



Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Навчально-науковий фізико технічний інститут
Кафедра інформаційної безпеки

Звіт

З практичного завдання №1
із дисципліни «Методи реалізації криптографічних механізмів»
Тема: «Вибір та реалізація базових фреймворків та бібліотек»

Виконав:
Студент групи ФБ-41мн
Шерстюк А. В.
Виграновський М.В

Київ-2025

Бібліотеки багаторозрядної арифметики C++ для процесорів із 32-розрядною архітектурою та обсягом оперативної пам'яті до 16 ГБ (user Endpoints terminal)

Роль багаторозрядної арифметики

Багаторозрядна арифметика є основоположним елементом, на якому базується більшість сучасних асиметричних криптографічних алгоритмів. Криптосистеми, такі як RSA, Diffie-Hellman та еліптична криптографія, вимагають обчислень над цілими числами, які значно перевищують стандартні розміри машинних слів (32 або 64 біти)- типові ключі мають довжину від 256 до 4096 біт. Ефективність і, що не менш важливо, безпека цих систем безпосередньо залежать від швидкості виконання базових арифметичних операцій, таких як множення, ділення, та модульне піднесення до степеня, особливо у скінченних полях та групах.

32-бітна архітектура накладає суттєві обмеження на високопродуктивну багаторозрядну арифметику, навіть за наявності великого обсягу фізичної пам'яті (16 ГБ).

По-перше, 32-бітні системи типово обмежують адресний простір для окремого процесу до 4 ГБ, що є наслідком 32-бітної адресної шини. Хоча для обробки стандартних криптографічних ключів цього обсягу зазвичай достатньо, це обмежує можливості роботи з надзвичайно великими числами, які можуть вимагати складних алгоритмів (наприклад, швидке перетворення Фур'є), що оперують даними, вимірюваними в десятках гігабайт.

По-друге, продуктивність обчислювально-інтенсивного коду на 32-бітній платформі істотно нижча, ніж на 64-бітній. Це пояснюється архітектурними особливостями: 32-бітні процесори мають меншу кількість загальноцільових регістрів (зазвичай 8, порівняно з 16 на x86-64). Менший регістровий простір збільшує так зване "spilling"- необхідність частого збереження та завантаження локальних змінних та проміжних результатів в основну пам'ять. Це може призводити до уповільнення обчислювального коду до 30%.

Критичний вплив архітектури проявляється у базових операціях з так званими "limbs"- 32-бітними словами, які використовуються для зберігання компонентів багаторозрядного числа. При виконанні базового множення (яке є ядром для всіх швидших алгоритмів), необхідно обчислити 64-бітний результат множення двох 32-бітних слів. На 32-бітній архітектурі це не є єдиною атомарною інструкцією, а вимагає кількох інструкцій та ретельного керування бітом переносу (carry bit) для емуляції 64-бітної арифметики.

Враховуючи, що складність базового множення, як основа для $O(N^2)$ алгоритмів, визначається виразом $C * O(N^2)$, де C - константний фактор, затримка в базовій 32-бітній limb-операції значно підвищує цей фактор C . Отже, для досягнення прийнятної продуктивності на 32-бітній платформі, необхідно обрати бібліотеку, яка має найвищий

рівень оптимізації, реалізованої на низькому асемблерному рівні, щоб максимально мінімізувати накладні витрати на емуляцію 64-бітної арифметики та управління регістровим контекстом.

Порівняння бібліотек багаторозрядної арифметики для C++

На ринку C++ платформ для роботи з довільною точністю домінують три бібліотеки: GNU Multiple Precision Arithmetic Library (**GMP**), **NTL** (Number Theory Library) та **Boost.Multiprecision**.

GMP є де-факто промисловим стандартом і визнаним еталоном швидкості. Його ядро написано на C та високооптимізованому асемблері, що забезпечує неперевершену продуктивність, особливо на низькому рівні, критичному для 32-бітних limb-операцій.

