

# ASTROFISICA

---

*Università degli Studi di Roma "La Sapienza"*  
*Corso di Laurea in Fisica, Curriculum di Astrofisica*

MATTEO CHERI

APPUNTI DEL CORSO DI ASTROFISICA

GENNAIO 2018

VERSIONE 0.1



---

---

# ASTROFISICA

---

---

APPUNTI DEL CORSO DI ASTROFISICA A.A 2017-2018

SCRITTO DA

MATTEO CHERI

*Corso di Laurea in Fisica, Curriculum di Astrofisica  
Sapienza Università di Roma*

$\boxed{MC}$

GENNAIO 2018

VERSIONE 0.1



# Indice

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1      | Relatività Ristretta . . . . .                                      | 7         |
| 1.1.1    | Considerazioni preliminari e trasformazioni di coordinate . . . . . | 7         |
| 1.1.2    | Forma Quadrivettoriale . . . . .                                    | 9         |
| 1.2      | Spazio e Materia . . . . .  | 10        |
| 1.2.1    | Particelle Fondamentali . . . . .                                   | 10        |
| 1.3      | Osservabili Astrofisiche . . . . .                                  | 12        |
| 1.3.1    | Flusso e Brillanza . . . . .  | 12        |
| <br>     |   |           |
| <b>I</b> | <b>Astrofisica Stellare</b>   | <b>15</b> |
| <br>     |   |           |
| <b>2</b> | <b>Stelle</b>   | <b>17</b> |
| 2.1      | Misure, Spettri e Luminosità . . . . .                              | 17        |
| 2.1.1    | Diagramma Hertzsprung-Russel . . . . .                              | 19        |
| 2.2      | Nuclei Stellari e Cicli di Fusione . . . . .                        | 20        |
| 2.3      | Atmosfere Stellari e Spettroscopia . . . . .                        | 22        |
| 2.4      | Spettri . . . . .   | 23        |
| 2.4.1    | Magnitudini . . . . .   | 25        |
| 2.4.2    | Classificazione Spettrale . . . . .                                 | 25        |
| 2.5      | Righe Spettrali . . . . .   | 30        |
| 2.5.1    | Profili di Riga . . . . .   | 33        |
| 2.6      | Struttura Stellare . . . . .  | 36        |
| 2.6.1    | Modello Standard Stellare . . . . .                                 | 39        |
| 2.6.2    | Meccanismi di Opacità . . . . .                                     | 44        |
| 2.6.3    | Zone Convettive . . . . .   | 45        |
| 2.7      | Core Remnants . . . . .   | 45        |
| 2.7.1    | Nane Bianche . . . . .  | 45        |
| 2.7.2    | Stelle di Neutroni . . . . .  | 48        |
| 2.7.3    | Buchi Neri . . . . .  | 48        |

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>II</b>  | <b>Mezzo Interstellare</b>                           | <b>49</b> |
| <b>3</b>   | <b>Interazione tra Luce e Materia</b>                | <b>51</b> |
| 3.1        | Trasporto Radiativo . . . . .                        | 52        |
| 3.1.1      | Cammino Libero Medio . . . . .                       | 53        |
| 3.1.2      | Radiazione Termica . . . . .                         | 53        |
| 3.2        | Atmosfere Isoterme . . . . .                         | 54        |
| 3.2.1      | Atmosfere Stellari . . . . .                         | 55        |
| 3.3        | Coefficienti di Einstein . . . . .                   | 56        |
| 3.4        | Scattering . . . . .                                 | 59        |
| 3.4.1      | Random Walk . . . . .                                | 59        |
| 3.5        | Interazione Fotoni-Elettroni . . . . .               | 60        |
| 3.5.1      | Regioni HII . . . . .                                | 60        |
| 3.6        | Scattering Thomson e Compton . . . . .               | 61        |
| 3.6.1      | Scattering Thomson . . . . .                         | 61        |
| 3.6.2      | Scattering Compton . . . . .                         | 62        |
| 3.6.3      | Scattering Rayleigh . . . . .                        | 63        |
| 3.7        | Interazione tra Fotoni e Particelle Solide . . . . . | 63        |
| 3.7.1      | Estinzione Interstellare . . . . .                   | 64        |
| 3.8        | Bremsstrahlung Interstellare . . . . .               | 64        |
| 3.8.1      | Bremsstrahlung magnetico . . . . .                   | 65        |
| 3.8.2      | Bremsstrahlung Termico . . . . .                     | 67        |
| <b>4</b>   | <b>Gas Interstellare</b>                             | <b>69</b> |
| 4.1        | Radiazione di Spin-Flip . . . . .                    | 69        |
| 4.2        | Curve di Rotazione Galattica . . . . .               | 71        |
| 4.2.1      | Materia Oscura . . . . .                             | 73        |
| 4.3        | Gas Molecolare Intergalattico . . . . .              | 76        |
| 4.3.1      | Formazione Stellare . . . . .                        | 76        |
| <b>III</b> | <b>Cosmologia</b>                                    | <b>79</b> |
| <b>5</b>   | <b>Distanze Cosmologiche</b>                         | <b>81</b> |
| 5.1        | Misure di Distanza . . . . .                         | 81        |
| 5.1.1      | Distanza di Magitudine . . . . .                     | 81        |
| 5.1.2      | Cefeidi . . . . .                                    | 82        |
| 5.1.3      | Distanza di Luminosità . . . . .                     | 82        |
| 5.2        | Redshift e Legge di Hubble . . . . .                 | 82        |
| <b>6</b>   | <b>Equazioni di Friedmann</b>                        | <b>85</b> |
| 6.1        | Materia Non-Relativistica . . . . .                  | 87        |
| 6.2        | Redshift . . . . .                                   | 88        |
| 6.3        | Materia Relativistica . . . . .                      | 88        |

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 6.4      | Diagramma di Hubble . . . . .                               | 89        |
| <b>7</b> | <b>Evoluzione dell'Universo</b>                             | <b>91</b> |
| 7.1      | Fase di Radiazione . . . . .                                | 91        |
| 7.2      | Fase di Materia . . . . .                                   | 92        |
| 7.3      | Fase di Vuoto . . . . .                                     | 92        |
| 7.4      | Cosmic Microwave Background Radiation . . . . .             | 93        |
| 7.5      | Neutrini . . . . .  | 94        |
| 7.6      | Materia . . . . .   | 94        |
| 7.7      | Censimento . . . . .  | 95        |
| 7.8      | Età dell'Universo ed Energia Oscura . . . . .               | 96        |
| 7.9      | Epoche e Dimensioni Caratteristiche . . . . .               | 96        |
| 7.9.1    | Epoca dell'Equivalenza . . . . .                            | 97        |
| 7.9.2    | Epoca della Ricombinazione . . . . .                        | 97        |
| 7.9.3    | Orizzonte delle Particelle e Teoria Inflazionaria . . . . . | 98        |
| 7.10     | Volume dell'Universo . . . . .                              | 99        |
| 7.11     | Distanza di Diametro Angolare . . . . .                     | 101       |
| 7.12     | Nucleosintesi Primordiale . . . . .                         | 101       |
| 7.12.1   | Bagno Primordiale . . . . .                                 | 102       |
| 7.12.2   | Elio Primordiale . . . . .                                  | 103       |
| 7.12.3   | Litio Primordiale . . . . .                                 | 104       |
| 7.12.4   | Foresta di Lyman . . . . .                                  | 104       |
| 7.13     | Formazione delle Strutture . . . . .                        | 105       |
| 7.13.1   | Evoluzione delle Fluttuazioni . . . . .                     | 105       |

*Nota*

Questi appunti di Astrofisica sono stati presi dal sottoscritto durante le lezioni di Astrofisica tenute dal Prof. De Bernardis nell'A.A. 2017/2018.

Essendo una prima versione è molto probabile la presenza di errori ed imprecisioni.

Per qualsiasi commento o precisazione lascio qua la mia mail istituzionale.

**cheri.1686219@studenti.uniroma1.it**



# 1 Introduzione

---

## 1.1 Relatività Ristretta

### 1.1.1 Considerazioni preliminari e trasformazioni di coordinate

La relatività ristretta sorge dalla necessità di trovare delle trasformazioni di coordinate covarianti per le equazioni di Maxwell. Queste trasformazioni sono le trasformazioni di Lorentz, dove abbiamo posto  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\omega = \beta c$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \omega t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases} \quad (1.1)$$

La presenza del tempo indica la non assolutezza dello stesso per diversi sistemi in movimento inerziale. Le distanze non sono conservate, invece è conservata la metrica dello spazio di Minkowsky  $ds$ , data in notazione di Einstein da

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

dove  $g_{ij}$  è il *tensore metrico* dello spazio di Minkowsky.

Definendo per uno spaziotempo piatto con un sistema di riferimento in moto inerziale abbiamo che il tensore metrico è rappresentato da una matrice diagonale

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Indicando con  $x^i = (ict, x, y, z)$  è dimostrabile che è un invariante per le trasformazioni di Lorentz in un sistema inerziale.

Nel caso in cui siano presenti forze gravitazionali nel sistema, rendendo non inerziale il tutto,  $g_{ij} \neq \delta_{ij}$ , ma sarà rappresentato da una matrice generica,  $x^i$  non sarà più invariante, ma  $ds = g_{ij}dx^i dx^j$  sarà ancora un'invariante

Tornando in un sistema inerziale, troviamo la trasformazione delle velocità calcolando le derivate temporali delle trasformazioni di coordinate.

I differenziali della prima e della quarta coordinata saranno

$$\begin{cases} dx = \gamma(dx' + \omega dt') \\ dt = \gamma\left(dt' + \frac{\beta}{c}dx'\right) \end{cases} \quad (1.3)$$

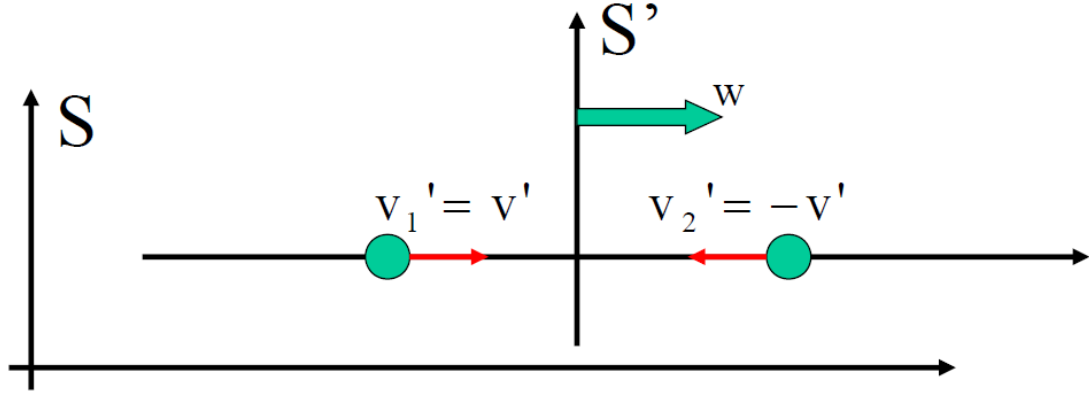
E quindi, notando che  $v_x = \frac{dx}{dt}$  troviamo che

$$v_x = \frac{v'_x + \omega}{1 + \frac{\beta}{c}v'_x} \quad (1.4)$$

Facendo un calcolo analogo per le rimanenti coordinate troviamo che, per un sistema inerziale, le trasformazioni delle velocità saranno

$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x + \omega}{1 + \frac{\beta}{c}v'_x} \\ v_y = v'_y \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\beta}{c}v'_x} \\ v_z = v'_z \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\beta}{c}v'_x} \end{cases} \quad (1.5)$$

Consideriamo un problema d'urto anelastico relativistico, ponendoci nel sistema del centro di massa, in cui le velocità saranno uguali ed antisimmetriche



Nel sistema del laboratorio, al momento dell'urto, la velocità della particella finale sarà uguale alla velocità di trascinamento del sistema del centro di massa, dove sarà zero.

Nel sistema del laboratorio, le due velocità e masse iniziali saranno differenti, quindi, la conservazione del momento sarà

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = MV = M\omega = (m_1 + m_2)\omega$$

Spostandoci quindi nel sistema del centro di massa tramite le trasformazioni delle velocità, otteniamo che

$$m_1 \left( \frac{v' + \omega}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x} \right) + m_2 \left( \frac{-v' + \omega}{1 + \frac{\beta}{c} v'_x} \right) = (m_1 + m_2) \omega$$

Questo risultato ci dà una chiara dipendenza della massa con la velocità, poiché infatti il rapporto tra le due masse sarà appunto

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \frac{\beta^2}{c} v'}{1 - \frac{\beta^2}{c} v'}$$

Indicando con  $m_0$  la massa a riposo ( $v = 0$ ) troviamo che la massa ad una velocità  $v$  sarà

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.6)$$

Notando la dipendenza della massa dalla velocità, possiamo riscrivere l'equazione di Newton come

$$\frac{dm(v)v}{dt} = \underline{F}$$

Ed il lavoro della forza  $\underline{F}$  come

$$dL = d[m(v)c^2]$$

Sapendo che l'energia cinetica  $T$  è data da  $T = \int_{t_0}^{t_1} dL$  otteniamo che, per una massa a riposo

$$T = c^2 \Delta m$$

Che non è nient'altro che (in assenza di forze esterne), la famosa formula  $E = mc^2$  che ci dà l'uguaglianza massa-energia.

Un'applicazione di questo risultato lo troviamo nella produzione di energia dalla fusione nucleare nel nucleo del sole, necessaria a bilanciare l'energia gravitazionale dello stesso, che lo porta a contrarsi.

Nel caso ultrarelativistico, cioè con particelle di massa nulla (e.g, i fotoni  $\gamma$ ), troviamo che l'energia dovrà essere espressa con il momento della particella  $p$ , nella forma

$$E = pc$$

### 1.1.2 Forma Quadrivettoriale

Questa trattazione della meccanica relativistica è stata poi dal formalismo quadridimensionale di Minkowsky, dove le trasformazioni dei vettori sono date da delle trasformazioni di coordinate date da delle matrici, dette appunto di trasformazione.

Per un sistema inerziale ed un generico quadrivettore  $x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  abbiamo che il vettore  $x^{i'}$  sarà dato da

$$x^{i'} = \Lambda_j^{i'} x^j \quad (1.7)$$

Con  $\Lambda_j^{i'}$  la matrice delle trasformazioni di Lorentz, data da

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

È facile dimostrare che  $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$

La covarianza o la controvarianza dei quadrivettori è definita dalla trasformazione delle coordinate degli stessi.

Un quadrivettore è detto *covariante* se trasforma come il quadrivettore delle coordinate, e viene anche chiamato tetravettore.

Un quadrivettore verrà chiamato *controvariante*, se trasforma in maniera opposta al quadrivettore delle coordinate.

Un esempio di tetravettore è la velocità di una particella nello spazio di Minkowsky.

indichiamo con  $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$  il tempo proprio della particella.

La quadrirelatività della particella sarà data dalla derivata

$$\eta^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \left( \gamma \underline{v}, i c \frac{d\gamma}{dt} \right) \quad (1.9)$$

Analogamente è possibile definire la quadriforza e il quadrimpulso, dove, è facile notare che la quarta componente del quadrimpulso è l'energia

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Quindi, in questo formalismo quadridimensionale, la conservazione dell'impulso e dell'energia, sono date entrambe dalla conservazione del quadrimpulso.

## 1.2 Spazio e Materia

### 1.2.1 Particelle Fondamentali

Le particelle fondamentali sono l'elemento costitutivo della materia conosciuta, esse possono essere divise in due categorie principali, *quark* e *leptoni*.

I quark sono particelle che combinandosi, formano le particelle composte, come protoni e neutroni.

I leptoni sono particelle semplici, come elettroni o neutrini

### Modello Standard

Tutte queste particelle fondamentali, sono riunite in un modello fondamentale chiamato il *modello standard*, dove vengono riunite con le loro corrispettive antiparticelle

| Famiglia | Carica         | Gen. 1                           | Gen. 2                         | Gen. 3                      |
|----------|----------------|----------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| Quark    | $+\frac{2}{3}$ | up (u)                           | charm (c)                      | top (t)                     |
|          | $-\frac{1}{3}$ | down (d)                         | strange (s)                    | bottom (b)                  |
| Leptoni  | -1             | elettrone ( $e^-$ )              | muone ( $\mu^-$ )              | tau ( $\tau^-$ )            |
|          | 0              | neutrino elettronico ( $\nu_e$ ) | neutrino muonico ( $\nu_\mu$ ) | neutrino tau ( $\nu_\tau$ ) |

Analogamente, con cariche opposte, troveremo le antiparticelle.

### Particelle Composte

Le particelle composte (dette anche *Adroni*) possono essere di due tipi, *mesoni* e *barioni*. I barioni sono particelle composte da 3 quark, i mesoni da un quark ed un antiquark. Ad esempio, troviamo barioni come protoni e neutroni

$$\begin{aligned}p^+ &= uud \\ n &= udd \\ \dots\end{aligned}$$

E mesoni come kaoni e pioni

$$\begin{aligned}\pi^+ &= u\bar{d} \\ \pi^- &= \bar{u}d \\ K^+ &= u\bar{s} \\ K^0 &= s\bar{d} \\ \dots\end{aligned}$$

### Spin

Una caratteristica intrinseca delle particelle fondamentali è lo *spin*, che è l'analogia quantistica della rotazione.

Tutti i quark ed i leptoni hanno spin semi-intero, mentre i bosoni vettori hanno spin intero

### Numeri Quantici

Le conservazioni in fisica nucleare e subnucleare sono date dalle conservazioni di numeri particolari.

Tali numeri sono

1. *numero di quark*  $n_q$  che vale  $\pm\frac{1}{3}$  per ogni quark (o antiquark),
2. *numero Barionico*  $B$ ,  $B = \frac{1}{3}(n_q + n_{\bar{q}})$
3. *numero Leptonico*  $L$ ,  $L = 1$  per ogni leptone e  $L = -1$  per ogni antileptone

### 1.3 Osservabili Astrofisiche

Le informazioni astrofisiche provengono da:

- Fotoni
- Raggi Cosmici
- Meteoriti
- Onde Gravitazionali

Per i fotoni è possibile misurare varie grandezze

- Intensità
- Spettro
- Polarizzazione
- Statistica

Le prime due grandezze sono misurate con il *Flusso* e la *Brillanza* delle sorgenti astrofisiche

#### 1.3.1 Flusso e Brillanza

Il Flusso specifico è una grandezza scalare, che viene misurata nel caso che la sorgente astrofisica sia approssimabile ad un punto a grandi distanze, come nel caso delle stelle. Esso è dato da

$$F_\nu = \frac{dE}{dt dA d\nu} \quad (1.10)$$

La Brillanza specifica invece, è una grandezza scalare utilizzata quando la sorgente astrofisica è diffusa e non si conosce la precisa provenienza dei fotoni, come nel caso delle galassie e della polvere interstellare. È una funzione delle coordinate polari, ed è data da

$$B_\nu = \frac{dE}{dt dA d\Omega d\nu} \quad (1.11)$$

È possibile indicare il flusso e la brillanza, oltre che ad una frequenza specifica ( $\nu$ ) ad un numero d'onde ( $\sigma$ ) o ad una lunghezza d'onda specifica ( $\lambda$ ) tramite le trasformazioni seguenti, che saranno analoghe per la brillanza

$$\nu F_\nu = \lambda F_\lambda = \sigma F_\sigma$$

Le unità di misura di  $F_\nu$  e  $B_\nu$  sono

$$[F_\nu] = \left[ \frac{J}{s \cdot m^2 \cdot Hz} \right]$$

$$[B_\nu] = \left[ \frac{J}{s \cdot m^2 \cdot Hz \cdot sr} \right]$$

**Radiazione in una cavità isoterma**

La densità di energia per angolo solido ( $\Omega$ ) è data dalla formula di Planck per un corpo nero

$$\rho_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.12)$$

La radiazione di corpo nero (o Brillanza) sarà data da  $c\rho_\nu$ , con  $h$  che è la costante di Planck e  $k$  che è la costante di Boltzmann

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.13)$$

Per definizione, un corpo nero è un corpo in equilibrio termodinamico, dove la radiazione (o spettro)  $B_\nu$  è una funzione della sola temperatura

Il luogo dei massimi di questa funzione è dato dalla formula

$$\lambda_{max}T = 0.0029 \text{ mK} \quad (1.14)$$





Parte I

**Astrofisica Stellare**



# 2 Stelle

---

## 2.1 Misure, Spettri e Luminosità

Le misurazioni da effettuare su una stella generica sono:

- Flusso specifico a diverse frequenze
- Distanza
- Luminosità specifica a diverse frequenze.

La Luminosità specifica ( $\mathcal{L}_\nu$ ) è legata allo spettro della stella, tramite il raggio della stessa, via la formula

$$\mathcal{L}_\nu = 4\pi r^2 B_\nu \int_{\Omega} \cos(\theta) d\Omega \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_\nu = 4\pi r^2 B_\nu \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = 4\pi^2 r^2 B_\nu$$

Se la sorgente della radiazione è un corpo nero, allora

$$\mathcal{L}_\nu(T, r) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{4\pi^2 r^2}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (2.2)$$

Un esempio di misure di flusso specifico, approssimabili ad un corpo nero è dato dallo spettro solare riportato nella figura seguente

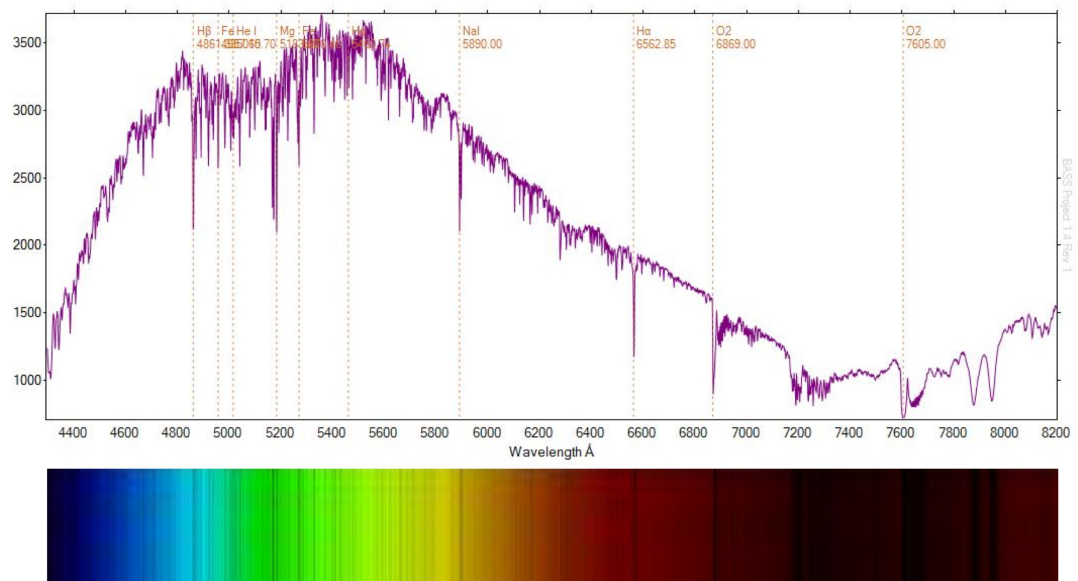


Figura 2.1: Spettro Solare misurato dallo Shenton Park Observatory

### 2.1.1 Diagramma Hertzsprung-Russel

Poiché gli spettri stellari sono approssimabili a spettri di corpi neri, e di conseguenza le luminosità saranno dipendenti solo dalle temperature, è possibile creare dei grafici della luminosità bolometrica (su tutte le frequenze) in funzione della temperatura.

Tale diagramma, è detto *diagramma H-R*, riportato in figura

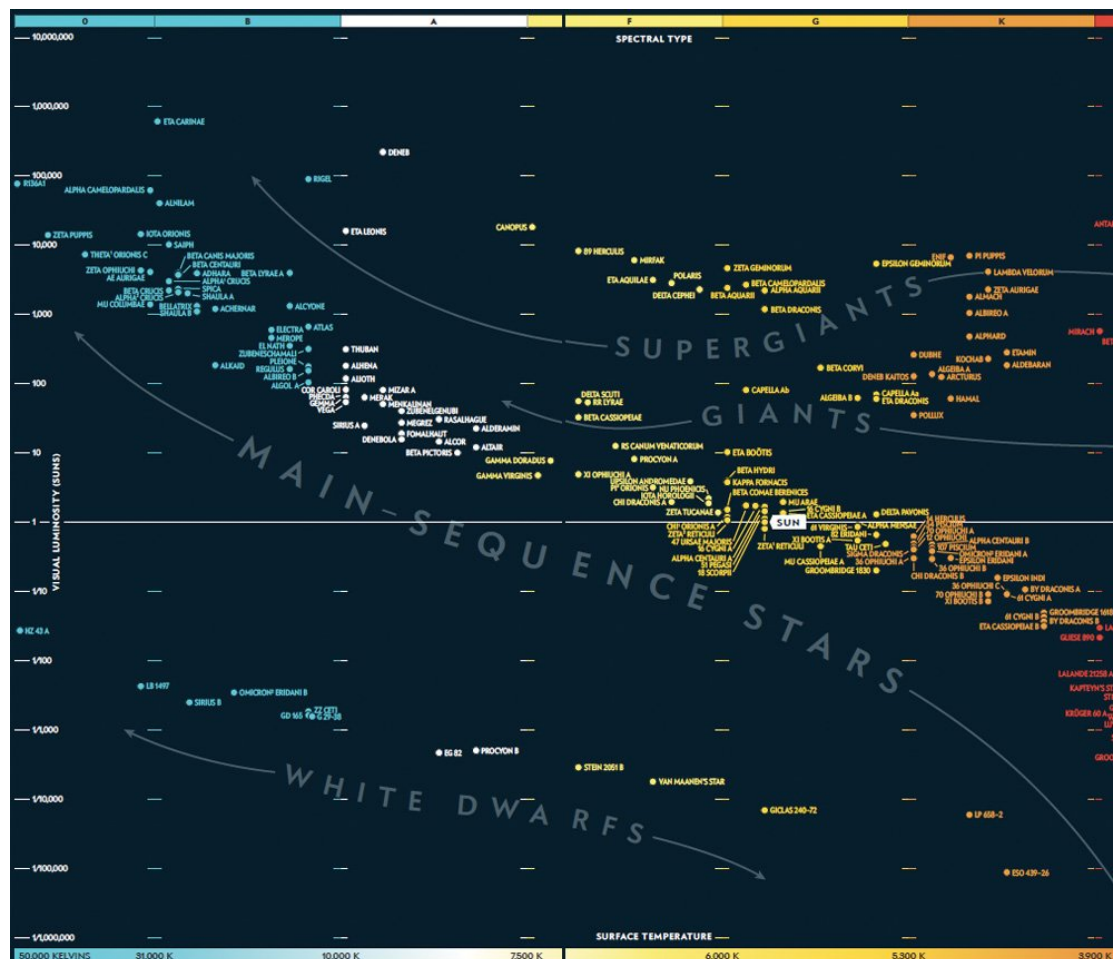


Figura 2.2: Diagramma H-R

In tale diagramma è possibile notare la correlazione tra vari gruppi di stelle, dividendolo in più rami

1. Nel ramo della sequenza principale,
2. Nel ramo delle giganti e delle supergiganti,
3. Nel ramo delle nane bianche

Poiché le stelle hanno un *"ciclo vitale"* dato dalla produzione energetica nei nuclei stellari, è possibile risalire alla fase evolutiva della stella dalla sua posizione nel diagramma.

Una stella *"giovane"* sarà agli inizi del ramo della sequenza principale, una stella *"in fin di vita"* sarà nel ramo delle giganti o delle supergiganti, ed una stella *"morta"* nel ramo delle nane bianche.

È possibile dividere i cicli vitali delle stelle a seconda della massa delle stesse. Una stella di massa solare effettua un ciclo lungo e poco violento rispetto alle corrispettive massicce, passando da uno stato iniziale comune di protostella e di stella di sequenza principale, per poi passare agli stadi finali di stella gigante, che lascerà il posto ad una nebulosa planetaria e, ad una nana bianca al centro della stessa.

Le stelle più massicce invece, passano molto velocemente attraverso gli stadi evolutivi, arrivando velocemente ai violentissimi stadi finali di Supernova, che lasciano al loro centro un oggetto collassato, solitamente sotto forma di buco nero o di stella di neutroni.

## 2.2 Nuclei Stellari e Cicli di Fusione

L'equilibrio energetico stellare è dato, dall'energia prodotta dalla fusione nucleare dei nuclei leggeri all'interno del nucleo della stella.

