B.2

filippo

3 April 2018

Sia $Y_1, ..., Y_n$ un campione **bernoulliano** (campionamento casuale con ripetizione) da una v.c. $N(\mu, \sigma^2)$ e si voglia stimare μ. Per questo vengono considerati due stimatori
$\hat{\mu}_{A,n} = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i/n$ e
$\hat{\mu}_{B,n} = Y_1/n + (n-1)Y_n/n$.
Nel seguito si suppone che σ^2 sia noto.

Calcolate la distorsione dei due stimatori.

Ricordiamo che la distorsione di uno stimatore $\hat{\theta}_n$ equivale a $bias(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n) - \theta$. Se $bias(\hat{\theta}_n)$ è nullo, lo stimatore è non distorto.

Entrambe le v.c. sono Normali, di cui ricordiamo **la proprietà**: $E(N(\mu, \sigma^2)) = \mu$

Analizzo $\hat{\mu}_{A,n}$:
$\hat{\mu}_{A,n} = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i/n$
$E(\hat{\mu}_{A,n}) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} E(Y_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mu}{n} = \frac{(n-1)\mu}{n} = \frac{n\mu}{n} - \frac{\mu}{n} = \mu - \frac{\mu}{n}$
$bias(\hat{\mu}_{A,n}) = \mu - \frac{\mu}{n} - \mu = -\frac{\mu}{n}$ Il primo stimatore risulta quindi distorto.

Analizzo $\hat{\mu}_{B,n}$:
$\hat{\mu}_{B,n} = Y_1/n + (n-1)Y_n/n$
$\hat{\mu}_{B,n} = \frac{Y_1}{n} + \frac{(n-1)Y_n}{n} = \frac{Y_1 + Y_n(n-1)}{n}$
$E(\hat{\mu}_{B,n}) = \frac{E(Y_1) + E(Y_n)(n-1)}{n} = \frac{\mu + \mu(n-1)}{n} = \frac{\mu}{n} + \frac{n\mu}{n} - \frac{\mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$
$bias(\hat{\mu}_{B,n}) = \mu - \mu = 0$ Il secondo stimatore risulta invece non distorto.

Calcolate il loro errore standard.
Entrambe le v.c. sono Normali, di cui ricordiamo **la proprietà**: $Var(N(\mu, \sigma^2)) = \sigma^2$

Ricordiamo che l'errore standard equivale a $se(\hat{\theta}_n) = \sqrt{Var(\hat{\theta}_n)}$

Analizzo $\hat{\mu}_{A,n}$:
$se(\hat{\mu}_{A,n}) = \sqrt{Var(\hat{\mu}_{A,n})} = \sqrt{Var(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i}{n})} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} Var(Y_i)}{n^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sigma^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{(n-1)\sigma^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n^2}}$

Analizzo $\hat{\mu}_{B,n}$:
$se(\hat{\mu}_{B,n}) = \sqrt{Var(\hat{\mu}_{B,n})} = \sqrt{Var(\frac{Y_1 + Y_n(n-1)}{n})} = \sqrt{\frac{Var(Y_1) + Var(Y_n)(n-1)}{n^2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2 + \sigma^2(n-1)}{n^2}} = \sqrt{\frac{n\sigma^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

Fornite una stima del loro errore standard.
Essendo σ noto,
$\hat{se}(\hat{\mu}_{A,n}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n^2}}$
$\hat{se}(\hat{\mu}_{B,n}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

Calcolate il loro errore quadratico medio.
$mse(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n - \theta]^2 = se(\hat{\theta}_n)^2 + bias(\hat{\theta}_n)^2$

$mse(\hat{\mu}_{A,n}) = (\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n^2}})^2 + (-\frac{\mu}{n})^2 = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n^2} + (\frac{\mu}{n})^2$

$mse(\hat{\mu}_{B,n}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n^2}}^2 + 0 = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n^2}$