

SIMULADOR NUMÉRICO BIDIMENSIONAL PARA ESCOAMENTO
MONOFÁSICO EM MEIOS POROSOS

BISMARCK GOMES SOUZA JÚNIOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
LABORATÓRIO DE ENGENHARIA E EXPLORAÇÃO DE PETRÓLEO

MACAÉ - RJ

MARÇO - 2013

SIMULADOR NUMÉRICO BIDIMENSIONAL PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM MEIOS POROSOS

BISMARCK GOMES SOUZA JÚNIOR

Monografia apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Engenheiro de Exploração e Produção de Petróleo.

Orientador: Prof. Carlos Enrique Pico Ortiz, Dr. Eng.

MACAÉ - RJ

MARÇO - 2013

SIMULADOR NUMÉRICO BIDIMENSIONAL PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO EM MEIOS POROSOS

BISMARCK GOMES SOUZA JÚNIOR

Monografia apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Engenheiro de Exploração e Produção de Petróleo.

Aprovada em 12 de março de 2013.

Comissão Examinadora:

Prof. Alvaro Marcello Marco Peres, Ph.D. - PETROBRAS

Prof. Nivaldo Silveira Ferreira, D.Sc. - LAMET/CCT/UENF

Prof. Carlos Enrique Pico Ortiz, Dr. Eng. - LENEP/CCT/UENF (Orientador)

Agradecimentos

Agradeço:

Primeiramente a Deus, por todas as graças alcançadas em minha vida e principalmente pela força, coragem, saúde e sabedoria que me dá a fim de alcançar meus objetivos.

Aos meus pais, Ana Maria Martins Souza e Bismarck Gomes Souza que contribuíram de todas as formas para o meu êxito, compreendendo minhas ausências, compartilhando meus ideais e incentivando-me a prosseguir, com um sorriso amigo, uma palavra de carinho, amor e dedicação.

À minha irmã, Bruna Gomes Souza, e à Walquíria Mazorque Matos por esforçarem-se ao máximo para compreender e ajudar nas correções deste trabalho e, principalmente, por estarem sempre ao meu lado.

Aos amigos e em especial ao Fernando Vizeu Santos por sanar as minhas dúvidas, em todas as suas formas, e ao Rony Fonseca Nunes da Silva por ceder *scripts* capazes de gerar uma tabela de propriedades para um fluido compressível.

Aos membros da banca, professores e funcionários do LNEP/CCT/UENF e principalmente ao meu orientador, Carlos E. Pico Ortiz, que esteve sempre disposto a me atender e ajudar nas dificuldades e desafios encontrados durante a realização deste trabalho.

Ao capítulo estudantil UENF-LNEP/SPE-Macaé por disponibilizar o acesso à um banco de dados, pelo qual foi possível obter grande parte da bibliografia deste trabalho.

Ao comitê gestor do PRH20-ANP-CTPETRO/LNEP/CCT/UENF, a Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis – ANP, a Financiadora de Estudos e Projetos – FINEP e ao Ministério da Ciência e Tecnologia – MCT pelo fornecimento de bolsa de estudos e taxa de bancada por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás – PRH-ANP/MCT.

Epígrafe

*"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota." (Madre Teresa de Calcutá)*

Sumário

Nomenclatura

Resumo

1	Introdução	1
1.1	Escopo do Problema	1
1.2	Objetivos	3
1.3	Organização do Documento	4
2	Simulação Numérica de Reservatórios	6
2.1	Histórico da Simulação de Reservatórios	6
2.2	Métodos de Modelagem de Reservatório	7
2.3	Desenvolvimento de um Simulador Numérico	10
2.4	Tipos de Simuladores de Reservatórios	11
2.5	Conjunto de Malhas	16
2.6	Tipos de Malhas	19
2.7	Tipos de Acoplamento Poço-reservatório	23
2.8	Uso de Simuladores Numéricos de Reservatório	26
3	Revisão de Conceitos de Engenharia de Reservatório	29
3.1	Equação da continuidade	29
3.2	Lei de Darcy	31
3.3	Propriedades Básicas dos Fluidos	32
3.4	Equações de estado	34

4 Formulação do Problema	39
4.1 Motivação para o tema	39
4.2 Descrição do Simulador	39
4.3 Etapas para o desenvolvimento do Simulador	41
5 Desenvolvimento do Simulador	51
5.1 Formulação	51
5.2 Discretização	52
5.3 Representação do Poço	56
5.4 Linearização	58
5.5 Solução	60
6 Verificação do Simulador	69
6.1 Simulações no Reservatório SPE A-1	69
6.2 Simulações com condição de contorno	79
7 Aplicação: Análise Comparativa da Pseudo-estocagem nos Modelos Para a Representação de Poços Verticais	90
7.1 Efeito da Estocagem em Teste de Pressão	90
7.2 Efeito da Pseudo-estocagem (Estocagem Numérica)	91
7.3 Análise Comparativa da Pseudo-estocagem	93
8 Considerações Finais	99
8.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros	100
Apêndice A - Problemas de Valores de Contorno	106
A.1 Equação Geral e Condição Inicial	106
A.2 Condição de Dirichlet	108
A.3 Condição de Neumann	108
A.4 Resolução dos Problemas de Contorno	108

Sumário

Apêndice B - Breve Manual do Simulador	118
B.1 Arquivos de Entrada	118
B.2 Arquivos de Saída	131
B.3 Sistema de Unidades e Fatores de conversão	134
B.4 Definições gerais	136
Apêndice C - Dados das Simulações Realizadas no Reservatório SPE A-1	137
C.1 Propriedades do Reservatório SPE A-1	137
C.2 Dados Para a Simulação com Fluido Incompressível	141
C.3 Dados Para a Simulação com Fluido Ligeiramente Compressível	142
C.4 Dados Para a Simulação com Fluido Compressível	143

Lista de Figuras

1	Esquema de evolução de alguns simuladores de código aberto.	2
2	Passos para o desenvolvimento de um simulador numérico de reservatório. Adaptado de Ertekin <i>et al.</i> (2001).	11
3	Modelos unidimensionais: (a) 1D horizontal, (b) 1D vertical, (c) 1D radial.	12
4	Modelos bidimensionais: (a) 2D horizontal, (b) 2D vertical, (c) 2D radial horizontal, (d) 2D radial vertical.	13
5	Modelos tridimensionais: (a) 3D cartesiano, (b) 3D cilíndrico, (c) 3D esférico.	14
6	Sistemas de coordenadas, e linhas de fluxo, nos modelos 3D: (a) retangular, (b) cilíndrico, (c) esférico. Adaptado de Ertekin <i>et al.</i> (2001).	15
7	Malhas: (a) cartesiana, (b) radial.	17
8	Em comparação com a Fig. 7, a figura acima ilustra uma malha refinada: (a) cartesiana, (b) radial.	17
9	Em comparação com a Fig. 7, a figura acima ilustra um bloco: (a) refinado, (b) localmente refinado.	18
10	Malhas híbridas. Um mesmo poço pode possuir diferentes malhas híbridas, em função do refinamento ao redor do poço: (a) menos refinadas, (b) mais refinadas.	18
11	Malhas de Voronoi: (a) localmente refinada, (b) cilíndrica, (c) curvilinear, (d) hexagonal, (e) híbrida-cartesiana, (f) híbrida-hexagonal. Adaptada de Palagi e Aziz (1994).	19
12	Esquematização das variáveis utilizadas para a definição dos tipos de malhas.	20
13	Método do bloco centrado.	20
14	Método do bloco distribuído.	21

Lista de Figuras

15	Método do bloco mediano.	21
16	Método do ponto distribuído.	22
17	Método do pseudo-ponto distribuído.	22
18	Método do ponto centrado.	22
19	Método do ponto mediano.	23
20	Etapas de um estudo de reservatório usando um simulador numérico. Adaptado de Rosa <i>et al.</i> (2006).	27
21	Volume de Controle para o fluxo 1D em coordenadas cartesianas. Adaptado de Ertekin <i>et al.</i> (2001).	29
22	Etapas para o desenvolvimento do simulador numérico de reservatório. Adaptada da Fig. 2.	42
23	Reservatório SPE A-1. Em destaque os blocos com poços, com o poço W-3 localizado no maior; e o W-2, no menor. Adaptado do livro texto (ERTEKIN <i>et al.</i> , 2001).	44
24	Visualização tridimensional do reservatório SPE A-1. Fonte: livro texto (ERTEKIN <i>et al.</i> , 2001).	44
25	Representação a malha dos cinco pontos (<i>five spot</i>) na malha de injeção em linhas diretas. Fonte: Muskat (1982).	48
26	Discretização no espaço da EDH para escoamento unidimensional. . .	52
27	Escoamento monofásico entre duas células, desconsiderando efeitos gravitacionais.	59
28	Sistema de equações para o cálculo das pressões em um fluxo unidimensional. Adaptado de Ertekin <i>et al.</i> (2001).	61
29	Processo iterativo para o cálculo da distribuição de pressão no tempo t_{n+1} a partir da distribuição de pressão no tempo t_n	62
30	Reservatório discretizado em duas dimensões e selado nas fronteiras. .	63
31	Direção, sentido e transmissibilidades do reservatório da Fig. 30. Adaptado de Ertekin <i>et al.</i> (2001).	63
32	Reservatório com condição de contorno periódica: (a) exemplificação, (b) blocos numerados.	64

Lista de Figuras

33	Ilustração da condição de contorno de Dirichlet para um fluxo unidirecional pela face a esquerda (W)	65
34	Reservatório discretizado em duas dimensões com condição de contorno de Dirichlet em toda a fronteira a esquerda e selado nas outras.	66
35	Ilustração da condição de contorno de Neumann para um fluxo unidirecional pela face a esquerda (W)	67
36	Reservatório discretizado em duas dimensões com condição de contorno de Neumann em toda a fronteira a esquerda e selado nas outras.	68
37	Diferença relativa entre os resultados de Ertekin <i>et al.</i> (2001) e o presente trabalho, para um escoamento incompressível.	70
38	Comparação do comportamento da pressão nos blocos que contém os poços produtores para um escoamento ligeiramente compressível.	71
39	Comparação do comportamento da pressão nos poços produtores para um escoamento ligeiramente compressível.	71
40	Comparação do comportamento da vazão nos poços produtores para um escoamento ligeiramente compressível.	72
41	Comparação do comportamento da produção acumulada para um escoamento ligeiramente compressível.	72
42	Diferença relativa percentual para alguns dos resultados da simulação do escoamento ligeiramente compressível utilizando o modelo de poço de Peaceman (1990).	73
43	Diferença relativa percentual para alguns dos resultados da simulação do escoamento ligeiramente compressível utilizando o modelo de poço de Ding <i>et al.</i> (1998).	74
44	Diferença relativa entre os resultados de Ertekin <i>et al.</i> (2001) e o presente trabalho, para um escoamento compressível: (a) após 5 dias de simulação, (b) após 100 dias de simulação.	75
45	Comparação do comportamento da pressão nos blocos que contém os poços produtores para um escoamento de um fluido compressível.	76

Lista de Figuras

46	Comparação do comportamento da pressão nos poços produtores para um escoamento de um fluido compressível.	76
47	Comparação do comportamento da vazão nos poços produtores para um escoamento de um fluido compressível.	77
48	Comparação do comportamento da produção acumulada para um escoamento de um fluido compressível.	77
49	Diferença relativa percentual para alguns dos resultados da simulação do escoamento compressível.	78
50	Diferença relativa percentual para alguns dos resultados da simulação do escoamento compressível utilizando o modelo de poço de Ding <i>et al.</i> (1998).	79
51	Parte da malha infinita dos cinco pontos, destacando-se o padrão: (a) com repetição, (b) com as dimensões do padrão, sendo d o número de blocos entre os poços e $2d + 2$ o número de blocos no comprimento horizontal.	80
52	Distribuição da pressão para a simulação da malha dos cinco pontos: (a) regime transitório, (b) regime permanente.	81
53	Diferença relativa percentual para a simulação da malha dos cinco pontos em regime permanente.	82
54	Distribuição de pressão para a simulação com condição de contorno de Dirichlet: (a) inicial, (b) após 0,4 dia.	83
55	Análise de pressão em alguns pontos do reservatório para a simulação da condição de contorno de Dirichlet com passo de tempo de 0,05 dia.	84
56	Diferença percentual absoluta máxima entre a solução analítica e a simulação numérica.	84
57	Análise da ordem da diferença com relação ao passo de tempo entre a solução analítica e a solução numérica na simulação da condição de contorno de Dirichlet.	85
58	Distribuição de pressão para a simulação com condição de contorno de Neumann: (a) inicial, (b) após 0,3 dia.	87
59	Análise de pressão em alguns pontos do reservatório para a simulação da condição de contorno de Neumann com passo de tempo de 0,05 dia.	88

Lista de Figuras

60	Diferença percentual absoluta máxima entre a solução analítica e a simulação numérica.	88
61	Análise da ordem da diferença com relação ao passo de tempo entre a solução analítica e a solução numérica na simulação da condição de contorno de Dirichlet.	89
62	Curvas tipo da pressão pressão adimensional e da derivada de Bourdet para um poço com estocagem e fator de película em função do tempo adimensional, t_D/C_D . No gráfico S é o fato de película e C_D é o coeficiente de estocagem adimensional. Fonte: Bourdet (2002).	91
63	Análise do comportamento da pressão em um poço nos períodos iniciais de produção. A linha em azul representa a solução da linha fonte (solução analítica) e os pontos verdes, a solução numérica.	92
64	Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do fator de película.	94
65	Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do modelo de poço.	95
66	Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do raio equivalente no modelo de poço de Ding <i>et al.</i> (1998).	96
67	Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do passo de tempo na escala logarítmica.	97
68	Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do espaçamento da malha do reservatório.	98
69	Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função da forma dos blocos.	98
70	Exemplo de organização dos arquivos. Nome do projeto: fiveSpot. . . .	119
71	Direção, sentido e orientação para construção da malha cartesiana. Adaptado de Ertekin <i>et al.</i> (2001).	136
72	Comprimento dos blocos, em ft, do reservatório SPE A-1, tal que Δ_x está representado a cima da figura e Δ_y , ao lado.	137
73	Profundidade do topo dos blocos, em ft, do reservatório SPE A-1. Fonte: Ertekin <i>et al.</i> (2001).	138

Lista de Figuras

74	Espessura dos blocos, em ft, do reservatório SPE A-1. Fonte: Ertekin <i>et al.</i> (2001).	138
75	Porosidade dos blocos do reservatório SPE A-1. Fonte: Ertekin <i>et al.</i> (2001).	139
76	Gráfico da distribuição da porosidade no reservatório SPE A-1.	139
77	Gráfico da distribuição da permeabilidade, em mD, do reservatório SPE A-1 na direção <i>x</i>	140
78	Gráfico da distribuição da permeabilidade, em mD, do reservatório SPE A-1 na direção <i>y</i>	140
79	Permeabilidade dos blocos, em mD, do reservatório SPE A-1 na direção <i>x</i> . Fonte: Ertekin <i>et al.</i> (2001).	141
80	Distribuição de pressão, em psia, no regime permanente para o caso do escoamento incompressível no reservatório SPE A-1. Adaptado de: Ertekin <i>et al.</i> (2001).	142
81	Distribuição de pressão, em psia, para o caso do escoamento compressível no reservatório SPE A-1 após 5 dias de produção. Adaptado de Ertekin <i>et al.</i> (2001).	145
82	Distribuição de pressão, em psia, para o caso do escoamento compressível no reservatório SPE A-1 após 100 dias de produção. Adaptado de Ertekin <i>et al.</i> (2001).	146

Listas de Tabelas

1	Etapas do desenvolvimento de um estudo de reservatório.	28
2	Fator volume-formação, viscosidade e peso específico do fluido compressível em função da pressão.	46
3	Dados utilizados na simulação da malha dos cinco pontos.	80
4	Informações dos poços produtores e injetores utilizados na simulação da malha dos cinco pontos.	82
5	Dados utilizados na simulação do reservatório com condições de contorno de Dirichlet.	85
6	Propriedades do reservatório para a pseudo-estocagem.	93
7	Propriedades do poço para a pseudo-estocagem.	93
8	Variáveis utilizadas na equação de fluxo e na Lei de Darcy.	135
9	Informações dos poços W-2 e W-3 para a simulação do fluido incompressível.	141
10	Propriedades do fluido ligeiramente compressível.	143
11	Viscosidade do fluido ligeiramente compressível.	143
12	Informações dos poços W-2 e W-3 para a simulação do fluido ligeiramente compressível.	143
13	Propriedades do fluido compressível.	144
14	Viscosidade do fluido compressível.	144
15	Informações dos poços W-2 e W-3 para a simulação do fluido compressível.	144

Nomenclatura

A nomenclatura está dividida em: alfabeto latino, alfabeto grego, sub-índices, super-índices e acrônimos, sendo apresentada em ordem alfabética.

Alfabeto Latino

<i>A</i>	Área transversal [ft ²]
<i>B</i>	Fator volume-formação [RB/STB]
<i>c</i>	Compressibilidade [psi ⁻¹]
<i>Ei</i>	Função exponencial integral
<i>G</i>	Parte constante da transmissibilidade
<i>h</i>	Comprimento da seção aberta ao fluxo poço-formação [ft]
<i>J</i>	Índice de produtividade/injetividade
<i>k</i>	Permeabilidade [mD]
<i>L</i>	Comprimento [ft]
<i>m</i>	Massa [lbm]
<i>n_x</i>	Número de blocos na direção <i>x</i>
<i>p</i>	Pressão no bloco [psia]
<i>q</i>	Vazão [STB/D]
<i>r</i>	Raio (distância de um ponto no reservatório até o centro do poço)
<i>s</i>	Fator de película (<i>skin</i>)
<i>S</i>	Discretização
<i>t</i>	Tempo [dia]
<i>T</i>	Transmissibilidade
<i>V_b</i>	Volume do bloco [ft ³]
<i>Z</i>	Profundidade [ft]

Alfabeto Grego

α_c	Fator de conversão volumétrico
β_c	Fator de conversão da transmissibilidade
γ	Peso específico [psi/ft]
θ	Ângulo [rad]
Φ	Potencial do fluido [psia]
μ	Viscosidade [cp]
ρ	Massa específica [lbm/ft ³]
ϕ	Porosidade

Sub-índices

D	Adimensional
ef	Efetiva
eq	Equivalente
f	Fluido
i	Índice do bloco na direção x
j	Índice do bloco na direção y
sc	Condições padrões
t	Tempo, total
w	Poço
wf	Fundo do poço
x	Direção x
y	Direção y

Super-índices

(n)	Iteração no tempo
(ν)	Iteração para a convergência de um passo de tempo

Acrônimos

BOAST	<i>Black Oil Applied Simulation Tool</i>
BTCS	<i>Backward-time, central-space</i>
EBM	Equação de balanço de materiais
EDH	Equação da Difusividade Hidráulica
LSU	<i>Louisiana State University</i>
MASTER	<i>Miscible Applied Simulation Techniques for Energy Recovery</i>
RB	<i>Reservoir Barrel</i>
SI	Sistema Internacional
SPE	<i>Society of Petroleum Engineers</i>
STB	<i>Stock Tank Barrel</i>
UMFPACK	<i>Unsymmetric Multifrontal sparse LU Factorization Package</i>

*SIMULADOR NUMÉRICO BIDIMENSIONAL PARA ESCOAMENTO MONOFÁSICO
EM MEIOS POROSOS*

Resumo

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de um programa que simula o escoamento monofásico de fluidos compressíveis e ligeiramente compressíveis num meio poroso, em duas dimensões e em coordenadas cartesianas. Utilizando o método das diferenças finitas, ele é capaz de simular uma geometria arbitrária bidimensional, levando-se em consideração a profundidade de cada bloco, e as condições de contorno (pressão prescrita, gradiente de pressão prescrito e periódicas). Com relação ao acoplamento poço-reservatório, existem dois possíveis modelos de poços: Peaceman (1983) ou Ding e Renard (1994). Aplica-se no domínio teórico e prático de todos os aspectos físicos, matemáticos, numéricos e computacionais, podendo ser utilizado em análise de curvas de declínio de produção, balanço de materiais, avaliação de formações, hidrodinâmica dos meios porosos e fraturados, análise de teste de pressão em poços, gerenciamento de reservatórios e ajuste de histórico. Além disso, sua aplicabilidade tem por finalidade simular vários problemas importantes na engenharia de reservatórios, como a malha dos cinco pontos, e comparar os resultados obtidos com a solução analítica da equação da difusividade hidráulica com diferentes condições de contorno. O simulador poderá ser utilizado tanto como auxílio pedagógico quanto para pesquisas de iniciação científica.

Palavras chave: simulação numérica de reservatórios.

1 *Introdução*

A simulação numérica do escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo, comumente chamada de simulação de reservatórios, tem sido praticada desde o início da engenharia de petróleo na década de 1930. Porém o termo “simulação” tornou-se comum apenas na década de 1960 (COATS, 1982).

Neste contexto, entende-se por simulação o uso de cálculos para prever o comportamento de um reservatório de petróleo, a fim de avaliar possíveis estratégias para otimizar os processos de produção. Nessas estratégias incluem-se os métodos de recuperação secundária e avançada e a escolha otimizada das configurações dos poços.

Na simulação utilizam-se modelos físicos e matemáticos baseados tanto na geologia, na geometria, nas propriedades petrofísicas, nos processos de acumulação, na profundidade do reservatório quanto nas propriedades dos fluidos. Assim, quanto mais precisas essas informações, melhores serão as previsões.

A simulação de reservatório pode predizer o desempenho do mesmo, sob diferentes processos de produção de petróleo. Sendo, portanto, um instrumento fundamental na avaliação e desenvolvimento de campos de petróleo existentes e recém-descobertos.

1.1 Escopo do Problema

Antes de se iniciar uma simulação deve-se criar um modelo do reservatório. Para tal, é preciso adotar uma malha e um sistema de coordenadas que melhor o represente, em função da geologia e da geofísica. Essa malha é composta por um conjunto de blocos e, para cada um deles, considera-se que as propriedades da rocha distribuem-se uniformemente em seu interior.

Devido a essa consideração da distribuição uniforme, pode-se dizer que a mode-

lagem de um poço no simulador de reservatório é uma tarefa que exige algumas aproximações. Isso porque a pressão no fundo do poço não é igual à pressão no bloco que o contém, e a primeira influencia diretamente a última. A essa relação dá-se o nome de acoplamento poço-reservatório. Além disso, as propriedades do reservatório e as do fluido que o contém são dependentes da pressão. Isto posto, é conveniente representar um reservatório em função da sua pressão, em cada intervalo de tempo. Com as informações resultantes da simulação é possível fazer: análise de curvas de declínio de produção, de balanço de materiais, avaliação de formações, análise da hidrodinâmica do meio poroso e fraturado e ajuste de histórico.

Um dos precursores dos simuladores de reservatório com código aberto é o BOAST (*Black Oil Applied Simulation Tool*), um simulador tridimensional trifásico, escrito na linguagem de programação *Fortran*, que foi publicado pelo Departamento de Energia dos Estados Unidos em 1982 (FANCHI *et al.*, 1982).

Outros simuladores de código aberto, baseados no BOAST, foram desenvolvidos como o BOAST II (FANCHI *et al.*, 1987), BOAST 3 (LSU, 1997), BOAST98 (HEEMSTRA; WEST, 1998), MASTER (*Miscible Applied Simulation Techniques for Energy Recovery*) (AMMER *et al.*, 1991) e MASTER 3 (ZENG *et al.*, 2005). Um esquema da evolução desses simuladores pode ser visto na Fig. 1.

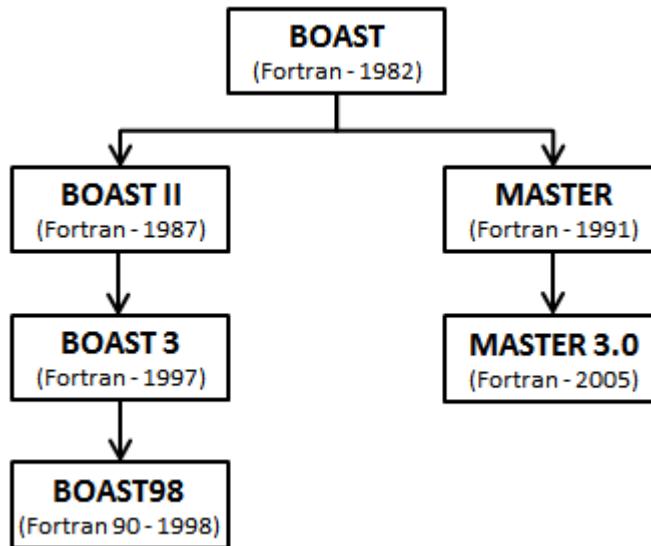


Figura 1: Esquema de evolução de alguns simuladores de código aberto.

Existem também alguns simuladores baseados no BOAST de código fechado como o BOAST4D (FANCHI, 2001) e IFLO (FANCHI, 2000; FANCHI, 2006). O BOAST4D é uma versão simplificada e melhorada do BOAST II. Já o IFLO é uma versão modificada do MASTER e utiliza alguns algoritmos do BOAST, BOAST II e BOAST4D.

Outro simulador de código aberto é o MPSFFA (*Multi-Purpose Simulator For Field Applications*) que teve o seu código escrito em FORTRAN 95 (ISLAM *et al.*, 2010). O MPSFFA é bem documentado, porém seu código é de difícil compreensão.

Apesar do BOAST ter o seu código aberto, ou seja, passível de estudo e modificações, o mesmo não possui documentação apropriada. Tanto o código quanto os arquivos de entrada não estão escritos de uma forma comprehensível. Assim, sua compreensão e modificação, para novas aplicações, fica prejudicada.

Os outros simuladores, já citados, baseados no BOAST, apresentam as mesmas características. Assim, nota-se a dificuldade de se encontrar um simulador numérico de reservatório de código aberto e de fácil modificação.

Portanto, o objetivo do presente trabalho é o desenvolvimento de um simulador robusto, de código aberto e que seja passível de alterações. Ele tem como ponto de partida um simulador utilizado nas aulas de Simulação de Reservatórios do curso de pós-graduação do Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo (LENEP) da Universidade Estadual do Norte Fluminense (UENF) (PICO, 2010).

Este último apresenta um código simples e legível, com uma interface de entrada e saída, simples, no modo texto. Possibilita o uso de coordenadas cartesianas, com condições de fronteira selada e periódicas. Dessa forma, é possível a simulação de configurações simétricas e padrões de repetição como malhas de injeções/produção.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é desenvolver um programa que simule o escoamento monofásico bidimensional de fluidos compressíveis e ligeiramente compressíveis num meio poroso. Esse deve ser capaz de modelar as condições a quais um reservatório de petróleo possa estar sujeito. O mesmo deve fundamentar-se em uma equação diferencial que represente o escoamento no reservatório, baseando-se não só em sua geometria, geologia, profundidade e nas suas propriedades petrofísicas, como também nas propriedades do fluido.

Essa equação é conhecida como equação da difusividade hidráulica (EDH) e, como parte dos objetivos do trabalho, deverá ser modelada e discretizada para o sistema de coordenadas cartesianas.

Para o cálculo das condições iniciais deve-se utilizar o equilíbrio hidrostático, o qual leva em consideração as pressões hidrostáticas a qual o reservatório está submetido.

Já as condições de contorno internas estão relacionadas com o acoplamento poço-reservatório.

As condições de contorno externas devem ser de três tipos: periódicas, de Dirichlet (pressão prescrita) e de Neumann (gradiente de pressão prescrito). Assim, com as condições de contorno periódicas será possível simular padrões de repetição; com as outras, simular a presença de um aquífero no limite externo do reservatório. Também será possível realizar simulações de padrões simétricos utilizando-se um caso específico da condição de Neumann no qual a derivada da pressão é nula na linha de simetria.

O simulador, acima de tudo, deve ter tanto o seu código - aberto - como o modo de entrada e saída de dados bem documentados e de fácil compreensão. Dessa forma, ele poderá ser utilizado tanto de forma pedagógica quanto adaptado ou modificado para pesquisa.

Para facilitar o processo de desenvolvimento, a documentação e a unificação da nomenclatura, foi escolhido o procedimento de solução apresentado no livro texto (ERTEKIN *et al.*, 2001) como base para o desenvolvimento do simulador, priorizando uma implementação compreensível à eficiente.

Além disso, como um exemplo de aplicabilidade de um simulador de reservatórios será realizada uma análise comparativa do efeito da pseudo-estocagem para um reservatório infinito para um fluido ligeiramente compressível em função do fator de película, do modelo de poço, do passo de tempo, do espaçamento da malha e da forma da malha.

1.3 Organização do Documento

No Capítulo 2, “Simulação Numérica de Reservatórios”, apresenta-se um histórico da simulação de reservatório, os métodos de modelagem existente e uma classificação dos tipos de simuladores existentes em função do tratamento matemático, número de dimensões, número de fases, sistemas de coordenadas e tipos de malhas. Além disso, são discutidos alguns modelos de acoplamento poço-reservatório que foram utilizados no simulador.

No Capítulo 3, “Revisão de Conceitos da Engenharia de Reservatórios”, são apresentados conceitos indispensáveis para as deduções realizadas, como a lei de conservação da massa, equação de estado e lei de Darcy.

No Capítulo 4, “Formulação do Problema”, apresentam-se as motivações para o tema, as hipóteses, as funções/equações/simulações utilizadas para verificar a implementação do simulador e as simulações que serão realizadas a fim de ilustrar uma das aplicações de um simulador.

No Capítulo 5, “Desenvolvimento do Simulador”, formula-se, discretiza-se, lineariza-se e soluciona-se a equação da difusividade hidráulica em coordenadas cartesianas.

No Capítulo 6, “Verificação do Simulador”, verificam-se as implementações em função do tipo de fluido, da condição de produção dos poços e das condições de contorno externas (periódicas, de Dirichlet e de Neumann).

No Capítulo 7, “Aplicação: Análise Comparativa da Pseudo-estocagem nos Modelos Para a Representação de Poços Verticais”, apresenta-se uma aplicação do simulador: a análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do fator de pelicular, do modelo de poço, do passo de tempo, do espaçamento da malha e da forma dos blocos.

No Capítulo 8, “Considerações Finais”, apresenta-se o resumo do desenvolvimento do simulador e as conclusões das análises da pseudo-estocagem. Além disso, sugere-se, como trabalhos futuros, implementações que podem ser realizadas a fim de expandir a aplicabilidade do simulador.

No apêndice A, “Problemas de Valores de Contorno”, apresentam-se soluções analíticas para dois problemas de valores de contorno que foram utilizados para validar o simulador: Dirichlet e Neumann.

No apêndice B, “Breve Manual do Simulador”, apresenta-se, detalhadamente, os arquivos de entrada e saída do simulador, uma tabela de conversão de unidades e algumas definições como as orientações e posicionamento dos blocos.

No apêndice C, “Dados das Simulações Realizadas no Reservatório SPE A-1”, apresentam-se as propriedades do reservatório SPE A-1 e as propriedades dos fluidos e as condições de produção para cada uma das simulações realizadas nesse reservatório.

2 *Simulação Numérica de Reservatórios*

2.1 Histórico da Simulação de Reservatórios

A simulação de reservatório é, simplesmente, o uso de cálculos para prever o comportamento de uma jazida petrolífera. Ela tem sido praticada desde o início da engenharia de petróleo na década de 1930. No final da década de 1940, seu potencial foi reconhecido e muitas companhias começaram a desenvolver tanto modelos análogos quanto modelos numéricos. Esse desenvolvimento teve o objetivo de melhorar os cálculos das soluções analíticas da EDH, balanço de materiais e da solução de Buckley-Leverett ao problema do deslocamento imiscível unidimensional (BREITENBACH, 1991).

No final da década de 1950, surgiram programas de computadores para as simulações cujos resultados eram grosseiros, porém úteis. Esses programas utilizavam um conjunto de equações de diferenças finitas para descrever o fluxo multifásico, transiente 2D e 3D para um meio poroso heterogêneo (BREITENBACH, 1991).

Durante a década de 1960, as simulações eram dedicadas a problemas bifásicos (gás/água) e trifásicos (*black oil*). Os métodos de recuperação limitaram-se a depleção ou manutenção da pressão. Nesse período, foi possível desenvolver um modelo de simulador único capaz de responder as maiorias dos problemas encontrados (COATS, 1982).

Ainda, segundo Coats (1982), no decorrer da década de 1970 houve uma melhora nos processos de recuperação avançada. Dessa forma a simulação foi levada a novos processos que se estendem desde a depleção convencional e manutenção da pressão à recuperação por métodos miscíveis, injeção de polímeros, de gás carbônico, de água quente, de vapor e combustão *in situ*.

As aplicações da simulação de reservatório continuaram crescendo na década de

1980. A tecnologia para modelos de reservatório naturalmente fraturados, incluindo efeitos compostionais, também foi desenvolvida, com extensões em simulações de fraturamento hidráulico e poços horizontais e aplicações em processos complexos de monitoramento de reservatório (BREITENBACH, 1991).

De acordo com Breitenbach (1991), no começo da década de 1980 as aplicações primárias de simulação de reservatório eram realizadas em computadores robustos (*mainframe*) e, no final da década, em computadores de escritório (*desktop*). Isso mostra que o avanço da tecnologia de computadores facilitou a popularização das simulações numéricas de reservatório.

Com relação à resolução do reservatório, Dogru (2011) afirma que nas décadas de 1990, 2000 e 2010 o número médio de blocos utilizados eram de aproximadamente 63 mil (*kilo-cell*), 1 milhão (*mega-cell*) e 1 bilhão (*giga-cell*), respectivamente. Além disso, alega que até a década de 2000 a média do tamanho de um bloco variou de 1 km a 0.25km com um número vertical de camadas variando de 10 a 15. Já após a década de 2000, com a simulação paralela, esse tamanho era menor que 0.25 km, podendo atingir 80m, com um número médio de 100 camadas verticais.

2.2 Métodos de Modelagem de Reservatório

Existem três tipos de métodos que são utilizados para prever o comportamento de um reservatório de petróleo: o método análogo, o método experimental e o método matemático.

2.2.1 Método Análogo

O método análogo tem como objetivo prever o comportamento de um reservatório utilizando propriedades de um reservatório maduro análogo (geologicamente ou petrofisicamente) ao mesmo. Ele é utilizado quando a quantidade de informações disponíveis sobre o reservatório é limitada ou mesmo inexistente (CHEN, 2007; ERTEKIN *et al.*, 2001; ISLAM *et al.*, 2010).

Nesse método, reservatórios com propriedades petrofísicas similares ou situados numa mesma bacia geológica, ou próximos, são usados para prever o comportamento do reservatório alvo. Ele pode ser usado para estimar fatores de recuperação, vazões iniciais de produção, declínio de produção, espaçamento entre os poços e mecanismos de recuperação (ERTEKIN *et al.*, 2001).

2.2.2 Método Experimental

Os métodos experimentais baseiam-se em medidas de propriedades físicas em modelos de laboratório para estimar as propriedades de um reservatório. Esses modelos podem ser de dois tipos: análogos ou físicos.

2.2.2.1 Modelo Análogo

Os modelos análogos utilizam similaridades entre o escoamento de fluido no meio poroso e outros fenômenos físicos para simular o comportamento do reservatório. Dentre esses fenômenos podemos citar: o fluxo de calor por condução, o fluxo elétrico num circuito e o fluxo através de placas paralelas (ERTEKIN *et al.*, 2001).

2.2.2.2 Modelo Físico

Os modelos físicos são utilizados para fazer medidas diretas das propriedades do escoamento no meio poroso. Eles podem ser de dois tipos: modelo em escala e modelo elementar (AZIZ; SETTARI, 1979).

No modelo elementar, os experimentos são realizados com rochas e fluidos reais (ou simulados). Esses resultados não podem ser aplicados diretamente no campo, mas podem responder algumas questões básicas sobre seus mecanismos de produção (AZIZ; SETTARI, 1979).

No modelo em escala, a geometria, espessura, porosidade e permeabilidade do modelo e as propriedades dos fluidos do reservatório são dimensionadas ao modelo. Porém, é impossível dimensionar todas as características físicas do reservatório, logo o uso de modelos realmente dimensionados é limitado (ERTEKIN *et al.*, 2001).

2.2.3 Método Matemático

O método matemático visa prever o comportamento de um reservatório utilizando equações matemáticas. Esse método inclui métodos de balanço de materiais, de curvas de declínio, métodos estatísticos, analíticos e numéricos.

2.2.3.1 Método de Balanço de Materiais

Esse método utiliza a equação de balanço dos materiais (EBM), ou modelo de tanque, que é uma representação matemática de um reservatório ou de um volume drenado.

O princípio básico desse modelo é a conservação da massa, o qual diz que a quantidade de materiais (água, óleo ou gás) remanescente no reservatório após um período de tempo é igual à quantidade de material originalmente presente, menos a quantidade removida, devido a produção, mais a quantidade adicionada, devido a injeção ou invasão (CHEN, 2007).

2.2.3.2 Método de Curvas de Declínio de Produção

Este método descreve o declínio da vazão de produção usando um dos três tipos de declínios matemáticos: exponencial, hiperbólico e harmônico.

O método de curvas de declínio resume-se a seguinte equação:

$$Cq^b = -\frac{1}{q} \frac{dq}{dt},$$

tal que q é a vazão, t é o tempo e C é um parâmetro do declínio da vazão. Os casos $b = 0$, $0 < b < 1$ e $b = 1$ correspondem, respectivamente, aos declínios exponencial, hiperbólico e harmônico. Os valores de C e b podem ser determinados após um ajuste de histórico (CHEN, 2007).

Para o uso de tal método, duas condições devem ser satisfeitas. A primeira é que os processos do passado continuarão ocorrendo no futuro, e a segunda, que as práticas de operação não se alterarão (ISLAM *et al.*, 2010).

2.2.3.3 Métodos Estatísticos

O método estatístico aplica correlações empíricas que são estatisticamente obtidas usando o histórico de alguns reservatórios para prever o comportamento de outros. Esse método é a generalização do método análogo (CHEN, 2007).

Ainda segundo Chen (2007), uma correlação é realizada com dados de um reservatório maduro em uma mesma região, com as mesmas condições litológicas e mecanismos de produção. Para que tal correlação possa ser usada com confiança, as

propriedades do reservatório devem estar dentro dos limites do banco de dados.

2.2.3.4 Métodos Analíticos

Os métodos analíticos são soluções exatas de modelos teóricos. Esses modelos consistem em equações diferenciais que descrevem o escoamento de fluidos no reservatório, considerando tanto as condições de contorno como as iniciais (CHEN, 2007).

Para resolver essas equações exatamente, simplificações devem ser feitas para reduzir a complexidade do modelo. Em geral, essas considerações são muito restritivas, ao ponto de serem impraticáveis. Porém, se os princípios físicos e as condições forem satisfeitas, a solução ainda será válida. Além disso, esse método pode ser usado para validar simuladores de reservatório.

2.2.3.5 Métodos Numéricos

Os métodos numéricos baseiam-se em discretizações de equações matemáticas que governam o fluxo no reservatório. Essas discretizações possibilitam analisar o comportamento do escoamento em meios porosos mais complexos. Para solucionar essas equações, utiliza-se um simulador numérico de reservatório.

2.3 Desenvolvimento de um Simulador Numérico

Segundo Islam *et al.* (2010), o desenvolvimento de um simulador numérico de reservatório requer uma série de processos tais como: formulação, discretização, representação do poço, linearização, solução, validação e aplicação. A Fig. 2 esquematiza esses processos.

No processo de *formulação*, as premissas básicas inerentes ao simulador, incluindo os processos de recuperação, são representadas em termos matemáticos e são aplicadas para um volume de controle no reservatório. O resultado desse processo é um conjunto de equações diferenciais parciais (*EDP's*) *não lineares* que se relacionam e descrevem o fluxo do fluido no meio poroso.

Essas *EDP's* são convertidas em equações algébricas no processo de *discretização*. Vários métodos numéricos podem ser utilizados para discretizar as equações de fluxo do fluido, porém a aproximação mais utilizada é o método das diferenças fini-

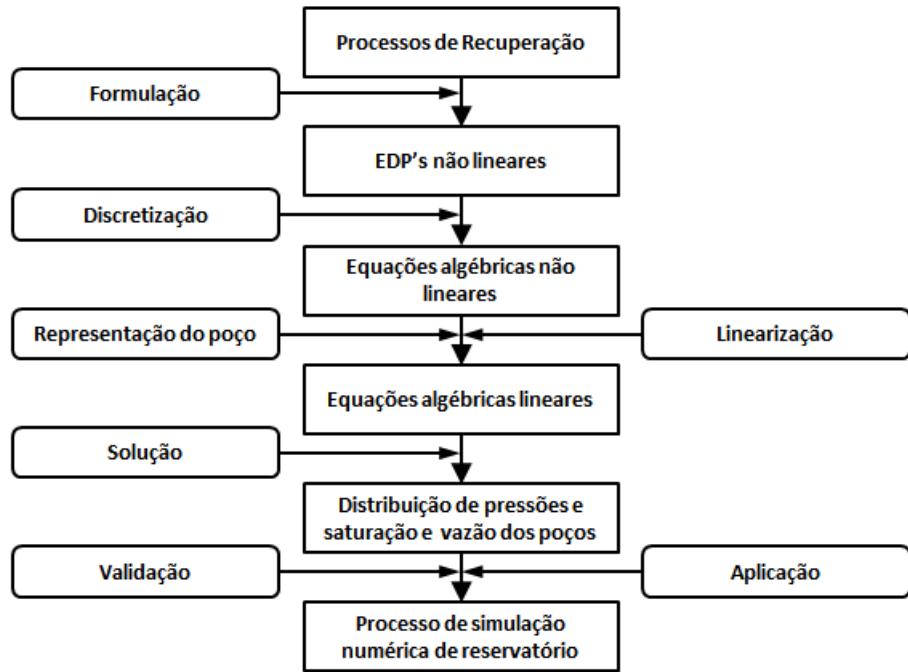


Figura 2: Passos para o desenvolvimento de um simulador numérico de reservatório. Adaptado de Ertekin *et al.* (2001).

tas. O processo de discretização resulta em um sistema de *equações algébricas não lineares*.

A essas equações é adicionada a *representação do poço* a fim de incorporar a produção/injeção de fluido. Em seguida, elas precisam ser linearizadas (colocadas em forma de equações lineares) antes de se obter as soluções. Esse processo é conhecido como *linearização* e envolve a aproximação de termos não lineares presentes nas propriedades dos fluidos. O processo de linearização resulta em um conjunto de *equações algébricas lineares*.

A *solução* pode ser obtida utilizando-se qualquer um dos métodos de solução de equações algébricas lineares. Através desta solução é possível determinar as distribuições de pressão e saturação de fluidos no reservatório e as vazões dos poços. Finalmente, é feita uma *validação* do simulador de reservatório. Depois disso o simulador pode ser utilizado para *aplicações* práticas no campo.

2.4 Tipos de Simuladores de Reservatórios

Os simuladores de reservatório podem ser classificados em função do número de dimensões, do sistema de coordenadas usado no modelo, do número de fases do

sistema e do tratamento matemático.

2.4.1 Classificação Pelo Número de Dimensões

Com relação ao número de dimensões, um simulador de reservatório pode ser modelado de quatro formas: de dimensão zero (modelos tanque), unidimensionais (1D), bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D).