Il ciclo di fusione per le stelle di sequenza principale, di massa paragonabile a quella solare, è il ciclo  $p - p$  dato dalla catena di fusione dell'idrogeno ionizzato in elio

1.  $p^+ + p^+ \rightarrow d^+ + e^+ + \nu_e$
2.  $d^+ + p^+ \rightarrow {}^3\text{He}^{2+} + \gamma$
3.  ${}^3\text{He}^{2+} + {}^3\text{He}^{2+} \rightarrow \alpha + p^+ + p^+$

Notiamo che nella prima fusione, il positrone ed il neutrino elettronico sono date dal decadimento di un protone in un neutrone.

Notiamo che la fusione nucleare è un processo quantistico e non classico, data la barriera di potenziale Coulombiano, repulsivo, tra i protoni. Se studiamo l'analogo quantistico del problema, notiamo che la probabilità di penetrazione della funzione d'onda di un protone, attraverso la barriera Coulombiana di un secondo, è non-nulla, quindi rendendo possibile la fusione.

Notando che l'energia rilasciata da ogni reazione  $p - p$  è circa  $26.73 \text{ MeV}$ , e la luminosità del sole è nota, di valore all'incirca  $3.8 \times 10^{26} \text{ W}$ , è possibile stimare il tempo scala medio dello stadio di sequenza principale della nostra stella.

La frequenza di reazioni è

$$\dot{N} = \frac{\mathcal{L}}{E} = \frac{3.8 \times 10^{26}}{26.73 \times 10^6 \cdot 1.6 \times 10^{-19}} \frac{\text{W}}{\text{J}} = 9 \times 10^{37} \text{ s}^{-1}$$

Dato che la massa dei protoni del Sole è circa  $\frac{1}{30}$  del totale, possiamo trovare il numero di protoni nel sole

$$N_p \simeq \frac{M_{\odot}}{30m_p} = \frac{2 \times 10^{30} \text{ Kg}}{30 \cdot 1.7 \times 10^{-27} \text{ Kg}} = 3 \times 10^{55}$$

Troviamo infine un tempo scala di sequenza principale dato da

$$T_{MS} \simeq \frac{N_p}{\dot{N}} = 10^{17} \text{ s} = 10^{10} \text{ y}$$

Notiamo come infine, la durata della fase di sequenza principale della stella, sia proporzionale alla massa della stella ed inversamente proporzionale alla luminosità della stessa, indicando come stelle massicce e molto più luminose del nostro sole, abbiano in media una vita molto più breve, e stelle nane, ma molto meno luminose, abbiano una fase di sequenza principale molto più lunga.

Dalle analisi sperimentali troviamo che  $\mathcal{L} \propto M^{3.5}$  quindi  $T_{MS} \propto M^{-2.5}$ , indicando che per il nostro sole, la stima di  $T_{MS}$  è corretta.

Al raggiungimento di questo tempo scala, La stella termina l'idrogeno nel suo nucleo, esce dalla sequenza principale, e inizia un processo di contrazioni continue, permettendo la fusione del  ${}^4\text{He}^{2+}$  formatosi durante la fase di sequenza principale, ed in seguito tutti gli elementi successivi fino ad arrivare al Ferro, che fondendo effettua una reazione endoterma, consumando energia e creando uno sbilancio energetico nell'equilibrio stellare, causando il collasso totale della stella.

Il tutto può essere schematizzato in un ciclo di fusioni e collassi della stella, come in figura.

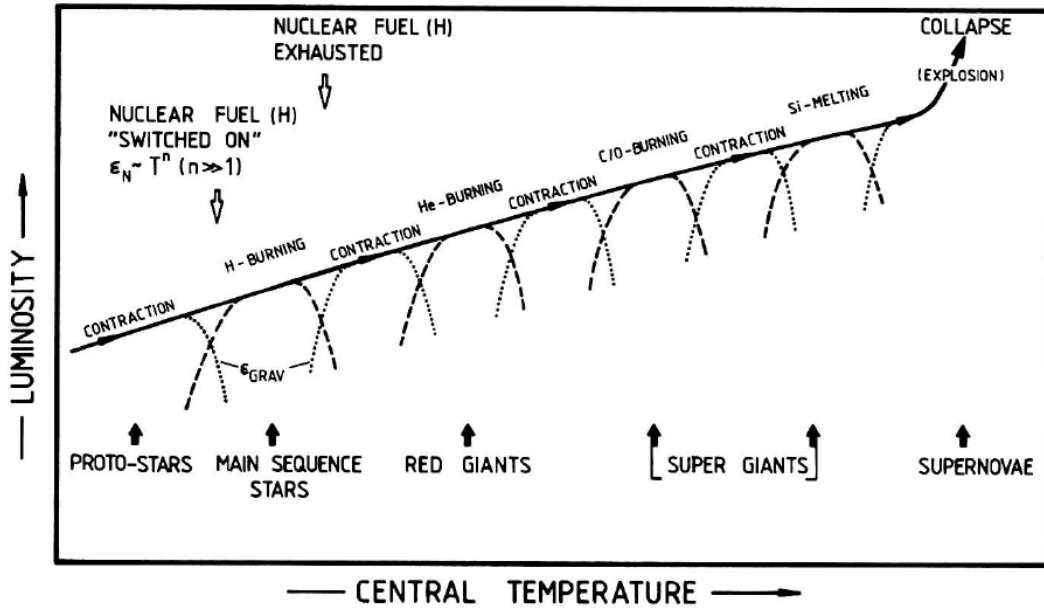


Figura 2.3: Ciclo stellare, dalla fase protostellare alla fase di nova o supernova

Nelle stelle giganti, dove l'idrogeno è stato esaurito, troviamo un altro ciclo di fusione, denominato  $3 - \alpha$ , dove i nuclei di elio prodotti in sequenza principale vengono fusi in berillio 8 ed in carbonio 12

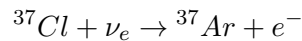
1.  $\alpha + \alpha \rightarrow {}^8\text{Be}$
2.  $\alpha + {}^8\text{Be} \rightarrow {}^{12}\text{C} + 2\gamma$

Ed in fine, nelle stelle di sequenza principale, ma di massa molto superiore a quella solare, troviamo un nuovo ciclo, detto ciclo CNO che costituisce nell'utilizzo di carbonio, azoto ed ossigeno come catalizzatori per la fusione dell'idrogeno.

A questo punto insorge un problema, come sappiamo che nel Sole avviene il ciclo di fusione protone protone, dato che non possiamo osservare direttamente nel nucleo dello stesso?

Poiché nelle 4 reazioni possibili di tipo  $pp$  ( $pp1$ ,  $pp2$ ,  $pp3$ ,  $hep$ ) c'è una produzione di neutrini elettronici  $\nu_e$ , è possibile utilizzare rivelatori per la misura del flusso di neutrini solari.

Negli anni '60 è stato tentato un primo esperimento con l'utilizzo del tetracloroetilene  $\text{C}_2\text{Cl}_4$ , dove si è tentato di sfruttare la reazione del  $\text{Cl}$  con i  $\nu_e$ , dove, i neutrini con energia  $> 0.9 \text{ MeV}$  reagiscono con il cloro, formando argon 37 ed un elettrone nella reazione



Eseguendo qualche conto, è possibile stimare la misura attesa.

Indicando con  $SNU$  le Solar Neutrino Units, con la conversione in eventi/secondo data da

$$1 \text{ SNU} = 10^{-36} \text{ s}^{-1}$$

Troviamo che il flusso atteso è circa  $6 \text{ SNU}$ .

Il risultato dell'esperimento è una misura di circa  $3 \text{ SNU}$ , di gran lunga inferiore alla misura attesa.

Questa differenza di  $3 \text{ SNU}$  è stata poi spiegata da Bruno Pontecorvo, indicando che il neutrino oscilla tra i tre sapori possibili ( $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ ), per causa di tre autostati di massa non nulla dello stesso neutrino

## 2.3 Atmosfere Stellari e Spettroscopia

Utilizzando a nostro favore le leggi della meccanica quantistica è possibile studiare la composizione chimica di stelle e oggetti astrofisici lontani, con lo studio del flusso di fotoni a diverse frequenze ( $F_\nu$ ).

Poiché i fotoni con egual energia dei livelli energetici atomici vengono assorbiti dagli atomi stessi, è possibile, tramite uno studio degli spettri a diverse frequenze (e quindi energie), descrivere con precisione la composizione isotopica delle atmosfere stellari, della polvere interstellare e delle atmosfere planetarie.

Uno spettro stellare ampiamente studiato e conosciuto è lo spettro solare, riportato in parte in figura



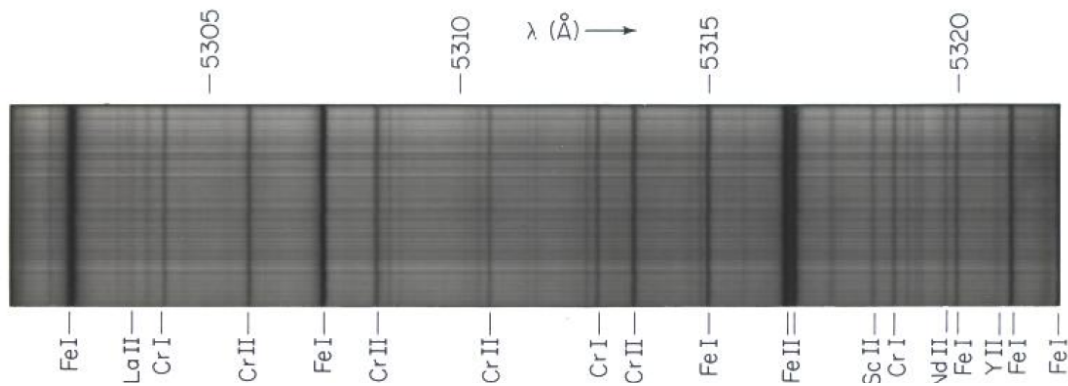


Figura 2.4: Piccola parte dello spettro d'assorbimento solare

Tale spettro d'assorbimento, è riproducibile teoricamente approssimando le zone interne del Sole come un corpo nero, e utilizzando le frequenze tipiche dei livelli di energia delle specie chimiche presenti nell'atmosfera del Sole.

La presenza di queste righe è data dalla quantizzazione dell'energia e dell'orbita degli elettroni attorno all'atomo, la loro separazione può essere calcolata nel caso dell'idrogeno, tramite la formula di Balmer

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (2.3)$$

Dove il  $n \in \mathbb{N}$  è il livello energetico considerato ed  $R$  è la costante di Rydberg.

Elementi diversi creano spettri diversi, quindi è possibile determinare la natura di un oggetto, nel nostro caso stelle, dallo spettro di assorbimento.

## 2.4 Spettri

La spiegazione della presenza di queste linee di assorbimento ed emissione stellari è data dalla meccanica quantistica.

Per le righe dell'Idrogeno è possibile ottenere una soluzione esatta, risolvendo il problema dei due corpi quantistico.

La massa ridotta dell'atomo d'Idrogeno è data da

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = 0.9994556 m_e$$

E calcolando classicamente troviamo

$$\mu \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$$

$$K = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{e^2}{2r} = -\frac{U}{2}$$

$$E = -K = -\frac{e^2}{2}$$

Invece, quantisticamente, troviamo tramite la quantizzazione del momento angolare  $L = \mu v r = n\hbar$

$$r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{\mu e^2} = r_0 n^2$$

E di conseguenza

$$E_n = -\frac{e^2}{2r_n} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

I livelli orbitali quantizzati sono quindi dati dalla quantizzazione dell'energia, secondo la formula  $E_n = E_{ion} \frac{1}{n^2}$ , con  $E_{ion} = -13.6 \text{ eV}$  l'energia di ionizzazione dell'atomo d'idrogeno.

Con uno spostamento dell'elettrone tra i livelli, troviamo che per la conservazione dell'energia, dev'essere emesso o assorbito un fotone con energia pari alla differenza d'energia tra i livelli, secondo la formula  $\Delta E = h\nu$ . Convertendo frequenza in lunghezza d'onda troviamo che  $\lambda_\gamma = \frac{hc}{\Delta E}$ . Risulta ovvia quindi la spaziatura tra i livelli energetici, che sarà data infine sostituendo la formula precedentemente ottenuta nella successione dei livelli d'energia.

$$\begin{aligned} \Delta E_{ab} &= E_{ion} \left( \frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right) \\ \nu_{ab} &= \frac{\Delta E}{h} \\ \frac{1}{\lambda_{ab}} &= \frac{\Delta E}{hc} \end{aligned}$$

Ponendo  $R_H \frac{E_{ion}}{hc} = 109677.5 \text{ cm}^{-1}$  troviamo la cosiddetta *costante di Rydberg* per l'Idrogeno, ed infine, invertendo la relazione, troviamo che

$$\lambda_{ab} = \frac{1}{-R_H \left( \frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right)}$$

Fissando  $n_a = 1$  troviamo la serie di righe di Lyman (nella banda UV), per  $n_a = 2$  troviamo la serie di Balmer (nella banda V) e per  $n_a = 3$  troviamo la serie di Paschen (nella banda IR).

Con l'avvento della modernizzazione e formalizzazione della meccanica quantistica è ormai noto che  $L \neq n\hbar$ , ma è un'approssimazione della formula  $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$  con  $l$  intero.

### 2.4.1 Magnitudini

Per esprimere flussi e flussi specifici provenienti dalle stelle è utile introdurre il concetto di *magnitudine*.

La scala delle magnitudini apparenti è una scala logaritmica dei flussi, definita storicamente dalla formula

$$m_v = -2.5 \log_{10} \left( \frac{F_v}{F_{v,0}} \right)$$

Con il flusso  $F_{v,0}$  definito come il flusso di una stella di riferimento.

Nel caso di misure non monocromatiche integrate su una banda con efficienza spettrale  $e(\nu)$  troviamo

$$m_{banda} = -2.5 \log_{10} \left( \frac{\int_0^\infty F_\nu e(\nu) d\nu}{\int_0^\infty F_{\nu,0} e(\nu) d\nu} \right)$$

### 2.4.2 Classificazione Spettrale

Il primo spettro stellare che è stato misurato, per ovvie ragioni di vicinanza, è stato lo spettro della luce solare, nel 1814 da Joseph von Fraunhofer, che indicò le righe scure più evidenti con lettere dalla A alla K. Queste linee al giorno d'oggi sono ben noti effetti di transizioni quantistiche negli elementi chimici presenti nella fotosfera solare.

Con l'avanzare del tempo, dopo Fraunhofer, si è sviluppato il metodo spettroscopico, che si basava su tre leggi empiriche di Kirchhoff, che stipulavano che

1. Un oggetto caldo o un gas denso e caldo producono uno spettro continuo
2. Un gas caldo e rarefatto produce uno spettro discreto di righe brillanti
3. Un gas freddo di fronte ad un oggetto con emissione continua produce una serie discreta di righe scure

Nel caso astronomico, quindi, le righe spettrali sono spiegate dalla terza legge, interpretando le zone interne della stella come un corpo nero, e la fotosfera gassosa all'esterno come il gas "freddo" e rarefatto che assorbe i fotoni delle lunghezze d'onda caratteristiche degli elementi che lo compongono. Un primo tentativo di classificazione di questi spettri è stato fatto da Padre Secchi, che divise le stelle in 4 categorie principali

- Tipo 1, per le stelle Blu-Bianche (e.g. Sirio)  
Sottotipo 1 Orionis, per le stelle di tipo 1 con bande strette
- Tipo 2, per le stelle Gialle-Arancioni (e.g. Sol, Capella, Procione, Arturo, Aldebaran)
- Tipo 3, per le stelle con spettri a banda larga (e.g. Betelgeuse)
- Tipo 4, per le stelle Rosse-Scure con bande del carbonio
- Tipo 5, per le stelle con linee d'emissione (e.g. Sheliak)

Successivamente, un gruppo di ricerca di Harvard nei primi anni del '900, ha definito la classificazione spettrale utilizzata dagli astrofisici moderni, la cosiddetta *classificazione di Harvard*.

La classificazione segue l'ordine **O, B, A, F, G, K, M** e, ad ogni lettera, corrispondono stelle con una morfologia spettrale differente.

La classificazione base di Harvard è data dalla seguente tabella

| Classe | Caratteristiche Spettrali | Colore        | Temperatura              |
|--------|---------------------------|---------------|--------------------------|
| O      | HeI, HeII, weak H         | Blu           | $T > 31000\ K$           |
| B      | HeI, H                    | Blu-Bianco    | $9570\ K < T < 31000\ K$ |
| A      | H, metalli ion            | Bianco        | $7100\ K < T < 9750\ K$  |
| F      | weak H, metalli ion       | Giallo-Bianco | $5950\ K < T < 7100\ K$  |
| G      | weak H, metalli ion e non | Giallo        | $5250\ K < T < 5950\ K$  |
| K      | weak H, metalli           | Arancione     | $3950\ K < T < 5250\ K$  |
| M      | metalli, molecole         | Rosso         | $2000\ K < T < 3950\ K$  |

Una versione aggiornata della classificazione di Harvard è quella di Harvard-Yerkes, che tiene conto delle differenze spettrali e aggiunge tre classi stellari.

| Classe     | Tipologia di Stella | Caratteristiche Spettrali       | Temperatura              |
|------------|---------------------|---------------------------------|--------------------------|
| O          | //                  | HeI, HeII, weak H               | $T > 31000\ K$           |
| B          | //                  | HeI, H                          | $9570\ K < T < 31000\ K$ |
| /W (C-N-O) | Wolf Rayet Slash    | HeI, HeII, H, emissione         | $T > 9570\ K$            |
| A          | //                  | H, metalli ion                  | $7100\ K < T < 9750\ K$  |
| F          | //                  | weak H, metalli ion             | $5950\ K < T < 7100\ K$  |
| G          | //                  | weak H, metalli ion e non       | $5250\ K < T < 5950\ K$  |
| K          | //                  | weak H, metalli                 | $3950\ K < T < 5250\ K$  |
| M          | //                  | metalli, molecole               | $2000\ K < T < 3950\ K$  |
| L          | Nana Rossa          | Metalli, Metalli alcalini       | $1500\ K < T < 2000\ K$  |
| T          | Nana Bruna          | Bande del Metano                | $550\ K < T < 1500\ K$   |
| Y          | Subnana Bruna       | Bande dell'Ammoniaca            | $250\ K < T < 550\ K$    |
| W (C-N-O)  | Wolf Rayet          | Presenza di Emissione           | //                       |
| C          | Stella di Carbonio  | Bande del $^{12}CN$ e $^{13}CN$ | //                       |
| S          | Stella di Zirconio  | Bande del ZrO                   | //                       |
| D          | Nana Bianca         | //                              | //                       |

| Codice | Peculiarità  |
|--------|--|
| P      | Nana Bianca magnetica con polarizzazione dello spettro |
| E      | Linee d'emissione                                      |
| H      | Nana Bianca magnetica senza polarizzazione             |
| V      | Variabile  |
| PEC    | Peculiarità spettrali                                  |

Nella stessa classificazione, è presente un codice aggiuntivo che indica la tipologia di stella presa in studio

| Codice                   | Tipologia                        | Esempio       |
|--------------------------|----------------------------------|---------------|
| Ia <sup>+</sup> oppure 0 | Ipergiganti                      | Cygnus OB2#12 |
| Ia                       | Supergiganti luminose            | $\eta$ CMa    |
| Iab                      | Supergiganti mediamente luminose | $\gamma$ Cyg  |
| Ib                       | Supergiganti                     | $\zeta$ Per   |
| II                       | Giganti luminose                 | $\beta$ Lep   |
| III                      | Giganti                          | Acturus       |
| IV                       | Subgiganti                       | $\gamma$ Cas  |
| V                        | Sequenza principale              | Achenar       |
| sd-                      | Subnane                          | HD 149382     |
| D-                       | Nane Bianche                     | Van Maanen 2  |

Le particolarità degli spettri sono poi riassunte in una seconda tabella

| Codice        | Peculiarità   |
|---------------|---|
| :             | valore spettrale non chiaro   |
| ...           | peculiarità non specificate   |
| !             | peculiarità speciali  |
| comp          | spettro composito   |
| e             | presenza di linee d'emissione   |
| [e]           | presenza di linee d'emissione non permesse                                      |
| er            | presenza di un centro d'emissione inverso                                       |
| eq            | profilo di emissione del tipo P-Cygni   |
| f             | linee di emissione di NIII e HeII   |
| f*            | linee di emissione $\lambda_{NIV} > \lambda_{NIII}$                             |
| f+            | linee di emissione SiIV e NIII  |
| (f)           | linee di emissione NIII con linee HeII deboli o assenti                         |
| (f+)          |   |
| ((f))         | forti linee di emissione del HeII, linee di emissione del NIII deboli o assenti |
| ((f*))        |   |
| h             | stella di Wolf Rayet con linee di emissione dell'H                              |
| ha            | stella di Wolf Rayet con linee di emissione ed assorbimento dell'H              |
| He wk         | linee d'emissione dell'He deboli  |
| k             | assorbimento interstellare  |
| m             | caratteristiche metalliche nello spettro  |
| n             | assorbimento nebuloso   |
| nn            | assorbimento diffuso  |
| neb           | spettro di una nebulosa misto allo spettro stellare                             |
| p             | peculiarità non specificata   |
| pq            | spettro peculiare (i.e. Nova)   |
| q             | presenza di linee di redshift e blueshift                                       |
| s             | linee di assorbimento nitide e strette  |
| ss            | linee di assorbimento nitide e strettissime                                     |
| sh            | spettro di una shell star (presenti polveri in orbita)                          |
| var or v      | stella variabile  |
| wl or wk or w | linee di assorbimento o emissione deboli  |
| [Elemento]    | assorbimento anormale dato dall'elemento in questione                           |

Esempi di spettri stellari e di loro classificazione sono riportati nell'immagine successiva

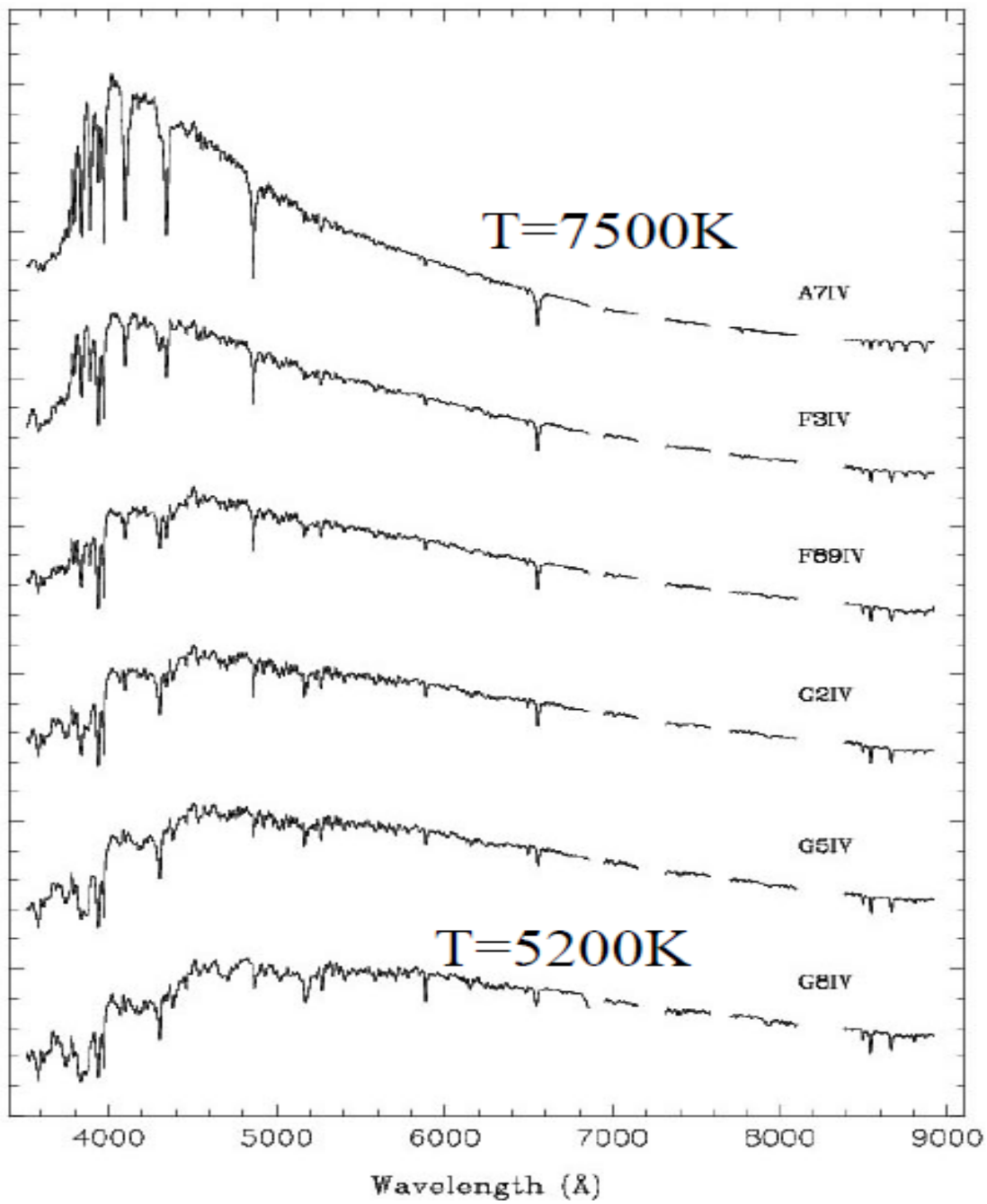


Figura 2.5: Principali spettri di stelle di subsequenza principale

## 2.5 Righe Spettrali

Valutando lo spettro di più stelle è evidente notare che tutti seguono approssimativamente un continuo dato dalla legge di corpo nero, che ci da una stima della temperatura superficiale.

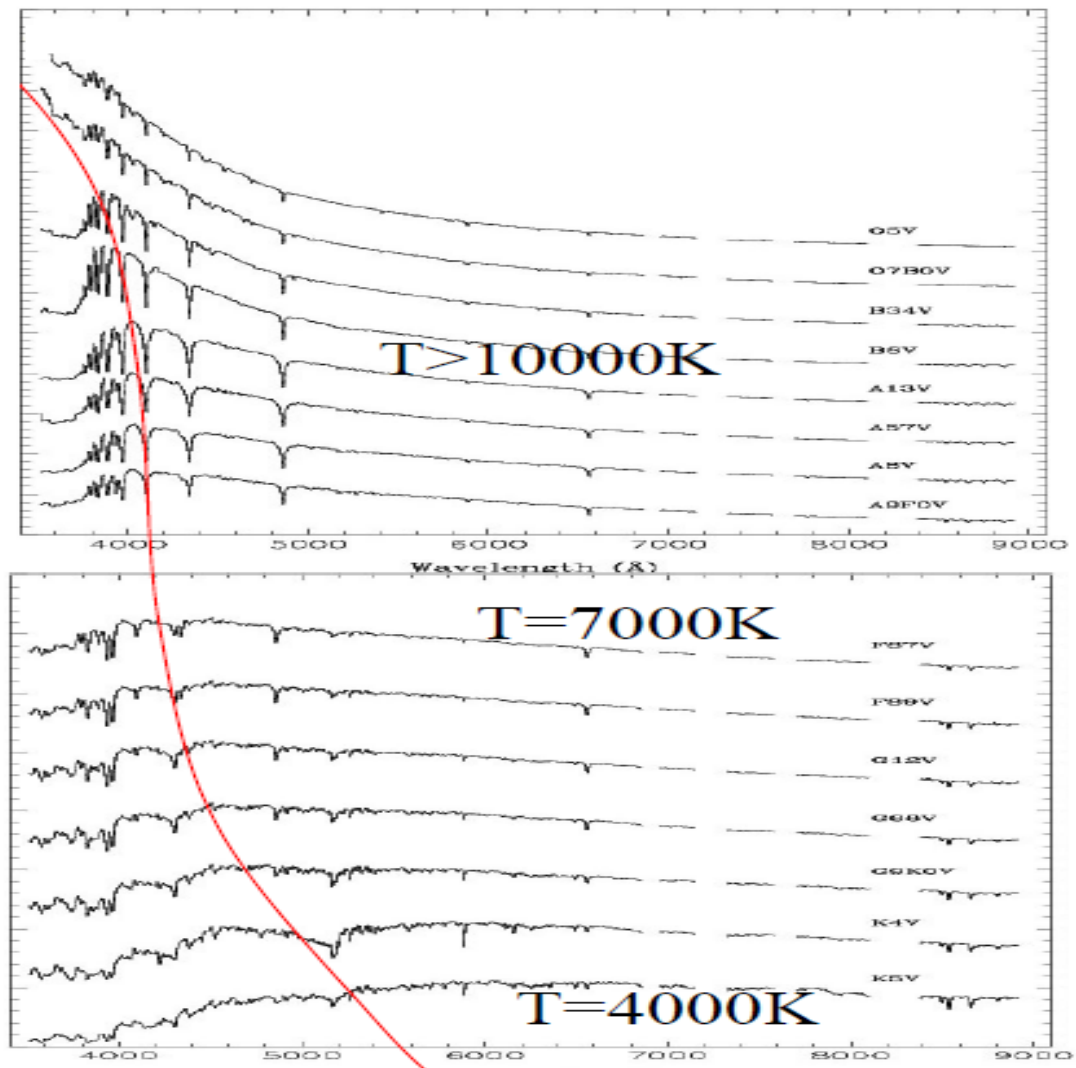


Figura 2.6: Spettri di stelle di sequenza principale. La linea rossa è la linea dei massimi del corpo nero, data dalla formula  $\lambda T = 0.29 \text{ cm } K$

Si nota che alcune righe di emissione particolari, come le righe della serie di Balmer dell'Idrogeno, hanno un'intensità che dipende dalla temperatura della superficie stellare, l'intensità massima si trova per stelle di tipo A0, con temperatura superficiale intorno ai 9500 K. Per capire questo funzionamento è necessario utilizzare la meccanica statistica



applicata alla fisica atomica.