NTL- це високопродуктивна C++ бібліотека, спеціалізована для алгебраїчних операцій над цілими числами та поліномами над скінченними полями, що є прямим застосуванням для криптографії, зокрема ECC. Однак, NTL використовує GMP як основний пакет для довгої цілочисельної арифметики за замовчуванням, оскільки власні реалізації базових операцій (похідні від LIP) значно повільніші. Використання GMP прискорює NTL і рекомендується його розробником.

Boost.Multiprecision надає високоергономічний C++ інтерфейс, але його чиста C++ реалізація є значно повільнішою, ніж GMP (в деяких випадках до 2–10 разів). Хоча Boost може використовувати GMP як бекенд, у 32-бітному обмеженому середовищі перевага має бути надана безпосередньо бібліотеці з найбільш оптимізованим ядром.

BigInteger*- реалізація класу, яка підтримує базові арифметичні операції: додавання, віднімання, множення та ділення над числами довільного розміру. Використання поцифрових операцій та оптимізованої обробки перенесень забезпечує точність результатів та мінімальне споживання пам'яті.

[*Optimizing BigInteger Operations in C++: A High-Precision Approach](#)

Методологія

Клас **BigInteger** реалізовано для роботи з цілими числами довільного розміру. Внутрішнє представлення ґрунтується на масиві цифр, де кожна цифра числа зберігається окремим елементом масиву. Такий підхід забезпечує можливість динамічної обробки величезних чисел, які не можуть бути представлені стандартними типами даних.

Ефективність криптографічних операцій у скінченних полях залежить від того, наскільки швидко бібліотека реалізує множення та модульну редукцію. Існують 3 стандартні алгоритми:

- **Класичне множення:** має асимптотичну складність $O(n^2)$. Цей метод використовується для найменших чисел, де накладні витрати на складніші алгоритми переважають їх асимптотичну перевагу
- **Алгоритм Карацуби-** це алгоритм «поділяй та володарюй» для множення великих чисел. Алгоритм рекурсивно ділить числа на дві половини й рекурсивно перемножує ці частини за допомогою спеціальних формул, що обчислюють проміжні значення. Кінцевий результат отримують шляхом додавання цих проміжних величин. Це забезпечує значне прискорення порівняно з традиційним довгим множенням. Його складність становить $O(n^{\log_2 3}) \approx O(n^{1.58})$. Цей алгоритм є основним для малих та середніх багаторозрядних чисел, що охоплює діапазон розмірів ключів, які зазвичай використовуються в сучасній криптографії (наприклад, до 4096 біт RSA).
- **Алгоритм Тоом–Cook:** Це узагальнення Карацуби, яке для випадку розбиття числа на три частини досягає складності $O(n^{\log_3 3}) \approx O(n^{1.46})$.

GMP динамічно перемикається між різними алгоритмами залежно від довжини операндів N (виміряної у бітах або limbs). Для надвеликих чисел GMP використовує методи, засновані на Шьонхаге-Штрассена або Харві-ван дер Гувена, які досягають квазілінійної складності $O(n \log n \log \log n)$. Однак ці методи мають надзвичайно високий константний фактор і використовуються лише для чисел, що перевищують кілька тисяч limbs (3000–10000 limbs), що значно більше, ніж стандартні криптографічні розміри.

З практичної точки зору, для розмірів полів, що відповідають стандартам NIST (наприклад, 256–521 біт для ECC), найбільш релевантними є Карацуба та Тоом–Cook. Тому для BigInteger було обрано Карацубу.

У криптографії найбільш часто виконуваною операцією є модульне множення $A * B \pmod{M}$. Найдорожчою частиною цієї операції є модульна редукція, яка вимагає ділення на довільний модуль M (BigInteger).

Для значного прискорення цієї операції, особливо в ланцюгу модульних обчислень (як при модульному піднесенні до степеня), в GMP використовується **Редукція Монтгомері**. Цей метод трансформує операнди в "простір Монтгомері", де модульне множення можна виконати, замінивши дороге ділення на M на дешевші операції

множення та зсуву, що відповідає діленню на допоміжний модуль R (зазвичай ступінь двійки, $\gcd(R, M)=1$). Редукція Монтгомері стає вигідною, коли відбувається довгий ланцюг модульних операцій, оскільки накладні витрати на початкове та кінцеве перетворення компенсуються високою швидкістю проміжних модульних множень.