2.4.1.1 Dimensão Zero ou Modelo Tanque

O modelo tanque não é capaz de distinguir a direção do fluxo, porém representa o reservatório em função de sua energia. Dessa forma, é possível determinar a distribuição inicial do fluido no reservatório, predizer a produção do campo, estimar o influxo de água e avaliar as saturações e pressões médias do meio poroso (CHEN, 2007).

2.4.1.2 Unidimensional

Os simuladores numéricos unidimensionais são aqueles que admitem fluxo apenas em uma direção e os mais usuais são os horizontais, verticais e radiais, conforme a Fig. 3 (MATTAX; DALTON, 1990).

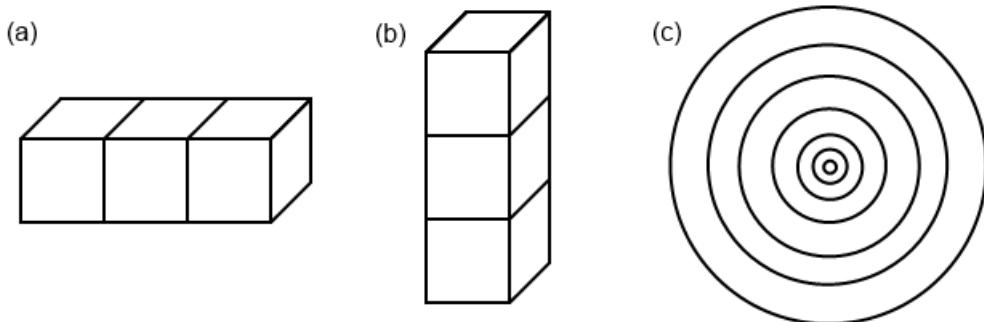


Figura 3: Modelos unidimensionais: (a) 1D horizontal, (b) 1D vertical, (c) 1D radial.

Os modelos unidimensionais são úteis para avaliar a influência da heterogeneidade em uma direção de fluxo. Os modelos 1D horizontais são muito utilizados em análise de fluxos em testemunhos (Fig. 3-a). Modelos 1D verticais (Fig. 3-b) podem ser utilizados para calcular a transmissibilidade vertical e fluxo gravitacionais. Já os modelos 1D radiais (Fig. 3-c) podem ser utilizados para analisar a heterogeneidade próxima ao poço (CHEN, 2007; MATTAX; DALTON, 1990).

2.4.1.3 Bidimensionais

Os simuladores numéricos bidimensionais são aqueles que admitem o fluxo em duas direções e os mais usuais são os horizontais, verticais e radiais, conforme a Fig. 4 (ROSA *et al.*, 2006).

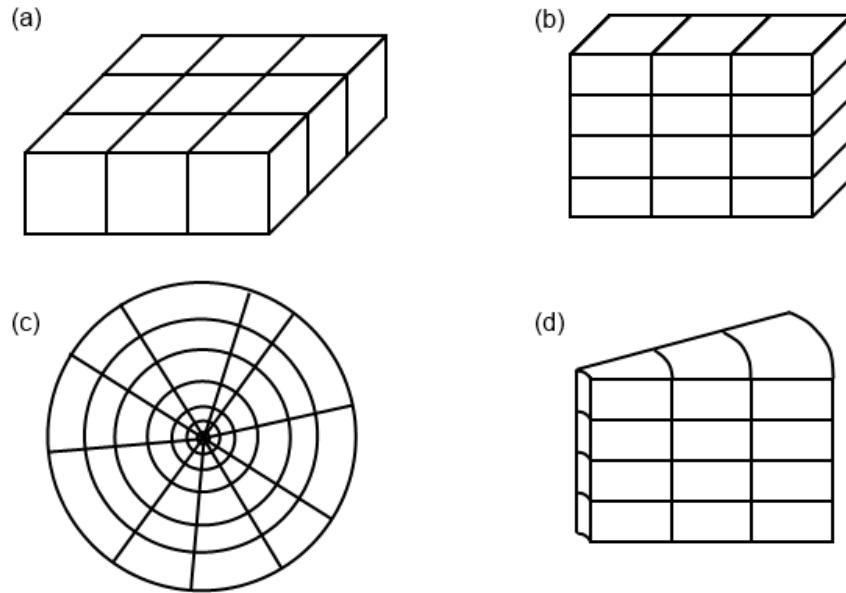


Figura 4: Modelos bidimensionais: (a) 2D horizontal, (b) 2D vertical, (c) 2D radial horizontal, (d) 2D radial vertical.

Os modelos 2D horizontais (Figs. 4-a e 4-c) são os mais utilizados em estudos de reservatórios. Eles são utilizados quando o fluxo, que determina o comportamento do reservatório, é predominantemente horizontal. O modelo 2D radial (r, θ), Fig. 4-c, em específico, pode ser utilizado para representar a convergência ou divergência do fluxo em uma região do reservatório (MATTAX; DALTON, 1990).

Já os modelos 2D verticais (Figs. 4-b e 4-d), segundo Mattax e Dalton (1990), podem ser utilizados para avaliar a interação entre as forças gravitacionais, capilares e viscosas e o efeito resultante na velocidade de varrido e na eficiência de deslocamento. Ou seja, podem ser utilizados para:

- Avaliar o comportamento do poço quando os efeitos verticais são dominantes, como em cones de água ou gás;
- Simular uma injeção periférica de água, gás, ou outro processo no qual velocidades frontais em direção aos produtores são muito uniformes;
- Desenvolver funções ou pseudo-funções de poço para o uso em modelos 2D horizontais ou 3D.

2.4.1.4 Tridimensionais

Os simuladores numéricos tridimensionais admitem um fluxo no meio poroso em três direções. Através deles é possível ter uma melhor representação do fluxo no reservatório. A Fig. 5 ilustra os modelos tridimensionais mais utilizados.

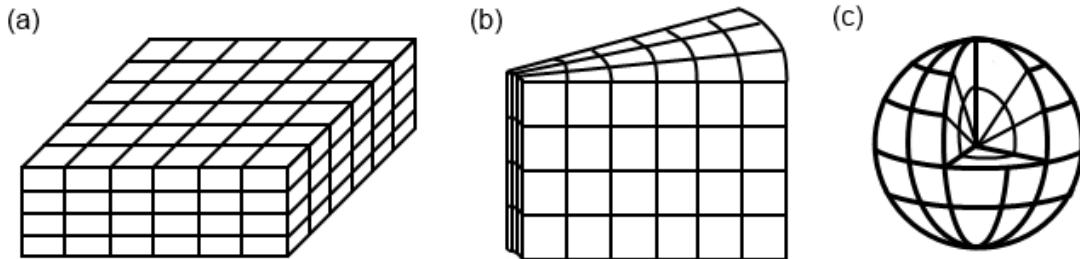


Figura 5: Modelos tridimensionais: (a) 3D cartesiano, (b) 3D cilíndrico, (c) 3D esférico.

2.4.2 Classificação Pelo Sistema de Coordenadas

Os sistemas de coordenadas usados em simuladores de reservatório são: cartesianas (ou retangulares), cilíndricas e esféricas, conforme a Fig. 6. O primeiro pode ser usado para o fluxo distante do poço, pois o fluxo é linear e retangular, o segundo, próximo ao poço, pois o fluxo é cilíndrico, e o terceiro, próximo aos canhoneados, pois o fluxo é esférico.

2.4.3 Classificação Pelo Número de Fases do Sistema

De acordo com Rosa *et al.* (2006), os simuladores numéricos podem ser classificados de acordo com o número de fases em monofásico, bifásico e trifásico.

O modelo monofásico considera a presença de apenas uma fase no reservatório: gás, óleo ou água, no caso de se tratar de um aquífero. O modelo bifásico considera a presença de duas fases: óleo e água (reservatório de óleo com influxo ou injeção de água); gás e água (reservatório de gás com influxo ou injeção de água); ou óleo e gás (reservatório de óleo com capa de gás ou gás em solução). Já o modelo trifásico considera a ocorrência de três fases no reservatório (óleo, gás e água).

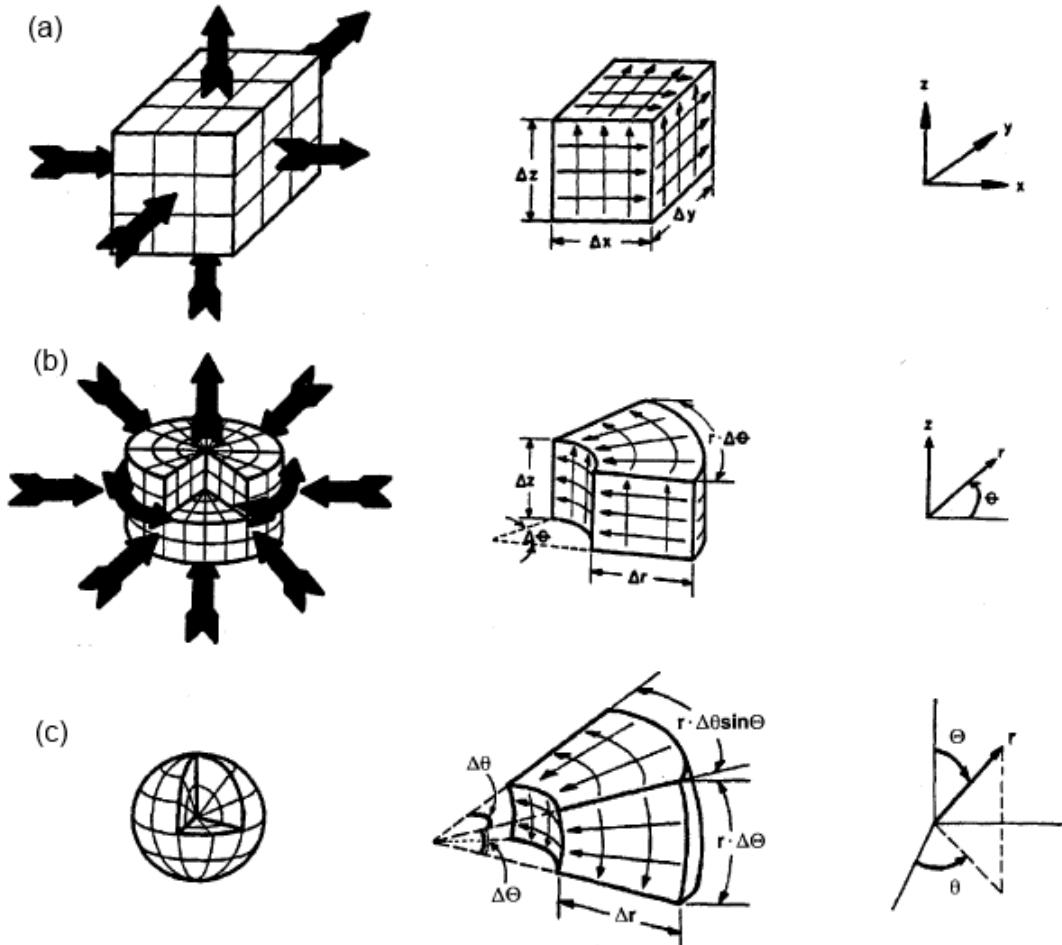


Figura 6: Sistemas de coordenadas, e linhas de fluxo, nos modelos 3D: (a) retangular, (b) cilíndrico, (c) esférico. Adaptado de Ertekin *et al.* (2001).

2.4.4 Classificação Pelo Tratamento Matemático

De acordo com Rosa *et al.* (2006), um simulador numérico pode ser classificado de acordo com a maneira pela qual o comportamento físico e a característica de desempenho são tratados. Assim, existem três categorias: modelo β (*black oil*), composicional e térmico.

2.4.4.1 Modelo β ou *Black Oil*

No modelo β o escoamento pode ter no máximo três fases distintas: óleo, água e gás, cada uma com apenas um componente. Geralmente, a água é a fase molhante, o óleo tem uma molhabilidade intermediária e o gás é a fase não-molhante. Água e óleo são considerados imiscíveis e não existe troca de massa ou mudança de fase. O gás é considerado solúvel no óleo, mas, geralmente, não na água (AZIZ; SETTARI, 1979).

Nesses simuladores, a transferência de massa é estritamente dependente da pressão. Assim, as propriedades dos fluidos, como o fator volume-formação do óleo e do gás e a razão de solubilidade, governam o comportamento PVT. Eles devem ser usados quando os processos de recuperação são insensíveis às mudanças compostacionais no reservatório (ERTEKIN *et al.*, 2001).

2.4.4.2 Modelo Composicional

Segundo Rosa *et al.* (2006), o tratamento matemático de um modelo composicional considera não somente a pressão e a temperatura do reservatório, mas também as composições das diversas fases eventualmente presentes no meio poroso. Assim, tal modelo pode ser utilizado quando os processos de recuperação são sensíveis às mudanças compostacionais.

Na prática, como o número de hidrocarbonetos presente no reservatório é grande, costuma-se agrupar alguns deles, formando um grupo chamado de pseudocomponente. Essa simplificação tem o objetivo de reduzir o esforço computacional. Geralmente, o óleo é representado por três pseudocomponentes: C_1 (metano), $C_2 - C_6$ (óleo volátil) e C_{7+} (óleo não volátil) (ROSA *et al.*, 2006).

2.4.4.3 Modelo Térmico

O modelo térmico considera os efeitos de variações da temperatura no interior do reservatório. Pode ser utilizado quando um método térmico de recuperação terciário é aplicado, como injeção de vapor, injeção de água quente ou até mesmo combustão *in situ*. Devido ao fato de tratarem situações complexas, os modelos térmicos são necessariamente compostacionais.

2.5 Conjunto de Malhas

Para cada simulação é preciso adotar um sistema de coordenadas (Seção 2.4.2) e para cada um deles é necessário a construção de uma malha para a discretização do reservatório. Os conjuntos de malhas mais presentes na literatura são: malha simples, malha refinada, malha híbrida e malha de Voronoi. A seguir cada uma delas será exemplificada.

2.5.1 Malha Simples

A malha simples é o conjunto de malhas que pode ser construída de forma mais simples em função do sistema de coordenadas adotado. A Fig. 7 ilustra dois tipos de malhas: malha cartesiana e malha radial.

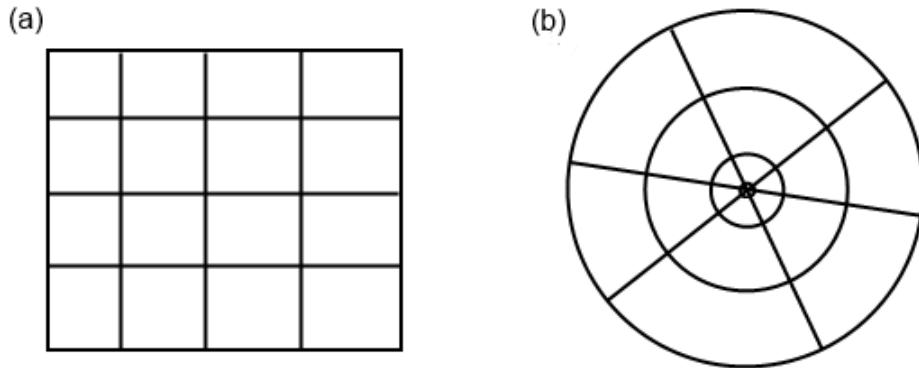


Figura 7: Malhas: (a) cartesiana, (b) radial.

2.5.2 Malha Refinada

O refinamento de uma malha é o processo de aumentar a discretização da mesma, ou seja, aumentar a resolução. Por exemplo, a Fig. 8 mostra um refinamento das malhas da Fig. 7.

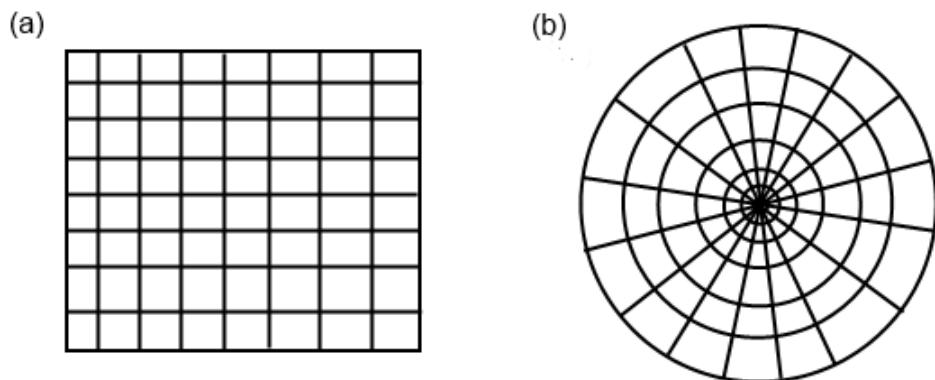


Figura 8: Em comparação com a Fig. 7, a figura acima ilustra uma malha refinada: (a) cartesiana, (b) radial.

Outro tipo de malha refinada ocorre quando se realiza um refinamento em um bloco da malha. Esse tipo de refinamento é utilizado, geralmente, para a representação de um poço. Isso porque quanto melhor a resolução próxima ao poço, menores

serão os erros de aproximação feitos no acoplamento poço-reservatório. A Fig. 9 mostra as duas formas como esse refinamento ser realizado.

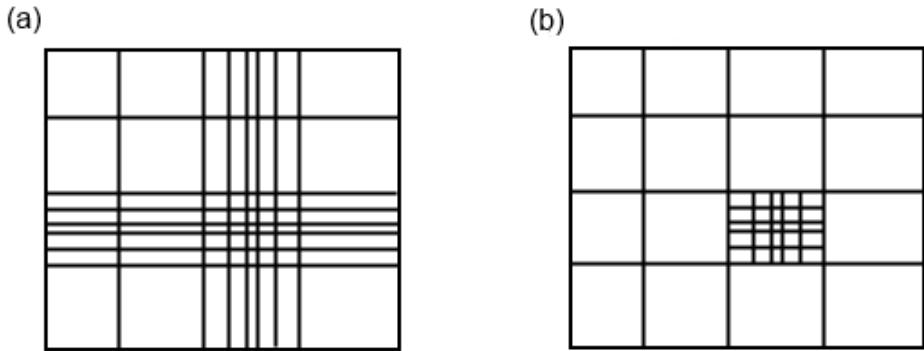


Figura 9: Em comparação com a Fig. 7, a figura acima ilustra um bloco: (a) refinado, (b) localmente refinado.

2.5.3 Malha Híbrida

Segundo Pedrosa e Aziz (1986), a necessidade de um modo simples e preciso de representar poços nos simuladores de reservatório conduziu ao desenvolvimento da aproximação da malha híbrida. Nessa técnica, uma malha cartesiana é usada para representar todo o reservatório, porém, nas regiões que possuam poços, utiliza-se uma malha curvilínea ortogonal, conforme a Fig. 10.

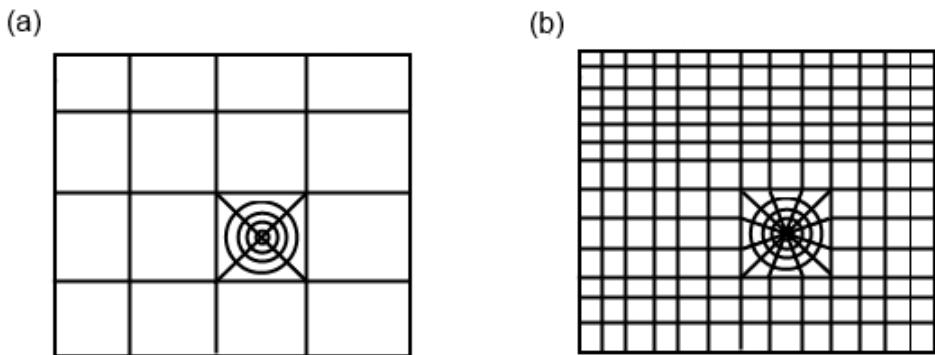


Figura 10: Malhas híbridas. Um mesmo poço pode possuir diferentes malhas híbridas, em função do refinamento ao redor do poço: (a) menos refinadas, (b) mais refinadas.

2.5.4 Malha de Voronoi

Segundo Palagi e Aziz (1994), a técnica da construção da malha flexível conhecida como Voronoi, ou bissecção perpendicular, vem se destacando na literatura. A principal

vantagem dessa malha é que pontos individuais podem ser especificados em qualquer lugar dentro do domínio, independentemente da posição dos outros pontos. A Fig. 11 ilustra alguns exemplos especiais de malhas de Voronoi.

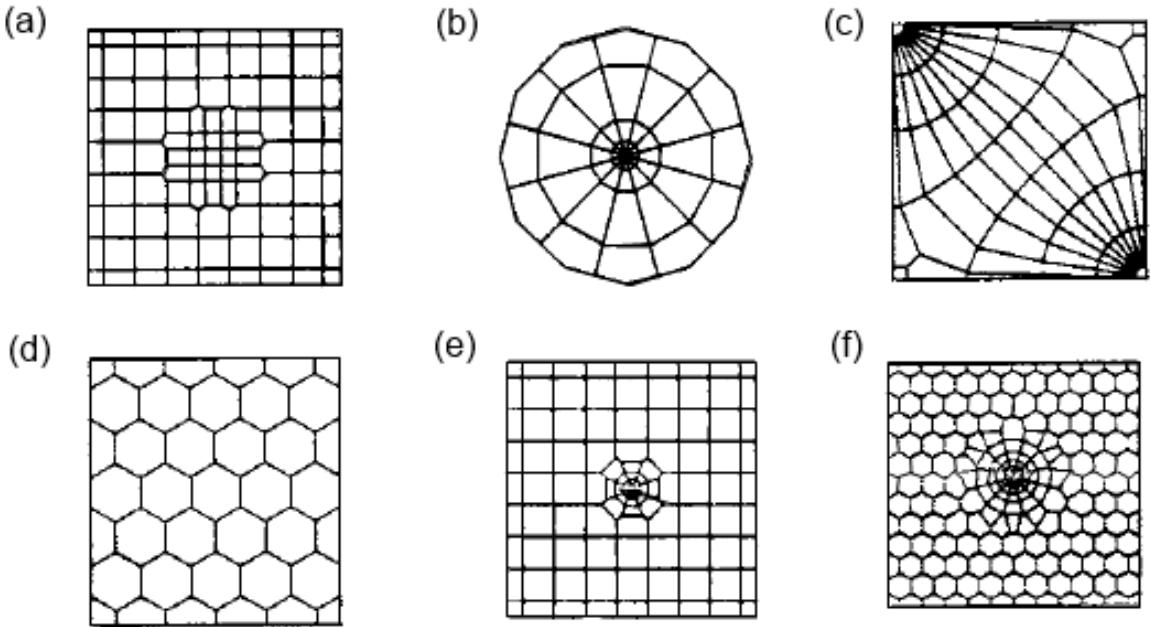


Figura 11: Malhas de Voronoi: (a) localmente refinada, (b) cilíndrica, (c) curvilinear, (d) hexagonal, (e) híbrida-cartesiana, (f) híbrida-hexagonal. Adaptada de Palagi e Aziz (1994).

2.6 Tipos de Malhas

Os tipos de malhas mais comuns são: bloco centrado e ponto distribuído, porém também existem o bloco distribuído, o bloco mediano, o pseudo-ponto distribuído, o ponto centrado e o ponto mediano (NACUL; AZIZ, 1991).

Para a representação desses tipos de malhas, deve-se, primeiramente, considerar um sistema linear de comprimento L e de área transversal constante A , então um sistema de malhas de n_x pontos pode ser construído de várias formas. A Fig. 12 ilustra as configurações das variáveis envolvidas para construir alguns tipos de malhas citadas abaixo, segundo Nacul e Aziz (1991).

2.6.1 Bloco Centrado

No método do bloco centrado, primeiramente, as dimensões dos blocos, $\Delta x_i | i = \{1, 2, \dots, n_x\}$, são arbitrariamente selecionadas. Em seguida, os pontos x_i são definidos

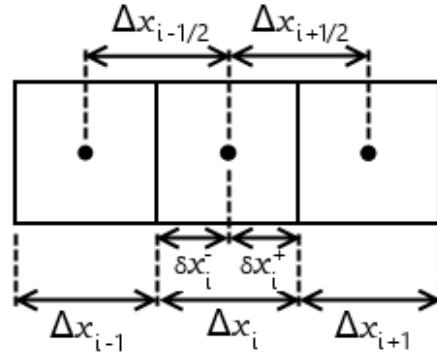


Figura 12: Esquematização das variáveis utilizadas para a definição dos tipos de malhas.

nos centros dos blocos, conforme a Fig. 13.

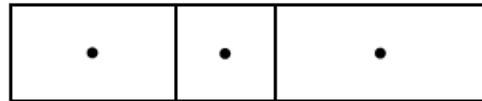


Figura 13: Método do bloco centrado.

Matematicamente, temos:

$$\Delta x_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i \pm 1}}{2} \quad (2.1)$$

e também:

$$\delta x_i^\pm = \frac{\Delta x_i}{2} \quad (2.2)$$

2.6.2 Bloco Distribuído

No método do bloco distribuído, primeiramente, as dimensões dos blocos, $\Delta x_i | i = \{1, 2, \dots, n_x\}$, são arbitrariamente selecionadas. Em seguida, considerando que o primeiro ponto esteja no centro do bloco, $\delta x_1^+ = \Delta x_1/2$, coloca-se: o segundo ponto de tal forma que $\delta x_2^- = \delta x_1^+$; o terceiro, tal que $\delta x_3^- = \delta x_2^+$; e assim sucessivamente, conforme a Fig. 14, ou seja:

$$\delta x_{i+1}^- = \delta x_i^+ | i = \{2, 3, \dots, n_x\} \quad (2.3)$$

Caso não seja possível tal configuração, considera-se que $\delta x_1^+ = 3\Delta x_1/4$. Caso

a impossibilidade continue, considera-se que $\delta x_1^+ = \Delta x_1/4$. Se, depois dessas três tentativas, ainda não for possível a construção da malha, então se deve usar o método do pseudo-ponto distribuído (Seção 2.6.5).



Figura 14: Método do bloco distribuído.

Na Fig. 14, primeiramente, tentou-se $\delta x_2^- = \Delta x_2/2$, porém não foi possível, pois $\Delta x_1/2 > \Delta x_2$. Em seguida, tentou-se $\delta x_2^- = \Delta x_1/4$ e, sem nenhuma incoerência, foi possível construir toda a malha.

2.6.3 Bloco Mediano

O método do bloco mediano é uma combinação dos dois métodos anteriores. Primeiramente, as dimensões dos blocos, $\Delta x_i | i = \{1, 2, \dots, n_x\}$, são arbitrariamente selecionadas. Em seguida, os pontos x_i são posicionados no ponto médio entre os valores dos dois métodos citados anteriormente (bloco centrado e bloco distribuído).

A Fig. 15 ilustra o método mediano, tal que os “x” representam os pontos da malha para os métodos do bloco centrado e bloco distribuído. O ponto preto indica o ponto da malha para o método do bloco mediano.

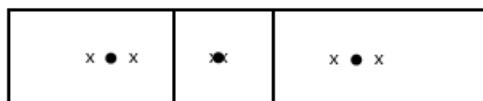


Figura 15: Método do bloco mediano.

2.6.4 Ponto Distribuído

Segundo Settari e Aziz (1972), no método do ponto distribuído, primeiramente, os pontos da malha, $x_i | i = \{1, 2, \dots, n_x\}$, são arbitrariamente selecionados. Em seguida, os limites dos blocos são posicionados no ponto médio entre os pontos da malha, conforme a Fig. 16.

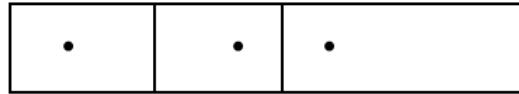


Figura 16: Método do ponto distribuído.

2.6.5 Pseudo-ponto Distribuído

No método do pseudo-ponto distribuído, primeiramente, é aplicado o método do bloco centrado e depois, com os pontos x_i da malha na mesma posição, as fronteiras dos blocos são movidas para o ponto médio entre tais pontos, conforme a Fig. 17.

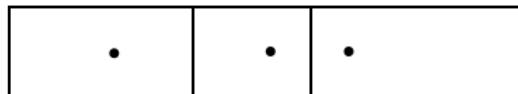


Figura 17: Método do pseudo-ponto distribuído.

Nesse método, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\delta x_i^- = \delta x_{i-1}^+ \quad (2.4)$$

$$\delta x_i^+ = \delta x_{i+1}^- \quad (2.5)$$

tal que $i = \{1, 2, \dots, n_x\}$.

2.6.6 Ponto Centrado

No método do ponto centrado, primeiramente, utiliza-se o método do pseudo-ponto distribuído e em seguida, mantendo-se as fronteiras dos blocos, posicionam-se os pontos x_i da malha no centro do bloco, conforme a Fig. 18.

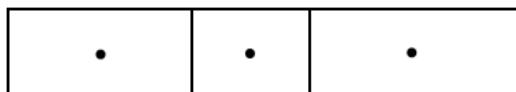


Figura 18: Método do ponto centrado.

2.6.7 Ponto Mediano

O método do ponto mediano é uma combinação dos dois métodos anteriores. Primeiramente, o método do pseudo-ponto distribuído é utilizado para obter os limites dos blocos. Em seguida, os pontos x_i são posicionados no ponto médio entre os valores dos dois métodos citados anteriormente (pseudo-ponto distribuído e ponto centrado), conforme a Fig. 19.



Figura 19: Método do ponto mediano.

2.7 Tipos de Acoplamento Poço-reservatório

O acoplamento poço-reservatório é a forma como relacionamos a pressão no bloco produtor/injetor com as propriedades especificadas no poço.

Um dos métodos utilizados para essa modelagem é o raio equivalente, dentro do qual a pressão em volta do poço, calculada com um modelo analítico simplificado, é numericamente igual à pressão do bloco onde o mesmo se situa.

Dentre os modelos de poços que utilizam a definição de raio equivalente estão os modelos de van Poollen *et al.* (1968) e o de Peaceman (1983). Porém existem outros modelos que são desenvolvidos sobre outras definições como o modelo de Ding *et al.* (1998) e o de Archer e Yildiz (2001).

2.7.1 Modelo de Poço de Poollen *et al.* (1968)

Poollen *et al.* (1968), utilizando a ideia do raio equivalente, consideraram que a vazão no poço, medida em condições padrão, pode ser calculada por:

$$q_{sc} = \frac{-2\pi\beta_c k_H h (p_{i,j,k} - p_{wf})}{\mu B [\ln(r_{eq}/r_w) + s - F]} , \quad (2.6)$$

onde β_c é o fator de conversão; k_H , a permeabilidade horizontal ao redor do poço; h , o comprimento da seção aberta ao fluxo poço-formação; $p_{i,j,k}$, a pressão no bloco; p_{wf} , a pressão de fundo do poço; μ , a viscosidade do fluido; B , o fator volume formação;

r_{eq} , o raio equivalente; r_w , o raio do poço; s , o fator de película (*skin*); e F que depende do regime de fluxo, tal que:

$$F = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{ fluxo permanente} \\ \frac{3}{4} & , \text{ fluxo pseudopermanente} \end{cases} \quad (2.7)$$

Para um meio anisotrópico, com permeabilidades k_x e k_y nas direções x e y , respectivamente, o cálculo de k_H pode ser dado por:

$$k_H = \sqrt{k_x k_y} \quad (2.8)$$

Para o cálculo do raio equivalente de Poollen *et al.* (1968), considerou-se que o bloco quadrado que continha um poço poderia ser aproximado para um círculo equivalente de mesma área, daí:

$$r_{eq} = \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\pi}} \approx 0,5642\Delta x \quad (2.9)$$

2.7.2 Modelo de poço de Peaceman (1983)

Analogamente a Poollen *et al.* (1968), Peaceman (1983) propôs uma fórmula para a vazão do poço em condições padrão em função do raio equivalente, tal que:

$$q_{sc} = \frac{-2\pi\beta_c k_H h (p_{i,j,k} - p_{wf})}{\mu B [\ln(r_{eq}/r_w) + s]} \quad (2.10)$$

Dividindo o reservatório em blocos e considerando que o poço encontra-se no centro de um bloco e comporta-se como se estivesse produzindo no regime permanente durante um passo de tempo e que, além disso, a distribuição de pressões em volta do poço é simétrica, Peaceman (1983) determinou uma fórmula para o raio equivalente:

$$r_{eq} = \frac{0,14 \left[(k_y/k_x)^{1/2} \Delta x^2 + (k_x/k_y)^{1/2} \Delta y^2 \right]^{1/2}}{0,5 \left[(k_y/k_x)^{1/4} + (k_x/k_y)^{1/4} \right]} \quad (2.11)$$

onde as razões de permeabilidades no numerador servem para transformar os espaçamentos Δx e Δy em uma malha isotrópica equivalente, enquanto todo o denominador é um fator de correção do poço que, nesse problema isotrópico equivalente, é

uma elipse ao invés de um círculo (PEACEMAN, 1983).

2.7.3 Modelo de poço de Ding *et al.* (1998)

Enquanto Peaceman (1983) calculava a vazão no poço em função do raio equivalente, Ding *et al.* (1998) propuseram um método para calcular uma nova distância entre os blocos que melhorasse a modelagem do fluxo na proximidade do poço.

Essa mudança está diretamente relacionada com a transmissibilidade, que é o fator que relaciona a forma como um fluido escoa de um bloco para outro. Essa transmissibilidade equivalente, para um sistema de coordenadas cartesianas (x, y), cujos índices i e j representam, respectivamente, a discretização em x e y , pode ser escrita como:

$$T_{eq_{i\pm\frac{1}{2}}} = T_{i\pm\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_{i\pm\frac{1}{2}} \arctan\left(\frac{\Delta y_j}{\Delta x_i}\right)}{\Delta y_j \ln\left(\frac{\Delta x_{i\pm\frac{1}{2}}}{r_o}\right)} \quad (2.12)$$

$$T_{eq_{j\pm\frac{1}{2}}} = T_{j\pm\frac{1}{2}} \frac{\Delta y_{j\pm\frac{1}{2}} \arctan\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta y_j}\right)}{\Delta x_i \ln\left(\frac{\Delta y_{j\pm\frac{1}{2}}}{r_o}\right)} \quad (2.13)$$

onde r_o é o raio equivalente do poço; Δx_i e Δy_j , as dimensões do bloco que contém o poço; $\Delta x_{i\pm\frac{1}{2}}$ e $\Delta y_{j\pm\frac{1}{2}}$, as distâncias entre o centro desse bloco e os centros dos seus vizinhos; $T_{i\pm\frac{1}{2}}$ e $T_{j\pm\frac{1}{2}}$, as transmissibilidades do bloco nas faces em x e em y , respectivamente.

2.7.4 Modelo de poço de Archer e Yildiz (2001)

Em alternativa ao uso do raio equivalente, Archer e Yildiz (2001) calcularam a pressão média do bloco produtor/injetor a partir da solução do fluxo radial transiente. Tal solução pode ser escrita por:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} Ei\left(-\frac{r_D^2}{4t_D^2}\right) \quad (2.14)$$

onde a pressão, o tempo e o raio adimensional são definidos, respectivamente por:

$$p_D = \frac{kh}{141.2qB\mu}(p_i - p_{wf}) \quad (2.15)$$

$$t_D = \frac{0.000264kt}{\phi\mu c_t r_w^2} \quad (2.16)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (2.17)$$

Assim, a partir da Eq. (2.14), a pressão média do bloco foi deduzida, tal que:

$$\bar{p}^B = \frac{4 \int_1^{\frac{x_D^B \times C}{2}} \int_1^{\frac{y_D^B}{2 \times C}} \int_{t_D^1}^{t_D^2} \frac{1}{2} Ei \left(-\frac{r_D^2}{4t_D} \right) dt_D dx_D dy_D}{(x_D^B y_D^B - \pi r_{wD}^2)(t_D^2 - t_D^1)} \quad (2.18)$$

onde t_D^1 e t_D^2 são os tempos adimensionais de início e fim do espaço de tempo, respectivamente; x_D^B e y_D^B , os comprimentos adimensionais do bloco do poço nas direções x e y , respectivamente; e:

$$C = \left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.19)$$

$$r'_D = \sqrt{(x_D \times C)^2 + (y_D/C)^2} \quad (2.20)$$

$$t_D = \frac{\sqrt{k_x k_y t}}{\phi \mu c_t r_w^2} \quad (2.21)$$

2.8 Uso de Simuladores Numéricos de Reservatório

Segundo Rosa *et al.* (2006), um simulador numérico de reservatório, baseado nas informações geológicas, propriedades da rocha e dos fluidos presentes no meio poroso, completação e históricos de produção (vazões e/ou produções acumuladas de óleo, gás e água) e de pressão, pode ser utilizado para:

- Análise do comportamento do reservatório;
- Análise do efeito da vazão de produção e/ou injeção na recuperação;
- Determinação do melhor esquema de desenvolvimento do campo;
- Determinação do efeito de espaçamento na recuperação final;
- Determinação das vazões de produção críticas para sanar problemas de cone de água e/ou gás;

- Melhoria do conhecimento da geologia do reservatório;
- Simulação de modelos físicos de laboratório.

As etapas normalmente seguidas na execução de um estudo de reservatório, utilizando simuladores numéricos, podem ser resumidas no esquema apresentado na Fig. 20.

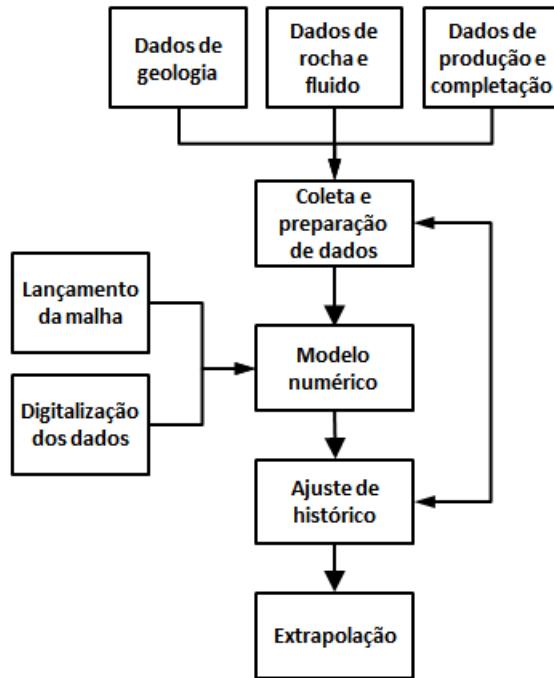


Figura 20: Etapas de um estudo de reservatório usando um simulador numérico. Adaptado de Rosa *et al.* (2006).

Inicialmente tem-se a fase de *coleta e preparação de dados* na qual os dados sobre geologia, rocha, fluido, produção e completação dos poços são armazenados e interpretados. A fase seguinte consiste na construção do *modelo numérico*. Para isso, é necessário a construção da malha e a digitalização dos dados para cada bloco da mesma (ROSA *et al.*, 2006).

Ainda segundo Rosa *et al.* (2006), a fase seguinte consiste em calcular o comportamento do reservatório e comparar com o histórico do campo ou reservatório (produção de água, gás e óleo, dados de pressão e outros). Se a concordância não é satisfatória, dados como permeabilidade absoluta, permeabilidade relativa, porosidade, etc. são alterados até que o ajuste seja considerado adequado. Se a concordância for satisfatória, o modelo poderá ser utilizado para efetuar previsões confiáveis em relação ao seu comportamento futuro, ou seja, a *extrapolação*.

A Tabela 1 apresenta as etapas do desenvolvimento de um estudo de reservatório, bem como alguns dos dados necessários para a realização do estudo através de um modelo numérico.

Tabela 1: Etapas do desenvolvimento de um estudo de reservatório.

Fase 1: coleta e preparação dos dados

1. Geologia
 - 1.1. Modelo geológico
 - 1.2. Mapas estruturais (topo, base)
 - 1.3. Mapas de isópacas (óleo, gás, água)
 - 1.4. Seções estratigráficas
 2. Dados de rocha
 - 2.1. Porosidade
 - 2.2. Permeabilidade
 - 2.3. Compressibilidade
 - 2.4. Permeabilidade relativa
 - 2.5. Saturações de fluidos na formação
 - 2.6. Pressão capilar
 3. Dados de fluido
 - 3.1. Análise PVT (óleo, gás, água)
 - 3.2. Análise de óleo, gás e água
 4. Dados de produção
 - 4.1. Histórico de produção (óleo, gás, água)
 - 4.2. Histórico de pressão
 - 4.3. Testes de formação
 - 4.4. Histórico de injeção (água, gás)
 5. Dados de poço
 - 5.1. Completação
 - 5.2. Índice de produtividade/injetividade
 - 5.3. Histórico de completações
 - 5.4. Histórico de estimulações e restaurações
 - 5.5. Histórico de pressão na cabeça
-

Fase 2: preparação do modelo numérico

1. Lançamento do modelo numérico
 - 1.1. Lançamento da malha
 - 1.2. Digitalização
 - 1.3. Entrada dos dados
-

Fase 3: fechamento do histórico (calibração do modelo numérico)

Fase 4: extrapolação

Adaptado de: Rosa *et al.* (2006).

3 Revisão de Conceitos de Engenharia de Reservatório

3.1 Equação da continuidade

Uma movimentação de fluido através do meio poroso, durante um intervalo de tempo considerado, pode ser explicada pela entrada e/ou saída de fluido. A equação da continuidade descreve a variação da massa dentro do meio poroso devida a esses fluxos.

O caso mais simples de movimentação de fluido no espaço poroso ocorre quando o fluido escoa em uma única direção. A Fig. 21 mostra a o fluido penetrando no meio poroso através de uma face perpendicular a direção de fluxo, x , e saindo pela face oposta. Note que o volume de controle está destacado e que existe um poço que o alimenta.

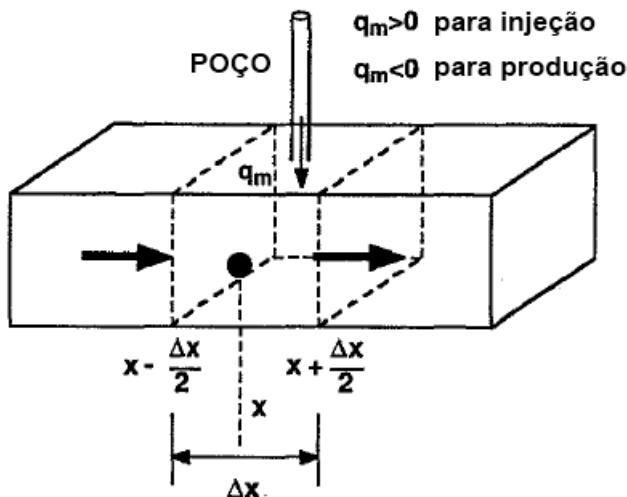


Figura 21: Volume de Controle para o fluxo 1D em coordenadas cartesianas. Adaptado de Ertekin *et al.* (2001).

Fundamentando-se na equação do balanço de materiais, a lei de conservação da

massa para um componente de volume de controle do sistema (Fig. 21) pode ser escrita como:

$$(m_i - m_o) + m_s = m_a \quad (3.1)$$

onde m_i é a massa que entra no bloco, m_o é a massa que sai do bloco, m_s é a massa de fluido que é reposta ou removida externamente (através do poço) e m_a é a massa acumulada, ou seja, é a massa resultante no espaço poroso.

A massa acumulada, m_a , pode ser escrita pelo produto entre a massa específica do fluido e o volume de controle, ou seja:

$$m_a = \phi\rho\Delta x\Delta y\Delta z \quad (3.2)$$

onde ϕ é a porosidade do bloco, ρ é a massa específica do fluido e $\Delta x, \Delta y$ e Δz são as dimensões do volume de controle.