Per un gas in equilibrio termico, la densità di probabilità del numero di particelle ad una data velocità  $v$  è data dalla distribuzione di Boltzmann

$$n(v)dv = 4\pi^2 nv^2 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{kT}} dv \quad (2.4)$$

Il quale valore di aspettazione è  $E(v) = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$  e la deviazione standard è  $\sigma_v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ . Data la minore temperatura superficiale in contrasto alla temperatura nei nuclei stellari, è possibile approssimare il sistema alla versione classica, deducendo dalla distribuzione di Maxwell che nell'atmosfera stellare, gli atomi trasferiscono energia gli uni agli altri tramite collisioni, realizzando una situazione di equilibrio con una definita distribuzione degli elettroni negli orbitali atomici. Questa distribuzione dipende dall'energia termica disponibile e dai livelli energetici dei vari orbitali.

Se prendiamo  $s_a$  come il set di numeri quantici che definiscono uno stato  $a$  con energia  $E_a$  e  $s_b$  il set dello stato  $b$ . Per Boltzmann la probabilità di occupazione degli stati sarà

$$\frac{P(s_b)}{P(s_a)} = \frac{g_b e^{-\frac{E_b}{kT}}}{g_a e^{-\frac{E_a}{kT}}}$$

Dove  $g_b$  e  $g_a$  è il livello di degenerazione dei due stati. Troviamo quindi, che il rapporto del numero di atomi con energia  $E_a$  ed  $E_b$  sarà

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b e^{-\frac{E_b}{kT}}}{g_a e^{-\frac{E_a}{kT}}} = \frac{g_b}{g_a} e^{-\frac{E_b - E_a}{kT}}$$

Notiamo che, inserendo i dati dell'idrogeno per il livello fondamentale ed il primo livello eccitato, per avere  $N_2 = N_1$  dovremo avere temperature di 85400  $K$ , cosa che sappiamo incorretta, poiché non spiegherebbe il picco a 9500  $K$  delle righe di Balmer.

Tenendo conto della ionizzazione atomica è necessario quindi introdurre una funzione aggiuntiva  $\mathcal{Z}$ , detta funzione di partizione, che fa la somma pesata su come un atomo può disporre i suoi elettroni con la stessa energia. Questa funzione è definita come

$$\mathcal{Z} = g_1 + \sum_{i=2}^{\infty} g_i e^{-\frac{E_i - E_1}{kT}} \quad (2.5)$$

All'equilibrio, le funzioni  $\mathcal{Z}_j$  e  $\mathcal{Z}_{j+1}$  sono le funzioni di partizione dell'atomo prima e dopo la ionizzazione.

Indicando con  $n_e$  il numero di elettroni liberi e ponendo  $E_i - E_j = \chi_i$  abbiamo che il rapporto tra gli atomi ionizzati  $i + 1$  volte e  $i$  volte è dato dall'*equazione di Saha*

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2\mathcal{Z}_{i+1}}{n_e \mathcal{Z}_i} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \quad (2.6)$$

Indicando la pressione degli elettroni  $p_e = n_e kT$  troviamo una seconda forma dell'equazione di Saha

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2kT \mathcal{Z}_{i+1}}{p_e \mathcal{Z}_i} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_i}{kT}}$$

Per una pressione di 20 *Pa* troviamo che sotto i 5000 *K* l'idrogeno è completamente neutro, ed è completamente ionizzato a 10000 *K*. Nella maggior parte delle atmosfere stellari, le temperature sono comprese entro questi due estremi, quindi spiegando i risultati osservativi.

L'intensità delle righe di Balmer dell'Idrogeno dipende dalla frazione di tutti gli atomi d'idrogeno che si trova nello stato fondamentale e nel primo stato eccitato (sia ionizzati che non ionizzati), quindi

$$\frac{N_2}{N_{tot}} = \frac{N_1}{N_I + N_{II}} = \frac{\frac{N_2}{N_1}}{1 + \frac{N_2}{N_1}} \frac{1}{1 + \frac{N_{II}}{N_I}}$$

Effettuando i calcoli troviamo che il numero di atomi che produce le righe di Balmer è una frazione piccola del numero totale, ed ha un massimo d'emissione a 9500 *K*. Oltre questa temperatura a causa della ionizzazione degli atomi d'Idrogeno, che non producono più righe d'emissione, abbiamo un calo nell'intensità delle righe.

Questo ragionamento è possibile con qualsiasi elemento chimico, poiché le atmosfere stellari non sono composte solo da Idrogeno ed Elio.

Troviamo qui riportato un grafico che mostra la dipendenza tra l'intensità della linea e la temperatura superficiale (quindi la classe spettrale) della stella

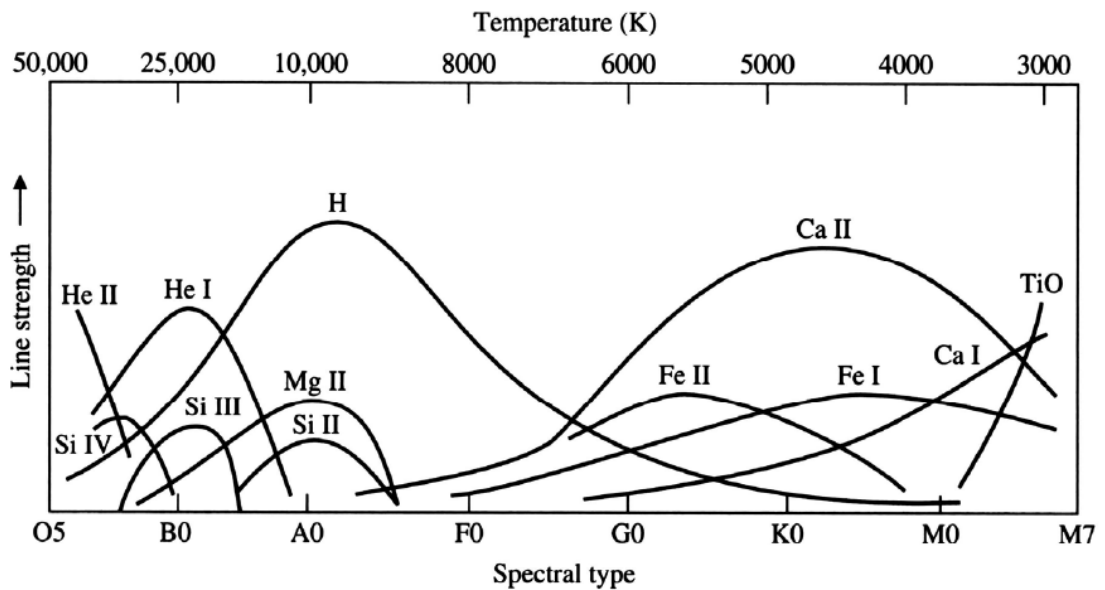


Figura 2.7: Intensità delle linee in funzione della classe spettrale

La densità, oltre alla temperatura della stella, è un fattore determinante nella struttura dello spettro stellare. Le stelle giganti e supergiganti, data la loro atmosfera rarefatta ergo le rare interazioni atomiche, presentano delle righe strette dell'Idrogeno, invece nelle stelle di sequenza principale l'atmosfera è molto meno rarefatta rispetto alle stelle giganti, quindi le righe vengono allargate per effetto Doppler

### 2.5.1 Profili di Riga

È possibile estrarre informazioni dalla riga, calcolando la larghezza equivalente della riga, tramite la formula

$$W = \int \frac{F_c - F_\lambda}{F_c} d\lambda \quad (2.7)$$

Dalla meccanica quantistica è possibile dedurre che esiste un'indeterminazione sulle energie dei livelli atomici, tramite il principio d'indeterminazione, che ci indica che

$$\delta E = \frac{h}{2\pi\Delta t}$$

Collegando la formula trovata all'energia dei fotoni otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \nu = \frac{\Delta E_{ij}}{h} \\ \delta \Delta E_{ij} = \frac{h}{\Delta t_0} \end{cases}$$

Ponendo  $\Delta t_0$  il tempo di attesa per la transizione spontanea tra i livelli d'energia troviamo l'allargamento della riga naturale  $\Delta\nu$

$$\Delta\nu = \frac{\delta \Delta E_{ij}}{h} = \frac{\hbar}{h\Delta t_0} = \frac{1}{2\pi\Delta t_0}$$

La distribuzione delle durate segue un profilo Lorentziano dato da

$$\phi(\nu) = \frac{\frac{\gamma}{2\pi}}{(\nu - \nu_0)^2 + (\frac{\gamma}{2\pi})^2}$$

### Allargamento Doppler

Se l'atomo è in movimento rispetto all'osservatore lungo un certo asse (per esempio l'asse  $z$ , con velocità  $v_z$ ), troviamo che la frequenza misurata è differente dalla frequenza naturale  $\nu_0$  dell'atomo

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{v_z}{c}$$

Dalla distribuzione di Maxwell troviamo che la densità di probabilità legata alle velocità sull'asse  $z$  sarà

$$f(v_z) = e^{-\frac{m_a v_z^2}{2kT}} dv_z$$

Tramite le relazioni di Doppler  $v_z = c \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \rightarrow dv_z = c \frac{d\nu}{\nu_0}$ , quindi, tramite la trasformazione  $f(v_z) \rightarrow f(\nu)$  troviamo

$$f(\nu) = A e^{-\frac{m_a c^2 (\nu - \nu_0)^2}{2\nu_0^2 kT}} \frac{d\nu}{\nu_0}$$

Che è esattamente un profilo Gaussiano, con deviazione standard

$$\Delta\nu = \frac{2\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2\ln(2)kT}{m_a}} \quad (2.8)$$

Valutando il tutto con l'aggiunta di una perturbazione data dall'atmosfera stellare (supponendole gaussiane), troviamo infine

$$\Delta\nu = \frac{2\nu_0}{c} \sqrt{\ln(2) \left( \frac{2kT}{m} + \langle v_{pert}^2 \rangle \right)} \quad (2.9)$$

Prendendo l'equazione 2.8 troviamo che, ponendo  $m_a = m_H$  e sostituendo frequenze in lunghezze d'onda, valutando per la linea dell'Idrogeno  $H_\alpha$  a  $656.5 \text{ nm}$ , otteniamo un allargamento Doppler  $\Delta\lambda \simeq 0.427 \text{ \AA}$

### Allargamento Collisionale

Data la presenza di elementi ionizzati nelle atmosfere stellari, un'interazione ione-atomo causa una perturbazione sui livelli energetici dell'ultimo, data la presenza di un campo elettrico. Questa variazione nei livelli, crea anche una variazione nell'energia dei fotoni emessi.

Questo tipo di interazione è detta interazione collisionale, e crea anch'essa un allargamento delle righe spettrali, detto comunemente come allargamento da pressione se questo tipo di interazione è frequente.

Il tempo collisionale caratteristico di un sistema simile sarà dato dalla densità numerica di particelle ( $n$ ), dalla sezione d'urto dell'atomo ( $\sigma$ ) e dalla velocità media delle particelle

$$\Delta t \simeq \frac{l}{v} = \frac{1}{n\sigma v} = \frac{1}{n\sigma} \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

Analogamente all'allargamento Doppler, ritroviamo un profilo Lorentziano  $\phi(\nu)$  con allargamento

$$\Delta\nu \simeq \frac{1}{\pi\Delta t} = \frac{n\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Tramite le note conversioni tra  $\Delta\lambda$  e  $\Delta\nu$  troviamo che

$$\Delta\lambda \simeq \frac{\lambda}{c\pi\Delta t} = \frac{\lambda^2 n\sigma}{c\pi} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Nell'immagine seguente troviamo una descrizione grafica della differenza tra una riga (teorica) perturbata con un effetto Gaussiano e una riga approssimativamente reale, con una perturbazione di effetto Lorentziano

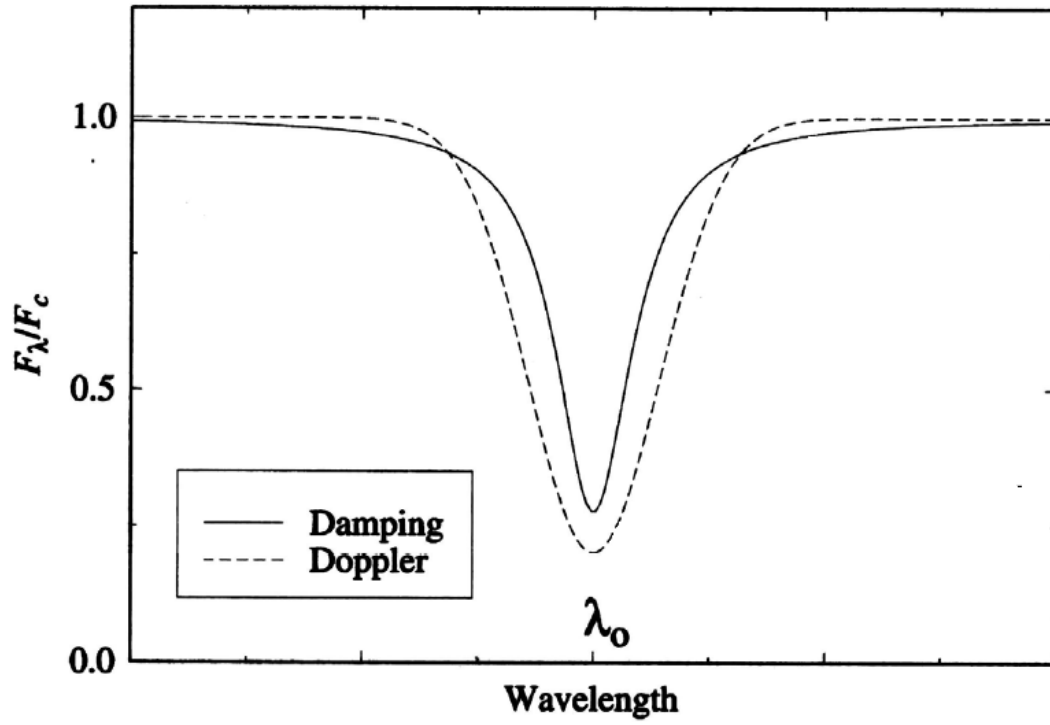


Figura 2.8: Distribuzione Gaussiana (allargamento Doppler) e Lorentziana (Damping) per una riga spettrale

### Profilo di Voight

È possibile scrivere il profilo complessivo come una media di profili Lorentziani mediati sulle diverse velocità degli atomi, con pesi pari alla probabilità Maxwelliana delle velocità. Utilizzando la definizione di media pesata e ponendo la larghezza della riga pari a  $\Gamma$  troviamo

$$\phi(\nu) = \frac{\Gamma}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}}}{(\nu - \nu_0 - \nu_0 \frac{v_z}{c})^2 + (\frac{\Gamma}{4\pi^2})^2} dv_z$$

Definendo la funzione di Voight  $H(a, u)$  come

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (u - y)^2} dy$$

Troviamo che infine il profilo di riga Lorentziano può essere definito come

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{4\pi}} H\left(\frac{\Gamma}{4\pi\Delta\nu_D}, \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}\right) \quad (2.10)$$

Dove  $\Delta\nu_D$  è l'allargamento Doppler della riga.

## 2.6 Struttura Stellare

Assumiamo che una generica stella può essere approssimata ad una struttura con simmetria sferica.

Un elemento di massa  $dm$  posto a distanza  $r$  dal centro è sottoposto, per il teorema di Gauss, ad una forza gravitazionale data dalla massa  $M(r)$  interna ad una sfera dello stesso raggio  $r$

$$dF_P = -\frac{GM(r)}{r^2}dm = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}drdS$$

Poiché  $dp = \frac{dF_P}{dS}$  abbiamo

$$dP = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}dr$$

L'equilibrio idrostatico sarà dato quindi, integrando su tutta la stella di raggio  $R$

$$4\pi \int_0^R \frac{dP}{dr} r^3 dr = -4\pi G \int_0^R \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} dr$$

Il secondo membro è riscrivibile nel modo

$$-4\pi G \int_0^R \frac{M(r)}{r} r^2 \rho(r) dr = -G \int_0^R \frac{M(r)}{r} dM = \mathcal{U}_G$$

Integrando per parti nel primo membro e notando che per le condizioni al contorno  $P(R) = 0$

$$4\pi \int_0^R \frac{dP}{dr} r^3 dr = 12\pi \int_0^R P(r) r^2 dr$$

Utilizzando la definizione di media troviamo

$$-3 \langle P \rangle V = \mathcal{U}_G \rightarrow \langle P \rangle = -\frac{\mathcal{U}_G}{3V}$$

Poiché per un gas di particelle non relativistiche troviamo che, se la densità numerica è  $n = \frac{N}{V}$  e l'impulso è dato da  $p = mv$ , l'equazione precedente si riscrive come

$$\langle P \rangle = \frac{n}{3} \langle mv^2 \rangle = \frac{2\mathcal{U}_G}{3V}$$

Confrontando le espressioni di  $\langle P \rangle$  ritroviamo il teorema del viriale per le stelle

$$2T + \mathcal{U}_G = 0$$

L'energia totale sarà quindi

$$E = T + \mathcal{U}_G = -T = \frac{\mathcal{U}_G}{2}$$

Possiamo equivalmente scrivere l'equazione di continuità, nella seguente forma

$$dM = 4\pi \rho r^2 dr$$

Questo definisce un sistema di equazioni a 3 incognite.

È possibile scrivere una terza equazione utilizzando l'equazione di stato del gas stellare, notando che il gas stellare è perfetto. È necessario valutare ulteriormente pure la pressione di radiazione stellare, data dalla produzione energetica per fusione nucleare nel nucleo stellare. Ponendo con  $R$  la costante di Rayleigh

$$P_{gas} = nkT = \frac{\rho RT}{\mu}$$

$$P_{rad} = \frac{aT^4}{3}$$

L'introduzione dell'equazione di stato implica l'introduzione di una quarta incognita, la temperatura, che in generale dipende dal raggio (esiste un gradiente di temperatura).

Se non sono presenti fenomeni convettivi, abbiamo che  $F \propto k(\rho, T) \frac{dT}{dr}$ , con  $k$  il coefficiente di opacità nel mezzo. L'espressione completa è data dall'equazione del trasporto radiativo

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa(\rho, T)\rho}{4acT^3}F$$

sostituendo il libero cammino medio dei fotoni come  $\lambda = \frac{1}{k(\rho, T)\rho}$  e notando che

$$\mathcal{L}(r) = 4\pi r^2 F(r)$$

Troviamo che

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa(\rho, T)\rho\mathcal{L}(r)}{16\pi acr^2T^3}$$

Che ci porta una nuova variabile, la luminosità. Si può scrivere un'equazione per  $\mathcal{L}(r)$  tramite la conservazione dell'energia.

Se indichiamo il coefficiente di produzione d'energia per unità di massa con  $\epsilon(\rho, T)$  ed indichiamo  $dm = 4\pi r^2 dr$  abbiamo la conservazione dell'energia nella forma

$$\frac{d\mathcal{L}}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon(\rho, T)$$

Quest'equazione, unita alle precedenti, forma un sistema di 5 equazioni differenziali in 5 incognite (dov'è supposta l'assenza di convezione), in linea di principio integrabile

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} & \text{Equilibrio idrostatico} \\ \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho & \text{Equazione di continuità} \\ P = P[\rho, T, \mu] & \text{Equazione di stato} \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa(\rho, T)\rho\mathcal{L}}{16\pi acr^2T^3} & \text{Equazione del trasporto} \\ \frac{d\mathcal{L}}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon(\rho, T) & \text{Conservazione della massa} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Le condizioni al contorno sono

$$\left\{ \begin{array}{l} M(0) = 0, \quad M(r) = M \\ \mathcal{L}(0) = 0, \quad \mathcal{L}(R) = \mathcal{L} \\ \rho(R) = 0 \\ P(R) = 0 \\ T(R) = T \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Le equazioni 2.11 possono essere riscritte in funzione di  $M$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dM} = -\frac{GM}{4\pi r^2} \\ \frac{dr}{dM} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho(r)} \\ \frac{dT}{dM} = -\frac{3\kappa(\rho, T)\mathcal{L}}{64\pi^2 a c r^4 T^3} \\ \frac{\mathcal{L}}{dM} = \epsilon(\rho, T) \\ P = P[\rho(r), T(r), \mu] \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Per il teorema di Vogt-Russel, se la massa complessiva e la composizione chimica della stella sono specificate, le equazioni 2.13 hanno una soluzione univoca.

Nella formulazione 2.11 è possibile combinare le prime due equazioni (equilibrio idrostatico e l'equazione di continuità) per ottenere dalla prima

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right] = -4\pi G \rho \quad (2.14)$$

È possibile porre una relazione tra  $P$  e  $\rho$  del tipo  $P = A \rho^{\frac{n-1}{n}}$  detta *modello politropico*, con  $n$  l'indice politropico ed  $A$  una costante.

Per  $n \rightarrow \infty$  si ottiene un gas perfetto isoterma, per  $n \rightarrow 0$  si ottiene un gas omogeneo, per  $n = \frac{3}{2}$  si ottiene un gas perfetto monoatomico adiabatico o un gas degenerare non relativistico, per  $n = 3$  si ottiene il *modello standard stellare* oppure un gas degenerare relativistico.



### 2.6.1 Modello Standard Stellare

Nel modello standard stellare si suppone che la pressione totale sia la somma della pressione del gas con la pressione di radiazione

$$P = P_g + P_r = \frac{R}{\mu} \rho T + \frac{1}{3} a T^4$$

In questo modello la pressione del gas è una frazione  $\beta$  della pressione totale, e il restante  $(1 - \beta)$  è la restante pressione di radiazione.

$$P_g = \beta P$$

$$P_r = (1 - \beta) P$$

Il rapporto tra le due pressioni è

$$\frac{P_g}{P_r} = \frac{\beta}{1 - \beta} = \frac{\frac{R}{\mu} \rho}{\frac{1}{3} a T^3}$$

È evidente che il rapporto diminuisce con l'aumentare della temperatura.

Per stelle con alte temperature (quindi masse elevate) la pressione di radiazione non può essere trascurata, mentre in stelle con masse comparabili o minori alla massa del Sole, abbiamo che  $1 - \beta \lesssim 10^{-4}$ , quindi  $P_r$  è trascurabile.

Dal rapporto derivato prima è possibile invertire la relazione e trovare  $T$

$$T^3 = \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{3R\rho}{\mu a} \rightarrow T = C \rho^{\frac{1}{3}}$$

E quindi, riscrivendo la pressione totale

$$P = \frac{R}{\mu} C \rho^{\frac{4}{3}} + \frac{a}{3} C^4 \rho^{\frac{4}{3}} = D \rho^{\frac{4}{3}}$$

Che ci porta al caso di una politropica con indice  $n = 3$ . Sostituendo la relazione politropica nell'equazione 2.14 e ponendo  $\rho(r) = \rho_{core} \Phi^n(r)$  otteniamo

$$P(r) = P_{core} \Phi^{n+1}(r)$$

$$T = \frac{\mu P}{R \rho} = \frac{\mu P_{core}}{R \rho_{core}} \Phi(r) = T_{core} \Phi$$

Reinserendole nell'equazione combinata di equilibrio idrostatico e conservazione della massa si ottiene

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho_{core} \Phi^n} \frac{d}{dr} (P_{core} \Phi^{n+1}) \right] = -4\pi G \rho_{core} \Phi^n$$

Derivando e riordinando il tutto otteniamo infine

$$\frac{P_{core}(n+1)}{4\pi G \rho_{core}^2 r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right] = -\Phi^n \quad (2.15)$$

Ponendo

$$l = \sqrt{\frac{P_{core}(n+1)}{4\pi G \rho_{core}^2}} = \sqrt{\frac{\frac{RT(n+1)}{\mu}}{4\pi \rho_{core} G}}$$

Ed adimensionalizzando il raggio con la sostituzione  $\xi = \frac{l}{r}$ , si ottiene l'equazione di Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right] = -\Phi^n \quad (2.16)$$

Derivando il primo membro e ponendo il tutto in forma normale, otteniamo infine un'equazione differenziale non lineare al second'ordine in  $\Phi$

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\Phi}{d\xi} + \Phi^n = 0 \quad (2.17)$$

Le condizioni al contorno saranno date dalla necessità di una continuità al centro e che la temperatura centrale sia  $T_{core}$

$$\begin{cases} \left( \frac{d\Phi}{d\xi} \right)_0 = 0 \\ \Phi(0) = 1 \end{cases}$$

Notiamo che l'equazione per  $n = 0$  ed  $n = 1$  è lineare e risolvibile analiticamente con soluzione per  $n = 0$

$$\Phi(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}$$

E per  $n = 1$

$$\Phi(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$$

È riportato qui il plot (eseguito con R) delle soluzioni fino al primo zero di  $\Phi$ , poiché l'equazione perde di significato fisico con valori negativi.

