

Дифференциальные уравнения листок 6

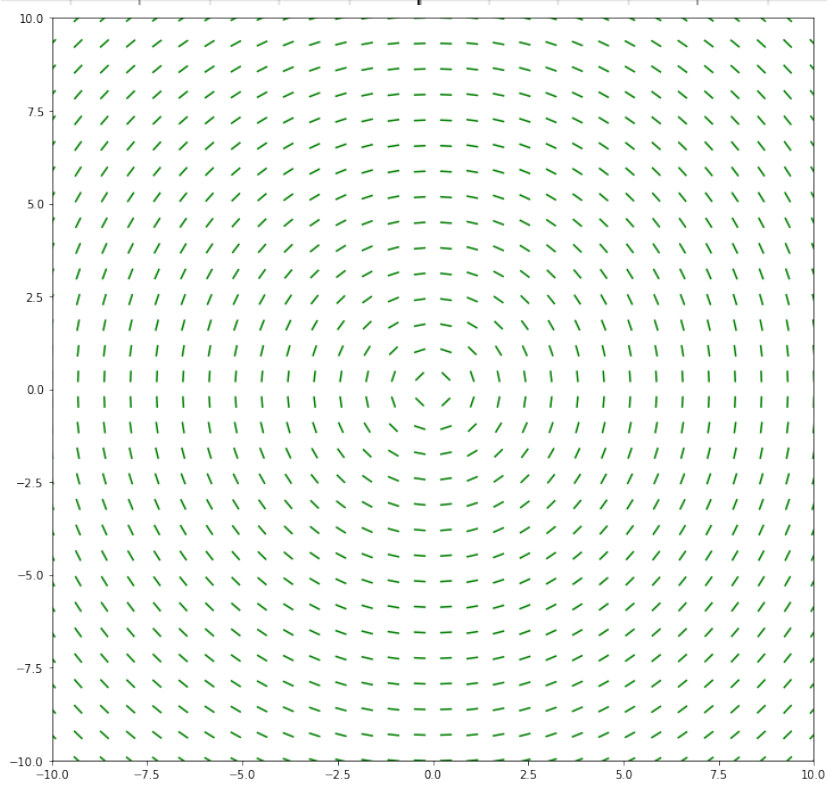
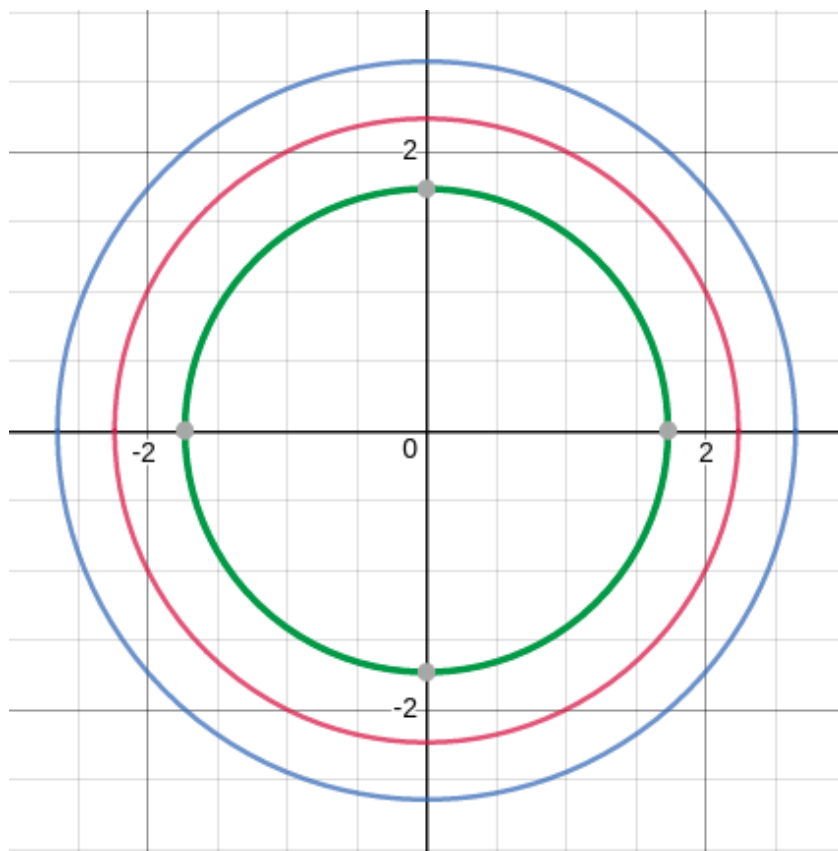
Биршерт Лешка