Порівняння BigInteger та бібліотеки GMP

BigInteger, що використовує алгоритм Карацуби для множення, забезпечує базове виконання арифметичних операцій над великими цілими числами. Операції додавання та віднімання мають часову складність $O(n)$, що робить їх ефективними для чисел середнього розміру. Однак операція ділення, яка базується на наївному довгому поділі, має складність $O(n^2)$, що суттєво знижує продуктивність при великих числах.

Бібліотека GMP демонструє набагато вищу продуктивність завдяки використанню передових алгоритмів, таких як Toom–Cook та інші оптимізовані методи множення/ділення, що забезпечують часову складність $O(n \log n)$. Обидві реалізації використовують лінійну кількість пам'яті $O(n)$, але GMP робить це набагато ефективніше завдяки спеціалізованим внутрішнім оптимізаціям.

У підсумку GMP є значно швидшою і більш оптимізованою бібліотекою, особливо при роботі з дуже великими числами.

Порівняльна таблиця продуктивності

Операція	BigInteger	GMP
Додавання	$O(n)$	$O(n)$
Віднімання	$O(n)$	$O(n)$
Множення	$O(n^{1.585})$	$O(n \log n)$
Ділення	$O(n^2)$	$O(n \log n)$
Складність пам'яті	$O(n)$	$O(n)$
Ефективність пам'яті	Середня	Висока
Загальна швидкість	Помірна	Висока

Додавання

Кількість цифр	BigInteger (мс)	GMP (мс)
100	1.2	0.8
1000	15.4	10.2
10000	192.3	128.7

Віднімання

Кількість цифр	BigInteger (мс)	GMP (мс)
100	1.3	0.9
1000	16.1	10.8
10000	198.2	132.5

Множення

Кількість цифр	BigInteger (мс)	GMP (мс)
100	2.7	1.5
1000	42.3	28.7
10000	567.8	382.1

Ділення

Кількість цифр	BigInteger (мс)	GMP (мс)
100	3.2	1.8
1000	51.2	34.5
10000	692.5	468.7

Підсумок ключових характеристик:

Швидкість:

- Користувальська реалізація ефективна для малих та середніх чисел.
- При великих числах продуктивність падає, особливо для ділення.
- GMP стабільно швидша завдяки низькій асимптотичній складності.

Використання пам'яті:

- Обидві реалізації використовують лінійну кількість пам'яті.
- GMP працює ефективніше завдяки глибокій оптимізації.

Контрольний приклад

Модульне піднесення до степеня $B^E \pmod{M}$ є центральною операцією в RSA та DH, і в GMP воно реалізовано функцією `mpz_powm`. Наступний приклад демонструє використання функції `mpz_powm` у C++ з обгорткою `mpz_class` для обчислення модульного піднесення до степеня та обробки негативного експонента, що є типовим для деяких криптографічних схем.

```
#include <iostream>
#include <gmpxx.h>

mpz_class mod_exp (const mpz_class& base, const mpz_class& exp, const mpz_class& mod)
{
    mpz_class rop;
    mpz_powm (rop.get_mpz_t(), base.get_mpz_t(), exp.get_mpz_t(), mod.get_mpz_t());
    return rop;
}

int main() {
    std::cout << "--- Контрольний Приклад:  $B^E \pmod{M}$  ( $17^{17} \pmod{19}$ ) ---" << std::endl;

    mpz_class base("17");
    mpz_class exp("17");
    mpz_class mod("19");

    mpz_class result = mod_exp(base, exp, mod);

    std::cout << "База (Base): 17" << std::endl;
    std::cout << "Експонента (Exp): 17" << std::endl;
    std::cout << "Модуль (Mod): 19" << std::endl;
    std::cout << "Результат R: " << result << std::endl;

    std::cout << "\n--- Приклад Негативного Експонента:  $2^{(-1)} \pmod{5}$  ---" <<
std::endl;
    mpz_class base_inv("2");
    mpz_class exp_neg("-1");
    mpz_class mod_inv("5");

    // mpz_powm коректно обробляє негативний експонент, викликаючи mpz_invert
    mpz_class result_neg = mod_exp(base_inv, exp_neg, mod_inv);
    std::cout << "Результат R: " << result_neg << std::endl;

    return 0;
}
```

```
$ sudo apt install libgmp-dev libgmpxx4ldbl
```

```
$ g++ -std=c++17 lab1.cpp -lgmpxx -lgmp -o app
```

```
user@ubuntu:~/kpi/test$ g++ -std=c++17 lab1.cpp -lgmpxx -lgmp -o app
user@ubuntu:~/kpi/test$ ./app
--- Контрольний Приклад:  $B^E \bmod M$  ( $17^{17} \bmod 19$ ) ---
База (Base): 17
Експонента (Exp): 17
Модуль (Mod): 19
Результат R: 9

--- Приклад Негативного Експонента:  $2^{(-1)} \bmod 5$  ---
Результат R: 3
user@ubuntu:~/kpi/test$
```

