Použití Coxova modelu a logistické regrese pro odhad účinnosti vakcín

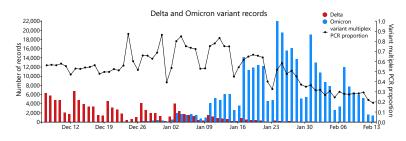
Martin Šmíd, ÚTIA AV ČR, Tamara Barusová, IBA s.r.o.

a kolektiv sdružený okolo BISOP, MUNI a ÚZIS

Workshop MUNI Brno

10. února 2023

Téma 1: Efektivita vakcín/ochrana předchozí infekcí



V roce 2021 se objevila řada vakcín proti COVIDu.

Otázka: Jak efektivní vakcíny jsou a jakou ochranu poskytuje předchozí infekce?

Pokus o odpověď: Šmíd et al., 2022, Journal of Infectious Diseases, 2022.

$$\underbrace{\lambda(t|X)}_{\text{mfra rizika}} = \underbrace{\lambda_0(t)}_{\text{základní riziko}} \exp\{\underbrace{\beta}_{\text{koefi-cienty}} \underbrace{X}_{\text{kova-cienty}}\}, \qquad X, \beta \in \mathbb{R}^n$$

 $\lambda \doteq$ "Počet událostí za jednotku času"

$$\underbrace{\lambda(t|X)}_{\text{mfra rizika}} = \underbrace{\lambda_0(t)}_{\text{základní riziko}} \exp\{\underbrace{\beta}_{\text{koefi-cienty}} \underbrace{X}_{\text{kova-cienty}}\}, \qquad X, \beta \in \mathbb{R}^n$$

- λ = "Počet událostí za jednotku času"
- Typicky: událost (outcome) smrt, základní riziko obvyklý průběh nemoci, X – kovariáty

$$\underbrace{\lambda(t|X)}_{\text{míra rizika}} = \underbrace{\lambda_0(t)}_{\text{základní riziko}} \exp\{\underbrace{\beta}_{\text{koefi-cienty}} \underbrace{X}_{\text{kova-riáty}}\}, \qquad X, \beta \in \mathbb{R}^n$$

- $\lambda \doteq$ "Počet událostí za jednotku času"
- Typicky: událost (outcome) smrt, základní riziko obvyklý průběh nemoci, X – kovariáty
- Implicitní předpoklady:
 - 1. "je to u všech lidí (až na kovariáty) stejně",
 - 2. příspěvky kovariát k riziku se násobí (odpovídá předpokladu podmíněné nezávislosti),
 - příspěvky kovariát k riziku se v čase nemění (proto "proportional hazard" – poměr příspěvků bude v čase stejný)
 - 4. závislost je skutečně log-lineární (netýká se kategoriálních X)

$$\underbrace{\lambda(t|X)}_{\text{míra rizika}} = \underbrace{\lambda_0(t)}_{\text{základní riziko}} \exp\{\underbrace{\beta}_{\text{koefi-cienty}} \underbrace{X}_{\text{kova-riáty}}\}, \qquad X, \beta \in \mathbb{R}^n$$

- $\lambda \doteq$ "Počet událostí za jednotku času"
- Typicky: událost (outcome) smrt, základní riziko obvyklý průběh nemoci, X – kovariáty
- Implicitní předpoklady:
 - 1. "je to u všech lidí (až na kovariáty) stejně",
 - příspěvky kovariát k riziku se násobí (odpovídá předpokladu podmíněné nezávislosti),
 - 3. příspěvky kovariát k riziku se v čase nemění (proto "proportional hazard" poměr příspěvků bude v čase stejný)
 - 4. závislost je skutečně log-lineární (netýká se kategoriálních X)
- Výhoda: Odhad β nezávisí na λ_0 . Log-věrohodností funkce:

$$L(\beta, X) = \sum_{i} \frac{\lambda(T_i|X_i)}{\sum_{T_i \geq T_i} \lambda(T_i|X_j)} = \sum_{i} \frac{\exp(\beta X_i)}{\sum_{T_i \geq T_i} \exp(\beta X_j)}$$

