100052205

数字信号处理

Digital Signal Processing

李慧琦 教授

信息与电子学院

北京理工大学

Tel: +86 (10) 68918239

Email: huiqili@bit.edu.cn

第四章 快速傅里叶变换（FFT）

本章主要内容

- 快速计算DFT的基本思路
- 基2按时间抽取FFT算法
- 基2按频率抽取FFT算法
- N为复合数的FFT方法
- 分裂基FFT算法
- Chirp-Z 变换
- FFT的应用：实序列FFT算法、卷积、相关计算

§4-8 线性调频 Z 变换 (Chirp-Z Transform)

一、问题的提出

$$\forall\ x(n), \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\boldsymbol{X(k) = DFT[x(n)]} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X(z_k)\Big|_{z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

i) $DFT \rightarrow X(z_k)\Big|_{z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$

（$X(z)$在 $|z|=1$ 上等间隔取样值）

ii) N 为复合数。N=ML，2^{ν} → FFT算法 （基-2，统一，分裂基）

问题：

1) 其他围线上的z变换(不在单位圆上）

$$\exists\ X(z_k)\big|_{|z_k|\neq 1}\ ,\qquad k=0,1,\ldots,M-1\ ?$$

2) 不需要计算整个单位圆上z变换的采样

$$\exists\, X(k)\ ,\qquad k=0,1,\ldots,M-1, M<N\ ?$$

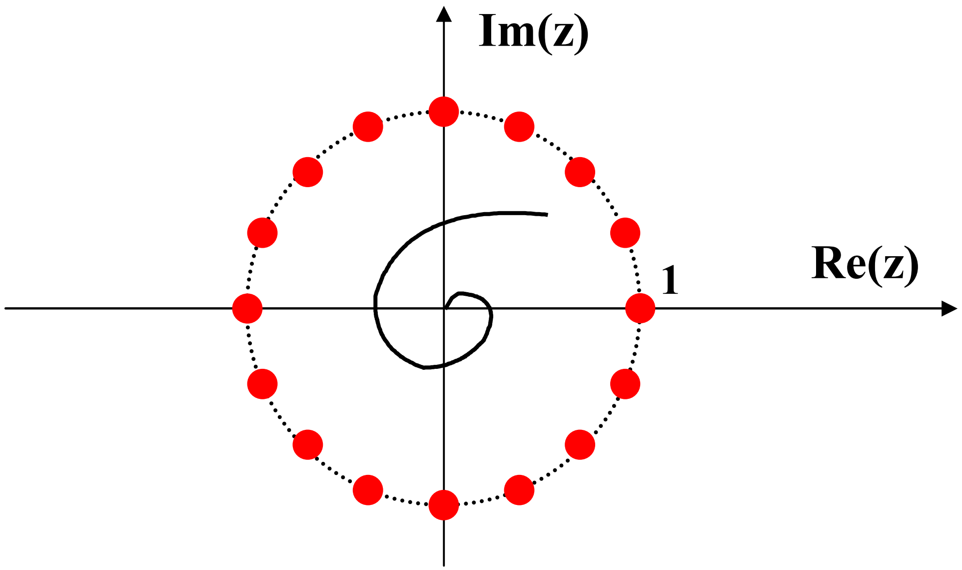
Chirp-Z 变换

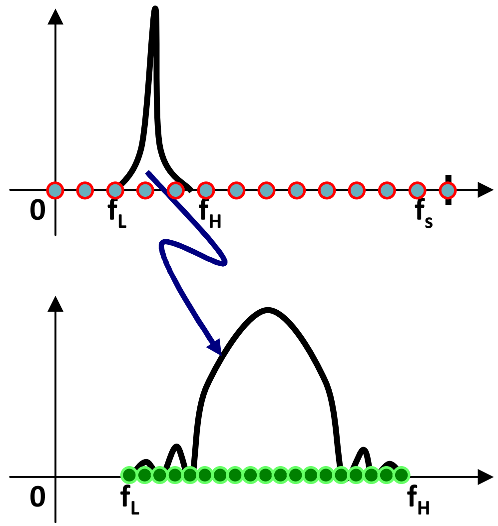
3) N是质数

$$N\neq ML\text{（质数）},\ \exists\, X(k)\ ,\qquad k=0,1,\ldots,M-1\ ?$$

线性调频z变换: Chirp z-transform (CZT)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n} \underset{\text{interpolation}}{\overset{z_k=e^{j\frac{2\pi}{N}k},k=0,1,\ldots,N-1}{\rightleftharpoons}} X(k)$$





频谱细化分析？

观察尖锐谐振峰？

Rabiner L R, Schafer R W, Rader C. M. The Chirp Z Transform. *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, 1969, 17(2): 86-92

二、算法原理

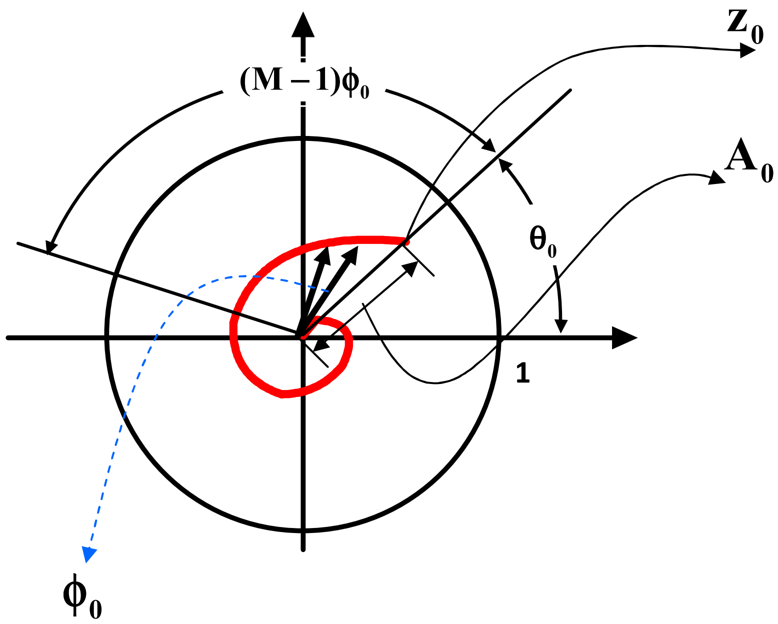
$$\forall x(n), \quad 0 \le n \le N-1 \leftrightarrow$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