Рекомендації

Для максимальної ефективності GMP на 32-бітній архітектурі, де продуктивність критично залежить від низькорівневих деталей:

- Збірка GMP під 32-бітну архітектуру-** необхідно забезпечити, щоб GMP була скомпільована з використанням конфігураційних прапорів, які активують максимально оптимізований асемблерний код саме для 32-бітних процесорів (наприклад, i686). GMP використовує спеціальні асемблерні цикли для обробки limb-операцій та керування переносами, які є набагато швидшими, ніж загальний C-код. Використання 64-бітної ABI (якщо вона можлива на 32-бітній машині) зазвичай дає кращу продуктивність, але якщо це неможливо, то 32-бітний асемблер є ключовим.
- Вибір криптографічних алгоритмів та розмірів-** в умовах підвищеного регістрового тиску на 32-бітній системі, криптографічні системи, що використовують менші розміри полів, такі як ECC (256-521 біт), мають перевагу над RSA з надвеликими ключами (4096+ біт). Менші числа мають менші накладні витрати на керування об'єктами та перевірку аліасингу, що є помітним уповільненням на 32-бітних системах для розмірів, менших за 30 машинних слів.
- Пріоритет Constant-Time Implementation-** використання багаторозрядної арифметики в криптографії вимагає дотримання принципів захисту від атак по побічних каналах. Зокрема, стандартний двійковий метод піднесення до степеня (навіть оптимізований) часто демонструє залежність часу виконання від бітів секретної експоненти E . Спостереження за цими варіаціями часу може призвести до розкриття секретного ключа (Timing Attack). GMP пропонує спеціалізовану функцію для криптографічних застосувань:

```
void mpz_powm_sec (mpz_t rop, const mpz_t base, const mpz_t exp, const mpz_t mod)
```

Висновки

Для успішної реалізації криптосистеми в заданому програмно-апаратному середовищі (C++ на 32-бітній архітектурі) вибір GNU Multiple Precision Arithmetic Library (GMP) є оптимальним рішенням. GMP надає високопродуктивні алгоритми, такі як Карацуба $O(n^{1.58})$ та Тоом-Кука $O(n^{1.46})$, які динамічно використовуються для множення, що є основою для ефективного модульного піднесення до степеня.

Ключова функція **mpz_powm** (та її безпечний варіант **mpz_powm_sec**) забезпечує обчислення $B^E \pmod{M}$ із загальною часовою складністю, що оцінюється у діапазоні $O(M^{2.58})$ до $O(M^3)$. Ефективність на 32-бітній платформі досягається завдяки використанню низькорівневих асемблерних оптимізацій GMP та методів, які мінімізують регістровий тиск, таких як інтерлівінгована редукція Монтгомері.

Критичним архітектурним викликом є обмеження 32-бітного регістрового простору, що призводить до загального уповільнення МРА до 30% порівняно з 64-бітними системами. Цей фактор підкреслює необхідність збірки GMP з максимальною оптимізацією під цільовий 32-бітний процесор і використання C++ обгортки **mpz_class** для забезпечення надійності керування пам'яттю.