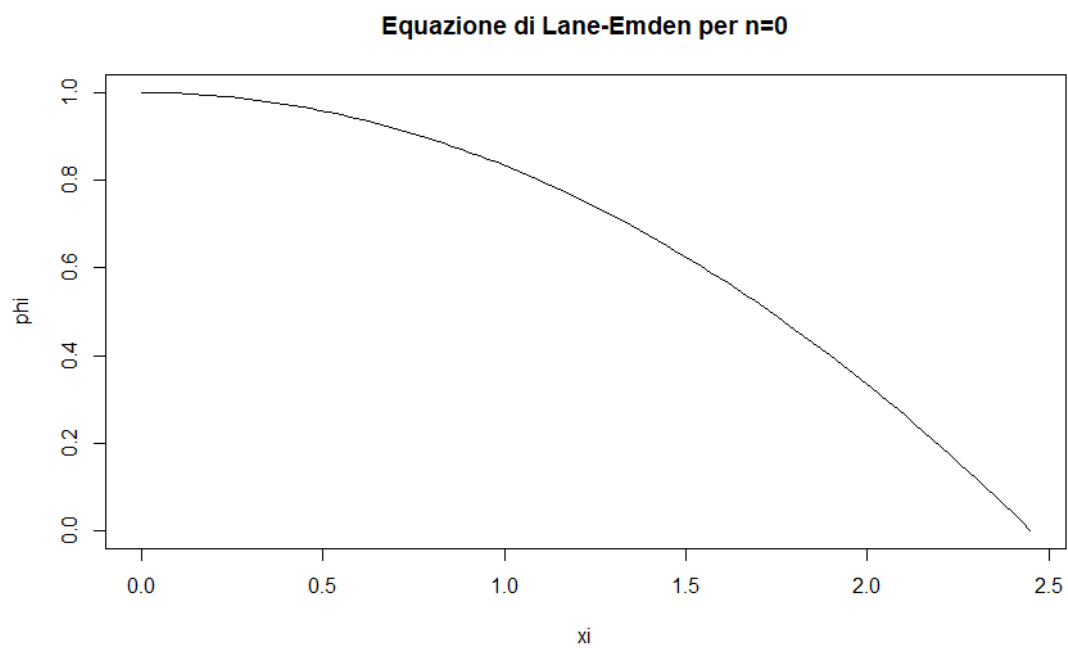
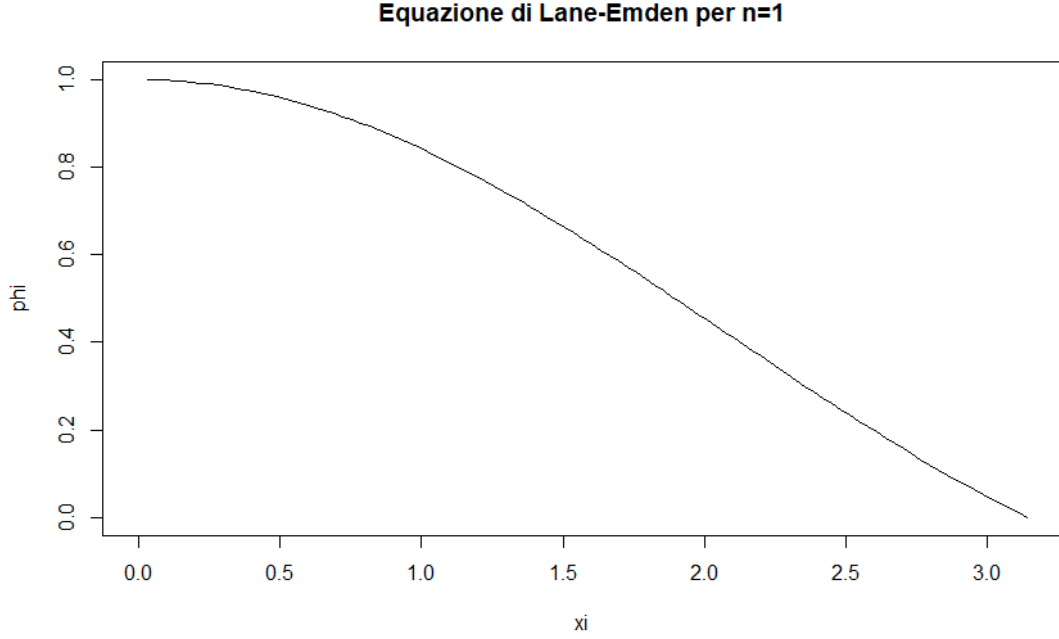


Figura 2.9: Soluzione per  $n = 0$

Figura 2.10: Soluzione per  $n = 1$ 

Dalle equazioni di Lane-Emden è possibile ricavare la massa totale della stella (teorica) tramite l'integrale

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r} = 4\pi l^3 \int_0^\xi \rho(\tilde{\xi}) \tilde{\xi}^2 d\tilde{\xi} = 4\pi l^3 \rho_{core} \int_0^\xi \Phi^n(\tilde{\xi}) \tilde{\xi}^2 d\tilde{\xi}$$

Sostituendo la forma 2.16 dell'equazione di Lane-Emden otteniamo

$$M(\xi) = -4\pi l^3 \rho_{core} \xi^2 \left( \frac{d\Phi}{d\xi} \right)_\xi$$

La massa totale si avrà allo zero dell'equazione di Lane-Emden ( $\xi_{n0}$ ) e si trova

$$M_s = M(\xi_{n0}) = -4\pi \left( \frac{A(n+1)}{4\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_{core}^{\frac{3-n}{2n}} \xi_{n0}^2 \left( \frac{d\Phi}{d\xi} \right)_{\xi_{n0}}$$

Fortunatamente, i valori degli zeri e delle derivate negli zeri di  $\Phi$  sono tabulati per tutti gli  $n$ .

Dall'equazione di Lane-Emden è anche possibile ricavare la densità media della stella, tramite la relazione

$$\langle \rho \rangle = \frac{3M}{4\pi R_s^3} = \frac{3\rho_{core} \Phi'(\xi_{n0})}{\xi_{n0}}$$

Il raggio totale, indicato con  $R_s$  è legato alla densità centrale della stella tramite la stessa equazione di Lane-Emden

$$R_s = l\xi_{n0} = \xi_{n0} \sqrt{\frac{(n+1)A}{4\pi G} \rho_{core}^{\frac{1-n}{2n}}}$$

Notiamo che con  $n = 1$  il raggio della stella è indipendente dalla densità centrale.

È anche evidente che  $M_s \propto \rho_{core}^{\frac{3-n}{n}}$ , quindi nel modello standard e nel caso relativistico, la massa è indipendente dalla densità.

Dalle espressioni di massa e raggio è possibile elidere  $\rho_{core}$  e trovare una relazione tra massa e raggio della stella

$$M_s^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}} = \frac{A}{GN_n}$$

Dove

$$N_n = \frac{\sqrt[n]{4\pi}}{n+1} \left( \left[ -\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right]_{\xi_{n0}} \right)^{\frac{1-n}{n}} \xi_{n0}^{\frac{n-3}{n}}$$

Le equazioni 2.11 possono essere adattate al caso dove viene considerata pure la convezione termica, supponendo che i globi di gas vengano spostati *adiabaticamente*.

Poniamo con  $\rho^*$  la densità di un volume di gas dopo essere stato spostato adiabaticamente.

Dalla relazione tra la pressione iniziale, finale e la densità otteniamo

$$\rho^* = \rho \left( \frac{P'}{P} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Dove è stato posto  $\frac{n-1}{n} = \gamma$ , che è la relazione adiabatica  $P(\rho)$

È possibile supporre la nuova pressione  $P'$  come una piccola perturbazione della pressione iniziale, e quindi linearizzando al prim'ordine troviamo

$$P' = P + \frac{dP}{dr} \Delta r$$

Espandendo  $\rho^*$  binomialmente, troviamo

$$\rho^* = \rho + \frac{\rho}{\gamma P} \frac{dP}{dr} \Delta r$$

D'altro canto possiamo espandere al prim'ordine pure la densità, ed ottenere, tramite la relazione dei gas perfetti  $\rho = \frac{P}{RT}$

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho + \frac{d\rho}{dr} \Delta r \\ \rho' &= \rho + \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} \Delta r - \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \Delta r \\ \rho^* - \rho' &= \left[ -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} + \frac{\rho}{T} \frac{dT}{dr} \right] \Delta r \end{aligned}$$

Troviamo quindi che l'atmosfera stellare sarà stabile se è soddisfatta la *condizione di stabilità di Schwarzschild*

$$\left| \frac{dT}{dr} \right| < \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \left| \frac{dP}{dr} \right| \quad (2.18)$$

È possibile approssimare il tutto ponendo il gradiente di temperatura esattamente uguale alla condizione di Schwarzschild

$$\frac{dT}{dr} = \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

Infine, le equazioni 2.11, considerando la convezione termica, diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho \\ \frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \\ \frac{d\mathcal{L}}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon(\rho, T) \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa(\rho, T)\rho\mathcal{L}}{16\pi a c r^2 T^3} \\ \frac{dT}{dr} = \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

### 2.6.2 Meccanismi di Opacità

L'interazione tra fotoni e materia può avvenire in 4 modi diversi

1. Assorbimento bound-bound
2. Assorbimento bound-free
3. Assorbimento free-free
4. Diffusione

#### Assorbimento bound-bound

Il primo processo, del tipo *bound-bound*, è dato quando un fotone con energia  $E$  viene assorbito da un atomo, ed un elettrone legato passa ad un livello superiore d'energia. Questo effetto è la causa delle righe di assorbimento nelle fotosfere stellari.

L'atomo eccitato poi, tende a diseccitarsi tornando all'energia minima, ed è possibile solo se lo stesso irradia o collide con un altro atomo. Grazie a questo meccanismo, è possibile distinguere diversi tipi di righe spettrali, a seconda del luogo dove passa il fotone. Se il fotone passa per una zona con un gradiente di temperatura negativo eccitano

radiativamente gli atomi, che si disecciteranno collisionalmente. Quest'effetto dà le righe di assorbimento nello spettro (righe fotosferiche). Il viceversa accade se il gradiente di temperatura sia inverso (righe coronali)

### Assorbimento bound-free

A differenza del processo precedente, dopo essere stato assorbito, viene emesso un elettrone dall'atomo con energia data da  $E_\gamma + E_{bound}$ . Essendo l'energia iniziale un valore qualsiasi maggiore dell'energia di ionizzazione dell'atomo, vengono assorbiti fotoni di qualsiasi frequenza, rendendo questo processo molto efficiente per i fotoni del continuo

### Assorbimento libero-libero

L'energia del fotone, in questo caso, viene assorbita da un elettrone libero, che acquista un'energia data da  $E_\gamma + E_{free}$ . Come nel caso precedente, è un processo molto efficiente per i fotoni del continuo

### Diffusione

Se l'energia del fotone è molto minore dell'energia a riposo della particella considerata, il fotone non viene assorbito ma diffuso. Nel caso di assorbimento di un fotone e riemissione di un fotone identico, si può parlare di diffusione risonante

### 2.6.3 Zone Convettive

Nelle zone dove è possibile trovare l'idrogeno sia in uno stato di forte eccitazione che in uno stato di parziale ionizzazione, è possibile l'instaurazione di un regime di instabilità tale, che si sviluppano delle regioni convettive ad alta opacità. In tutte le stelle con temperatura di superficie  $T_s < 10000\text{ K}$  è presente questa zona di convezione.

È possibile l'instaurazione di zone convettive nel nucleo stellare se sono presenti reazioni con efficienza fortemente dipendente dalla temperatura (CNO,  $3\alpha$ ).

## 2.7 Core Remnants

### 2.7.1 Nane Bianche

Nelle stelle che hanno terminato il combustibile nucleare, viene a mancare l'energia di radiazione necessaria per sostenere l'intera struttura, che collassa.

In questo caso, data la natura fermionica degli elettroni, alla pressione classica del gas si aggiunge una componente quantistica data dall'impossibilità per due fermioni di occupare lo stesso stato, questa "pressione" è detta *pressione di degenerazione elettronica*

È possibile calcolare rigorosamente questa pressione utilizzando la statistica di Fermi-Dirac.

Da considerazioni di natura cinetica abbiamo che la pressione di un gas è data dall'integrale di tutti i possibili momenti.

$$P = \frac{1}{3} \int v p f(p) 4\pi p^2 dp$$

Nel caso di un gas di elettroni gli stati sono 2 volte degeneri, la densità numerica di elettroni sarà l'integrale su tutti i momenti fino al momento di Fermi

$$n_e = \frac{g}{8\pi^3 \hbar^3} \int_0^{p_F} 2\pi p^2 dp = \frac{p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

Poiché questi sono tutti i momenti a disposizione del gas, abbiamo che  $4\pi f(p)p^2 dp = \frac{p^2}{\pi^2 \hbar^3} dp$ , e quindi

$$f(p) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^3 \hbar^3} & p < p_F \\ 0 & p > p_F \end{cases}$$

Quindi, la pressione totale per un gas di elettroni sarà

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} v p^3 dp \\ p &= \gamma m_e v, \quad v = \frac{p}{\gamma m_e} = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{\sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}} \\ P &= \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4 c^2}{\sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}} dp \end{aligned}$$

Avendo trovato l'espressione per la pressione è possibile trovare un'equazione di stato per il gas degenere di elettroni, trovando l'espressione della densità numerica di particelle. Per la materia stellare la densità numerica sarà data da

$$n_e = \frac{X\rho}{m_H} + \frac{(1-X)\rho}{2m_H} = \frac{\rho}{2m_H} (1+X)$$

Con  $X$  la frazione di massa dell'Idrogeno.

Sostituendo nella relazione precedente  $\mu_e = \frac{2}{1+X}$  otteniamo infine

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H}$$

Il momento di Fermi per un gas degenere di elettroni sarà quindi

$$p_F = \left( \frac{3\pi^2 \rho \hbar^3}{\mu_e m_H} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Per trovare l'espressione dell'equazione di stato per un gas di elettroni è necessario considerare due casi principali, elettroni relativistici e non relativistici

$$\sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} \approx \begin{cases} m_e c^2 & \text{non relativistici} \\ pc & \text{relativistici} \end{cases}$$



Nei due casi si ottiene quindi

$$P = \frac{1}{3\pi^2 m_e \hbar^3} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{1}{15\pi^2 m_e \hbar^3} p_F^5 \quad \text{non relativistici}$$

$$P = \frac{c}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^3 dp = \frac{c}{12\pi^2 \hbar^3} p_F^4 \quad \text{relativistici}$$

Sostituendo l'espressione trovata per  $p_F$  otteniamo l'equazione di stato per un gas d'elettroni relativistico o non relativistico

$$P_{nr}(\rho) = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left( \frac{3\pi^2}{\mu_e m_H} \right)^{\frac{5}{3}} \rho^{\frac{5}{3}}$$

$$P_r(\rho) = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left( \frac{3\pi^2}{\mu_e m_H} \right)^{\frac{4}{3}} \rho^{\frac{4}{3}}$$

Queste equazioni sono di tipo politropico, con  $P = c\rho^\gamma$ , nel caso non relativistico  $\gamma = \frac{5}{3}$ , nel caso relativistico  $\gamma = \frac{4}{3}$ . Grazie a questa pressione degenera è possibile dimostrare l'esistenza di "stelle" sostenute solo dalla pressione di degenerazione degli elettroni. Nelle stelle dove la materia è degenera ma non relativistica si ha  $\gamma = \frac{5}{3}$ , e ricordando che  $\gamma = \frac{n+1}{n}$  si ha dalle equazioni di Lane-Emden la relazione tra massa e raggio.

$$\begin{cases} R_s = l\xi_{n0} = \xi_{n0} \sqrt{\frac{A(n+1)}{4\pi G}} \rho^{\frac{1-n}{2n}} \\ M_s = -4\pi \left( \frac{A(n+1)}{4\pi G} \right)^{\frac{3}{2}} \rho^{\frac{3-n}{2n}} \xi_{n0}^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_{n0}} \end{cases}$$

Eliminando  $\rho$  si ottiene infine la relazione tra massa e raggio per sistemi con equazione di stato politropica

$$R_s^{\frac{3-n}{n}} M_s^{\frac{n-1}{n}} = \frac{A}{GN_3} \quad N_n = \frac{(4\pi)^{\frac{1}{n}}}{n+1} \left( -\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_{n0}} \right)^{\frac{1-n}{n}} \xi_{n0}^{\frac{n-3}{n}}$$

Nel caso di stelle con massa degenera relativistica si ottiene che la massa è indipendente dal raggio, e che  $M_s^{\frac{2}{3}} = \frac{A}{GN_3}$ . La massa  $M_s$  è detta massa di Chandrasekhar, e vale la relazione

$$M_{Ch} = \left( \frac{A}{GN_3} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{5.83}{\mu_e} M_\odot$$

Per nane bianche composte principalmente da Elio si ha  $\mu_e = 2$ , quindi  $M_{Ch} = 1.46 M_\odot$ . Questa massa è la massa limite per una stella stabile con massa degenera relativistica. Nel caso che la nana bianca sia in un sistema binario con una seconda stella più massiva, se accresce massa e supera la massa di Chandrasekhar, diventa instabile e collassa, aumentando densità e temperatura, fondendo nuclei pesanti fino al Nichel, per poi esplodere in una Supernova di tipo Ia, senza lasciare residui centrali.

### 2.7.2 Stelle di Neutroni

Nel caso che la stella agli stadi evolutivi finali abbia una massa  $8M_{\odot} < M < 18M_{\odot}$ , dopo una successiva Supernova di tipo core-bounce, collassa in una *stella di neutroni*, più estreme delle nane bianche, tenute dalla pressione di degenazione dei neutroni, formati dalla fusione di elettroni e protoni.

Dato il diametro piccolo rispetto alla stella d'origine, ruotano molto velocemente ed emettendo segnali dai poli, misurabili sperimentalmente. Dato che il segnale ricevuto dalla stella sono degli impulsi regolari, le stelle di neutroni che puntano il fascio di radiazione di sincrotrone diretto verso la terra sono state chiamate *Pulsar*

### 2.7.3 Buchi Neri

Nel caso che la stella originale abbia  $M > 18M_{\odot}$  ed il core rimanente ha massa  $M_c \gtrsim 2M_{\odot}$  il collasso non può essere contrastato, e dopo che la dimensione dell'oggetto raggiunge un raggio critico, detto *raggio di Schwarzschild*, si forma un oggetto detto *buco nero*. I buchi neri si trovano al centro della maggior parte delle galassie a spirale (se non in tutte) e hanno masse dell'ordine di  $10^6 M_{\odot}$ . Nel caso di galassie con AGN (Active Galactic Nuclei), i buchi neri supermassicci emettono dei jet di gas e polveri relativistici.

Nel caso che vi sia un sistema binario di buchi neri, secondo le leggi della Relatività Generale, l'orbita è instabile e vi è una perdita di momento angolare, emesso sotto forma di onde gravitazionali. Nel caso della fusione di due buchi neri sono state misurate con successo negli interferometri LIGO Statunitensi e nell'interferometro VIRGO di Cascina. Nell'Agosto 2017 è stata infine osservata la fusione di due stelle di neutroni sotto forma di onde gravitazionali (LIGO, VIRGO), Fast GRB (Fermi, Integral) e con una controparte elettromagnetica su tutte le frequenze dello spettro.

# Parte II

## Mezzo Interstellare



# 3

## Interazione tra Luce e Materia

---

Nello studio delle atmosfere stellari e della polvere interstellare è necessario valutare l'interazione tra luce e materia, in modo da avere uno studio più dettagliato della radiazione assorbita o emessa dal mezzo.

Nella trattazione macroscopica dell'interazione tra luce e materia, sono possibili tre eventi principali

1. Emissione, quando viene aggiunta energia ai fotoni interagenti
2. Assorbimento, quando viene rimossa l'energia ai fotoni interagenti
3. Scattering, quando l'energia dei fotoni viene deflessa e assorbita o emessa

**Emissione** Nel trattamento dell'emissione è necessario introdurre il *coefficiente di emissione spontanea*  $j_\nu$  in unità di volume, angolo solido, tempo e frequenza. Il differenziale dell'energia emessa sarà

$$dE = j_\nu dV d\Omega dt d\nu$$

Il coefficiente  $j_\nu$  ha unità di misura  $W/m^3/sr/Hz$ .

Considerando un raggio di luce con sezione  $dA$  e percorre un tratto  $ds$  nel mezzo emittente, occupa un volume  $dV = dAdS$  e l'aumento d'intensità (o di brillantezza) della luce è

$$dI = \frac{dE}{dt dV d\Omega d\nu} ds = j_\nu ds$$

**Assorbimento** Nel trattamento dell'Assorbimento è necessario definire il *coefficiente di assorbimento*  $\alpha_\nu$ , che rappresenta la perdita percentuale di energia di un fascio di luce in uno spostamento infinitesimo nel mezzo assorbente

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds$$

Il coefficiente  $\alpha_\nu$  ha unità di misura  $m^{-1}$  ed è legato alla densità numerica di particelle e alla sezione d'urto dei componenti del mezzo assorbente.

In generale, per un volume infinitesimo di mezzo assorbente si ha che l'area che "ostacola"

il passaggio della luce sarà  $\sigma_\nu n dA ds$ .

Ponendo la nuova area infinitesima come  $dA' = (1 - n\sigma_\nu ds)dA$  abbiamo che

$$\begin{aligned} I_\nu dA' &= I_\nu (1 - n\sigma_\nu ds) dA \\ I_\nu dA' &= I_\nu dA - n\sigma_\nu I_\nu ds dA \\ I_\nu dA' - I_\nu dA &= -n\sigma_\nu I_\nu ds dA \\ dI_\nu &= -n\sigma_\nu I_\nu ds dA = -\alpha_\nu I_\nu ds dA \\ \alpha_\nu &= n\sigma_\nu \end{aligned}$$

### 3.1 Trasporto Radiativo

Nel caso di un mezzo generico dove è presente sia assorbimento che emissione è possibile combinare le espressioni per l'assorbimento e l'emissione, trovando l'*equazione del trasporto radiativo*

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad (3.1)$$

Introducendo una nuova variabile, chiamata *spessore ottico*  $\tau_\nu$ , è possibile semplificare l'equazione del trasporto radiativo.

Ponendo  $d\tau_\nu = \alpha_\nu ds$  si ha

$$\tau_\nu(s) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu ds$$

L'equazione del trasporto con la sostituzione diventa

$$\begin{aligned} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} &= -I_\nu + S_\nu \\ \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} &= S_\nu \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dove  $S_\nu$  è la funzione sorgente.

La soluzione formale dell'equazione è la seguente

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tilde{\tau})e^{-(\tau_\nu - \tilde{\tau})} d\tilde{\tau} \quad (3.3)$$

La soluzione trovata si può ottenere facilmente definendo due nuove funzioni a partire da  $I$  e da  $S$ , come

$$\mathfrak{S} = e^{\tau_\nu} I_\nu, \quad \mathfrak{R} = e^{\tau_\nu} S_\nu$$

Si può quindi riscrivere l'equazione del trasporto come equazione alle variabili separabili con la definizione delle nuove funzioni

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{S}}{d\tau_\nu} &= e^{\tau_\nu} I_\nu + e^{\tau_\nu} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \mathfrak{R} \\ d\mathfrak{S} &= \mathfrak{R} d\tau_\nu \end{aligned}$$

Integrando l'equazione e sostituendo alle funzioni  $\Im$  e  $\Re$  la loro definizione si ottiene di nuovo l'equazione 3.2.

L'utilità della definizione del cammino percorso con lo spessore ottico è che lo spessore stesso indica la facilità (o la difficoltà) di passaggio dei fotoni attraverso il mezzo. Un mezzo è detto otticamente sottile quando  $\tau_\nu \ll 1$  e otticamente spesso quando  $\tau_\nu \gg 1$ .

### 3.1.1 Cammino Libero Medio

Il cammino libero medio dei fotoni in un mezzo generico è strettamente legato allo spessore ottico. Esso indica la distanza media percorsa dai fotoni prima di essere assorbiti.

Dalla legge di assorbimento esponenziale abbiamo che la probabilità che un fotone venga assorbito prima di raggiungere uno spessore di  $\tau_\nu$  è

$$P(\tau_\nu) = \frac{I(\tau_\nu)}{I(0)} = e^{-\tau_\nu}$$

Lo spessore ottico medio percorso dai fotoni è quindi

$$\begin{aligned} \langle \tau_\nu \rangle &= \int_0^\infty \tau_\nu P(\tau_\nu) d\tau_\nu = 1 \\ \langle \tau_\nu \rangle &= \langle \alpha_\nu l \rangle = \langle n \sigma_\nu l \rangle = 1 \\ \langle l \rangle &= \frac{1}{n \sigma_\nu} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dove,  $\langle l \rangle$  è il cammino libero medio dei fotoni in un mezzo.

### 3.1.2 Radiazione Termica

La radiazione termica è la radiazione emessa dalla materia in equilibrio termodinamico. Un esempio particolare di radiazione termica è la radiazione di corpo nero.

La radiazione di corpo nero, è la radiazione termica che riempie una cavità isoterma, e dipende solo dalla temperatura  $T$  della cavità.

Infatti, se consideriamo due cavità a contatto, divise da un filtro che permette il passaggio della sola frequenza  $\nu$ , con proprietà fisiche differenti. Se per ipotesi le intensità provenienti dalle due camere fossero differenti, si avrebbe un flusso di energia da una cavità all'altra, e siccome le due cavità essendo in contatto sono in equilibrio termico, verrebbe violato il secondo principio della termodinamica.

La funzione che definisce l'energia di un corpo nero è la *Brillanza*  $B(\nu, T)$ , ed è valida per ogni cavità isoterma.

La funzione  $B$  è detta funzione di Planck ed è, espressa in funzione di frequenza e lunghezza d'onda

$$\begin{aligned} B(\nu, T) &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \\ B(\lambda, T) &= \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \end{aligned}$$

Il massimo di emissione si ha per  $\lambda_{max}T = 0.290 \text{ cmK}$ . Per  $h\nu \ll kT$  la funzione di Planck è approssimabile in serie di potenze al prim'ordine in  $B(\nu, T) = \frac{2\nu^2}{c^2}kT + \mathcal{O}(T)$ . Inserendo la radiazione termica nello studio del trasporto radiativo, è possibile ottenere la *legge di Kirchhoff*.

Se inseriamo del materiale con funzione sorgente  $S_\nu$  e temperatura  $T$  all'interno del corpo nero, abbiamo che la radiazione che entra nel mezzo è  $B(\nu, T)$ , ma per il secondo principio della termodinamica dev'essere  $B(\nu, T)$  anche in uscita. Dall'equazione del trasporto radiativo abbiamo che

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - B(\nu, T) = 0$$

Di conseguenza,  $S_\nu = B(\nu, T)$ , che è l'espressione della legge di Kirchhoff

$$S_\nu = B(\nu, T) = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \quad (3.5)$$

L'equazione del trasporto radiativo per la radiazione termica si scrive quindi

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = B(\nu, T) - I_\nu$$

All'interno di una cavità isoterma si ha  $I_\nu = B(\nu, T)$ , per radiazione termica, anche al di fuori della cavità invece si ha  $S_\nu = B(\nu, T)$

### 3.2 Atmosfere Isoterme

L'atmosfera isoterma è un esempio di emettitore di radiazione termica, trasmette parzialmente la radiazione proveniente dall'esterno.

Se utilizziamo l'approssimazione ad un atmosfera piano parallela, uno strato infinitesimo avrà uno spessore ottico  $d\tau_\nu$ .

Se il raggio di luce incidente forma un angolo  $\theta$  con la verticale, il coefficiente di assorbimento sarà

$$d\tau_\nu(\theta) = \alpha_\nu dl(\theta) = \frac{d\tau_{\nu,z}}{\cos \theta}$$

L'equazione del trasporto radiativo sarà

$$\begin{aligned} \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu &= B(\nu, T) \\ I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + B(\nu, T)(1 - e^{-\tau_\nu}) \end{aligned}$$

Nel caso che  $\theta \neq 0$

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\frac{\tau_{\nu,z}}{\cos \theta}} + B(\nu, T) \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\nu,z}}{\cos \theta}}\right)$$



### 3.2.1 Atmosfere Stellari

Tramite l'approssimazione per piccoli angoli o per grandi angoli è possibile trovare la soluzione dell'equazione del trasporto radiativo per un atmosfera isoterma otticamente sottile, approssimando correttamente le finestre atmosferiche e le frequenze per cui l'atmosfera si comporta come un corpo nero.

Per  $\nu$  tali che  $\tau_{\nu,z} \gg 1$  abbiamo

$$I_\nu(\tau_\nu) = B(\nu, T)$$

Per  $\nu$  tali che  $\tau_{\nu,z} \ll 1$  invece abbiamo

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) \left( 1 - \frac{\tau_{\nu,z}}{\cos \theta} \right) + B(\nu, T) \frac{\tau_{\nu,z}}{\cos \theta}$$

Le equazioni del trasporto radiativo con l'aggiunta della radiazione termica possono essere utilizzate per creare un modello *brutale* di una stella generica per spiegare meglio il fenomeno delle righe spettrali.

