

Дифференциальные уравнения листок 1

Биршерт Алексей

Январь 2019

Задача 1

- (a) $\dot{x} = 0$

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}, C \in \mathbb{R}$$

- (b) $\dot{x} = -1$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{t} + \mathbf{C}, C \in \mathbb{R}$$

- (c) $\dot{x} = 2t$

$$\mathbf{x} = \mathbf{t}^2 + \mathbf{C}, C \in \mathbb{R}$$

- (d) $\dot{x} = \frac{x}{t}$

$$\dot{x} = \frac{x}{t} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \rightarrow \ln(|x|) = \ln(|t|) + C \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{C}_1 \mathbf{t}, C_1 \in \mathbb{R} \quad (C_1 = 0 \text{ видно из начального уравнения})$$

- (e) $\dot{x} = -\frac{x}{t}$

$$\dot{x} = -\frac{x}{t} \rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t} \rightarrow \ln(x) = -\ln(t) + C \rightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{t}}, C \in \mathbb{R}$$

- (f) $\dot{x} = -\frac{t}{x}$

$$\dot{x} = -\frac{t}{x} \rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x} \rightarrow x dx = -t dt \rightarrow x^2 = -t^2 + C \rightarrow \mathbf{x} = \pm \sqrt{\mathbf{C}_1^2 - \mathbf{t}^2}, C_1 \in \mathbb{R}$$

Задача 2

$$\dot{x} = kx, \quad k > 0$$

- (c) Да, $x \equiv 0$

- (d) $x = Ce^{kt}, C \in \mathbb{R} \quad \dot{x} = k \cdot Ce^{kt} \rightarrow \dot{x} = kx$

- (e) $x(0) = x_0 \rightarrow x = Ce^{k \cdot 0} \rightarrow x = x_0 \cdot e^{kt}$

Задача 3

Мы находимся в условиях задачи 2, но теперь из-за ограниченности ресурсов коэффициент прироста зависит от x как линейная функция: $a - bx$, ($a > 0, b > 0$). Записать дифференциальное уравнение, описывающее данную модель, нарисовать поле направлений, нарисовать эскизы интегральных кривых. Существуют ли постоянные решения?

Дифференциальное уравнение: $\dot{x} = x(a - bx)$

Постоянные решения: $x \equiv 0 \quad x \equiv \frac{a}{b}$.

Задача 4

$$x_{n,1} = x_{n,0} + h \cdot F(t_{n,0}, x_{n,0})$$

$$x_{n,1} = x_{n,0} + \frac{1}{n} \cdot x_{n,0} = x_{n,0} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$x_{n,2} = x_{n,1} + \frac{1}{n} \cdot x_{n,1} = x_{n,1} \cdot \frac{n+1}{n} = x_{n,0} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

\vdots

$$x_{n,n} = x_{n,n-1} + \frac{1}{n} \cdot x_{n,n-1} = x_{n,n-1} \cdot \frac{n+1}{n} = x_{n,0} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n} = x_{n,0} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \cdot x_0$$

Задача 5

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$$f(t_0 + \Delta t) = f(t_0) + \Delta t f'(t_0) + \bar{o}(\Delta t) \text{ На одном шаге ломаной ошибка равна } \bar{o}(h) = \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\text{Суммарная ошибка за } n \text{ ходов составит } \bar{o}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n = \bar{o}(1)$$