Дифференциальные уравнения листок 6

Биршерт Лешка

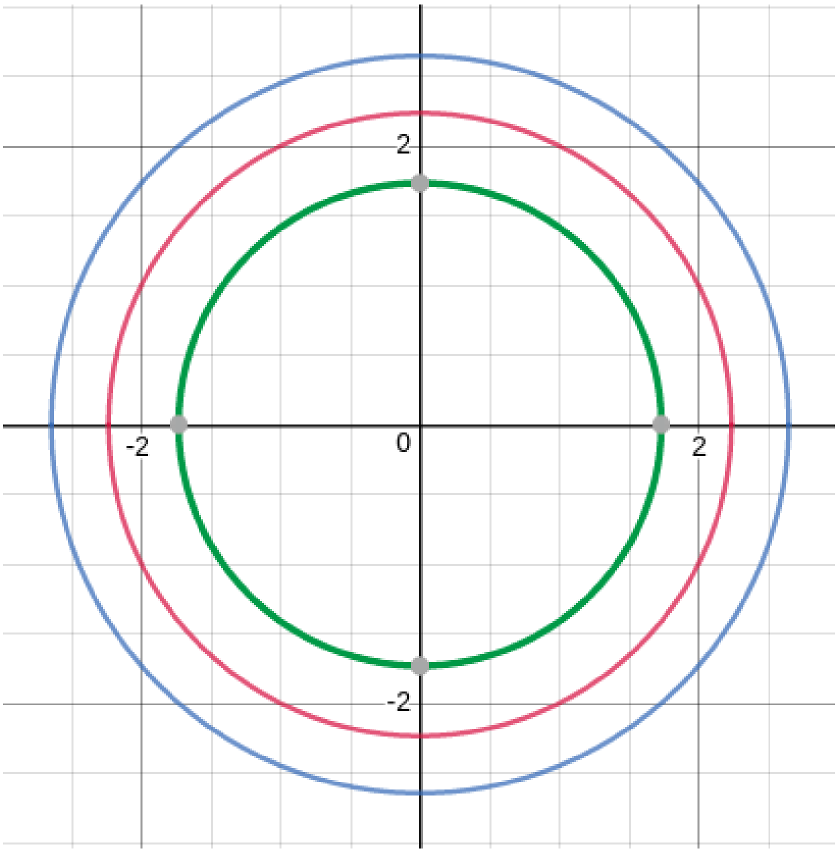
Февраль 2019

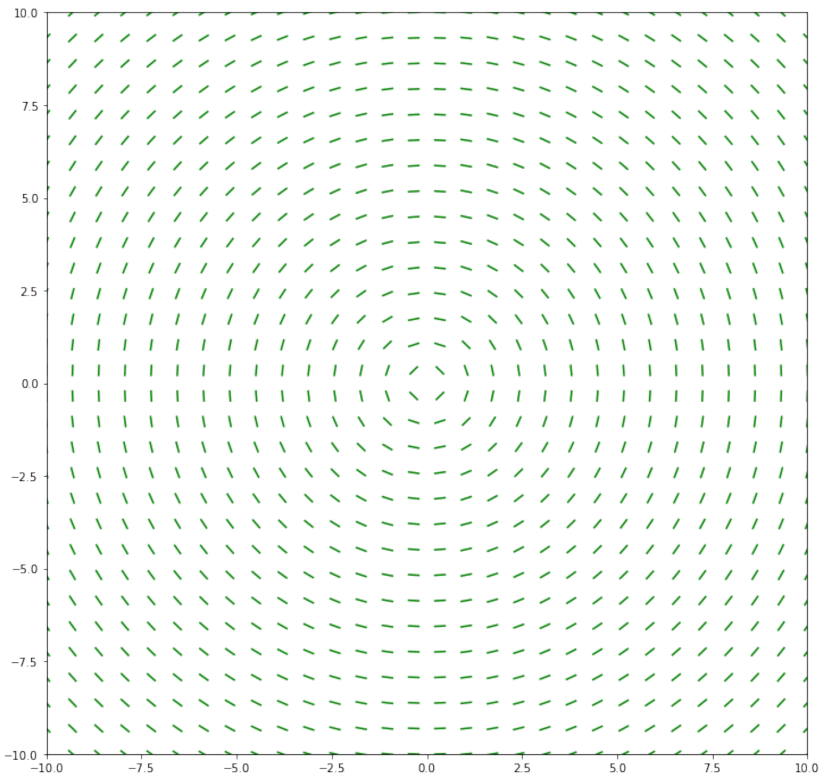
Когда допускаешь ошибку в задаче и все получают за самостоятельную 5 вместо 10:

