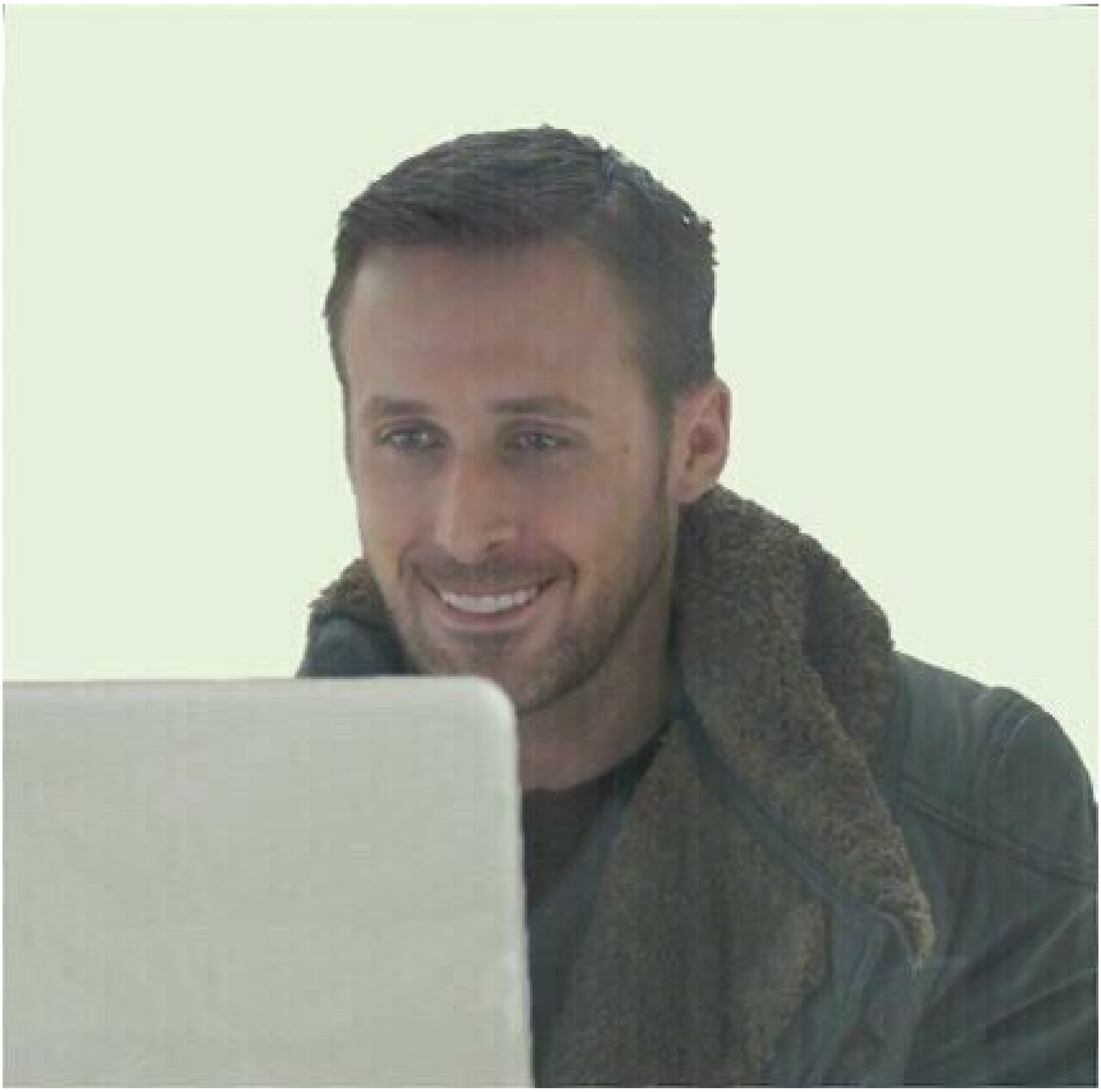
Дифференциальные уравнения листок 7

Биршерт Лешка

Март 2019

Когда уже 14 звездочек).



Задача 1

$$
\begin{gathered}
F(x,y) = x^2 - y^2 \\
\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y \\
F'(x,y) \text{ вдоль } (P,Q) = F'_x \cdot P + F'_y \cdot Q
\end{gathered}
$$

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{(a)} & (P,Q) = (2,3) \to & F'(x,y)_{(P,Q)} = 4x - 6y \\
\textbf{(b)} & (P,Q) = (x,y) \to & F'(x,y)_{(P,Q)} = 2x^2 - 2y^2 \\
\textbf{(c)} & (P,Q) = (y,x) \to & F'(x,y)_{(P,Q)} = 0 \\
\textbf{(d)} & (P,Q) = (1,-e^y) \to & F'(x,y)_{(P,Q)} = 2x + 2ye^y
\end{array}
$$

Задача 2

(a) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = -2\frac{x}{y} \to ydy = -2xdx \to y^2/2 + x^2 = C$$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \to \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \to \ln|y| + \ln|x| = C$$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y^2 - x^2} \to dy(y^2 - x^2) = dx(2xy) \to y^3/3 - x^2y = yx^2 + C \to y^3/3 - 2x^2y = C$$

(d) $\begin{cases} \dot{x} = 2y + xe^{-y} \\ \dot{y} = e^{-y} \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y}}{2y + xe^{-y}} \to (2y + xe^{-y})dy = e^{-y}dx \to y^2 - xe^{-y} = xe^{-y} + C \to y^2 - 2xe^{-y} = C$$