 T_i je čas události, $T_i = \infty$ pokud nenastala.

$$\underbrace{\lambda(t|X)}_{\text{míra rizika}} = \underbrace{\lambda_0(t)}_{\text{základní riziko}} \exp\{\underbrace{\beta}_{\text{koefi-cienty}} \underbrace{X}_{\text{kova-riáty}}\}, \qquad X, \beta \in \mathbb{R}^n$$

Příklad: přežití pacientů s rakovinou plic v závislosti na věku, pohlaví a ECOG skore, měřícím celkový stav pacianta:

Vstup a výpočet v R

$$\lambda(t|X) = \lambda_0(t) \exp{\{\beta X\}}, \qquad X, \beta \in \mathbb{R}^n$$

$$\lambda(t|X) = \lambda_0(t) \exp{\{\beta X\}}, \qquad X, \beta \in \mathbb{R}^n$$

 Cenzorování: Subjekty mohou ze studie "vypadnout" i kvůli jiným důvodům než smrti, fakt "vypadnutí" ovšem musí být (podmíněně) nezávislý na události (Kleinbaum a Klein, 1996)

$$\lambda(t|X) = \lambda_0(t) \exp{\{\beta X\}}, \qquad X, \beta \in \mathbb{R}^n$$

- Cenzorování: Subjekty mohou ze studie "vypadnout" i kvůli jiným důvodům než smrti, fakt "vypadnutí" ovšem musí být (podmíněně) nezávislý na události (Kleinbaum a Klein, 1996)
- Opakované události: lze, pokud je událost u jednoho subjektu (podmíněně) nezávíslá na jeho předchozích událostech (Ozga, Kieser a Rauch, 2018).

$$\lambda(t|X) = \lambda_0(t) \exp{\{\beta X\}}, \qquad X, \beta \in \mathbb{R}^n$$

- Cenzorování: Subjekty mohou ze studie "vypadnout" i kvůli jiným důvodům než smrti, fakt "vypadnutí" ovšem musí být (podmíněně) nezávislý na události (Kleinbaum a Klein, 1996)
- Opakované události: lze, pokud je událost u jednoho subjektu (podmíněně) nezávíslá na jeho předchozích událostech (Ozga, Kieser a Rauch, 2018).
- Časově proměnné kovariáty: X(t) místo X (Therneau, Crowson a Atkinson, 2017)

$$\lambda(t|X) = \lambda_0(t) \exp{\{\beta X\}}, \qquad X, \beta \in \mathbb{R}^n$$

- Cenzorování: Subjekty mohou ze studie "vypadnout" i kvůli jiným důvodům než smrti, fakt "vypadnutí" ovšem musí být (podmíněně) nezávislý na události (Kleinbaum a Klein, 1996)
- Opakované události: lze, pokud je událost u jednoho subjektu (podmíněně) nezávíslá na jeho předchozích událostech (Ozga, Kieser a Rauch, 2018).
- Časově proměnné kovariáty: X(t) místo X (Therneau, Crowson a Atkinson, 2017)

Ve všech případech platí, že $L(\beta,X)=\sum_i \frac{\exp(\beta X_i(T_i))}{\sum_{j\in R_i,T_i}\exp(\beta X_j(T_i))}$, kde $R_{j,t}$ je množina všech subjektů, která jsou v čase t "v riziku", tj. jsou přítomny ve studii (již do ní vstoupily a ještě "nevypadly" kvůli události nebo conzorování)