Задача 2

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

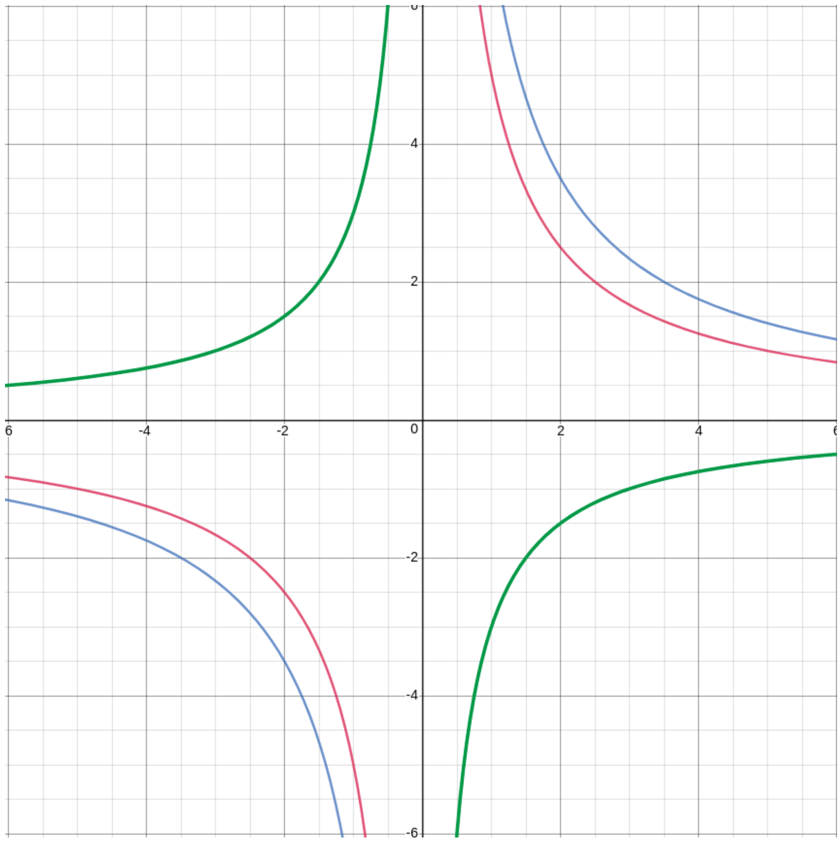
$df = 2xdx + 2ydy$

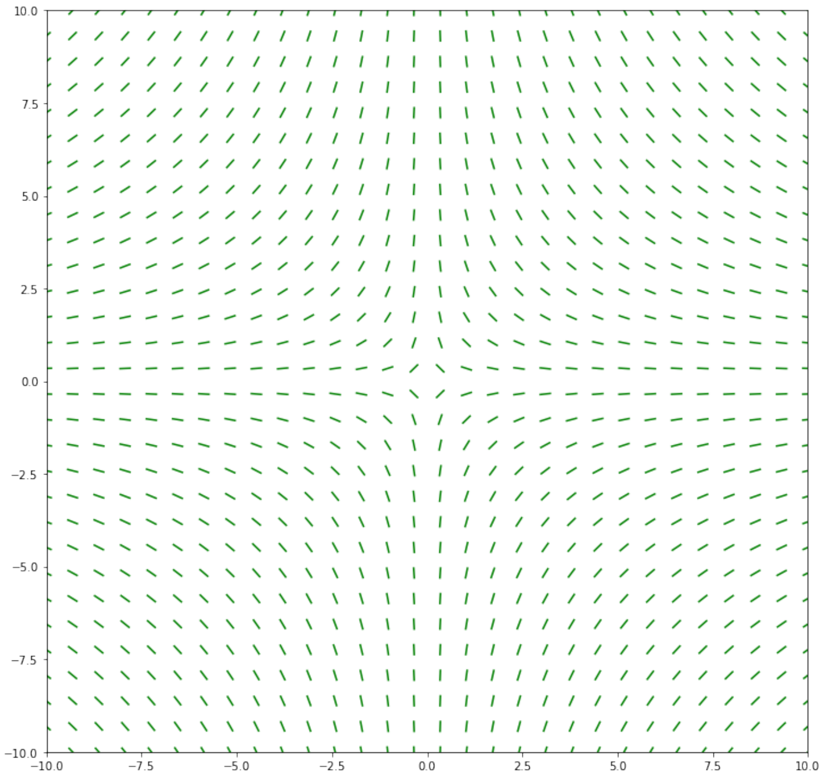




(b) $f(x, y) = xy$

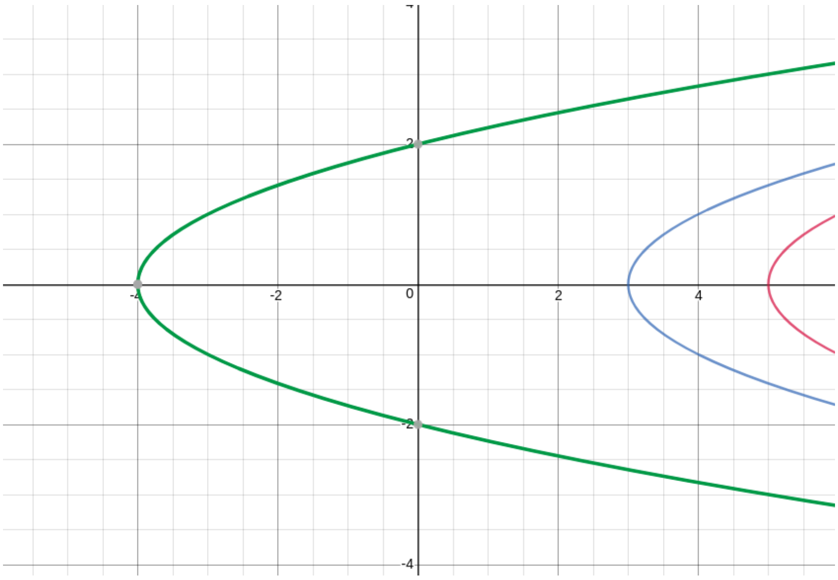
$df = ydx + xdy$

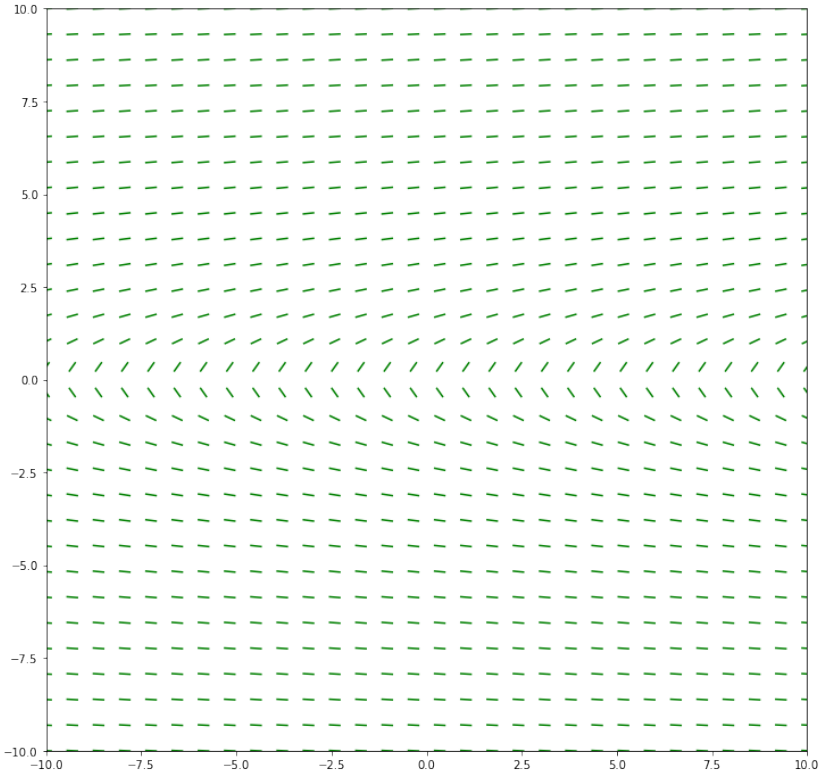




(c) $f(x, y) = x - y^2$

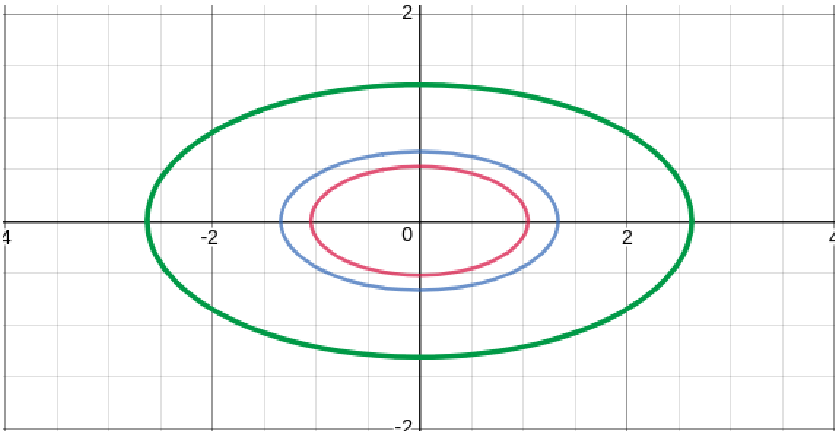
$df = dx - 2ydy$

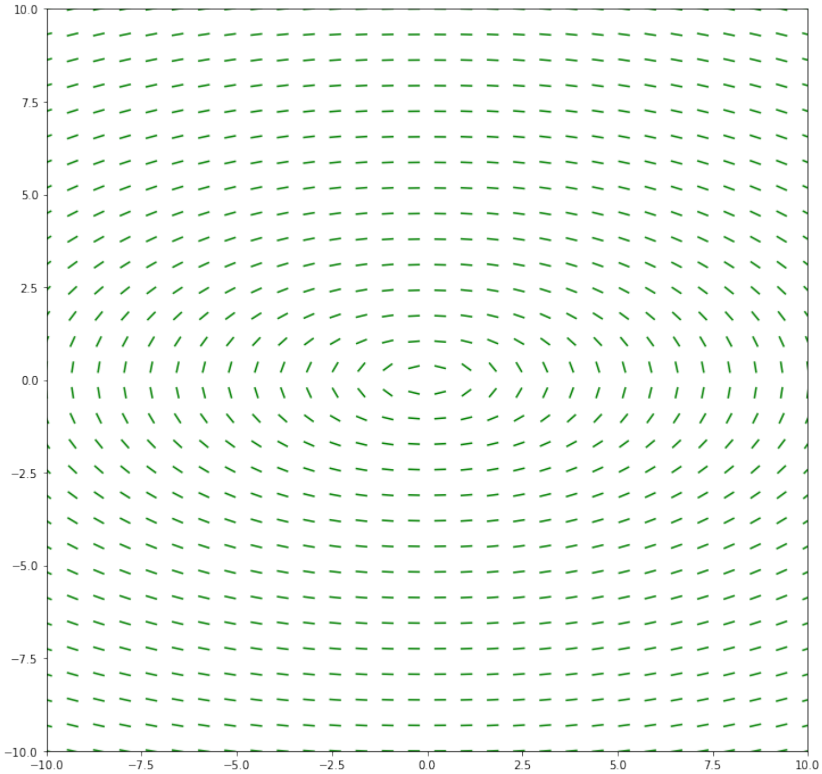




(d) $f(x,y) = e^{x^2+4y^2}$

$df = e^{x^2+4y^2}2x dx + e^{x^2+4y^2}8y dy$





Задача 5

(a) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$

$$F(x,y) = 2x + 3x^2y, \quad G(x,y) = x^3 - 3y^2$$

Проверим условие теоремы:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Условия теоремы выполнены, найдем H :

$$H = \int F\,dx = \int (2x + 3x^2y)\,dx = x^2 + x^3y + C(y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = G$$

$$x^3 - 3y^2 = x^3 + C'(y)$$

$$C(y) = -y^3 + C$$

$$H(x,y) = x^2 + x^3y - y^3 + C$$

(b) $(2xy)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$

$$F(x,y) = 2xy, \quad G(x,y) = x^2 - y^2$$

Проверим условие теоремы:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Условия теоремы выполнены, найдем H :

$$H = \int F\,dx = \int (2xy)\,dx = x^2y + C(y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = G$$