Sendo u_x a velocidade superficial de Darcy, a massa que entra na interface $x + \Delta x/2$ da Fig. 21 por unidade de tempo pode ser escrita por:

$$(\rho u_x)_{x+\Delta x/2}\Delta y\Delta z \quad (3.3)$$

e a massa que saí na interface $x - \Delta x/2$ por unidade de tempo é:

$$(\rho u_x)_{x-\Delta x/2}\Delta y\Delta z \quad (3.4)$$

Derivando-se a Eq. (3.2) com relação ao tempo, a massa acumulada por unidade de tempo será:

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z \quad (3.5)$$

Derivando-se a Eq. (3.1) em relação ao tempo, substituindo-se as Eqs. (3.3)-(3.5) e denotando q_m pela vazão mássica por unidade de volume, temos:

$$(\rho u_x)_{x-\Delta x/2}\Delta y\Delta z - (\rho u_x)_{x+\Delta x/2}\Delta y\Delta z + q_m\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z \quad (3.6)$$

Dividindo-se a Eq. (3.6) por $\Delta x\Delta y\Delta z$, encontramos:

$$-\frac{(\rho u_x)_{x+\Delta x/2} - (\rho u_x)_{x-\Delta x/2}}{\Delta x} + q_m = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (3.7)$$

Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, temos:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + q_m = \frac{1}{\alpha_c} \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (3.8)$$

Sendo \mathbf{u} o vetor velocidade, $\nabla \cdot (\)$ o operador divergência, podemos escrever a equação da continuidade para um fluxo monofásico como:

$$-\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + q_m = \frac{1}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (3.9)$$

3.2 Lei de Darcy

A lei de Darcy é a lei que rege o transporte de fluido no meio poroso sob um escoamento laminar. Ela é uma relação empírica entre a velocidade aparente do fluido com o gradiente do potencial. Para um fluxo monofásico e unidimensional, na trajetória s , a lei de Darcy pode ser expressa na forma diferencial como:

$$u_s = -\beta_c \frac{k_s}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad (3.10)$$

onde u_s é a velocidade superficial (vazão dividido pela área transversal ao fluxo), β_c é o fator de conversão de unidades do coeficiente de transmissibilidade (vide Tabela 8), k_s é a permeabilidade absoluta na direção do fluxo, μ é a viscosidade do fluido e Φ é o potencial do fluido.

Na forma vetorial, a lei de Darcy pode ser escrita por:

$$\mathbf{u} = -\beta_c \frac{1}{\mu} \mathbf{k} \nabla \Phi, \quad (3.11)$$

onde \mathbf{k} é o tensor de permeabilidade absoluta e $\nabla \Phi$ é o gradiente do potencial tal que:

$$\nabla \Phi = \nabla p - \gamma \nabla Z \quad (3.12)$$

onde ∇p é o gradiente da pressão, γ é o peso específico do fluido e ∇Z é o gradiente da profundidade, que possui orientação vertical positiva para baixo.

Para o fluxo em duas dimensões, as velocidades nas direções x e y , são dadas por:

$$u_x = -\beta_c \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\beta_c \frac{k_x}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial Z}{\partial x} \right), \quad (3.13)$$

$$u_y = -\beta_c \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\beta_c \frac{k_y}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial Z}{\partial y} \right), \quad (3.14)$$

considerando que as direções principais de permeabilidade estão alinhadas com os eixos das coordenadas x , y e z , o tensor permeabilidade absoluta será dado por:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.3 Propriedades Básicas dos Fluidos

3.3.1 Massa específica e peso específico

A massa específica de um fluido é definido como a razão entre sua massa, m , pelo volume ocupado pela mesma, V , ou seja:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3.16)$$

O peso específico de um fluido é definido como a razão entre seu peso, W , e o volume ocupado pelo mesmo, V , ou seja:

$$\gamma = \frac{W}{V} \quad (3.17)$$

Como o peso de um fluido é o produto de sua massa, m , pela aceleração da gravidade, g , então, podemos fazer:

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{V} = \rho g \quad (3.18)$$

3.3.2 Compressibilidade isotérmica

A compressibilidade isotérmica de um fluido é a variação fracional do volume do fluido pela variação unitária de pressão a uma temperatura constante, T , ou seja:

$$c_f = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (3.19)$$

Sendo m a massa e ρ a massa específica do fluido, o volume do fluido, V , pode ser escrito como:

$$V = \frac{m}{\rho} \quad (3.20)$$

Sabendo-se que a massa do fluido não varia com a pressão, a derivada da Eq. (3.20) em relação à pressão será:

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{m}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (3.21)$$

Substituindo-se as Eqs. (3.20) e (3.21) na Eq. (3.19), temos:

$$c_f = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (3.22)$$

Ou, simplesmente:

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad (3.23)$$

onde se admite que a temperatura do fluido seja constante.

3.3.3 Fator volume-formação

Uma amostra de fluido pode ocupar diferentes volumes dentro do reservatório, dependendo da pressão a qual ela é submetida. Os fatores volume-formação são usados para converter volumes, nas pressões e temperaturas do reservatório, para volumes equivalentes, em condições padrão. O fator volume-formação é definido como a razão entre o volume da fase ocupado em condições de reservatório, V , pelo volume ocupado em condições padrão, V_{sc} , ou seja,

$$B = \frac{V}{V_{sc}} \quad (3.24)$$

Para uma única fase (água, óleo ou gás), a Eq. (3.24) pode ser escrita em termos de massa específica, tal que:

$$B = \frac{\rho_{sc}}{\rho}, \quad (3.25)$$

onde ρ e ρ_{sc} são a massa específica em condições de reservatório e condições padrões, respectivamente.

3.4 Equações de estado

As equações de estado são equações que descrevem o estado da matéria sob um dado conjunto de condições físicas. Elas são úteis para descrever não só as propriedades dos fluidos como também as dos sólidos.

Esses fluidos podem ser líquidos ou gases. Os líquidos apresentam uma resistência à redução de seu volume e podem ser divididos em dois grupos: fluidos incompressíveis (volume constante com a pressão) e fluidos ligeiramente compressíveis (volume quase constante com a pressão). Já os gases, ao serem submetidos à pressão, respondem com uma redução de seu volume, por isso são considerados fluidos compressíveis.

Com relação à engenharia de reservatório, os sólidos resumem-se, basicamente, à rocha-reservatório. Para esta, existe uma equação que relaciona a sua porosidade com a pressão de poros à qual está submetida.

Dessa forma, podem-se dividir as equações de estado em: fluido incompressível, fluido ligeiramente compressível, fluído compressível e sólidos (rocha-reservatório).

3.4.1 Fluido incompressível

Um fluido incompressível é qualquer fluido ideal cujo volume não se altera com uma mudança de pressão, ou seja, é aquele que possui densidade constante. Assim, de acordo com a Eq. (3.23), a compressibilidade isotérmica de um fluido incompressível será:

$$c_f = 0 \quad (3.26)$$

Além disso, o fator volume-formação para um fluido incompressível, conforme a Eq. (3.25), será:

$$B = 1 \quad (3.27)$$

3.4.2 Fluido ligeiramente compressível

Um fluido ligeiramente compressível possui uma compressibilidade, dada pela Eq. (3.23), pequena e constante, a pequenos gradientes de pressão.

Integrando-se a Eq. (3.23) de um ponto de referência (p^o, ρ^o) a um ponto qualquer (p, ρ) em função da variável ρ , temos:

$$\rho = \rho^o e^{c_f(p-p^o)}, \quad (3.28)$$

onde ρ^o é a massa específica medida na pressão de referência, p^o . Expandindo-se a Eq. (3.28) em séries de Taylor centrada em p^o , temos:

$$\rho = \rho^o \left[1 + c_f(p - p^o) + \frac{1}{2!} c_f^2 (p - p^o)^2 + \dots \right] \quad (3.29)$$

Como a compressibilidade de fluidos ligeiramente compressíveis é pequena, então, podemos considerar que, para p próximo de p^o :

$$\rho \approx \rho^o [1 + c_f(p - p^o)] \quad (3.30)$$

Em termos de fator volume-formação, conforme a Eq. (3.25), a Eq. (3.30) pode ser escrita como:

$$B \approx \frac{B^o}{1 + c_f(p - p^o)}, \quad (3.31)$$

onde B^o é o fator volume-formação na pressão de referência, p^o .

3.4.3 Fluido compressível

Um fluido compressível é aquele cuja densidade varia consideravelmente com a pressão, conforme a Eq. (3.23). No contexto engenharia de reservatórios os fluidos compressíveis são, usualmente, gases a alta pressão, por esta razão podemos utilizar equação de estado do gás real como representativa dos fluidos compressíveis. Esta equação é:

$$pV = ZnRT, \quad (3.32)$$

onde V é o volume que n moles de gás ocupam a uma pressão p e temperatura T ; R , a constante universal dos gases; e Z , o fator de compressibilidade dos gases reais.

O número de moles é definido pela razão entre a massa, m , pela massa molar, M , ou seja:

$$n = \frac{m}{M} \quad (3.33)$$

Assim, substituindo as Eqs. (3.16) e (3.33) na Eq. (3.32), temos:

$$\rho = \frac{pM}{ZRT} \quad (3.34)$$

Em condições padrão, a massa específica se torna:

$$\rho_{sc} = \frac{p_{sc}M}{RT_{sc}} \quad (3.35)$$

Substituindo-se as Eqs. (3.34) e (3.35) na Eq. (3.25), encontramos a seguinte equação para o fator volume-formação do gás:

$$B_g = \frac{p_{sc}}{T_{sc}} \frac{ZT}{p} \quad (3.36)$$

Já a compressibilidade isotérmica de um gás, dada as Eqs. (3.23) e (3.34), será dada por:

$$\begin{aligned}
c_f &= \frac{ZRT}{pM} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{pM}{ZRT} \right) = \frac{Z}{p} \left[\frac{1}{Z^2} \left(Z - p \frac{\partial Z}{\partial p} \right) \right] \\
&= \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

3.4.4 Sólidos (rocha-reservatório)

A produção de fluidos de uma rocha-reservatório faz com que haja uma redução de massa de fluido no espaço poroso e, assim, ocorra uma variação de pressão interna da rocha, ficando sujeita a tensões resultantes diferentes. Essa variação de pressão provoca modificações nos grãos, nos poros e algumas vezes no volume total da rocha (ROSA *et al.*, 2006).

A variação do volume poroso é devida a compressibilidade efetiva da formação que pode ser definida como a razão entre a variação fracional do volume poroso da rocha pela variação unitária da pressão, ou seja:

$$c_{ef} = \frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial p} \tag{3.38}$$

onde V_p é o volume poroso da rocha e p a pressão interna. O volume poroso pode ser escrito como o produto da porosidade, ϕ , pelo volume total da rocha, V_t , ou seja:

$$V_p = \phi V_t \tag{3.39}$$

Derivando-se a Eq. (3.39) em relação à pressão, temos:

$$\frac{\partial V_p}{\partial p} = V_t \frac{\partial \phi}{\partial p} \tag{3.40}$$

Assim, substituindo as Eqs. (3.39) e (3.40) na Eq. (3.38), podemos reescrever a Eq. (3.38) como:

$$c_{ef} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \tag{3.41}$$

Considerando que a compressibilidade efetiva da formação seja constante a pequenas variações de pressão, podemos integrar a Eq. (3.41) de um ponto de referência (p^o, ϕ^o) a um ponto qualquer (p, ϕ), temos:

$$\phi = \phi^o e^{c_{ef}(p - p^o)} \quad (3.42)$$

Expandindo a Eq. (3.42) em série de Taylor centrada em p^o , a porosidade à pressão próxima da pressão de referência, p^o , considerando que c_{ef} seja pequeno, pode ser escrita como:

$$\phi \approx \phi^o (1 + c_{ef}(p - p^o)) \quad (3.43)$$

4 *Formulação do Problema*

4.1 Motivação para o tema

Um simulador numérico de reservatório é um instrumento de extrema importância na avaliação e desenvolvimento de campos de petróleo. O mesmo pode ser utilizado tanto pela indústria do petróleo quanto pelo meio acadêmico.

Para o uso do simulador pelo meio acadêmico, é fundamental que esse possua um código aberto, passível a modificações, pois desse modo é possível implementar novas funcionalidades, ou até mesmo aperfeiçoar as já existentes. Dessa forma, tal simulador pode ser o ponto de partida de trabalhos que envolvam simulações, tanto em sala de aula quanto em trabalhos de iniciação científica e teses de mestrado e doutorado.

O presente trabalho teve por objetivo desenvolver um simulador que possa sanar a necessidade comentada acima no Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo (LENEP).

4.2 Descrição do Simulador

Nesta seção serão expostos os pressupostos, as hipóteses simplificadoras, os pacotes utilizados e as áreas de aplicações do simulador desenvolvido. Além disso, o mesmo será classificado em função do número de fases, número de dimensões, geometria, sistema de coordenadas e tratamento matemático, conforme a Seção 2.4.

O presente trabalho teve como ponto de partida um simulador utilizado na disciplina de “Simulação de Reservatório” da pós-graduação do LENE (PICO, 2010).

Esse simulador é escrito na linguagem de programação C, possuindo uma única biblioteca fora dos padrões da linguagem: o UMFPACK (Seção 4.2.2). Apresentando uma interface de entrada e saída simples e direta, o simulador utiliza o modelo de

poço de Peaceman (1983) e possui condições de contorno periódicas e de fronteira selada.

4.2.1 Hipóteses simplificadoras

Dentre as hipóteses simplificadoras destaca-se a consideração de um fluxo laminar, possibilitando utilizar a lei de Darcy para representar o fluxo no meio poroso. As propriedades físicas em qualquer ponto dentro de um bloco são as mesmas e serão representadas pelo ponto localizado em seu centro. Será considerado um fluxo monofásico e isotérmico, com pequenos gradientes de pressão. Com relação à rocha-reservatório, a mesma deve ter uma compressibilidade pequena e constante. Além disso, existe a consideração de que os fluidos e a rocha não reagem entre si.

Outra hipótese é o fato dos poços penetrarem totalmente na formação, sendo ou produtor ou injetor durante toda a simulação.

4.2.2 Bibliotecas utilizadas

As principais bibliotecas utilizadas no simulador, além das bibliotecas básicas da linguagem, são o iniParser v3.0 e o UMFPACK v5.2.

- **iniParser v3.0**

O iniParser é uma biblioteca desenvolvida na linguagem de programação C que oferece serviços a análise de arquivos de extensão ini. Esse tipo de arquivo será a base de entrada de dados para o simulador, ou seja, todas as informações de entrada serão escritas em arquivos do tipo ini.

Um arquivo ini é dividido por seções e para cada seção um conjunto de variáveis podem ser definidas. Isso torna o arquivo de entrada mais legível e simples de ser preenchido.

- **UMFPACK v5.2**

O *Unsymmetric Multifrontal sparse LU Factorization Package* é um pacote livre que possibilita a solução de sistemas lineares esparsos pelo método de fatoração LU não simétrica multi-frontal. Além disso, o UMFPACK otimiza o cálculo e a representação das matrizes esparsas pelo método COO (*Coordinate list*). Esse método representa

uma matriz esparsa por três vetores cada um contendo as linhas, as colunas e os seus respectivos valores.

4.2.3 Classificação

O simulador será descrito em função do fluido escoado, da geometria aceita e das condições de contorno estipuladas. O fluxo no simulador é monofásico isotérmico, portanto aceita apenas um fluido móvel no reservatório. Esse fluido pode ser de três tipos: incompressível (água), ligeiramente compressível (óleo) e compressível (gás).

Qualquer configuração de geometria é permitida, desde que seja fisicamente possível e bidimensional. Isso porque o simulador possibilita dois tipos de especificações para um bloco da malha: ativo ou inativo. Dessa forma, é possível construir barreiras de fluxo e geometrias irregulares. Como o sistema de coordenadas utilizado é cartesiano, a geometria sempre deverá ser expressa de forma apropriada em uma malha cartesiana.

4.2.3.1 Condições iniciais e de contorno

A condição inicial adotada pelo simulador é o equilíbrio hidrostático. Dessa forma, inicialmente, a pressão dos fluidos estará distribuída em função da sua profundidade.

As condições de contorno podem ser divididas em dois tipos: internas e externas.

A condição de contorno interna é estipulada pelos poços, através de um modelo de acoplamento poço-reservatório. As condições de contorno externa possíveis são: as periódicas, as de Dirichlet e/ou as de Neumann.

4.3 Etapas para o desenvolvimento do Simulador

As etapas para o desenvolvimento de um simulador numérico de reservatório de hidrocarbonetos, de acordo com a Seção 2.3 são: formulação, discretização, representação do poço, linearização, solução e validação, ilustradas na Fig 22. Note que na mesma, ao invés de utilizar a palavra “validação”, utilizou-se “verificação”. Isso porque algumas comparações serão realizadas em simulações de um reservatório conhecido e que mesmo havendo muitas pesquisas em cima dessas simulações não significa que as mesmas representem a realidade. A etapa de aplicação, será realizada após a verificação do simulador, no Capítulo 7.

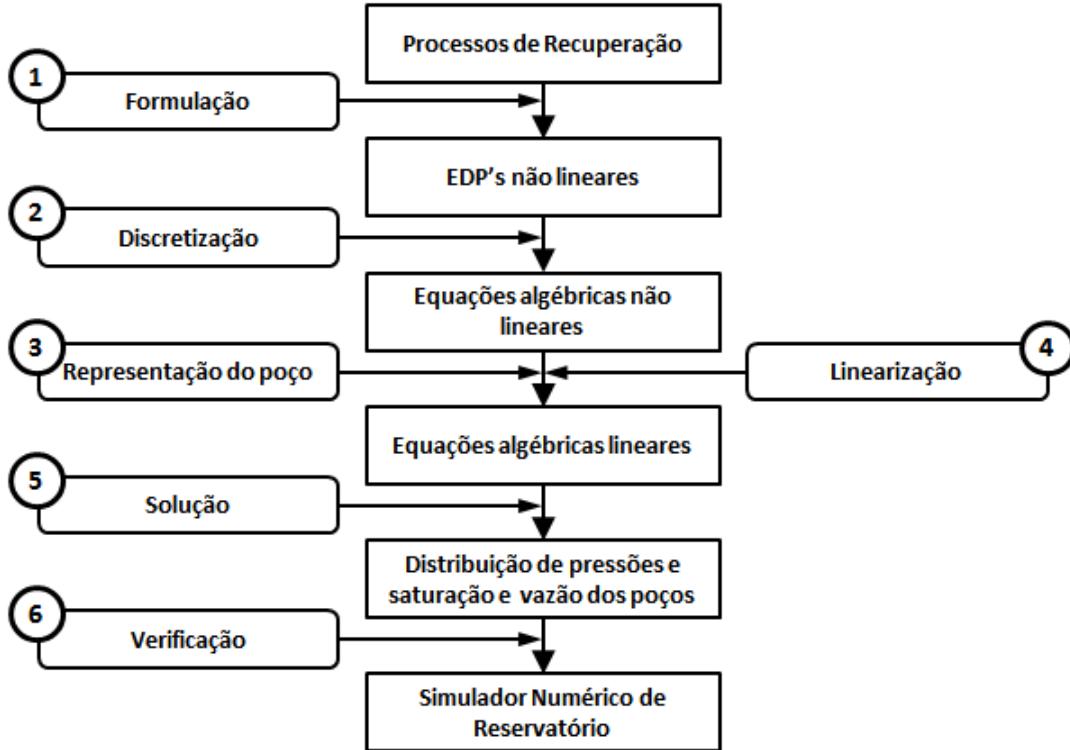


Figura 22: Etapas para o desenvolvimento do simulador numérico de reservatório. Adaptada da Fig. 2.

4.3.1 Formulação

Na etapa de formulação, elaboram-se as equações matemáticas que descrevem o problema físico desejado, considerando-se as hipóteses adotadas.

A lei básica adotada será a Lei da conservação da massa, que será representada pela equação da continuidade (Seção 3.1). O fenômeno do transporte adotado será o fluxo laminar e viscoso de um fluido através de um meio poroso que será representado pela Lei de Darcy (Seção 3.2). As equações de estados adotadas encontram-se na Seção 3.4.

Dessa forma, serão deduzidas as equações da difusividade hidráulica para o fluxo bidimensional para cada um dos três tipos de fluidos considerados: incompressível, ligeiramente compressível e compressível.

4.3.2 Discretização

O primeiro passo na etapa da discretização é a escolha e a construção da malha. Em seguida, utiliza-se o método das diferenças finitas para aproximar as equações

diferenciais parciais em equações algébricas não lineares. Essa aproximação é realizada utilizando-se a série de Taylor.

4.3.3 Representação do Poço

Dentre os métodos de representação do poço apresentado na Seção 2.7, será verificado o modelo de poço de Peaceman (1983) e implementado o de Ding *et al.* (1998). O modelo de Poollen *et al.* (1968) não será utilizado visto a sua aproximação grosseira do raio equivalente quando comparado com o modelo de Peaceman (1983).

O modelo de Archer e Yildiz (2001) tampouco será implementado visto que o mesmo apresenta o cálculo de uma integral tripla a cada passo de tempo, o que leva a crer que o esforço computacional seja elevado quando comparado aos outros métodos.

4.3.4 Linearização

Na etapa de linearização serão realizadas aproximações para as transmissibilidades a fim de representá-las em função da pressão e o método utilizado para a linearização (método das iterações simples dos termos das transmissibilidades) será discutido. Dessa forma é possível aproximar as equações algébricas não lineares em equações algébricas lineares.

4.3.5 Solução do Sistema Linear de Equações

Para obter a solução das equações algébricas linearizadas, será utilizado o método da decomposição LU. Esse é um método direto que pode ser utilizado na solução de praticamente qualquer sistema de equações lineares e pode ser encontrado no pacote UMFPACK (Seção 4.2.2).

4.3.6 Verificação do Simulador

Para a verificação inicialmente foram realizadas simulações num reservatório conhecido (SPE A-1), conforme o livro texto (ERTEKIN *et al.*, 2001). As diferentes condições de contorno foram verificadas pela simulação de um problema descrito pela EDH, com solução analítica conhecida.

4.3.6.1 Simulações no reservatório SPE A-1

O SPE A-1 é um reservatório heterogêneo bidimensional, possuindo diferentes valores para a permeabilidade, profundidade, porosidade e espessura dos blocos, conforme o Apêndice C. Os dois poços (W-2 e W-3) que serão utilizados nas simulações estão destacados na Fig. 23.

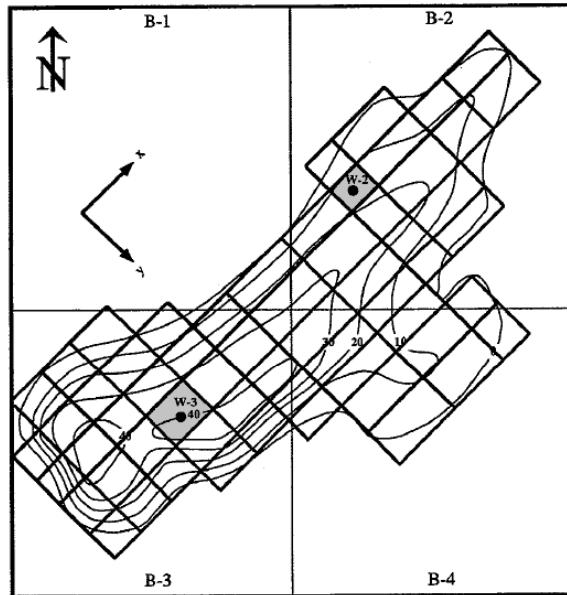


Figura 23: Reservatório SPE A-1. Em destaque os blocos com poços, com o poço W-3 localizado no maior; e o W-2, no menor. Adaptado do livro texto (ERTEKIN *et al.*, 2001).

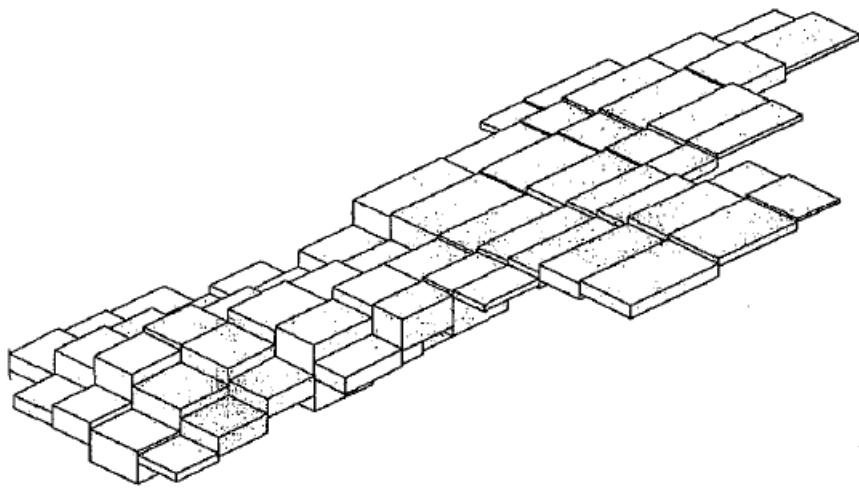


Figura 24: Visualização tridimensional do reservatório SPE A-1. Fonte: livro texto (ERTEKIN *et al.*, 2001).

Foram simuladas três tipos de escoamentos para o reservatório SPE A-1: incomprimível, ligeiramente compressível e compressível. Para cada uma dessas três simulações existe uma configuração nos poços que são informados a seguir.

- **Escoamento incompressível**

Para a simulação do escoamento incompressível, considera-se que o reservatório esteja preenchido 100% por um fluido incompressível. Além disso, o mesmo apresenta viscosidade de 1,0 cp e fator volume-formação de 1 RB/STB. As informações com as condições de produção dos poços W-2 e W-3 encontram-se no Apêndice C.

Para essa simulação, o modelo de poço utilizado será o de Peaceman (1983) e a distribuição inicial de pressão será dada por um equilíbrio hidrostático.

Considerando que as fronteiras são seladas, a distribuição de pressão em regime permanente é apresentada no Apêndice C. Para verificar a implementação do escoamento incompressível será plotado um gráfico do erro relativo entre o resultado do simulador e do apresentado no Apêndice C. Esse erro relativo será calculado por:

$$E_r = \frac{|p_{Ertekin} - p_{Simulado}|}{p_{Ertekin}} \quad (4.1)$$

tal que $p_{Ertekin}$ é o resultado apresentado por Ertekin *et al.* (2001) e $p_{Simulado}$, o simulado.

- **Escoamento ligeiramente compressível**

Para a simulação do escoamento ligeiramente compressível, considera-se que inicialmente o reservatório possui uma distribuição da pressão em função da profundidade de cada bloco, ou seja, o cálculo inicial da pressão é realizado através de um equilíbrio hidrostático.

As propriedades do fluido utilizado e as informações das condições de produção dos poços encontram-se no Apêndice C. O modelo de poço utilizado será o de Peaceman (1983).

Os resultados dessa simulação são representados com um passo de tempo de um dia para cada iteração (ERTEKIN *et al.*, 2001). A comparação entre tais resultados e os obtidos pelo simulador irá do tempo inicial da simulação (1º dia) até o dia em que a vazão no poço W-3 seja nula (39º dia) e analisará tanto as pressões e vazões nos poços quanto as pressões nos blocos que os contém e a produção acumulada.

A fim de verificar a implementação do modelo de poço de Ding *et al.* (1998), esse último também será simulado e comparado com os resultados obtidos pelo modelo de Peaceman (1983).

- **Escoamento compressível**

Para a simulação do escoamento compressível, a fim de tornar o problema mais compatível com a realidade, as permeabilidades nas direções x e y (Fig. 79) serão reduzidas, dividindo-as por 100. A distribuição da pressão no reservatório, inicialmente, é uniformemente igual a 7750 psia.

As propriedades do gás e as informações das condições de produção dos poços encontram-se no Apêndice C.

As propriedades do gás em função da pressão encontram-se na Tabela 2. O fator volume-formação foi calculado utilizando-se a correlação de Dranchuk e Kassem (1975); a viscosidade, uma interpolação linear; e o peso específico, dividindo-se a densidade em condições padrão pelo fator volume-formação e multiplicando-se por um fator de conversão.

Tabela 2: Fator volume-formação, viscosidade e peso específico do fluido compressível em função da pressão.

p (psia)	B_g (ft^3/scf)	μ (cp)	γ (psi/ft)
3500	0,004311	0,0222403	0,0940085440346
3750	0,004084	0,0231765	0,0992337985635
4000	0,003895	0,0241128	0,104048994437
4250	0,003735	0,0250436	0,108506247211
4500	0,003598	0,0259745	0,112637808042
4750	0,003480	0,0268918	0,116457136015
5000	0,003377	0,0278092	0,120009130392
5250	0,003287	0,0287058	0,123295051212
5500	0,003207	0,0296024	0,126370699511
5750	0,003135	0,0304717	0,129272993089
6000	0,003071	0,0313411	0,131967057419
6250	0,003013	0,0321777	0,134507412324
6500	0,002960	0,0330143	0,136915822072
6750	0,002912	0,0338138	0,139172676282
7000	0,002868	0,0346133	0,141307821943
7250	0,002827	0,0353725	0,143357210235
7500	0,002789	0,0361318	0,145310445799
7750	0,002754	0,0368489	0,147157165335
8000	0,002721	0,0375660	0,148941871861

Nessa simulação deve-se atingir um total de 100 dias, sendo que para os 5 primeiros dias o passo de tempo é de 1 dia; e para o restante, 5 dias. As distribuições de pressão após 5 e 100 dias de produção encontram-se no Apêndice C.

Para verificar a implementação do escoamento compressível serão utilizadas tanto as distribuições de pressão como as informações da produção acumulada, das pres-

sões e vazões nos poços e das pressões nos blocos que contém esses poços (ERTEKIN *et al.*, 2001).

Analogamente ao escoamento ligeiramente compressível, será simulado, além do modelo de poço de Peaceman (1983), o modelo de Ding *et al.* (1998).

4.3.6.2 Simulações para verificar as condições de contorno

Como o reservatório SPE A-1 é um reservatório totalmente selado em suas fronteiras, a condição de contorno de reservatório selado não será verificada. Já para a verificação da condição de contorno periódica, será simulado um modelo de injeção em padrão repetido: a malha dos cinco pontos (*five spot*).

Para verificar as implementações das condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, solucionou-se analiticamente, para cada um dos casos, um sistema de equações que representasse tais condições de contorno. Essas deduções encontram-se no Apêndice A.

Cada uma dessas condições serão abordadas a seguir.

- **Condição de contorno periódica**

Neste caso, será simulado a malha dos cinco pontos que, segundo Muskat (1982), é um caso particular de injeção em linhas diretas em que os eixos estão rotacionados 45º conforme a Fig. 25.

Ainda segundo Muskat (1982), a solução analítica para o problema da Fig. 25 é dada por:

$$\begin{aligned}
 p(x, y) = & q \ln \left(\frac{\cosh \frac{\pi y}{d} - \cos \frac{\pi x}{d}}{\cosh \frac{\pi y}{d} + \cos \frac{\pi x}{d}} \right) + \\
 & -q \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \ln \left(\frac{4 \left[\cosh \frac{\pi(y-md)}{d} + \cos \frac{\pi x}{d} \right] \left[\cosh \frac{\pi(y+md)}{d} + \cos \frac{\pi x}{d} \right]}{e^{2m\pi}} \right) \\
 & +q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \ln \left(\frac{4 \left[\cosh \frac{\pi(y-md)}{d} - \cos \frac{\pi x}{d} \right] \left[\cosh \frac{\pi(y+md)}{d} - \cos \frac{\pi x}{d} \right]}{e^{2m\pi}} \right) \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

onde d é a distância entre as linhas; x e y , as coordenadas cuja origem é um dos poços; e q , dado por:

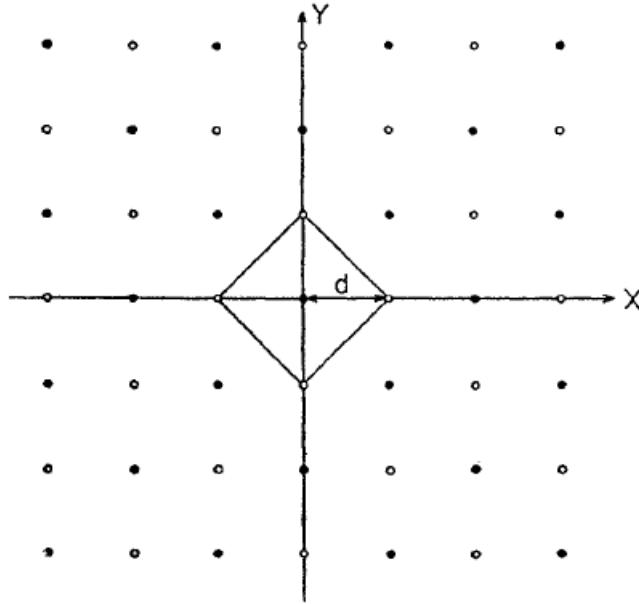


Figura 25: Representação a malha dos cinco pontos (*five spot*) na malha de injeção em linhas diretas. Fonte: Muskat (1982).

$$q = \frac{\mu B}{4\pi k \beta_c} Q, \quad (4.3)$$

tal que Q é a vazão de produção/injeção.

Para rotacionar os eixos no sentido horário da Fig. (25), pode-se utilizar a seguinte fórmula:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

onde θ é o ângulo de rotação, (x, y) as coordenadas antes da rotação e (x', y') as coordenadas após a rotação. Dessa forma, será possível calcular a distribuição de pressão na malha de injeção e, assim, verificar a implementação das condições de contorno periódicas.

- **Condição de contorno de Dirichlet**

Do desenvolvimento apresentado no Apêndice A, sabemos que a equação da difusividade hidráulica, após simplificações, pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.5)$$

onde c é :

$$c = \alpha_c \beta_c \frac{k}{\phi c_f} \frac{B_{SC}}{\mu B} \quad (4.6)$$

Quando se utiliza a condição inicial:

$$p(x, y, 0) = p_i + A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \quad (4.7)$$

onde p_i é uma constante e a e b são números reais que delimitam o domínio:

$$\text{Dom}(p) = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq b \wedge 0 \leq t\} \quad (4.8)$$

e a condição de contorno externa:

$$p(x = 0, y, t) = p(x = a, y, t) = p(x, y = 0, t) = p(x, y = b, t) = p_i \quad (4.9)$$

obtemos, de acordo com o Apêndice A, a solução, $p(x, y, t)$:

$$p(x, y, t) = p_i + Ae^{-(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2})\pi^2 ct} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \quad (4.10)$$

Ou seja, a distribuição de pressão no reservatório tenderá a ser constante e igual a p_i com o decorre do tempo.

• Condição de contorno de Neumann

Analogamente à condição de contorno de Dirichlet, utiliza-se a Eq. (4.5) para representar o fluxo no meio poroso, dado o domínio representado pela Eq. (4.8). Porém, na condição de contorno de Neumann utiliza-se a condição inicial:

$$p(x, y, 0) = p_i + A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \quad (4.11)$$

e a condição de contorno externa:

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x = 0, y, t) = \frac{\partial p}{\partial x}(x = a, y, t) = \frac{\partial p}{\partial x}(x, y = 0, t) = \frac{\partial p}{\partial x}(x, y = b, t) = 0 \quad (4.12)$$

De acordo com o Apêndice A, a solução, $p(x, y, t)$, é:

$$p(x, y, t) = p_i + Ae^{-(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2})\pi^2 ct} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \quad (4.13)$$

Ou seja, analogamente a condição de contorno de Dirichlet a distribuição de pressão no reservatório tenderá a ser constante e igual a p_i com o decorrer do tempo.

4.3.7 Aplicação

Como aplicação foi realizada uma análise comparativa da pseudo-estocagem nos modelos para a representação de poços verticais em um reservatório infinito em função do fator de película, do modelo de poço (Peaceman (1983) e Ding *et al.* (1998)), do passo de tempo, da espaçamento da malha e da forma dos blocos da malha do reservatório.

5 Desenvolvimento do Simulador

Neste capítulo, guiando-se pela Fig. 2, o problema será formulado, discretizado, linearizado e solucionado.

5.1 Formulação

A equação da continuidade para o fluxo monofásico, em coordenadas cartesianas, deduzida na Seção 3.1, pode ser escrita como:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + q_m = \frac{1}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho), \quad (5.1)$$

onde as velocidades superficiais u podem ser substituídas aplicando-se a lei de Darcy, conforme a Seção 3.2, tal que:

$$u_x = -\beta_c \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (5.2)$$

$$u_y = -\beta_c \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (5.3)$$

Assim, utilizando-se a Eq. (3.25) e sabendo-se que:

$$q_m = \frac{q_{sc}\rho_{sc}}{V_b} \quad (5.4)$$

temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_c \frac{k_x}{\mu B} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta_c \frac{k_y}{\mu B} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{q_{sc}}{V_b} = \frac{1}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \quad (5.5)$$

Fazendo $V_b = A_x \Delta x = A_y \Delta y$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_c \frac{A_x k_x}{\mu B} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta_c \frac{A_y k_y}{\mu B} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \Delta y + q_{sc} = \underbrace{\frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right)}_{S_t} \quad (5.6)$$

5.2 Discretização

A discretização da equação da difusividade hidráulica para um fluxo monofásico bidimensional é análoga ao fluxo unidimensional, por isso discretizar-se-á a última a fim de alcançar a primeira. A EDH para o fluxo unidimensional é dada por:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_c \frac{A_x k_x}{\mu B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right) \Delta x}_{S_x} + q_{sc} = \underbrace{\frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right)}_{S_t} \quad (5.7)$$

onde definimos por S_x e S_t as discretizações no espaço e no tempo, respectivamente.

5.2.1 Discretização no espaço (S_x)

A discretização no espaço pode ser feita por blocos, os quais armazenam suas propriedades no seu centro e são representados pelo sub-índice i , conforme a Fig. 26.

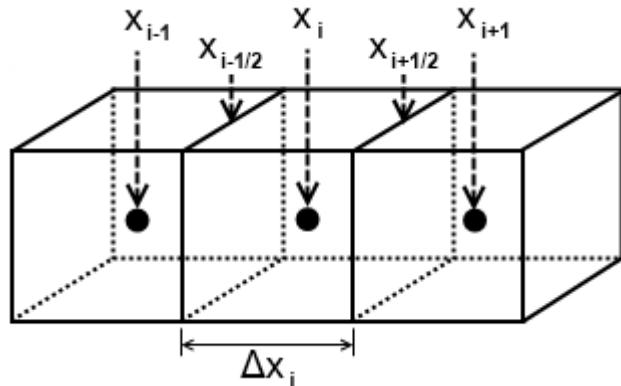


Figura 26: Discretização no espaço da EDH para escoamento unidimensional.

De acordo com a Eq. (5.7) e utilizando a definição de derivada centrada, a discretização no espaço da EDH para um fluxo monofásico unidimensional, S_x , pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
S_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_c \frac{A_x k_x}{\mu B} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right) \Delta x \\
&\approx \frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\beta_c \frac{A_x k_x}{\mu B} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\beta_c \frac{A_x k_x}{\mu B} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] \Delta x_i
\end{aligned} \tag{5.8}$$

A derivada do potencial em relação a x , na fronteira entre dois blocos, utilizando a definição de derivada centrada, pode ser escrito como:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{i \pm \frac{1}{2}} = \pm \frac{\Phi_{i \pm 1} - \Phi_i}{\Delta x_{i \pm \frac{1}{2}}} \tag{5.9}$$

Substituindo-se a Eq. (5.9) na Eq. (5.8), temos:

$$S_x \approx \left(\beta_c \frac{A_x k_x}{\mu B \Delta x} \right)_{i+\frac{1}{2}} (\Phi_{i+1} - \Phi_i) - \left(\beta_c \frac{A_x k_x}{\mu B \Delta x} \right)_{i-\frac{1}{2}} (\Phi_i - \Phi_{i-1}) \tag{5.10}$$

onde se define por transmissibilidade a expressão:

$$T_{x_{i \pm \frac{1}{2}}} = \beta_c \left(\frac{A_x k_x}{\Delta x} \right)_{i \pm \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\mu B} \right)_{i \pm \frac{1}{2}} \tag{5.11}$$

Substituindo a definição de potencial e a Eq. (5.11) na Eq. (5.10), temos:

$$\begin{aligned}
S_x &\approx T_{x_{i+\frac{1}{2}}} (p_{i+1} - p_i) - T_{x_{i-\frac{1}{2}}} (p_i - p_{i-1}) \\
&\quad + \gamma_{i+\frac{1}{2}} T_{x_{i+\frac{1}{2}}} (Z_{i+1} - Z_i) - \gamma_{i-\frac{1}{2}} T_{x_{i-\frac{1}{2}}} (Z_i - Z_{i-1})
\end{aligned} \tag{5.12}$$

5.2.2 Discretização no tempo (S_t)

Para discretização de equações diferenciais dependentes do tempo existem dois métodos que podem ser utilizados: métodos explícitos e métodos implícitos .

Conforme Chen (2007), o método implícito BTCS (*backward-time, central-space*), que aproxima a derivada parcial de primeira ordem no tempo por uma diferença finita regressiva, é incondicionalmente estável. Por esse motivo, utilizaremos a diferença finita regressiva para discretizar a EDH.

A discretização no tempo, S_t , da Eq. (5.7), pode ser escrita como:

$$S_t^{(n+1)} = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\phi}{B} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{\Gamma^{(n+1)}}{\Delta t} (p^{(n+1)} - p^{(n)}) \quad (5.13)$$

tal que:

$$\Gamma^{(n+1)} = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\phi}{B} \right) \quad (5.14)$$

onde o índice n que representa a iteração no tempo t_n ; e Δt , o passo de tempo.

O valor de Γ assume diferentes valores, a depender do tipo de fluido. A seguir o cálculo dessa variável será realizado para cada um desses fluidos.

5.2.2.1 Fluido incompressível

Da Seção 3.4, sabemos que o fator volume-formação para um fluido incompressível é a unidade e que aproximação da porosidade pode ser escrita pela Eq. (3.43). Daí, o valor de Γ para um fluido incompressível, de acordo com a Eq. (5.14), será:

$$\Gamma^{(n+1)} \approx \frac{V_b \phi^o c_{ef}}{\alpha_c} \quad (5.15)$$

5.2.2.2 Fluido ligeiramente compressível

De acordo com a Eq. (5.14) podemos fazer:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n+1)} &= \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\phi}{B} \right) \approx \frac{V_b}{\alpha_c} \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\frac{\phi}{B} \right)}{\Delta p} \\ &\approx \frac{V_b}{\alpha_c} \left[\left(\frac{\phi}{B} \right)^{(n+1)} + \left(\frac{\phi}{B} \right)^{(n)} \right] \frac{1}{p^{(n+1)} - p^{(n)}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde $\phi^{(n+1)}$ e $B^{(n+1)}$ são, respectivamente, a porosidade e o fator volume-formação à pressão $p^{(n+1)}$.