Efektivita vakcín/ochrana předchozí infekcí

(Šmíd et al., 2022, inspirováno Tartof et al., 2021)

$$\lambda(t|\texttt{VaccStatus}_t, \texttt{InfPrior}_t, \texttt{AgeGr}, \texttt{Sex}) \\ = \lambda_0(t) \exp \left\{ \underbrace{\mu\, \texttt{VaccStatus}_t}_{\texttt{intervence}} + \underbrace{\nu\, \texttt{InfPrior}_t}_{\texttt{"intervence"}} + \underbrace{\beta\, \texttt{AgeGr} + \gamma\, \texttt{Sex}}_{\texttt{kontrola}} \right\}$$

λ je míra rizika nakažení (v článku i hospitalizace atd.)
 VaccStatus časová vzdálenost k vakcinaci, kategorie po 60 dnech
 InfPrior časová vzdálenost k infekci, kategorie po 60 dnech
 AgeGr pětileté věkové kategorie
 Sex pohlaví (žena / muž)

Efektivita vakcín/ochrana předchozí infekcí

(Šmíd et al., 2022, inspirováno Tartof et al., 2021)

 $\lambda(t|VaccStatus_t, InfPrior_t, AgeGr, Sex)$

$$= \lambda_0(t) \exp \left\{ \underbrace{\mu \operatorname{VaccStatus}_t}_{\text{intervence}} + \underbrace{\nu \operatorname{InfPrior}_t}_{\text{"intervence"}} + \underbrace{\beta \operatorname{AgeGr} + \gamma \operatorname{Sex}}_{\text{kontrola}} \right\}$$

Příklad: Pro ženu (49), infikovaná půl roku před začátkem studie a vakcinovaná tři týdny před začátkem:

InfPrior₀ =
$$(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)$$
,

kde pozice jednotky odpovídá kategorii InfPrior_181-240,

$$VaccStatus_0 = (1, 0, \dots, 0),$$

kde pozice jednotky odpovídá kategorii VaccStatus_001-060,

AgeGr =
$$(0, ..., 1, ..., 0)$$
,

kde jednotka odpovídá kategorii AgeGr45-49 a Sex = (0,1),



Připomínáme model:

```
\begin{split} &\lambda(t|\texttt{VaccStatus}_t, \texttt{InfPrior}_t, \texttt{AgeGr}, \texttt{Sex}) \\ &= \lambda_0(t) \exp\left\{\mu\, \texttt{VaccStatus}_t + \nu\, \texttt{InfPrior}_t + \beta\, \texttt{AgeGr} + \gamma\, \texttt{Sex}\right\} \end{split}
```

Připomínáme model:

```
\begin{split} &\lambda(t|\texttt{VaccStatus}_t, \texttt{InfPrior}_t, \texttt{AgeGr}, \texttt{Sex}) \\ &= \lambda_0(t) \exp\left\{\mu\, \texttt{VaccStatus}_t + \nu\, \texttt{InfPrior}_t + \beta\, \texttt{AgeGr} + \gamma\, \texttt{Sex}\right\} \end{split}
```

Otázka. Kolikrát menší je pravděpodobnost nákazy za přítomnosti stavu V vakcinační imunity?

Připomínáme model:

$$\begin{split} &\lambda(t|\texttt{VaccStatus}_t, \texttt{InfPrior}_t, \texttt{AgeGr}, \texttt{Sex}) \\ &= \lambda_0(t) \exp\left\{\mu\, \texttt{VaccStatus}_t + \nu\, \texttt{InfPrior}_t + \beta\, \texttt{AgeGr} + \gamma\, \texttt{Sex}\right\} \end{split}$$

Otázka. Kolikrát menší je pravděpodobnost nákazy za přítomnosti stavu V vakcinační imunity?