$$x^2 - y^2 = x^2 + C'(y)$$

$$C(y) = -y^3/3 + C$$

$$H(x,y) = x^2y - y^3/3 + C$$

(c) $\dot{x} = \dfrac{t(9tx^2 - 2)}{x(4x^2 - 6t^3)}$

$$dt(t(2 - 9tx^2)) + dx(x(4x^2 - 6t^3)) = 0$$

$$F(t,x) = t(2 - 9tx^2), \quad G(t,x) = x(4x^2 - 6t^3)$$

Проверим условие теоремы:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 18t^2x = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Условия теоремы выполнены, найдем H :

$$H = \int F\,dt = \int (t(2 - 9tx^2))\,dt = t^2 - 3t^3x^2 + C(x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = G$$

$$x(4x^2 - 6t^3) = -6t^3x + C'(x)$$

$$C(x) = x^4 + C$$

$$H(t,x) = t^2 - 3t^3x^2 + x^4 + C$$

(d) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$

$$F(x,y) = e^{-y}, \quad G(x,y) = -(2y + xe^{-y})$$

Проверим условие теоремы:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^{y} = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Условия теоремы выполнены, найдем H :

$$H = \int F\,dx = \int (e^{-y})\,dx = e^{-y}x + C(y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = G$$

$$-(2y + xe^{-y}) = e^{-y}x + C(y)$$

$$C(y) = -y^2 + C$$

$$H(x,y) = e^{-y}x + -y^2 + C$$

Задача 6*

Решить уравнение $y' = a(x)y$ в общем виде. (Не очень понял, почему тут звездочка).

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \to \frac{dy}{y} = a(x)\,dx \to \ln|y| = A(x) + C \to y = e^{\int a(x)\,dx} \cdot C$$

Задача 7

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Приведу алгоритм решения таких тасок:

a) Решить соответствующее однородное линейное уравнение $y' = a(x)y$:

$$y = C \cdot G(x)$$

b) Решить исходное уравнение, полагая его решение в виде $y(x) = C(x) \cdot G(x)$, $G(x)$ из пункта a.

$$C(x) = \int \frac{b(x)}{G(x)}\,dx$$

(a) $\dot{x} = x + t$

a) $\dot{x} = x$

$x = Ce^t$

b) $x(t) = C(t)e^t$

$C'(t) = \dfrac{t}{e^t} \to C(t) = -e^{-t}(t+1) + C$

$x(t) = e^t \cdot (-e^{-t}(t+1) + C) = -(t+1) + Ce^t$

(b) $xy' - 2y = 2x^4$

$y' = 2x^3 + 2y/x$

a) $y' = 2y/x$

$y = Cx^2$

b) $y(x) = C(x)x^2$

$C'(x) = 2x \to C(x) = x^2 + C$

$y(x) = (x^2 + C)x^2$

(c) $(2x+1)y' = 4x + 2y$

$$y' = \frac{4x}{2x+1} + \frac{2y}{2x+1}$$

a) $y' = \dfrac{2y}{2x+1}$

$$y = C(2x+1)$$

b) $y(x) = C(x)(2x+1)$

$$C'(x) = \frac{4x}{(2x+1)^2} \to C(x) = \frac{1}{2x+1} + \ln|2x+1| + C$$

$$y(x) = 1 + \ln|2x+1|(2x+1) + C(2x+1)$$

(d) $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0$

$$y' = y + \frac{e^x}{x}$$

a) $y' = y$

$$y = Ce^x$$

b) $y(x) = C(x)e^x$

$$C'(x) = \frac{1}{x} \to C(x) = \ln|x| + C$$

$$y(x) = e^x \ln|x| + Ce^x$$

(e) $x^2y' + xy + 1 = 0$

$$y' = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$$

a) $y' = -\dfrac{y}{x}$

$$y = \frac{C}{x}$$

b) $y(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

$$C'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \to C(x) = -\ln|x| + C$$

$$y(x) = \frac{C - \ln|x|}{x}$$

(f) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$

Сделаем замену $x = y, y = x$ 

$$y' = \frac{3y - x^2}{x}$$

a) $y' = \dfrac{3y}{x}$

$$y = Cx^3$$

b) $y(x) = C(x)x^3$

$$C'(x) = \frac{-x}{x^3} \to C(x) = \frac{1}{x} + C$$

$$y(x) = x^2 + Cx^3 \to x(y) = y^2 + Cy^3$$