Através de manipulações algébricas, podemos escrever:

$$\Gamma^{(n+1)} \approx \frac{V_b}{\alpha_c} \left[\frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)}}{B^{(n+1)}} + \left(\frac{1}{B^{(n+1)}} - \frac{1}{B^{(n)}} \right) \phi^{(n)} \right] \frac{1}{p^{(n+1)} - p^{(n)}} \quad (5.17)$$

Substituindo-se as Eqs. (3.31) e (3.43) na Eq. (5.17), temos:

$$\Gamma^{(n+1)} \approx \frac{V_b}{\alpha_c} \left(\frac{\phi^o c_{ef}}{B^{(n+1)}} + \frac{\phi^{(n)} c_f}{B^o} \right) \quad (5.18)$$

5.2.2.3 Fluido compressível

Para um fluido compressível também é válida a Eq. (5.17). Porém substituindo-se a Eq. (3.43) na Eq. (5.17), temos:

$$\Gamma^{(n+1)} \approx \frac{V_b}{\alpha_c} \left[\frac{\phi^o c_{ef}}{B^{(n+1)}} + \left(\frac{1}{B^{(n+1)}} - \frac{1}{B^{(n)}} \right) \frac{\phi^{(n)}}{p^{(n+1)} - p^{(n)}} \right] \quad (5.19)$$

5.2.3 Discretização da EDH

Unindo-se as discretizações anteriores, ou seja, substituindo-se as Eqs. (5.12) e (5.13) na Eq. (5.7), temos:

$$E_i p_{i+1}^{(n+1)} + C_i p_i^{(n+1)} + W_i p_{i-1}^{(n+1)} = Q_i \quad (5.20)$$

tal que:

$$C_i = - \left(\Gamma_i^{(n+1)} + E_i + W_i \right) \quad (5.21a)$$

$$C_{G_i} = E_{G_i} + W_{G_i} \quad (5.21b)$$

$$E_i = T_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{(n+1)}, \quad E_{G_i} = \gamma_{i+\frac{1}{2}} E_i \quad (5.21c)$$

$$W_i = T_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{(n+1)}, \quad W_{G_i} = \gamma_{i-\frac{1}{2}} W_i \quad (5.21d)$$

$$Q_i = - \frac{\Gamma_i^{(n+1)}}{\Delta t} p_i^{(n)} - q_{sc}^{(n+1)} - E_i Z_{i+1} - C_{G_i} Z_i - W_i Z_{i-1} \quad (5.21e)$$

Analogamente à Eq. (5.20), podemos discretizar a EDH para um escoamento monofásico em duas dimensões como:

$$E_{i,j} p_{i+1,j}^{(n+1)} + W_{i,j} p_{i-1,j}^{(n+1)} + N_{i,j} p_{i,j+1}^{(n+1)} + S_{i,j} p_{i,j-1}^{(n+1)} + C_{i,j} p_{i,j}^{(n+1)} = Q_{i,j} \quad (5.22)$$

tal que:

$$E_{i,j} = T_{x_{i+\frac{1}{2},j}}^{(n+1)}, \quad E_{G_{i,j}} = \gamma_{i+\frac{1}{2},j} E_{i,j} \quad (5.23a)$$

$$W_{i,j} = T_{x_{i-\frac{1}{2},j}}^{(n+1)}, \quad W_{G_{i,j}} = \gamma_{i-\frac{1}{2},j} W_{i,j} \quad (5.23b)$$

$$N_{i,j} = T_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{(n+1)}, \quad N_{G_{i,j}} = \gamma_{i,j+\frac{1}{2}} N_{i,j} \quad (5.23c)$$

$$S_{i,j} = T_{y_{i,j-\frac{1}{2}}}^{(n+1)}, \quad S_{G_{i,j}} = \gamma_{i,j-\frac{1}{2}} S_{i,j} \quad (5.23d)$$

$$C_{G_{i,j}} = E_{G_{i,j}} + W_{G_{i,j}} + N_{G_{i,j}} + S_{G_{i,j}} \quad (5.23e)$$

$$C_{i,j} = - \left(\Gamma_i^{(n+1)} + E_{i,j} + W_{i,j} + N_{i,j} + S_{i,j} \right) \quad (5.23f)$$

$$\begin{aligned} Q_{i,j} = & - \frac{\Gamma_{i,j}^{(n+1)}}{\Delta x} p_{i,j}^{(n)} - q_{sc} - E_{G_{i,j}} Z_{i+1,j} - N_{G_{i,j}} Z_{i,j+1} \\ & - C_{G_{i,j}} Z_{i,j} - W_{G_{i,j}} Z_{i-1,j} - S_{G_{i,j}} Z_{i,j-1} \end{aligned} \quad (5.23g)$$

5.3 Representação do Poço

Para a representação do poço é fundamental o conhecimento do conceito de índice de produtividade/injetividade, que relaciona a pressão de fundo no poço com a sua vazão. Além disso, é necessário compreender os tipos de especificações que podem ser feitas para um poço.

5.3.1 Índice de poço

Da Eq. (2.10), é possível expressar o índice de poço como um produto de duas funções: uma dependendo das propriedades do fluido e outra das propriedades do poço, ou seja:

$$J_w = \frac{1}{\mu B} G_w \quad (5.24)$$

onde μ e B dependem da pressão no bloco; e G_w , exclusivamente das características do poço, tal que:

$$G_w = \frac{2\pi\beta_c k_H h}{\left[\ln\left(\frac{r_{eq}}{r_w}\right) + s \right]} \quad (5.25)$$

onde a permeabilidade horizontal é dada pela Eq. (2.8) e o raio equivalente de Peaceman (1983) pela Eq. (2.11).

5.3.2 Condição de Produção Imposta ao Poços

Existem principalmente duas condições de produção que podem ser imposta a um poço: pressão especificada ou vazão especificada.

5.3.2.1 Poço com pressão especificada

Para um poço que possui uma pressão especificada, p_{wf} , a vazão no mesmo pode ser calculada por:

$$q_{sc} = -J_w(p_{i,j} - p_{wf}) \quad (5.26)$$

onde J_w é o índice de poço, e pode ser calculado pela Eq. (5.24); e $p_{i,j}$, a pressão no bloco.

5.3.2.2 Poço com vazão especificada

Para um poço que possui uma vazão especificada, q_{sc} , a pressão de fundo pode ser calculada por:

$$p_{wf} = \frac{q_{sc}}{J_w} + p_{i,j} \quad (5.27)$$

onde J_w é o índice de poço e pode ser calculado pela Eq. (5.24); e $p_{i,j}$, a pressão no bloco.

5.3.3 Representação do poço no simulador

Como visto na Seção 5.3.2, a relação entre a vazão e a pressão de fundo de um poço é dada pelo índice de produtividade. Assim, independente do tipo de poço, a vazão medida em condições padrão, q_{sc} , sempre será conhecida.

Para a representação do poço no simulador basta substituir o valor da vazão na Eq. (5.23g) e, posteriormente, resolver o sistema.

No modelo de poço de Ding *et al.* (1998), o raio equivalente é considerado uma variável e além do cálculo de q_{sc} é necessário alterar as transmissibilidades ao redor do poço, conforme a Seção 2.7.3.

5.4 Linearização

A linearização é a aproximação feita para resolver a EDH, em função da pressão, explicitamente. Para isso é necessário determinar as variáveis dependentes da pressão na transmissibilidade. Ela pode ser dividida em duas partes: a primeira, G , depende exclusivamente da geometria do reservatório; e a segunda, das propriedades do fluido em função da pressão, ou seja,

$$T_{x_{i \pm \frac{1}{2}}} = G_{x_{i \pm \frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\mu B} \right)_{i \pm \frac{1}{2}} \quad (5.28)$$

Para o cálculo das variáveis dependentes da pressão, pode-se fazer:

$$\left(\frac{1}{\mu B} \right)_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{\mu_{i \pm \frac{1}{2}}} \frac{1}{B_{i \pm \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\mu(p_{i \pm \frac{1}{2}})} \frac{1}{B(p_{i \pm \frac{1}{2}})} \quad (5.29)$$

onde $\mu(p_{i \pm \frac{1}{2}})$ e $B(p_{i \pm \frac{1}{2}})$ representam, respectivamente, a viscosidade e o fator volume-formação à pressão $p_{i \pm \frac{1}{2}}$, a qual pode ser expressa por:

$$p_{i \pm \frac{1}{2}} = \frac{p_{i \pm 1}^{(n+1)} + p_i^{(n+1)}}{2} \quad (5.30)$$

Analogamente a Eq. (5.29), o peso específico, $\gamma_{i \pm \frac{1}{2}}$, da Eq. (5.12), também pode ser calculado pelo peso específico à pressão $p_{i \pm \frac{1}{2}}$.

Por outro lado, G_x não depende da pressão, e, de acordo com a Eq. (5.11), pode ser escrito por:

$$G_{x_{i \pm \frac{1}{2}}} = \beta_c \left(\frac{A_x k_x}{\Delta x} \right)_{i \pm \frac{1}{2}} \quad (5.31)$$

Para o cálculo de G_x , deve-se considerar um escoamento entre duas células cuja vazão é q de tal forma que, no contato, todo o fluido que sai de uma célula distribui-se uniformemente ao entrar na outra. A fim de desconsiderar os efeitos gravitacionais, considera-se um fluxo horizontal, ou seja, um dos blocos tem uma de suas faces centrada na face do outro, conforme a Fig. 27. Além disso, considera-se que o fluido tem viscosidade constante igual a μ .

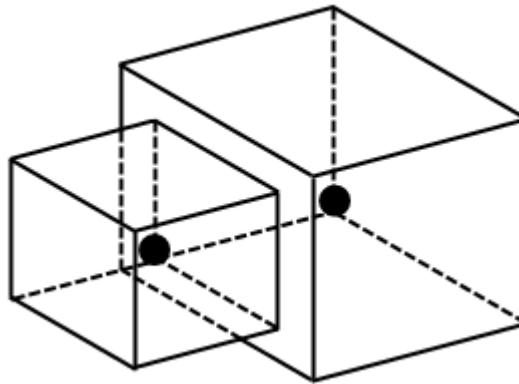


Figura 27: Escoamento monofásico entre duas células, desconsiderando efeitos gravitacionais.

Da Lei de Darcy, Seção 3.2, um fluxo de queda de pressão Δp , cujo fluido possui viscosidade constante μ e cuja rocha possui permeabilidade k , área transversal A e largura Δx , possui uma vazão q tal que:

$$q = -\beta_c \frac{kA}{\mu} \left(\frac{\Delta p}{\Delta x} \right) \quad (5.32)$$

Assim, a queda de pressão, Δp , pode ser expressa por:

$$\Delta p = -\frac{q\mu}{\beta_c} \left(\frac{\Delta x}{kA} \right) \quad (5.33)$$

Portanto, para a Fig. 27, a queda de pressão à esquerda e à direita podem ser escritas, respectivamente, por:

$$p_{i+\frac{1}{2}} - p_i = -\frac{q\mu}{\beta_c} \left(\frac{\Delta x_i/2}{k_i A_i} \right) \quad (5.34)$$

$$p_{i+1} - p_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{q\mu}{\beta_c} \left(\frac{\Delta x_{i+1}/2}{k_{i+1} A_{i+1}} \right) \quad (5.35)$$

e a queda de pressão entre os dois blocos pode ser escrita como:

$$p_{i+1} - p_i = -\frac{q\mu}{\beta_c} \left(\frac{\Delta x}{kA} \right)_{i+\frac{1}{2}} \quad (5.36)$$

Somando-se as Eqs. (5.34) e (5.35) e substituindo-se na Eq. (5.36), temos:

$$\left(\frac{\Delta x}{kA}\right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta x}{kA}\right)_i + \left(\frac{\Delta x}{kA}\right)_{i+1} \right] \quad (5.37)$$

Invertendo-se a equação e generalizando, temos:

$$\left(\frac{kA}{\Delta x}\right)_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{2(kA)_i(kA)_{i\pm 1}}{(kA)_i\Delta x_{i\pm 1} + (kA)_{i\pm 1}\Delta x_i} \quad (5.38)$$

Substituindo-se a Eq. (5.38) na Eq. (5.31), encontramos a discretização de G_x :

$$G_{x_{i\pm\frac{1}{2}}} = \frac{2\beta_c(k_x A_x)_i(k_x A_x)_{i\pm 1}}{(k_x A_x)_i\Delta x_{i\pm 1} + (k_x A_x)_{i\pm 1}\Delta x_i} \quad (5.39)$$

Analogamente a direção y , temos:

$$G_{y_{j\pm\frac{1}{2}}} = \frac{2\beta_c(k_y A_y)_j(k_y A_y)_{j\pm 1}}{(k_y A_y)_j\Delta y_{j\pm 1} + (k_y A_y)_{j\pm 1}\Delta y_j} \quad (5.40)$$

Com relação a linearização, será utilizado o método das iterações simples dos termos da transmissibilidade, para que as transmissibilidades não dependam da pressão $p^{(n+1)}$, diretamente. Neste método, a cada passo da iteração, para o cálculo da pressão $p^{(n+1)}$, as transmissibilidades são atualizadas. Ou seja, denotando-se essa iteração por ν , podemos escrever a Eq. (5.20) como:

$$E_i^{(\nu)} p_{i+1}^{(n+1)} + C_i^{(\nu)} p_i^{(n+1)} + W_i^{(\nu)} p_{i-1}^{(n+1)} = Q_i^{(\nu)} \quad (5.41)$$

Desta forma, lineariza-se as transmissibilidades em função da pressão.

5.5 Solução

Para determinar a distribuição de pressão após um intervalo de tempo especificado é necessário resolver um sistema de equações. A fim de simplificar as denotações, solucionaremos o sistema de equações para um fluxo unidimensional baseado na Eq. (5.20) que pode ser representado pela Fig. 28.

Assim, de acordo com a Fig. 28, o sistema composto por N blocos pode ser escrito

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_i & E_i \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i^{n+1} \\ | \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i \\ | \\ | \end{bmatrix}$$

Figura 28: Sistema de equações para o cálculo das pressões em um fluxo unidimensional. Adaptado de Ertekin *et al.* (2001).

por:

$$Ax = b \quad (5.42)$$

tal que A é uma matriz $N \times N$; x , $N \times 1$; e b , $N \times 1$.

Considerando que A e b sejam independentes de x , o sistema será linear e sua solução poderá ser encontrada por quaisquer métodos de solução de sistemas lineares como: eliminação Gaussiana, Gauss-Jordan, Jacobi, Gauss-Seidel, SOR (*successive overrelaxation*) ou técnicas de fatoração.

Pelo fato de existir uma biblioteca que soluciona um sistema linear esparsa utilizando o método de fatoração LU, conforme mencionado na Seção 4.2.2, o presente trabalho utilizará tal método.

A Fig. 29 resume o processo para o cálculo das pressões no tempo t_{n+1} em função das pressões no tempo t_n , baseando-se na Eq. (5.41). Tal processo utiliza como condição de convergência que o módulo da diferença das normas L2 dos vetores de pressão nas iterações ν e $\nu + 1$ seja menor que 1×10^{-8} .

Com relação ao processo de equilíbrio, ou seja, a condição inicial para a distribuição de pressão no reservatório, $p^{(n=0)}$, utiliza-se o equilíbrio hidrostático, ou seja, $\nabla\Phi = 0$. Dessa forma, de acordo com a Eq. (3.12) e pelo fato do peso específico depender da pressão, o cálculo da distribuição da pressão inicial será um processo iterativo baseado na equação:

$$p_{i,j}^{(\nu+1)} = p^o + \gamma_{i,j}^{(\nu)}(Z_{i,j} - Z^o) \quad (5.43)$$

onde p^o é a pressão de referência; z , a profundidade do centro do bloco; z^o , a profun-

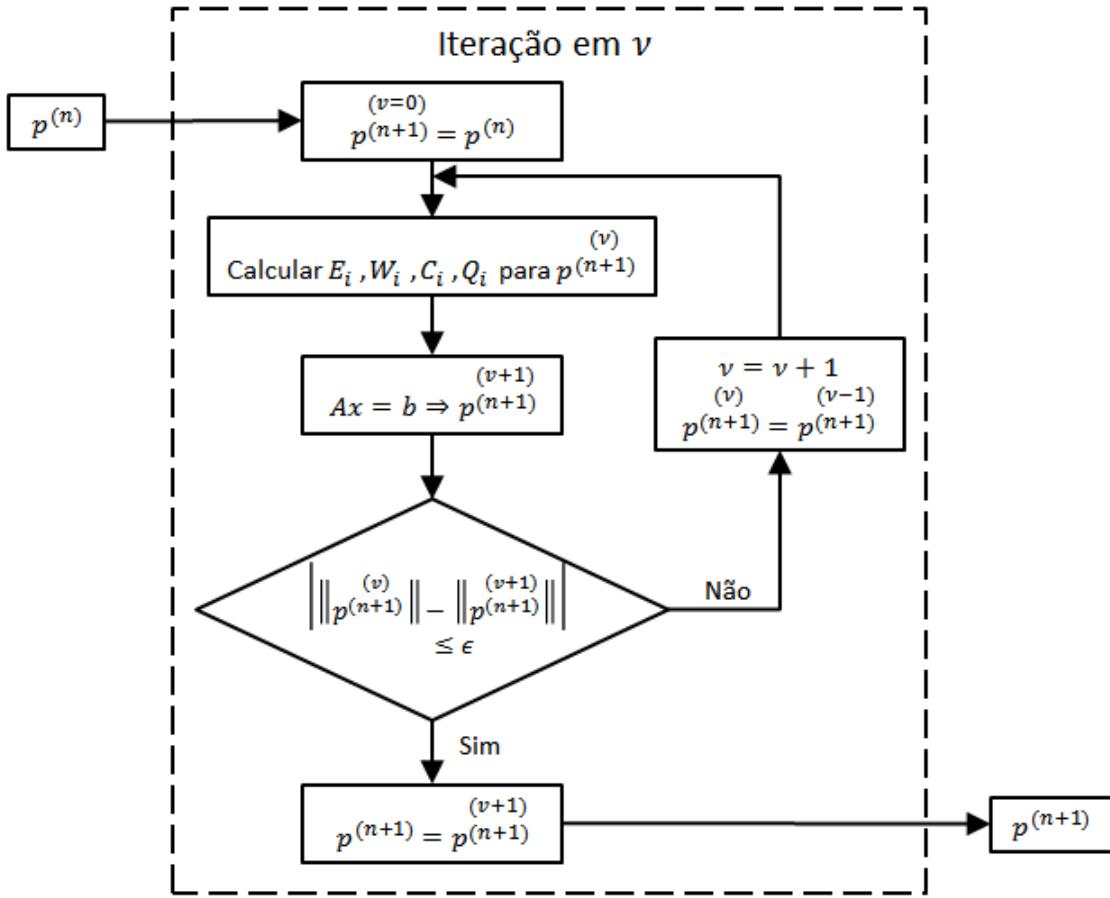


Figura 29: Processo iterativo para o cálculo da distribuição de pressão no tempo t_{n+1} a partir da distribuição de pressão no tempo t_n .

didade na qual a pressão p^o foi medida; e $\gamma_{i,j}^{(\nu)}$ é o peso específico na pressão $p_{i,j}^{(\nu)}$.

Além das transmissibilidades que influenciam a construção das matrizes de equações, A e b , existem as condições de contorno que modificam essas matrizes e consequentemente a solução do sistema. A seguir essas condições serão abordadas.

5.5.1 Condições de Contorno

Dentre as condições de contorno mais aplicáveis na simulação de reservatório destacam-se a de reservatório selado, a periódica, a de Dirichlet e a de Neumann.

5.5.1.1 Reservatório selado

Uma das condições de contorno para um reservatório de petróleo é um reservatório selado em suas fronteiras, ou seja, sem fluxo no limite externo, conforme a Fig. 30.

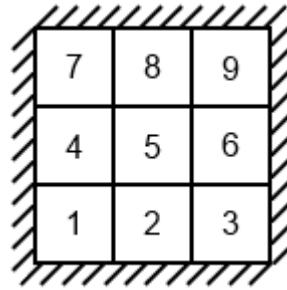


Figura 30: Reservatório discretizado em duas dimensões e selado nas fronteiras.

As direções e sentidos da Fig. 30 estão exemplificadas na Fig. 31.

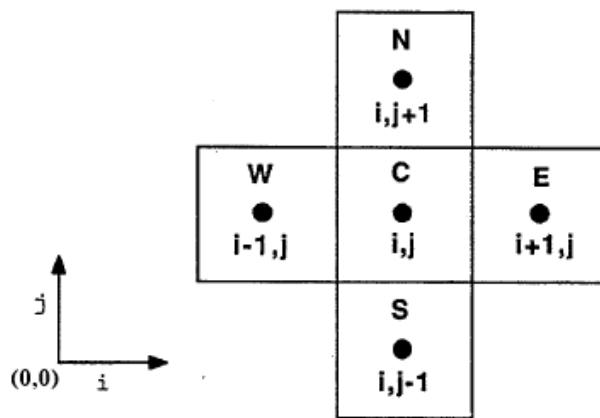


Figura 31: Direção, sentido e transmissibilidades do reservatório da Fig. 30. Adaptado de Ertekin *et al.* (2001).

Baseando-se na Eq. (5.22) e na Fig. 31, é possível construir o seguinte sistema de equações para o reservatório da Fig. 30:

$$\begin{bmatrix} C_1 & E_1 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_2 & C_2 & E_2 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_3 & C_3 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ S_4 & 0 & 0 & C_4 & E_4 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & S_5 & 0 & W_5 & C_5 & E_5 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & 0 & S_6 & 0 & W_6 & C_6 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & 0 & S_7 & 0 & 0 & C_7 & E_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_8 & 0 & W_8 & C_8 & E_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_9 & 0 & W_9 & C_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

onde as variáveis estão definidas pelas Eqs. (5.23a)-(5.23g), tal que cada sub-índice corresponde a um bloco, conforme a Fig. 30.

5.5.1.2 Condições de contorno periódicas

Na condição de contorno periódica todo o fluido que sai por uma face, entra pela face oposta, conforme a Fig. 32-a. A Fig. 32-b ilustra a numeração dos blocos e dos vizinhos nas fronteiras.

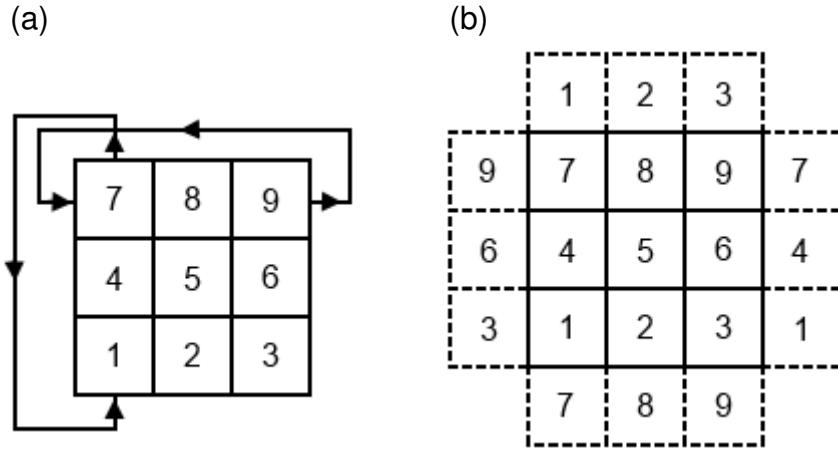


Figura 32: Reservatório com condição de contorno periódica: (a) exemplificação, (b) blocos numerados.

Baseando-se na Eq. (5.22) e na Fig. 31, é possível construir o seguinte sistema de equações para o reservatório da Fig. 32:

$$\begin{bmatrix} C_1 & E_1 & W_1 & N_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 \\ W_2 & C_2 & E_2 & 0 & N_2 & 0 & 0 & S_2 & 0 \\ E_3 & W_3 & C_3 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & S_3 \\ S_4 & 0 & 0 & C_4 & E_4 & W_6 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & S_5 & 0 & W_5 & C_5 & E_5 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & 0 & S_6 & E_6 & W_6 & C_6 & 0 & 0 & N_6 \\ N_7 & 0 & 0 & S_7 & 0 & 0 & C_7 & E_7 & W_7 \\ 0 & N_8 & 0 & 0 & S_8 & 0 & W_8 & C_8 & E_8 \\ 0 & 0 & N_9 & 0 & 0 & S_9 & E_9 & W_9 & C_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

onde as variáveis estão definidas pelas Eqs. (5.23a)-(5.23g), tal que os índices seguem a numeração da Fig. 32.

5.5.1.3 Condições de contorno de Dirichlet

Na condição de contorno de Dirichlet a pressão na fronteira do reservatório é especificada. Para implementar tal condição é necessário que se construa um bloco

vizinho, fictício, na fronteira. Considerando um fluxo unidirecional, a Fig. 33 resume essa ideia de tal forma que o bloco fictício tenha as mesmas propriedades que o seu vizinho.

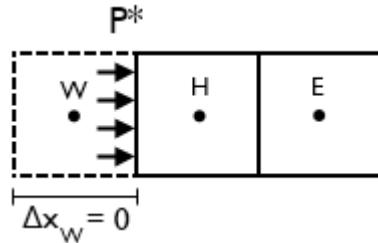


Figura 33: Ilustração da condição de contorno de Dirichlet para um fluxo unidirecional pela face a esquerda (W).

De acordo com a Eq. (5.20), a Fig. 33 pode ser representada por:

$$\begin{cases} E'_i p_E + C'_i p_H + W'_i p_W = Q'_i & \text{(a)} \\ p_W = p^* & \text{(b)} \\ \Delta x_W = 0 & \text{(c)} \end{cases} \quad (5.46)$$

De acordo com as Eqs. (5.21d), (5.28) e (5.39), para o cálculo de W'_i depende do cálculo de:

$$G'_W = \frac{2\beta_c(kA)_H(kA)_W}{(kA)_H \Delta x_W + (kA)_W \Delta x_H} \quad (5.47)$$

Substituindo-se a Eq. (5.46-c) na Eq. (5.47) e sabendo-se que as propriedades dos blocos H e W são iguais, ou seja, $(kA)_H = (kA)_W$, o valor real de G na face W será:

$$G'_W = \frac{2\beta_c(kA)_H}{\Delta x_H} \quad (5.48)$$

Por outro lado, o simulador considera que um bloco fictício tem as mesmas dimensões do seu vizinho, ou seja, $\Delta x_W = \Delta x_H$ e calcula G_W como:

$$G_W = \frac{\beta_c(kA)_H}{\Delta x_H} \quad (5.49)$$

Assim, somente a transmissibilidade na face W , W'_i , será diferente da calculada pelo simulador, W_i , ou seja:

$$W'_i = 2W_i \quad (5.50a)$$

$$E'_i = E_i \quad (5.50b)$$

Já o cálculo de C'_i , conforme as Eqs. (5.21a), (5.50a) e (5.50b), é dado por:

$$C'_i = -\left(\Gamma_i^{(n+1)} + E_i + 2W_i\right) = C_i - W_i \quad (5.51)$$

Substituindo-se as Eqs. (5.46-b), (5.51), (5.50a) e (5.50b) na Eq. (5.46-a), temos:

$$E_i p_E + (C_i - W_i) p_H = Q'_i - 2W_i p^* \quad (5.52)$$

Portanto, a Eq. (5.52) pode ser resumida por:

$$E_i^* p_E + C_i^* p_H + W_i^* p_W = Q_i^* \quad (5.53)$$

tal que:

$$\begin{cases} E_i^* = E_i & (a) \\ C_i^* = C_i - W_i & (b) \\ W_i^* = 0 & (c) \\ Q_i^* = Q_i - 2W_i p^* & (d) \end{cases} \quad (5.54)$$

Para um exemplo bidimensional com condição de contorno de Dirichlet em toda a fronteira à esquerda, conforme a Fig. 34, analogamente a Eq.(5.53), o sistema de equações será dado por:

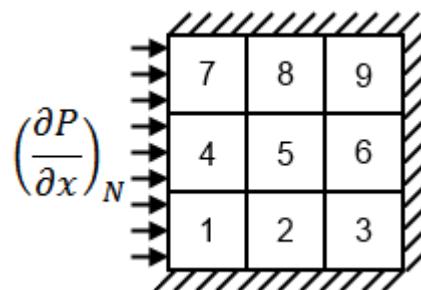


Figura 34: Reservatório discretizado em duas dimensões com condição de contorno de Dirichlet em toda a fronteira a esquerda e selado nas outras.

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} C_1^* & E_1 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_2 & C_2 & E_2 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_3 & C_3 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ S_4 & 0 & 0 & C_4^* & E_4 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & S_5 & 0 & W_5 & C_5 & E_5 & 0 & N_5 & 0 \\ 0 & 0 & S_6 & 0 & W_6 & C_6 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & 0 & S_7 & 0 & 0 & C_7^* & E_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_8 & 0 & W_8 & C_8 & E_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_9 & 0 & W_9 & C_9 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Q_1^* \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4^* \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7^* \\ Q_8 \\ Q_9 \end{array} \right] \quad (5.55)$$

tal que os índices estão baseados na Fig. 34; e as variáveis, nas Eqs. (5.23a)-(5.23g) e (5.54).

5.5.1.4 Condições de contorno de Neumann

Na condição de contorno de Neumann, a derivada da pressão na fronteira do reservatório é especificada. Analogamente a condição de contorno de Dirichlet, será necessário que se construa um bloco vizinho, fictício, na fronteira. Considerando um fluxo unidirecional, a Fig. 35 resume essa ideia de tal forma que o bloco fictício tem as mesmas propriedades e dimensões que o seu vizinho.

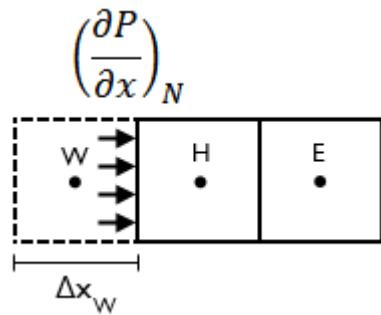


Figura 35: Ilustração da condição de contorno de Neumann para um fluxo unidirecional pela face a esquerda (W).

De acordo com a Eq. (5.20), a Fig. 35 pode ser representada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_i p_E + C'_i p_H + W'_i p_W = Q'_i \quad (a) \\ \frac{\partial p}{\partial x}|_W = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_N \quad (b) \\ \Delta x_W = \Delta x_H \quad (c) \end{array} \right. \quad (5.56)$$

Utilizando a Eq. (5.56-c), a Eq. (5.56-b) pode ser reescrita por:

$$\frac{\partial p}{\partial x}|_W = \frac{p_H - p_W}{\frac{\Delta x_W + \Delta x_H}{2}} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_N \rightarrow p_W = p_H - \Delta x_H \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_N \quad (5.57)$$

Como o simulador considera que o bloco fictício tem as mesmas dimensões do seu vizinho, conforme a Eq. (5.56-c), nenhuma modificação será necessária nas transmissibilidades e na discretização temporal, ou seja:

$$W'_i = W_i \quad (5.58a)$$

$$E'_i = E_i \quad (5.58b)$$

Daí, substituindo-se as Eqs. (5.21a), (5.57-b), (5.58a-b) na Eq. (5.56-a), temos:

$$E_i^* p_E + C_i^* p_H + W_i^* p_W = Q_i^* \quad (5.59)$$

tal que:

$$\begin{cases} E_i^* = E_i & (a) \\ C_i^* = C_i + W_i & (b) \\ W_i^* = 0 & (c) \\ Q_i^* = Q_i + \Delta x_H W_i \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_N & (d) \end{cases} \quad (5.60)$$

Para um exemplo bidimensional com condição de contorno de Neumann em toda a fronteira à esquerda, conforme a Fig. 36, analogamente à Eq.(5.59), o sistema de equações será idêntico a Eq. (5.55), porém os índices serão baseados na Fig. 36; e as variáveis, nas Eqs. (5.23a)-(5.23g) e (5.60).

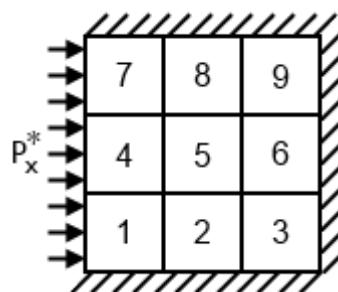


Figura 36: Reservatório discretizado em duas dimensões com condição de contorno de Neumann em toda a fronteira a esquerda e selado nas outras.

6 Verificação do Simulador

Nessa capítulo será verificada as implementações do simulador. Primeiramente, serão feitas simulações num reservatório conhecido (SPE A-1) para cada um dos três fluidos aceitos pelo simulador (incompressível, ligeiramente compressível e compressível). Em seguida, será simulado a malha dos cinco pontos, cuja solução analítica é conhecida, a fim de verificar a implementação da condição de contorno periódica. Por fim, será simulado um reservatório com condições de contorno de Dirichlet e outro com condições de contorno de Neumann. Para verificação, esses resultados serão comparados com as respectivas soluções analíticas.

6.1 Simulações no Reservatório SPE A-1

Com relação ao reservatório SPE A-1 foram realizadas três simulações em função do fluido: incompressível, ligeiramente compressível e compressível. Para cada uma dessas existem diferentes condições de produção para os poços, conforme explicado na Seção 4.3.6.

6.1.1 Escoamento de um fluido incompressível

Após a simulação de um escoamento de um fluido incompressível, de acordo com a Seção 4.3.6.1, obteve-se uma distribuição de pressão cuja diferença relativa com relação ao resultado apresentado por Ertekin *et al.* (2001) é apresentada na Fig. 37.

Com uma diferença relativa máxima de aproximadamente 0,26%, pode-se dizer que a implementação do escoamento incompressível, das configurações dos poços (tanto injetor quanto produtor), das considerações hidrostáticas e da condição de contorno de reservatório selado foram satisfeitas.

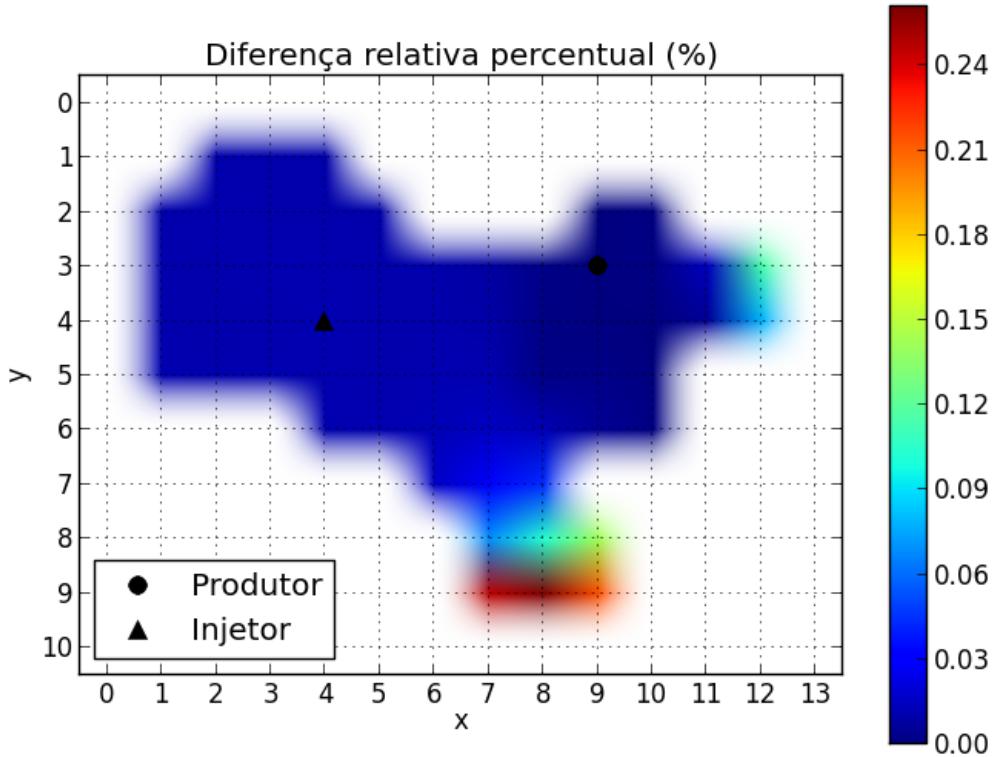


Figura 37: Diferença relativa entre os resultados de Ertekin *et al.* (2001) e o presente trabalho, para um escoamento incompressível.

6.1.2 Escoamento de um fluido ligeiramente compressível

Após a simulação do escoamento de um fluido ligeiramente compressível, de acordo com a Seção 4.3.6.1, obteve-se uma distribuição de pressão cuja comparação com os resultados apresentados por Ertekin *et al.* (2001) está exposto nas Figs. 38, 39, 40 e 41.

De acordo com as Figs. 38-41, os resultados da simulação foram visualmente compatíveis com os resultados de Ertekin *et al.* (2001). Porém, para uma análise mais precisa plotou-se um gráfico com as diferenças relativas para os principais resultados da simulação, conforme a Fig. 42.

As diferenças relativas da Fig. 42 são aceitáveis, porém a diferença da vazão no poço W-3 destaca-se por apresentar uma tendência depois de decorrido 20 dias de simulação. Isso ocorre porque a vazão cai drasticamente com o decorrer do tempo, conforme a Fig. 40, e considerando uma diferença aproximadamente constante entre o valores das vazões obtidas pelo presente trabalho e as de Ertekin *et al.* (2001), a diferença relativa percentual tende a aumentar com o tempo.

Além disso, na simulação de Ertekin *et al.* (2001) utilizou-se um tratamento explícito para os termos das transmissibilidades; e o presente trabalho, um tratamento

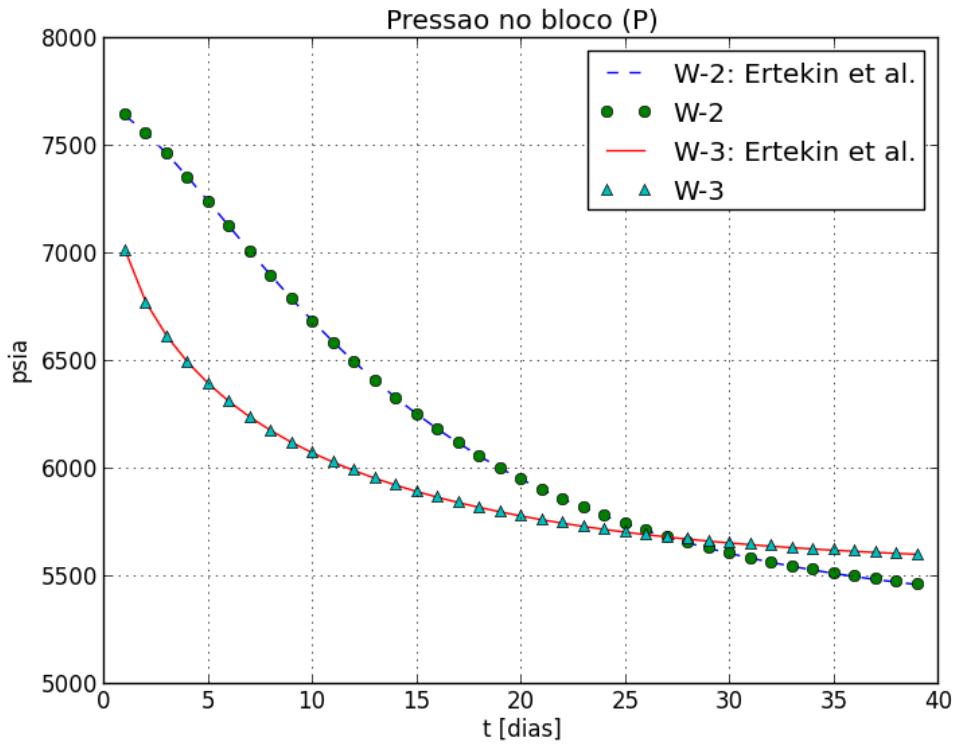


Figura 38: Comparação do comportamento da pressão nos blocos que contém os poços produtores para um escoamento ligeiramente compressível.

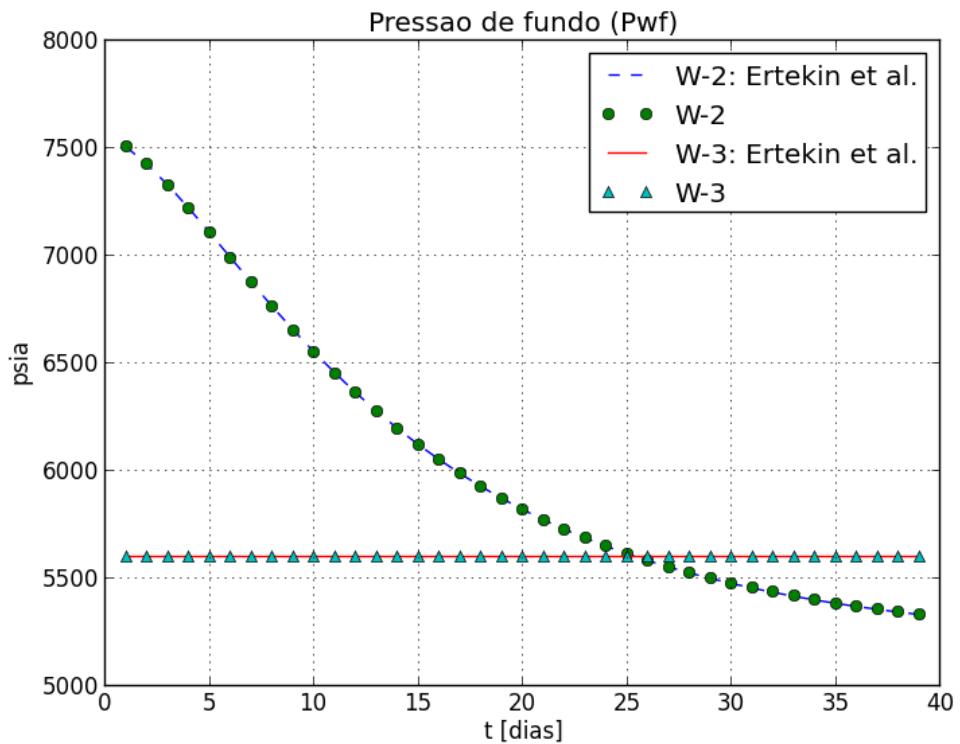


Figura 39: Comparação do comportamento da pressão nos poços produtores para um escoamento ligeiramente compressível.

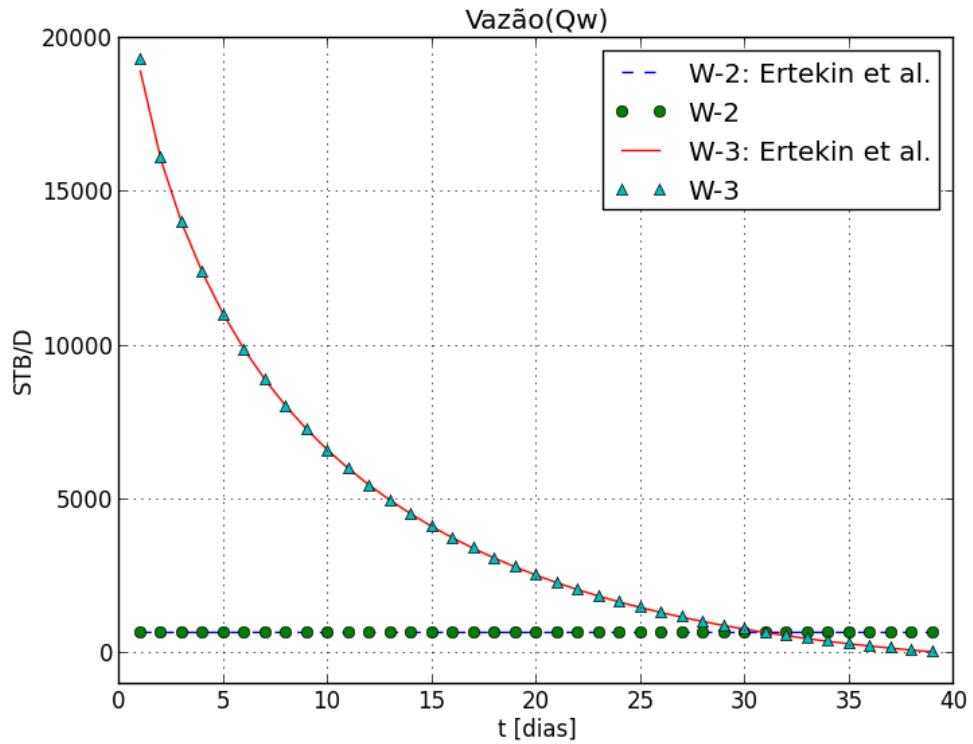


Figura 40: Comparação do comportamento da vazão nos poços produtores para um escoamento ligeiramente compressível.