Задача 3

(a) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^2 - y^2 - x \end{cases}$ $\qquad F(x,y) = e^x\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{xe^x}{\sqrt{x^2+y^2}} + e^x\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{ye^x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y \cdot \left(\frac{xe^x}{\sqrt{x^2+y^2}} + e^x\sqrt{x^2+y^2}\right) + (-x^2 - y^2 - x) \cdot \left(\frac{ye^x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x^2 + y^2 + y \end{cases}$ $\qquad F(x,y) = x + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$x \cdot \left(\frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2+y) \cdot \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = 0$$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = -x\sqrt{1+y^2} + y \\ \dot{y} = y\sqrt{1+y^2} \end{cases}$ $\qquad F(x,y) = xy - \sqrt{1+y^2}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$(-x\sqrt{1+y^2} + y) \cdot x + (y\sqrt{1+y^2}) \cdot \left(x - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = 0$$

(d) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = z \end{cases}$ $\qquad F(x,y,z) = xy, \qquad G(x,y,z) = yz$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = z, \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = y$$

$$x \cdot y - y \cdot x = 0$$

$$-y \cdot z + z \cdot y = 0$$

Задача 4

(a) $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} \\ y(t) = C_2 e^{t} \\ z(t) = C_3 \end{cases} \quad \to F(x,y,z) = x(t)y(t), G(x,y,z) = z(t) \text{ это две базисные функции.}$$

То есть любой первый интеграл представляется как $H = F^{\alpha} \cdot G^{\beta} \cdot C, H_1 - H_2, \phi(H)$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = 2z \end{cases}$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} \\ y(t) = C_2 e^{t} \\ z(t) = C_3 e^{2t} \end{cases} \quad \to F(x,y,z) = x(t)y(t), G(x,y,z) = \frac{z(t)}{y^2} \text{ это две базисные функции.}$$

То есть любой первый интеграл представляется как $H = F^{\alpha} \cdot G^{\beta} \cdot C, H_1 - H_2, \phi(H)$

Краткое пояснение, что я имел в виду - все первые интегралы представляются на базисных первых интегралах (базисных функциях).

Задача 5

(a) $y' + 2y = y^2 e^x$

$$y^{-2}y' + 2y^{-1} = e^x \to \begin{bmatrix} z = y^{-1} \\ dz = -y^{-2}dy \end{bmatrix} \to -z' + 2z = e^x \to z' = 2z - e^x$$

a) $z' = 2z$

$z(x) = Ce^{2x}$

b) $z(x) = C(x) \cdot e^{2x}$

$C'(x) = -\dfrac{e^x}{e^{2x}} \to C'(x) = -e^{-x} \to C(x) = e^{-x} + C$

$$z(x) = e^{2x} \cdot \left(e^{-x} + C\right) \to y(x) = \frac{1}{e^x + Ce^{2x}}, y \equiv 0$$

(b) $(x+1)(y'+y^2) = -y$

$$y'(x+1) = -y - y^2(x+1) \to y'y^{-2}(x+1) = -y^{-1} - (x+1) \to \begin{bmatrix} z = y^{-1} \\ dz = -y^{-2}dy \end{bmatrix} \to$$
$$\to -z'(x+1) = -z - (x+1) \to z' = z/(x+1) + 1$$

a) $z' = \dfrac{z}{(x+1)}$

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{(x+1)} \to \ln|z| = \ln|x+1| + C \to z = C(x+1)$

b) $z(x) = C(x)(x+1)$

$C'(x) = \dfrac{1}{x+1} \to C(x) = \ln(x+1) + C$

$$z(x) = \ln(x+1)\cdot(x+1) + C(x+1) \to y(x) = \frac{1}{\ln(x+1)\cdot(x+1) + C(x+1)}, y \equiv 0$$

(c) $y' = y^4\cos(x) + y\,\mathrm{tg}(x)$

$$y'/y^4 = \cos(x) + \mathrm{tg}(x)/y^3 \to \begin{bmatrix} z = y^{-3} \\ dz = -3y^{-4}dy \end{bmatrix} \to -z'/3 = \cos(x) + z\,\mathrm{tg}(x) \to z' = -3z\,\mathrm{tg}(x) - \cos(x)$$

a) $z' = -3z\,\mathrm{tg}(x)$

$\dfrac{dz}{dx} = -3z\,\mathrm{tg}(x) \to \dfrac{dz}{z} = -3\,\mathrm{tg}(x)dx \to \ln|z| = 3\ln|\cos(x)| + C \to z = C\cos^3(x)$

b) $z(x) = C(x)\cos^3(x)$

$C'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{\cos^3(x)} \to C(x) = -\mathrm{tg}(x) + C$

$$z(x) = \cos^3(x)\cdot(-\mathrm{tg}(x) + C) \to y(x) = \frac{1}{\cos(x)\cdot\sqrt[3]{C - \mathrm{tg}(x)}}, y \equiv 0$$

(d) $xy\,dy = (y^2 + x)\,dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+x}{xy} \to yy' = y^2/x + 1 \to \begin{bmatrix} z = y^2 \\ dz = 2ydy \end{bmatrix} \to z' = 2z/x + 2$$

a) $z' = 2z/x$

$z = Cx^2$

b) $z(x) = C(x)x^2$

$C'(x) = \dfrac{2}{x^2} \to C(x) = -\dfrac{2}{x} + C$

$$z(x) == -2x + Cx^2 \to y(x) = \pm\sqrt{Cx^2 - 2x}$$