# B3_4

*filippo*

*4 April 2018*

## Esercizio 3.

Siano $(Y_1, ..., Y_4)$, quattro v.c. di Bernoulli indipendenti con probabilità di successo $Pr(Y_i = 1) = \theta, 0 < \theta < 1$. Si considerino i seguenti stimatori di $\theta$:

$T_1 = \frac{2}{3}Y_1 + \frac{1}{3}Y_4$
$T_2 = 3Y_2 - 2Y_3$

**(a) Dite quale dei due stimatori risulta preferibile.**

Ricordiamo che $E(Bern(\theta)) = \theta$

$bias(T_1) = E(T_1) - \theta$ $E(T_1) = E(\frac{2}{3}Y_1 + \frac{1}{3}Y_4) = \frac{2}{3}E(Y_1) + \frac{1}{3}E(Y_4) = \frac{2}{3}\theta + \frac{1}{3}\theta = \theta(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}) = \theta$
Notiamo quindi che il primo stimatore non è distorto

$bias(T_2) = E(T_2) - \theta$
$E(T_2) = E(3Y_2 - 2Y_3) = 3E(Y_2) - 2E(Y_3) = 3\theta - 2\theta = \theta$
Notiamo che anche il secondo stimatore è non distorto

Procediamo al confronto tramite analisi degli errori:

Ricordiamo che $Var(Bern(\theta)) = \theta(1-\theta)$

$se(T_1) = \sqrt{Var(\frac{2}{3}Y_1 + \frac{1}{3}Y_4)} = \sqrt{\frac{2}{3}^2 Var(Y_1) + \frac{1}{3}^2 Var(Y_4)} = \sqrt{\frac{4}{9}\theta(1-\theta) + \frac{1}{9}\theta(1-\theta)} = \sqrt{\theta(1-\theta)(\frac{4}{9} + \frac{1}{9})} = \sqrt{\frac{5}{9}\theta(1-\theta)}$

$se(T_2) = \sqrt{Var(3Y_2 - 2Y_3)} = \sqrt{9\theta(1-\theta) + 4\theta(1-\theta)} = \sqrt{13\theta(1-\theta)}$

$T_1$ ha un errore standard minore

**(b) Mostrate che lo stimatore $T_3 = (2-a)T_1 + (a-1)T_2$ è non distorto per qualsiasi valore di a.**
$T_3 = (2-a)(\frac{2}{3}Y_1 + \frac{1}{3}Y_4) + (a-1)(3Y_2 - 2Y_3)$

$bias(T_3) = E(T_3) - \theta$
$E(T_3) = (2-a)(\frac{2}{3}E(Y_1) + \frac{1}{3}E(Y_4)) + (a-1)(3E(Y_2) - 2E(Y_3)) = (2-a)(\frac{2}{3}\theta + \frac{1}{3}\theta + (a-1)(3\theta - 2\theta)) = (2-a)(\theta) + (a-1)(\theta) = (\theta)(2-a+a-1) = \theta$

**(c) Trovate il valore di a che rende minima la varianza di questo stimatore.**
$Var(T_3) = \frac{4-a}{3}^2 Var(Y_1) + \frac{2-a}{3}^2 Var(Y_4) + (3a-3)^2 Var(Y_2) - (2a-2)^2 Var(Y_3)$
$Var(T_3) = \frac{4-a}{3}^2 \theta(1-\theta) + \frac{2-a}{3}^2 \theta(1-\theta) + (3a-3)^2\theta(1-\theta) + (2a-2)^2\theta(1-\theta)$

$Var(T_3) = \theta(1-\theta)(\frac{4-a}{3}^2 + \frac{2-a}{3}^2 + (3a-3)^2 + (2a-2)^2)$
$Var(T_3) = \theta(1-\theta)(\frac{16-8a+a^2}{9} + \frac{4-4a+a^2}{9} + (9a^2 - 18a + 9) + (4a^2 - 8a + 4))$
$Var(T_3) = \theta(1-\theta)(\frac{16-8a+a^2+4-4a+a^2}{9} + (9a^2 - 18a + 9) + (4a^2 - 8a + 4))$
$Var(T_3) = \theta(1-\theta)(\frac{2(a^2-6a+10)}{9} + 13(a^2 - 2a + 1))$

## Esercizio 4.

Riprendete l'esercizio precedente e fissate $n = 50, \mu = 4, \sigma = 1$. Nel seguito utilizzate R.

```r
n <- 50
mu <- 4
sigma <-1
```

**Simulate m = 1000 campioni di numerosità n. Ogni campione sarà denotato con** $(y_1^{(j)},...,y_n^{(j)})', 1 \leq j \leq m$

```r
m <- 1000

#sample(1,size=m,x=c(0,1),prob=c(1-mu,mu))
```

**Per ogni campione** $(y_1^{(j)},...,y_n^{(j)})'$ **calcolate le due stime**

**Calcolate le distorsioni ottenute in simulazione e confrontatele con quelle teoriche si commentino i risultati.**

**Si calcolino le varianze e lo scarto quadratico medio di e si commentino i risultati.**

**Si calcoli sulla base di una misura dell'errore quadratico medio e si commentino i risultati.**

**Riflettete sul ruolo di n e m. Cosa ottenete al variare dei due valori?**