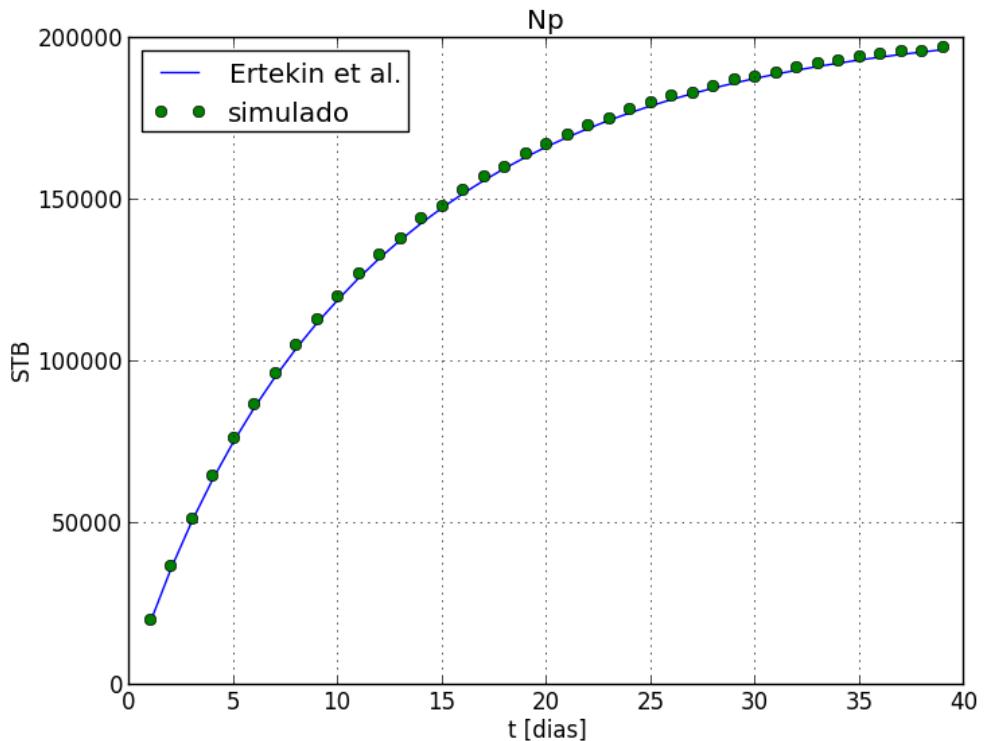


Figura 41: Comparação do comportamento da produção acumulada para um escoamento ligeiramente compressível.

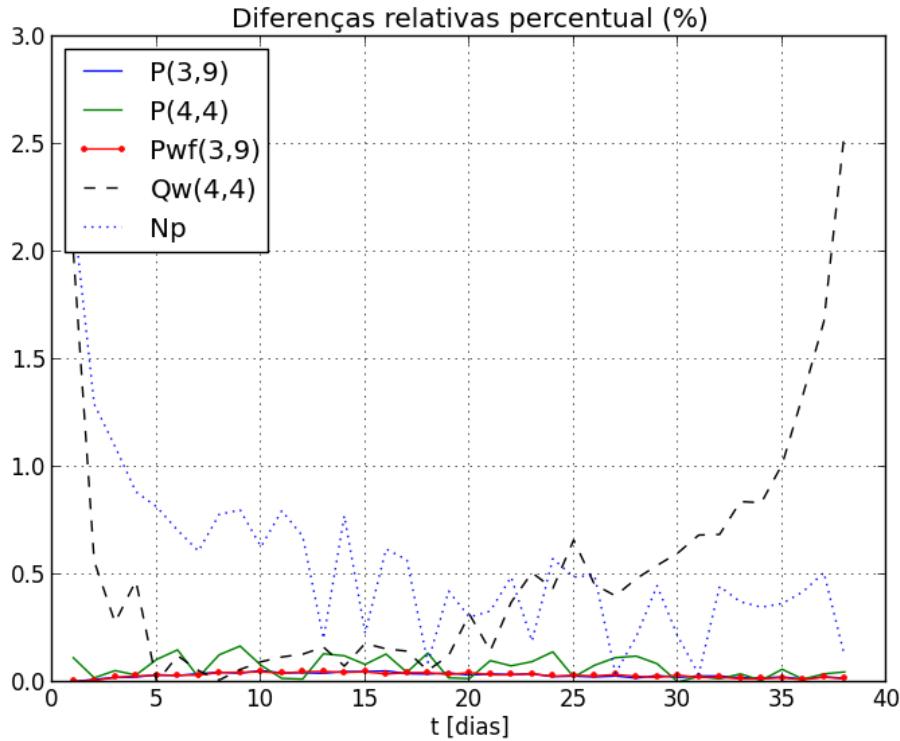


Figura 42: Diferença relativa percentual para alguns dos resultados da simulação do escoamento ligeiramente compressível utilizando o modelo de poço de Peaceman (1990).

implícito-iterativo. Consequentemente, as diferenças relativas percentuais foram elevadas como os valores da produção acumulada e da vazão no poço produtor W-3. Outra justificativa é o fato de que a simulação do livro texto não partiu do equilíbrio hidrostático.

Por outro lado, também foi simulado o mesmo exemplo para o modelo de poço Ding *et al.* (1998) utilizando uma aproximação do raio equivalente de Peaceman (1983), Eq. (2.11), ou seja:

$$r_{eq} = 0,14\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (6.1)$$

A Fig. 43 ilustra o resultado das diferenças relativas das pressões nos blocos produtores, da pressão de fundo, da vazão no poço e da produção acumulada. Comparando-a com a Fig. 42, conclui-se que o modelo de Ding *et al.* (1998) apresentou um comportamento semelhante ao modelo de Peaceman (1983).

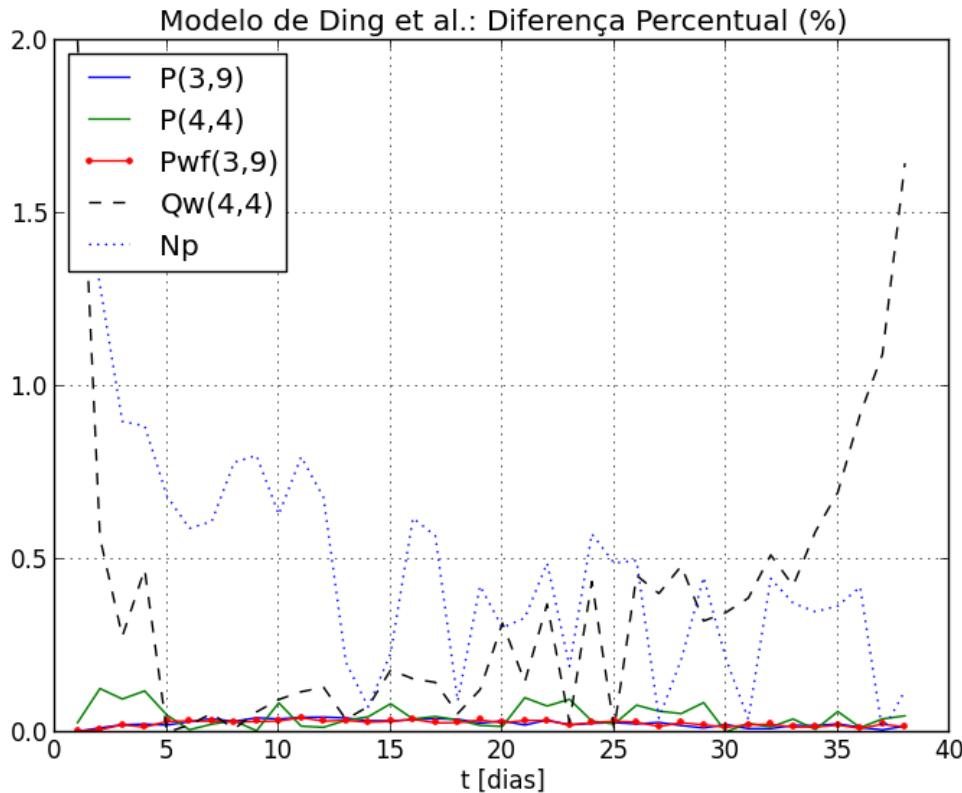


Figura 43: Diferença relativa percentual para alguns dos resultados da simulação do escoamento ligeiramente compressível utilizando o modelo de poço de Ding *et al.* (1998).

6.1.3 Escoamento de um fluido compressível

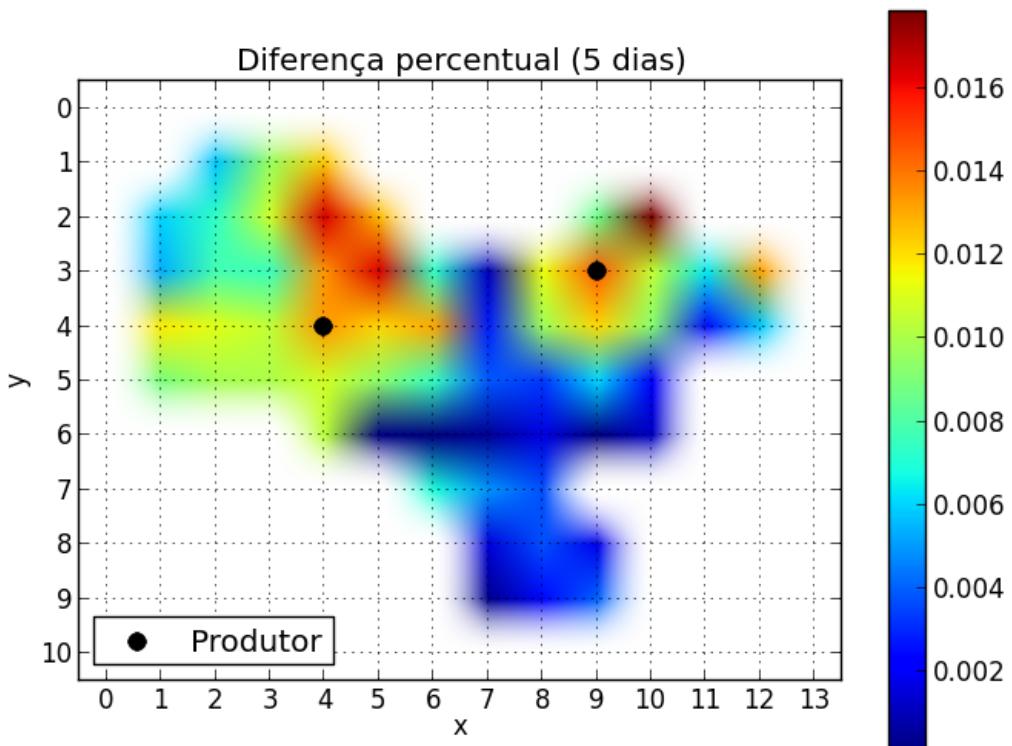
Após a simulação de um escoamento de um fluido compressível, de acordo com a Seção 4.3.6.1, obteve-se uma distribuição de pressão cuja diferença relativa percentual com relação ao resultado apresentado por Ertekin *et al.* (2001) após 5 e 100 dias de produção estão apresentadas na Fig. 44.

A Fig. 44-a apresenta uma diferença relativa máxima de aproximadamente 0,016% o que é um erro aceitável e esperado, visto que os resultados obtidos pelo simulador são dados com uma precisão de quatro algarismos significativos.

Após 100 dias de simulação (Fig. 44-b), é possível observar uma diferença média menor que 0,06% e uma máxima de aproximadamente 0,53%, que é encontrada na parte mais afunilada e distante dos poços.

Além da distribuição de pressão, comparou-se os dados de pressão no bloco, pressão no poço, vazão no poço e produção acumulada, obtendo-se as Figs. 45, 46, 47 e 48.

(a)



(b)

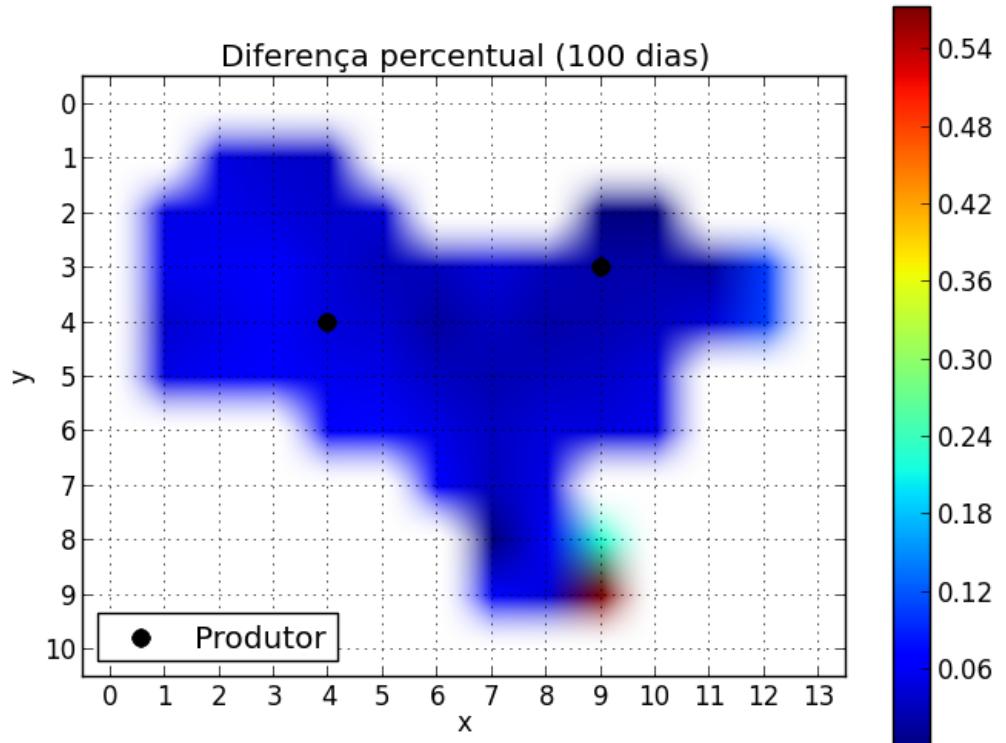


Figura 44: Diferença relativa entre os resultados de Ertekin *et al.* (2001) e o presente trabalho, para um escoamento compressível: (a) após 5 dias de simulação, (b) após 100 dias de simulação.

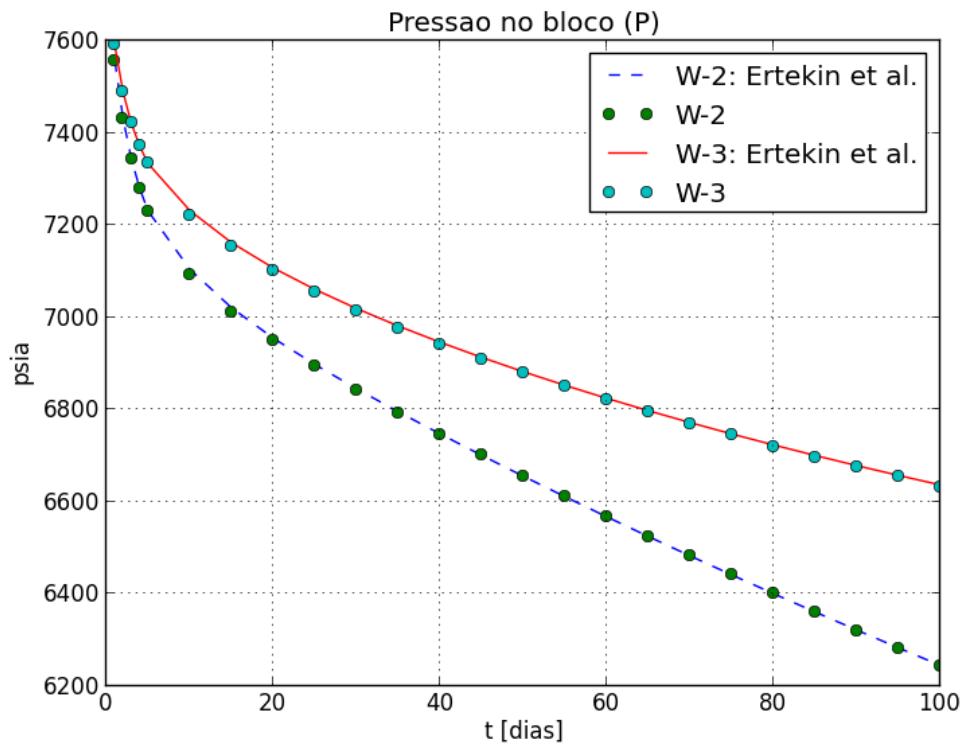


Figura 45: Comparação do comportamento da pressão nos blocos que contém os poços produtores para um escoamento de um fluido compressível.

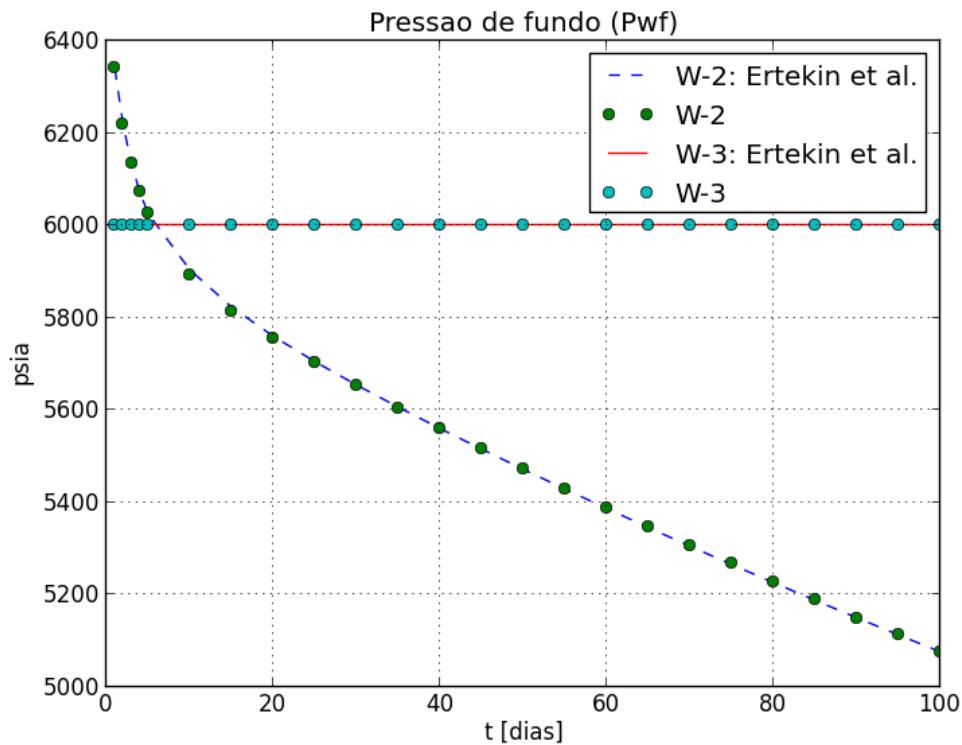


Figura 46: Comparação do comportamento da pressão nos poços produtores para um escoamento de um fluido compressível.

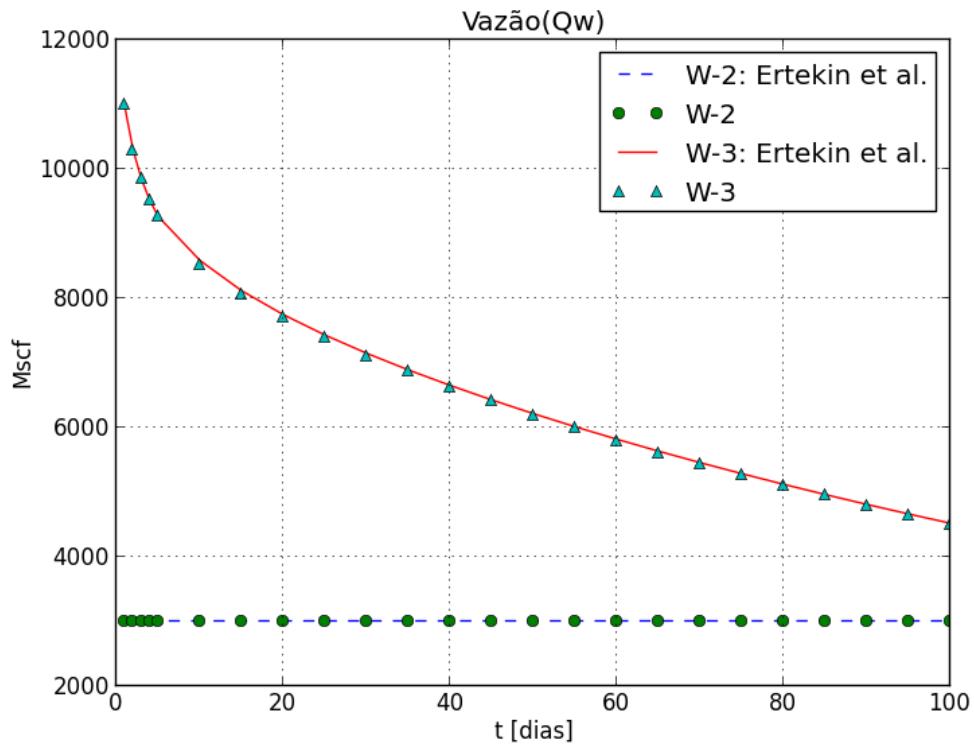


Figura 47: Comparação do comportamento da vazão nos poços produtores para um escoamento de um fluido compressível.

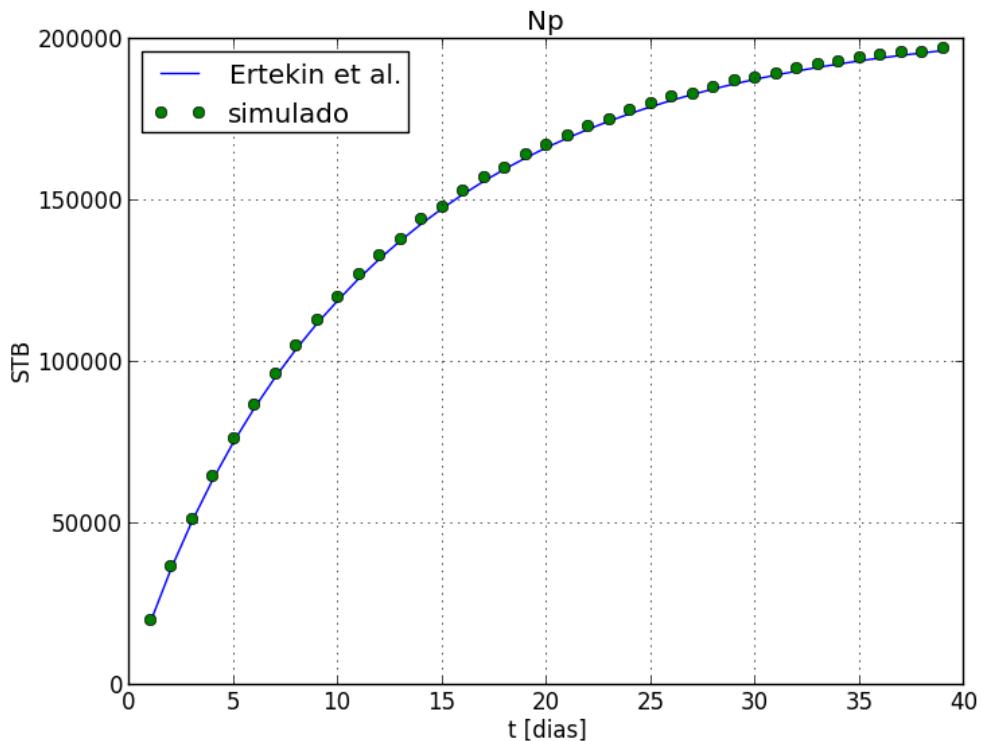


Figura 48: Comparação do comportamento da produção acumulada para um escoamento de um fluido compressível.

De acordo com as Figs. 45-48, os resultados da simulação foram visualmente compatíveis com os resultados de Ertekin *et al.* (2001). Porém, para uma análise mais precisa plotou-se um gráfico com as diferenças relativas para os principais resultados da simulação, conforme a Fig. 49.

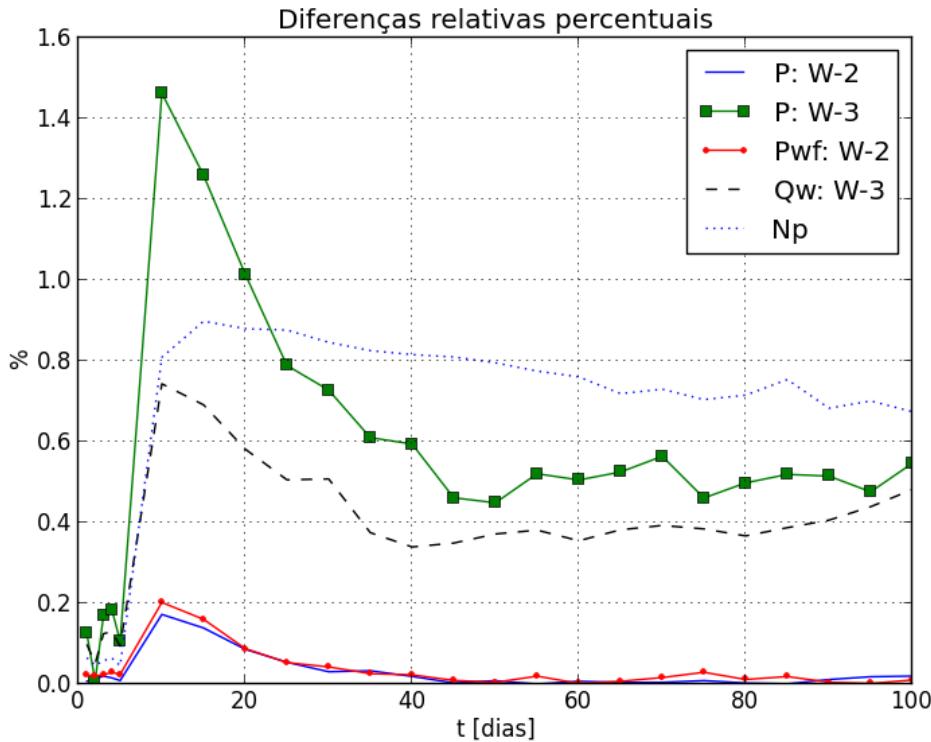


Figura 49: Diferença relativa percentual para alguns dos resultados da simulação do escoamento compressível.

Da Fig. 49 pode-se dizer que mesmo com um pico no tempo de 10 dias de simulação, os resultados encontrados condizem com os de Ertekin *et al.* (2001).

Analogamente ao escoamento ligeiramente compressível, simulou-se o mesmo exemplo para o modelo de poço Ding *et al.* (1998) utilizando uma aproximação do raio equivalente de Peaceman (1983) dado pela Eq. (6.1). A Fig. 50 ilustra o resultado das diferenças relativas das pressões nos blocos produtores, da pressão de fundo, da vazão no poço e da produção acumulada utilizando o modelo de Ding e Renard (1994).

Comparando-se as Figs. 49 e 50, conclui-se que o modelo de Ding *et al.* (1998) apresentou um comportamento semelhante ao modelo de Peaceman (1983).

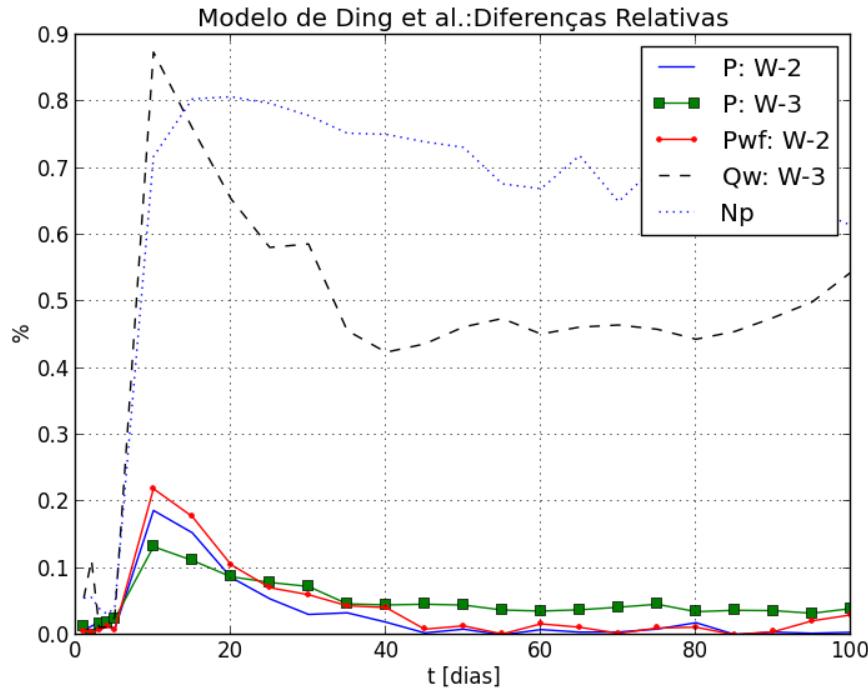


Figura 50: Diferença relativa percentual para alguns dos resultados da simulação do escoamento compressível utilizando o modelo de poço de Ding *et al.* (1998).

6.2 Simulações com condição de contorno

Nesta etapa será verificada as simulação com condições de contorno: periódicas, de Dirichlet e de Neumann.

6.2.1 Condição de contorno periódica

A verificação da condição de contorno periódica foi observada através da simulação da malha dos cinco pontos, de acordo com a Seção 4.3.6.2. Para tal simulação é necessário encontrar um padrão de repetição na malha dos cinco pontos e aplicar condições de contorno periódicas em suas fronteiras. A Fig. 51 destaca tal padrão de repetição.

De acordo com a Fig. 51-b e com as propriedades da simulação informadas nas Tabelas 3 e 4, a distribuição da pressão para a simulação da malha dos cinco pontos até o regime permanente pode ser encontrada na Fig. 52. O fluido utilizado na simulação é o mesmo fluido ligeiramente compressível da simulação no reservatório SPE A-1.

A diferença relativa percentual com relação à solução apresentada pela Eq. (4.2)

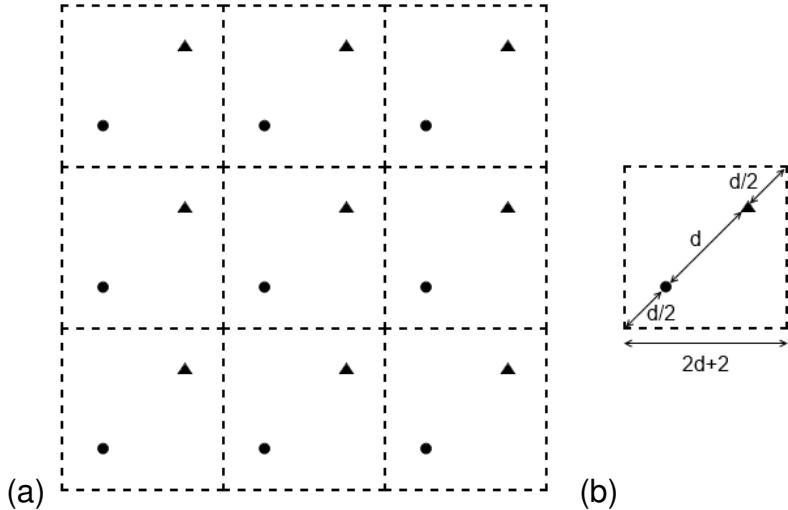


Figura 51: Parte da malha infinita dos cinco pontos, destacando-se o padrão: (a) com repetição, (b) com as dimensões do padrão, sendo d o número de blocos entre os poços e $2d + 2$ o número de blocos no comprimento horizontal.

Tabela 3: Dados utilizados na simulação da malha dos cinco pontos.

Propriedade	Valor
Número de blocos	42x42
Distância entre os poços	$d = 20$ blocos
Dimensões dos blocos	$10 \times 10 \times 10 \text{ ft}^3$
Permeabilidade	100 mD
Porosidade	0,30
Passo de tempo	0,01 dia

obtida, considerando que a simulação já tenha atingido o regime permanente (52-b), está ilustrada na Fig. 53.

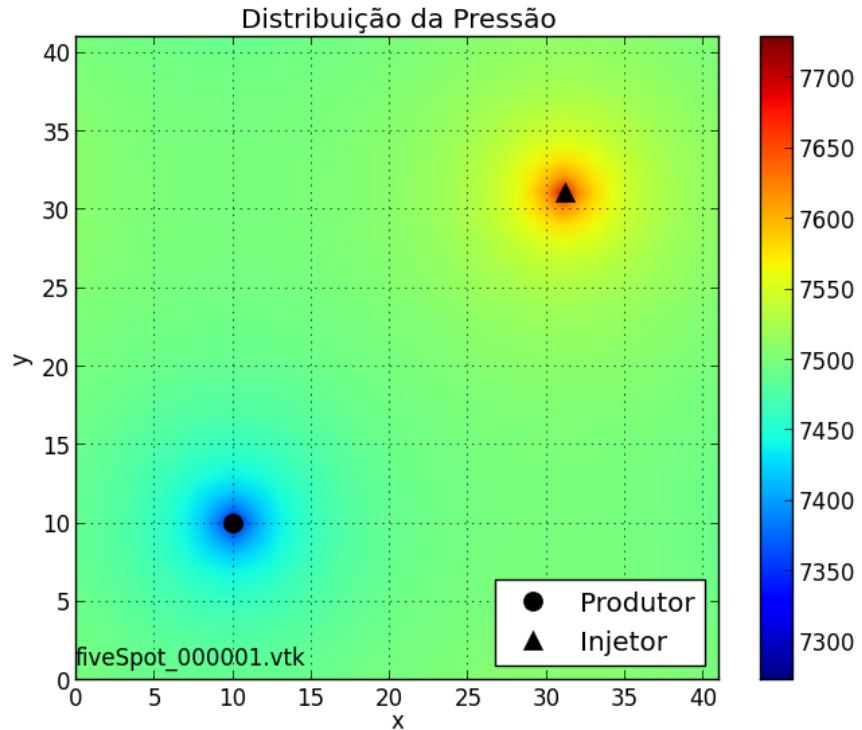
A Fig. 53 mostra que os maiores valores para a diferença relativa encontram-se próximo aos poços e, como são de aproximadamente 0,030%, são aceitáveis. Isso ocorre porque a solução analítica considera um fluxo radial ao redor do poço enquanto o simulador, um fluxo linear bidimensional.

6.2.2 Condição de contorno de Dirichlet

De acordo com a Seção 4.3.6.2, para verificar a condição de contorno de Dirichlet será necessário analisar o comportamento do reservatório em função do tempo e comparar com o resultado esperado dado pela Eq. (4.10).

Como condição inicial utilizou-se a distribuição de pressão dada pela Eq. (4.7) e, como condição de contorno, a pressão constante e igual a 6500 psia em toda a fronteira do reservatório. As propriedades do fluido ligeiramente compressível encontram-

(a)



(b)

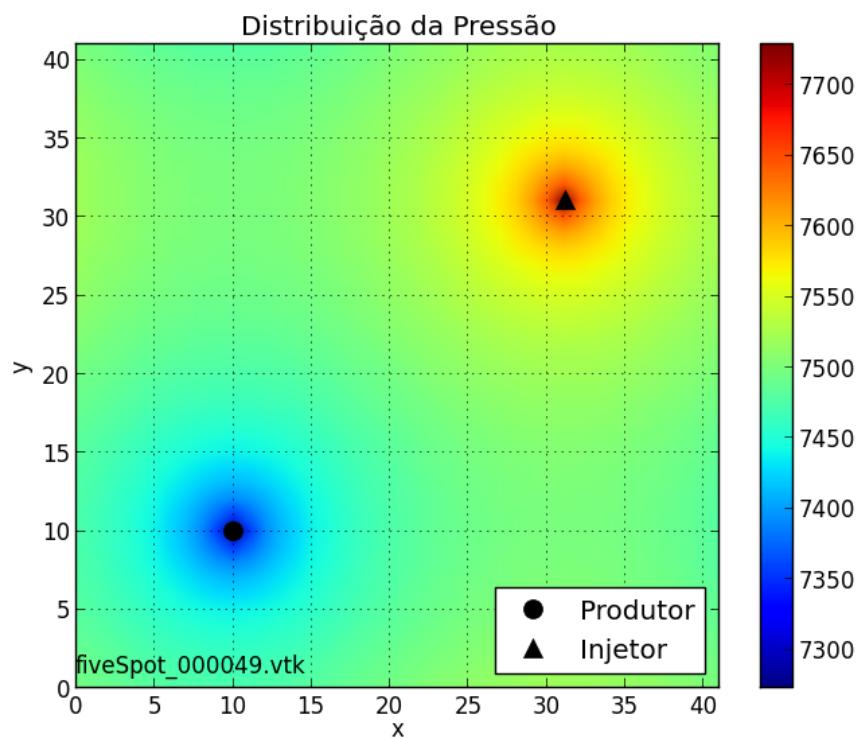


Figura 52: Distribuição da pressão para a simulação da malha dos cinco pontos: (a) regime transitório, (b) regime permanente.

Tabela 4: Informações dos poços produtores e injetores utilizados na simulação da malha dos cinco pontos.

Poço	Posição	Raio do poço (ft)	Espessura (ft)	Vazão imposta (STB/D)
Produtor	(10,10)	0,25	10	-400
Injetor	(31,31)	0,25	10	400

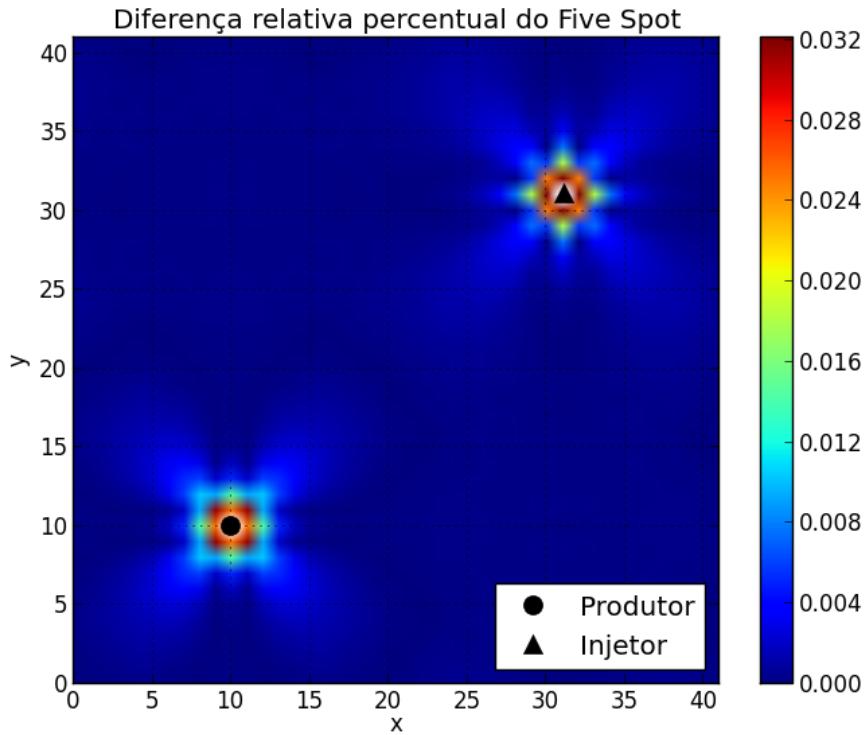


Figura 53: Diferença relativa percentual para a simulação da malha dos cinco pontos em regime permanente.

se na Tabela 10; e as do reservatório, na Tabela 5. A distribuição de pressão obtida, conforme essas condições, encontra-se na Fig. 54.

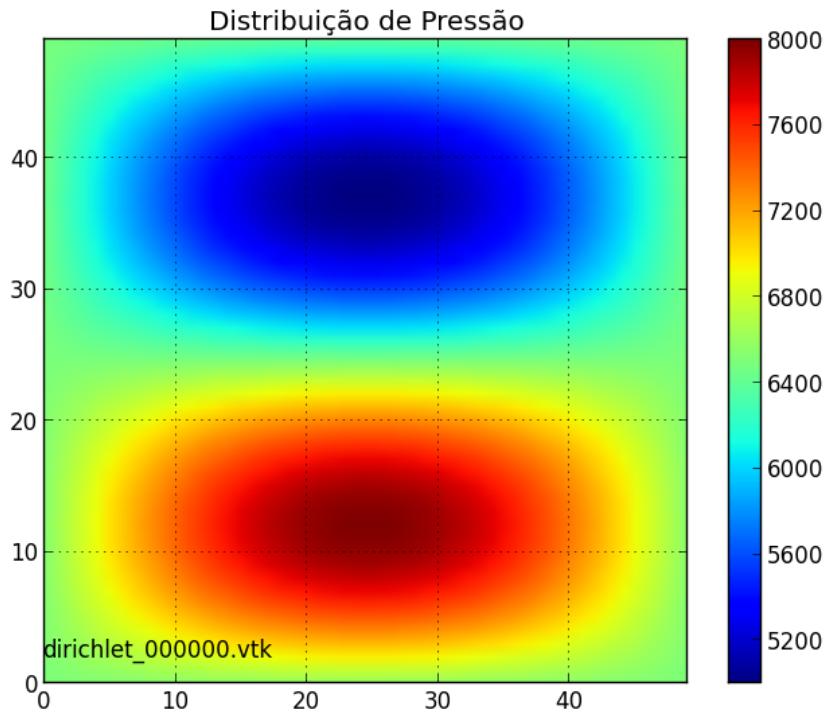
A distribuição da queda de pressão, Fig. 54, satisfez, visualmente, a Eq. (4.10), ou seja, houve apenas uma redução de sua amplitude.

Para analisar melhor a queda de pressão no reservatório, escolheram-se alguns pontos nos quais a pressão foi registrada em função do tempo, conforme a Fig. 55.

De acordo com a Fig. 55, pode-se dizer que a simulação satisfez a solução analítica. Porém, buscando-se uma verificação mais precisa, analisou-se a diferença percentual absoluta e percebeu-se que a mesma depende do passo de tempo adotado.

Assim, para cada passo de tempo adotado, determinou-se e plotou-se a maior diferença percentual absoluta, conforme a Fig. 56.

