100052205

数字信号处理

Digital Signal Processing

李慧琦 教授

信息与电子学院

北京理工大学

Tel: +86 (10) 68918239

Email: huiqili@bit.edu.cn

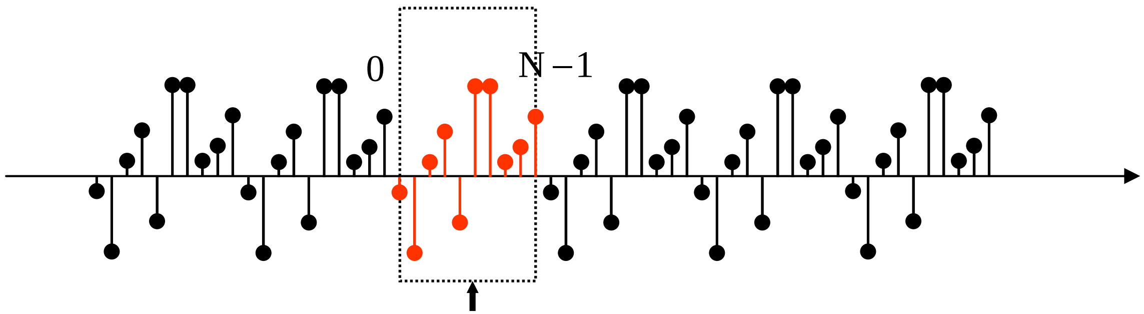
第三章 离散傅里叶变换

本章主要内容

- 傅里叶变换的几种形式
- 离散傅里叶级数
- 离散傅里叶变换的定义和性质
- 频域采样
- **DFT**的应用

§3-4 离散傅里叶变换(DFT)

（1）主值序列的概念



$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n);\ \tilde{x}(n)=x((n))_N$$

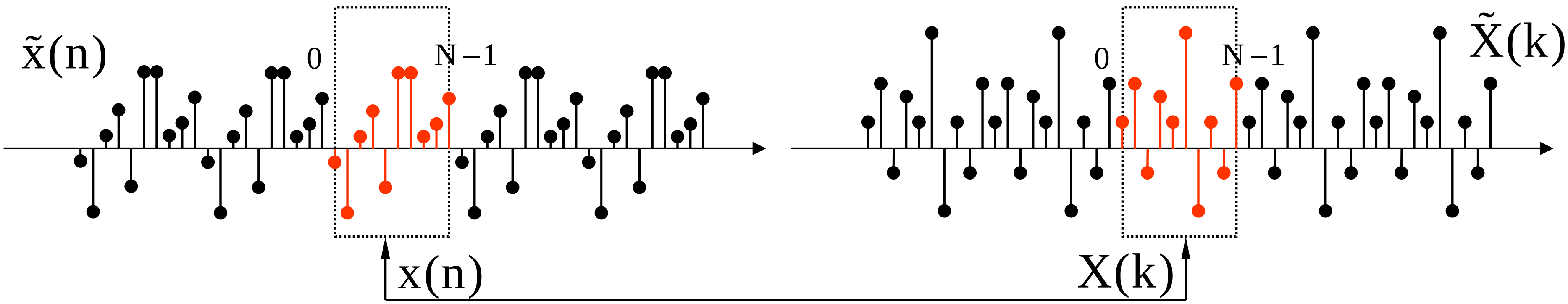
$$X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k);\ \tilde{X}(k)=X((k))_N$$

（2）DFS正逆变换只涉及主值序列

$$\tilde{X}(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$\tilde{x}(n)=\mathrm{IDFS}[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

（3）**DFT为DFS的主值区间表现：**



$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \tilde{X}(k)R_N(k) = \mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)]R_N(k)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}; \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \tilde{x}(n)R_N(n) = \mathrm{IDFS}[\tilde{X}(k)]R_N(n)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}; \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

N 点 DFT定义

$$\mathrm{X(k)} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\mathrm{N-1}} \mathrm{x(n)} \mathrm{W}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{kn}} \qquad 0 \le \mathrm{k} \le \mathrm{N}-1$$

$$= \mathrm{DFT}\left[\mathrm{x(n)}\right]$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$= IDFT\left[X(k)\right]$$