Odpověď:

$$\mathit{HR}_V = \frac{\lambda(t|V, \mathtt{InfPrior}, \mathtt{AgeGr}, \mathtt{Sex})}{\lambda(t|_\mathtt{novacc}, \mathtt{InfPrior}, \mathtt{AgeGr}, \mathtt{Sex})} = \frac{\exp\{\mu_V\}}{\exp\{0\}} = \exp\{\mu_V\},$$

Připomínáme model:

```
\begin{split} &\lambda(t|\texttt{VaccStatus}_t, \texttt{InfPrior}_t, \texttt{AgeGr}, \texttt{Sex}) \\ &= \lambda_0(t) \exp\left\{\mu\, \texttt{VaccStatus}_t + \nu\, \texttt{InfPrior}_t + \beta\, \texttt{AgeGr} + \gamma\, \texttt{Sex}\right\} \end{split}
```

Podobná otázka. Kolikrát menší je pravděpodobnost nákazy za přítomnosti stavu P postinfekční imunity?

Připomínáme model:

$$\begin{split} &\lambda(t|\texttt{VaccStatus}_t, \texttt{InfPrior}_t, \texttt{AgeGr}, \texttt{Sex}) \\ &= \lambda_0(t) \exp\left\{\mu\, \texttt{VaccStatus}_t + \nu\, \texttt{InfPrior}_t + \beta\, \texttt{AgeGr} + \gamma\, \texttt{Sex}\right\} \end{split}$$

Podobná otázka. Kolikrát menší je pravděpodobnost nákazy za přítomnosti stavu P postinfekční imunity?

Odpověď:

$$\mathit{HR}_P = rac{\lambda(t|P, exttt{VaccStatus}, exttt{AgeGr}, exttt{Sex})}{\lambda(t|_ exttt{noinf}, exttt{VaccStatus}, exttt{AgeGr}, exttt{Sex})} = \exp\{
u_P\},$$

(protože stejně jako v kategoriální regresi normujeme: $\mu_{\text{neočkován}}=$ 0, $\nu_{\text{neinfikována}}=$ 0 . . .)

Připomínáme model:

$$\begin{split} &\lambda(t|\texttt{VaccStatus}_t, \texttt{InfPrior}_t, \texttt{AgeGr}, \texttt{Sex}) \\ &= \lambda_0(t) \exp\left\{\mu\, \texttt{VaccStatus}_t + \nu\, \texttt{InfPrior}_t + \beta\, \texttt{AgeGr} + \gamma\, \texttt{Sex}\right\} \end{split}$$

Podobná otázka. Kolikrát menší je pravděpodobnost nákazy za přítomnosti stavu P postinfekční imunity?

Odpověď:

$$HR_P = rac{\lambda(t|P, exttt{VaccStatus}, exttt{AgeGr}, exttt{Sex})}{\lambda(t| exttt{noinf}, exttt{VaccStatus}, exttt{AgeGr}, exttt{Sex})} = \exp\{
u_P\},$$

(protože stejně jako v kategoriální regresi normujeme: $\mu_{\text{neočkován}}=0$, $\nu_{\text{neinfikována}}=0 \ \Rightarrow \exp\{\mu_{\text{neočkován}}\}=1, \exp\{\nu_{\text{neinfikována}}\}=1)$

Připomínáme model:

$$\begin{split} &\lambda(t|\texttt{VaccStatus}_t, \texttt{InfPrior}_t, \texttt{AgeGr}, \texttt{Sex}) \\ &= \lambda_0(t) \exp\left\{\mu\, \texttt{VaccStatus}_t + \nu\, \texttt{InfPrior}_t + \beta\, \texttt{AgeGr} + \gamma\, \texttt{Sex}\right\} \end{split}$$

Podobná otázka. Kolikrát menší je pravděpodobnost nákazy za přítomnosti stavu P postinfekční imunity?