令 $z_k = AW^{-k}, \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$

$$A = A_0 e^{j\theta_0}$$

$$W = W_0 e^{-j\phi_0}$$



$$z_k = A_0 e^{j\theta_0} \cdot W_0^{-k} \cdot e^{jk\phi_0} \quad k = 0,1,\ldots,M-1$$

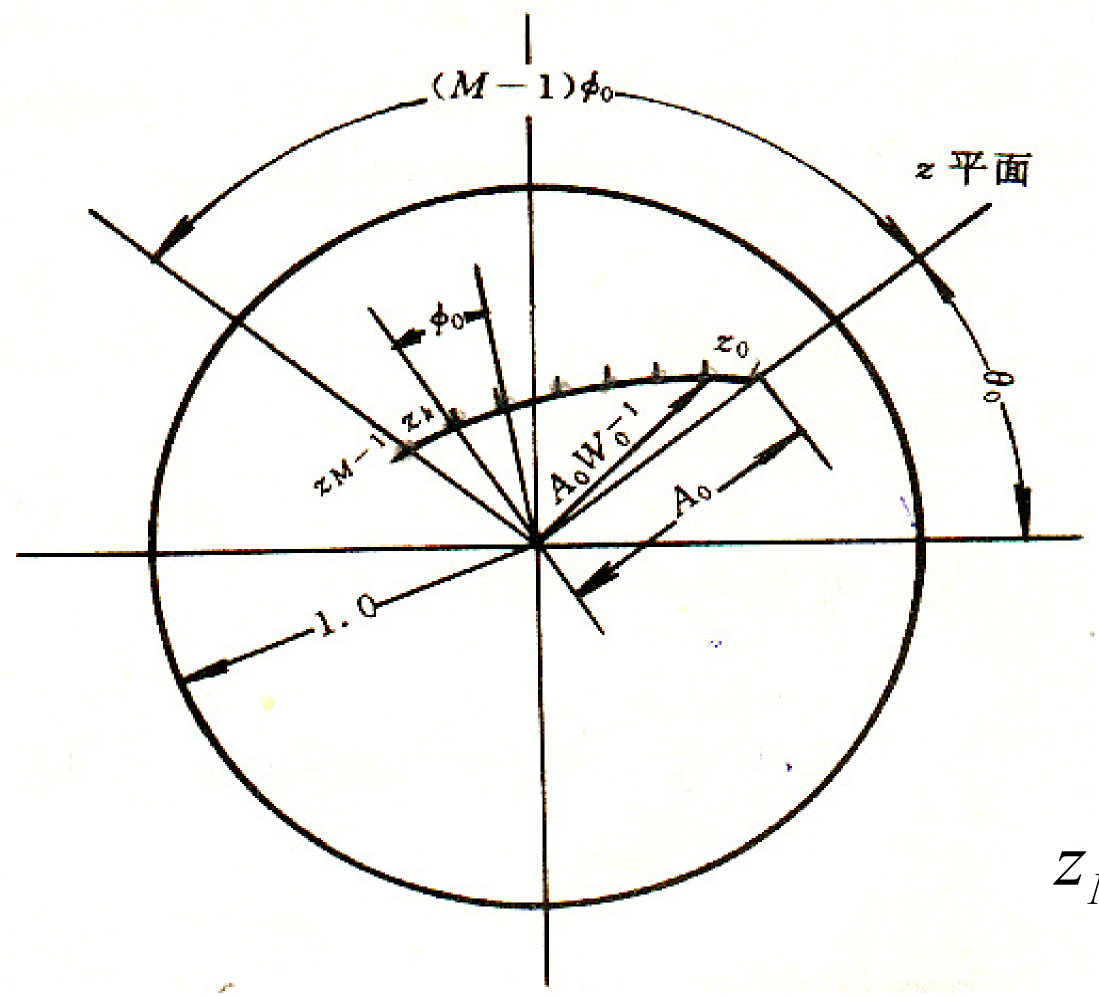


图4-26

$$z_0 = A_0 e^{j\theta_0} = A_0 \angle \theta_0$$

$$z_1 = A_0 W_0^{-1} e^{j(\theta_0 + \phi_0)}$$

$$z_k = A_0 W_0^{-k} e^{j(\theta_0 + k\phi_0)}$$

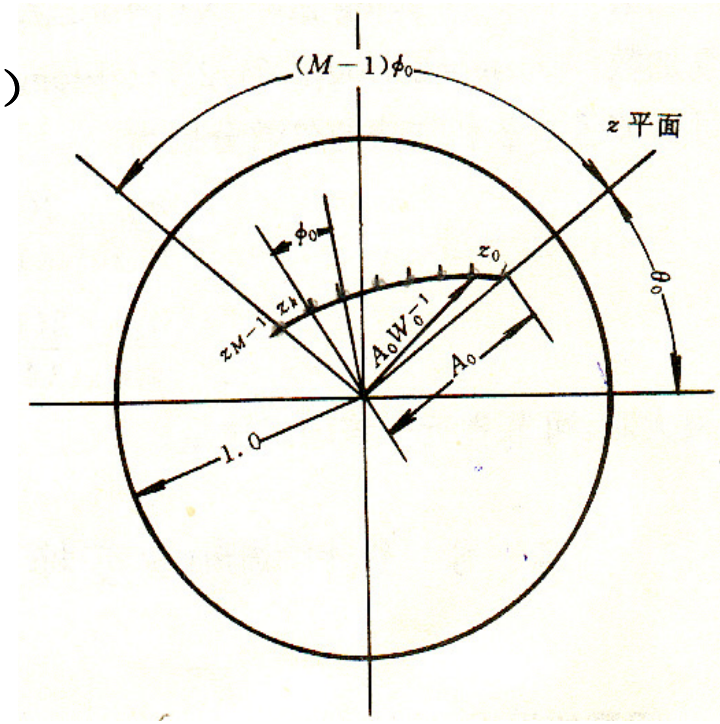
$$z_{M-1} = A_0 W_0^{-(M-1)} e^{j[\theta_0 + (M-1)\phi_0]}$$