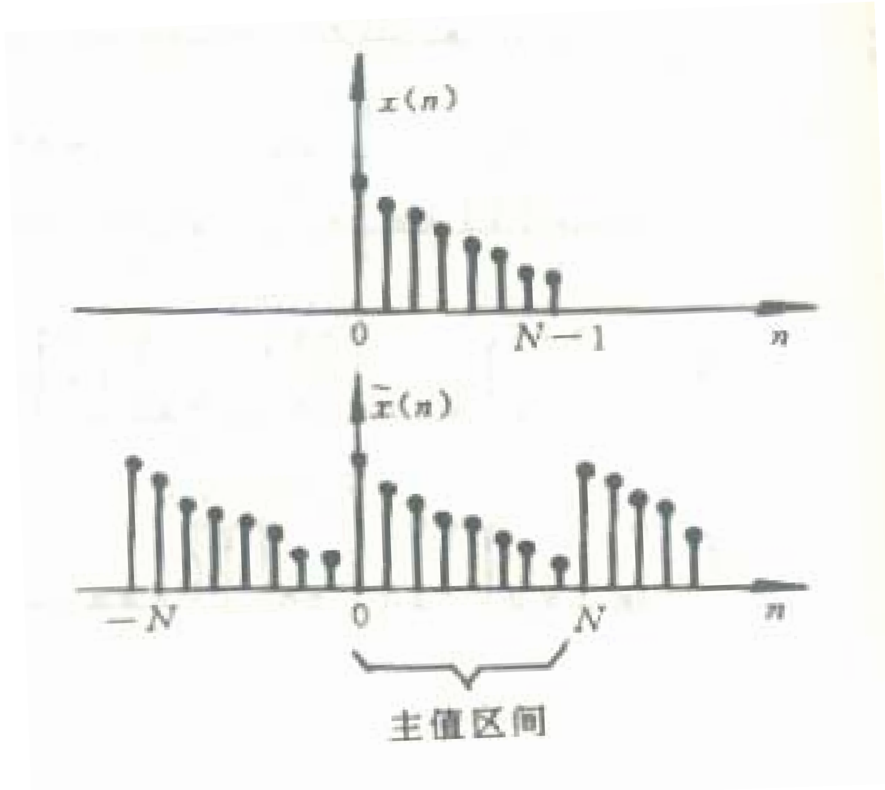
注意：

【1】DFT隐含周期性

【2】 $x(n)$ 与 $\tilde{x}(n)$ 的内在联系

$\tilde{x}(n)$ 是$x(n)$ 的周期延拓

$x(n)$ 是$\tilde{x}(n)$ 的主值序列



分别简记为：

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$

$$x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$

$((n))_N$ 表示余数运算表达式，比如：

$$\forall n = mN + n_1$$

$$((n))_N = n_1$$

$$x((n))_N = x(n_1)$$

注意x(n)有时表示一个序列，
有时表示序列中一个值

取余数:

$x((25))_9$ $x((-5))_9$

$25=2x9+7$

$x((25))_9 = x(7)$

$-5=(-1\ )x9+4$

$x((-5))_9 = x(4)$

【3】 $X(k)$ 与 $\tilde{X}(k)$ 的内在联系

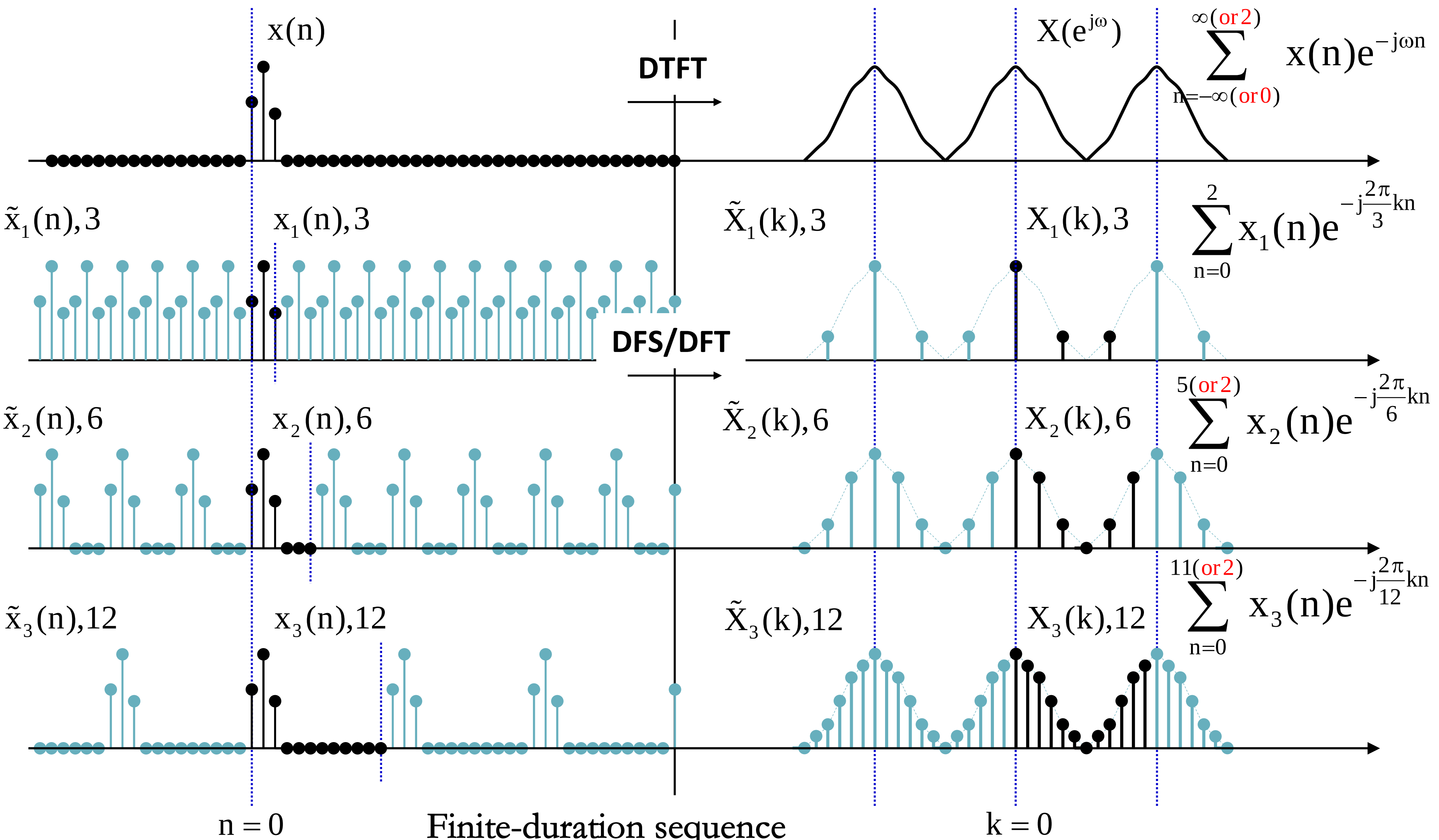
$$X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$\tilde{X}(k)=X\big((k)\big)_N$$

【4】

$$\begin{tikzcd}
x_a(t) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & x_a(nT) \arrow[r, "\text{近似}"] \arrow[d, leftrightarrow] & x(n),0\le n\le N-1 \arrow[d, leftrightarrow] \\
X_a(j\Omega) & X(e^{j\Omega T})=X(e^{j\omega}) \arrow[l] & X(k) \arrow[l, "\text{近似}"'] \arrow[ll, bend left, "\text{近似}"]
\end{tikzcd}$$

优点：便于PC机运算，可以广泛应用


x(n)
DTFT
$X(e^{j\omega})$
$\sum_{n=-\infty(\text{or }0)}^{\infty(\text{or }2)} x(n)e^{-j\omega n}$
$\tilde{x}_1(n),3$
$x_1(n),3$
$\tilde{X}_1(k),3$
$X_1(k),3$
$\sum_{n=0}^{2} x_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{3}kn}$
DFS/DFT
$\tilde{x}_2(n),6$
$x_2(n),6$
$\tilde{X}_2(k),6$
$X_2(k),6$
$\sum_{n=0}^{5(\text{or }2)} x_2(n)e^{-j\frac{2\pi}{6}kn}$
$\tilde{x}_3(n),12$
$x_3(n),12$
$\tilde{X}_3(k),12$
$X_3(k),12$
$\sum_{n=0}^{11(\text{or }2)} x_3(n)e^{-j\frac{2\pi}{12}kn}$
$n=0$
Finite-duration sequence
$k=0$