Odpověď:

$$\mathit{HR}_P = rac{\lambda(t|P, exttt{VaccStatus}, exttt{AgeGr}, exttt{Sex})}{\lambda(t|_ exttt{noinf}, exttt{VaccStatus}, exttt{AgeGr}, exttt{Sex})} = \exp\{
u_P\},$$

(protože stejně jako v kategoriální regresi normujeme: $\mu_{\text{neočkován}}=0$, $\nu_{\text{neinfikována}}=0 \ \Rightarrow \exp\{\mu_{\text{neočkován}}\}=1, \exp\{\nu_{\text{neinfikována}}\}=1)$

Následně:

Efektivita/Ochrana stavem $S = 1 - HR_S$

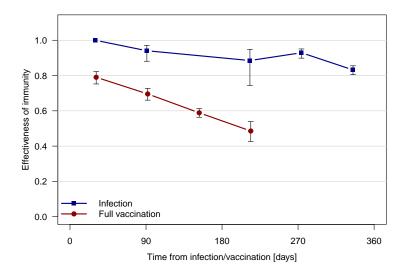
Výpočet křivek vyvanutí – Delta, 60denní intervaly

```
# nacitanie dat
> data <- read_labelled_csv("FebDelta60.csv")
> head(data)
 ID T1 T2 Infected DeadByCovid DeadByOther
                                               InfPrior VaccStatus Age Sex
1 10 15 65
                                        0 inf_NA_061-121 _unvaccinated 17
2 20 15 65
                                        0 inf_NA_061-121 _unvaccinated
                                        0 uninfected unvaccinated 53
3 40 0 53
4 50 0 20
                                        0 inf NA 305+ full 123-183 47
5 50 20 65
                                        0 inf_NA_305+ boost_001-061 47
6 60 0 34
                                        0 inf_NA_305+ _unvaccinated 14
# coxov model - pouzitie funkcie coxph() z knihovny survival
> library(survival)
> m1 cox <- coxph(Surv(T1, T2, Infected) ~ InfPrior + VaccStatus + AgeGr + Sex.
                 data = data)
> summarv(m1 cox)
Call:
coxph(formula = Surv(T1, T2, Infected) ~ InfPrior + VaccStatus +
   AgeGr + Sex, data = data)
 n= 1902962, number of events= 7738
                             coef exp(coef) se(coef) z Pr(>|z|)
InfPriorinf_NA_061-121 -2.82340 0.05940 0.35403 -7.975 1.52e-15 ***
InfPriorinf_NA_183-243
                        -2.16373 0.11490 0.40852 -5.297 1.18e-07 ***
Concordance = 0.729 (se = 0.002)
Likelihood ratio test= 5485 on 28 df.
                                       p = < 2e - 16
Wald test
                    = 3731 on 28 df.
                                       p = < 2e - 16
Score (logrank) test = 4807 on 28 df,
                                       p=<2e-16
```

Výpočet křivek vyvanutí

Characteristic	N	Event N	VE (95% CI) ⁷	p-value
Prior infection				
_uninfected	1,468,852	7515	_	
inf_NA_061-121	76,847	8	0.94 (0.97 to 0.88)	<0.001
inf_NA_183-243	11,290	6	0.89 (0.95 to 0.74)	<0.001
inf_NA_244-304	81,013	30	0.93 (0.95 to 0.9)	<0.001
inf_NA_305+	264,960	179	0.83 (0.86 to 0.81)	<0.001
Vaccination status	i			
_unvaccinated	426,013	4807	_	
boost_001-061	385,788	218	0.9 (0.91 to 0.89)	<0.001
boost_062-122	118,356	16	0.89 (0.93 to 0.82)	<0.001
full_001-061	86,926	144	0.79 (0.82 to 0.75)	<0.001
full_062-122	166,698	364	0.7 (0.73 to 0.66)	<0.001
full_123-183	440,945	1717	0.59 (0.61 to 0.56)	<0.001
full_184+	221,740	381	0.49 (0.54 to 0.43)	<0.001
partial_001-061	51,192	71	0.77 (0.81 to 0.7)	<0.001
partial_062+	5,304	20	0.48 (0.66 to 0.19)	0.004

Výpočet křivek vyvanutí - Delta, 60denní intervaly



Samostatná práce

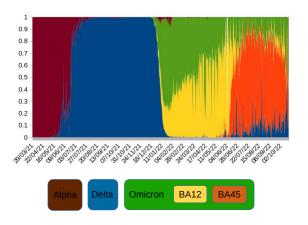
Skupina 1: Delta, 30denní intervaly, vstup FebDelta30.CSV

Skupina 2: Omikron, 30denní intervaly, vstup FebOmikron30.CSV

Skupina 3: Omikron, 60denní intervaly, vstup FebOmikron60.CSV

Téma 2: Srovnání závažnosti variant COVID

Od začátku pandemie se "vystřídalo" několik variant viru:



Otázka: Která je jak nebezpečná?

