$

che è esattamente il teorema del viriale. Nel caso gravitazionale $s = 1$ ed il sistema è detto *Virializzato*.

9.3 Sistemi Binari

I sistemi binari di stelle sono molto comuni, infatti compongono circa il 50% delle stelle. La loro formazione può essere di due tipi

1. Formazione Diretta, a seguito della formazione delle nubi protostellari
2. Formazione per Close Encounter, a seguito di un incontro ravvicinato da parte di una delle due stelle, che viene intrappolata dalla forza gravitazionale della seconda stella

Entrambe le stelle di un sistema binario orbitano attorno al centro di massa del sistema in delle orbite ellittiche.

Dall'equazione dell'orbita ottenuta nella sezione precedente, otteniamo le due orbite ellittiche

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{p_1}{1 + e \cos \theta} \\
 r_2 &= \frac{p_2}{1 + e \cos \theta} \\
 p_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} p \\
 p_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} p
 \end{aligned} \tag{9.27}$$

Essendo le eccentricità delle orbite uguali, si ha quindi

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2} \tag{9.28}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
 p &= p_1 + p_2 \\
 a &= a_1 + a_2
 \end{aligned} \tag{9.29}$$

E per la terza legge di Keplero

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \tag{9.30}$$

La classificazione dei sistemi binari è come segue

- *Visual Binaries*, quando il sistema binario è risolvibile con dei telescopi
- *Eclipsing Binaries*, quando il piano orbitale è vicino alla linea di vista, e di conseguenza le stelle si occultano l'un l'altra. Generalmente rimangono non risolti, ma sono visibili attraverso le curve di luce delle stelle
- *Spectroscopic Binaries*, quando il sistema non è risolvibile, ma due sistemi di linee sono visibili nello spettro composto, con uno shift di tipo Doppler
- *Astrometric Binaries*, quando il sistema non è risolvibile, ma è osservabile una perturbazione nel moto proprio della stella principale del sistema

9.3.1 Determinazione delle Masse di un Sistema Binario

In generale, per ogni tipo di sistema binario, il periodo T dell'orbita è facilmente misurabile, rendendo quindi noto a_1 ed a_2 . Tramite le equazioni (9.27), (9.28) e (9.30) è possibile determinare quindi le masse del sistema, effettuando una correzione nel caso che il sistema sia inclinato rispetto alla linea di vista, come nella maggior parte dei casi. Supponendo delle orbite circolari, abbiamo che

$$v_i = \frac{2\pi a_i}{T}$$

E di conseguenza, nel caso che l'orbita sia inclinata di un angolo i

$$v_{ri} = \frac{2\pi a_i}{T} \sin(i) \quad (9.31)$$

Ponendoci nel sistema del centro di massa si possono scrivere le equazioni di conservazione della quantità di moto, ed ottenere quindi

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_{r2}}{v_{r1}} \quad (9.32)$$

Ricordando che $a_1 + a_2 = a$ si ottiene

$$a = \frac{v_{r1} + v_{r2}}{\sin(i)} \frac{T}{2\pi} \quad (9.33)$$

E dalla terza legge di Keplero

$$m_1 + m_2 = \left(\frac{v_{r1} + v_{r2}}{\sin^3(i)} \right)^3 \frac{T}{2\pi G} \quad (9.34)$$

Quindi, conoscendo $\sin(i)$ è possibile calcolare le masse delle singole stelle attraverso le equazioni (9.32) e (9.34).

Un caso particolare di stelle binarie è facilmente osservabile nei diagrammi HR, dove attraverso l'effetto Doppler negli spettri stellari, è possibile notare una seconda main sequence shiftata dalla principale.

Bibliografia

- [Cho16] A. R. Choudhuri. *Astrophysics for Physicists*. Cambridge University Press, 2016.