

Дифференциальные уравнения листок 2

Биршерт Алексей

Январь 2019

Задача 1

Скорость прироста пропорциональна квадрату числа особей. Запишем дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = kx^2 \rightarrow \frac{dx}{dt} = kx^2 \rightarrow \frac{dx}{kx^2} = dt \rightarrow t = -\frac{1}{kx} + C \rightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{C} - \mathbf{k}t}, C \in \mathbb{R}$$

Вертикальные асимптоты очевидны - $t = \frac{C}{k}$, физическая интерпретация такова - в какой-то момент времени популяция начинает экстремально расти. Достаточно очевидно, что имеют место быть только решения, когда $x > 0$ (не считаю разумной мысль, что могут существовать отрицательные популяции рыб, к примеру). Значит нас интересуют такие t , что $x > 0$ и $t < \frac{C}{k}$, $C \in \mathbb{R}_+$.

Задача 2

Найти все решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны:

(a) $y' = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \rightarrow dy = x^2 dx \rightarrow \mathbf{y} = x^3/3 + \mathbf{C}, C \in \mathbb{R}$$

(b) $y' = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \rightarrow dy = e^x dx \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{e}^x + \mathbf{C}, C \in \mathbb{R}$$

(c) $y' = e^y$

$$\frac{dy}{dx} = e^y \rightarrow \frac{dy}{e^y} = dx \rightarrow -e^{-y} = x + C \rightarrow y = -\ln(C - x) \rightarrow \mathbf{y} = \ln\left(\frac{1}{\mathbf{C} - \mathbf{x}}\right), C \in \mathbb{R}$$

(d) $\dot{x} = t^2 + 1, \quad x(1) = 2$

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + 1 \rightarrow dx = (t^2 + 1)dt \rightarrow \mathbf{x} = t^3/3 + \mathbf{t} + \mathbf{C}, C \in \mathbb{R}$$

$$2 = \frac{1}{3} + 1 + C \rightarrow C = \frac{2}{3} \rightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{t}^3}{3} + \mathbf{t} + \frac{2}{3}$$

(e) $\dot{x} = -3x, \quad x(3) = 10$

$$\frac{dx}{dt} = -3x \rightarrow \frac{dx}{x} = -3dt \rightarrow \ln(|x|) = -3t + C \rightarrow |x| = e^{-3t+C} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{e}^{-3t}, C_1 \in \mathbb{R}$$

($C = 0$ видно из начального, знак из модуля)

$$10 = C_1 \cdot e^{-9} \rightarrow C_1 = 10 \cdot e^9 \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{10e}^{9-3t}$$

(f) $\dot{x} = 2x + t, \quad x(0) = -1/4$

$$\frac{dx}{dt} = 2x + t \rightarrow [z = 2x + t, \quad \dot{z} = 2\dot{x} + 1, \quad \dot{x} = (\dot{z} - 1)/2] \rightarrow \frac{\dot{z} - 1}{2} = z \rightarrow \dot{z} = 2z + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dz}{2z + 1} = dt \rightarrow \frac{\ln(|2z + 1|)}{2} = t + C \rightarrow 2z + 1 = C_1 \cdot e^{2t} \rightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{e}^{2t} - \mathbf{2t} - \mathbf{1}}{4}, C_1 \in \mathbb{R}$$

($C_1 = 0$ видно из начального, отрицательная от модуля)

$$-1/4 = (C_1 - 1)/4 \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow \mathbf{x} = -\frac{\mathbf{2t} + \mathbf{1}}{4}$$

(g) $\dot{x} = x^2 + 1$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1 \rightarrow \frac{dx}{x^2 + 1} = dt \rightarrow \arctan(x) = t + C \rightarrow \mathbf{x} = \tan(\mathbf{t} + \mathbf{C}), C \in \mathbb{R}$$

(h) $\dot{x} = x \ln(x), \quad x > 0$

$$\dot{x} = x \ln(x) \rightarrow \frac{dx}{x \ln(x)} = dt \rightarrow \frac{d(\ln(x))}{\ln(x)} = dt \rightarrow \ln(\ln(x)) = t + C \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{e}^{\mathbf{e}^{\mathbf{t} + \mathbf{C}}}, C \in \mathbb{R}$$

(i) $\dot{x} = 10^x$

$$\frac{dx}{10^x} = dt \rightarrow -\frac{10^{-x}}{\ln(10)} = t + C \rightarrow \mathbf{x} = -\log_{10}(\mathbf{C} - \mathbf{t} \ln(\mathbf{10})), C \in \mathbb{R}$$