(a)



(b)

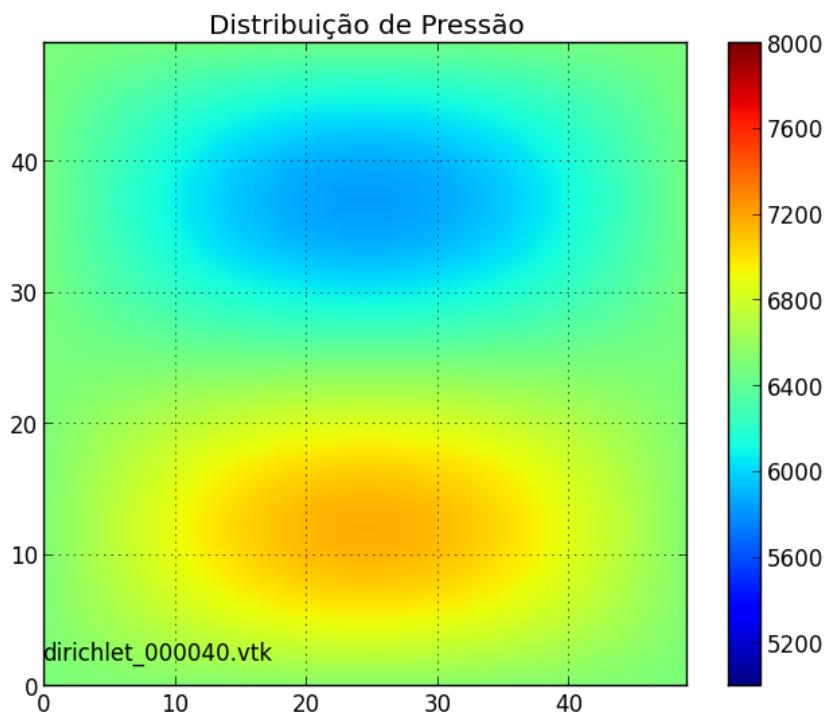


Figura 54: Distribuição de pressão para a simulação com condição de contorno de Dirichlet: (a) inicial, (b) após 0,4 dia.

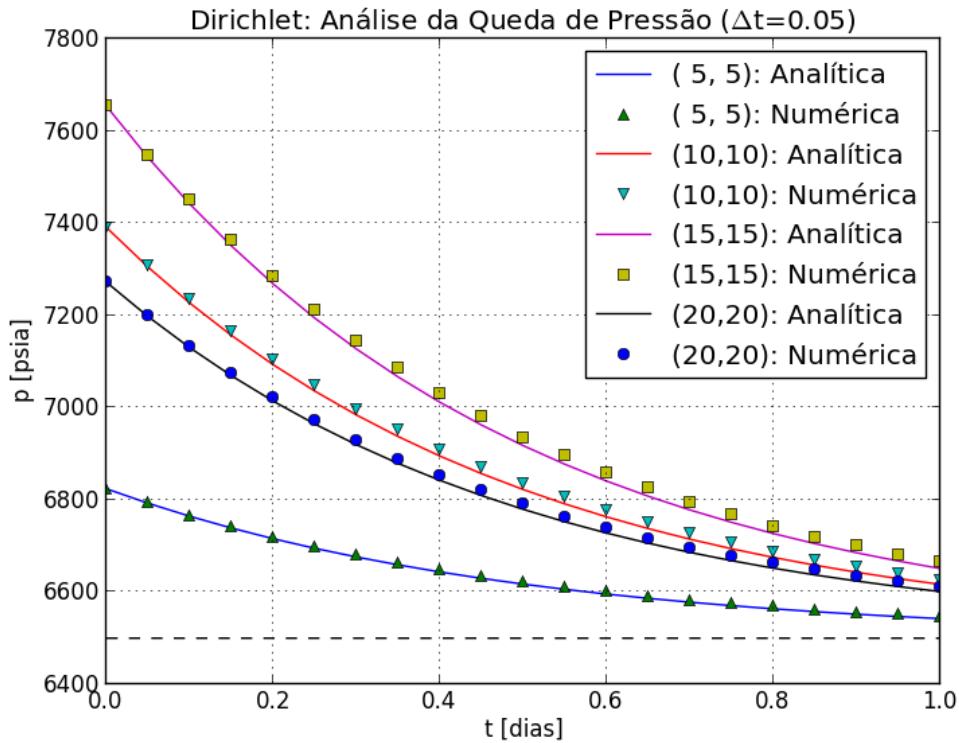


Figura 55: Análise de pressão em alguns pontos do reservatório para a simulação da condição de contorno de Dirichlet com passo de tempo de 0,05 dia.

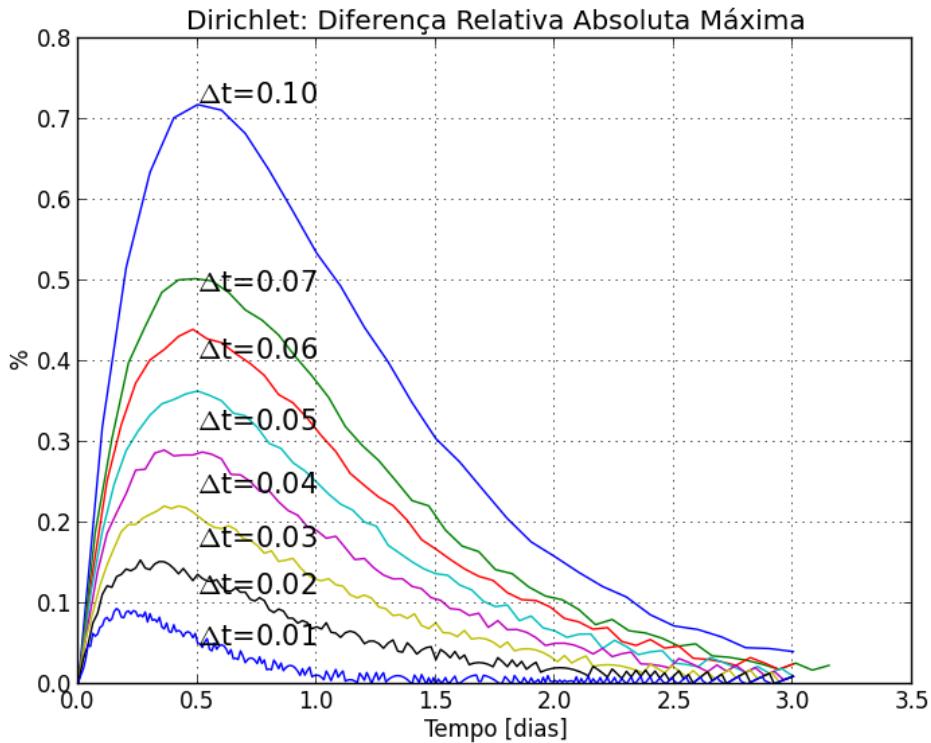


Figura 56: Diferença percentual absoluta máxima entre a solução analítica e a simulação numérica.

Tabela 5: Dados utilizados na simulação do reservatório com condições de contorno de Dirichlet.

Propriedade	Valor
Número de blocos	50x50
Dimensões dos blocos	50x50x10
Permeabilidade	100 mD
Porosidade	0,30
Passo de tempo	0,01 dia

A Fig. 56 mostra que quanto menor o passo de tempo utilizado, menor será a diferença entre a solução analítica e a solução numérica. Para um diagnóstico mais completo da diferença relativa será plotado um gráfico logaritmo do passo de tempo pela diferença máxima. Esse gráfico encontra-se na Fig. 57.

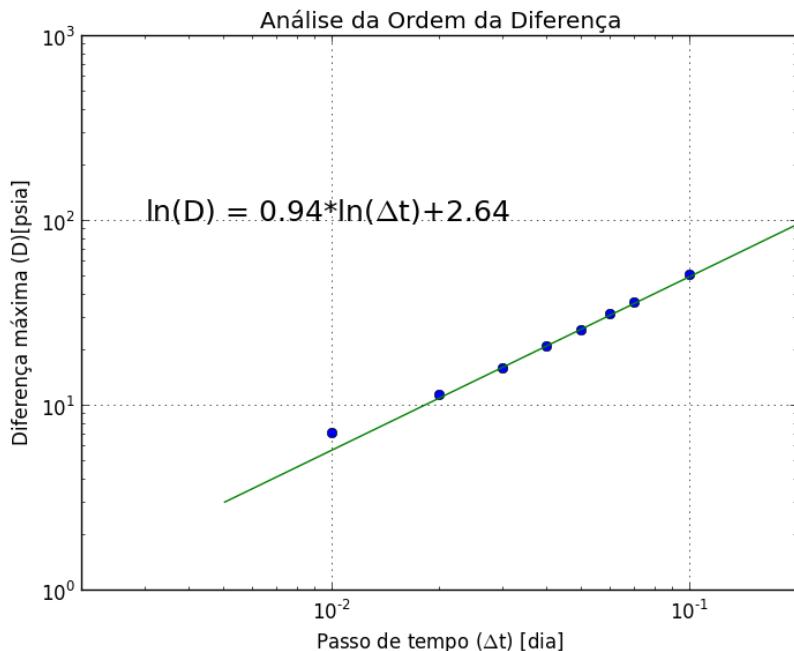


Figura 57: Análise da ordem da diferença com relação ao passo de tempo entre a solução analítica e a solução numérica na simulação da condição de contorno de Dirichlet.

Com relação a Fig. 57, é possível concluir que a ordem da diferença entre a solução analítica e a solução numérica é de $\Delta t^{0,94}$. Ou seja, enquanto a ordem do erro do simulador é de $\Delta t^{1,00}$, a ordem da diferença obtida foi de $\Delta t^{0,94}$. Assim, quanto menor o Δt escolhido, melhores serão os resultados.

Portanto, pelo fato da discrepância entre a solução analítica e numérica serem pequenas e pelas mesmas estarem dentro do esperado (ordem de $\Delta t^{0,94}$), a implementação da condição de contorno de Dirichlet pode ser considerada um sucesso.

6.2.3 Condição de contorno de Neumann

De acordo com a Seção 4.3.6.2, para verificar a condição de contorno de Neumann será necessário analisar o comportamento do reservatório em função do tempo e comparar com a solução analítica dada pela Eq. (4.13).

Como condição inicial utilizou-se a distribuição de pressão dada pela Eq. (4.11) e, como condições de contorno, a derivada da pressão nula em toda a fronteira do reservatório. As propriedades do fluido e do reservatório são idênticas a da simulação da condição de contorno de Dirichlet, ou seja, Tabelas 10 e 5, respectivamente. A distribuição de pressão obtida, conforme essas condições, encontra-se na Fig. 58.

A distribuição da queda de pressão, Fig. 58, satisfez, visualmente, a Eq. (5.59), ou seja, houve apenas uma redução de sua amplitude.

Para analisar melhor a queda de pressão no reservatório, escolheram-se alguns pontos nos quais a pressão foi registrada em função do tempo, conforme a Fig. 59.

De acordo com a Fig. 59, pode-se dizer que a simulação satisfez a solução analítica. Analogamente a condição de contorno de Dirichlet, analisou-se a diferença percentual absoluta e percebeu-se que a mesma depende do passo de tempo adotado.

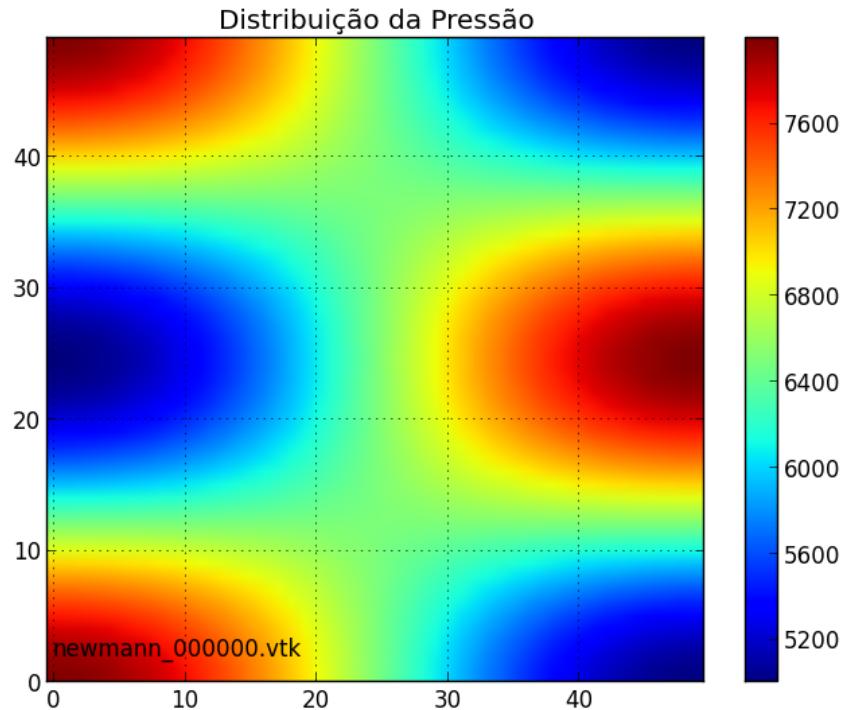
Assim, para cada passo de tempo adotado, determinou-se e plotou-se a maior diferença percentual absoluta, conforme a Fig. 60.

A Fig. 60 mostra que quanto menor o passo de tempo utilizado, menor será a diferença entre a solução analítica e a solução numérica. Para um diagnóstico mais completo da diferença relativa será plotado um gráfico logaritmo do passo de tempo pela diferença máxima. Esse gráfico encontra-se na Fig. 61.

Com relação a Fig. 61, é possível concluir que a ordem da diferença entre a solução analítica e a solução numérica é de $\Delta t^{0,95}$. Ou seja, enquanto a ordem do erro do simulador é de $\Delta t^{1,00}$, a ordem da diferença obtida foi de $\Delta t^{0,95}$. Assim, quanto menor o Δt escolhido, melhores serão os resultados.

Portanto, pelo fato da discrepância entre a solução analítica e numérica serem pequenas e pelas mesmas estarem dentro do esperado (ordem de $\Delta t^{0,95}$), a implementação da condição de contorno de Neumann pode ser considerada um sucesso.

(a)



(b)

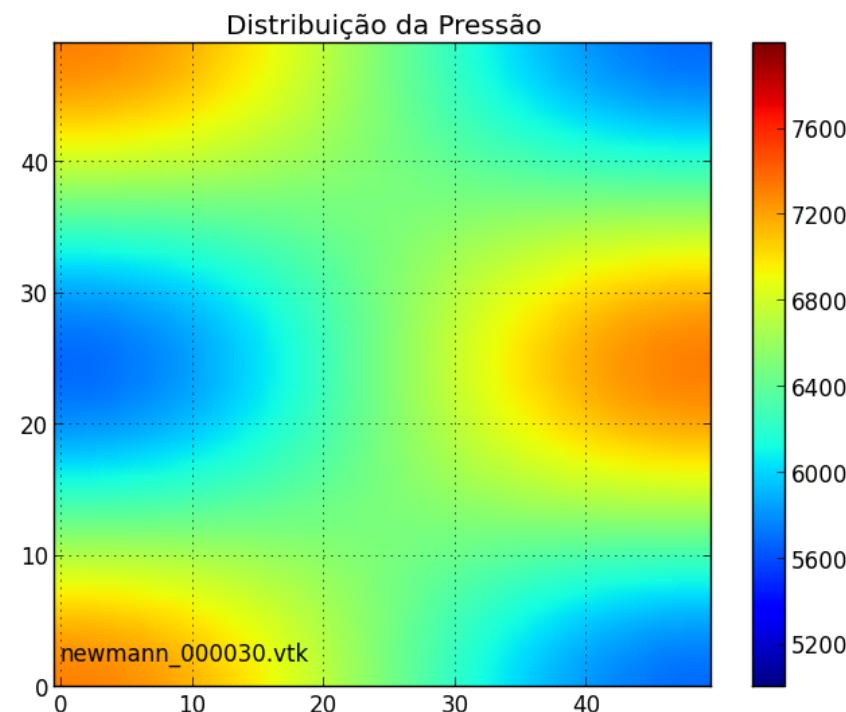


Figura 58: Distribuição de pressão para a simulação com condição de contorno de Neumann: (a) inicial, (b) após 0,3 dia.

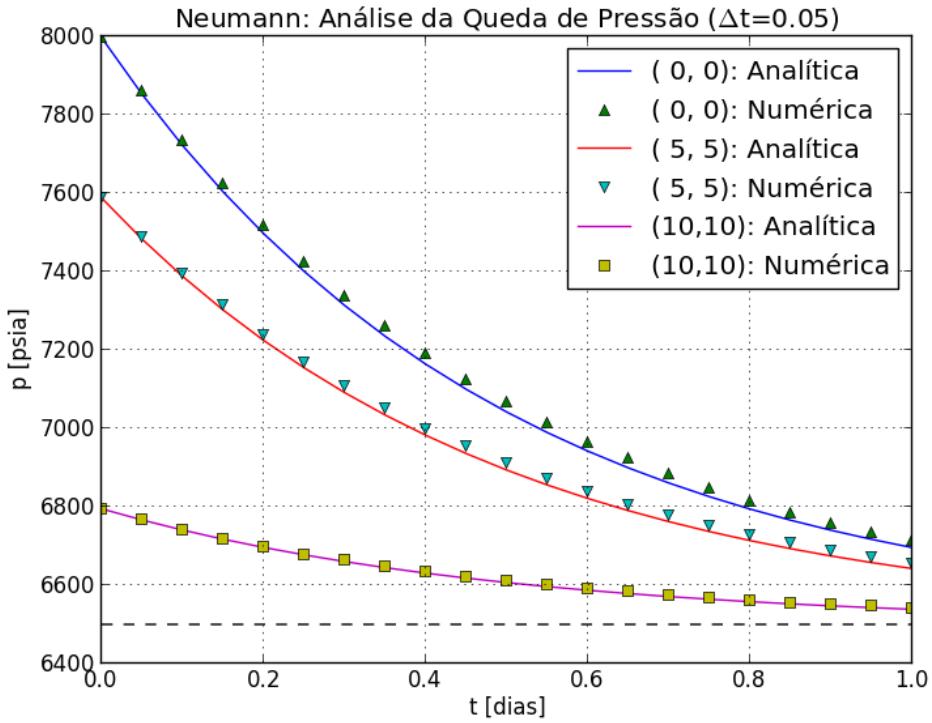


Figura 59: Análise de pressão em alguns pontos do reservatório para a simulação da condição de contorno de Neumann com passo de tempo de 0,05 dia.

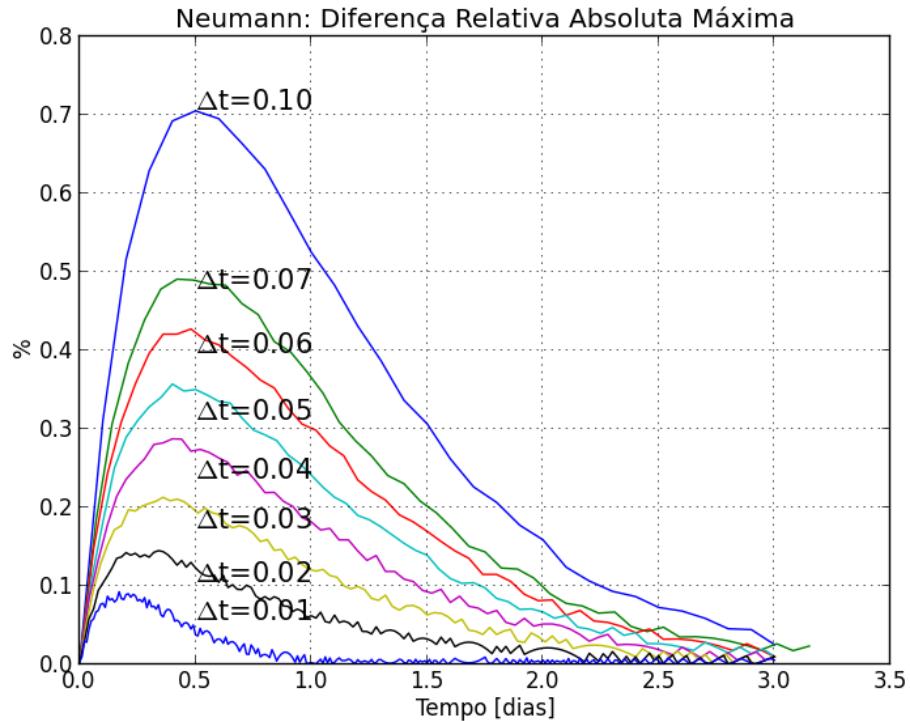


Figura 60: Diferença percentual absoluta máxima entre a solução analítica e a simulação numérica.

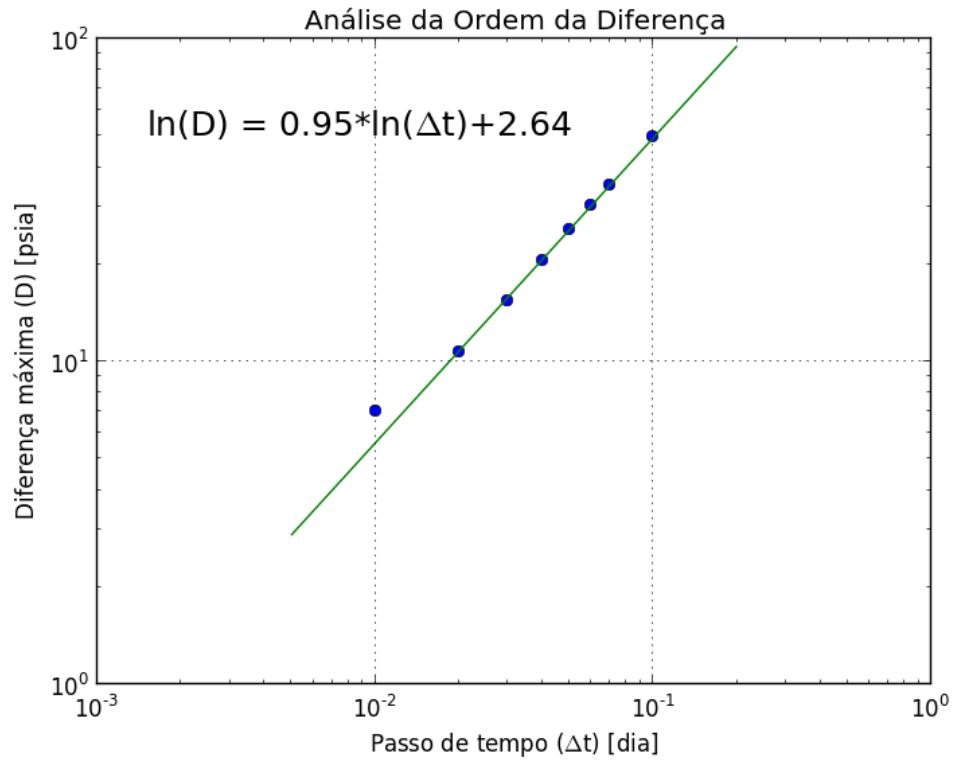


Figura 61: Análise da ordem da diferença com relação ao passo de tempo entre a solução analítica e a solução numérica na simulação da condição de contorno de Dirichlet.

7 *Aplicação: Análise Comparativa da Pseudo-estocagem nos Modelos Para a Representação de Poços Verticais*

No Capítulo 6 foi possível observar que as implementações dos modelos de poços de Peaceman (1983) e Ding *et al.* (1998) foram satisfatórias em períodos longos. Neste capítulo será realizada uma análise comparativa meramente qualitativa do comportamento da pressão no poço nos períodos iniciais de produção.

Para isso, inicialmente, será introduzido os principais efeitos envolvidos nos períodos iniciais de produção numa simulação numérica: a estocagem, a pseudo-estocagem e fator de película. Em seguida, será realizada uma análise comparativa da pseudo-estocagem em função do fator de película, do modelo de poço, do passo de tempo, do espaçamento da malha e da forma dos blocos da simulação.

7.1 Efeito da Estocagem em Teste de Pressão

Quando o poço é aberto ao fluxo, a produção até a superfície é inicialmente devido a expansão do fluido estocado dentro do poço e a contribuição do reservatório nesse período inicial é desprezível. Esse regime de fluxo característico é chamado de efeito de estocagem pura e ocorre de alguns segundos a alguns minutos (BOURDET, 2002).

Um dos gráficos capazes de detectar o efeito da estocagem é o gráfico logarítmico que plota a pressão adimensional e a derivada de Bourdet em função do tempo adimensional, conforme a Fig. 62. A derivada de Bourdet é calculada por:

$$p'_{wD} = \frac{dp_{wD}}{d \ln t_D} = t_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} \quad (7.1)$$

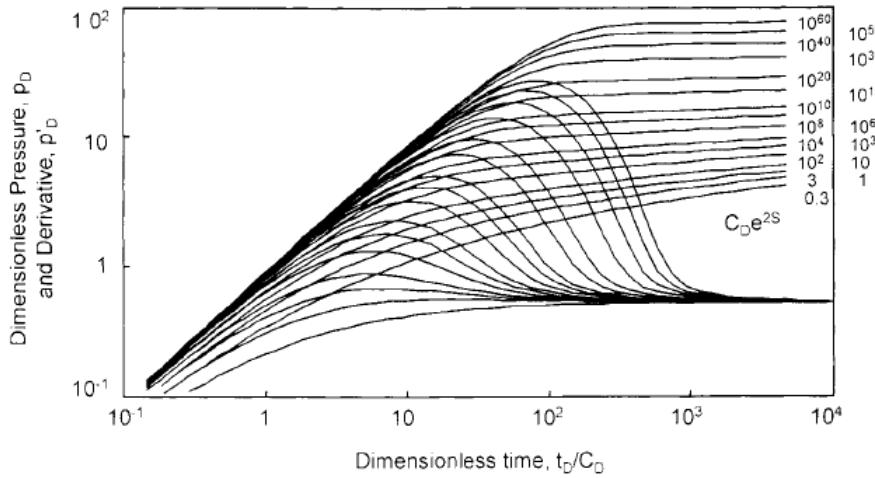


Figura 62: Curvas tipo da pressão pressão adimensional e da derivada de Bourdet para um poço com estocagem e fator de película em função do tempo adimensional, t_D/C_D . No gráfico S é o fato de película e C_D é o coeficiente de estocagem adimensional. Fonte: Bourdet (2002).

As principais características da Fig. 62 são as retas presentes no gráfico. Nos tempos iniciais, destaca-se a reta com inclinação de 45° , tanto para o gráfico da pressão quanto para o da derivada. Após o período de estocagem, o gráfico da derivada é caracterizado por apresentar um valor constante e igual a 0,5.

A Fig. 62 também considera um efeito de película. Essa efeito é um modelo puramente matemático que tem por finalidade simular uma situação causada por um fenômeno real: o dano (ou estímulo) de formação (ROSA *et al.*, 2006). Esse efeito pode ser inserido no simulador nas variáveis relacionadas à condição de produção do poço, tanto no modelo de Peaceman (1983) e Ding *et al.* (1998).

7.2 Efeito da Pseudo-estocagem (Estocagem Numérica)

Uma aproximação para a variação de pressão num poço, considerando que o meio poroso seja plano, horizontal e infinito lateralmente, é a solução da linha fonte. Nessa aproximação de um reservatório ideal, a variação de pressão adimensional no poço é dada por:

$$p_{w_D}(t_D) = \frac{1}{2}E_i\left(\frac{1}{4t_D}\right) + S \quad (7.2)$$

tal que E_i é a função integral exponencial; t_D , o tempo adimensional; e S , o fator de película.

De acordo com Stegun (1964), a função integral exponencial pode ser aproximada por uma função logarítmica, de tal forma que a Eq. (7.2) pode ser aproximada por:

$$p_{wf_D}(t_D) = \frac{1}{2} \ln(t_D + 0,80907) + S \quad (7.3)$$

O gráfico da solução analítica da linha fonte (Eq. (7.2)) e da derivada de Bourdet encontra-se na Fig. 63. O valor constante é igual a 0,5 da derivada de Bourdet pode ser explicado pela Eq. (7.3) que depende linearmente do logaritmo do tempo adimensional.

Em uma simulação numérica, o gráfico da pressão adimensional e de sua derivada de Bourdet diferenciam-se da solução analítica, conforme a Fig. 63. Essa diferença, mais visível na curva da derivada, ocorre devido às aproximações adotadas para os modelos de poços numa simulação numérica e, por ter um comportamento similar ao efeito da estocagem, é chamada de pseudo-estocagem ou estocagem numérica.

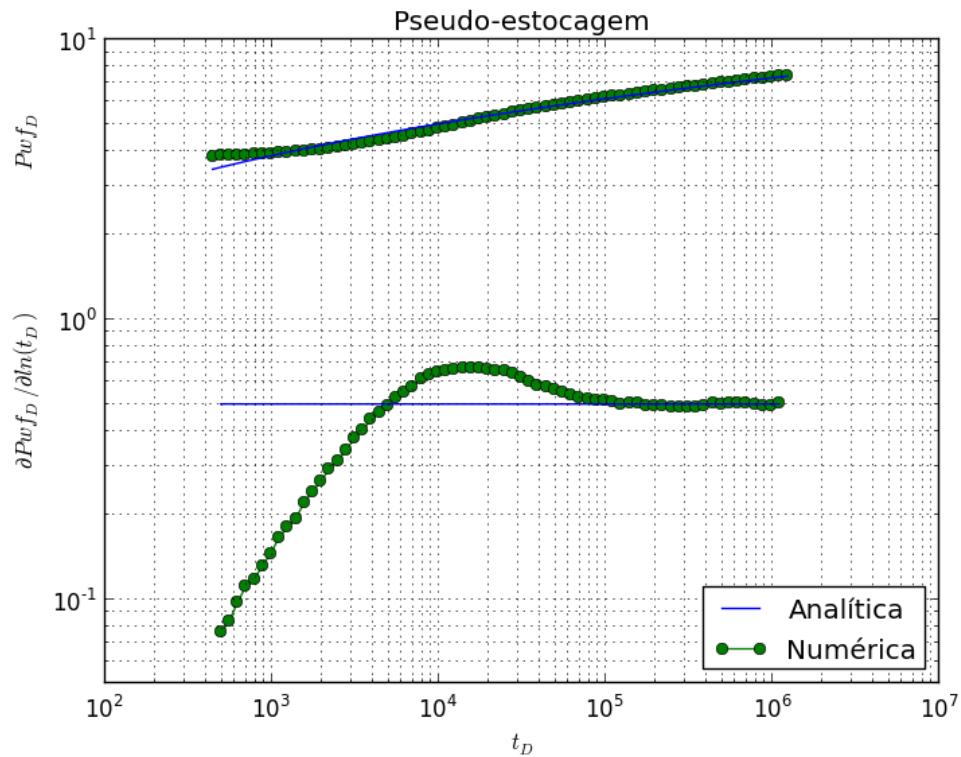


Figura 63: Análise do comportamento da pressão em um poço nos períodos iniciais de produção. A linha em azul representa a solução da linha fonte (solução analítica) e os pontos verdes, a solução numérica.

7.3 Análise Comparativa da Pseudo-estocagem

A análise da pseudo-estocagem será realizada em um reservatório infinito, cujas propriedades encontram-se na Tabela 6, e com apenas um poço, cujas condições de produção encontram-se na Tabela 7. O fluido utilizado na simulação é ligeiramente compressível e suas propriedades encontram-se no Apêndice C (Tabela 10).

Tabela 6: Propriedades do reservatório para a pseudo-estocagem.

Propriedade	Valor
Número de blocos	101x101x1
Dimensões	50 ft x 50 ft x10 ft
Porosidade	0,3
Permeabilidade	10 mD
Passo de tempo na escala logarítmica	0,05 dia

Tabela 7: Propriedades do poço para a pseudo-estocagem.

Propriedade	Valor
Posição	(50,50)
Altura aberta ao fluxo	10 ft
Raio do poço	0,25 ft
Fator de película	0
Vazão de produção	500 STB/D

A solução analítica encontra-se na Eq. (7.2) e a pressão e o tempo adimensionais são dados, respectivamente, por:

$$p_{w_D} = \frac{2\pi\beta_c kh}{q_w \mu} (p_i - p_w) \quad (7.4)$$

$$t_D = \alpha_c \beta_c \frac{kt}{\phi \mu c t r_w^2} \quad (7.5)$$

tal que k é a permeabilidade; h , a espessura aberta ao fluxo; q_w , a vazão no poço; μ , a viscosidade; ϕ , a porosidade; c_t , a compressibilidade total; r_w , o raio do poço; e α_c e β_c as constantes de conversão adotadas no trabalho e seus valores encontram-se no Apêndice B.

As comparações serão realizadas em função do fator de película, do modelo de poço, do passo de tempo, do espaçamento da malha e da forma dos blocos num reservatório infinito.

7.3.1 Efeito do Fator de Película

Para analisar a influência do fator de película no comportamento da pressão adimensional, realizaram-se três simulações num reservatório, alterando-se apenas o fator de película e utilizando o modelo de poço de Peaceman (1983). O resultado dessas simulações encontra-se na Fig. 64.

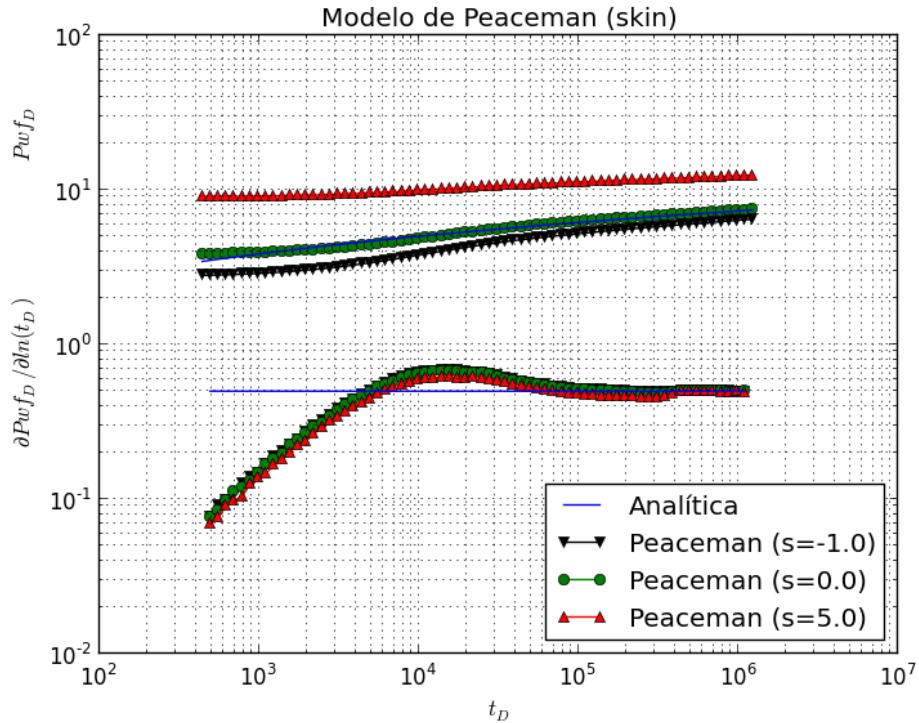


Figura 64: Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do fator de película.

Da Fig. 64 observou-se que um aumento no fator de película acarreta em um deslocamento vertical do gráfico da pressão adimensional para cima na mesma magnitude. No mesmo sentido, uma redução do fator de película, provocou um deslocamento do gráfico da pressão para baixo. Já o gráfico da derivada de Bourdet não sofreu alteração com o fator de película. Esse comportamento já era esperado e pode ser explicado pela Eq. (7.2).

7.3.2 Efeito do Modelo do Poço

O simulador suporta dois tipos de modelo de poço: Peaceman (1983) e/ou Ding *et al.* (1998). O raio equivalente de Peaceman (1983) depende da forma do bloco que contém o poço e das permeabilidades ao redor do poço.

Já o raio equivalente de Ding *et al.* (1998) não possui uma fórmula fixa que sirva para todos os casos. Por isso, para esse modelo de poço será simulado três valores para o raio equivalente: um próximo ao raio equivalente de Peaceman (1983), um maior e outro menor. O resultado das simulações foi dividido em dois gráficos (Figs 65 e): o primeiro comparando o modelo de Peaceman (1983) com o modelo de Ding *et al.* (1998) e o segundo, analisando o comportamento da alteração do raio equivalente no modelo de Ding *et al.* (1998).

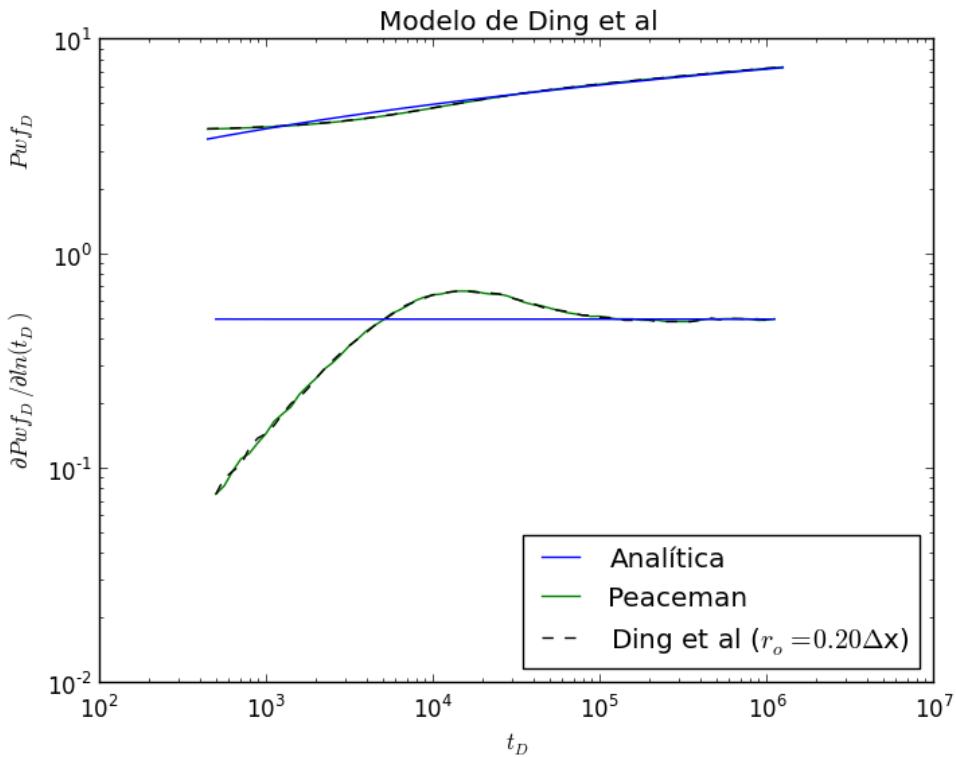


Figura 65: Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do modelo de poço.

Independente do modelo de poço adotado, o gráfico da derivada de Bourdet não sofreu alteração. Com relação à pressão adimensional, pode-se dizer o modelo de Ding *et al.* (1998) com $r_{eq} = 0,2\Delta x$ foi o que mais se aproximou do modelo de Peaceman (1983). Esse resultado já era esperado visto que o raio equivalente de Peaceman (1983) para uma malha quadrada homogênea é, de acordo com a Eq. (2.11), $r_{eq} \approx 0,198\Delta x$.

Analizando-se o modelo de Ding *et al.* (1998) em função do raio equivalente (r_o) percebe-se que a variação no raio equivalente provoca um deslocamento vertical no gráfico da pressão adimensional. Assim, podemos associar a alteração no raio equivalente a um pseudo-fator de película, de tal forma que um aumento nesse raio cria um pseudo-fator de película positivo e uma redução, um pseudo-fator negativo.

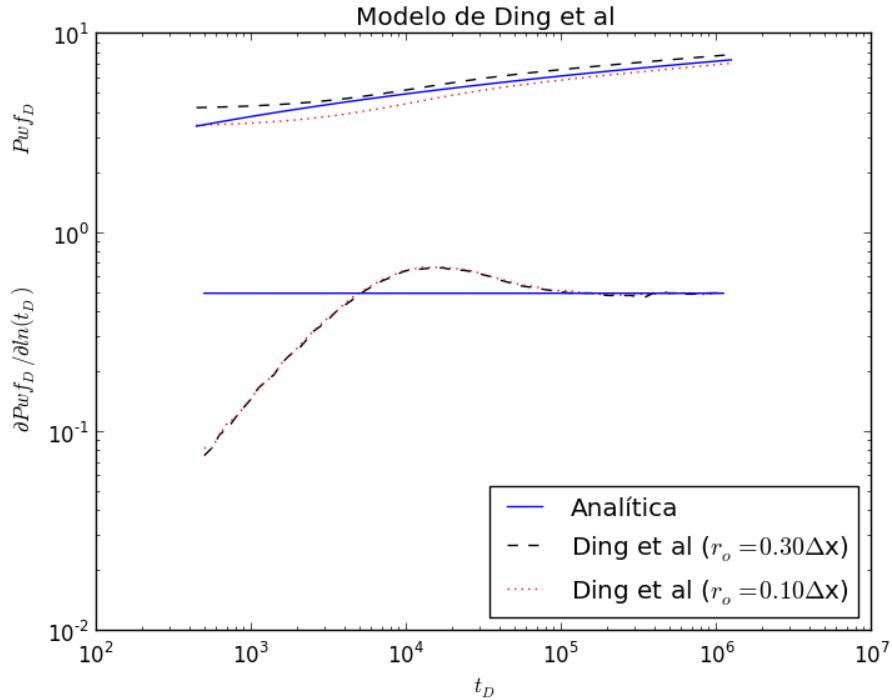


Figura 66: Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do raio equivalente no modelo de poço de Ding *et al.* (1998).

7.3.3 Efeito do Passo de Tempo

Adotando-se o modelo de Peaceman (1983), e sendo $\Delta \log(t_D)$ o passo de tempo na escala logarítmica do tempo, realizou-se três simulações com diferentes valores para o passo de tempo. O resultado dessas simulações encontra-se na Fig. 67.

De acordo com a Fig. 67, tanto a pressão adimensional quanto a derivada de Bourdet não sofreram significativa alteração em função do passo de tempo escolhido. Logo, pode-se dizer que a pseudo-estocagem não é influenciada pelo passo de tempo adotado.

7.3.4 Efeito do Espaçamento da Malha

Para a análise da pseudo-estocagem em função do espaçamento da malha foi utilizado uma malha quadrada de largura Δx e o modelo de poço de Peaceman (1983). Dessa forma, construiu-se o gráfico da Fig. 68.