Consideriamo una stella come una sfera isoterma con un nucleo interno che emette come un corpo nero a temperatura  $T_c$  e la fotosfera come uno strato esterno spesso  $l_A$ , e consideriamo una misura dello spettro nella direzione  $A$

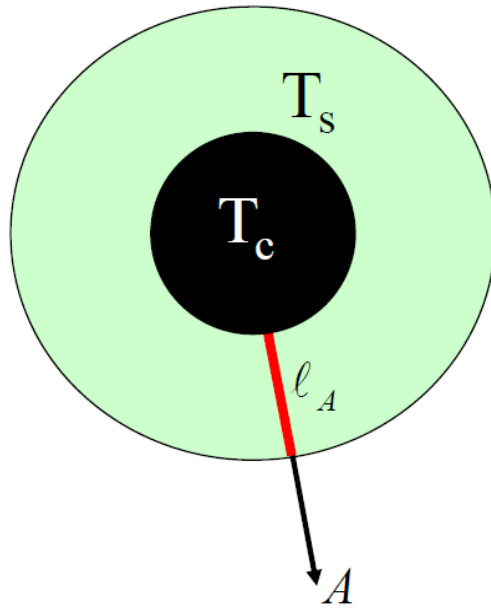


Figura 3.1: Modello brutale di una stella come un corpo nero

Le equazioni del trasporto radiativo saranno date da due parti, la componente otticamente spessa del nucleo e la parte otticamente sottile della fotosfera

$$I_A = B(\nu, T_c) e^{-\alpha_\nu l_a} + B(\nu, T_s) (1 - e^{-\alpha_\nu l_A}) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\alpha_\nu l_A &\ll 1 & I_A &= B(\nu, T_c) + \alpha_\nu l_A B(\nu, T_s) \\ \alpha_\nu l_A &\gg 1 & I_A &= B(\nu, T_s)\end{aligned}$$

Siccome la fotosfera assorbe a bande molto strette di frequenze è possibile considerarla come corpo nero a delle frequenze specifiche. In questo caso, se  $T_c > T_s$  otteniamo una riga di assorbimento e se  $T_c < T_s$  una riga di emissione. Plottando le due curve di corpo nero a temperatura costante, ed aggiungendo gli assorbimenti della fotosfera a delle frequenze date, otteniamo un'approssimazione qualitativa degli spettri stellari

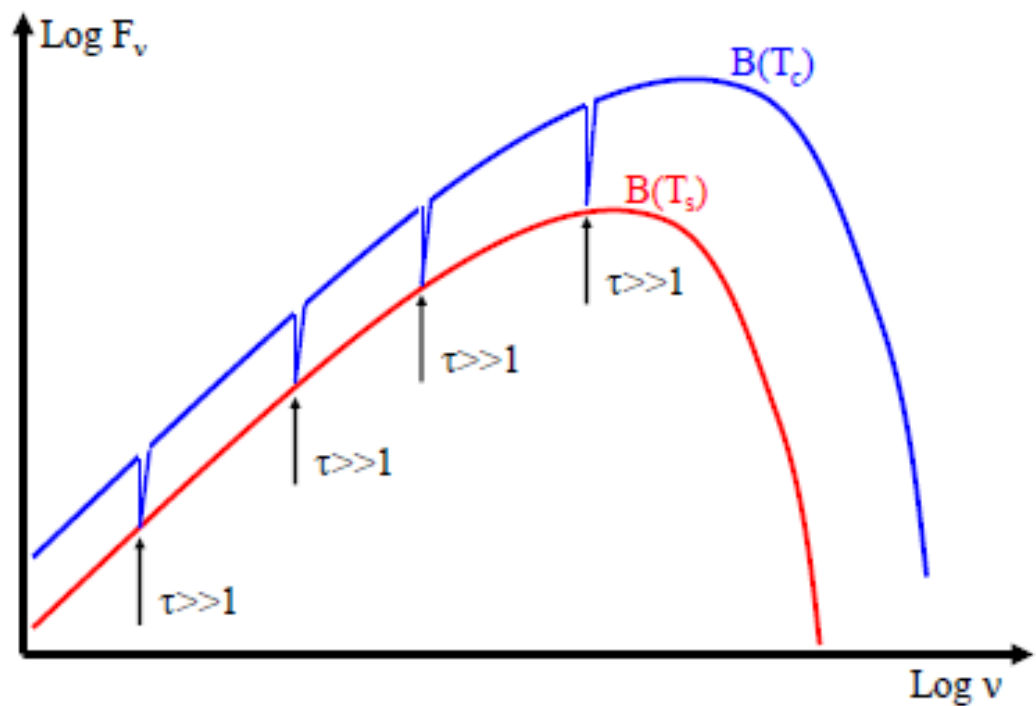


Figura 3.2: Approssimazione qualitativa dello spettro di una stella "brutale"

### 3.3 Coefficienti di Einstein

Dalla legge di Kirchhoff è evidente la presenza di una relazione tra assorbimento ed emissione anche a livello microscopico. Questa trattazione è stata derivata da Einstein studiando 3 processi principali d'interazione a livello atomico.

I tre processi sono

1. Emissione spontanea
2. Assorbimento

## 3. Emissione stimolata

L'emissione spontanea avviene quando un elettrone decade da un livello eccitato ad un livello inferiore, emettendo un fotone con la stessa energia della differenza in modulo dell'energia tra il livello iniziale e quello finale, come già noto dalla meccanica quantistica. La probabilità di transizione dal livello 2 al livello 1 viene indicata con il coefficiente  $A_{21}$  e ha unità di  $s^{-1}$ .

Nell'assorbimento il sistema transisce dal livello 1 al livello 2 assorbendo un fotone. La probabilità di transizione sarà direttamente proporzionale alla densità di fotoni con energia  $h\nu_0$ ,  $J_{\nu_0}$  e viene indicata quindi  $B_{12}J_{\nu_0}$ , sempre con dimensioni  $s^{-1}$ .

Nell'emissione stimolata il sistema transisce spontaneamente dal livello 2 al livello 1, dopo essere stato stimolato da una certa densità  $J_{\nu_0}$  di fotoni presenti nell'intorno dello stesso. La probabilità di transizione è  $B_{21}J_{\nu_0}$ . Questo tipo di emissione è stato assunto da Einstein per poter derivare la legge di Planck per un corpo nero. Quest'emissione produce fotoni con la stessa frequenza e direzione di quelli già presenti, in altre parole con lo stesso stato quantistico.

Per poter avere un equilibrio quindi, il numero di assorbimenti deve essere bilanciato dal numero di emissioni dal livello 1 a 2, quindi

$$n_1 B_{12} J_{\nu_0} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} J_{\nu_0} \quad (3.7)$$

Da cui è possibile ricavare la forma esplicita di  $J_{\nu_0}$

$$J_{\nu_0} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\left(\frac{n_1 B_{12}}{n_2 B_{21}}\right) - 1}$$

In equilibrio termodinamico la popolazione dei livelli seguirà una statistica di Boltzmann, quindi

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{h\nu_0}{kT}}$$

Da quest'ultima relazione troviamo un'espressione esplicita di  $J_{\nu_0}$

$$J_{\nu_0} = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - 1} \quad (3.8)$$

Poiché in condizioni di equilibrio la densità di fotoni deve seguire una legge di corpo nero, otteniamo infine le relazioni di Einstein

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{2h\nu^3}{c^2}$$

$$\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}} = 1$$

Poiché sono indipendenti dalla temperatura, valgono per ogni caso studiato.

Dalle relazioni derivate precedentemente è possibile scrivere una formula generale per il coefficiente di emissione e per il coefficiente di assorbimento

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} A_{21} n_2$$

Dall'equazione del trasporto radiativo invece abbiamo che

$$dI_\nu = -\frac{n_1 h\nu}{4\pi} B_{12} I_\nu ds$$

Che porta a trovare l'espressione esplicita per  $\alpha_\nu$  nel caso di emissione spontanea

$$\alpha_\nu^1 = \frac{h\nu}{4\pi} B_{12} n_1$$

Nel caso di emissione stimolata è necessario aggiungere il contributo negativo nel coefficiente totale, dato da

$$\alpha_\nu^2 = -\frac{h\nu}{4\pi} B_{21} n_2$$

Che ci porta a trovare il coefficiente di assorbimento totale

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} (B_{12} n_1 - B_{21} n_2)$$

È quindi possibile riscrivere la legge del trasporto radiativo considerando anche gli effetti microscopici.

Sostituendo  $\alpha_\nu$  e  $j_\nu$  si trova

$$\begin{aligned} \frac{dI_\nu}{ds} &= \frac{h\nu}{4\pi} A_{21} n_2 - \frac{h\nu}{4\pi} (B_{12} n_1 - B_{21} n_2) I_\nu \\ S_\nu &= \frac{2h\nu}{c^2} \left( \frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1} \\ \alpha_\nu &= \frac{h\nu}{4\pi} B_{12} n_1 \left( 1 - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nel caso di materia in equilibrio termico

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{h\nu}{kT}}$$

Nei casi di non equilibrio si può avere invece

$$\begin{cases} \frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} = e^{-\frac{h\nu}{kT}} < 1 & \frac{n_1}{g_1} > \frac{n_2}{g_2} \\ \frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} > 1 & \frac{n_1}{g_1} < \frac{n_2}{g_2} \end{cases}$$

Nel primo caso si ha emissione non termica, mentre nel secondo si ha un inversione delle popolazioni dei livelli, con un conseguente coefficiente di assorbimento *negativo*. In questo caso particolare si ha che  $I_\nu$  aumenta attraversando il mezzo. Questo effetto è conosciuto come *LASER* o *MASER* a seconda della frequenza amplificata, entrambi sono acronimi per *Light (Microwave) Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. Sono noti LASER e MASER di origine astrofisica, come Galassie Seyfert e QUASAR.

### 3.4 Scattering

Un altro effetto di interazione tra luce e materia è dato dallo *scattering* o diffusione. Supponiamo che lo scattering sia *elastico* o *coerente*, cioè che la probabilità di diffusione sia la stessa verso qualunque direzione. Indichiamo con  $\sigma_\nu$  il coefficiente di scattering. Il coefficiente di emissione dovuto allo scattering è

$$j_\nu = \frac{\sigma_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega$$

Inserendolo nell'equazione del trasporto radiativo nel caso di scattering puro otteniamo

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu \left( I_\nu - \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega \right)$$

Questa è un'equazione integro-differenziale nella variabile  $I_\nu$  di difficile integrazione, per questo è utile considerare un approccio probabilistico al problema. Grazie a questa considerazione, possiamo sfruttare i risultati del Random Walk per lo studio dello scattering dei fotoni.

#### 3.4.1 Random Walk

Consideriamo un fotone che si muove in un mezzo infinito e diffondente in modo omogeneo. Il fotone si muove inizialmente verso la posizione  $\mathbf{r}_1$  e viene diffuso  $N$  volte. Dopo l' $N$ -esima diffusione, il fotone sarà arrivato nella posizione  $\mathbf{R}$ , dove tale posizione è ottenuta sommando tutte le  $N$  diffusioni

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i$$

Per stimare la distanza percorsa del fotone calcoliamo il valore quadratico medio

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{\left\langle \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \langle \mathbf{r}_i^2 \rangle} = l\sqrt{N}$$

Questo risultato è dato dal fatto che il fotone viene diffuso casualmente nel mezzo, e invece di essersi spostato di  $Nl$  si è spostato di solo  $l\sqrt{N}$ . Questo metodo di studio è utile per lo studio del percorso dei fotoni nel Sole.

Considerando le zone ad alto spessore ottico, supposte di dimensione  $L$ , abbiamo che il numero di diffusioni di un fotone è dato da

$$N = \left( \frac{L}{l} \right)^2$$

D'altro canto, abbiamo che

$$\tau_\nu = \int \alpha_\nu ds \cong \alpha_\nu L = \frac{L}{l}$$

Quindi  $N \approx \tau_\nu^2$ . Questo risultato ci dà una chiara indicazione di come nelle zone con  $\tau_\nu \ll 1$  la probabilità di avere dello scattering è piccola, mentre nelle zone ad alto spessore ottico è molto elevata.

Valutando nel caso reale del Sole, poiché i fotoni hanno un cammino libero medio di 1 cm abbiamo che vengono diffusi e divisi in continuazione, fino a quando non riescono ad uscire dalla superficie, circa  $3 \times 10^4$  anni. Invece, nel caso dei neutrini, poiché hanno un cammino libero medio molto grande, possono passare indisturbati attraverso il Sole.

### 3.5 Interazione Fotoni-Elettroni

Una tipologia importante di interazione tra luce e materia è data dall'interazione tra fotoni ed elettroni liberi, presenti nelle stelle e nelle zone adiacenti. Queste zone sono dette *Regioni HII*

#### 3.5.1 Regioni HII

Le zone HII sono zone dello spazio interstellare, dove è presente un'elevata quantità di Idrogeno ionizzato da fotoni ultravioletti ( $h\nu > 13.6$  eV) delle stelle di tipo O e B che si trovano all'interno della zona.

La nube che ha formato queste stelle rimane attorno ad esse, ed è una nube ad alta densità di Idrogeno molecolare, detta zona HI. Questa viene ionizzata in parte dai fotoni UV emessi dalle stelle, che creano la regione HII.

La luminosità della nube è data dal decadimento degli elettroni e dei protoni dal livello energetico 3 al 2, che emettono fotoni della riga di Balmer  $H_\alpha$  a una lunghezza d'onda  $\lambda = 660$  nm.

La formazione di questa zona inizia con l'arrivo dei primi fotoni ionizzanti dalla stella, con cammino libero medio  $\lambda = \frac{1}{n\sigma_\gamma}$ . I fotoni successivi passeranno attraverso il primo strato ionizzato, espandendo la zona.

La regione raggiungerà un raggio massimo, quando le ricombinazioni compensano le ionizzazioni.

Per un guscio generico di raggio  $R$  abbiamo

$$\dot{N} = 4\pi R^2 n_H \frac{dR}{dt} + \frac{4}{3}\pi R^3 \alpha n_e n_p \quad (3.10)$$

Dove con  $\dot{N}$  abbiamo indicato la luminosità di fotoni ionizzanti, con  $4\pi R^2 n_H \frac{dR}{dt}$  il numero di atomi non ionizzati che si aggiungono per unità di tempo e con  $\frac{4}{3}\pi R^3 \alpha n_e n_p$  il numero di ricombinazioni per unità di tempo.

Si avrà l'equilibrio quando  $\frac{dR}{dt} = 0$ . Quindi

$$\dot{N} = \frac{4}{3}\pi R^3 \alpha n_e n_p \quad (3.11)$$

Il raggio massimo raggiungibile dalla zona HII è detto *Raggio di Strömgren* ed è dato dalla formula

$$R_s = \sqrt[3]{\frac{3\dot{N}}{4\pi n_e n_p}}$$

Solitamente, le variabili interne hanno valori

$$\begin{aligned}\dot{N} &= 10^{48} \frac{\gamma_{ion}}{s} \\ n_e n_p &\approx n_H^2 = (10 \text{ cm}^{-3})^2 \\ \alpha &= 2.5 \times 10^{-13} \text{ cm}^{-3} \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

Di conseguenza, in media  $R_s \approx 6 \text{ pc}$ .

La situazione reale risulterà più complessa, poiché con ogni ricombinazione vengono emessi fotoni ionizzanti, che ingrandiscono il raggio della regione HII. La regione HII continua ad espandersi anche perché la pressione della regione HII è molto maggiore della pressione del gas della regione HI, date le temperature più elevate.

Per questo, la regione HII deve espandersi.

### 3.6 Scattering Thomson e Compton

Lo scattering Thomson e Compton avviene quando della radiazione elettromagnetica incide su una nube di elettroni liberi, che oscillando creano un campo Elettromagnetico con la stessa frequenza di quello incidente.

Se  $h\nu \ll m_e c^2$  il problema viene studiato classicamente con lo scattering Thomson, se invece  $h\nu \gtrsim m_e c^2$ , viene studiato quantisticamente tramite lo scattering Compton.

La lunghezza d'onda di transizione tra effetto Thomson e Compton è data da

$$\frac{hc}{\lambda_c} = m_e c^2 \longrightarrow \lambda_c = \frac{h}{m_e c} \approx 0.24 \text{ nm}$$

#### 3.6.1 Scattering Thomson

Consideriamo il primo caso, con  $h\nu \ll m_e c^2$ . Sia  $\mathbf{E}$  il campo elettrico dell'onda incidente su una carica  $Ze$ .

L'accelerazione impressa sulla carica è pari a

$$m\mathbf{a} = Ze\mathbf{E}$$

Trascurando la forza di Lorentz  $Ze\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  utilizzando l'approssimazione di bassa frequenza, si ottiene un dipolo oscillante

$$\mathbf{d} = Ze\mathbf{r}$$

Di conseguenza

$$\ddot{\mathbf{d}} = Ze\mathbf{a} = \frac{Z^2 e^2}{m} \mathbf{E}$$

Poiché nella teoria dei potenziali ritardati, l'energia irraggiata dal dipolo in un angolo solido infinitesimo attorno alla direzione  $\mathbf{n}$  è

$$dW_{irr} = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\mathbf{d}} \wedge \mathbf{n})^2 d\Omega = \frac{Z^4 e^4 E^2}{4\pi m^2 c^3} \sin^2 \theta d\Omega$$

L'energia incidente sull'elettrone per unità di superficie è data dal vettore di Poynting

$$W_{inc} = |\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} E^2$$

Il rapporto tra le due energie è una superficie

$$d\sigma_{TZ} = \left( \frac{Z^4 e^4}{m^2 c^4} \right) \sin \theta d\Omega$$

Integrando su tutti gli angoli e valutando nel caso di un elettrone, si trova la sezione d'urto Thomson

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{m^2 c^4} \approx 0.66 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (3.12)$$

Indicando l'angolo  $\theta$  tra campo e direzione diffusa in termini di  $\Theta$ , definito come l'angolo tra onda incidente e diffusa, è possibile valutare lo scattering Thomson nel caso di radiazione non polarizzata e polarizzata.

Nel caso non polarizzato otteniamo

$$d\sigma_{T,np} = \frac{e^4}{2m^2 c^4} (1 + \cos^2 \Theta) d\Omega$$

E nel caso di radiazione completamente polarizzata

$$d\sigma_{T,p} = \frac{e^4}{m^2 c^4} (1 - \sin^2 \Theta \cos^2 \phi) d\Omega$$

### 3.6.2 Scattering Compton

Nel caso che  $h\nu \gtrsim m_e c^2 \approx 0.5 \text{ MeV}$  è necessaria una trattazione quantistica. In questo caso lo scattering non è elastico, ed il fotone cede energia all'elettrone, o la acquista dallo stesso.

La nuova lunghezza del fotone può essere calcolata tramite la conservazione dell'energia e dell'impulso, ottenendo

$$\lambda_{diff} - \lambda_{inc} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

La sezione d'urto dell'effetto Compton è data dalla formula di Klein-Nishina, e diminuisce all'aumentare dell'energia. Particolarmente, per energie  $h\nu > 2m_e c^2$  si ha la formazione di coppie  $e^- e^+$ .

La formula di Klein-Nishina è data dalla seguente equazione

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 r_c^2 P^2(E_\gamma, \theta)}{2} \left( P(E_\gamma, \theta) + \frac{1}{P(E_\gamma, \theta)} - 1 + \cos^2 \theta \right) \\ r_c = \frac{\hbar}{m_e c} \\ \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \\ P(E_\gamma, \theta) = \frac{1}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)} \end{array} \right. \quad (3.13)$$



### Scattering Compton Inverso

Nel caso che la particella carica abbia molta più energia del fotone, si ha l'effetto *Compton Inverso* o *Self-Compton* in Inglese.

Astrofisicamente avviene nei dischi d'accrescimento attorno ai buchi neri, nei lobi delle radiogalassie e negli ammassi di galassie

### 3.6.3 Scattering Rayleigh

Lo scattering di Rayleigh è ottenuto nel caso che, invece di considerare elettroni liberi, come nel caso di scattering Thomson, si considerano elettroni legati elasticamente all'atomo.

L'equazione del moto nel caso in questo caso è data da

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} - k\mathbf{r}$$

Di conseguenza

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$$

La soluzione dell'equazione è  $\mathbf{r} = \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\mathbf{E}$ .

Calcolando la seconda derivata del momento di dipolo otteniamo

$$\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2}\mathbf{E}$$

Rifacendo gli stessi conti per lo scattering Thomson otteniamo, che la sezione d'urto dello scattering di Rayleigh è

$$\begin{cases} \sigma_R = \frac{\sigma_T}{(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2} \\ \sigma_R = \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \end{cases} \quad \omega_0 \gg \omega$$

## 3.7 Interazione tra Fotoni e Particelle Solide

Un tipo di interazione di grande interesse astrofisico è l'interazione tra fotoni e materia interstellare. La materia interstellare è formata da particelle solide di piccole dimensioni, lasciate dall'esplosione di Supernovae da stelle massive, collassate dopo aver fuso tutto il combustibile nucleare ed aver formato un nucleo di ferro massivo, che non può essere fuso in elementi più massivi.

Questi elementi si possono aggregare in granelli solidi di piccole dimensioni, che interagendo con i fotoni, possono avere effetti di assorbimento e scattering delle stelle retrostanti, chiamato comunemente *estinzione interstellare*, ed effetti di emissione di radiazione termica, detta *emissione interstellare*.

### 3.7.1 Estinzione Interstellare

L'estinzione interstellare è un effetto particolarmente efficiente nel blu e nell'UV.

Quest'effetto viene misurato in magnitudini e viene indicato con  $A_\lambda$ , ed è derivabile dalle equazioni del trasporto radiativo.

In formule

$$\begin{cases} I(\lambda) = I_0(\lambda)e^{-\tau(\lambda)} \\ A_\lambda = -2.5 \log_{10} \frac{I(\lambda)}{I_0(\lambda)} = 2.5\tau(\lambda) \log_{10} e \approx 1.086\tau(\lambda) \end{cases}$$

L'estinzione può essere misurata confrontando lo spettro di una stella  $a$  dietro la nube di polvere, con lo spettro di una stella  $b$  della stessa classe spettrale senza polvere lungo la linea di vista

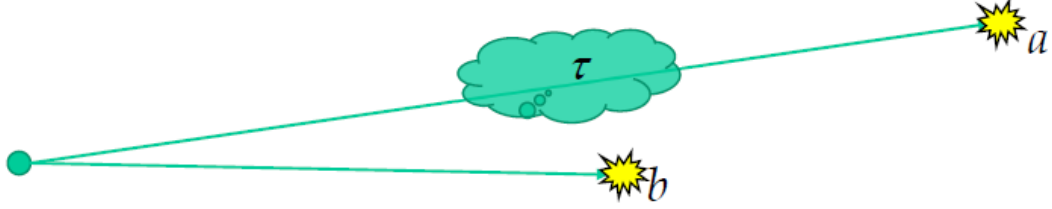


Figura 3.3: Tecnica di misura dell'estinzione interstellare

Poiché abbiamo per la stella  $a$  e per la stella  $b$  la seguente relazione per il flusso

$$\begin{cases} F_{\lambda,a} = \frac{L_{\lambda,a}}{4\pi d_a^2} e^{-\tau_\lambda} \\ F_{\lambda,b} = \frac{L_{\lambda,b}}{4\pi d_b^2} \end{cases}$$

Calcolando il  $\log_{10}$  e moltiplicando per  $-2.5$  si convertono le due relazioni in relazioni per le magnitudini

$$\begin{cases} m_{\lambda,a} = M_{\lambda,a} + 5 (\log_{10} d_a(pc) - 1) - 2.5 \log_{10} e^{-\tau_\lambda} \\ m_{\lambda,b} = M_{\lambda,b} + 5 (\log_{10} d_b(pc) - 1) \end{cases}$$

Per definizione di estinzione interstellare, e poiché abbiamo scelto due stelle della stessa classe spettrale, otteniamo la formula esplicita per l'estinzione interstellare

$$A_\lambda = m_{\lambda,a} - m_{\lambda,b} + 5 \log_{10} \frac{d_b}{d_a} \quad (3.14)$$

## 3.8 Bremsstrahlung Interstellare

Oltre ai vari tipi di radiazione termica, nel gas interstellare è possibile avere altri due tipi di radiazione

1. Bremsstrahlung magnetica (Radiazione di sincrotrone)
2. Bremsstrahlung termica (Radiazione di free-free)

Il primo tipo di radiazione è l'emissione del gas interstellare ionizzato nel radio, mentre il secondo è la radiazione di free-free delle regioni HII nel radio.

Ambedue sono descritte come radiazione di frenamento, dal tedesco *Bremsstrahlung*, sono generate dall'accelerazione di particelle cariche.

Nel caso di radiazione di sincrotrone questa variazione è dovuta alla forza di Lorentz generata dal campo magnetico di una particella relativistica, nel caso di radiazione di free-free invece, la variazione è prodotta dallo scattering coulombiano di due particelle cariche.

In ambedue i casi, la particella accelerata produce radiazione elettromagnetica, la cui potenza è proporzionale al quadrato dell'accelerazione.

### 3.8.1 Bremsstrahlung magnetico

Prima di considerare il caso relativistico, calcoliamo l'effetto di Bremsstrahlung magnetico nel caso di radiazione di ciclotrone.

Venga considerata una carica che si muove con velocità  $v \ll c$  in un campo magnetico uniforme lungo l'asse  $z$ .

La forza applicata su questa particella è

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Scrivendo le equazioni del moto sul piano  $xy$  abbiamo, in coordinate polari

$$m\omega_c^2 r = q\omega_c r B$$

Da cui si ottiene la *frequenza di ciclotrone*

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

In termini di  $\nu$  abbiamo

$$\nu_c = \frac{qB}{2\pi m}$$

Questa radiazione è polarizzata in direzione ortogonale al campo magnetico, poiché l'elettrone compie un moto armonico solo in quella direzione. Per questo motivo, la radiazione è polarizzata linearmente. Nel caso relativistico, si avrà invece, usando l'equazione relativistica del moto (e ponendo  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ )

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \frac{d}{dt}\gamma m\mathbf{v} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Poiché  $v$  è supposta costante in modulo, abbiamo

$$\gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Risolvendo l'equazione, è possibile trovare l'espressione della *frequenza di sincrotrone* o *frequenza di girazione* dell'elettrone

$$\omega_s = \frac{qB}{\gamma(v)m} \quad (3.15)$$

Esiste una frequenza massima di sincrotrone, ed è data dalla formula

$$\omega_s^{max} \approx \frac{\gamma^2 qB}{m} = \frac{qB}{m} \left( \frac{K}{mc^2} \right)^2 \quad (3.16)$$

Dove, con  $K$  è indicata l'energia della particella.

Supponendo ora che gli elettroni abbiano uno spettro di energie a legge di potenza del tipo

$$\frac{dN}{dK} \propto K^\beta$$

Abbiamo che, la probabilità di trovare un elettrone che emette ad una frequenza  $\nu$  è

$$P(\nu) \propto h\nu \frac{dN}{dK} \propto \frac{\nu K^\beta}{2K} \propto \nu^\alpha$$

Dove

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\beta + 1}{2} & \beta &= 2\alpha + 1 \\ \alpha &= -1.2, \beta = -3.4 & & \text{Intorno del Sole} \\ \alpha &= -0.8, \beta = -2.6 & & \text{Galassia} \end{aligned}$$

### Sincrotrone Galattico

Nel caso di una distribuzione qualsiasi delle energie degli elettroni, lo spettro di sincrotrone è la convoluzione pesata di spettri monoenergetici (visti nel passaggio precedente).

Nella radiazione galattica diffusa, nel radio, abbiamo

$$\begin{aligned} I(\nu) &\approx \nu^\alpha \\ \alpha &\approx -0.8 \pm 0.1 \end{aligned}$$

Dalle osservazioni è evidente una polarizzazione lineare significativa della radiazione.

**Polarizzazione Lineare** Studiando la polarizzazione della radiazione, è possibile definire i *parametri di Stokes* come le differenze d'intensità misurate in direzioni ortogonali

$$Q = I(0) - I\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$U = I\left(\frac{\pi}{4}\right) - I\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Il grado di polarizzazione è dato da

$$\Pi = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I}$$

La direzione di polarizzazione, invece, è data da

$$\chi = \arctan \frac{Q}{U}$$

Effettuando le misure sulla radiazione di sincrotrone notiamo che il grado di polarizzazione è molto elevato, e può arrivare anche a valori di 0.8. Questa polarizzazione può essere poi utilizzata per studiare le linee di forza del campo magnetico galattico o di sorgenti in cui avvengono fenomeni ad alta energia, come gli AGN

### 3.8.2 Bremsstrahlung Termico

L'altra tipologia di Bremsstrahlung è la radiazione di free-free, uno scattering radiativo di particelle cariche nel campo elettrico di un nucleo.

Nel caso non relativistico, se poniamo con  $b$  la massima distanza di avvicinamento tra l'elettrone ed il nucleo di carica  $Ze$  abbiamo che l'accelerazione massima ricevuta dall'elettrone è

$$\mathbf{a}_{max} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_{max}$$

$$\mathbf{E}_{max} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b^3} \hat{\mathbf{b}}$$

$$W_{max} = \frac{e^2 a_{max}^2}{6\pi\epsilon_0 c^2} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \frac{Ze^2}{4\pi m\epsilon_0 b^2} \right)^2$$

Il tempo nel quale l'accelerazione è dell'ordine di  $a_{max}$  è

$$\tau = \frac{2b}{v} = \frac{2b}{\beta c}$$

L'energia irraggiata sarà quindi  $Q = W_{max}\tau$ , sostituendo i valori appena trovati otteniamo

$$Q(b) = \frac{4Z^2}{3\beta m^2 c^2 b^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^3$$

Il pacchetto d'onde emesso dall'elettrone, avrà quindi frequenza massima

$$\nu_{max} = \frac{\beta c}{2b} \quad (3.17)$$

Supponendo (*grossolanamente*) che l'energia è emessa in modo uniforme su tutte le frequenze, avremo

$$Q(b) = \int_{\mathbb{R}} I(\nu) d\nu \approx I(\nu) \nu_{max}$$

Lo spettro d'emissione corrispondente sarà quindi

$$I(\nu) d\nu = \frac{Q(b)}{\nu_{max}} d\nu = \frac{8Z^2}{3\beta^2 m^2 c^5 b^2} \left( \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0} \right)^3$$

Questa formula appena derivata ha validità anche nel caso relativistico

# 4 Gas Interstellare

---

Poiché le Galassie non sono fatte solo di stelle, è necessario considerare il mezzo interstellare formato dal *gas interstellare*. È formato principalmente da Idrogeno in tre forme

- HI, neutro
- HII, ionizzato
- H<sub>2</sub>, molecolare

L'idrogeno ionizzato si misura utilizzando le righe di ricombinazione, solitamente la linea H<sub>α</sub>. Non è la tipologia d'idrogeno più comune nel gas interstellare, poiché le transizioni necessitano fotoni UV, che non sono abbondanti lontano da stelle O e B.