参数几何意义

1. $A = A_0 e^{j\theta_0}$ -- 起始点

A_0： $|z_0|$，(通常$A \le 1$)，取样起始点的矢量长度

θ_0： $\arg\{z_0\}$，$(>0/<0)$，取样起始点的相角（角频率）



2. $W = W_0 e^{-j\phi_0}$ 控制旋进的方向和步进大小

ϕ_0： 取样点z_k, z_{k+1}间的角频率差

$\phi_0 > 0$，z_k的路径为逆时针旋转

$\phi_0 < 0$，z_k的路径为顺时针旋转

W_0： 取值决定z_k的路径是向内/外弯曲

$W_0 < 1$，z_k的路径是向外旋出

$W_0 > 1$，z_k的路径是向原点收缩

$W_0 = 1$，z_k的路径是半径为A_0的一段圆弧

$A_0 = 1$时，即单位圆上的一部分

r_0: A_0

R_0: W_0^{-1}

$$A = A_0 e^{j\theta_0}$$

$$W = W_0 e^{-j\phi_0}$$

$$z_k = A_0 W_0^{-k} e^{j(\theta_0 + k\phi_0)}$$

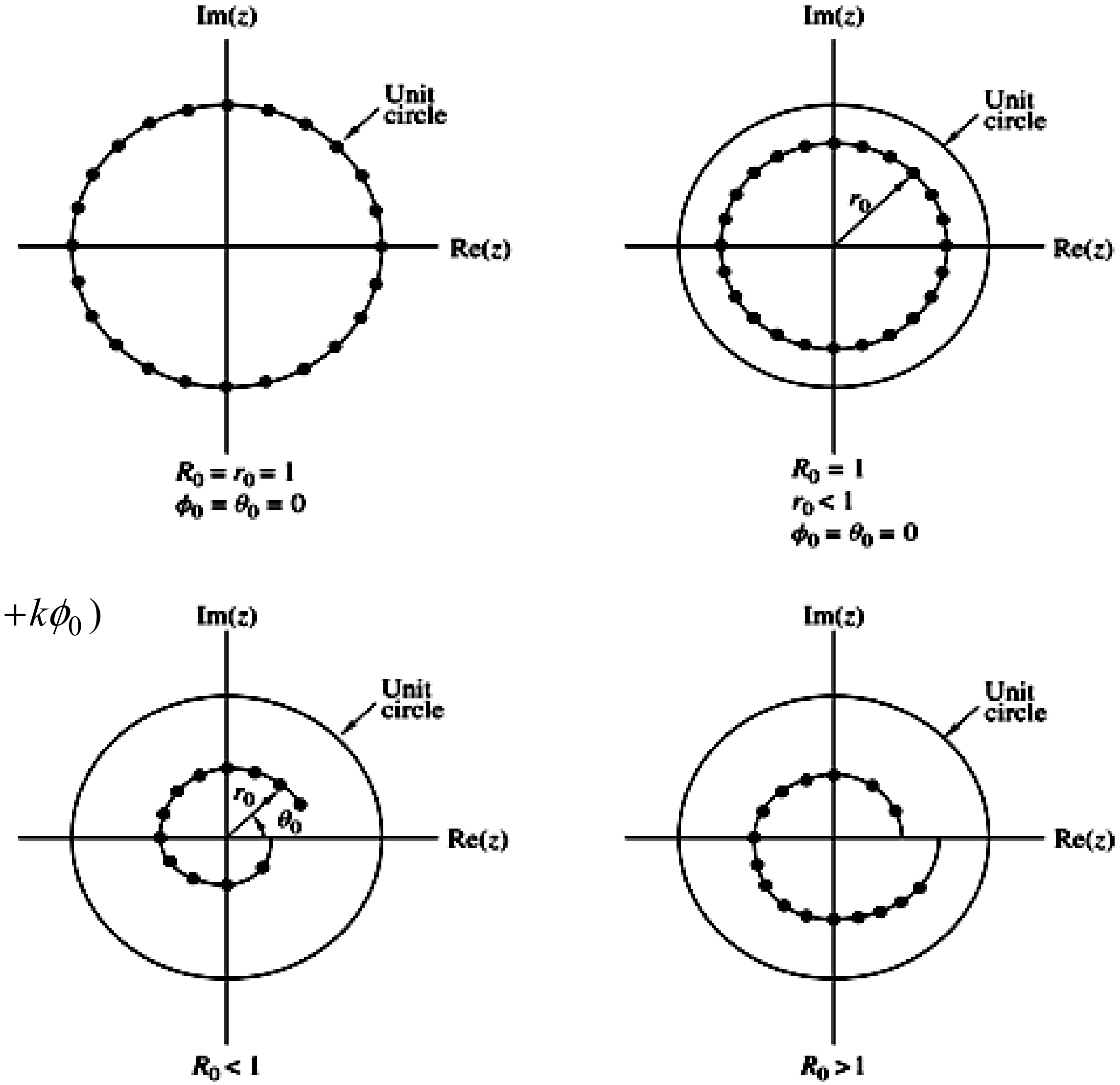


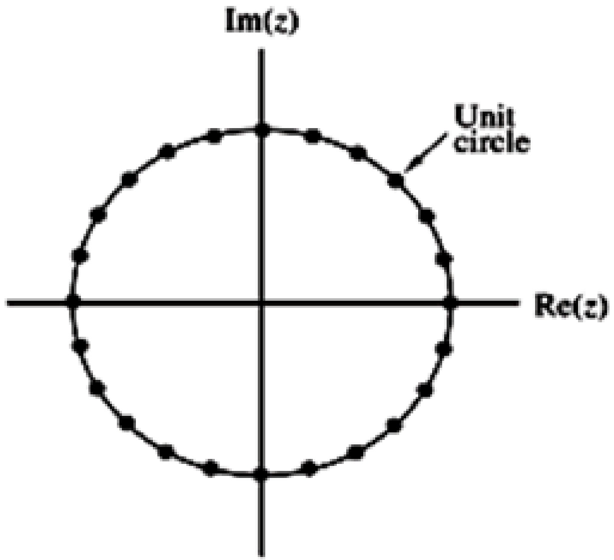
Figure 8.3.2 Some examples of contours on which we may evaluate the z-transform.

