Дифференциальные уравнения листок 10 (КАВО)

Биршерт Лешка

Апрель 2019

Задача 1

Тупа отсылка к листку 6 (только надо привести к такому виду):

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Приведу алгоритм решения таких тасок:

a) Решить соответствующее однородное линейное уравнение $y' = a(x)y$:

$$y = C \cdot G(x)$$

b) Решить исходное уравнение, полагая его решение в виде $y(x) = C(x) \cdot G(x)$, $G(x)$ из пункта а.

$$C(x) = \int \frac{b(x)}{G(x)}\, dx$$

(a) $y = x(y' - x\cos(x))$

$$y' = \frac{y + x^2\cos(x)}{x} \to y = x\sin(x) + Cx$$

(b) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$

$$y' = 3xe^{-x} - y\frac{x+1}{x} \to y = \frac{e^{-x}\left(x^3 + C\right)}{x}$$

(c) $2x(x^2 + y)dx = dy$

$$y' = 2x^3 + 2xy \to y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$$

(d) $(x + y^2)dy = ydx$

Замена $y = x, x = y$ 

$$y' = \frac{y}{x} + x \to x = y^2 + Cy$$

(e) $(2e^y - x)y' = 1$

Замена $y = x, x = y$ 

$$y' = 2e^x - y \to y = \ln\left(\frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{C + x^2}\right)\right)$$

(f) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$

Замена $y = x, x = y$ 

$$y' = \frac{3y}{x} - x \to x = y^2 + Cy^3$$

Задача 2

Step 1 Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - решения $\dot{x} = a(t)x + b(t)$, то $x_2(t) - x_1(t)$ решение $\dot{x} = a(t)x$

Step 2 Все решение $\dot{x} = a(t)x$ имеют вид $x(t) = C(x_2(t) - x_1(t))$

Step 3 Все решения $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ имеют вид $x(t) = x_1(t) + C(x_2(t) - x_1(t))$

Step 4 По заданным x_0, t_0 найти C из пункта 3

Задача 3

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \qquad \dot{x} = C\lambda e^{\lambda t} \qquad \ddot{x} = C\lambda^2 e^{\lambda t}$$

(a) $\ddot{x} - 4x = 0$

$$C\lambda^2 e^{\lambda t} - 4Ce^{\lambda t} = 0 \to Ce^{\lambda t}(\lambda^2 - 4) = 0 \to \lambda = \pm 2 \to x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$$

(b) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$

$$C\lambda^2 e^{\lambda t} - 5C\lambda e^{\lambda t} + 6Ce^{\lambda t} = 0 \to Ce^{\lambda t}(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \to \lambda = 2, \lambda = 3 \to x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

(c) $\ddot{x} + 4x = 0$

$$C\lambda^2 e^{\lambda t} + 4Ce^{\lambda t} = 0 \to Ce^{\lambda t}(\lambda^2 + 4) \to x(t) = C_1 e^{2it} + C_2 e^{-2it}$$

$$C_1 = C_2 = {}^{k}/_{2} \to x(t) = k\cos(2t)$$

$$C_1 = {}^{k}/_{2i} C_2 = -{}^{k}/_{2i} \to x(t) = k\sin(2t)$$