100052205

数字信号处理

Digital Signal Processing

李慧琦 教授

信息与电子学院

北京理工大学

Tel: +86 (10) 68918239

Email: huiqili@bit.edu.cn

§5-4 FIR数字滤波器设计

FIR滤波器设计

- 线性相位FIR特点
- 窗函数法
- 频率采样法

概述

IIR滤波器:	FIR滤波器:
幅度特性好 无法实现线性相位，需附加调相网络 需要注意稳定性问题	可具有线性相位特性 可利用快速傅立叶变换

- 由于单位冲激、脉冲响应特点不同，IIR滤波器设计方法不能移植于FIR滤波器的设计。

- 鉴于FIR滤波器可以做到线性相位，可专门讨论线性相位FIR滤波器的设计，因为若对相位响应不感兴趣，可用阶数低很多的IIR滤波实现。

线性相位的重要性：

- 在图像处理，数据传输和现代通信系统中多要求系统具有线性相位特性。
- 应用实例
  1. 音乐厅系统：不同频率成分的音乐，经过线性相位系统，不同频率成分的时延是一致的，这样组合起来的音乐和舞台上一样。否则不同位置的听众将听到不同的音乐。
  2. 雷达系统：通过比较返回与发射的脉冲信号之间的时间差来确定目标的距离。如果雷达系统的相位非线性的话，回波信号各个频率成分的延迟时间不一样，合成的回波信号与实际的回波信号其起始位置就很有可能不同，这样测算的距离不能真实反应目标与雷达之间的距离了。

线性相位定义： 系统的相频特性与频率成正比（相频特性是一条直线），信号通过它产生的延迟等于常数。

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega$$

相时延： $$\tau_p = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega}$$

群时延： $$\tau_g = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

要求滤波器具有严格的线性相位时， 应有：

$$\tau_p = \tau_g = \tau = \text{constant}$$

➢ 线性相位实数FIR的充要条件（h(n)为实数）

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n) - j\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)}\right) = -\tau\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(\tau\omega)}{\cos(\tau\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left[(\tau - n)\omega\right] = 0$$

严格线性相位充要条件 （第一类线性相位滤波器）

$$\tau = (N-1)/2 \qquad h(n) = h(N-1-n)$$

工程上只要求具有恒定群时延： $\varphi(\omega) = \omega_0 - \tau\omega$

同理可得 $\omega_0 = \pm\pi/2 \quad \tau = (N-1)/2 \qquad h(n) = -h(N-1-n)$

除群时延外， 产生90°相移。 （第二类线性相位滤波器）

➢ 线性相位FIR特点

• h(n)的中心对称性：

$$h(n) = \pm h(N-n-1)$$

h(n) 为实数， 中心奇偶对称 （与圆周奇偶对称不同）

对称中心在 (N-1)/2

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n) z^{-n}$$

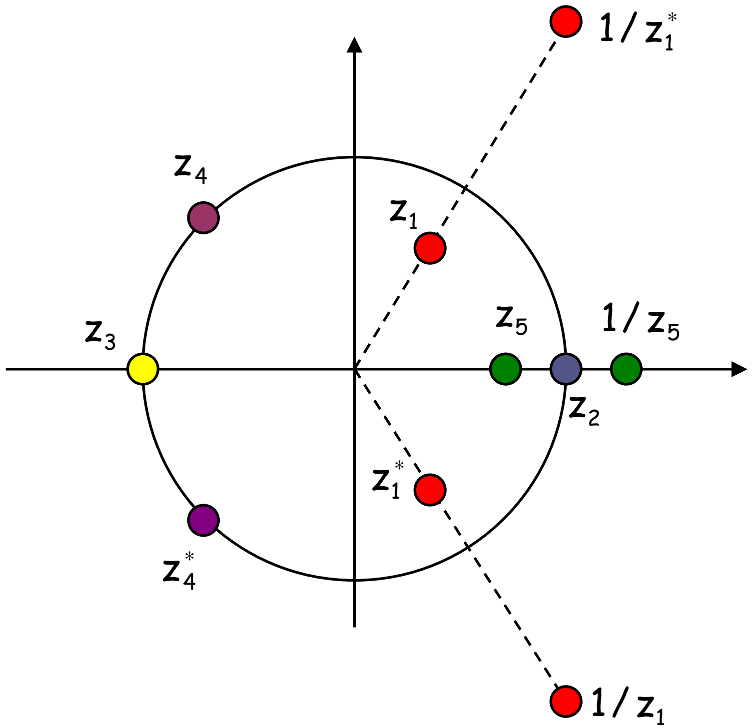
$$= \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m) z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} \left[\sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{m} \right]$$

$$= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

• h(n)的实值性：

$$H^*(z) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \right]^* = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) (z^*)^{-n}$$

$$= H(z^*)$$



线性相位响应 FIR 系统零点必是互为倒数的共轭对

Case 1：$h(n)$中心偶对称，N 为奇数

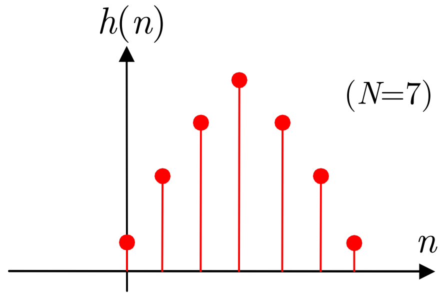
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)\left[e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-n-1)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

$$= e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{-j\omega n} + e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{-j\omega(N-n-1)} \right] \right\}$$

$$= e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \right] \right\}$$

$$= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\right] \right\}$$



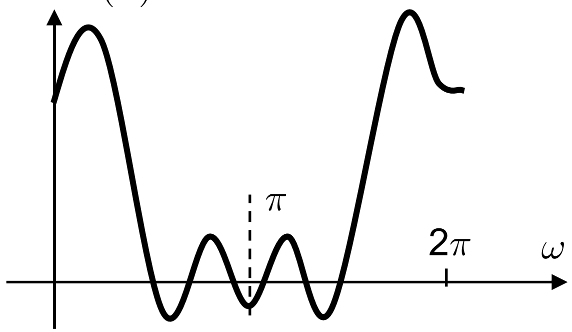
定义一个 $(N+1)/2$ 点序列 $a(n)$:

$$a(0)=h\left(\frac{N-1}{2}\right),\ a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),\ n=1,2,\ldots,\frac{N-1}{2}$$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos\left[\omega n\right]\right]$$