L'idrogeno neutro invece è particolarmente comune, ma è più difficile da misurare, poiché tutti gli atomi sono nello stato fondamentale.

L'unico metodo di misura dell'Idrogeno neutro è dato dalla misura della riga di *spin-flip*, con lunghezza d'onda di 21.1 cm, e corrisponde ad una frequenza di 1420.4 MHz

## 4.1 Radiazione di Spin-Flip

La radiazione di spin-flip è la radiazione data dal decadimento di un elettrone dell'Idrogeno dallo stato iperfino eccitato all'iperfino fondamentale. L'esistenza di questo splitting dello stato fondamentale dell'Idrogeno è garantita dall'accoppiamento del momento angolare di spin con il momento angolare orbitale dell'atomo.

Studiando la radiazione di spin-flip utilizzando la teoria del trasporto radiativo microscopico, possiamo calcolare che, essendo la frequenza dei fotoni a 21 cm di 1420.405751 MHz ed il coefficiente di Einstein per l'emissione spontanea  $A_{21} = 2.85 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1}$  abbiamo che un atomo di Idrogeno isolato si diseccita in media ogni 11 My.

Studiando il sistema all'equilibrio termodinamico, con 1 spin antiparallelo e 2 spin paralleli, troviamo che è governato dalla statistica di Boltzmann, con fattori di degenerazione  $g_1 = 1$  e  $g_2 = 3$ .

La temperatura efficace del sistema è  $T_s \approx 150 \text{ K}$ , quindi abbiamo che

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{\frac{h\nu_{21}}{kT_s}} \approx 3$$

La densità di atomi d'Idrogeno sarà

$$n_H = n_2 + n_1 \approx 4n_1$$

Introducendo il profilo di riga Lorentziano  $\phi(\nu)$  abbiamo che il coefficiente di assorbimento del sistema a due livelli è

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu_{21}}{4\pi} B_{12} n_1 \left( 1 - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1} \right) \phi(\nu)$$

Poiché

$$\begin{cases} \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1} = e^{\frac{h\nu_{21}}{kT_s}} \\ B_{12} = \frac{g_2}{g_1} B_{21} = \frac{g_2 c^2}{2g_1 g \nu_{21}^2} A_{21} \end{cases}$$

Otteniamo infine l'espressione esplicita per il coefficiente di assorbimento

$$\alpha_\nu = \frac{g_2 c^2}{8\pi g_1 \nu_{21}^2} n_1 A_{21} \left( 1 - e^{-\frac{h\nu_{21}}{kT_s}} \right) \phi(\nu)$$

Che, nel caso  $h\nu_{21} \ll kT_s$  diventa

$$\alpha_\nu = \frac{3hc^2 n_H A_{21}}{32\pi k T_s \nu_{21}} \phi(\nu) \quad (4.1)$$

Lo spessore ottico lungo la linea di vista sarà dato dall'integrale dell'espressione appena ottenuta, che nel caso di temperatura di spin costante è

$$\tau_\nu = \int_{LOS} \alpha_\nu ds = \frac{3hc^2 A_{21}}{32\pi k T_s \nu_{21}} \phi(\nu) \int_{LOS} n_H ds = \frac{3hc^2 A_{21} N_H}{32\pi k T_s \nu_{21}} \phi(\nu) \quad (4.2)$$

La brillantezza prodotta nella condizione di basso spessore ottico sarà

$$I_\nu = \tau_\nu B(\nu, T_s) = \frac{3h\nu_{21} N_H A_{21}}{16\pi} \phi(\nu)$$

Definendo la *temperatura di brillantezza* come

$$T_b(\nu) = \tau_\nu T_s$$

Si può riscrivere il tutto in funzione di  $T_b$

$$I_\nu = \frac{2\nu^2 k T_b(\nu)}{c^2}$$

L'integrale su tutto il profilo di riga misurato sarà quindi, ricordando che  $\phi(\nu)$  è normalizzata ad uno sullo spettro

$$\int_{riga} T_b(\nu) d\nu = \frac{3c^2 h N_H A_{21}}{32\pi k \nu_{21}}$$



Di conseguenza, è possibile calcolare la densità colonnare di atomi d'Idrogeno  $N_H$ , invertendo la formula

$$N_H = \frac{32\pi k\nu_{21}}{3c^2 h A_{21}} \int_{riga} T_b(\nu) d\nu$$

Effettuando la sostituzione  $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}$  possiamo esprimere il tutto in funzione della velocità relativa

$$N_H = \frac{32\pi k\nu_{21}^2}{3c^3 h A_{21}} \int_{riga} T_b(v) dv$$

Un utilizzo pratico della radiazione di spin-flip, tramite l'integrale in termini della velocità relativa, è il calcolo della velocità del moto di nubi di gas tramite l'utilizzo dell'effetto Doppler

## 4.2 Curve di Rotazione Galattica

Definiamo un sistema di coordinate galattiche, dato da  $\gamma$  la longitudine galattica ed  $R$  il raggio dal centro galattico e studiano il moto di un oggetto come in figura

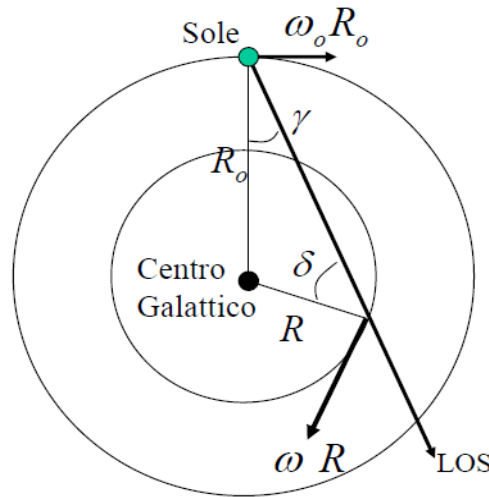


Figura 4.1: Sistema in studio

Con  $\delta$  è stato definito l'angolo tra il LOS ed il raggio galattico dell'oggetto studiato. Sapendo che il raggio galattico del Sole è dato da  $R_0 = 8.5 \text{ kpc} = 2.6 \times 10^{17} \text{ km}$ , e notando che sia il sole che l'oggetto studiato si muovono di moto circolare uniforme, abbiamo che la velocità di spostamento del sistema è

$$V = \omega R \sin \delta - \omega_0 R_0 \sin \gamma$$

Poiché  $R \sin \delta = R_0 \sin \gamma$  abbiamo che

$$V = (\omega - \omega_0) R_0 \sin \gamma$$

Poiché  $\omega_0 R_0$  è conosciuto ed ha valore  $220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  è possibile calcolare la velocità dell'oggetto. Supponendo un moto Kepleriano degli oggetti in moto attorno alla galassia, abbiamo che la massima velocità proiettata è quella tangente al moto, ed in quel caso

$$R_{\min} = R_0 \sin \gamma$$

Utilizzando questa supposizione troviamo una grossa discordanza con i dati sperimentali, infatti si trova una curva di rotazione galattica compatibile ad una velocità di rotazione costante.

Studiando il campo gravitazionale galattico con l'utilizzo del teorema di Gauss, abbiamo che ad una certa distanza dal centro avremo che

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GM(r)m}{r^2}$$

E quindi

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$$

Che, nel caso che la massa sia soltanto quella visibile, risulta incompatibile con le osservazioni.

Esprimendo la massa come l'integrale della densità, possiamo ottenere due casi particolari

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r} = \begin{cases} M(r) = M_0 & v \propto r^{-\frac{1}{2}} \\ M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3 & v \propto r \end{cases}$$

Il secondo caso, è evidentemente quello compatibile con la curva di rotazione galattica. Una conferma di questa curva di rotazione piatta, è ottenibile studiando la curva di rotazione di diverse galassie, utilizzando sempre l'effetto Doppler.

Studiando le galassie a spirale *edge-on*, è evidente la presenza della curva di rotazione piatta in praticamente tutte le galassie osservate

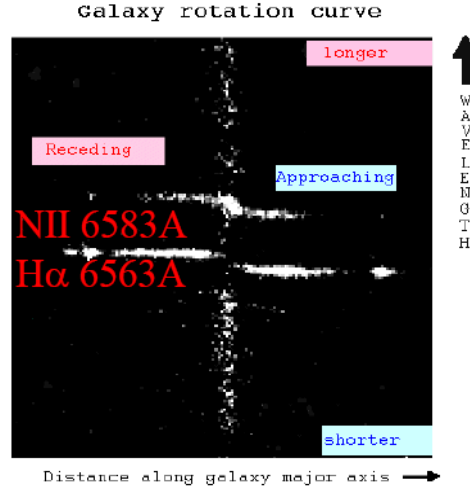


Figura 4.2: Esempio di curva di rotazione galattica della galassia UGC 9242

#### 4.2.1 Materia Oscura

Una possibile spiegazione di queste particolari curve di rotazione, è la presenza di *materia non barionica*, comunemente conosciuta come *materia oscura*.

L'evidenza della presenza di questa materia oscura è presente anche a scale ancora maggiori, infatti studiando il moto delle galassie negli ammassi galattici, si nota una velocità orbitale delle galassie dell'ordine di  $10^3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ . Se gli ammassi galattici non fossero legati gravitazionalmente il problema non si porrebbe, ma poiché *sono* legati gravitazionalmente, è necessaria la presenza di una quantità di massa non visibile 10 volte superiore alla materia luminosa presente nel sistema.

Considerando l'approccio di F.Zwicky (Ap.J., 86, 217, 1937), possiamo stimare la massa totale nell'ammasso galattico partendo dall'equazione dell'energia.

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M_{tot} \langle v^2 \rangle \\ \mathcal{U} = -\frac{1}{2} \frac{GN^2 m^2}{R_{tot}} = -\frac{1}{2} \frac{GM_{tot}^2}{R_{tot}} \end{cases}$$

Supponendo che il sistema sia virializzato, possiamo applicare il teorema del viriale ed ottenere

$$\frac{1}{2} M_{tot} \langle v^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{GM_{tot}^2}{R_{tot}}$$

Risolvendo nell'incognita  $M_{tot}$  Troviamo il risultato finale

$$M_{tot} = \frac{2R_{tot} \langle v^2 \rangle}{G}$$

Misurando la dispersione delle velocità ed il raggio massimo dell'ammasso è possibile stimare la quantità di massa

### Materia Oscura e Ammassi di Galassie

Per un sistema virializzato a simmetria sferica, come un ammasso di galassie, l'energia potenziale può essere sempre scritta come

$$\mathcal{U} = -\frac{\alpha GM^2}{R}$$

Con  $M$  la massa totale del sistema ed  $\alpha$  una costante dipendente dalla distribuzione della densità di massa, ed è dell'ordine di 1.

L'energia del sistema considerato, può essere scritto in termini della velocità quadratica media, Infatti

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_V v^2(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) dV}{\int_V \rho(\mathbf{x}) dV} = \frac{1}{M} \int_M v^2(\mathbf{x}) dM = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_i^2$$

Dall'espressione dell'energia cinetica  $T$  per un sistema di punti otteniamo che

$$T = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle$$

Combinando energia potenziale, cinetica ed il teorema del viriale si ottiene

$$M = \frac{R \langle v^2 \rangle}{\alpha G}$$

Ponendo  $\alpha = 0.4$  si può esprimere la quantità di massa utilizzando anche il raggio mediano  $R_m$ , la cui misura risulta più semplice, rispetto al raggio totale

$$M = \frac{2.5 \langle v^2 \rangle R_m}{G}$$

Definendo  $\gamma = \frac{M}{L}$  come il rapporto tra massa totale e luminosa e con  $\eta$  l'abbondanza della specie galattica considerata, possiamo stimare che per un ammasso regolare, in assenza di materia oscura e valutando che  $\gamma \sim 6.5\gamma_0$ ,  $\eta_E \sim 30\%$  per le galassie ellittiche,  $\gamma \sim 5\gamma_0$ ,  $\eta_{S0} \sim 45\%$  per le galassie lenticolari, e infine  $\gamma \sim 2\gamma_0$ ,  $\eta_S \sim 20\%$ , abbiamo che il  $\gamma$  totale dell'ammasso sarà

$$\gamma = \eta_E \gamma_E + \eta_{S0} \gamma_{S0} + \eta_S \gamma_S \approx 5$$

Ciò è direttamente contraddetto dalle misure sperimentali su vari ammassi, che risultano in disaccordo di circa 2 ordini di grandezza.

Un altro metodo per misurare la quantità di materia oscura è lo sfruttamento del lensing gravitazionale, un effetto general-relativistico, dove la luce degli oggetti antistanti all'oggetto in studio viene distorta dal campo gravitazionale dell'oggetto in studio.

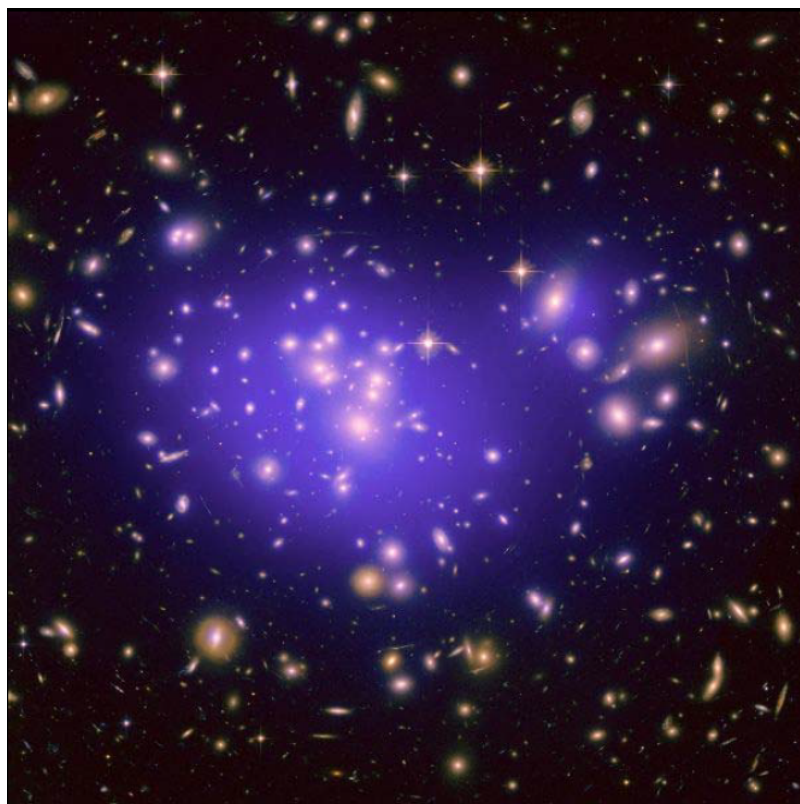


Figura 4.3: Stima (in blu) della posizione della materia oscura nell'ammasso di galassie Abel 1689 sfruttando il lensing gravitazionale

Nella figura precedente, è evidente la distorsione dell'immagine attorno al bordo dell'ammasso di galassie, data dalla grossa presenza di materia luminosa ed oscura.

### Ipotesi Risolutive al Problema

La soluzione al problema della materia mancante nelle galassie e negli ammassi galattici, è data dalla presenza di una componente di materia massiva e non interagente elettromagneticamente. Questo tipo di particelle sono chiamate *Weakly Interacting Massive Particles*, abbreviato in *WIMPs*, queste particelle non sono previste dal modello standard della fisica delle particelle, ma la loro esistenza è richiesta da osservazioni cosmologiche, infatti la stima, al giorno d'oggi, della densità di materia oscura non barionica è dell'ordine di  $\Omega = 0.3$ .

Un'altra soluzione al problema è data da leggi di gravitazione modificate, come *Modified*

*Newtonian Dynamics, MoND, Tensor Vector Scalar Gravity TeVeS, etc...*

### 4.3 Gas Molecolare Intergalattico

Data la bassa temperatura del gas interstellare, non è raro trovare emissione ed assorbimento negli spettri dato da molecole.

Nel caso particolare dell'Idrogeno molecolare  $H_2$ , si ha un'estrema difficoltà nel rivelarlo, dato che la sua natura omonucleare lo porta ad avere momento di dipolo totale nullo. Ulteriormente, non è possibile la transizione iperfina di spin-flip. La rivelazione di queste regioni di Idrogeno molecolare sono possibili valutando le debolissime emissioni di quadrupolo nell'IR termico, ergo praticamente invisibili da terra, data la grandissima estinzione atmosferica a queste lunghezze d'onda.

È quindi assai più facile rilevare molecole biatomiche eteronucleari, con momento di dipolo non nullo.

In prima approssimazione, indicando con  $\mathbf{L}$  il momento angolare della molecola, avremo che una molecola biatomica ha energia  $E$

$$E = \frac{1}{2}I\omega = \frac{L^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2I}j(j+1)$$

Calcolando la frequenza d'emissione dei fotoni, ricordando che  $\hbar\omega = \Delta E$ , abbiamo che per una transizione del tipo  $j \rightarrow j-1$  abbiamo

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{\hbar j}{I} \approx \frac{L}{I} = \omega_{rot}$$

Conseguentemente, sostituendo i valori noti, otterremo uno spettro nel mm e nel sub-mm, con frequenze  $\nu_j \approx 100 \cdot j$  GHz. Ricordando che la degenerazione degli stati puramente rotazionali è  $(2j+1)$ , possiamo valutare la popolazione dei livelli energetici tramite l'equazione di Saha

$$\frac{n_j}{n_0} = \frac{g_j}{g_0} e^{-\frac{\Delta E}{kT}} = (2j+1) e^{-\frac{\hbar^2 j(j+1)}{2IkT}} \quad (4.3)$$

È evidente come la popolazione dei livelli dipenda dalla temperatura  $T$  dell'ambiente circostante.

#### 4.3.1 Formazione Stellare

Studiando le nubi molecolari interstellari, è necessario e fondamentale parlare di formazione stellare.

Venga considerata una regione sferica di raggio  $R$  in cui vi è contenuto del gas soggetto ad una forza gravitazionale, per il teorema del viriale

$$E = \frac{1}{2}U \quad (4.4)$$

L'energia potenziale gravitazionale  $U$  di uno spessore infinitesimo di questo materiale sarà data dalla soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} dU &= -G \frac{M_r dm}{r} = -G \frac{4\pi M_r \rho r^2 dr}{r}, & M_r &= \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \\ dU &= -\frac{16}{3} G \pi^2 \rho^2 r^4 dr \\ U &= -\frac{16}{15} G \pi \rho R^5 = -\frac{3}{5} \frac{GM_r}{R} \end{aligned}$$

L'energia cinetica a temperatura  $T$  per  $N$  particelle sarà

$$K = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu m_H} kT$$

Dove  $M$  è la massa totale della nube e  $\mu$  il peso molecolare degli elementi (in amu). Poiché la nube collassi l'energia gravitazionale dev'essere maggiore dell'energia cinetica, ergo

$$\frac{kT}{\mu m_H} < \frac{1}{5} \frac{GM}{R} \quad (4.5)$$

Scrivendo il raggio  $R$  in funzione della densità iniziale, con la formula

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 \longrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho_0}} \quad (4.6)$$

E sostituendo nella (4.5), otteniamo

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\rho_0}} \frac{kT}{\mu m_H} < \frac{1}{5} \frac{GM}{\sqrt[3]{M}}$$

Risolvendo per  $M$  otteniamo infine

$$M > \left( \frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho_0}} = M_J \quad (4.7)$$

La massa critica  $M_J$  è chiamata *Massa di Jeans*.

Ricordando che  $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$  possiamo scrivere una relazione analoga per il raggio della nube

$$R > \sqrt{\frac{15kT}{4\pi G\mu m_H \rho_0}} = R_J \quad (4.8)$$

Dove  $R_J$  è detto il *Raggio di Jeans* della nube.





# Parte III

## Cosmologia



# 5

## Distanze Cosmologiche

---

Le galassie sono oggetti che contengono in media da  $10^7$  a  $10^{13}$   $M_{\odot}$  sotto forma di stelle, gas interstellare e materia oscura. La distanza tra le galassie è solitamente nell'ordine dei Mpc e hanno una luminosità media intorno a  $2 \cdot 10^{10} \mathcal{L}_{\odot}$ , con  $\mathcal{L}_{\odot} = 2.4 \cdot 10^{45} \frac{\text{eV}}{\text{s}} = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$

### 5.1 Misure di Distanza

Per poter misurare le distanze a livello cosmologico ed extragalattico è necessario usare delle *candele standard*, poiché i metodi di studio delle distanze utilizzando la parallasse annua sono impossibili.

#### 5.1.1 Distanza di Magitudine

È possibile misurare la distanza delle stelle sfruttando la magnitudine apparente e assoluta. Ricordando che la magnitudine apparente  $m$  e la magnitudine assoluta  $M$  sono definite come

- $m = -2.5 \log_{10} \mathcal{F}$ , che è legata al flusso misurato
- $M = m - 5 \log_{10} \left( \frac{D_{\text{pc}}}{10} \right)$  è la magnitudine

È possibile creare quindi, prendendo una banda dello spettro elettromagnetico, dei diagrammi assoluti a seconda del colore della radiazione scelto.

Prendendo per esempio la banda  $B - V$  abbiamo quindi una banda che va dal blu 440 nm al visibile (giallo/verde) 550 nm, si ha una funzione della temperatura e della frequenza della radiazione in rapporto alla magnitudine di banda misurata, secondo la formula

$$B - V = -2.5 \log_{10} \left( \frac{B(\nu_B, T)}{B(\nu_V, T)} \right) \approx -1.21 + \frac{7090}{T} \quad (5.1)$$

Ciò ci permette di costruire diagrammi Hertzsprung-Russell assoluti usando la magnitudine assoluta e la magnitudine di banda.

Tramite la magnitudine è possibile determinare la distanza di un oggetto. Introducendo

il modulo di distanza come  $M - m$  è possibile esplicitare la distanza in parsec di un oggetto conoscendone solo la sua magnitudine apparente ed assoluta, secondo la formula

$$D_{pc} = 10^{1 - \frac{M-m}{5}} \quad (5.2)$$

### 5.1.2 Cefeidi

Le Cefeidi sono una classe di stelle variabile, la cui pulsazione è legata alla luminosità assoluta. Per le Cefeidi fondamentali si ha quindi la relazione seguente, legata alla (5.2)

$$M_V = -2.765 \log_{10} P_{days} + 17.044 \quad (5.3)$$

Essendo la magnitudine assoluta nel visibile media di una Cefeide intorno al  $-4$ , si ha che sono visibili fino a circa 50 Mpc, permettendo di misurare la distanza di galassie lontane.

### 5.1.3 Distanza di Luminosità

Un altro metodo di misura della distanza è dato dalla distanza di Luminosità, dove viene utilizzata la luminosità intrinseca di una candela standard (nota quindi a priori), ed il flusso misurato. Dalla definizione stessa del flusso, abbiamo quindi che la distanza di luminosità è

$$D_{\mathcal{L}} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{4\pi\mathcal{F}}} \quad (5.4)$$

Le candele standard utilizzate per questo metodo sono Cefeidi, Supernovae Ia...

## 5.2 Redshift e Legge di Hubble

Un modo per misurare le distanze a livelli cosmologici comprende l'utilizzare le galassie come candele standard, infatti è possibile definire una grandezza, il redshift ( $z$ ), il quale è dato dall'effetto Doppler causato dal moto proprio delle galassie osservate, rispetto a noi. Definendo quindi il redshift come  $\Delta\lambda/\lambda$  e misurando la velocità relativa delle galassie e la loro magnitudine assoluta, è possibile quindi verificare degli andamenti lineari della dispersione delle velocità con le distanze.

Questa relazione lineare trovata è la *legge di Hubble*, che lega il redshift alla distanza.

In formule

$$cz = H_0 D \quad (5.5)$$

$H_0$  è una costante, detta costante di Hubble, che ha un valore intorno ai  $70 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ .

Questa linearità è vera in tutte le direzioni radiali per grandi distanze, portando quindi al *principio cosmologico*, che indica che l'universo è omogeneo a grandi scale.

È facile notare, che utilizzando l'effetto Doppler classico, a distanze con  $z > 1$  si debbano avere velocità delle galassie superiori a  $c$ , il ché è assurdo.

Usando la teoria special-relativistica dell'effetto Doppler, abbiamo quindi che, essendo  $\Delta\lambda/\lambda = v/c$  si ottiene

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_{rest}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_r}{c}}{1 + \frac{v_r}{c}}} \quad (5.6)$$

Essendo  $1 + z = \lambda_{obs}/\lambda_{rest}$ , si ha che

$$\frac{v}{c} = \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} \quad (5.7)$$



# 6

## Equazioni di Friedmann

---

Sfruttando il principio cosmologico, ergo che l'universo è omogeneo ed isotropo, è possibile calcolarne la dinamica utilizzando in un'approssimazione valida a “grandi linee” attraverso la meccanica Newtoniana.

Consideriamo un universo pieno di materia in espansione a velocità  $H_0$ . Data l'omogeneità, è possibile descrivere le proprietà a grandi scale con la densità  $\rho(t)$ , variabile nel tempo. Considerando una sfera con origine in un punto qualsiasi e sfruttando la simmetria sferica del problema, possiamo utilizzare la legge della conservazione dell'energia meccanica totale. Notando che l'unica forza agente è la forza gravitazionale tra un oggetto di massa  $m$  di “prova” e la massa totale  $M = 4\pi r^2 \rho$  abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - \frac{4\pi}{3r}G\rho m &= E \\ v^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho r^2 &= -kc^2r_0\end{aligned}\tag{6.1}$$

Dove la costante  $E$  è stata scelta per comodità pari a  $E = -kc^2r_0$  con  $r_0$  il raggio attuale,  $k$  una lunghezza<sup>-2</sup> e  $c$  la velocità della luce.

Essendo sia  $c$  che  $r_0$  fissati, la dinamica dipende solo dal parametro  $k$ . A seconda del valore dello stesso si possono avere 3 casi principali:

1.  $k > 0$ , l'energia totale è negativa, quindi il tutto collasserà dopo l'espansione
2.  $k = 0$ , l'energia totale è nulla e quindi l'espansione continua fino a fermarsi ad un tempo infinito
3.  $k < 0$ , l'energia totale è positiva, e quindi l'espansione continua senza alcun limite.

Grazie al principio cosmologico, il raggio  $r_0$  della sfera può essere mandato ad infinito con continuità, di conseguenza mantenendo gli stessi risultati per una sfera di qualsiasi dimensione. Questa proprietà viene ben espressa da un fattore di scala  $a(t)$ . Considerando il tempo 0 oggi, per definizione poniamo  $a(0) = 1$

È utile introdurre il concetto di distanza comobile  $\chi$ , che descrive le posizioni relative degli oggetti, scalando la distanza di una costante.

Per definizione si ha che

$$r(t) = \chi a(t)\tag{6.2}$$

Dalla legge d'espansione di Hubble, si ha quindi

$$\begin{aligned}\dot{r} &= Hr \\ \chi \dot{a} &= H \chi a \\ \dot{a} &= Ha\end{aligned}\tag{6.3}$$

Da (6.3) otteniamo

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{e} \quad H_0 = \frac{\dot{a}}{a} \Big|_0\tag{6.4}$$

E sostituendo (6.3) nell'equazione (6.1), otteniamo

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{8\pi}{3}G\rho\right)r^2 &= -kc^2r_0^2 \\ \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8\pi}{3}G\rho\right)a^2 &= -kc^2 = \left(H^2 - \frac{8\pi}{3}G\rho\right)a^2 = -kc^2\end{aligned}\tag{6.5}$$

Utilizzando la condizione al contorno per la data odierna, abbiamo 3 vincoli per il valore di  $k$

1.  $k = 0$  se  $H_0^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_0$ , dove  $\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \rho_{c,0}$  è detta *densità critica*
2.  $k > 0$  se  $\rho_0 > \rho_{c,0}$
3.  $k < 0$  se  $\rho_0 < \rho_{c,0}$

Per  $H_0 = 100h \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$  si ha  $\rho_c = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . Definendo il parametro di densità  $\Omega = \rho/\rho_c$  si può riscrivere l'equazione di Friedmann (6.5) in termini del parametro di densità come

$$H_0^2(\Omega_0 - 1) = kc^2\tag{6.6}$$

E di conseguenza, risostituendo

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi}{3} \frac{G\rho_0}{a} = H_0^2(1 - \Omega_0)\tag{6.7}$$

Quest'equazione è integrabile, e permette lo studio dell'evoluzione del fattore di scala nei 3 casi di  $k$  analizzati in precedenza, con parametri  $k, H_0, \Omega_0, \rho_0$ .