DFT也可视为CZT的一种特例

1) $A_0 = 1, \quad \theta_0 = 0$

2) $W_0 = 1, \quad \phi_0 = \dfrac{2\pi}{N}$

3) $M = \mathrm{N}$



$$X(z_k) = X(k) = DFT[x(n)] \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

一般情况：

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{nk} \qquad 0\le k\le M-1$$

利用公式：

$$nk=\frac{1}{2}[n^2+k^2-(k-n)^2]$$

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{nk} \quad =\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}W^{-\frac{1}{2}(k-n)^2}W^{\frac{k^2}{2}}$$

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}W^{-\frac{1}{2}(k-n)^2}W^{\frac{k^2}{2}}$$

$$=W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}[x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}]W^{-\frac{1}{2}(k-n)^2}$$

$$=W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}f(n)h(k-n) \qquad k=0,1,\ldots,M-1$$

式中：

$$\boldsymbol{f(n)=x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}} \qquad n=0,1,\ldots,N-1$$

$$h(n)=W^{-\frac{n^2}{2}}$$

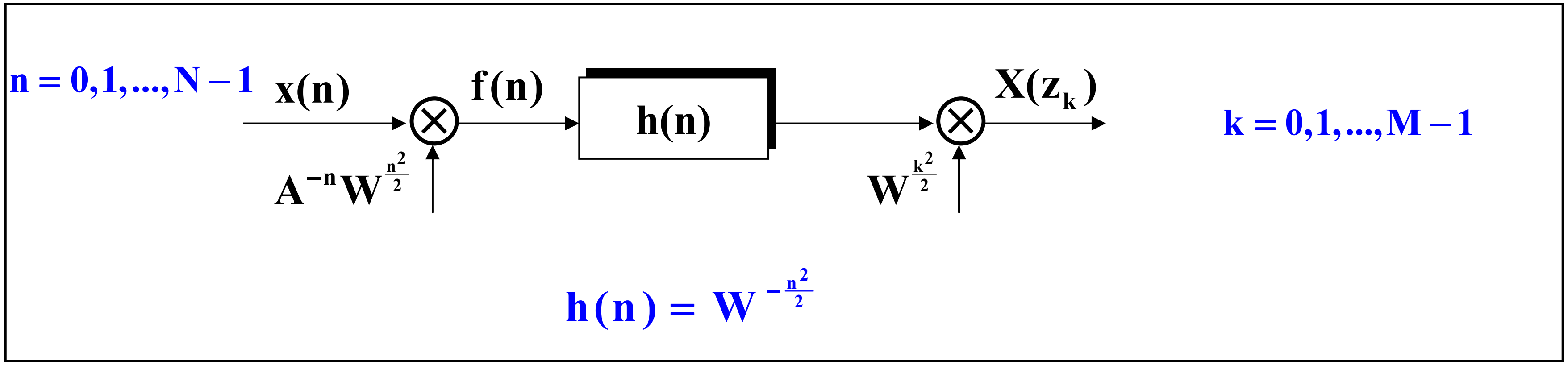
$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)A^{-n}W^{nk}$$

$$=W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)h(k-n)$$

$$k=0,1,\ldots,M-1$$

$$f(n)=x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}$$

$$h(n)=W^{-\frac{n^2}{2}}=\left(e^{j\Phi_0}\right)^{\frac{n^2}{2}}$$



CZT的运算流程图

W_0=1时

$$h(n)=W^{-\frac{n^2}{2}}=\left(e^{j\Phi_0}\right)^{\frac{n^2}{2}}$$

角位移$\dfrac{n^2\Phi_0}{2}$对时间序数n的微分值为$n\Phi_0$

频率随时间n成线性变化$\rightarrow$线性调频信号*Chirp Signal*$\rightarrow$线性调频z变换*CZT*

三、CZT运算/实现步骤：

$$X(z_k)=W^{\frac{k^2}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}f(n)h(k-n) \qquad 0\le k\le M-1$$

(1) 求 $f(n),h(n),\ n=0,1,\ldots,N-1$

(2)计算 $g(k)=f(n) * h(n)$， $k=0,1,\ldots,M-1$

(3)计算 $g(k)W^{\frac{k^2}{2}}$

(1) 求 $f(n)$, $h(n)$ $n=0,1,\ldots,N-1$

$$f(n)=x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}} \qquad\qquad h(n)=W^{-\frac{n^2}{2}}$$