Февраль 2019

Задача 2

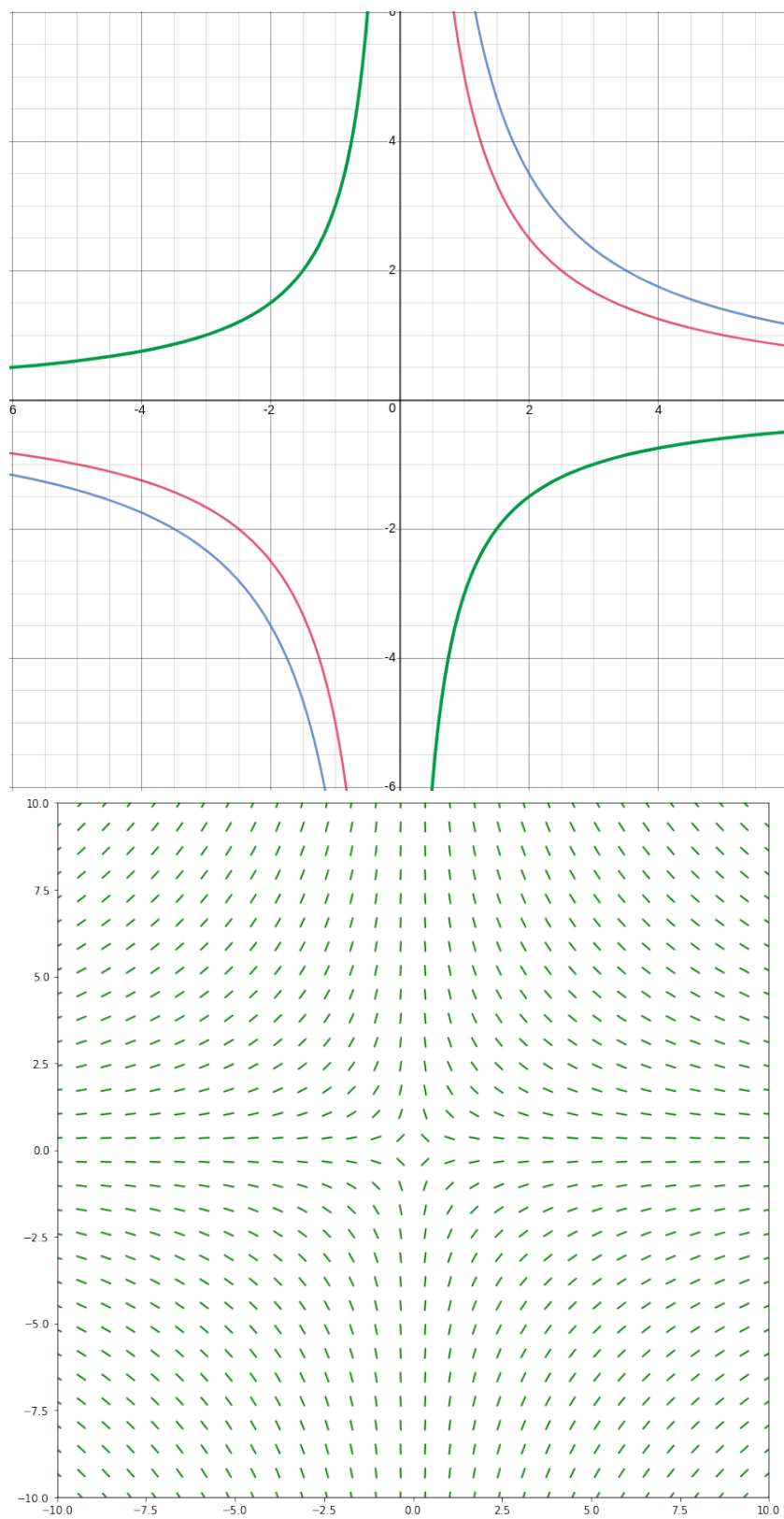
(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$df = 2x dx + 2y dy$$