Nel caso General Relativistico, il parametro  $k$ , precedente privo di significato fisico, ora prende il significato di *curvatura spaziotemporale* dipendente dal tempo come  $a^{-2}$ .

È possibile scrivere una metrica quadridimensionale, detta di Friedmann-Robertson-Walker (FRW) prendendo la seguente metrica e eseguendo un cambio di variabile da  $r$  ad  $a$  e tenendo conto della coordinata comobile.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{1 - Kr^2}} dr \right)^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right]\tag{6.8}$$



Definendo  $\chi = ar$  e  $k = Ka^2$ , si ha la metrica FRW

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{1 - k\chi^2}} d\chi \right)^2 + \chi^2 d\theta^2 + \chi^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (6.9)$$

Questo risultato è ottenibile risolvendo le equazioni di Einstein (6.10)

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (6.10)$$

## 6.1 Materia Non-Relativistica

La Friedmannologia, è una branca della cosmologia che si occupa di studiare l'evoluzione dell'universo attraverso le equazioni di Friedmann (6.6), (6.7). Per poter risolvere le equazioni di Friedmann e determinare la soluzione  $a(t)$ , è necessario specificare la densità  $\rho_M(t)$ .

Poiché la materia non relativistica deve conservarsi, abbiamo che  $\rho_M(t) \propto r^{-3}(t) \rightarrow \rho_M(t_0)a^{-3}(t)$ .

In termini di densità critica, quindi

$$\rho_M(t_0) = \frac{\rho_M(t_0)}{\rho_c} \rho_c = \Omega_{M0} \rho_c \quad (6.11)$$

Supponendo che questa sia l'unica fonte di energia presente nell'universo in studio, avremo che  $\Omega_0 = \Omega_{M0}$ , e l'equazione di Friedmann diventerebbe quindi

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M(t_0) \frac{1}{a^3} - H_0^2 (1 - \Omega_{M0}) \frac{1}{a^2} \quad (6.12)$$

Risistemando l'equazione, otteniamo

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{M0} \frac{1}{a^3} + (1 - \Omega_{M0}) \frac{1}{a^2} \right] \quad (6.13)$$

A seconda del valore di  $\Omega_{M0}$  abbiamo i seguenti casi:

1.  $\Omega_{M0} \leq 1$ ,  $\dot{a} \neq 0 \forall t$ , e l'espansione è infinita, proveniente da un punto di densità infinita a  $t = 0$
2.  $\Omega_{M0} = 0$ , universo "vuoto". La soluzione esatta è  $a(t) = a_0 H_0 t$ . L'età di questo universo è esattamente  $H_0^{-1}$
3.  $\Omega_{M0} = 1$ , la soluzione esatta è  $a(t) = a_0 (t H_0 / 6)^{2/3}$ , l'età dell'universo è  $2/3 H_0^{-1}$
4.  $\Omega_{M0} > 1$ ,  $\dot{a}$  può annullarsi, e di conseguenza si ha un'espansione seguita da una contrazione ad un valore estremo di  $a(t)$  indicato con  $a_{max}$ . Questo valore è pari a  $a_{max} = \Omega_{M0}(\Omega_{M0} - 1)^{-1}$

## 6.2 Redshift

Consideriamo ora l'origine dell'effetto del redshift. Sia posta una sorgente luminosa ad una coordinata  $\chi_1$ . I fotoni emessi si propagheranno in simmetria sferica.

Dalla metrica FRW e dal fatto che per i fotoni  $ds^2 = 0$  otteniamo, in simmetria sferica che

$$cdt = a(t) \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k\chi^2}} \quad (6.14)$$

Valutando che una cresta dell'onda sarà emessa ad un tempo  $t_1$  in  $\chi_1$  e ricevuta a  $\chi_0 = 0$  al tempo  $t_0$ , la cresta successiva sarà emessa a  $t_1 + \lambda_1/c$  e ricevuta a  $t_0 + \lambda_0/c$ , si avrà

$$\begin{aligned} \int_0^{\chi_1} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k\chi^2}} &= \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1 + \frac{\lambda_1}{c}}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{cdt}{a(t)} \\ \int_{t_1}^{t_1 + \frac{\lambda_1}{c}} \frac{cdt}{a(t)} &= \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\lambda_0}{c}} \frac{cdt}{a(t)} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Poiché  $\lambda/c$  e  $\lambda_0/c$  sono molto più piccoli di  $H_0^{-1}$ ,  $a(t)$  può essere considerato una costante nell'integrazione. Di conseguenza l'integrazione è banale, e si ottiene

$$\frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = (1 + z_1) \quad (6.16)$$

Conseguentemente, un'onda elettromagnetica tenderà ad andare verso il rosso con l'aumentare del redshift

## 6.3 Materia Relativistica

Poiché nel trattamento relativistico della gravità, tutte le forme d'energia contribuiscono alla determinazione della metrica, è necessario modificare le equazioni di Friedmann includendo tali componenti:

- Fotoni
- Neutrini
- Tutte le particelle ultrarelativistiche, dove  $E \gg mc^2$

Il contributo di questa componente relativistica si ridurrà con il tempo, dato che il numero di particelle si diluisce in volumi sempre più grandi, riducendosi come  $a^{-3}$ . Inoltre va tenuto conto del redshift, che va come  $a^{-1}$ .

È possibile quindi scrivere che  $\rho_R \propto a^{-4}$ , di conseguenza

$$\rho_R(t) = \rho_{R0} \frac{1}{a^4(t)} \longrightarrow \Omega_R(t) = \Omega_{R0} \frac{1}{a^4(t)} \quad (6.17)$$

Un ulteriore contributo è dato da una forma di energia indipendente dal tempo, quindi indipendente dall'espansione dell'universo. Questa componente è detta la *Costante Cosmologica* e viene indicata con  $\Lambda$ . Questa contribuisce nel seguente modo

$$\rho_{\Lambda 0} = \rho_{\Lambda} = \rho_{c0} \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_{c0}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{\Lambda} \quad (6.18)$$

## 6.4 Diagramma di Hubble

L'equazione di Friedmann, tenendo conto di tutti gli elementi energetici presenti nell'universo, è

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[ \Omega_{R0} \frac{1}{a^4} + \Omega_{M0} \frac{1}{a^3} + (1 - \Omega_0) \frac{1}{a^2} + \Omega_{\Lambda} \right] \quad (6.19)$$

Dove  $\Omega_0 = \Omega_{R0} + \Omega_{M0} + \Omega_{\Lambda}$ .

Per studiare l'andamento in termini d'accelerazione dell'espansione dell'universo, moltiplichiamo entrambi i membri per  $a^2$  e deriviamo rispetto a  $t$ . Si ottiene

$$\ddot{a} = H_0^2 \left( \Omega_{\Lambda} a - \Omega_{R0} \frac{1}{a^3} - \Omega_{M0} \frac{1}{2a^2} \right) \quad (6.20)$$

Da quest'equazione sono evidenti le seguenti conseguenze

1. Materia e Radiazione decelerano l'espansione quando sono dominanti
2. La costante Cosmologica accelera l'espansione quando è dominante

Introducendo il parametro di decelerazione  $q_0$  definito come

$$q_0 = - \left. \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \right|_{t=0} \quad (6.21)$$

Sostituendo in (6.20) si ha

$$q_0 = \frac{1}{2} \Omega_{M0} + \Omega_{R0} - \Omega_{\Lambda} \quad (6.22)$$

Espandendo in serie  $a(t)$ , si nota che ricompare il parametro  $q_0$  al second'ordine, infatti esso descrive le deviazioni dalla linearità dell'espansione in funzione del tempo, in un intorno di oggi.

Questo parametro ricompare nei *diagrammi di Hubble*, legando distanza e Redshift.

Consideriamo una sorgente luminosa in  $\chi_1$  con luminosità  $\mathcal{L} = \hbar\omega\dot{N}$ . Il flusso misurato sarà  $\mathcal{F} = \hbar\omega_0\dot{N}A^{-1}$ . Poiché  $\lambda_0 = \lambda(1+z)$  si ha  $\hbar\omega_0 = \hbar\omega/(1+z)$ .

L'intervallo di tempo di arrivo dei fotoni sarà  $dt_0 = (1+z)dt$ , e per cui si avrà

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{\mathcal{L}}{4\pi(1+z)^2\chi_1^2} \\ \mathcal{F} &= \frac{\mathcal{L}}{4\pi D_L^2} \\ D_L &= (1+z)\chi_1 \end{aligned}$$

Per ottenere il diagramma di Hubble è necessario esplicitare la dipendenza di  $\chi_1$  da  $z$ . Per i fotoni avremo, quindi

$$\int_0^{\chi_1} \frac{d\chi}{\sqrt{1-k\chi^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \quad (6.23)$$

Utilizzando la sostituzione  $dt = \dot{a}^{-1}da$  e ricordando che  $a(t_1) = (1+z)^{-1}$  e che  $a(t_0) = 1$ , otteniamo

$$\int_0^{\chi_1} \frac{d\chi}{\sqrt{1-k\chi^2}} = \int_{(1+z)^{-1}}^1 \frac{cda}{\dot{a}a} \quad (6.24)$$

sostituendo nel secondo integrale la definizione di  $\dot{a}$  secondo l'equazione di Friedmann (6.19) otteniamo infine

$$\int_0^{\chi_1} \frac{d\chi}{\sqrt{1-k\chi^2}} = \frac{c}{H_0} \int_{(1+z)^{-1}}^1 \frac{da}{a^2 \sqrt{\Omega_{R0}a^{-4} + \Omega_{M0}a^{-3} + (1-\Omega_0)a^{-2} + \Omega_\Lambda}} \quad (6.25)$$

Il primo integrale, a seconda del segno di  $k$  può avere le soluzioni

- $\frac{1}{\sqrt{k}} \arcsin(\chi_1 \sqrt{k})$
- $\frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{arcsinh}(\chi_1 \sqrt{|k|})$

Indicando il secondo integrale come  $f(z, \Omega_{R0}, \Omega_{M0}, \Omega_\Lambda)$  abbiamo che, esplicitando l'equazione in  $\chi_1$

$$\chi_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{cf\sqrt{|k|}}{H_0}\right) & k > 0, \Omega_0 > 1 \\ \frac{c}{H_0} f & k = 0, \Omega_0 = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sinh\left(\frac{cf\sqrt{|k|}}{H_0}\right) & k < 0, \Omega_0 < 1 \end{cases} \quad (6.26)$$

Esprimendo  $k$  in funzione di  $H_0$  e  $\Omega_0$  abbiamo che

$$k = \left(\frac{H_0}{c}\right)^2 (\Omega_0 - 1)$$

Dalla definizione di  $\chi_1$ , per sorgenti con  $z \ll 1$ , possiamo scrivere un'approssimazione in serie di potenze in  $z$

$$\chi_1 \approx \frac{zc}{H_0} \left(1 - \frac{1+q_0}{2}z\right) \quad (6.27)$$

E quindi

$$D_L = (1+z)\chi_1 \approx \frac{zc}{H_0} \left(1 + \frac{1-q_0}{2}z\right) \quad (6.28)$$

Attraverso questa espressione in serie di potenze, è quindi possibile misurare i due parametri  $H_0$  e  $q_0$ , attraverso una classe di sorgenti la quale distanza può essere misurata in modo indipendente

# 7

## Evoluzione dell'Universo

---

Osservando l'equazione di Friedmann è evidente che l'universo, nella sua evoluzione ha passato diverse "epoche" a seconda del fattore di densità d'energia dominante. In questo modo è possibile dividere l'evoluzione dell'universo in tre fasi principali

1. Fase di Radiazione
2. Fase di Materia
3. Fase di Vuoto

### 7.1 Fase di Radiazione

Riscrivendo l'equazione di Friedmann (dove è stato posto  $\Omega_{K0} = (1 - \Omega_0)$ ) risulta evidente che i termini  $a^{-k}$  con  $k < 4$  sono trascurabili, semplificando l'equazione.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left( \Omega_{R0} \frac{1}{a^4} + \Omega_{M0} \frac{1}{a^3} + \Omega_{K0} \frac{1}{a^2} + \Omega_\Lambda \right) \quad (7.1)$$

Quest'equazione diventerà

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Omega_{R0} \frac{1}{a^4} \quad (7.2)$$

L'equazione è di facile risoluzione attraverso la tecnica della separazione delle variabili, e si ottiene come risultato

$$a(t) = \sqrt{2H_0 t \sqrt{\Omega_{R0}}} \quad (7.3)$$

Valutando quest'espressione per  $t \rightarrow 0$  si ottengono due paradossi

- La velocità d'espansione diverge
- Dove la velocità d'espansione è  $\dot{a} > c$  si ottengono delle zone d'universo sconnesse casualmente

Valutando il secondo paradosso, si ha che considerando la limitatezza della velocità della luce, è possibile avere una regione grande quanto l'orizzonte degli eventi solo a  $t = 380$  ky. Per  $t < 380$  ky questa regione non è mai stata completamente in contatto causale con se

stessa e con le regioni circostanti. Il paradosso, detto paradosso degli eventi, riguarda il risultato finale. Infatti, non è possibile spiegare come l'universo sia oggi omogeneo ed isotropo, anche se proviene da un tempo di sconnessione causale.

## 7.2 Fase di Materia

La fine dell'epoca di radiazione è data dalle dimensioni relative di  $\Omega_{R0}, \Omega_{M0}, \Omega_{K0}$ .

Quando  $\Omega_{M0} \gg \Omega_{R0}$  abbiamo una fase detta di "materia".

In questo caso, l'equazione di Friedmann diventa

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Omega_{M0} \frac{1}{a^3} \quad (7.4)$$

La soluzione di questa equazione è

$$a(t) = \sqrt[3]{\frac{9}{4} H_0^2 t^2 \Omega_{M0}} \quad (7.5)$$

Ne consegue che  $a \propto t^{2/3}$

## 7.3 Fase di Vuoto

La fine della fase di materia è determinata dai valori relativi di  $1 - \Omega_0$  e  $\Omega_\Lambda$ . Esistono molteplici eventi a seconda del valore di queste costanti. I primi eventi sono dati da  $\Omega_\Lambda \approx 0$  e sono i casi di universi aperti e chiusi classici

1.  $\Omega_0 > 1, \Omega_\Lambda \approx 0$ , si ha un massimo di espansione ad  $a_{max} = \Omega_{M0}(\Omega_0 - 1)^{-1}$  e l'universo ricollassa in una nuova fase di radiazione. Questo caso è conosciuto comunemente come *Big Crunch*
2.  $\Omega_0 < 1, \Omega_\Lambda \approx 0$ , si ha un'epoca di curvatura dominata da  $(\Omega_0 - 1)$  e si ha un espansione libera, dove  $a(t) = H_0 \sqrt{\Omega_{K0}} t$

Se  $\Omega_\Lambda \neq 0$  si hanno invece i seguenti casi

1.  $\Omega_0 < 1, \Omega_\Lambda > 0$ , la fase di materia conclude con un'epoca di curvatura, se dominata da  $\Omega_0 - 1$ , o da un'epoca di vuoto se dominata da  $\Omega_\Lambda$
2.  $\Omega_0 = 1, \Omega_\Lambda > 0$ , l'espansione è eterna ed accelerata esponenzialmente
3.  $\Omega_0 > 1, \Omega_\Lambda > 0$ , l'espansione può non essere eterna.

Studiando in specifico il secondo caso, si ha che l'equazione di Friedmann si riduce semplicemente a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Omega_\Lambda \quad (7.6)$$

La soluzione è semplicemente

$$a(t) = e^{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t} \quad (7.7)$$

Il soffermarsi su questo caso non è casuale, infatti, dalle misure di Supernovae e dalle anisotropie della Radiazione di Fondo Cosmico a 3K si ha che  $\Omega_\Lambda > 0$  e  $\Omega_0 = 1$ . Risulta altresì che oggi potremmo già trovarci in una fase di vuoto.

## 7.4 Cosmic Microwave Background Radiation

La *CMB*, conosciuta anche come la Radiazione di Fondo Cosmico a 3K, è una radiazione quasi perfettamente isotropa a 2.725K, che corrisponde alla “prima luce dell’universo”, cioè al periodo quando si sono formati i primi atomi e l’universo ha smesso di essere opaco per i fotoni.

Essendo un corpo nero entro una banda d’errore di  $400\sigma$  è utile studiare l’evoluzione di un corpo nero (come la CMB) in un universo in espansione.

La densità specifica di energia di un corpo nero è, in frequenza ed in lunghezza d’onda

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\nu &= \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \\ \mathcal{U}_\lambda &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \end{aligned} \quad (7.8)$$

La densità d’energia in lunghezza d’onda sarà, di conseguenza

$$\mathcal{U}_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (7.9)$$

A causa del redshift e dell’espansione, sappiamo che le lunghezze scalano come  $a^{-1}$  e l’energia come  $a^{-4}$ , cioè

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{a}{a_0} \\ \frac{\mathcal{U}_\lambda d\lambda}{\mathcal{U}_{\lambda_0} d\lambda_0} = \frac{a^4}{a_0^4} \end{cases} \quad (7.10)$$

Sostituendo nell’espressione (7.10) la (7.9) e risolvendo per  $\mathcal{U}_{\lambda_0}$  si ottengono le due relazioni

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{\lambda_0} d\lambda_0 = \frac{8\pi hc}{\lambda_0^5} \frac{1}{e^{\frac{hca}{\lambda_0 a_0 kT}} - 1} \\ \mathcal{U}_{\lambda_0} d\lambda_0 = \frac{8\pi hc}{\lambda_0^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda_0 kT_0}} - 1} \end{cases} \quad (7.11)$$

Risolvendo per  $T$  si ottiene

$$T = T_0 \frac{a_0}{a} \quad (7.12)$$

Di conseguenza, la temperatura misurata di un corpo nero come la CMB va come  $a^{-1}$ . L’importanza cosmologica della CMB è data da vari fattori, tra cui la sua distribuzione

incredibilmente isotropa e la sua ricezione nella banda delle microonde, a cui l'universo risulta trasparente.

Poiché è possibile misurare l'effetto Compton inverso della CMB sul gas negli ammassi di galassie (effetto Sunyaev-Zeldovich) conferma che questi fotoni provengono da  $z > 0.8$ , confermando la nonlocalità della stessa.

Dalla CMB è possibile anche calcolare una parte di  $\Omega_R$ , indicata come  $\Omega_\gamma = \Omega_{CMB} = 5.06 \cdot 10^{-5} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4$ . Il valore preciso di  $\Omega_R$  sarà trovato sommando ad  $\Omega_{CMB}$  il valore di  $\Omega_\nu$ , cioè la densità di neutrini nell'universo

## 7.5 Neutrini

Una seconda componente di massa-energia relativistica è data dai neutrini.

Ad oggi sono conosciuti 3 sapori di neutrini  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ , creati da interazioni deboli, come

- Decadimento  $\beta$ :  $(A, Z) \longrightarrow (A, Z \pm 1) + e^\pm + \nu_e (\bar{\nu}_e)$
- Decadimento del  $\pi$ :  $\pi^\pm \longrightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$
- Decadimento del  $\tau$ :  $\tau^\pm \longrightarrow \pi^\pm + \bar{\nu}_\tau (\nu_\tau)$

I neutrini sono elettrodeboli, e di conseguenza interagiscono con la materia debolmente, oppure tramite forza elettrodebole a  $T > 1\text{MeV}$ , ergo sono stati termici nell'universo primordiale. Poiché la temperatura attuale è di  $1.9\text{K}$ , si ha che per neutrini relativistici  $\Omega_\nu = 1.15 \cdot 10^{-5} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4$ . È stato scoperto che i neutrini in realtà oscillano tra i tre principali sapori, ovvero:

$$|\nu\rangle = \alpha |e\rangle + \beta |\mu\rangle + \gamma |\tau\rangle \quad (7.13)$$

La probabilità di oscillazione in un tratto  $l$  in metri è data dalla formula

$$P(f \rightarrow f') = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \left(1 - \cos\left(2.48 \frac{\Delta m^2 l}{E}\right)\right) \quad (7.14)$$

Da misurazioni recenti si ha che i neutrini cosmologici non sono relativistici al giorno d'oggi, e di conseguenza  $\Omega_\nu > 4 \cdot 10^{-4}$

## 7.6 Materia

### Materia Barionica

Nella cosmologia, per *materia barionica*, si intende tutta la materia che interagisce elettromagneticamente (quindi non oscura).

Valutando una densità di galassie di  $n_{gal} \approx 0.005 \text{ Mpc}^{-3}$ , corrispondente ad una distanza media tra galassie di  $6 \text{ Mpc}$ .

La densità di luminosità media dovuta dalle galassie è  $J = 0.005 \cdot 2 \cdot 10^{10} L_\odot = 10^8 L_\odot \text{ Mpc}^{-3}$ . Valutando un rapporto di luminosità di  $3 \frac{M_\odot}{L_\odot}$ , si ha che la densità



di massa visibile è pari a  $\Omega_{vis,0} = 0.002$ .

Considerando anche gas e polveri intergalattiche si ha però che  $\Omega_{B0} > \Omega_{vis,0}$ , il quale viene stimato da vari metodi indipendenti. Il metodo a dare la stima più robusta è dato dallo studio della nucleosintesi primordiale.

Considerando tutto si hanno abbondanze primordiali del 75% di H e del 25% di He. Effettuando un confronto tra le abbondanze in zone contaminate dall'evoluzione stellare e tra le zone primordiali, si ottiene il miglior accordo come  $\Omega_{B0} = 0.04 \pm 0.01$

### Materia Non Barionica

La materia non barionica, o oscura, è un tipo di materia osservato sperimentalmente nelle curve di rotazione galattiche, e cosmologicamente per la formazione di strutture come galassie ed ammassi di galassie. La non barionicità di questa materia è data dal fatto che *non* interagisce elettromagneticamente con la materia barionica.

L'evidenza della materia oscura a livello cosmologico è data dalla presenza di strutture. Infatti, essendo la CMB quasi perfettamente omogenea, devono essere accaduti dei collassi gravitazionali partiti da delle disomogeneità iniziali.

In un universo completamente barionico con  $\Omega_{B0} = 0.04$  non è possibile creare tali strutture in un tempo compreso tra  $z = 1000$  ed oggi

Questi collassi possono essere modellizzati effettuando varie considerazioni.

In un universo critico, è necessario che sia presente una regione sovracritica, che dopo una iniziale espansione collassi gravitazionalmente come un microverso chiuso.

Nel caso di un universo barionico a bassa densità invece, anche se è presente una zona con una densità maggiore delle zone circostanti, l'espansione viene semplicemente rallentata, ma non fermata completamente, impedendone il collasso in strutture legate.

Nel caso di un universo sovracritico, la zona sovradensa non ha il tempo di collassare prima che l'universo stesso collassi, non permettendo (ovviamente) la formazione di strutture.

La quantità di materia oscura misurata attraverso curve di rotazione ed ammassi galattici è circa 10 o 20 volte quella della massa barionica, quindi è atteso un  $\Omega_{DM} = 0.2 - 0.4$ .

Un'ulteriore evidenza dell'esistenza della materia oscura è dato dal lensing gravitazionale della CMB, infatti la materia oscura induce una modificazione dello spettro di potenza delle anisotropie e della polarizzazione, introducendo una componente polarizzata circolarmente. Inoltre, induce una non-gaussianità nelle distribuzioni.

## 7.7 Censimento

Effettuando un "censimento" finale si ha che (escludendo  $\Omega_{R0}$ , dato che può essere trascurato), si ha che  $\Omega_{M0} = \Omega_{B0} + \Omega_{DM} \approx 0.3$

Facendo tutti i conti del caso ed aggiungendo  $\Omega_{R0}$  si ha che la densità totale dell'universo è  $\Omega_0 \approx 0.34$ .

Dalla definizione della curvatura dell'universo, si ha che con gli attuali valori di  $H_0$ ,

l'universo dovrebbe avere una curvatura iperbolica, e quindi essere un universo aperto. Questo non è confermato dalla misura della geometria dell'universo attraverso la CMB, infatti risulta che  $k \approx 0$ , e di conseguenza deve esistere una componente di densità "oscura"  $\Omega_\Lambda$  tale che  $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ . Questa stima è confermata dal diagramma di Hubble delle SN1a.

Per valutare  $\Omega_0$ , la densità totale di massa ed energia nell'universo (normalizzata alla densità di carica) è necessario sommare tutte le altre densità, senza valutare altri termini, si ha quindi che  $\Omega_0 = \Omega_{R0} + \Omega_{B0} + \Omega_{DM}$ . Questo valore è dell'ordine di 0.34.

## 7.8 Età dell'Universo ed Energia Oscura

Dall'equazione di Friedmann generale, è possibile calcolare il tempo  $t$  di un evento ricordando che  $dt = \dot{a}^{-1}da$ . Trascurando i termini abbastanza piccoli, come  $\Omega_{R0}$ , abbiamo che l'età dell'universo potrà essere calcolata come

$$t_U = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{1}{a\sqrt{\Omega_{M0}a^{-3} + (1 - \Omega_{M0} - \Omega_\Lambda)a^{-2}}} da \quad (7.15)$$

Nel caso che  $\Omega_\Lambda = 0$ , l'età dell'universo risulta solo funzione di  $H_0$  ed  $\Omega_{M0}$ , entrambe misurate. I valori teorici trovati contraddicono le osservazioni, poiché si otterrebbe un universo più giovane delle stelle più antiche osservate, il che è impossibile.

Escludendo tutti gli altri valori impossibili, ed utilizzando la relazione  $\Omega_\Lambda \approx 1 - \Omega_{M0}$ , sapendo che  $\Omega_0 = 1$  e di conseguenza  $k = 0$ , si ottiene  $\Omega_\Lambda \approx 0.7$  ed un età dell'universo di circa 14 Gyr.

Aggiungendo la stima di  $\Omega_{R0}$ , si ottiene infine  $\Omega_\Lambda \approx 0.66$ .

## 7.9 Epoche e Dimensioni Caratteristiche

Sfruttando l'equazione di Friedmann nei diversi casi, è possibile definire qualitativamente più epoche dell'Universo. Queste epoche sono

- Equivalenza
- Ricombinazione
- Trasparenza
- Orizzonte
- Curvatura

### 7.9.1 Epoca dell'Equivalenza

L'epoca dell'equivalenza corrisponde al tempo dove  $\Omega_M = \Omega_R$ . È possibile ricavare il tempo a cui è avvenuta ( $t_{eq}$ ) imponendo  $\rho_R = \rho_M$  e lo stesso per le corrispettive densità normalizzate  $\Omega_{M0}a^{-3} = \Omega_{R0}a^{-4}$ .

Si ricava

$$a_{eq} = \frac{\Omega_{R0}}{\Omega_{M0}}$$

E dalla definizione  $(1+z) = a^{-1}$ , si ottiene  $1+z \approx 11000$ . Sfruttando la proporzionalità inversa tra temperatura e fattore di scala, si ottiene  $T_{eq} = T_0(1+z) \approx 32000K$ .

Sfruttando l'equazione di Friedmann dominata dalla radiazione (7.2) si ottiene facilmente la soluzione

$$t = \frac{a^2}{2H_0\sqrt{\Omega_{R0}}} \quad (7.16)$$

Da questa si ricava  $t_{eq} = 5000y$

### 7.9.2 Epoca della Ricombinazione

L'epoca della ricombinazione corrisponde all'epoca dove il plasma primordiale si raffredda a sufficienza da permettere la formazione dei primi atomi di Idrogeno.

Questi atomi si possono formare se e solo se  $E_{amb} < E = 13.6eV$ , che corrisponde ad una temperatura  $T = k^{-1}E = 156000K$ .