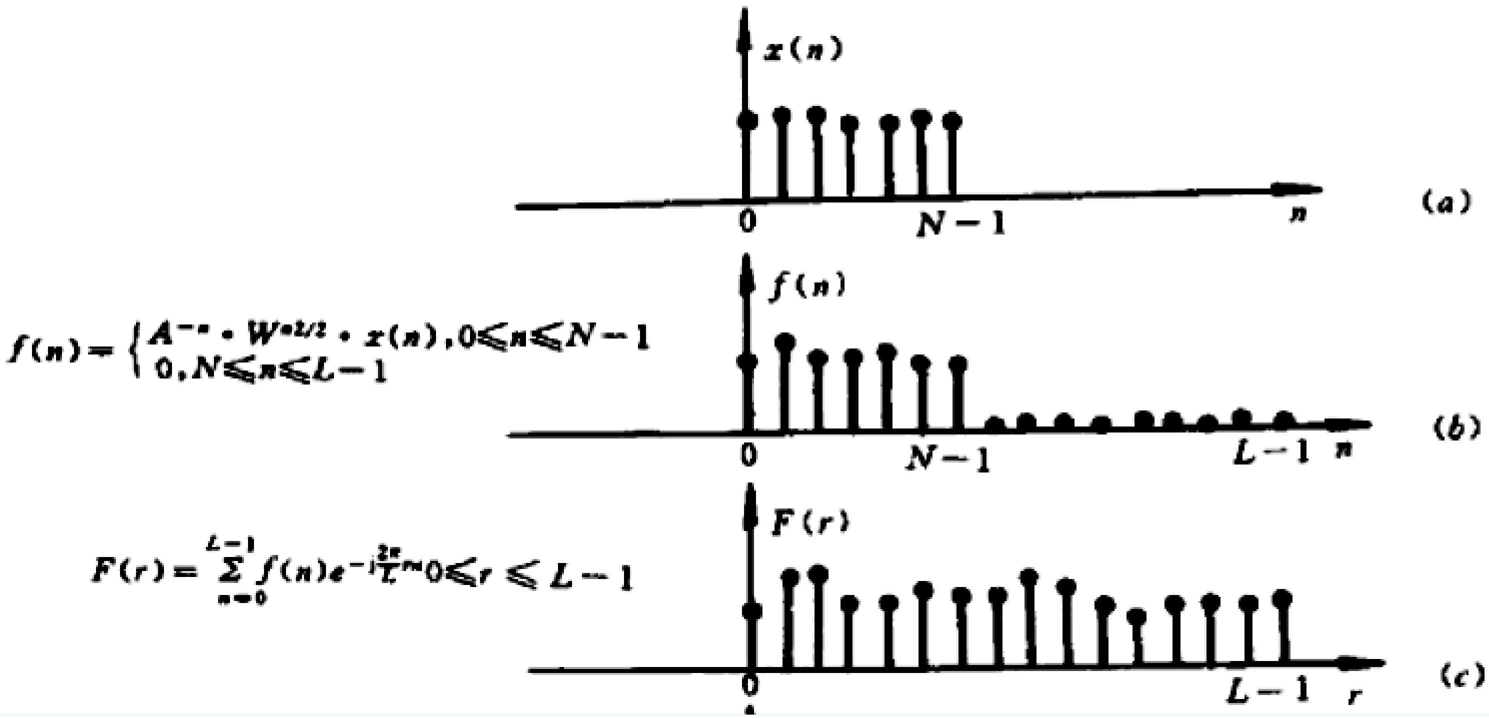
$$\begin{tikzcd}
A_0,\theta_0,W_0,\phi_0 \arrow[r] \arrow[d] & A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}, \quad n=0,1,\ldots,N-1 \arrow[d] & \\
W^{-\frac{n^2}{2}} \arrow[d] & \otimes \arrow[d] & x(n), \quad 0\le n\le N-1 \arrow[l] \\
h(n),\ \forall n & f(n),\ 0\le n\le N-1 &
\end{tikzcd}$$

(2)计算 $g(k)=f(n) * h(n)$， $k=0,1,\ldots,M-1$

思路： 利用圆周卷积计算线性卷积， 应用**FFT**算法， 计算**F(r)**， **H(r)**

$L > N + M - 1, \quad L = 2^{\nu}$

- $f(n)$补零至L点， 用FFT计算 F(r)



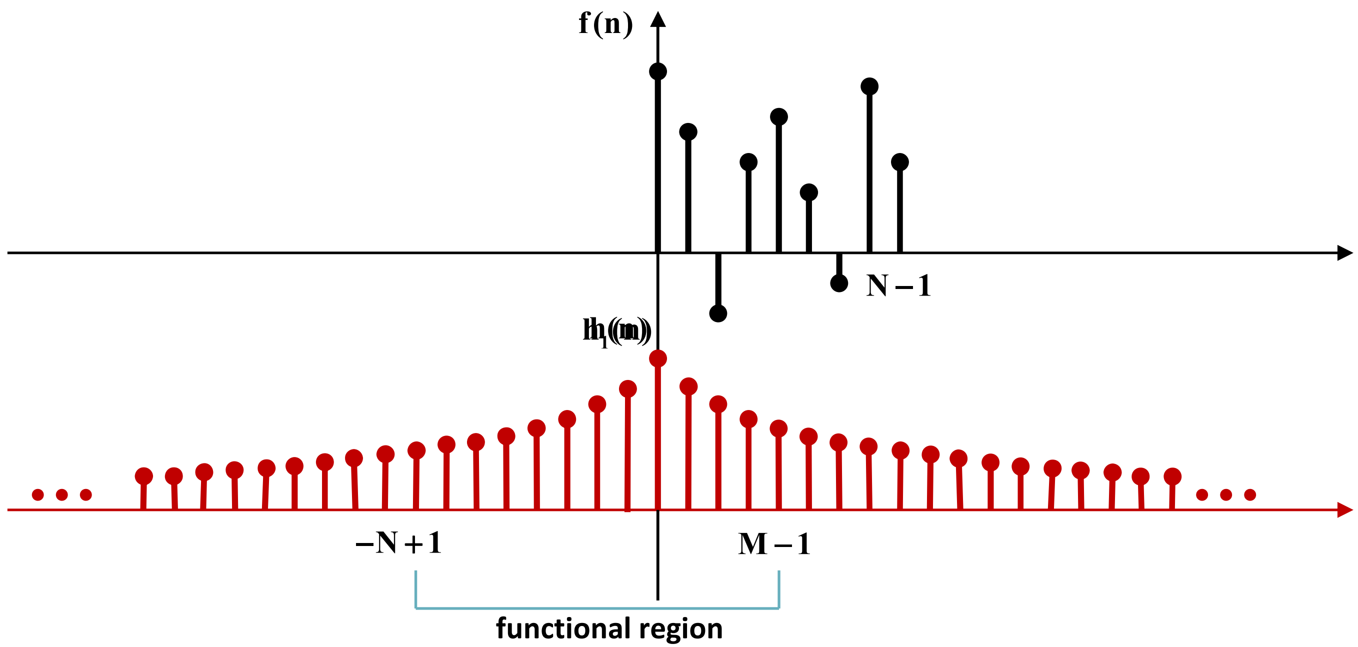
- $h(n)$补至L点，用FFT计算 H(r)

