Дифференциальные уравнения листок 2

Биршерт Алексей

Январь 2019

Задача 1

Скорость прироста пропорциональна квадрату числа особей. Запишем дифференциальное уравнение:

$\dot{x} = kx^2 \to \dfrac{dx}{dt} = kx^2 \to \dfrac{dx}{kx^2} = dt \to t = -\dfrac{1}{kx} + C \to \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{C - kt}}$, $C \in \mathbb{R}$

Вертикальные ассимптоты очевидны - $t = \dfrac{C}{k}$, физическая интерпретация такова - в какой-то момент времени популяция начинает экстремально расти. Достаточно очевидно, что имеют место быть только решения, когда $x > 0$ (не считаю разумной мысль, что могут существовать отрицательные популяции рыб, к примеру). Значит нас интересуют такие t, что $x > 0$ и $t < \dfrac{C}{k}$, $C \in \mathbb{R}_+$.

Задача 2

Найти все решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны:

(a) $y' = x^2$

$\dfrac{dy}{dx} = x^2 \to dy = x^2 dx \to \mathbf{y} = {}^{x^3}\!/\mathbf{3} + \mathbf{C}$, $C \in \mathbb{R}$

(b) $y' = e^x$

$\dfrac{dy}{dx} = e^x \to dy = e^x dx \to \mathbf{y} = \mathbf{e^x} + \mathbf{C}$, $C \in \mathbb{R}$

(c) $y' = e^y$

$\dfrac{dy}{dx} = e^y \to \dfrac{dy}{e^y} = dx \to -e^{-y} = x + C \to y = -\ln(C - x) \to \mathbf{y} = \ln\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{C - x}}\right)$, $C \in \mathbb{R}$

(d) $\dot{x} = t^2 + 1, \quad x(1) = 2$

$\dfrac{dx}{dt} = t^2 + 1 \to dx = \left(t^2 + 1\right) dt \to \mathbf{x} = {}^{t^3}\!/\mathbf{3} + \mathbf{t} + \mathbf{C}$, $C \in \mathbb{R}$

$2 = \dfrac{1}{3} + 1 + C \to C = \dfrac{2}{3} \to \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{t^3}}{\mathbf{3}} + \mathbf{t} + \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

(e) $\dot{x} = -3x, \quad x(3) = 10$

$\dfrac{dx}{dt} = -3x \to \dfrac{dx}{x} = -3dt \to \ln(|x|) = -3t + C \to |x| = e^{-3t+C} \to \mathbf{x} = \mathbf{C_1} \cdot \mathbf{e^{-3t}}$, $C_1 \in \mathbb{R}$

($C = 0$ видно из начального, знак из модуля)

$10 = C_1 \cdot e^{-9} \to C_1 = 10 \cdot e^9 \to \mathbf{x} = \mathbf{10e^{9-3t}}$

(f) $\dot{x} = 2x + t, \quad x(0) = -{}^1\!/_4$

$\dfrac{dx}{dt} = 2x + t \to [z = 2x + t, \quad \dot{z} = 2\dot{x} + 1, \quad \dot{x} = (\dot{z} - 1)/2] \to \dfrac{\dot{z} - 1}{2} = z \to \dot{z} = 2z + 1 \to$

$\to \dfrac{dz}{2z + 1} = dt \to \dfrac{\ln(|2z + 1|)}{2} = t + C \to 2z + 1 = C_1 \cdot e^{2t} \to \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{C_1 \cdot e^{2t} - 2t - 1}}{\mathbf{4}}$, $C_1 \in \mathbb{R}$

($C_1 = 0$ видно из начального, отрицательная от модуля)

$-{}^1\!/_4 = (C_1 - 1)/4 \to C_1 = 0 \to \mathbf{x} = -\dfrac{\mathbf{2t + 1}}{\mathbf{4}}$

(g) $\dot{x} = x^2 + 1$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1 \to \frac{dx}{x^2+1} = dt \to \arctan(x) = t + C \to \mathbf{x} = \tan(\mathbf{t} + \mathbf{C}),\ C \in \mathbb{R}$$

(h) $\dot{x} = x \ln(x), \quad x > 0$

$$\dot{x} = x\ln(x) \to \frac{dx}{x\ln(x)} = dt \to \frac{d(\ln(x))}{\ln(x)} = dt \to \ln(\ln(x)) = t + C \to \mathbf{x} = \mathbf{e}^{\mathbf{e}^{\mathbf{t}+\mathbf{C}}},\ C \in \mathbb{R}$$

(i) $\dot{x} = 10^x$

$$\frac{dx}{10^x} = dt \to -\frac{10^{-x}}{\ln(10)} = t + C \to \mathbf{x} = -\log_{\mathbf{10}}(\mathbf{C} - \mathbf{t}\ln(\mathbf{10})),\ C \in \mathbb{R}$$