Částečná odpověď: Šmíd et al., 2022.



Srovnání závažnosti pomocí logistické regrese

$$\mathrm{Odds}[\mathsf{ud\acute{a}lost}|V,X] := \frac{\mathbb{P}[\mathsf{ud\acute{a}lost}|V,X]}{1 - \mathbb{P}[\mathsf{ud\acute{a}lost}|V,X]} = \exp\left\{\alpha + \beta V + \gamma X\right\},$$

kde $V \in \{0,1\}$, X jsou (kontrolní) kovariáty a Odds označuje *šanci* (angl. odds).

Srovnání závažnosti pomocí logistické regrese

$$\mathrm{Odds}[\mathsf{ud\acute{a}lost}|V,X] := \frac{\mathbb{P}[\mathsf{ud\acute{a}lost}|V,X]}{1 - \mathbb{P}[\mathsf{ud\acute{a}lost}|V,X]} = \exp\left\{\alpha + \beta V + \gamma X\right\},$$

kde $V \in \{0,1\}$, X jsou (kontrolní) kovariáty a Odds označuje šanci (angl. odds).

$$\begin{split} & \mathsf{Relativn\'i} \ \mathsf{z\'ava\'{z}nost}_V = \frac{\mathbb{P}[\mathsf{ud\'alost}|1,X]}{\mathbb{P}[\mathsf{ud\'alost}|0,X]} \\ & \doteq \mathit{OR}(X) := \frac{\mathsf{Odds}[\mathsf{ud\'alost}|1,X]}{\mathsf{Odds}[\mathsf{ud\'alost}|0,X]} = \frac{\exp\left\{\alpha + \beta + \gamma X\right\}}{\exp\left\{\alpha + \gamma X\right\}} = \exp\{\beta\}. \end{split}$$

Srovnání závažnosti pomocí logistické regrese

$$\mathrm{Odds}[\mathsf{ud\acute{a}lost}|V,X] := \frac{\mathbb{P}[\mathsf{ud\acute{a}lost}|V,X]}{1 - \mathbb{P}[\mathsf{ud\acute{a}lost}|V,X]} = \exp\left\{\alpha + \beta V + \gamma X\right\},$$

kde $V \in \{0,1\}$, X jsou (kontrolní) kovariáty a Odds označuje šanci (angl. odds).

$$\begin{split} & \mathsf{Relativn\'i} \ \mathsf{z\'ava\'{z}nost}_V = \frac{\mathbb{P}[\mathsf{ud\'alost}|1,X]}{\mathbb{P}[\mathsf{ud\'alost}|0,X]} \\ & \doteq \mathit{OR}(X) := \frac{\mathsf{Odds}[\mathsf{ud\'alost}|1,X]}{\mathsf{Odds}[\mathsf{ud\'alost}|0,X]} = \frac{\exp\left\{\alpha + \beta + \gamma X\right\}}{\exp\left\{\alpha + \gamma X\right\}} = \exp\{\beta\}. \end{split}$$

(\doteq lze použít jen pro malá \mathbb{P} , OR označuje *poměr šancí (angl. odds ratio)*).