h(k-n)

$$0 \le k \le M-1, \quad 0 \le n \le N-1$$

$$-(N-1) \le -n \le 0 \Rightarrow -(N-1) \le k-n \le M-1$$

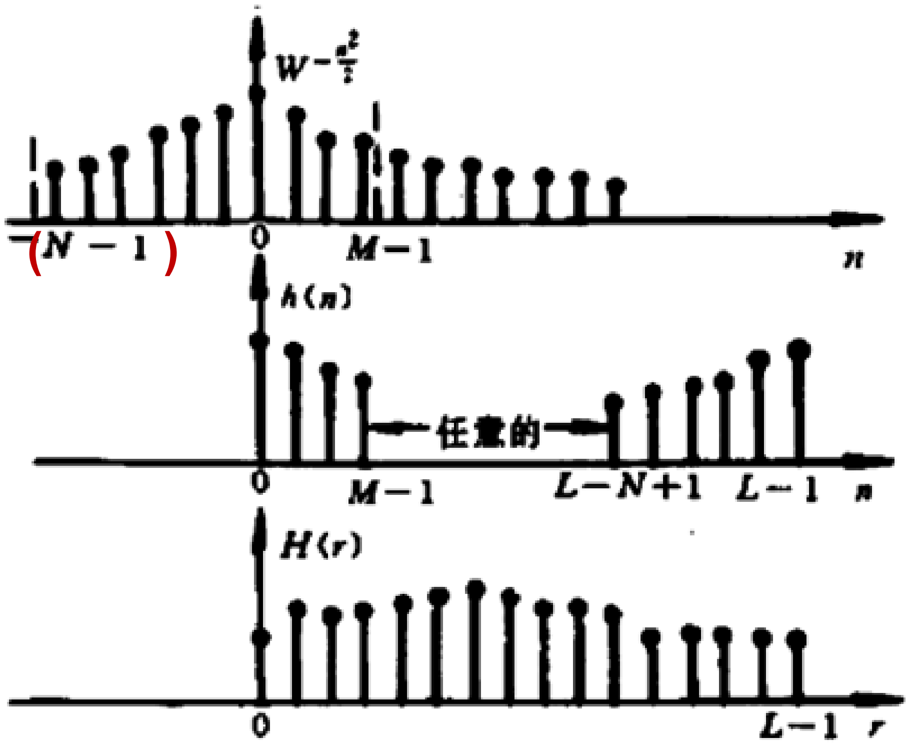
h(n): N+M-1,　　f(n)*h(n): 2N+M-2



h(n): N+M-1,   f(n)*h(n): 2N+M-2

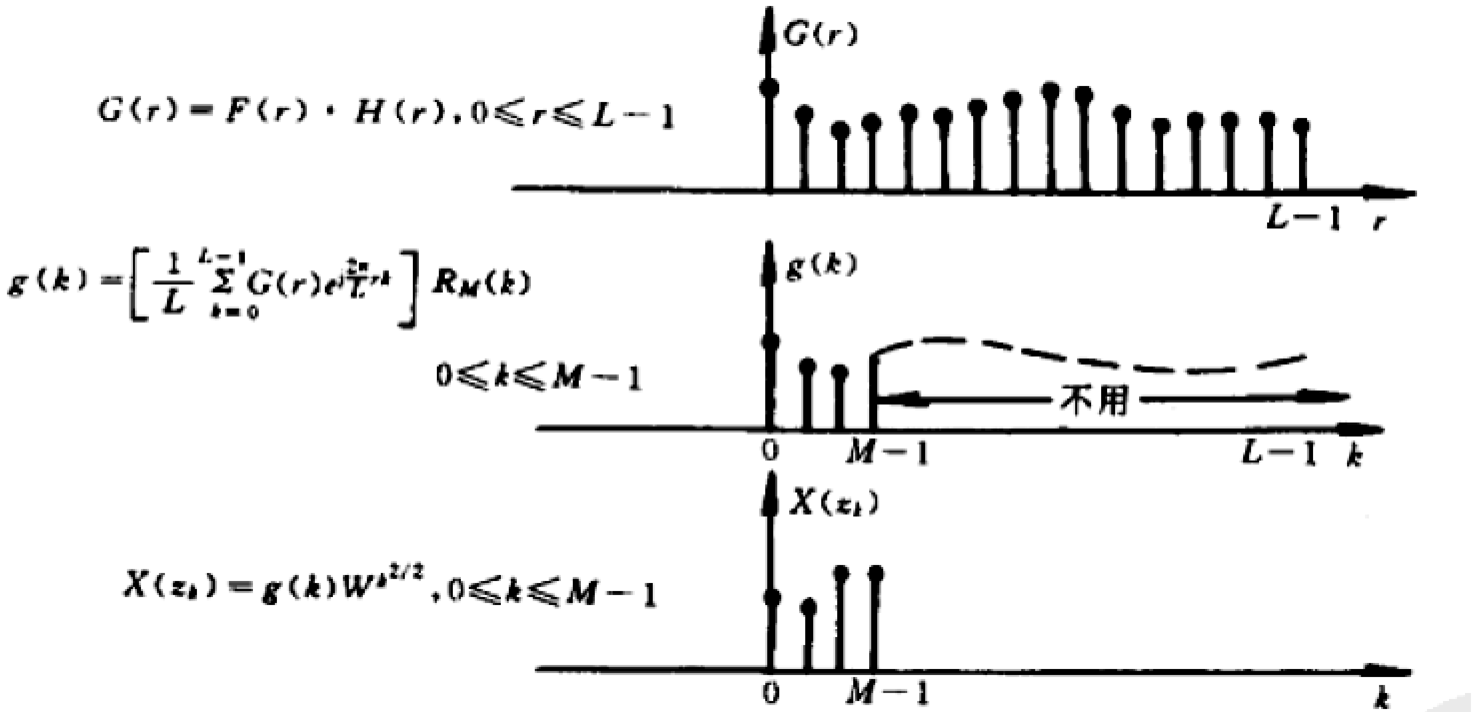
h(n) 可认为是以L为周期的周期序列的主值序列

$$
h(n) = \begin{cases} W^{-\frac{n^2}{2}} & 0 \le n \le M-1 \\ W^{-\frac{(L-n)^2}{2}} & L-N+1 \le n \le L-1 \\ \text{任意} & M \le n \le L-N \end{cases}
$$