(j) $\dot{x} = \dfrac{1}{2x+t}, \quad x(0) = -1$

$$\dot{x} = \frac{1}{2x+t} \to \left[z = 2x + t, \quad \dot{z} = 2\dot{x} + 1, \quad \dot{x} = \frac{\dot{z}-1}{2}\right] \to \frac{\dot{z}-1}{2} = \frac{1}{z} \to$$

$$\to \frac{dz}{dt} = \frac{2}{z} + 1 \to z - 2\ln(|z+2|) = t + C \to \mathbf{2x} - \mathbf{2}\ln(|\mathbf{2x} + \mathbf{t} + \mathbf{2}|) = \mathbf{t} + \mathbf{C},\ C \in \mathbb{R}$$

(k) $\dot{x} = \cos(x - t)$

$$\dot{x} = \cos(x-t) \to [z = x - t, \quad \dot{z} = \dot{x} - 1, \quad \dot{x} = \dot{z} + 1] \to \dot{z} + 1 = \cos(z) \to \frac{dz}{\cos(z) - 1} = dt \to$$

$$\to \operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) = t + C \to \mathbf{x} = \mathbf{2}\operatorname{arcctg}(\mathbf{t} + \mathbf{C}) + \mathbf{t},\ C \in \mathbb{R}$$

Задача 3

(a) $y' = y/x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \to \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \to \ln(|y|) = \ln(|x|) + C \to \mathbf{y} = \mathbf{C_1 x},\ C_1 \in \mathbb{R}$$

(b) $y' = 2y/x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \to \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \to \ln(|y|) = 2\ln(|x|) + C \to \mathbf{y} = \mathbf{C_1 x^2},\ C_1 \in \mathbb{R}$$

(c) $y' = y/(2x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \to \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \to \mathbf{y} = \mathbf{C_1}\sqrt{\mathbf{x}},\ C_1 \in \mathbb{R}$$

(d) $y' = -y/x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \to \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \to \mathbf{y} = \frac{\mathbf{C_1}}{\mathbf{x}},\ C_1 \in \mathbb{R}$$

(e) $y' = -x/y$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \to ydy = -xdx \to y^2 = C - x^2 \to \mathbf{y} = \pm\sqrt{\mathbf{C} - \mathbf{x^2}},\ C \in \mathbb{R}$$

(f) $y' = xy$

$$\frac{dy}{dx} = xy \to \frac{dy}{y} = xdx \to \ln(|y|) = x^2/2 + C \to \mathbf{y} = \mathbf{C_1 e^{x^2/2}},\ C_1 \in \mathbb{R}$$

(g) $y' = -xy$

$$\frac{dy}{dx} = -xy \to \frac{dy}{y} = -xdx \to \ln(|y|) = -x^2/2 + C \to \mathbf{y} = \mathbf{C_1 e^{-x^2/2}},\ C_1 \in \mathbb{R}$$

Задача 4

(a) $\left(x^2+4\right)y' = 2xy$

$$y' = \frac{2xy}{x^2+4} \to \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+4} \to \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2+4} \to \ln\left(|y|\right) = \ln\left(\left|x^2+4\right|\right) + C \to \mathbf{y} = \mathbf{C_1}\left(\mathbf{x^2}+\mathbf{4}\right),\ C_1 \in \mathbb{R}$$

(b) $y' = -xe^y$

$$\frac{dy}{dx} = -xe^y \to e^{-y}dy = -xdx \to e^{-y} = x^2/2 + C \to \mathbf{y} = -\ln\left(\mathbf{x^2}/\mathbf{2}+\mathbf{C}\right),\ C \in \mathbb{R}$$

(c) $y' \operatorname{ctg}^2(x) + \operatorname{tg}^2(y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg}^2(y)}{\operatorname{ctg}^2(x)} \to \frac{dy}{\operatorname{tg}^2(y)} = \frac{dx}{\operatorname{ctg}^2(x)} \to -y - \operatorname{ctg}(y) = \operatorname{tg}(x) - x + C \to \mathbf{y} + \operatorname{ctg}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} - \operatorname{tg}(\mathbf{x}) + \mathbf{C},\ C \in \mathbb{R}$$

(d) $xy' + y = y^2$

$$xy' + y = y^2 \to xy' = y^2 - y \to y' = \frac{y^2-y}{x} \to \frac{dy}{y^2-y} = \frac{dx}{x} \to \ln(1-y) - \ln(y) = \ln(x) + C \to$$

$$\to \ln\left(\frac{1-y}{y}\right) = \ln(x) + C \to \frac{1-y}{y} = C_1x \to \mathbf{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C_1x}+\mathbf{1}},\ C_1 \in \mathbb{R}, \quad y \equiv 0$$