A Fig. 68 mostra que a pseudo-estocagem é diretamente influenciada pelo espaçamento da malha do reservatório. Conforme o espaçamento da malha aumenta, ocorre um aumento do período de estocagem. Ou seja, para reduzir o período de

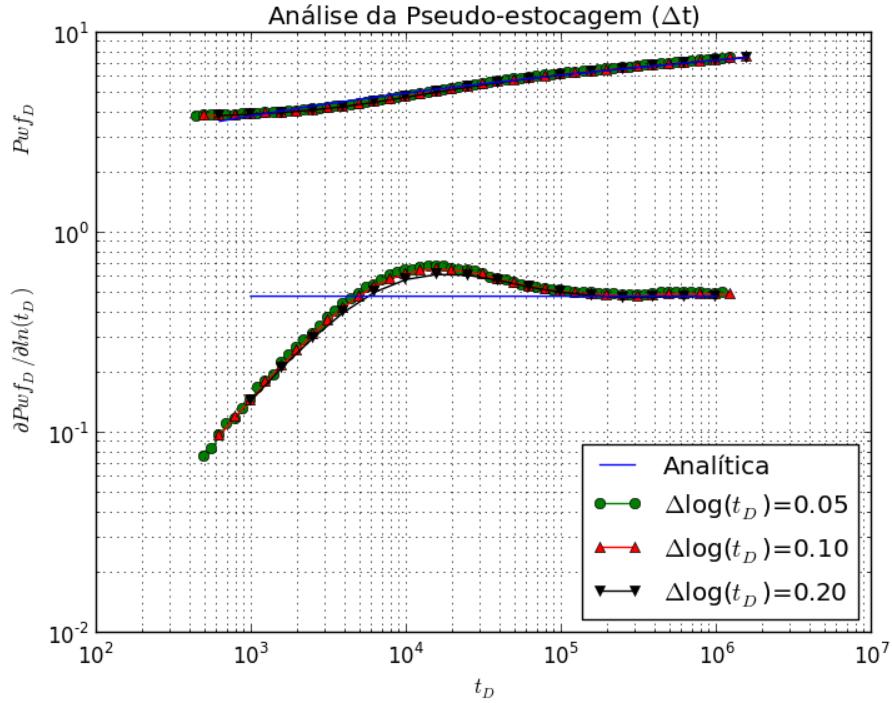


Figura 67: Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do passo de tempo na escala logarítmica.

estocagem deve-se aumentar o refinamento da malha.

7.3.5 Efeito da Forma do Bloco

Para análise da pseudo-estocagem em função da forma do bloco, considerou-se que os blocos da malha tinham volume constante e igual a 25000 ft^3 e altura fixa de 10 ft. A única propriedade que foi alterada de uma simulação para outra foi a razão de aspecto, dada pela razão entre o comprimento do bloco na direção x pelo comprimento na direção y , ou seja:

$$\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad (7.6)$$

O resultado das simulações encontra-se na Fig. 69. Esta figura mostra que quando diminuímos o valor do raio de aspecto, o período de estocagem aumenta. Ou seja, uma malha quadrada apresenta um período de estocagem menor quando comparado a uma malha irregular. Isso porque, a consideração de que as pressões calculadas nos blocos adjacentes ao bloco que contém o poço satisfazem a equação do fluxo radial no modelo de Peaceman (1983) é mais aceitável quando a malha é simétrica ao redor do poço.

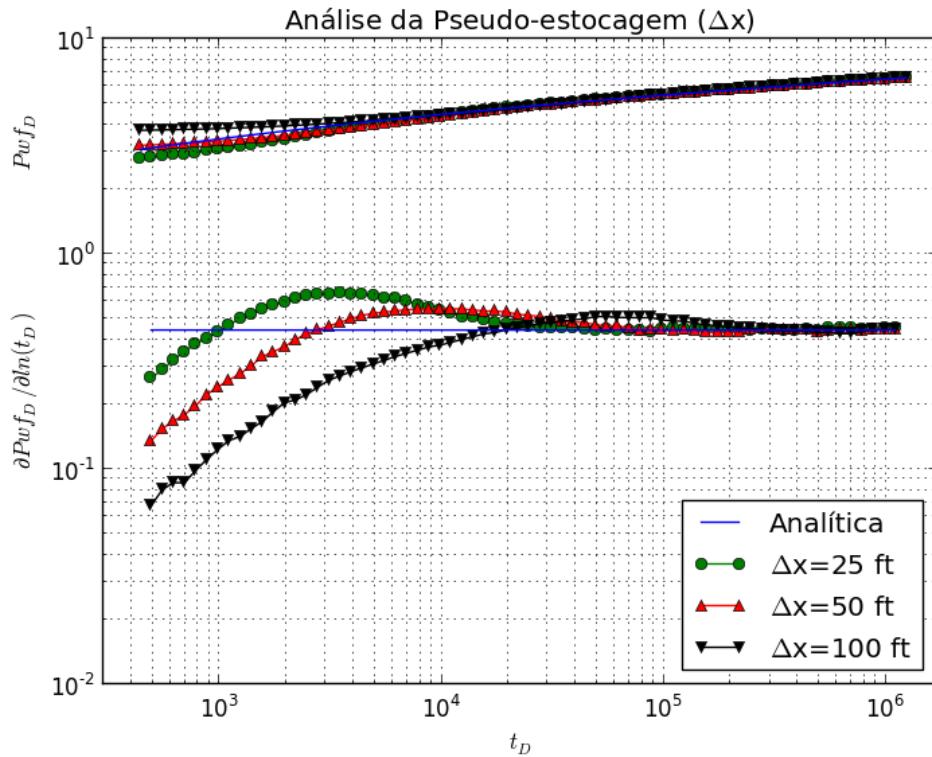


Figura 68: Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função do espaçamento da malha do reservatório.

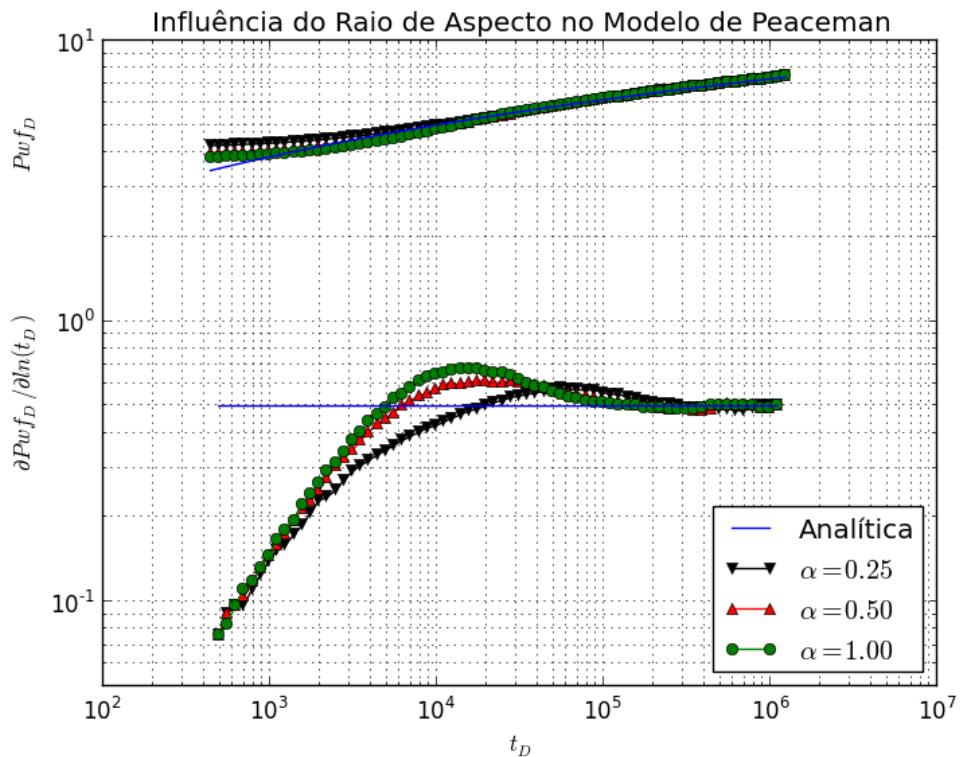


Figura 69: Análise da pseudo-estocagem para um reservatório infinito em função da forma dos blocos.

8 Considerações Finais

Com base nos conceitos de engenharia de reservatório construiu-se um simulador numérico de reservatório capaz de simular um escoamento monofásico bidimensional. Para isso dividiu-se o desenvolvimento em cinco etapas: formulação, discretização, representação do poço, linearização e solução.

Na primeira etapa, formulou-se a equação da difusividade hidráulica; na segunda, discretizou-se tal equação; na terceira, utilizando o modelo de poço de Peaceman (1983) e de Ding *et al.* (1998), acoplou-se o poço ao reservatório.

Na quarta etapa, considerou-se que as variáveis dependentes da pressão presentes na transmissibilidade (viscosidade e fator volume-formação) eram conhecidas de testes de laboratório e seriam informadas em uma tabela. Além disso, utilizou-se o método das iterações simples dos termos das transmissibilidades, a fim de linearizar o sistema de equações para um bloco.

Na etapa da solução, construiu-se um sistema linear que dependia diretamente das condições de contorno inicial, interna e externa adotada. Esse sistema foi resolvido por um pacote pelo método de fatoração LU.

No Capítulo 6, verificaram-se as implementações das condições de contorno inicial (equilíbrio hidrostático), interna (configuração dos poços) e externa (reservatório selado) para as simulações no reservatório SPE A-1. Além disso, pôde-se verificar as implementações dos modelos de poços e dos tipos de fluidos: incompressível, ligeiramente compressível e compressível.

Para verificar a implementação das condições de contorno periódicas simulou-se a malha dos cinco pontos e a comparou com a solução analítica após atingir o regime permanente. Encontrando-se uma diferença máxima de 0,030% entre a solução analítica e a simulada, concluiu-se que a implementação da condição de contorno periódica foi satisfeita.

Já as condições de contorno de Dirichlet e Neumann foram verificadas simulando

um problema de valor de contorno cuja solução analítica era conhecida (Apêndice A). Observou-se que para ambos os casos a diferença entre a solução analítica e a simulada dependia do passo de tempo adotado, o que foi considerado aceitável, visto o seu pequeno valor e levando-se em consideração as aproximações realizadas na etapa de discretização.

Portanto, após as verificações, considerou-se que o simulador estava pronto para ser utilizado em novas simulações. Assim, como um exemplo simples da aplicação de um simulador, analisou-se o efeito da pseudo-estocagem em um reservatório infinito para um fluido ligeiramente compressível em função do fator de película, modelo de poço, passo de tempo, espaçamento da malha e forma/tamanho do bloco.

Assim, como esperado, constatou-se que uma alteração no fator de película provoca um deslocamento vertical do gráfico da pressão adimensional na mesma magnitude do fator de película. No mesmo sentido, as alterações do raio equivalente no modelo de poço de Ding *et al.* (1998) provocaram apenas uma ligeira variação vertical no gráfico da pressão adimensional, o que pode ser associado a um fator de película.

Com relação à variação do passo de tempo, os gráficos da pressão adimensional e da derivada não sofreram mudanças significativas. Portanto, conclui-se que a pseudo-estocagem não depende do passo de tempo adotado na simulação.

Por outro lado, a variação do espaçamento da malha implicou em um deslocamento temporal da pseudo-estocagem, de tal forma que quanto mais refinada a malha, menor seria o volume dos blocos e menor seria esse efeito.

Já com relação à forma do bloco, concluiu-se que o uso de uma malha quadrada diminui o período do efeito da pseudo-estocagem. Isso porque a consideração de que as pressões calculadas nos blocos adjacentes ao poço produtor satisfazem a equação do fluxo radial é mais aceitável quando há uma simetria, ou seja, blocos quadrados.

8.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Como sugestões para trabalhos futuros destacam-se algumas implementações que podem ser diretamente aplicadas no simulador como:

- Sistema de coordenadas cilíndricas;
- Opção de refinamento de um ou mais blocos;
- Malha híbrida para representar melhor a região ao redor do poço;

- Aumentar a quantidade de fluidos no reservatório, tornando o simulador bifásico ou até mesmo trifásico;
- Melhorar o controle do poço, possibilitando a alteração das especificações dos poços durante a simulação;
- Simulação tridimensional:
 - Poços com mais de uma área aberta ao fluxo;
 - Poços horizontais;
 - Poços multilaterais;

Referências

- AMMER, J. R.; BRUMMERT, A. C.; SAMS, W. N. *Miscible Applied Simulation Techniques for Energy Recovery - Version 2.0*. Morgantown Energy Technology Center, West Virginia, February 1991.
- ARCHER, R. Transient well indices: A link between analytical-solution accuracy and coarse-grid efficiency. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. [S.I.: s.n.], 2010.
- ARCHER, R.; YILDIZ, T. Transient well index for numerical well test analysis. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. [S.I.: s.n.], 2001.
- AZIZ, K.; SETTARI, A. *Petroleum Reservoir Simulation*. [S.I.]: Applied Science Publishers, 1979. ISBN 9780853347873.
- BOURDET, D. *Well Test Analysis: The Use of Advanced Interpretation Models*. [S.I.]: Elsevier, 2002. (Handbook of petroleum exploration and production). ISBN 9780444509680.
- BREITENBACH, E. A. Reservoir simulation: State of the art. *Journal of Petroleum Technology*, v. 43, n. 9, p. 1033–1036, 1991.
- CHEN, Z. *Reservoir Simulation: Mathematical Techniques in Oil Recovery*. [S.I.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. (Cbms-Nsf Regional Conference Series in Applied Mathematics). ISBN 9780898716405.
- COATS, K. H. Reservoir simulation: State of the art. *Journal of Petroleum Technology*, v. 34, n. 8, p. 1633–1642, 1982.
- DING, Y.; RENARD, G. A new representation of wells in numerical reservoir simulation. *SPE Reservoir Engineering*, Society of Petroleum Engineers, v. 9, n. 2, p. 140–144, 1994.
- DING, Y.; RENARD, G.; WEILL, L. Representation of wells in numerical reservoir simulation. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, Society of Petroleum Engineers, v. 1, n. 1, p. 18–23, 1998.
- DOGRU, A. *Giga-Cell Simulation*. 2011. 3 p.
- DRANCHUK, P.; KASSEM, H. Calculation of z factors for natural gases using equations of state. *Journal of Canadian Petroleum Technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 14, n. 3, p. 34–36, 1975.
- ERTEKIN, T.; ABOU-KASSEM, J.; KING, G. *Basic Applied Reservoir Simulation*. [S.I.]: Society of Petroleum Engineers, 2001. (SPE Textbook Series). ISBN 9781555630898.

- FANCHI, J. R. *Integrated Flow Modeling*. [S.I.]: Elsevier Science, 2000. ISBN 9780080534817.
- FANCHI, J. R. *Principles of Applied Reservoir Simulation*. 2. ed. [S.I.]: Gulf Professional Pub., 2001. ISBN 9780750679336.
- FANCHI, J. R. *Principles of Applied Reservoir Simulation*. 3. ed. [S.I.]: Gulf Professional Pub., 2006. ISBN 9780750679336.
- FANCHI, J. R.; HARPOLE, K. J.; BUJNOWSKI, S. W. *BOAST: A Three-Dimensional, Thre-Phase Black Oil Applied Simulation Tool (Version 1.1)*. Bartlesville Energy Technology Center, Oklahoma, September 1982.
- FANCHI, J. R.; KENNEDY, J. E.; DAUBEN, D. *BOAST II: A Three-Dimensional, Thre-Phase Black Oil Applied Simulation Tool*. Bartlesville Energy Technology Center, Oklahoma, 1987.
- HEEMSTRA, R.; WEST, O. *Boast98 and EdBoast*. [S.I.], December 1998. User's Guide and Documentation Manual.
- ISLAM, M. R.; MOUSSAVIZADEGAN, S. H.; MUSTAFIZ, S.; ABOU-KASSEM, J. H. *Advanced Petroleum Reservoir Simulation*. [S.I.]: Wiley-Scrivener, 2010.
- LAKE, L. W.; HOLSTEIN, E. D. *Petroleum Engineering Handbook*. [S.I.]: Society Of Petroleum Engineers, 2007.
- LEE, J.; ROLLINS, J.; SPIVEY, J. *Pressure Transient Testing*. [S.I.]: Society of Petroleum Engineers, 2003. (SPE textbook series). ISBN 9781555630997.
- LSU. 'BOAST 3' *A Modified Version of BOAST II with Post Processors B3PLOT2 and COLORGRID*. Bartlesville Energy Technology Center, Oklahoma, January 1997.
- MATTAX, C. C.; DALTON, R. L. *Reservoir Simulation*. [S.I.]: Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers, 1990. (Monograph, v. 13). ISBN 9781555630287.
- MUSKAT, M. *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*. [S.I.]: International Human Resources Development Corp., 1982.
- NACUL, E. C.; AZIZ, K. Use of irregular grid in reservoir simulation. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. [S.I.: s.n.], 1991. (66th).
- PALAGI, C. L.; AZIZ, K. Use of voronoi grid in reservoir simulation. *SPE Advanced Technology Series*, Society of Petroleum Engineers, v. 2, n. 2, p. 69–77, 1994.
- PEACEMAN, D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation (includes associated paper 6988). *Old SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 18, n. 3, p. 183–194, 1978.
- PEACEMAN, D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability. *Old SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 23, n. 3, p. 531–543, 1983.

- PEACEMAN, D. W. Interpretation of wellblock pressures in numerical reservoir simulation: Part 3—off-center and multiple wells within a wellblock. *SPE Reservoir Engineering*, Society of Petroleum Engineers, v. 5, n. 2, p. 227–232, 1990.
- PEDROSA, O. A. J.; AZIZ, K. Use of a hybrid grid in reservoir simulation. *SPE Reservoir Engineering*, Society of Petroleum Engineers, v. 1, n. 6, p. 611–621, 1986.
- PICO, C. E. O. *Simulação Numérica de Reservatórios, Notas de Aula*. 2010. UENF-LENEP.
- POOLLEN, H. van; BREITENBACH, E.; THURNAU, D. Treatment of individual wells and grids in reservoir modeling. *SPE*, v. 8, n. 4, p. 341–346, 1968.
- ROSA, A.; CARVALHO, R. de S.; XAVIER, J. *Engenharia de Reservatórios de Petróleo*. [S.I.]: Interciênciac, 2006. ISBN 9788571931350.
- SETTARI, A.; AZIZ, K. Use of irregular grid in reservoir simulation. *Old SPE Journal*, Society of Petroleum Engineers, v. 12, n. 2, p. 103–114, 1972.
- SOUZA, B. G. J. *Comparação de Modelos Para Representação de Poços na Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo*. Setembro 2011. Congresso de Matemática Aplicada e Computacional.
- STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. [S.I.]: Dover Publ., 1964. (Applied mathematics series). ISBN 9780486612720.
- ZENG, Z.; GRIGG, R. B.; CHANG, S. *Miscible Applied Simulation Techniques for Energy Recovery - Version 3.0*. Morgantown Energy Technology Center, West Virginia, February 2005.

APÊNDICE A - Problemas de Valores de Contorno

A seguir serão apresentados dois exemplos de problemas de valores de contorno (Dirichlet e Neumann) que foram utilizados para validar o simulador. Ambos exemplos tem a mesma equação geral (Equação da Difusividade Hidráulica) e mesma condição inicial.

A.1 Equação Geral e Condição Inicial

A.1.1 Equação Geral

A equação geral que governa o fluxo no meio poroso monofásico é a equação da difusividade hidráulica que, no sistema cartesiano (x, y), é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_c \frac{\Delta y \Delta z k_x}{\mu B \Delta x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \Delta x \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta_c \frac{\Delta x \Delta z k_y}{\mu B \Delta y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \Delta y \right) \Delta y + q_{SC} = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\phi c_f}{B_{SC}} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

Considerando que:

- não entra massa no sistema: $q_{SC} = 0$;
- a altura de um bloco para outro não varie: $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$;
- permeabilidade isotrópica: $k_x = k_y = k$;
- viscosidade constante: $\mu = \bar{\mu}$;
- fator volume-formação constante: $B = \bar{B}$;

Temos que:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\alpha_c \beta_c} \frac{\bar{\mu} \bar{B}}{B_{SC}} \frac{\phi c_f}{k} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

Então chegamos a:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

onde:

$$c = \alpha_c \beta_c \frac{k}{\phi c_f} \frac{B_{SC}}{\bar{\mu} \bar{B}} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Condição Inicial

Dados a e b reais, o domínio de $p(x, y, t)$ será definido por:

$$\text{Dom}(p) = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a \wedge 0 \leq y \leq b \wedge 0 \leq t\} \quad (\text{A.5})$$

A.1.2.1 Condição de Dirichlet

A condição incial da condição de Dirichlet será:

$$p(x, y, 0) = p_i + A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \quad (\text{A.6})$$

A.1.2.2 Condição de Neumann

A condição incial da condição de Neumann será:

$$p(x, y, 0) = A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \quad (\text{A.7})$$

A.2 Condição de Dirichlet

Para a condição de Dirichlet, adotou-se que na fronteira do domínio o valor da função é nulo. Ou seja,

$$(\forall(x, y, t) \in \text{Dom}(p)) (p(x = 0, y, t) = p(x = a, y, t) = p_i) \quad (\text{A.8a})$$

$$(\forall(x, y, t) \in \text{Dom}(p)) (p(x, y = 0, t) = p(x, y = b, t) = p_i) \quad (\text{A.8b})$$

A.3 Condição de Neumann

Para a condição de Neumann, adotou-se que na fronteira do domínio o valor da derivada da função em função do espaço é nulo. Ou seja,

$$(\forall(x, y, t) \in \text{Dom}(p)) \left(\frac{\partial p}{\partial x}(x = 0, y, t) = \frac{\partial p}{\partial x}(x = a, y, t) = 0 \right) \quad (\text{A.9a})$$

$$(\forall(x, y, t) \in \text{Dom}(p)) \left(\frac{\partial p}{\partial y}(x, y = 0, t) = \frac{\partial p}{\partial y}(x, y = b, t) = 0 \right) \quad (\text{A.9b})$$

A.4 Resolução dos Problemas de Contorno

Sejam as funções $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então podemos separar a função de modo que:

$$p(x, y, t) = p_i + X(x)Y(y)T(t) \quad (\text{A.10})$$

Substituindo a Eq. (A.10) na Eq. (A.3):

$$X''YT + XY''T = \frac{1}{c}XYT' \quad (\text{A.11})$$

onde:

$$X'' = \frac{d^2X}{dx^2} \quad (\text{A.12a})$$

$$Y'' = \frac{d^2Y}{dy^2} \quad (\text{A.12b})$$

$$T' = \frac{dT}{dt} \quad (\text{A.12c})$$

Considerando que $p(x, y, t) \neq p_i$, então $X(x) \neq 0$, $Y(y) \neq 0$ e $T(t) \neq 0$ e podemos dividir a Eq. (A.11) por $X(x)Y(y)T(t)$. Daí,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \frac{1}{c} \frac{T'}{T} \quad (\text{A.13})$$

Para que a Eq. (A.13) seja válida para todo $(x, y, t) \in \Re^3$, podemos fazer, para $\lambda, \mu \in \Re$:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \quad (\text{A.14a})$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\mu \quad (\text{A.14b})$$

Assim, substituindo a Eq. (A.14a) e a Eq. (A.14b) na Eq. (A.13), temos:

$$-\lambda - \mu = \frac{1}{c} \frac{T'}{T} \rightarrow T' = -c(\lambda + \mu)T \rightarrow T(t) = c_0 e^{-c(\lambda+\mu)t} \quad (\text{A.15})$$

Por outro lado, resolvendo as Eqs.(A.14a) e (A.14b), encontramos as soluções gerais na forma:

$$X'' + \lambda X = 0 \rightarrow \begin{cases} X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) & , \lambda > 0 \\ X(x) = c_1 x + c_2 & , \lambda = 0 \\ X(x) = c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} & , \lambda < 0 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

$$Y'' + \mu Y = 0 \rightarrow \begin{cases} Y(y) = c_3 \sin(\sqrt{\mu}y) + c_4 \cos(\sqrt{\mu}y) & , \mu > 0 \\ Y(y) = c_3 y + c_4 & , \mu = 0 \\ Y(y) = c_3 e^{\sqrt{|\mu|}y} & , \mu < 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

onde $c_i \in \Re | i = \{1, 2, 3, 4\}$.

As soluções das funções $X(x)$ e $Y(y)$ são funções da condição de contorno adotada. Segue cada uma delas.

A.4.1 Condição de Dirichlet

Substituindo as Eqs. (A.8a) e (A.8b) na Eq. (A.10), temos:

$$\begin{cases} p(x = 0, y, t) = p_i + X(0)Y(y)T(t) = p_i \rightarrow X(0) = 0 \\ p(x = a, y, t) = p_i + X(a)Y(y)T(t) = p_i \rightarrow X(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{cases} p(x, y = 0, t) = p_i + X(x)Y(0)T(t) = p_i \rightarrow Y(0) = 0 \\ p(x, y = b, t) = p_i + X(x)Y(b)T(t) = p_i \rightarrow Y(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

Substituindo a Eq. (A.21) na Eq. (A.16), o único caso que torna possível $c_1 \neq 0$ é $\lambda > 0$, assim:

$$X(0) = 0 + c_2 = 0 \rightarrow X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (\text{A.20a})$$

$$X(a) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0 \rightarrow \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{a} \mid n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.20b})$$

Ou seja,

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (\text{A.21})$$

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \mid n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.22})$$

Analogamente para a função $Y(y)$, com $\mu > 0$, temos:

$$Y(y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.23})$$

$$\mu_m = \frac{\pi^2 m^2}{b^2} \mid m \in \mathbb{N} \quad (\text{A.24})$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (A.15), (A.21) e (A.23) na Eq. (A.10):

$$p(x, y, t) = p_i + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} e^{-(\lambda_n + \mu_m)ct} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.25})$$

onde:

$$C_{nm} = c_0 C_n C_m \quad (\text{A.26})$$

A.4.1.1 Cálculo de C_{nm}

Fazendo $t = 0$, temos:

$$p(x, y, 0) = p_i + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.27})$$

Denotando:

$$Y_n(y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.28})$$

$$f(x, y) = p(x, y, 0) - p_i \quad (\text{A.29})$$

Temos:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (\text{A.30})$$

Seja $k \in \mathbb{N}$, multiplicando ambos os lados da equação por $\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$:

$$f(x, y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ Y_n(y) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right\} \quad (\text{A.31})$$

Integrando ambos os lados da equação do ponto $x = 0$ até o ponto $x = a$, temos:

$$\int_0^a \left[f(x, y) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ Y_n(y) \int_0^a \left[\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right] dx \right\} \quad (\text{A.32})$$

Sabendo-se que a integral do produto de funções ortogonais é, para n e k inteiros positivos, dada por:

$$\int_0^a \left[\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right] dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq n \\ \frac{a}{2}, & \text{se } k = n \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

Portanto:

$$Y_k(y) = \frac{2}{a} \int_0^a \left[f(x, y) \sin \left(\frac{k\pi}{a} x \right) \right] dx \quad (\text{A.34})$$

Apenas por questão de notação vamos escrever n ao invés de k . Daí,

$$Y_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a \left[f(x, y) \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right] dx \quad (\text{A.35})$$

Substituindo a Eq. (A.35) na Eq. (A.28):

$$Y_n(y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) = \frac{2}{a} \int_0^a \left[f(x, y) \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \right] dx \quad (\text{A.36})$$

Analogamente, multiplicando-se ambos os lados por $\sin(\frac{k\pi}{b}y)$ e integrando de $y = 0$ até $y = b$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ C_{nm} \int_0^b \left[\sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \sin \left(\frac{k\pi}{b} y \right) \right] dy \right\} \\ = \frac{2}{a} \int_0^b \int_0^a \left[f(x, y) \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{k\pi}{b} y \right) \right] dx dy \quad (\text{A.37}) \end{aligned}$$

Da Eq. (A.33), temos:

$$C_{nk} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a \left[f(x, y) \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{k\pi}{b} y \right) \right] dx dy \quad (\text{A.38})$$

Apenas por questão de notação vamos escrever m ao invés de k . Daí,

$$C_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a \left[f(x, y) \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \right] dx dy \quad (\text{A.39})$$

A.4.1.2 Resolução do Problema

Substituindo as Eqs. (A.6) e (A.29) na Eq. (A.39):

$$C_{nm} = \frac{4A}{ab} \int_0^b \int_0^a \left[\sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{2\pi y}{b} \right) \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \right] dx dy \quad (\text{A.40})$$

Da Eq. (A.33), o coeficiente C_{nm} só será diferente de zero quando $n = 1$ e $m = 2$. Daí,

$$C_{12} = \frac{4A}{ab} \left[\frac{a}{2} \right] \left[\frac{b}{2} \right] = A \quad (\text{A.41})$$

Então:

$$C_{nm} = \begin{cases} 0 & , n \neq 1 \text{ e } m \neq 2 \\ A & , n = 1 \text{ e } m = 2 \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

Logo, substituindo a Eq. (A.42) na Eq. (A.25):

$$p(x, y, t) = p_i + A e^{-(\lambda_1 + \mu_2)ct} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.43})$$

onde, das Eqs. (A.22) e (A.24):

$$\lambda_1 + \mu_2 = \frac{\pi^2(1)^2}{a^2} + \frac{\pi^2(2)^2}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right)\pi^2 \quad (\text{A.44})$$

Ou seja,

$$p(x, y, t) = p_i + A e^{-\left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right)\pi^2 ct} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.45})$$

A.4.2 Condição de Neumann

Substituindo as Eqs. (A.9a) e (A.9b) na Eq. (A.10), temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x}(x = 0, y, t) = X'(0)Y(y)T(t) = 0 \rightarrow X'(0) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x}(x = a, y, t) = X'(a)Y(y)T(t) = 0 \rightarrow X'(a) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y}(x, y = 0, t) = X(x)Y'(0)T(t) = 0 \rightarrow Y'(0) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x, y = b, t) = X(x)Y'(b)T(t) = 0 \rightarrow Y'(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

Derivando a Eq. (A.16) em relação a variável x :

$$X'(x) = \begin{cases} c_1\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) - c_2\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) & , \lambda > 0 \\ c_1 & , \lambda = 0 \\ c_1\sqrt{|\lambda|}e^{\sqrt{|\lambda|}x} & , \lambda < 0 \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

Substituindo a Eq. (A.46) na Eq. (A.48), a única condição em que $c_1 \neq 0$ é $\lambda > 0$, daí:

$$X'(0) = c_1\sqrt{\lambda} + 0 = 0 \rightarrow c_1 = 0 \rightarrow X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad (\text{A.49a})$$

$$X'(a) = -c_2\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0 \rightarrow \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \mid n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.49b})$$

Ou seja,

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (\text{A.50})$$

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \mid n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.51})$$

Analogamente para a função $Y(y)$, temos:

$$Y(y) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.52})$$

$$\mu_m = \frac{\pi^2 m^2}{b^2} \mid m \in \mathbb{N} \quad (\text{A.53})$$

Finalmente, substituindo as Eqs. (A.15), (A.50) e (A.52) na Eq. (A.10):

$$p(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} e^{-(\lambda_n + \mu_m)ct} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.54})$$

onde:

$$C_{nm} = c_0 C_n C_m \quad (\text{A.55})$$

A.4.2.1 Cálculo de C_{nm}

Fazendo $t = 0$, temos:

$$p(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.56})$$

Denotando:

$$Y_n(y) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.57})$$

Temos:

$$p(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (\text{A.58})$$

Seja $k \in \mathbb{N}$, multiplicando ambos os lados da equação por $\cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$:

$$p(x, y, 0) \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ Y_n(y) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right\} \quad (\text{A.59})$$

Integrando ambos os lados da equação do ponto $x = 0$ até o ponto $x = a$, temos:

$$\int_0^a \left[p(x, y, 0) \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ Y_n(y) \int_0^a \left[\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right] dx \right\} \quad (\text{A.60})$$

Sabendo-se que a integral do produto de funções ortogonais é, para n e k inteiros positivos, dada por:

$$\int_0^a \left[\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right] dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq n \\ \frac{a}{2}, & \text{se } k = n \end{cases} \quad (\text{A.61})$$

Podemos escrever:

$$Y_k(y) = \frac{2}{a} \int_0^a \left[p(x, y, 0) \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \right] dx \quad (\text{A.62})$$

Apenas por questão de notação vamos escrever n ao invés de k . Daí,

$$Y_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a [p(x, y, 0) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)] dx \quad (\text{A.63})$$

Substituindo a Eq. (A.63) na Eq. (A.57):

$$Y_n(y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = \frac{2}{a} \int_0^a [p(x, y, 0) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)] dx \quad (\text{A.64})$$

Analogamente, multiplicando-se ambos os lados por $\cos\left(\frac{k\pi}{b}y\right)$ e integrando de $y = 0$ até $y = b$, temos:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ C_{nm} \int_0^b \left[\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{b}y\right) \right] dy \right\} \\ &= \frac{2}{a} \int_0^b \int_0^a \left[p(x, y, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{b}y\right) \right] dx dy \quad (\text{A.65}) \end{aligned}$$

Da Eq. (A.61), podemos fazer:

$$C_{nk} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a \left[p(x, y, 0) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{b}y\right) \right] dx dy \quad (\text{A.66})$$

Apenas por questão de notação vamos escrever m ao invés de k . Daí,

$$C_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a \left[p(x, y, 0) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \right] dx dy \quad (\text{A.67})$$

A.4.2.2 Resolução do Problema

Substituindo a Eq. (A.7) na Eq. (A.67), temos:

$$C_{nm} = \frac{4A}{ab} \int_0^b \int_0^a \left[\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \right] dx dy \quad (\text{A.68})$$

Da Eq. (A.61), o coeficiente C_{nm} só será diferente de zero quando $n = 1$ e $m = 2$. Daí,

$$C_{12} = \frac{4A}{ab} \left[\frac{a}{2} \right] \left[\frac{b}{2} \right] = A \quad (\text{A.69})$$

Então:

$$C_{nm} = \begin{cases} 0 & , n \neq 1 \text{ e } m \neq 2 \\ A & , n = 1 \text{ e } m = 2 \end{cases} \quad (\text{A.70})$$

Logo, substituindo a Eq. (A.70) na Eq. (A.25):

$$p(x, y, t) = Ae^{-(\lambda_1 + \mu_2)ct} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.71})$$

onde, das Eqs. (A.51) e (A.53):

$$\lambda_1 + \mu_2 = \frac{\pi^2(1)^2}{a^2} + \frac{\pi^2(2)^2}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right)\pi^2 \quad (\text{A.72})$$

Ou seja,

$$p(x, y, t) = Ae^{-\left(\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2}\right)\pi^2 ct} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \quad (\text{A.73})$$

APÊNDICE B - Breve Manual do Simulador

Nessa seção será abordado de forma sucinta os arquivos de entrada e saída do simulador. Além disso, será apresentada uma tabela para a conversão de unidades e será resumido as direções e sentidos adotadas pelo mesmo, além da notação para se referir a uma face ou bloco vizinho.

B.1 Arquivos de Entrada

Os arquivos de entrada são:

- um arquivo principal (“.ini”);
- arquivos de configuração (“.cfg”);
- arquivos com características do reservatório bloco a bloco (“.dat”);
- uma tabela de propriedade de fluidos (“.prp”);
- dois arquivos “.mdf” opcionais: um modifica a geometria; e o outro, a transmissão;

Entretanto, antes de descrevê-los, é necessário um conhecimento melhor da organização dos arquivos, especificando o local onde esses documentos devem estar, e da execução do programa.

B.1.1 Organização dos Arquivos e Execução

B.1.1.1 Organização dos Arquivos

As simulações são divididas em projetos. À cada projeto existe uma pasta associada, no mesmo diretório do simulador, que contém os respectivos arquivos de entrada. Tanto a pasta quanto o arquivo principal (“.ini”) devem ter o mesmo nome do projeto.

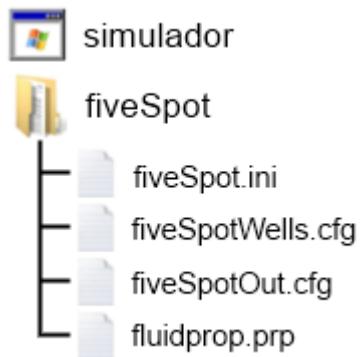


Figura 70: Exemplo de organização dos arquivos. Nome do projeto: *fiveSpot*.

A Figura 70 esquematiza melhor essa organização, com o projeto *fiveSpot*.

B.1.1.2 Execução do Simulador

A execução do simulador no terminal se da pelo seguinte comando: nome do simulador seguido do nome do projeto ou do diretório em que o projeto está.

Por exemplo, segundo a Fig. 70, o comando para execução do projeto *fiveSpot* seria:

```
>> simulador fiveSpot
```

Caso o projeto *fiveSpot* estivesse dentro da pasta “Exemplo”, o comando para execução do projeto seria:

```
>> simulador Exemplo/fiveSpot
```

B.1.2 Arquivo Principal (“.ini”)

É o principal arquivo da simulação e é dividido em cinco seções: *Title*, *Reservoir Description*, *Control*, *Fluid Properties* e *Wells*. Cada uma delas contém um conjunto de variáveis. Esse arquivo deve ter o mesmo nome do projeto.

•[Title]

Seção que contém uma breve descrição da simulação.

–title1 (string)

Título geral da simulação.

–caseid (string)

Especificação da simulação.

•[Reservoir Description]

Seção que contém as principais características do reservatório.

-ncol (int)

Número de colunas. Número de blocos na direção x, horizontal.

-nrow (int)

Número de linhas. Número de blocos na direção y, vertical.

-geo (string)

Geometria. Nome do arquivo “.dat¹” que contém uma matriz binária que representa a geometria do reservatório. Caso seja igual ao valor “full”, criará-se um reservatório retangular com as dimensões dadas por **ncol** e **nrow**.

-modGeo (string)

Modificador da geometria. Nome do arquivo “.mdf” que altera os tipos dos blocos para: ativos ou inativos. Para maiores informações vide Seção B.1.5.

-modTrasmissibility (string)

Modificador da transmissibilidade. Nome do arquivo “.mdf” que anula as transmissibilidade de alguns blocos. Para maiores informações vide Seção B.1.5.

-phi (string/float)

Porosidade. Nome do arquivo “.dat” que contém uma matriz com os valores da porosidade de cada bloco. Deve ter as mesmas dimensões da matriz do arquivo **geo**. Caso seja constante em todo o reservatório, basta informar o valor numérico representativo.

-kx, ky (string/float) [mD]

Permeabilidade na direção x e y, respectivamente. Nome do arquivo “.dat” que contém uma matriz com os valores da permeabilidade de cada bloco. Deve ter as mesmas dimensões da matriz do arquivo **geo**. Caso sejam constante em todo o reservatório, basta informar o valor numérico representativo.

-dx, dy (string/float) [ft]

Dimensões nas direções x, y respectivamente. Nome do arquivo “.dat” que contém uma matriz com os valores das dimensões de cada bloco. Essa matriz deve ter o mesmo número de linhas e colunas da matriz do arquivo

¹Vide Seção B.1.4 para maiores informações.

geo. Caso sejam constantes em todo o reservatório, basta informar o valor numérico representativo.

-dz (string/float) [ft]

Altura. Nome do arquivo “.dat” que contém uma matriz com os valores da altura de cada bloco. Deve ter as mesmas dimensões da matriz do arquivo **geo**. Caso seja constante em todo o reservatório, basta informar o valor numérico representativo.

-ztop (string/float) [ft]

Profundidade do topo. Nome do arquivo “.dat” que contém uma matriz com os valores das profundidades do topo de cada bloco. Deve ter as mesmas dimensões da matriz do arquivo **geo**. Caso seja constante em todo o reservatório, basta informar o valor numérico representativo.

-cf (float) [psi⁻¹]

Compressibilidade do fluido.

-cr (float) [psi⁻¹]

Compressibilidade da rocha.

-refdepth (float) [ft]

Profundidade de referência associada a pressão de referência.

-refpres (float) [psi]

Pressão de referência para o cálculo das compressibilidades.

•[Control]

Seção que contém as variáveis do controle da simulação.

-initialTime (float) [dia]

Tempo inicial para a simulação.

-dt (float) [dia]

Passo de tempo.

-dtMultiplier (float) [dia]

Valor a ser multiplicado ao passo de tempo a cada iteração.

-dtLogScale (booleano²)

Se verdadeiro assume um passo de tempo logarítmico, cujo valor deve ser especificado na variável **dt**.

²booleano: verdadeiro (1, 'T', 't', 'Y', 'y') ou falso (0, 'F', 'f', 'N', 'n').

-maxSteps (int)

Número de passos para impressão.

-outputFile (string)

Nome do arquivo de configuração “.cfg” que contém as informações para a saída de dados do simulador. Para maiores informações vide Seção B.1.3.1.

-bcFile (string)

Nome do arquivo de configuração “.cfg” que contém as informações das condições de contorno do reservatório. Para maiores informações vide Seção B.1.3.3.

•[Fluid Properties]

Seção que contém as propriedades dos fluidos.

-rho (float) [lb/ft³]

Densidade do fluido nas condições padrões.

-fproprows (int)

Número de linhas no arquivo de propriedades do fluido.

-dp (float) [psi]

Variação de pressão no arquivo de propriedades do fluido.

-propsfile (string)

Nome do arquivo “.prp” que contém a tabela com as propriedades do fluido (viscosidade, fator volume-formação e peso específico). Para maiores informações vide Seção B.1.6.

•[Wells]

Seção que contém o nome do arquivo com as informações dos poços.

-wellsFile (string)

Nome do arquivo de configuração (“.cfg”) que contém as informações dos poços, como posição, fator de película, comprimento aberto ao fluxo, entre outros. Para maiores informações vide Seção B.1.3.2.

B.1.2.1 Exemplo de Arquivo Principal

SPE A-1 - Incompressível

```

[Title]
title1 = SPE textbook project - A1 reservoir;
caseid = incompressible flow;

[Reservoir description]
ncol      = 14;           numero de blocos na direção x
nrow      = 11;           numero de blocos na direção y
geo       = geometrybc.dat;
phi       = porosity.dat;
kx        = kx.dat;
ky        = ky.dat;
dz        = thickness.dat;
ztop     = ztop.dat;
dx        = dx.dat;
dy        = dy.dat;
cf        = 0.0;
cr        = 3.0e-6;
refdepth = 9306.5;
refpres   = 7750.0;
#modGeo   = modGeoFile.mdf;

[Control]
initialTime = 0;          [days]
maxsteps    = 10;
dt          = 0.1;          [days]
outputFile  = outsFile.cfg;
#bcFile     = bcFile.cfg;

[Fluid Properties]
rho         = 52.4;
fproprows  = 2;
dp          = 4000.0;
propsfile   = fluidprop.prp;

[Wells]
wellsfile  = wells.cfg;

```

B.1.3 Arquivo de Configuração (“.cfg”)

Assim como o arquivo principal, os arquivos de configuração também são dividido em seções. A principal seção é a *Main*, que contém as propriedades gerais. Já as demais, representam as configurações de um bloco ou de um conjunto de blocos e devem ser numeradas. Existem três arquivos de configuração: configurações de saída (**outputFile**), configurações de contorno (**bcFile**) e configurações de poço (**wellsFile**).

B.1.3.1 Arquivos de Configuração de Saída

Esse arquivo é definido no arquivo principal dentro da seção *Control*, na variável **outputFile**. Define os blocos e suas respectivas variáveis (pressão, pressão de fundo, vazão e/ou volume de óleo produzido) para impressão, que pode ser de dois tipos: no terminal (*display*) e no relatório (*report*).

Além disso, existe a possibilidade de imprimir a pressão de todos os blocos num intervalo de tempo pré-estabelecido. Para isso, basta estabelecer o número de passos para impressão (**outPressureSteps**) e o nome do arquivo a ser gerado (**outPressureFile**).

•[Main]

–nDisplayBlocks (int)

Número de blocos que serão impressos no terminal.

–nReportBlocks (int)

Número de blocos que serão impressos no relatório de saída.

–displaySteps (int)

Número de passos para impressão no terminal.

–reportSteps (int)

Número de passos para impressão no relatório de saída.

–outPressureSteps (int)

Número de passos para impressão das pressões dos blocos.

–reportFile (string)

Nome do arquivo para impressão do relatório de saída (sem extensão).

–outPressureFile (string)

Nome do arquivo para impressão das pressões dos blocos (sem extensão).

-np (boolenao)

Booleano para impressão do volume total de óleo produzido.