- 计算 G(r) = F(r)H(r)
- g(k)=IDFT(G(k)) , $k=0,1,\ldots,M-1$

(3)计算 $g(k)W^{\frac{k^2}{2}}$



四、运算量估算

(1) 求 $f(n)$　　$f(n)=x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}$　　复数*—N

(2) 求L点FFT　F(r)　　复数*—$\frac{L}{2}\log_2 L$

(3) 求L点FFT　H(r)　　复数*—$\frac{L}{2}\log_2 L$

(4)计算 G(r) = F(r)H(r)　　复数*—L

(5)计算 g(r) = IFFT(G(r))　　复数*—$\frac{L}{2}\log_2 L$

(6)计算 $g(k)W^{\frac{k^2}{2}}$　　复数*—M

CZT 复数*：$\frac{3}{2}L\log_2^L + N + L + M$　　DFT 直接计算　复数*：MN

(M,N>50 → CZT优于直接计算)

五、CZT算法的特点

1) 输入序列长 N 及输出序列长 M 无需相等

$$\forall\, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{n}), \qquad 0 \le \boldsymbol{n} \le N-1$$
$$\exists\, X(z_k), \qquad 0 \le k \le M-1$$

$$\boldsymbol{M \ne N}$$

2) N,M均可为质数 $\rightarrow$ 任意情况

3) ϕ_0 可任意取值，M可大于N

4) 周线不必是在z平面上的圆

5) 取样起始点z_0任选：

$$X(z_k), \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$$

6) $A=1$, $W = e^{j\frac{2\pi}{N}}$, $M = N$ 时可用CZT计算DFT

$$CZT \rightarrow X(z_k) = DFT[x(n)], \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$$

DFT的推广

FFT的应用

➢ 实序列的FFT算法(§ 4-7)

一、问题的提出

$$\forall\ x(n) — DFT[x(n)] \to FFT$$

实数： $\forall\ x(n) = x^*(n), \qquad 0 \le n \le N-1$

$$DFT[x(n)] \longrightarrow FFT\ \ ?$$

可能的办法：

① $x(n) \to x(n) + j0 \to y(n) \to FFT$

② $x(n) \to DFT[x(n)] \to$ 专用算法/硬件

③ 能否有更好的方法吗？

二、用一个N-FFT同时计算两个N点实序列

问题：计算 $\begin{cases} X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)] \\ X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(n) = x_1(n) + jx_2(n) \\ X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X_1(k) + jX_2(k) \end{cases}$

$\neq \text{Re}[X(k)]$ $\neq \text{Im}[X(k)]$

DFT的对称性质：

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$X(K) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

周期共轭对称分量　　周期共轭反对称分量

$$x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$jx_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

$$\because \text{DFT}[x^*(n)] = X^*(-k)$$

$$\therefore X_1(k) = \frac{1}{2}\left[X(k) + X^*(N-k)\right]$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2j}\left[X(k) - X^*(N-k)\right]$$

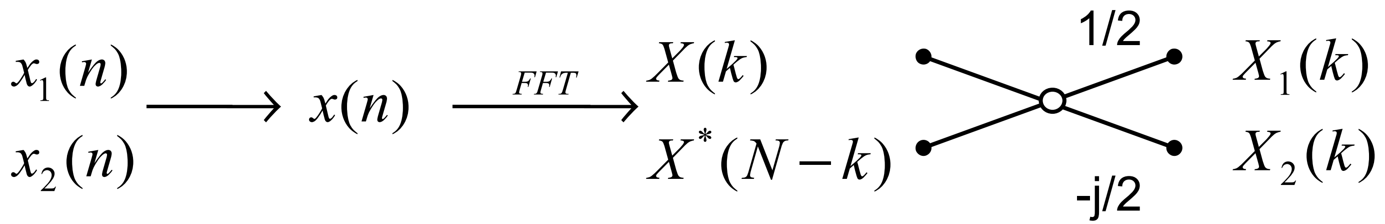
即：

$$X_{ep}(k)=DFT[x_r(n)]=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]$$

$$X_{op}(k)=DFT[jx_i(n)]=\frac{1}{2}[X(k)-X^*(N-k)]$$

$$\therefore X_1(k)=X_{ep}(k)=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]$$

$$X_2(k)=-jX_{op}(k)=-\frac{j}{2}[X(k)-X^*(N-k)]$$



$k=0,1,\ldots,N$

三、用一个N-FFT计算一个2N点实序列

令：

$$x_1(n) = x(2n)$$
$$x_2(n) = x(2n+1) \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{y(n) = x_1(n) + j x_2(n)}$$