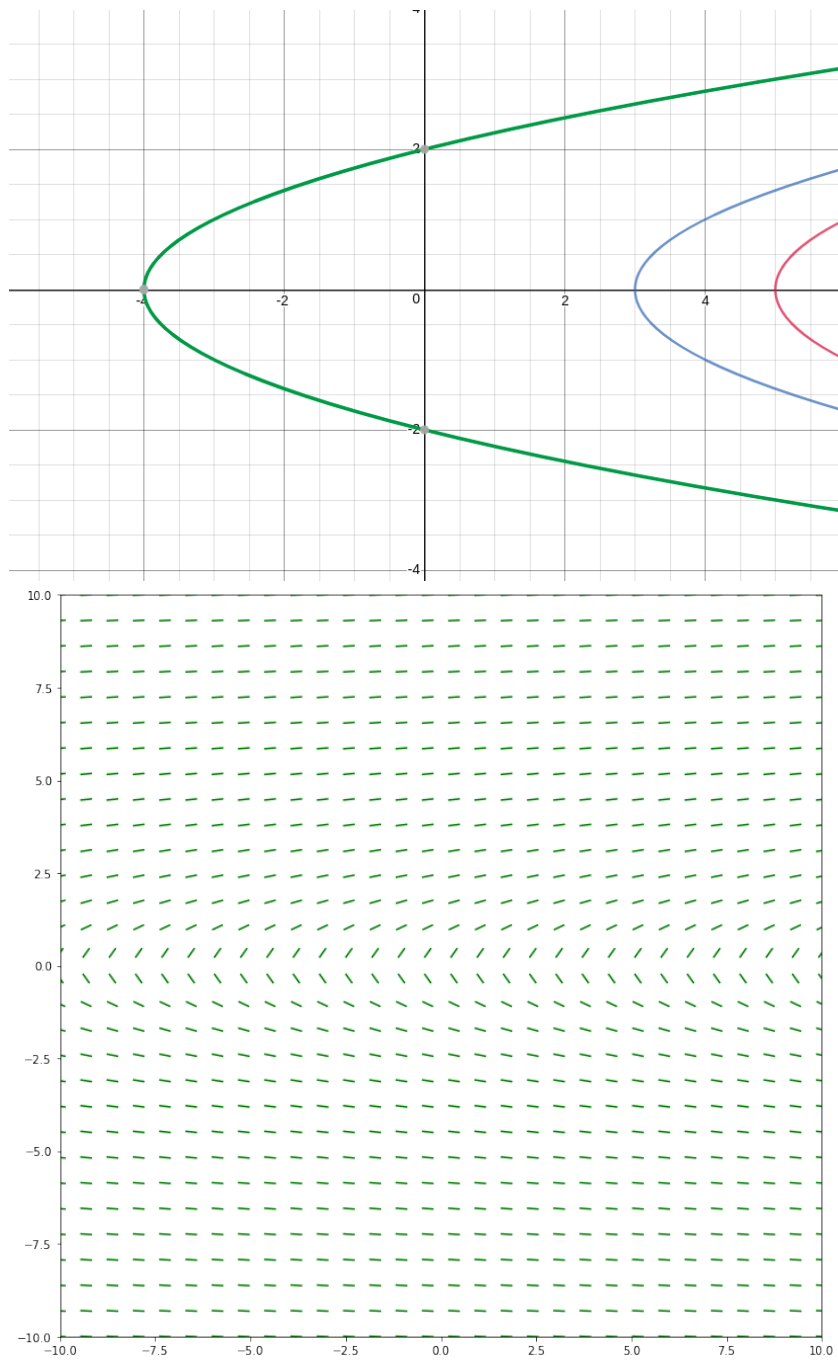
(b) $f(x, y) = xy$

$df = ydx + xdy$



