B5

filippo

4 April 2018

Esercizio 5.

Sia Y una v.c. di Poisson di parametro λ. Sia dato un campione bernoulliano $(Y_1, ..., Y_n), n > 3$. Si considerino i seguenti stimatori di λ:

$T_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} Y_i}{n-1} + \frac{Y_n}{n-1}$
$T_2 = \frac{Y_1+(n-2)Y_n}{n-1}$

(a) Calcolare le distorsioni dei due stimatori proposti.

Ricordiamo che una v.c. di Poisson ha la seguente caratteristica:
$E(Y) = \lambda$

$bias(T_1) = E(T_1) - \lambda$
$E(T_1) = \frac{(n-2)E(Y)}{n-1} + \frac{E(Y)}{n-1} = \frac{(n-2)\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n-1} = \frac{(n-2)\lambda+\lambda}{n-1} = \frac{\lambda(1+n-2)}{n-1} = \frac{\lambda(n-1)}{n-1} = \lambda$
T_1 è quindi non distorto

$bias(T_2) = E(T_2) - \lambda$
$E(T_2) = \frac{E(Y)+(n-2)E(Y)}{n-1} = \frac{\lambda+(n-2)\lambda}{n-1}$
$= \frac{\lambda(1+n-2)}{n-1} = \frac{\lambda(n-1)}{n-1} = \lambda$ Anche T_2 è quindi non distorto

(b) Calcolare le varianze dei due stimatori.
Ricordiamo che una v.c. di Poisson ha la seguente caratteristica:
$Var(Y) = \lambda$

$Var(T_1) = Var(\frac{\sum_{i=1}^{n-2} Y_i}{n-1}) + Var(\frac{Y_n}{n-1})$
$= \frac{\sum_{i=1}^{n-2} Var(Y_i)}{(n-1)^2} + \frac{Var(Y_n)}{(n-1)^2}$
$= \frac{(n-2)Var(Y)}{(n-1)^2} + \frac{Var(Y)}{(n-1)^2} = \frac{(n-2)\lambda+\lambda}{(n-1)^2}$
$= \frac{\lambda(1+n-2)}{(n-1)^2} = \frac{\lambda(n-1)}{(n-1)^2}$
$= \frac{\lambda}{n-1}$

$Var(T_2) = \frac{Var(Y)+(n-2)^2 Var(Y)}{(n-1)^2} = \frac{\lambda+(n-2)^2\lambda}{(n-1)^2}$
$= \frac{\lambda(1+(n-2)^2)}{(n-1)^2} = \frac{\lambda(n^2-4n+5)}{n^2-2n+1}$

(c) Calcolare gli errori quadratici medi.
$Mse(Y) = Var(Y) + Bias(Y)^2$

Entrambi gli stimatori sono non distorti, quindi otterremo un Mse coincidente con la Varianza

$Mse(T_1) = Var(T_1) + Bias(T_1)^2 = \frac{\lambda}{n-1}$
$Mse(T_2) = Var(T_2) + Bias(T_2)^2 = \frac{\lambda(n^2-4n+5)}{n^2-2n+1}$

(d) Quale dei due stimatori risulta preferibile ?