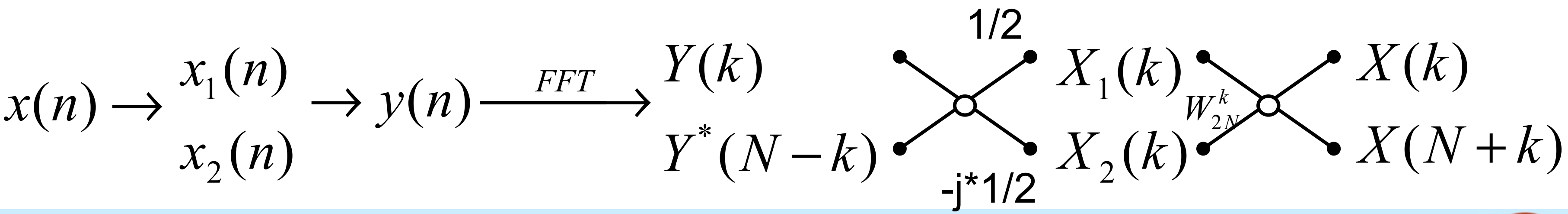
$$\downarrow$$

$$Y(k) = X_1(k) + jX_2(k)$$

$$\begin{cases} X_1(k) = Y_{ep}(k) = \dfrac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)] \\ X_2(k) = -jY_{op}(k) = -j\dfrac{1}{2}[Y(k) - Y^*(N-k)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \\ X(N+k) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k) \end{cases}$$

$$0 \le k \le N-1$$



➢线性卷积和线性相关的FFT算法 (§ 4-10)

1.线性卷积的FFT算法

2.线性相关的FFT算法

（一）利用FFT求卷积——快速卷积

$$\forall \quad x(n) \qquad 0 \le n \le N_1 - 1$$
$$h(n) \qquad 0 \le n \le N_2 - 1$$

$$\exists \; x(n) * h(n) = \sum_{l=0}^{N_1-1} x(l)h(n-l) = \sum_{l=0}^{N_2-1} h(l)x(n-l)$$

$$\begin{matrix} x(n) \\ h(n) \end{matrix} \xrightarrow{\text{补零}} \begin{matrix} x'(n) \\ h'(n) \end{matrix} \xrightarrow{FFT} X'(k)H'(k) \xrightarrow{IFFT}$$

1. $N_1 \approx N_2$
2. $N_1 >> N_2$ 分段卷积
3. $x(n) = x^*(n), \quad h(n) = h^*(n)$

运算量比较：
1.直接卷积：N^2
2.快速卷积：$3N\log_2 N$

快速卷积计算步骤

$(1)x(n)\ N_1\ \ h(n)\ N_2$

$y(n)=x(n)*h(n)$

(2)补零$N \geq N_1+N_2-1 \quad N=2^v$

$x'(n) \quad h'(n)$

$$y'(n)=x'(n)\otimes h'(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x'(k)h'((n-k))_N R_N(n)$$

$(3)FFT: x'(n)\rightarrow X'(k) \quad h'(n)\rightarrow H'(k)$

$(4)Y'(k)=X'(k)H'(k)$

$$(5)IFFT: y'(n)=\sum_{k=0}^{N-1}[\frac{1}{N}Y'(k)]W_N^{-nk}=\left[\sum_{k=0}^{N-1}[\frac{1}{N}Y'^*(k)]W_N^{nk}\right]^*$$

$(6)y(n)$

高效的FFT卷积（实序列）

$\forall$ 实序列 $g(n), s(n), h(n) \quad 0 \le n \le N-1$

$G(k), S(k), H(k) \quad 0 \le k \le N-1$

用一次FFT实现两个卷积运算

$$\begin{cases} y_1(n) = g(n) \otimes h(n) \\ y_2(n) = s(n) \otimes h(n) \end{cases}$$

合成： $p(n) = g(n) + js(n)$

则： $DFT[p(n)] = P(k) = G(k) + jS(k)$

令： $Y(k) = H(k)P(k)$

$$y(n) = IFFT[Y(k)] = p(n) \otimes h(n)$$

$$= [g(n) + js(n)] \otimes h(n) = g(n) \otimes h(n) + js(n) \otimes h(n)$$

因此：
$$\begin{cases} y_1(n) = g(n) \otimes h(n) = \mathrm{Re}[y(n)] \\ y_2(n) = s(n) \otimes h(n) = \mathrm{Im}[y(n)] \end{cases}$$

高效FFT卷积应用：

(1)一个系统同时通过两种输入信号

(2)一个系统同时处理长序列分段过滤中的两个片段

(3)一个信号同时通过两个系统

二. 线性相关的FFT算法

$$\forall \; x(n) \qquad 0 \le n \le N_1 - 1$$

$$y(n) \qquad 0 \le n \le N_2 - 1$$

$$\exists \; z(n) = \sum_{l=0}^{N_1-1} x^*(l)\, y(n+l) = \sum_{l=0}^{N_2-1} y^*(l)\, x(n+l)$$

$$\begin{matrix} x(n) \\ y(n) \end{matrix} \xrightarrow{\text{补零}} \begin{matrix} x'(n) \\ y'(n) \end{matrix} \xrightarrow{FFT} X'^*(k)Y'(k) \xrightarrow{IFFT} z(n)$$

1. $N_1 \approx N_2$
2. $N_1 >> N_2$
3. $x(n) = x^*(n), \quad y(n) = y^*(n)$

$$\Bigg\} \; x(n) = y(n) \rightarrow$$

自相关

1. $N_1 \approx N_2$
2. $N_1 >> N_2$
3. $x(n) = x^*(n)$

快速相关计算步骤

$(1) x(n)\ N_1\ \ y(n)\ N_2$

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N_1} x^*(k) y(n+k)$$

(2)补零$N \geq N_1 + N_2$ -1，$N = 2^{\nu}$

$x'(n)\quad y'(n)$

$(3) FFT: x'(n) \to X'(k)\quad y'(n) \to Y'(k)$

$(4) Z(k) = X'^*(k) Y'(k)$

$$(5) IFFT: z'(n) = \sum_{k=0}^{N-1} [\frac{1}{N} Z(k)] W_N^{-nk} = \left[\sum_{k=0}^{N-1} [\frac{1}{N} Z^*(k)] W_N^{nk} \right]^*$$

$(6) z(n)$

本章回顾:

1.基-2 DIT
2.基-2 DIF
3.统一复合数
4.基-4 DIF/DIT
5.分裂基
6.Chirp Z变换
7. 应用：实序列
卷积相关

算法原理
时抽频抽
蝶形流图
复乘复加
算法特点
变换卷积