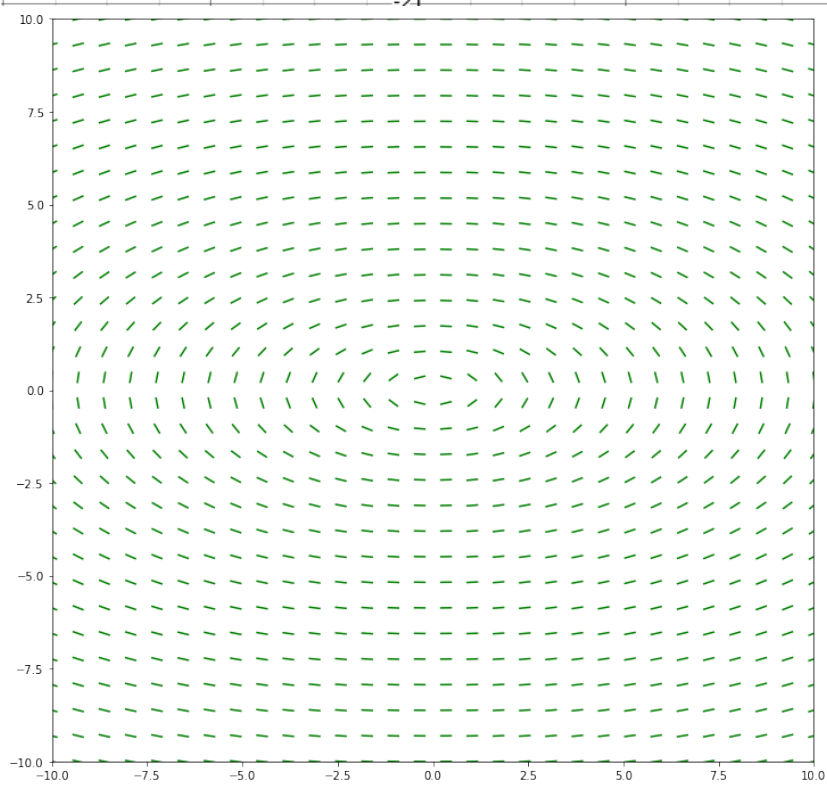
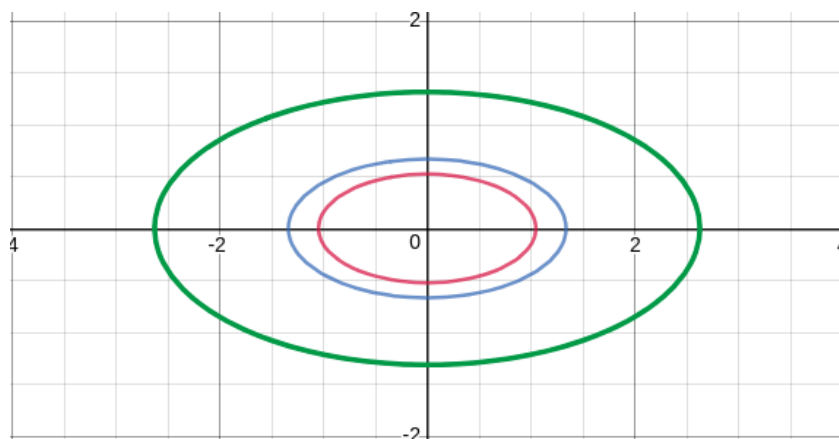
(c) $f(x, y) = x - y^2$