(j) $\dot{x} = \frac{1}{2x+t}, \quad x(0) = -1$

$$\begin{aligned} \dot{x} = \frac{1}{2x+t} &\rightarrow \left[z = 2x+t, \quad \dot{z} = 2\dot{x}+1, \quad \dot{x} = \frac{\dot{z}-1}{2} \right] \rightarrow \frac{\dot{z}-1}{2} = \frac{1}{z} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2}{z} + 1 \rightarrow z - 2\ln(|z+2|) = t + C \rightarrow \mathbf{2x} - \mathbf{2} \ln(|\mathbf{2x} + \mathbf{t} + \mathbf{2}|) = \mathbf{t} + \mathbf{C}, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(k) $\dot{x} = \cos(x-t)$

$$\begin{aligned} \dot{x} = \cos(x-t) &\rightarrow [z = x-t, \quad \dot{z} = \dot{x}-1, \quad \dot{x} = \dot{z}+1] \rightarrow \dot{z}+1 = \cos(z) \rightarrow \frac{dz}{\cos(z)-1} = dt \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2}\right) = t + C \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{2} \operatorname{arctg}(\mathbf{t} + \mathbf{C}) + \mathbf{t}, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Задача 3

(a) $y' = y/x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln(|y|) = \ln(|x|) + C \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{C_1 x}, C_1 \in \mathbb{R}$$

(b) $y' = 2y/x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \rightarrow \ln(|y|) = 2\ln(|x|) + C \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{C_1 x^2}, C_1 \in \mathbb{R}$$

(c) $y' = y/(2x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{C_1 \sqrt{x}}, C_1 \in \mathbb{R}$$

(d) $y' = -y/x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \rightarrow \mathbf{y} = \frac{\mathbf{C_1}}{\mathbf{x}}, C_1 \in \mathbb{R}$$

(e) $y' = -x/y$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \rightarrow ydy = -xdx \rightarrow y^2 = C - x^2 \rightarrow \mathbf{y} = \pm \sqrt{\mathbf{C} - \mathbf{x^2}}, C \in \mathbb{R}$$

(f) $y' = xy$

$$\frac{dy}{dx} = xy \rightarrow \frac{dy}{y} = xdx \rightarrow \ln(|y|) = \frac{x^2}{2} + C \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{C_1 e^{x^2/2}}, C_1 \in \mathbb{R}$$

(g) $y' = -xy$

$$\frac{dy}{dx} = -xy \rightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \rightarrow \ln(|y|) = -\frac{x^2}{2} + C \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{C_1 e^{-x^2/2}}, C_1 \in \mathbb{R}$$

Задача 4

(a) $(x^2 + 4)y' = 2xy$

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + 4} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + 4} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{x^2 + 4} \rightarrow \ln(|y|) = \ln(|x^2 + 4|) + C \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{C_1(x^2 + 4)}, C_1 \in \mathbb{R}$$

(b) $y' = -xe^y$

$$\frac{dy}{dx} = -xe^y \rightarrow e^{-y} dy = -x dx \rightarrow e^{-y} = x^2 + C \rightarrow \mathbf{y = C_1 e^{x^2}}, C_1 \in \mathbb{R}$$

(c) $y' \operatorname{ctg}^2(x) + \operatorname{tg}^2(y) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg}^2(y)}{\operatorname{ctg}^2(x)} \rightarrow \frac{dy}{\operatorname{tg}^2(y)} = \frac{dx}{\operatorname{ctg}^2(x)} \rightarrow -y - \operatorname{ctg}(y) = \operatorname{tg}(x) - x + C \rightarrow \mathbf{y + \operatorname{ctg}(y) = x - \operatorname{tg}(x) + C}, C \in \mathbb{R}$$

(d) $xy' + y = y^2$

$$xy' + y = y^2 \rightarrow xy' = y^2 - y \rightarrow y' = \frac{y^2 - y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln(1 - y) - \ln(y) = \ln(x) + C \rightarrow \\ \rightarrow \ln\left(\frac{1 - y}{y}\right) = \ln(x) + C \rightarrow \frac{1 - y}{y} = C_1 x \rightarrow \mathbf{y = \frac{1}{C_1 x + 1}}, C_1 \in \mathbb{R}, \quad y \equiv 0$$