•[Display i] e [Report i]

Blocos a serem impressos. Tal que **i** é o índice e deve iniciar em 1.

-row (int)

Linha do bloco a ser impresso no terminal.

-col (int)

Coluna do bloco a ser impresso no terminal.

-p (booleano)

Booleano para impressão da pressão do bloco.

-pwf (booleano)

Booleano para impressão da pressão no fundo do poço.

-qw (booleano)

Booleano para impressão da vazão no poço.

-np (booleano)

Booleano para impressão do volume de óleo produzido.

•Exemplo de arquivo de configuração de saída**outsFile.cfg**

```
[Main]
nReportBlocks = 1;
nDisplayBlocks = 1;
displaySteps   = 1;      numero de passos para impressao no terminal
outPressureSteps = 10;  numero de passos para impressao das pressoes
reportSteps   = 1;      numero de passos para impressao do relatorio
outPressureFile = SPE_A1_1;
reportFile = SPE_A1_1_report;

[Display 1]
row = 4;
col = 4;
p = 1;

[Report 1]
row = 4;
col = 4;
pwf = 1;
```

B.1.3.2 Arquivo de Configuração de Poços

Esse arquivo é definido no arquivo principal dentro da seção *Wells*, na variável **wellsFile**. Contém as informações sobre os poços produtores (vazão positiva) ou injetores (vazão negativa) do reservatório.

- [Main]

- nwells (int)**

Número de poços a serem considerados na simulação.

- [Well i]

Seção que contém a localização e as características dos poços. Tal que **i** é o índice e deve iniciar em 1.

- row (int)**

Linha do bloco que contém o poço.

- col (int)**

Coluna do bloco que contém o poço.

- dx, dy (float)**

Distância na direção x e y, respectivamente, a partir do centro na qual se encontra o poço. Caso não sejam informados, considerar-se-á que o poço se encontra no centro do bloco.

- rw (float) [ft]**

Raio do poço.

- s (float)**

Fator skin.

- h (float) [ft]**

Comprimento do poço aberto para fluxo.

- type (string)**

Indica qual valor será especificado para o poço: vazão ou pressão de fundo.

Significado	Valores Aceitos
Vazão do Poço Especificada	RATE
	RATE_ESPECIFIED
Pressão de Fundo Especificada	PRESSURE
	PRESSURE_ESPECIFIED

-qw (float) [STB/D]

Valor da vazão do poço. Para essa situação, precisa-se que a variável **type** seja RATE_ESPECIFIED.

-pwf (float) [psia]

Valor da pressão do fundo do poço. Para essa situação, precisa-se que a variável **type** seja PRESSURE_ESPECIFIED.

B.1.3.3 Arquivos de Configuração de Condições de Contorno

Esse arquivo é definido no arquivo principal dentro da seção *Control*, na variável **bcFile**. É o arquivo que contém as informações dos blocos que possuem uma ou mais condições de contorno. Cada seção especifica uma condição de contorno: Dirichlet ou Neumann.

- [Main]

-nboundary (int)

Número de condições de contorno a serem consideradas.

- [Boundary i]

Seção que contém a localização e as características das condições de contorno. Tal que **i** é o índice e deve iniciar em 1.

-row (int)

Linha do bloco que contém a condição de contorno.

-col (int)

Coluna do bloco que contém a condição de contorno.

-rowf (int)

Linha do bloco final que contém a condição de contorno. Utilizado para representar uma condição de contorno vertical ou horizontal. Para representá-la utiliza-se um bloco inicial (**row**, **col**) e um bloco final (**rowf**, **colf**).

-colf (int)

Coluna do bloco final que contém a condição de contorno. Utilizado para representar uma condição de contorno vertical ou horizontal. Para representá-la utiliza-se um bloco inicial (**row**, **col**) e um bloco final (**rowf**, **colf**).

-type (string)

Indica o tipo de condição de fronteira especificada: pressão especificada (Dirichlet) ou gradiente de pressão especificado (Neumann).

Significado	Valores Aceitos
Pressão Especificada	PRESSURE
	PRESSURE_ESPECIFIED
Gradiente de Pressão Especificado	GRADIENT
	GRADIENT_ESPECIFIED

-side (string)

Indica o lado que possui a condição de fronteira.

Significado	Valores Aceitos
Norte	NORTH
Leste	EAST
Oeste	WEST
Sul	SOUTH

-value (float)

Valor do tipo de condição de contorno adotada de acordo com a variável **type**: pressão ou gradiente de pressão.

B.1.4 Arquivos de Características do Reservatório (“.dat”)

Os arquivos “.dat” contêm uma matriz cujo número de linhas é **nrow** e o número de colunas é **ncol**. Esses arquivos armazenam propriedades do reservatório, como geometria do reservatório, permeabilidade, porosidade, comprimento, largura, espessura e profundidade do topo do bloco.

Para representar a geometria do reservatório, tal arquivo deve conter uma matriz binária, onde “0” representa um bloco inativo; e “1”, um bloco ativo. Já para representar uma das propriedades do reservatório, basta construir uma matriz que contenha os respectivos dados da propriedade a ser representada, nas mesmas dimensões que a geometria do reservatório.

A única exceção é a representação dos comprimentos da malha que possuem apenas uma linha, para as distâncias em *x*, e uma coluna, para as distâncias em *y*.

B.1.4.1 Exemplo de Arquivo de Características do Reservatório

kx.dat													
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	275.0	270.0	252.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	267.0	274.0	280.0	265.0	253.0	0	0	0	259.0	270.0	0	0	0
0	265.0	280.0	289.0	278.0	271.0	271.0	270.0	269.0	270.0	279.0	283.0	275.0	0
0	258.0	271.0	295.0	297.0	282.0	280.0	281.0	276.0	290.0	293.0	279.0	270.0	0
0	253.0	259.0	275.0	285.0	290.0	280.0	289.0	277.0	290.0	280.0	0	0	0
0	0	0	272.0	276.0	273.0	288.0	281.0	274.0	268.0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	265.0	280.0	290.0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	270.0	280.0	270.0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	260.0	268.0	260.0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

B.1.5 Arquivos de Modificação de Geometria (“.mdf”)

O arquivo de modificação de geometria serve para alterar a forma do reservatório a qual já foi definida em “*Reservoir Description*” na variável **geo** (B.1.2) ou para anular a transmissibilidade de algum bloco em alguma direção.

Cada linha do arquivo é um comando de alteração, que pode ser de três formas: alteração de um bloco; de um conjunto de blocos adjacentes horizontalmente; ou, verticalmente.

B.1.5.1 Alteração de um Bloco

•Modificação de Geometria

Para modificar um bloco, deve-se iniciar o comando com a letra “B” seguida da linha, *row*, e coluna, *col*, do bloco e do valor de alteração, *value*, que pode ser ACTIVE ou INACTIVE, para especificar um bloco ativo ou inativo, respectivamente, conforme o modelo abaixo:

B <i>row</i> <i>col</i> <i>value</i>

•Modificação da transmissibilidade

O comando para a modificação da transmissibilidade de um bloco é análogo à modificação de geometria, porém a variável *value* representará a face do bloco que terá sua transmissibilidade anulada. Para essa variável existem quatro valores possíveis: NORTH, SOUTH, EAST ou WEST.

B.1.5.2 Alteração de um Conjunto de Blocos Adjacentes Horizontalmente

- Modificação da geometria**

Para modificar horizontalmente um conjunto de blocos, deve-se iniciar o comando com a letra “H” seguida da linha em que os blocos serão modificados, *row*, da coluna inicial, *coli*, da coluna final, *colf*, e do valor de alteração, *value* (ACTIVE ou INACTIVE), conforme o modelo abaixo:

H row coli colf value

- Modificação da transmissibilidade**

Para a modificação da transmissibilidade a variável assume quatro valores possíveis: NORTH, SOUTH, EAST ou WEST.

B.1.5.3 Alteração de um Conjunto de Blocos Adjacentes Verticalmente

- Modificação da geometria**

Para modificar verticalmente um conjunto de blocos, deve-se iniciar o comando com a letra “V” seguida da coluna em que os blocos serão modificados, *col*, da linha inicial, *rowi*, da linha final, *rowf*, e do valor de alteração, *value* (ACTIVE ou INACTIVE), conforme o modelo abaixo:

V col rowi rowf value

- Modificação da transmissibilidade**

Para a modificação da transmissibilidade a variável assume quatro valores possíveis: NORTH, SOUTH, EAST ou WEST.

B.1.5.4 Exemplo de um Arquivo de Modificação

- Modificação da geometria**

modgeo.mdf

```
H 0 0 10 INACTIVE
V 0 1 10 INACTIVE
B 0 5 ACTIVE
```

- Modificação da transmissibilidade

modT.mdf

```
H 0 0 10 SOUTH
V 0 1 10 WEST
B 3 5 NORTH
```

B.1.6 Arquivo de Propriedades de Fluidos (“.prp”)

Arquivo que contém a tabela de fluidos, obtida da análise PVT, em função da pressão. As quatro colunas são, respectivamente, pressão (psi), fator volume-formação (RB/STB), viscosidade (cp) e peso específico (psi/ft). A interpolação com relação a pressão é linear, porém a extrapolação não é válida.

B.1.6.1 Exemplo de Arquivo de Propriedades de Fluido

fluidprops.prp

```
4500 0.961198622371687 0.9180 0.378577794760184
5000 0.957058965455627 0.9200 0.380215292806712
5500 0.952954812693396 0.9243 0.381852790853240
6000 0.948885709278309 0.9372 0.383490288899768
6500 0.944851208138721 0.9494 0.385127786946296
7000 0.940850869774291 0.9650 0.386765284992824
7500 0.936884262096370 0.9812 0.388402783039352
8000 0.932950960272429 1.0019 0.390040281085880
```

B.2 Arquivos de Saída

O simulador possui a opção de imprimir três saídas diferentes:

- impressão no terminal (display);
- impressão no relatório (report);
- impressão de pressões (outPressure);

Essas opções podem ser configuradas no arquivo de configuração de controle de saída (**outputFile**).

B.2.1 Impressão no Terminal (display)

A impressão no terminal inicia-se com um cabeçalho que exibe tanto o nome do projeto quanto as principais variáveis fornecidas para a simulação. Em seguida, caso sejam informados alguns dados equivocados ou omitidos, será impresso alguns avisos.

Finalmente, depois do cabeçalho e dos avisos, é impressa a tabela contendo os dados da simulação, que para cada bloco escolhido poderá ser:

- pressão do bloco;
- pressão no poço (se produtor/injetor);
- vazão no poço (se produtor/injetor);
- volume produzido/injetado (se produtor/injetor);

Além disso, na primeira coluna, poderá ser impresso o volume total de óleo produzido/injetado em todo o reservatório.

B.2.1.1 Limitações

O número máximo de colunas impressas no terminal é de 5 (cinco) colunas.

B.2.2 Impressão no Relatório (report)

Assim como a impressão no terminal, a impressão no relatório inicia-se com o cabeçalho, porém em seguida não será exibido os avisos, caso existam.

Logo depois, será impressa a tabela contendo os dados da simulação, analogamente à impressão no terminal.

B.2.2.1 Limitações

O número máximo de colunas impressas no relatório é de 100 (cem) colunas.

B.2.2.2 Exemplo de Relatório

Relatório SPE A-1 - Incompressível

```
=====
SINGLE PHASE - SLIGHTLY-COMPRESSIBLE-FLOW
CARTESIAN (variable depth/variable thickness) - FINITE DIFFERENCE
BLOCK CENTERED GRID
SIMULATOR Ver. 0.0.3

capico@lenep.uenf.br
bismarckjunior@outlook.com
=====
```

Project Name: SPE_A1-1.ini

```
nrow: [11]
ncol: [14]
initialTime: [0]
maxSteps: [10]
dt: [0.1]
cf: [0]
cphi: [3e-006]
geometry: [geometrybc.dat]
modGeom: [**UNDEF**]
modTransmissibility: [**UNDEF**]
porosity: [porosity.dat]
kx: [kx.dat]
ky: [ky.dat]
thickness: [thickness.dat]
zTop: [ztop.dat]
dx: [dx.dat]
dy: [dy.dat]
rhoSC: [52.4]
fproprows: [2]
dpprops: [4000]
props file: [fluidprop.prp]
p0: [7750]
z0: [9306.5]
wells file: [wells.cfg]
output file: [outsFile.cfg]
boundary file: [**UNDEF**]
```

Time [Day]	P [psi] (004,004)	Pwf [psi] (004,004)	P [psi] (009,003)	Qw [bbl/d] (009,003)
0.000E+000	7.750E+003	7.959E+003	7.750E+003	-9.532E+003
1.000E-001	7.197E+003	7.406E+003	6.186E+003	-2.600E+003
2.000E-001	7.197E+003	7.406E+003	6.186E+003	-2.600E+003
3.000E-001	7.197E+003	7.406E+003	6.186E+003	-2.600E+003
4.000E-001	7.197E+003	7.406E+003	6.186E+003	-2.600E+003
5.000E-001	7.197E+003	7.406E+003	6.186E+003	-2.600E+003
6.000E-001	7.197E+003	7.406E+003	6.186E+003	-2.600E+003
7.000E-001	7.197E+003	7.406E+003	6.186E+003	-2.600E+003
8.000E-001	7.197E+003	7.406E+003	6.186E+003	-2.600E+003
9.000E-001	7.197E+003	7.406E+003	6.186E+003	-2.600E+003
1.000E+000	7.197E+003	7.406E+003	6.186E+003	-2.600E+003

B.2.3 Impressão de Pressões (outPressure)

O simulador também tem a opção de imprimir as pressões de todos blocos num intervalo de passos estabelecidos. Retorna um arquivo com uma matriz de valores de pressão para cada bloco. Cada arquivo representa um intervalo de tempo e para diferenciá-los será adicionado ao final do nome do arquivo o passo de tempo.

B.2.3.1 Exemplo de Impressão de Pressões

OutPressures.txt

7178.13	7177.29	7175.73	7167.34	7121.66	0	0
7178.25	7177.33	7174.27	7168.69	7094.65	6986.42	6810.89
7181.65	7179.92	7180.83	7196.79	7083.41	6980.65	6824.64
7178.07	7174.01	7162.69	7137.07	7056.31	6969.79	6836.7

B.3 Sistema de Unidades e Fatores de conversão

A Tabela 8 mostra as unidades e os fatores de conversão das variáveis básicas para a construção da equação que governa o fluxo no meio poroso, relacionando as unidades adotadas pelo simulador com as unidades do sistema internacional (SI).

Tabela 8: Variáveis utilizadas na equação de fluxo e na Lei de Darcy.

Quantidade	Simulador	SI	Fator de Conversão
Comprimento	ft	m	0,3048
Área	ft ²	m ²	0,09290304
Permeabilidade	darcy	μm ²	0,9869233
Viscosidade	cp	Pa·s	0,001
FVF do gás	RB/scf	m ³ /std m ³	5,5519314
FVF do líquido	RB/STB	m ³ /std m ³	1,0
Razão Gás/Óleo	scf/STB	std m ³ /std m ³	0,1801175
Pressão	psia	kPa	6,894757
Gradiente de pressão	psi/ft	kPa/m	22,62059
Peso específico	psi/ft	kPa/m	22,62059
Vazão do gás	scf/D	std m ³ /d	0,02863640
Vazão do líquido	STB/D	std m ³ /d	0,1589873
Velocidade volumétrica	RB/(D·ft ²)	m ³ /(d·m ³)	1,7103717
Volume do bloco	ft ³	m ³	0,02831685
Massa específica	lbm/ft ³	kg/m ³	16,01846
Aceleração da gravidade	32,174 ft/s ²	9,8066352 m/s ²	0,3048
Compressibilidade	psi ⁻¹	kPa ⁻¹	0,1450377
Temperatura Absoluta	°R	K	0,55555556
Permeabilidade relativa	-	-	1,0
Porosidade	-	-	1,0
Saturação	-	-	1,0
Fator de compressibilidade	-	-	1,0
Tempo	dia	dia	1,0
Ângulo	rad	rad	1,0
α_c	5,614583	1	-
β_c	1,127	$86,4 \times 10^{-6}$	-
γ_c	$0,21584 \times 10^{-3}$	10^{-3}	-

* Multiplica-se o sistema americano pelo fator de conversão para encontrar o sistema internacional.

** STB e scf são medidos a 60°F e 14,696 psia; std m³ é medido a 15°C e 100kPa.
Adaptada de Ertekin *et al.* (2001).

B.4 Definições gerais

A Fig. 71 ilustra as definições gerais de direção e sentido da construção da malha e das orientações de um bloco com sua face e blocos vizinhos. Note que os índices das linhas e das colunas iniciam em zero.

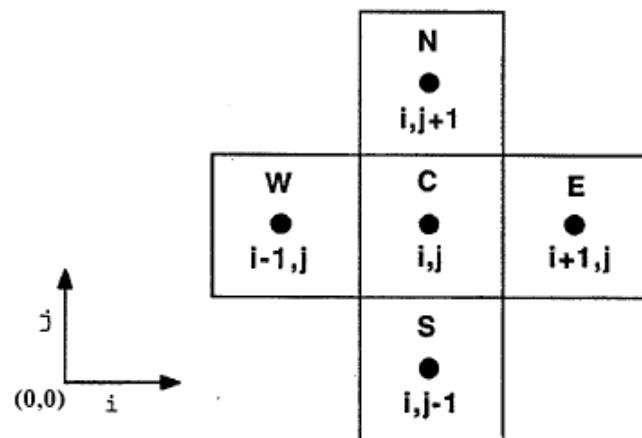


Figura 71: Direção, sentido e orientação para construção da malha cartesiana. Adaptado de Ertekin *et al.* (2001).

APÊNDICE C - Dados das Simulações Realizadas no Reservatório SPE A-1

Nessa seção contém as informações das três simulações realizadas no reservatório SPE A-1, cada uma delas com diferentes condições de produção para os poços e diferentes tipos de fluido: incompressível, ligeiramente compressível e compressível.

C.1 Propriedades do Reservatório SPE A-1

C.1.1 Comprimento dos blocos

A Fig. 72 representa a malha adotada para a simulação do reservatório SPE A-1, com os respectivos valores dos comprimentos dos blocos.

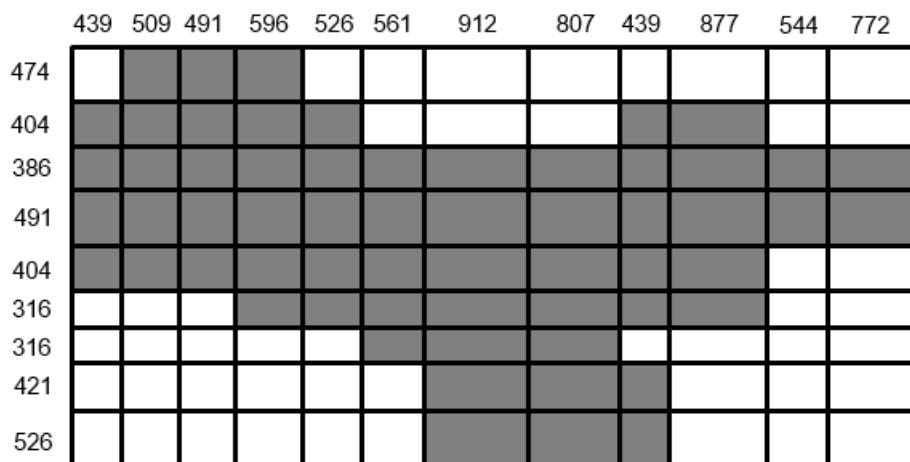


Figura 72: Comprimento dos blocos, em ft, do reservatório SPE A-1, tal que Δx está representado a cima da figura e Δy , ao lado.

C.1.2 Profundidade

A Fig. 73 representa as profundidades do topo dos blocos, em ft, do reservatório SPE A-1.

```
***** 9342.0 9345.0 9347.0 ****
9341.0 9327.0 9330.0 9338.0 9333.0 ****
9336.0 9319.0 9316.0 9322.0 9325.0 9315.0 9299.0 9300.0 9299.0 9297.0 9297.0 9305.0
9340.0 9326.0 9316.0 9308.0 9310.0 9313.0 9297.0 9296.0 9295.0 9293.0 9292.0 9295.0
9342.0 9332.0 9323.0 9305.0 9298.0 9298.0 9296.0 9292.0 9291.0 9288.0 ****
***** 9315.0 9297.0 9295.0 9292.0 9289.0 9289.0 9289.0 9287.0 ****
***** 9294.0 9290.0 9286.0 ****
***** 9289.0 9281.0 9282.0 ****
***** 9290.0 9280.0 9278.0 *****
```

Figura 73: Profundidade do topo dos blocos, em ft, do reservatório SPE A-1. Fonte: Ertekin *et al.* (2001).

C.1.3 Espessura

A Fig. 74 representa as espessuras dos blocos, em ft, do reservatório SPE A-1.

```
**** 10.0 12.0 5.0 ****
8.0 35.0 30.0 15.0 6.0 ****
14.0 44.0 36.0 30.0 22.0 16.0 12.0 14.0 15.0 11.0 6.0 3.0
20.0 34.0 35.0 40.0 34.0 32.0 29.0 25.0 22.0 18.0 10.0 3.0
5.0 12.0 12.0 40.0 44.0 42.0 32.0 20.0 16.0 10.0 ****
***** 10.0 19.0 27.0 24.0 10.0 6.0 3.0 ****
***** 4.0 10.0 6.0 ****
***** 8.0 7.0 3.0 ****
***** 4.0 5.0 2.0 *****
```

Figura 74: Espessura dos blocos, em ft, do reservatório SPE A-1. Fonte: Ertekin *et al.* (2001).

C.1.4 Porosidade

A Fig. 75 representa as porosidades dos blocos do reservatório SPE A-1, enquanto que a Fig. 76 ilustra o gráfico sua distribuição.

*****	0.192	0.197	0.202	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
0.190	0.195	0.200	0.204	0.207	*****	*****	0.215	0.205	*****	*****	*****
0.190	0.196	0.205	0.207	0.210	0.216	0.220	0.223	0.215	0.210	0.203	0.200
0.185	0.195	0.205	0.213	0.216	0.221	0.225	0.226	0.220	0.215	0.207	0.200
0.183	0.195	0.205	0.212	0.218	0.225	0.232	0.232	0.225	0.219	*****	*****
*****	*****	*****	0.210	0.219	0.226	0.235	0.230	0.220	0.216	*****	*****
*****	*****	*****	*****	0.225	0.235	0.230	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	*****	0.232	0.226	0.217	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	*****	0.229	0.220	0.217	*****	*****	*****	*****

Figura 75: Porosidade dos blocos do reservatório SPE A-1. Fonte: Ertekin *et al.* (2001).

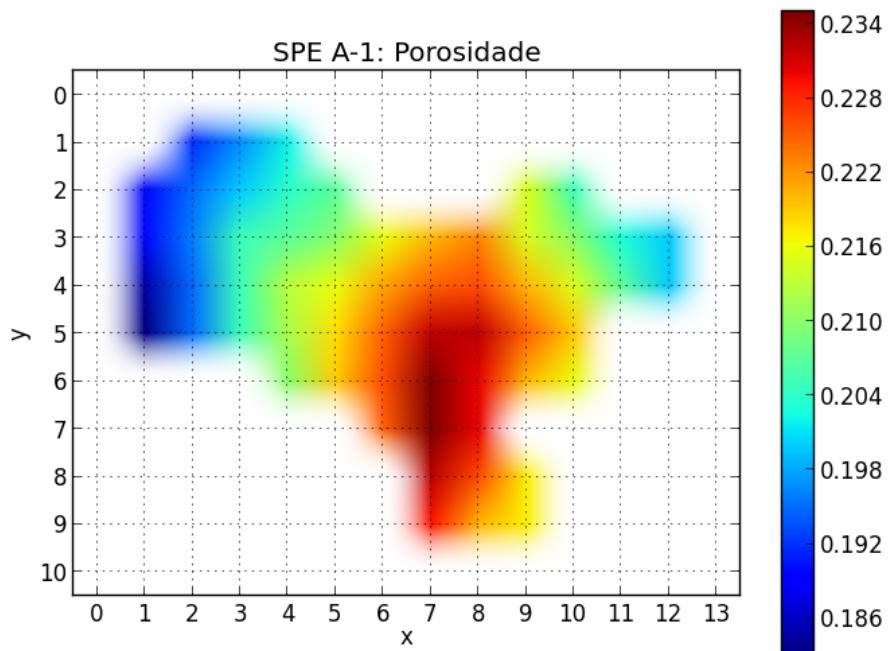


Figura 76: Gráfico da distribuição da porosidade no reservatório SPE A-1.

C.1.5 Permeabilidade

Os gráficos das permeabilidades na direções x e y econtram-se nas Figs. 77 e 78 e o seus valoes, na Fig. 79.

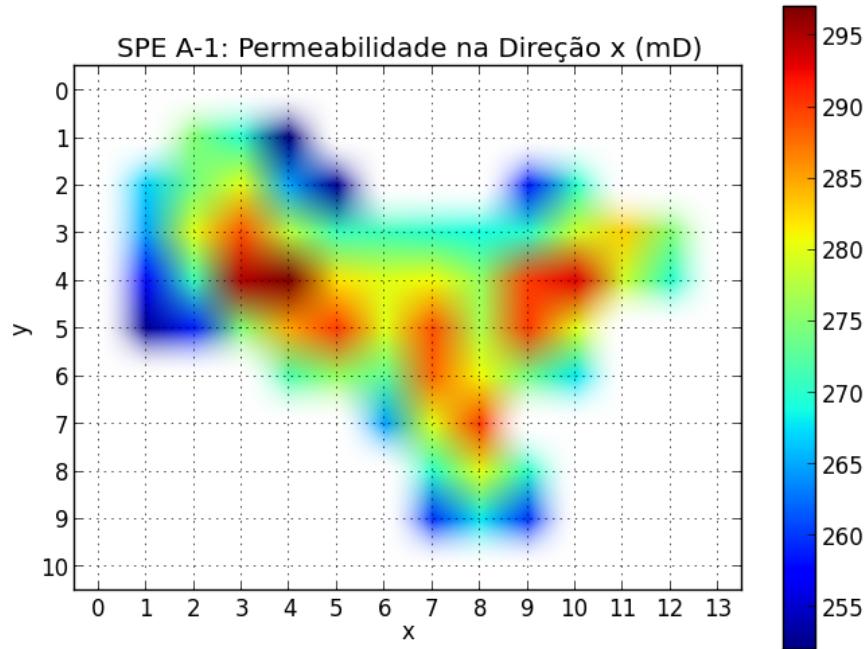


Figura 77: Gráfico da distribuição da permeabilidade, em mD, do reservatório SPE A-1 na direção x .

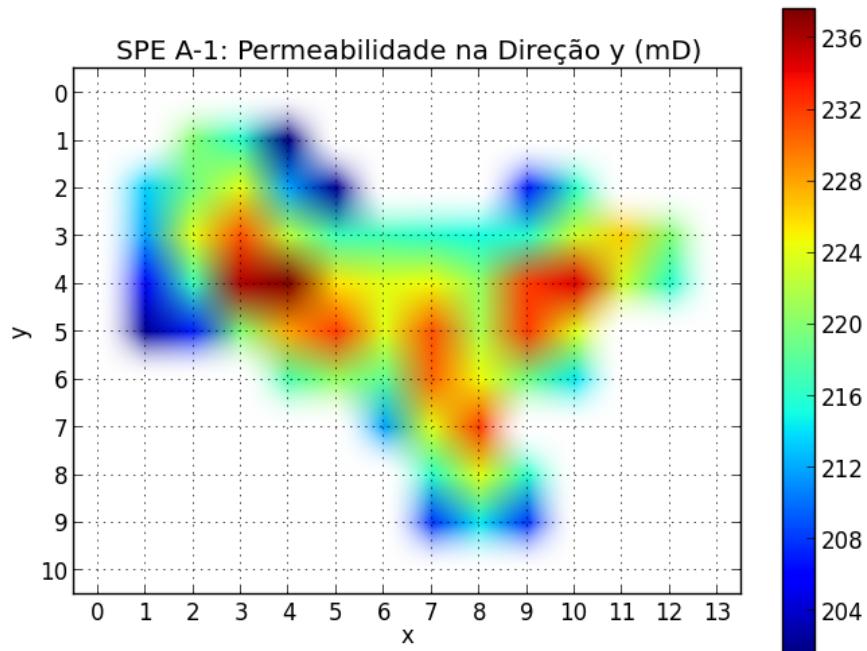


Figura 78: Gráfico da distribuição da permeabilidade, em mD, do reservatório SPE A-1 na direção y .

(a)

*****	275.0	270.0	252.0	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
267.0	274.0	280.0	265.0	253.0	*****	*****	259.0	270.0	*****	*****	*****
265.0	280.0	289.0	278.0	271.0	271.0	270.0	269.0	270.0	279.0	283.0	275.0
258.0	271.0	295.0	297.0	282.0	280.0	281.0	276.0	290.0	293.0	279.0	270.0
253.0	259.0	275.0	285.0	290.0	280.0	289.0	277.0	290.0	280.0	*****	*****
*****	*****	272.0	276.0	273.0	288.0	281.0	274.0	268.0	*****	*****	*****
*****	*****	*****	265.0	280.0	290.0	*****	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	270.0	280.0	270.0	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	*****	260.0	268.0	260.0	*****	*****	*****	*****

(b)

*****	220.0	216.0	201.6	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
213.6	219.2	224.0	212.0	202.4	*****	*****	207.2	216.0	*****	*****	*****
212.0	224.0	231.2	222.4	216.8	216.8	216.0	215.2	216.0	223.2	226.4	220.0
206.4	216.8	236.0	237.6	225.6	224.0	224.8	220.8	232.0	234.4	223.2	216.0
202.4	207.2	220.0	228.0	232.0	224.0	231.2	221.6	232.0	224.0	*****	*****
*****	*****	217.6	220.8	218.4	230.4	224.8	219.2	214.4	*****	*****	*****
*****	*****	*****	212.0	224.0	232.0	*****	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	216.0	224.0	216.0	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	208.0	214.4	208.0	*****	*****	*****	*****	*****

Figura 79: Permeabilidade dos blocos, em mD, do reservatório SPE A-1 na direção x .Fonte: Ertekin *et al.* (2001).

C.2 Dados Para a Simulação com Fluido Incompressível

C.2.1 Propriedades do Fluido

O fluido utilizado para essa simulação possui viscosidade de 1,0 cp e fator volume-formação de 1 RB/STB.

C.2.2 Condições de Produção dos Poços

As condições de produção e as propriedades dos poços W-2 e W-3 para a simulação com escoamento do fluido incompressível encontram-se na Fig. 9.

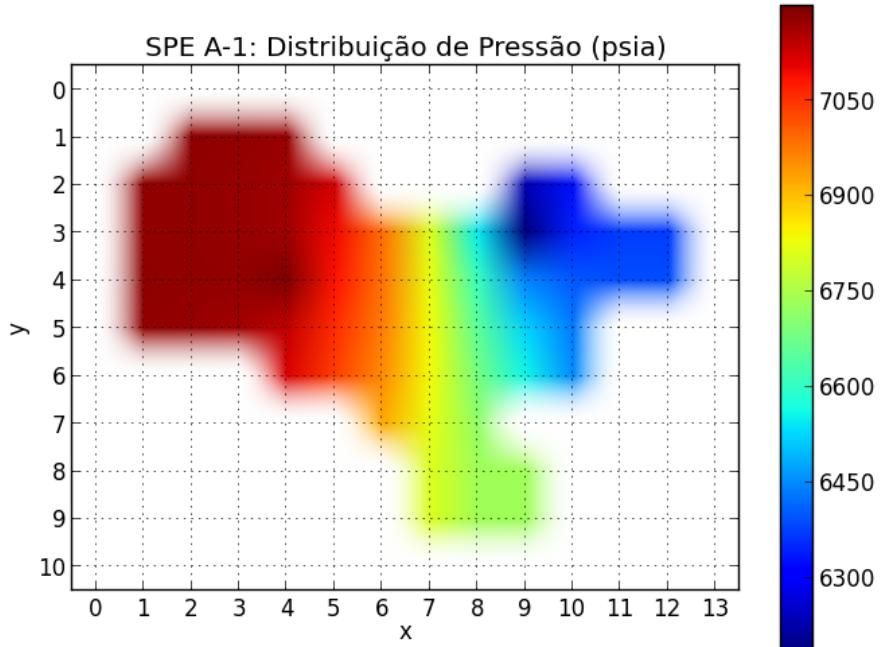
Tabela 9: Informações dos poços W-2 e W-3 para a simulação do fluido incompressível.

Poço	Bloco	Tipo	Raio (ft)	Espessura (ft)	Especificação
W-2	(9, 3)	Produtor	0,25	15,0	$p_{wf} = 5.600 \text{ psia}$
W-3	(4, 4)	Injetor	0,25	40,0	$q_{sc} = 2600 \text{ STB/D}$

Fonte: Ertekin *et al.* (2001).

C.2.3 Distribuição de Pressão no Regime Permanente

(a)



(b)

```

***** 7177.9 7178.0 7173.0 ****
7178.9 7178.1 7176.5 7168.1 7122.4 ****
7179.0 7178.1 7175.1 7169.5 7095.4 6987.2 6811.5 6548.4 6186.4 6347.5 6373.4 6375.8
7182.4 7180.7 7181.6 7197.6 7084.2 6981.4 6825.3 6610.1 6444.6 6402.5 6388.1 6388.0
7178.9 7174.8 7163.5 7137.9 7057.1 6970.6 6837.5 6653.1 6524.3 6436.3 ****
***** 7113.3 7036.0 6955.3 6837.4 6684.3 6558.9 6453.2 ****
***** 6923.3 6825.2 6717.6 ****
***** 6809.7 6737.4 6737.0 ****
***** 6809.4 6736.7 6735.4 ****

```

Figura 80: Distribuição de pressão, em psia, no regime permanente para o caso do escoamento incompressível no reservatório SPE A-1. Adaptado de: Ertekin *et al.* (2001).

C.3 Dados Para a Simulação com Fluido Ligeiramente Compressível

C.3.1 Propriedades do Fluido

As Tabelas 10 e 11 apresentam, respectivamente, as propriedades do fluido e uma relação entre a pressão e a viscosidade.

Tabela 10: Propriedades do fluido ligeiramente compressível.

Dados gerais

c_o , psi^{-1}	$9,0 \times 10^{-6}$
ρ_o , lbm/ft^3	52,4
B_o , RB/STB	$1/ [1 + 9,0 \times 10^{-6}(p - 14,7)]$

Fonte: Ertekin *et al.* (2001).

Tabela 11: Viscosidade do fluido ligeiramente compressível.

Dados da Viscosidade do óleo

Pressão (psia)	Viscosidade (cp)
4.500	0,9180
5.000	0,9200
5.500	0,9243
6000	0,9372
6.500	0,9494
7.000	0,9650
7.500	0,9812
8.000	1,0019

Fonte: Ertekin *et al.* (2001).**C.3.2 Condições de Produção dos Poços**

As condições de produção e as propriedades dos poços para a simulação com escoamento do fluido ligeiramente incompressível encontram-se na Fig. 12.

Tabela 12: Informações dos poços W-2 e W-3 para a simulação do fluido ligeiramente compressível.

Poço	Bloco	Tipo	Raio (ft)	Espessura (ft)	Especificação
W-2	(9, 3)	Produtor	0,25	15,0	$q_{sc} = -650 \text{ STB/D}$
W-3	(4, 4)	Produtor	0,25	40,0	$p_{wf} = 5.600 \text{ psia}$

Fonte: Ertekin *et al.* (2001).**C.4 Dados Para a Simulação com Fluido Compressível****C.4.1 Propriedades do Fluido**

As Tabelas 13 e 14 apresentam, respectivamente, as propriedades do fluido e uma relação entre a pressão e a viscosidade.

Tabela 13: Propriedades do fluido compressível.

Dados gerais	
Temperatura do reservatório, °F	190
Temperatura padrão, °F	60
Pressão padrão, psia	14,7
Peso molecular, lbm/lbm-mol	22,836
Temperatura pseudo-crítica, °R	418,38
Pressão pseudo-crítica, psia	738,44
Densidade em condições padrão	0,058359
Fator volume-formação	$B_g = \frac{p_{sc}TZ}{\alpha_c T_{sc} p}$

Fonte: Ertekin *et al.* (2001).

Tabela 14: Viscosidade do fluido compressível.

Dados da Viscosidade do óleo

Pressão (psia)	Viscosidade (cp)
3.500	0,0222403
4.000	0,0241128
4.500	0,0259745
5.000	0,0278092
5.500	0,0296024
6000	0,0313411
6.500	0,0330143
7.000	0,0346133
7.500	0,0361318
8.000	0,0375660

Fonte: Ertekin *et al.* (2001).**C.4.2 Condições de Produção dos Poços**

As condições de produção e as propriedades dos poços W-2 e W-3 para a simulação com escoamento do fluidocompressível encontram-se na Fig. 15.

Tabela 15: Informações dos poços W-2 e W-3 para a simulação do fluido compressível.

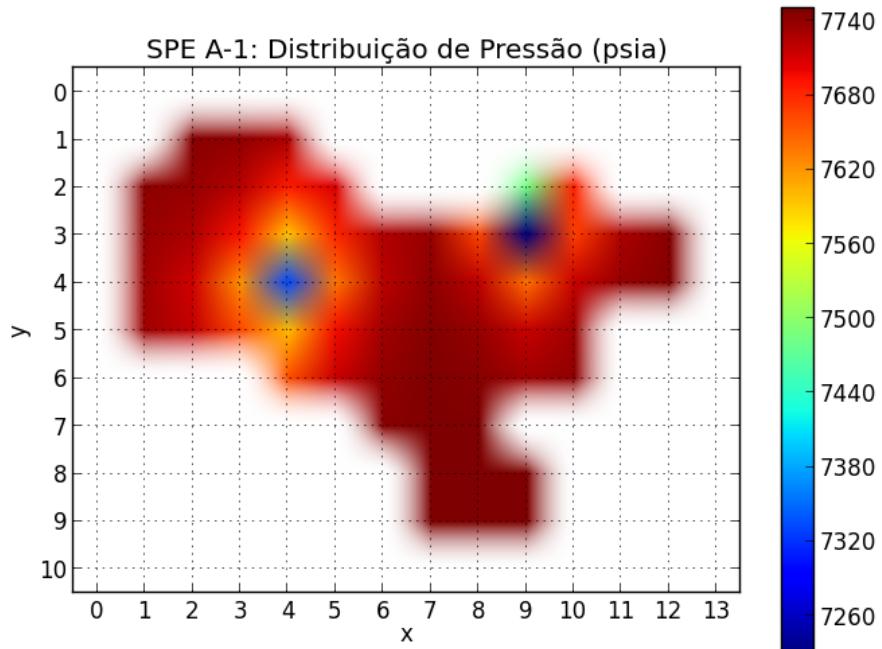
Poço	Bloco	Tipo	Raio (ft)	Espessura (ft)	Especificação
W-2	(9, 3)	Produtor	0,25	15,0	$q_{sc} = -3 \text{ MMscf/D}$
W-3	(4, 4)	Produtor	0,25	40,0	$p_{wf} = 6.000 \text{ psia}$

Fonte: Ertekin *et al.* (2001).

C.4.3 Distribuição de Pressão

•Após 5 dias de Produção

(a)



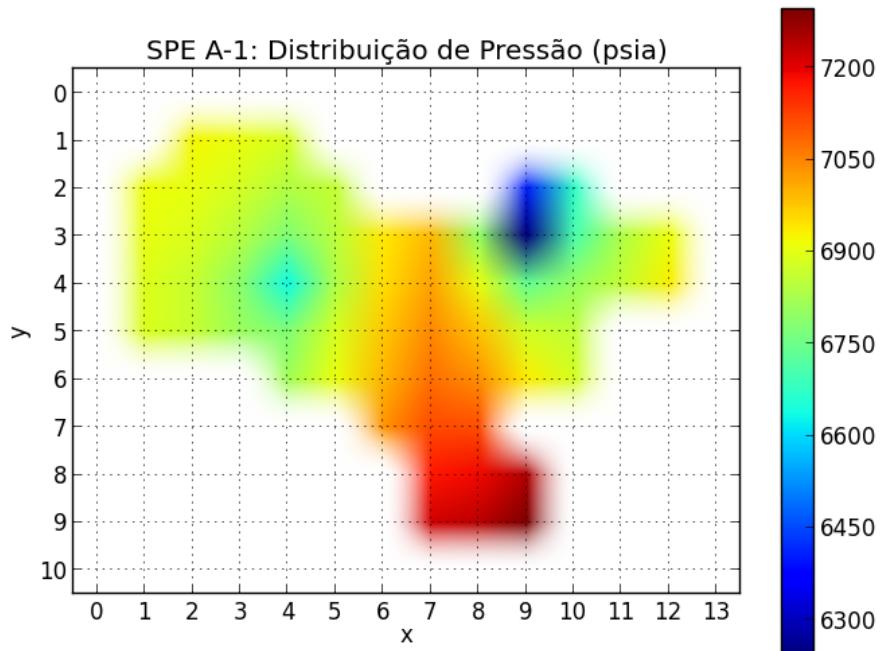
(b)

*****	7744.5	7740.0	7728.6	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
7743.4	7739.2	7725.1	7688.8	7709.1	*****	*****	*****	*****	7486.1	7683.5	*****	*****	*****
7739.5	7729.7	7691.5	7594.6	7681.2	7727.4	7739.0	7664.4	7230.4	7667.5	7729.0	7745.2	*****	*****
7734.5	7712.9	7622.9	7333.2	7637.5	7723.1	7743.6	7720.5	7642.1	7717.4	7738.4	7747.4	*****	*****
7735.4	7719.2	7664.4	7598.4	7696.1	7734.8	7746.7	7739.1	7717.3	7735.0	*****	*****	*****	*****
*****	7660.1	7717.1	7740.7	7748.1	7745.0	7734.5	7741.1	*****	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	7745.3	7749.1	7748.2	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	7749.7	7749.6	7749.9	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	7749.9	7749.9	7750.0	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****

Figura 81: Distribuição de pressão, em psia, para o caso do escoamento compressível no reservatório SPE A-1 após 5 dias de produção. Adaptado de Ertekin *et al.* (2001).

•Após 100 dias de Produção

(a)



(b)

*****	6922.8	6910.5	6886.6	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
6916.4	6907.6	6884.1	6841.1	6860.7	*****	*****	*****	6411.0	6675.2	*****	*****	*****	*****
6905.6	6890.3	6847.5	6775.4	6854.1	6941.6	6994.4	6799.2	6245.2	6705.8	6837.9	6916.2	*****	*****
6894.3	6867.6	6793.7	6636.6	6837.9	6951.6	7018.6	6905.9	6738.4	6804.4	6862.0	6933.1	*****	*****
6889.7	6865.0	6810.7	6773.9	6885.4	6976.2	7047.9	6979.1	6878.0	6857.4	*****	*****	*****	*****
*****	6815.2	6912.0	6997.1	7074.4	7037.7	6933.8	6884.0	*****	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	7032.6	7114.0	7113.8	*****	*****	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	*****	7172.0	7191.6	7246.6	*****	*****	*****	*****	*****	*****
*****	*****	*****	*****	*****	7218.7	7240.7	7294.3	*****	*****	*****	*****	*****	*****

Figura 82: Distribuição de pressão, em psia, para o caso do escoamento compressível no reservatório SPE A-1 após 100 dias de produção. Adaptado de Ertekin *et al.* (2001).