Srovnání závažnosti variant COVID

(Šmíd et al., 2022)

Model:

$$\begin{split} & \text{Odds}[\texttt{těžk\'y průběh}|\texttt{Variant},\texttt{VaccStatus},\texttt{InfPrior},\texttt{AgeGr},\texttt{Sex}] \\ &= \exp\{\alpha + \beta\,\texttt{Variant} + \gamma\,\texttt{VaccStatus} + \delta\,\texttt{InfPrior} \\ &\quad + \sigma\,\texttt{AgeGr} + \omega \texttt{Sex}\}, \end{split}$$

Srovnání:

Relativní závažnost_{Variant} = $\exp\{\beta\}$.

Srovnání závažnosti variant Omicron a Delta v R

```
# nacitanie dat
> data <- read_labelled_csv("Feb_delta_omicron.csv")
> head(data)
      Infected Covidproxy VariantComp InfPrior
                                                     VaccStatus Age
                                                                     Sex
  22
                               omicron uninfected boost 062-122
  4.3
                               omicron _uninfected _unvaccinated 53
  69
                               omicron inf NA 305+ boost 001-061 30
                      0
4 83
                      0
                               omicron uninfected unvaccinated 59
5 103
                      0
                               omicron _uninfected full_062-122 69
6 136
                               omicron _uninfected _unvaccinated 50
# logistick regresny model - pouzitie funkcie qlm() z knihovny stats
> m1_logreg <- glm(Covidproxy ~ VariantComp + InfPrior + VaccStatus + AgeGr +
     Sex, family = binomial(link = "logit"), data = data)
> summary(m1_logreg)
Call:
glm(formula = Covidproxy ~ VariantComp + InfPrior + VaccStatus +
    AgeGr + Sex, family = binomial(link = "logit"), data = data)
Deviance Residuals:
    Min
             10 Median
                               30
                                       Max
-1.5205 -0.0777 -0.0442 -0.0263
                                    4.3205
Coefficients:
                         Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)
                         -4.99622
                                     0.10473 - 47.704 < 2e - 16 ***
                         -1.22896 0.03360 -36.572 < 2e-16 ***
VariantCompomicron
InfPriorinf_NA_061-121
                         -0.53354
                                     0.21498 -2.482 0.013072 *
                                     0.03116 16.357 < 2e-16 ***
SexM
                          0.50966
Signif. codes:
                           0.001
                                                                   0.1
                                          0.01
                                                       0.05
```

Srovnání závažnosti variant Omicron a Delta - výsledek

Omikron je približne o 71 % (OR = 0,29) menej závažný vzhľadom na ťažký priebeh infekcie v porovnaní s deltou.

Variable		N	Odds ratio		р
Variant	delta	77166		Reference	
	omicron	423381	•	0.29 (0.27, 0.31)	<0.001

Samostatná práce

Skupina 1: Alpha vs. delta, vstup Feb_alpha_delta.CSV

Skupina 2: BA12 vs. BA45, vstup Feb_ba12_ba45.CSV

Skupina 3: Delta vs. BA45, vstup Feb_delta_ba45.CSV

Diskuse, kontroverze

- ► Volba statistické metody
- Podhlášenost
- Rozdělení subjektů v intervalech

Bibliografie

- Kleinbaum, David G a Mitchel Klein (1996). Survival analysis a self-learning text. Springer.
 - Ozga, Ann-Kathrin, Meinhard Kieser a Geraldine Rauch (2018). "A systematic comparison of recurrent event models for application to composite endpoints". In: *BMC medical research methodology* 18.1, s. 1–12.
- Šmíd, Martin et al. (2022). "Protection by vaccines and previous infection against the omicron variant of severe acute respiratory syndrome coronavirus 2". In: *The Journal of infectious diseases* 226.8, s. 1385–1390.
- Tartof, Sara Y et al. (2021). "Effectiveness of mRNA BNT162b2 COVID-19 vaccine up to 6 months in a large integrated health system in the USA: a retrospective cohort study". In: *The Lancet* 398.10309, s. 1407–1416.
- Therneau, Terry, Cindy Crowson a Elizabeth Atkinson (2017). "Using time dependent covariates and time dependent coefficients in the cox model". In: Survival Vignettes 2.3, s. 1–25.