Дифференциальные уравнения листок 1

Биршерт Алексей

Январь 2019

Задача 1

- (a) $\dot{x} = 0$

  $\mathbf{x} = \mathbf{C}$, $C \in \mathbb{R}$

- (b) $\dot{x} = -1$

  $\mathbf{x} = -\mathbf{t} + \mathbf{C}$, $C \in \mathbb{R}$

- (c) $\dot{x} = 2t$

  $\mathbf{x} = \mathbf{t^2} + \mathbf{C}$, $C \in \mathbb{R}$

- (d) $\dot{x} = \dfrac{x}{t}$

  $\dot{x} = \dfrac{x}{t} \to \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} \to \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{t} \to \ln(|x|) = \ln(|t|) + C \to \mathbf{x} = \mathbf{C_1 t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$ ($C_1 = 0$ видно из начального уравнения)

- (e) $\dot{x} = -\dfrac{x}{t}$

  $\dot{x} = -\dfrac{x}{t} \to \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x}{t} \to \dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dt}{t} \to \ln(x) = -\ln(t) + C \to \mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{C}}{\mathbf{t}}, C \in \mathbb{R}$

- (f) $\dot{x} = -\dfrac{t}{x}$

  $\dot{x} = -\dfrac{t}{x} \to \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{t}{x} \to xdx = -tdt \to x^2 = -t^2 + C \to \mathbf{x} = \pm\sqrt{\mathbf{C_1^2} - \mathbf{t^2}}$, $C_1 \in \mathbb{R}$

Задача 2

$\dot{x} = kx, \quad k > 0$

- (c) Да, $x \equiv 0$
- (d) $x = Ce^{kt}, C \in \mathbb{R} \quad \dot{x} = k \cdot Ce^{kt} \to \dot{x} = kx$
- (e) $x(0) = x_0 \to x = Ce^{k0} \to x = x_0 \cdot e^{kt}$

Задача 3

Мы находимся в условиях задачи 2, но теперь из-за ограниченности ресурсов коэффициент прироста зависит от x как линейная функция: $a - bx$, $(a > 0, b > 0)$. Записать дифференциальное уравнение, описывающее данную модель, нарисовать поле направлений, нарисовать эскизы интегральных кривых. Существуют ли постоянные решения?

Дифференциальное уравнение: $\dot{x} = x(a - bx)$

Постоянные решения: $x \equiv 0 \quad x \equiv \dfrac{a}{b}$.

Задача 4

$x_{n,1} = x_{n,0} + h \cdot F(t_{n,0}, x_{n,0})$

$x_{n,1} = x_{n,0} + \dfrac{1}{n} \cdot x_{n,0} = x_{n,0} \cdot \dfrac{n+1}{n}$

$x_{n,2} = x_{n,1} + \dfrac{1}{n} \cdot x_{n,1} = x_{n,1} \cdot \dfrac{n+1}{n} = x_{n,0} \cdot \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2$

$\vdots$

$x_{n,n} = x_{n,n-1} + \dfrac{1}{n} \cdot x_{n,n-1} = x_{n,n-1} \cdot \dfrac{n+1}{n} = x_{n,0} \cdot \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_{n,n} = x_{n,0} \cdot \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e \cdot x_0$