PROVA (PARTE 1)

Universidade Federal de Goiás (UFG) - Regional Jataí
Bacharelado em Ciência da Computação
Teoria de Grafos
Esdras Lins Bispo Jr.

29 de agosto de 2017

ORIENTAÇÕES PARA A RESOLUÇÃO

- A avaliação é individual, sem consulta;
- A pontuação máxima desta avaliação é 10,0 (dez) pontos, sendo uma das 06 (seis) componentes que formarão a média final da disciplina: quatro testes, uma prova e os exercícios de aquecimento;
- A média final (MF) será calculada assim como se segue

$$
\begin{aligned}
MF &= MIN(10, S) \\
S &= (\sum_{i=1}^{4} 0,2.T_i) + 0,2.P + 0,1.EA
\end{aligned}
$$

  em que

  - S é o somatório da pontuação de todas as avaliações,
  - T_i é a pontuação obtida no teste i,
  - P é a pontuação obtida na prova, e
  - EA é a pontuação total dos exercícios de aquecimento.

- O conteúdo exigido compreende os seguintes pontos apresentados no Plano de Ensino da disciplina: (1) Noções Básicas de Grafos, (2) Caminhos e Circuitos, e (3) Subgrafos.

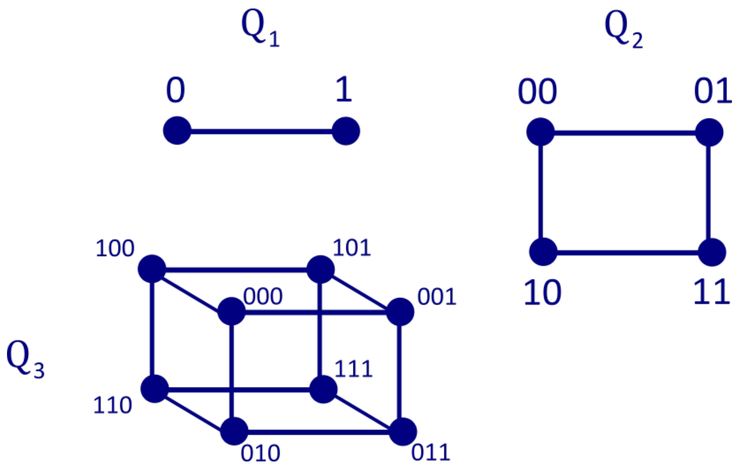
Nome:
Assinatura:

Primeiro Teste

1. (5,0 pt) **[E 1.14]** Para qualquer inteiro positivo k, um cubo de dimensão k (ou k-cubo) é o grafo definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são todas as sequências $b_1 b_2 \ldots b_k$ de bits; dois vértices são adjacentes se e somente se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, os vértices do cubo de dimensão 3 são 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111; o vértice 000 é adjacente aos vértices 001, 010, 100 e a nenhum outro; e assim por diante. O cubo de dimensão k será denotado por Q_k.

   (a) (2,0 pt) Faça figuras dos cubos Q_1, Q_2 e Q_3.

   Resposta:



   (b) (1,5 pt) Quantos vértices tem Q_k? Justifique.

   Resposta: Os vértices de um Q_k são todas as sequências distintas de k bits. Logo, aplicando o princípio multiplicativo, Q_k tem 2^k vértices.

   (c) (1,5 pt) Quantas arestas tem Q_k? Justifique.

   Resposta: Todo grafo r-regular de n vértices tem $rn/2$ arestas. Cada vértice v de um Q_k tem grau k. Isto é verdade, pois cada um de seus vizinhos tem apenas um bit distinto de v. Logo, o Q_k é k-regular e tem $2^k \times (k/2)$ arestas.

2. (5,0 pt) **[E 1.33]** Se G é um K_n, quanto valem $\delta(G)$ e $\Delta(G)$? Quanto valem os parâmetros δ e Δ de um $K_{p,q}$? Justifique sua resposta.

   Resposta: Qualquer vértice de um K_n tem $n-1$ vizinhos, i.e., o número máximo de vizinhos possível. Logo, se G é um K_n, $\delta(G) = \Delta(G) = n-1$.

   Em um $K_{p.q}$, cada vértice branco tem q vizinhos e cada vértice preto tem p vizinhos. Logo, $\delta(K_{p,q}) = min(p,q)$ e $\Delta(K_{p,q}) = max(p,q)$.

Segundo Teste

3. (5,0 pt) **[E 1.29]** É verdade que o grafo do cavalo no tabuleiro t-por-t é bipartido? Justifique sua resposta.

   Resposta: É verdade para $t > 1$. Para $t = 1$, é impossível estabelecer uma bipartição nos vértices do grafo, pois é necessário que cada partição seja não-vazia.

   Entretanto, é possível estabelecer a bipartição para $t > 1$. Basta representarmos os vértices pretos e brancos pelas casas pretas e brancas do tabuleiro, respectivamente. Desta forma, garantimos que qualquer aresta do grafo tem uma ponta branca e uma ponta preta. Isto é verdade, pois o cavalo estando em uma casa preta, só consegue mover-se para uma casa branca (e vice-versa).

4. (5,0 pt) **[E 1.88]** Seja G um grafo, V' um subconjunto de V_G, e E' um subconjunto de E_G. É verdade que (V', E') é um subgrafo de G? Justifique sua resposta.

   Resposta: Isto não é sempre verdade. Como contra-exemplo, pode-se mostrar o grafo $G = (V, E)$ em que $V = \{a, b, c\}$ e $E = \{ab\}$. Faça $V' = \{c\}$ e $E' = \{ab\}$. Garante-se que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$, mas (V', E') não é um grafo e, por consequência, não é um subgrafo de G.