Ciò non è vero, poiché è già risaputo che l'equilibrio degli adomi di Idrogeno con protoni ed elettroni è descritto dall'equazione di Saha

$$n_i = g_i \left( \frac{m_i kT}{2\pi h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu_i - m_i c^2}{kT}} \quad (7.17)$$

$i$  è un indice che scorre sulla tipologia di particella, in questo caso  $e^-$ ,  $p^+$ ,  $H$ . La reazione nucleare in studio è



Il bilancio chimico impone il vincolo  $\mu_e + \mu_p = \mu_H$ . Esprimendoli in termini di densità numeriche e definendo l'energia di legame dell'Idrogeno  $E$  come  $E = (m_p + m_e - m_H)c^2$  so trova infine l'equazione di Saha per il sistema in studio

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \left( \frac{h^2}{2\pi m_e kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} \quad (7.19)$$

Ponendo  $\eta$  il rapporto tra barioni e fotoni, ed indicando con  $x$  la frazione ionizzata, si ottiene

$$n_p = n_e = x n_b = x \eta n_\gamma \rightarrow n_H = (1-x) \eta n_\gamma \quad (7.20)$$

Risostituendo nell'equazione di Saha e ricordando che  $n_\gamma = n_\gamma T^3 T_0^{-3}$  si ha

$$\frac{1-x}{x^2} = n_{\gamma 0} \eta \left( \frac{h^2 T}{2\pi m_e k T_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} \quad (7.21)$$

Ponendo il fattore moltiplicativo dell'esponenziale come  $f(T)$ , si ha la soluzione finale al problema:

$$x = \frac{\sqrt{1 + 4f(T)} - 1}{2f(T)} \quad (7.22)$$

Ponendo  $\eta$  molto piccolo si ottiene  $T_{rec} \approx 3000\text{K}$ , di conseguenza  $1 + z = T_{rec}T_0^{-1} \approx 1100$ . Il rate di reazione della ricombinazione  $\Gamma_{rec}$  è definito dalla velocità media dei protoni per la sezione d'urto del processo

$$\Gamma_{rec} = n_p \langle v\sigma_H \rangle$$

Dove  $\sigma_H$  è definito come

$$\sigma_H = \frac{4\pi\alpha^2 E}{m_e^2 v^2} \quad (7.23)$$

Confrontando il rate di reazione con  $H_0$  si ottiene infine, assumendo  $\Omega_0 = 1$

$$\Gamma_H = H_0 \sqrt{\Omega_R \frac{T^4}{T_0^4} + \Omega_M \frac{T^3}{T_0^3} + \Omega_\Lambda} \quad (7.24)$$

È necessario notare che in questa epoca l'Universo diventa trasparente ai fotoni, e la sua trasparenza è dipendente al numero di scattering. Se il rate di scattering  $\Gamma_\gamma$  risulta  $\Gamma_\gamma < \Gamma_H$ , il mezzo è effettivamente trasparente.

L'interazione tra fotoni e materia in questo caso è di tipo free-free, e di conseguenza si parla di scattering Thomson con elettroni e Rayleigh con gli atomi, ricordando che

$$\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{cm}^2$$

$$\sigma_R = \sigma_T \left( \frac{E_\gamma}{E} \right)^4$$

Rifacendo le valutazioni del caso, risulta che l'ultimo scattering tra fotoni e materia si ha all'inizio dell'epoca di trasparenza a  $z = 1100$ . Questi fotoni sono gli stessi fotoni oggi misurati come CMB

### 7.9.3 Orizzonte delle Particelle e Teoria Inflazionaria

L'orizzonte delle particelle corrisponde alla distanza massima osservabile astrofisicamente. Ciò corrisponde alla distanza percorsa dalla luce dal Big Bang ad oggi.

L'orizzonte delle particelle non è il "confine" dell'universo, ma piuttosto il limite dell'universo osservabile, di conseguenza può pure esistere un volume d'universo maggiore del volume dell'universo osservabile.

Per calcolare la "grandezza" di questo orizzonte, prendiamo una sorgente di fotoni sull'orizzonte, ad una distanza comobile  $\chi_1$ , che emette ad un tempo  $t = 0$ . Questi fotoni vengono ricevuti al tempo  $t_0$  alla distanza  $\chi = 0$ .

Dalla metrica FRW abbiamo che

$$cdt = a(t) \frac{d\chi}{\sqrt{1 - k\chi^2}} \rightarrow \int_0^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt = \int_0^{\chi_1} \frac{1}{\sqrt{1 - k\chi^2}} d\chi \quad (7.25)$$

La distanza propria tra noi e la sorgente sarà esattamente il secondo integrale moltiplicato per  $a(t_0)$ , e di conseguenza avremo che la distanza dell'orizzonte  $d_h(t_0)$  è esattamente

$$d_h(t_0) = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt \quad (7.26)$$

È interessante studiare la distanza dell'orizzonte nelle diverse fasi dell'universo. Durante la fase di radiazione abbiamo che  $a \propto t^{1/2}$ , quindi

$$d_h(t) = 2ct \quad (7.27)$$

Durante la fase di materia invece abbiamo che  $a \propto t^{2/3}$ , quindi

$$d_h(t) = 3ct \quad (7.28)$$

Calcolando con precisione l'integrale nella fase di materia, nella considerazione di un universo a curvatura nulla, abbiamo

$$d_h(z) = \frac{2c}{H_0(1+z)^{3/2}} \quad (7.29)$$

Ponendo  $z = 0$  e considerando quindi il caso odierno, abbiamo che

$$d_h(0) = \frac{2c}{H_0} \approx 8300 \text{ Mpc} \quad (7.30)$$

Quindi, anche se l'universo fosse infinitamente esteso, noi possiamo osservarne solo un volume sottointeso da una sfera con raggio  $d_h$ .

Valutando i risultati appena ottenuti è facile dedurre che, in passato, l'orizzonte si espandeva più velocemente delle distanze stesse, quindi portando alla creazione di diverse zone disconnesse causalmente nelle prime fasi d'esistenza dell'universo. Da questa deduzione nasce un grosso paradosso di natura fisica, infatti osservando la CMB, si osserva un "muro" di fotoni grande quanto l'universo stesso, ma completamente disconnesso causalmente. Infatti al tempo della ricombinazione l'orizzonte degli eventi aveva un raggio di solo 740 kly, circa 7 volte la dimensione della Via Lattea. Questo fatto, va a cozzare pesantemente con le osservazioni, infatti la CMB è quasi perfettamente omogenea ed in equilibrio termico, il che è inspiegabile avendo molteplici microzone disconnesse causalmente.

Un modo per spiegare l'omogeneità della CMB è l'utilizzo di una teoria inflazionaria, che presuppone che a  $10^{-36}$  s dal Big Bang, l'universo abbia passato un periodo di inflazione con un'espansione rapidissima ed esponenziale, dove l'universo è passato da essere all'interno dell'orizzonte degli eventi ad essere più grande dell'orizzonte stesso, espandendosi a velocità più rapide della luce.

## 7.10 Volume dell'Universo

Attraverso la descrizione general relativistica dell'universo, è possibile calcolare il volume dell'universo tenendo conto dell'espansione dello stesso.

Questo volume dipenderà dalla curvatura  $k$  dello spazio stesso. Dalla metrica FRW, si trova l'elemento infinitesimo di volume come

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{a^3 \chi^2}{\sqrt{1 - k\chi^2}} \sin \theta d\chi d\theta d\phi \quad (7.31)$$

Il volume di una sfera con raggio comobile  $\chi_s$  sarà, di conseguenza

$$V_s = 4\pi a^3(t) \int_0^{\chi_s} \frac{\chi^2}{\sqrt{1 - k\chi^2}} d\chi \quad (7.32)$$

Si otterrà il volume dell'universo per  $\chi_s \rightarrow \infty$ , e di conseguenza si ha che

- $k > 0$  si ha un  $\chi_{max} = k^{-1/2}$
- $k \leq 0$  si ha  $\chi_{max} \rightarrow \infty$

Nel primo caso, quindi nel caso di un universo chiuso ipersferico si ha che il volume dell'universo sarà, valutando l'integrale (7.32)

$$V_U = 4\pi a^3 \left[ \frac{\arcsin(\chi\sqrt{k})}{2k^{\frac{3}{2}}} - \frac{\chi\sqrt{1 - k\chi^2}}{2k} \right] \Big|_0^{k^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\pi^2 a^3}{k^{\frac{3}{2}}} \quad (7.33)$$

Ricordando la relazione tra  $k$  e le costanti cosmologiche, si ha infine che

$$V_U = \pi^2 a^3 \left( \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_0 - 1}} \right)^3 \quad (7.34)$$

Questo semplice calcolo è utile per dedurre delle importanti considerazioni sul Big Bang. Infatti, per  $t \rightarrow 0$  implica  $a \rightarrow 0$  e il volume  $V_U$  tende a zero solo nel caso  $k > 0$ , infatti negli altri due casi di universo aperto, l'integrale diverge, ed è di conseguenza indeterminato.

Questa indeterminatezza nel volume dell'universo al momento del Big Bang implica una delocalizzazione dell'evento stesso, che di per sè non può essere confermata data l'assenza di informazioni precise a riguardo, poiché, anche se è possibile considerare distanze fisiche qualsiasi, ciò non è valido per il tempo, poiché esiste un tempo infinitesimo, chiamato *tempo di Planck*

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5.4 \cdot 10^{-44} s \quad (7.35)$$

A questo tempo infinitesimo diventano importanti gli effetti quantogravitazionali, al momento per i quali non esiste una teoria valida.

Assumendo (erroneamente) la validità della relatività generale a questi tempi ed energie, si può affermare che nel caso di un universo aperto, si ha un volume infinito ad un tempo di Planck dal Big Bang.

## 7.11 Distanza di Diametro Angolare

Avendo definito ora con precisione l'evoluzione dell'universo attraverso l'equazione di Friedmann, è possibile definire il *distanza di Diametro Angolare*, che è definita dall'angolo sotteso dall'oggetto in osservazione.

Questa distanza è strettamente legata alla distanza di luminosità, infatti è definita come  $D_A = \chi a$ . In formule

$$D_A = \chi a = \left( \frac{D_L}{1+z} \right) a = \frac{D_L}{(1+z)^2} \quad (7.36)$$

Inserendo la definizione di  $\chi$  dall'equazione di Friedmann, si ha che  $D_L = \chi(1+z)$ , e di conseguenza

$$D_A = \frac{\chi}{1+z} \quad (7.37)$$

Dalla definizione di distanza comobile in funzione delle densità relative, si ottengono due casi particolari

1.  $\Omega_\Lambda, \Omega_{R0} = 0$  allora

$$D_A = \frac{2c}{H_0} \frac{z\Omega_0 - (2 - \Omega_0)(z\sqrt{1+\Omega_0} - 1)}{\Omega_0^2(1+z)^2}$$

2.  $\Omega_\Lambda = \Omega_{R0} = 0, \Omega_0 = 1$  allora

$$D_A = \frac{2c}{H_0} \frac{\sqrt{1+z} - 1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}$$

Poiché dalle misurazioni è chiaro che  $\Omega_0 \simeq 1$  ma  $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ , non è possibile utilizzare una di queste due formule, ma è necessario utilizzare la definizione integrale di distanza comobile. È particolarmente curioso osservare come il diametro angolare, diventi piccola fino ad un punto di minimo, e poi oltre cresca rapidamente. Questo è dato dal lensing gravitazionale dato dalle masse presenti tra l'osservatore e l'oggetto, che funzionano come una lente d'ingrandimento, per l'osservatore

## 7.12 Nucleosintesi Primordiale

L'ambiente nell'universo primordiale era decisamente estremo. Questo fatto è facilmente valutabile dall'andamento della temperatura come l'inverso del fattore di scala (e quindi aumenta con l'aumentare del redshift).

In formule, ponendo  $T_0$  come la temperatura media dell'universo misurata oggi, avremo che ad un dato punto dello spaziotempo, la temperatura media dell'universo sarà

$$T = T_0 a^{-1} = T_0(1+z) \quad (7.38)$$

È facile valutare come a redshift altissimi la temperatura assuma valori estremamente alti, tali che l'energia dei fotoni presenti era decisamente maggiore dell'energia di legame

degli atomi e delle molecole, impedendo quindi la formazione degli stessi attraverso la fotodissociazione o la fotoionizzazione.

Nel caso che le energie ambientali (valutate come  $E_a = kT$ ) hanno valori tali che  $E_a > 2mc^2$ , dove  $m$  è la massa di una particella carica, i fotoni presenti in questo ambiente possono creare coppie particella-antiparticella.

Sfruttando questa conoscenza dell'ambiente dell'universo primordiale, è possibile creare una teoria che permette di stabilire quali e quanti nuclei si siano formati nell'universo primordiale.

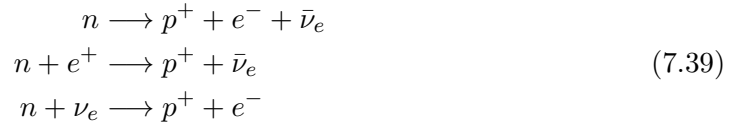
### 7.12.1 Bagno Primordiale

Partendo da un'epoca particolarmente vicina al Big Bang (circa 0.1ms dallo stesso), possiamo valutare la presenza di temperature pari a  $10^{12}\text{K}$ , i.e.  $E_a = 86\text{ MeV}$ .

A queste temperature, e quindi energie, le interazioni sono ben conosciute.

In questo bagno primordiale erano presenti, come particelle relativistiche, fotoni ( $\gamma$ ), coppie elettrone-positrone ( $e^\pm$ ) e neutrini muonici ed elettronici ( $\nu_e, \nu_\mu$ ). In questo periodo i barioni erano particolarmente scarsi, dell'ordine di 5 per ogni  $10^{10}$  fotoni, sottoforma di protoni ( $p^+$ ) e neutroni ( $n$ ).

Questi barioni venivano continuamente convertiti gli uni negli altri attraverso interazione debole, con le seguenti reazioni



Andando leggermente avanti nel tempo, a temperature pari  $10^{10}\text{ K}$ , abbiamo che l'equazione di Boltzmann continua a valere, implicando che la densità di neutroni diminuisce rispetto a quella di protoni fino ad energie pari ad  $1\text{ MeV}$ , dove accadono due eventi principali

1. A circa  $10^{10}\text{ K}$  le sezioni d'urto dei neutrini decrescono notevolmente, rendendoli praticamente inerti all'interazione con protoni e neutroni
2. L'energia dei fotoni diventa inferiore a  $1.022\text{ MeV}$ , impedendo la formazione di coppie elettrone-positrone, causando l'annichilazione della maggior parte dei positroni, lasciando un leggero eccesso di elettroni

Per questi due motivi, la conversione di  $p$  in  $n$  diventa sempre più rara, e il rate di avvenimento di questa reazione, diventa inferiore al rate di espansione  $\Gamma_H$ .

Esattamente a questa temperatura, il rapporto protoni/neutroni si congela, esattamente al valore di 0.223, poiché

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \simeq 0.223 \tag{7.40}$$



Poiché ciò sia valido, si deve arrestare la produzione di neutroni, ed i rimanenti sono instabili per decadimento beta con un half life di 617 s, e decadono con la reazione



A temperature di  $10^9$  K, i fotoni prendono energie minori all'energia di dissociazione del deuterio, permettendo una formazione stabile di questo isotopo dell'Idrogeno, attraverso la reazione



Per poter calcolare il tempo intercorso dal periodo con temperature di  $10^{10}$  K al periodo con temperature di  $10^9$  K, si può utilizzare l'equazione di Friedmann per l'espansione dominata dalla radiazione, legata al rapporto tra temperatura e fattore di scala

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{rad} = \frac{8\pi G}{3c^2} \sigma T^4 \\ \frac{T}{T_0} = \frac{1}{a} \longrightarrow \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{T}}{T} \end{array} \right. \quad (7.43)$$

Risolvendo il sistema (7.43), otteniamo infine

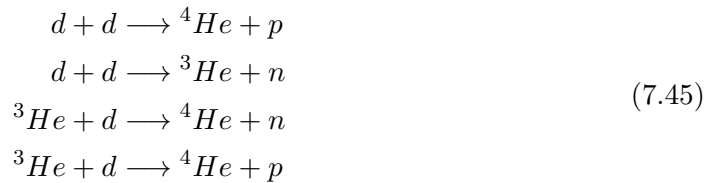
$$\begin{aligned} \int_T^\infty \frac{1}{T^3} dT &= \sqrt{\frac{8\pi G \sigma}{3c^2}} \int_0^t dt \\ t &= \frac{1}{T^2} \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \sigma}} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Inserendo i valori delle costanti e la temperatura di  $10^9$  K, otteniamo che l'universo era circa 230 s più vecchio di quando la temperatura era di  $10^{10}$  K. In questo lasso di tempo si passa da un universo con 223  $n$  per ogni 1000  $p$  ad un universo con 172  $n$  per ogni 1051  $p$ .

Dato che la reazione di formazione del Deuterio è particolarmente efficiente, si ha che tutti i neutroni vengono utilizzati.

### 7.12.2 Elio Primordiale

Dopo la formazione dei primi nuclei di Deuterio, si ha la possibilità di formare dei nuclei di Elio 3 ed Elio 4, secondo le reazioni



Valutando la frazione di massa dei nuclei di He rispetto ai nuclei totali prodotti dalla nucleosintesi primordiale (trascurando tracce di  ${}^3\text{He}$  e di  ${}^7\text{Li}$ ), abbiamo che

$$f_{He} = \frac{4N_{He}}{N_p + 4N_{He}} = 0.281 \quad (7.46)$$

Via via che tutte queste reazioni procedono, la densità degli isotopi dell'idrogeno diminuisce, e con essa la velocità di reazione, poiché  $\Gamma \propto X_A \eta n_\gamma \langle \sigma v \rangle$ , fino a quando le abbondanze primordiali non si congelano ad un valore  $X_A \approx 10^{-4}$ .

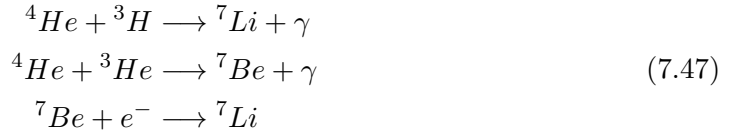
Al contrario, l'abbondanza di isotopi dell'elio dipende principalmente dall'abbondanza di neutroni, ergo indipendente da  $\eta$ .

Tutti i nuclei più pesanti dell'elio sono sfavoriti nella nucleosintesi, poiché tutte quante le combinazioni possibili portano a nuclei instabili, i quali sono anche difficili da produrre, poiché la probabilità di tunneling decresce velocemente col crescere di  $Z$ .

### 7.12.3 Litio Primordiale

Un elemento più pesante dell'elio, formato in piccoli quantitativi, è l' ${}^7\text{Li}$ , il quale si può formare attraverso due processi, uno diretto ed uno indiretto per cattura elettronica del  ${}^7\text{Be}$ .

Le reazioni sono



Il primo processo, diretto, è dominante per  $\eta < 3 \cdot 10^{-10}$ , mentre il secondo è dominante per  $\eta > 3 \cdot 10^{-10}$ . Il quantitativo creato di litio sono piccole tracce dell'ordine di  $10^{-9} \sim 10^{-10}$ , ma risultano comunque misurabili.

### 7.12.4 Foresta di Lyman

Un metodo per misurare l'abbondanza isotopica nell'universo, è l'utilizzo di tecniche spettroscopiche con i *QSO*, *Quasi Stellar Object*, come i *Quasar*, abbreviazione di *Quasi Star*, i quali sono galassie, solitamente in zone ad alto redshift, con nuclei attivi, i quali emettono grossi quantitativi d'energia.

Osservando spettroscopicamente questi oggetti particolarmente lontani, abbiamo la possibilità di misurare il quantitativo dei vari elementi contrapposti tra noi ed il QSO, anche a redshift importanti.

In questi spettri, la linea di transizione dell'Idrogeno Lyman- $\alpha$  è particolarmente potente ed evidente ad una lunghezza d'onda comobile  $\lambda_0(1+z) \simeq 580 \text{ nm}$ .

Le profondità d'assorbimento di queste righe, permette di stabilire l'abbondanza primordiale di Deuterio, e di conseguenza, i rapporti con altri isotopi.

Da varie misure sperimentali particolarmente si mostra che

1.  $0.236 < \text{He}/\text{H} < 0.254$
2.  $D/\text{H} = 3.4 \cdot 10^{-5}$ , secondo altre misure invece  $D/\text{H} = 2 \cdot 10^{-4}$
3.  ${}^7\text{Li}/\text{H} = 2 \cdot 10^{-10}$

Queste misure sono consistenti con emivite  $10.3 \text{ min} < \tau < 10.7 \text{ min}$  e con  $\eta = (1.5 - 6) \cdot 10^{-10}$

Poiché si può scrivere  $\eta$  come  $\eta = 2.68 \cdot 1'^{-10} \Omega_B h^2$ , si può stimare, da un punto di vista conservativo, che  $0.011 < \Omega_B < 0.037$ .

Con le ultime misure, si è andato a preferire valori di rapporti  $D/H$  bassi, che permettono di stimare un  $\Omega_B h^2 = (0.020 \pm 0.002)$

## 7.13 Formazione delle Strutture

Per il principio cosmologico, l'universo è omogeneo a grandi scale, infatti andando a scale inferiori ai 10 Mpc, si può iniziare a notare una disomogeneità significativa, data dalla presenza di superammassi di galassie e galassie, a dimensioni ancora più piccole anche da stelle stesse.

In queste strutture si hanno anche densità maggiori del  $10^5$  rispetto alla densità media dell'universo, mentre nella CMB si ritrova un'omogeneità fortissima, con fluttuazioni di densità dell'ordine di  $10^{-5}$ . Si presuppone che la formazione di queste strutture sia data dall'effetto della gravità.

In generale, valutando il caso dell'universo primordiale, si può considerare il tutto come un fluido di fotoni e materia, e di conseguenza si possono avere due tipi di fluttuazioni:

- Fluttuazioni Adiabatiche
- Fluttuazioni Isoterme

Nelle fluttuazioni adiabatiche si hanno sia variazioni della densità di barioni e di fotoni, ma il rapporto  $n_\gamma/n_b$  rimane costante.

Poiché  $\rho_b \propto n_b$ ,  $n_\gamma \propto T^3$  e  $\rho_\gamma \propto T^4$ , si ha

$$\frac{\delta \rho_b}{\rho_b} = \frac{\delta n_b}{n_b} = \frac{\delta n_\gamma}{n_\gamma} = 3 \frac{\delta T}{T} = \frac{3}{4} \frac{\delta \rho_\gamma}{\rho_\gamma} \quad (7.48)$$

Nelle fluttuazioni isoerme invece, viene alterato il rapporto  $n_\gamma/n_b$ , producendo un aumento del potenziale gravitazionale, che viene "congelato".

### 7.13.1 Evoluzione delle Fluttuazioni

Consideriamo una fluttuazione di densità adiabatica di dimensioni maggiori dell'orizzonte pre-ricombinazione.

In questo caso assumiamo che vi sia una sovradensità sferica immersa in un universo piatto ed omogeneo con densità  $\rho(t)$ , si avrà quindi che  $\rho_1(t) > \rho(t) = \rho_c(t)$ .

Data la simmetria sferica, la sovradensità  $\rho_1$  si evolve come un universo a densità maggiore di quella critica. L'equazione di Friedmann per il problema considerato sarà

$$\begin{cases} \left( \frac{a}{a_0} \right) \left( H^2 - \frac{8\pi G \rho_1}{3} \right) = -kc^2 \\ \left( \frac{a}{a_0} \right) \left( H^2 - \frac{8\pi G \rho}{3} \right) = 0 \end{cases} \quad (7.49)$$

Si ha di conseguenza che

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} = \frac{3kc^2}{8\pi G\rho} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \quad (7.50)$$

A seconda dell'epoca a cui avviene questa perturbazione si hanno due casi.

Nel primo caso, nella fase di radiazione dell'universo, si ha che  $a \propto t^{1/2}$  e  $\rho = \rho_{rad} \propto a^{-4}$ , quindi

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{1}{a^{-4}} \frac{1}{a^2} \propto t \longrightarrow \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta\rho}{\rho} \Big|_{in} \frac{t}{t_{in}} \quad (7.51)$$

Nel caso della fase di materia, si ha che  $a \propto t^{2/3}$  e  $\rho = \rho_{mat} \propto a^{-3}$ , e di conseguenza

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{1}{a^{-3}} \frac{1}{a^2} \propto t^{2/3} \longrightarrow \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta\rho}{\rho} \Big|_{in} \left(\frac{t}{t_{in}}\right)^{2/3} \quad (7.52)$$

La perturbazione continuerà quindi a crescere fino a quando l'orizzonte non supera le sue dimensioni e quindi diventa connessa causalmente.

La sua evoluzione successiva è data poi dalla massa e quindi dalle condizioni di Jeans per il collasso.

Si può riscrivere la massa di Jeans in termini della velocità del suono adiabatica, con un  $\gamma = 5/3$ , per il caso di un gas ideale monoatomico.

Si ha, quindi

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{5kT}{3\mu m_H}} \longrightarrow M_J = \frac{9\rho_B c_s^3}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{G\rho_{tot}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (7.53)$$

Nell'epoca precedente alla ricombinazione, la pressione è data dai fotoni, la velocità del suono è indipendente dalla temperatura ed è pari a  $c_s = c/\sqrt{3}$ . Inoltre,  $\rho_B \propto a^{-3} \propto T^{-3}$ , e quindi, la massa di Jeans nell'epoca della radiazione è pari a

$$M_{J,rad} = \frac{9\rho_B c_s^3}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{G\rho_{tot}}\right)^{\frac{3}{2}} \propto \frac{T^3}{T^6} = T^{-3} \quad (7.54)$$

Dopo la ricombinazione invece, si ha invece che  $M_J \propto T^{3/2}$ .

Questa considerazione è cruciale, perché infatti ci permette di determinare che la massa di Jeans nell'universo dominato dalla radiazione è molto maggiore rispetto alla massa dei barioni contenuti in una data regione, quindi la perturbazione non si evolve e la fluttuazione rimane costante.

Nell'epoca della materia invece, la perturbazione oscilla per fluttuazioni acustiche della densità, per poi ricominciare a crescere.

Il limite imposto dalle leggi della fisica, per cui questa fluttuazione possa sopravvivere, è che deve essere più grande del cammino libero medio dei fotoni.

In dettaglio abbiamo che il cammino libero medio dei fotoni è  $l = (n\sigma_{Th})^{-1}$ . Il numero di diffusioni dei fotoni sarà

$$N = \frac{ct_{dec}}{l} = n\sigma_{Th}ct_{dec}$$

L'allontanamento dalla posizione iniziale sarà  $d = l\sqrt{N} = \sqrt{ct_{dec}/n\sigma}$ , dove  $n$  è definito come

$$n = n_e = \frac{\rho_B}{m_H} = \frac{\rho_{B0}(1+z_{rec})^3}{m_H}$$

Le perturbazioni più piccole possibili saranno date da sfere con raggio  $d$ , che contengono una massa minima pari a

$$M_{ad,min} = \frac{4}{3}\pi d^3 \rho_B = \frac{4}{3}\pi \rho_B \left( \frac{m_H c t_{dec}}{\rho_B \sigma} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{\rho_B}} \left( \frac{m_H c t_{dec}}{\sigma} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 3 \cdot 10^{13} M_{\odot}$$

Di conseguenza, le prime fluttuazioni adiabatiche di dimensioni minime portano alla formazione di strutture con masse dell'ordine di un ammasso galattico.

Le strutture più piccole si possono formare solo da perturbazioni isoterme “congelate” durante la fase delle oscillazioni acustiche. Queste diventeranno vere perturbazioni solo dopo la ricombinazione.

Sfruttando poi la CMB, è possibile valutare l'importanza di queste fluttuazioni. Poiché è data l'esistenza di strutture con fluttuazioni di densità rispetto alla media maggiori di uno a  $z = 5$ , si può stabilire che

$$\left. \frac{\delta\rho}{\rho} \right|_{rec} = \left. \frac{\delta\rho}{\rho} \right|_{z=5} \left( \frac{t_{rec}}{t_{z=5}} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 0.005 \quad (7.55)$$

Poiché la densità di materia va come  $T^{-3}$ , si dovrebbero misurare delle anisotropie della CMB dell'ordine di

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta\rho}{\rho} \geq 0.0015 \quad (7.56)$$

Cosa non osservata, poiché le fluttuazioni reali sono di 10 volte inferiori, e di conseguenza la densità di barioni dev'essere molto più omogenea



# Bibliografia

---

- [Cho16] A. R. Choudhuri. *Astrophysics for Physicists*. Cambridge University Press, 2016.