$df = dx - 2ydy$



(d) $f(x, y) = e^{x^2+4y^2}$

$$df = e^{x^2+4y^2} 2x dx + e^{x^2+4y^2} 8y dy$$



Задача 5

(a) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$

$$F(x, y) = 2x + 3x^2y, \quad G(x, y) = x^3 - 3y^2$$

Проверим условие теоремы:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Условия теоремы выполнены, найдем H :

$$H = \int F dx = \int (2x + 3x^2y) dx = x^2 + x^3y + C(y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = G$$

$$x^3 - 3y^2 = x^3 + C'(y)$$

$$C(y) = -y^3 + C$$

$$H(x, y) = x^2 + x^3y - y^3 + C$$

(b) $(2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$

$$F(x, y) = 2xy, \quad G(x, y) = x^2 - y^2$$

Проверим условие теоремы:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Условия теоремы выполнены, найдем H :

$$H = \int F dx = \int (2xy) dx = x^2y + C(y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = G$$

$$x^2 - y^2 = x^2 + C'(y)$$

$$C(y) = -y^3/3 + C$$

$$H(x, y) = x^2y - y^3/3 + C$$

(c) $\dot{x} = \frac{t(9tx^2 - 2)}{x(4x^2 - 6t^3)}$

$$dt(t(2 - 9tx^2)) + dx(x(4x^2 - 6t^3)) = 0$$

$$F(t, x) = t(2 - 9tx^2), \quad G(t, x) = x(4x^2 - 6t^3)$$

Проверим условие теоремы:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 18t^2x = \frac{\partial G}{\partial t}$$

Условия теоремы выполнены, найдем H :

$$H = \int F dt = \int (t(2 - 9tx^2)) dt = t^2 - 3t^3x^2 + C(x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = G$$

$$x(4x^2 - 6t^3) = -6t^3x + C'(x)$$

$$C(x) = x^4 + C$$

$$H(t, x) = t^2 - 3t^3x^2 + x^4 + C$$

(d) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$

$$F(x, y) = e^{-y}, \quad G(x, y) = -(2y + xe^{-y})$$

Проверим условие теоремы:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Условия теоремы выполнены, найдем H :

$$H = \int F dx = \int (e^{-y}) dx = e^{-y}x + C(y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = G$$

$$-(2y + xe^{-y}) = e^{-y}x + C(y)$$

$$C(y) = -y^2 + C$$

$$H(x, y) = e^{-y}x - y^2 + C$$

Задача 6*

Решить уравнение $y' = a(x)y$ в общем виде. (Не очень понял, почему тут звездочка).

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \rightarrow \frac{dy}{y} = a(x) dx \rightarrow \ln |y| = A(x) + C \rightarrow y = e^{\int a(x) dx} \cdot C$$

Задача 7

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Приведу алгоритм решения таких тасок:

а) Решить соответствующее однородное линейное уравнение $y' = a(x)y$:

$$y = C \cdot G(x)$$

б) Решить исходное уравнение, полагая его решение в виде $y(x) = C(x) \cdot G(x)$, $G(x)$ из пункта а.

$$C'(x) = \int \frac{b(x)}{G(x)} dx$$

(a) $\dot{x} = x + t$

а) $\dot{x} = x$

$$x = Ce^t$$

б) $x(t) = C(t)e^t$

$$C'(t) = \frac{t}{e^t} \rightarrow C(t) = -e^{-t}(t+1) + C$$

$$x(t) = e^t \cdot (-e^{-t}(t+1) + C) = -(t+1) + Ce^t$$

(b) $xy' - 2y = 2x^4$

$$y' = 2x^3 + 2y/x$$

а) $y' = 2y/x$

$$y = Cx^2$$

б) $y(x) = C(x)x^2$

$$C'(x) = 2x \rightarrow C(x) = x^2 + C$$

$$y(x) = (x^2 + C)x^2$$

(c) $(2x + 1)y' = 4x + 2y$

$$y' = \frac{4x}{2x + 1} + \frac{2y}{2x + 1}$$

a) $y' = \frac{2y}{2x + 1}$

$$y = C(2x + 1)$$

b) $y(x) = C(x)(2x + 1)$

$$C'(x) = \frac{4x}{(2x + 1)^2} \rightarrow C(x) = \frac{1}{2x + 1} + \ln|2x + 1| + C$$

$$y(x) = 1 + \ln|2x + 1|(2x + 1) + C(2x + 1)$$

Пункты d e f will return.