B6

filippo

5 April 2018

Siano $Y_1, ..., Y_n$, n variabili casuali i.i.d. **normali** con valore atteso θ e varianza θ^2 e si considerino i seguenti stimatori di θ:

$T_1 = \frac{Y_1+(n-1)Y_n}{n}$

$T_2 = \frac{Y_1+...+Y_{n-1}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i}{n}$

(a) Dite quale dei due stimatori risulta preferibile secondo il criterio dell'errore quadratico medio.

$Mse(Y) = se(Y)^2 + Bias(Y)^2 = Var(Y) + Bias(Y)^2$

Ricordiamo che in una v.c. normale abbiamo la seguente caratteristica: $E(Y) = \theta$

$E(T_1) = \frac{E(Y)+(n-1)E(Y)}{n} = \frac{\theta+(n-1)\theta}{n} = \frac{n\theta}{n} = \theta$ Il primo stimatore sarà quindi non distorto

$E(T_2) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} E(Y)}{n} = \frac{(n-1)\theta}{n}$

$Bias(T_2) = \frac{(n-1)\theta}{n} - \theta = \frac{(n-1)\theta-n\theta}{n} = -\frac{\theta}{n}$

Ricordiamo che in una v.c. normale abbiamo la seguente caratteristica: $Var(Y) = \theta^2$

$Var(T_1) = \frac{Var(Y)+(n-1)^2Var(Y)}{n^2} = \frac{\theta^2+(n-1)^2\theta^2}{n^2} = \frac{\theta^2(1+(n-1)^2)}{n^2} = \frac{\theta^2(n^2-2n+2)}{n^2}$

$Var(T_2) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Var(Y)}{n^2} = \frac{(n-1)\theta^2}{n^2}$

$Var(T_1) > Var(T_2) = \frac{\theta^2(n^2-2n+2)}{n^2} > \frac{(n-1)\theta^2}{n^2}$

$Mse(T_1) = Var(T_1) = \frac{\theta^2(1+(n-1)^2)}{n^2} = \frac{\theta^2(n^2-2n+2)}{n^2}$

$Mse(T_2) = Var(T_2) + Bias(T_2)^2 = \frac{(n-1)\theta^2}{n^2} + (-\frac{\theta}{n})^2 = \frac{(n-1)\theta^2+\theta^2}{n^2} = \frac{n\theta^2}{n^2} = \frac{\theta^2}{n}$

Con n sufficientemente grande, $Mse(T_1) > Mse(T_2) = \frac{\theta^2(n^2-2n+2)}{n^2} > \frac{n\theta^2}{n^2}$. Risulta quindi che T_2 è più preciso.