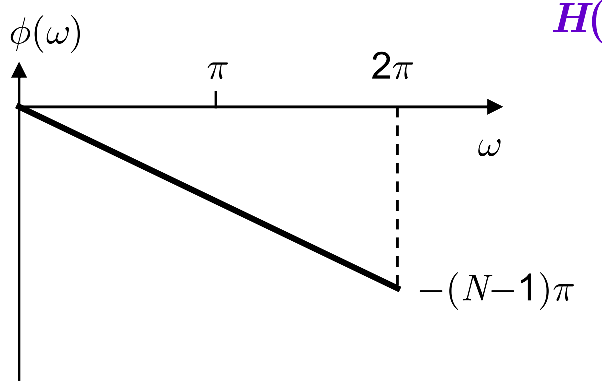
$$\Rightarrow\begin{cases}H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos\left[\omega n\right]\\ \phi(\omega)=-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega\end{cases}$$

这里 $H(\omega)$ 并不是幅频响应，其值可正可负



$H(\omega)=H(2\pi-\omega)$

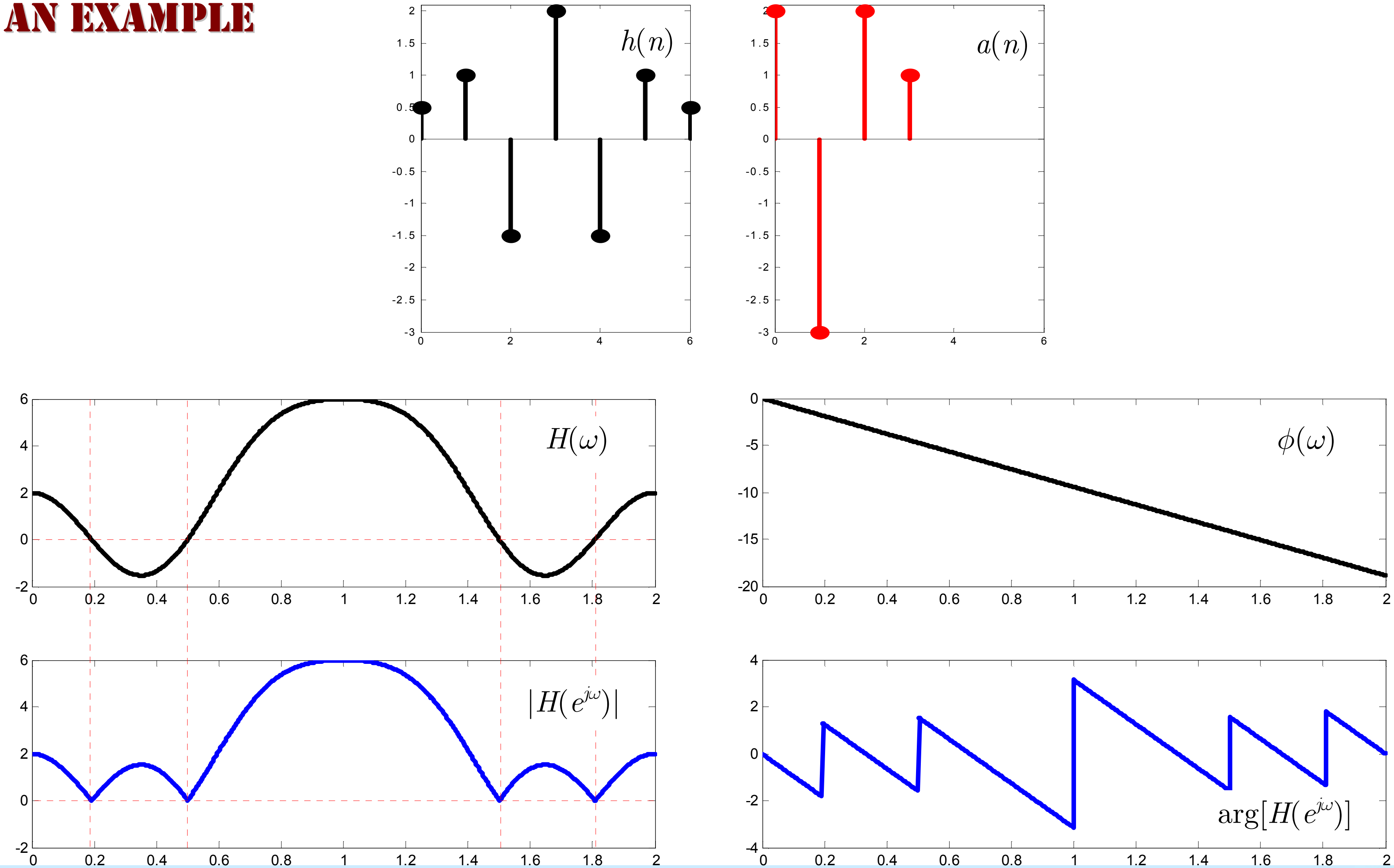
0, π ,2 π偶对称

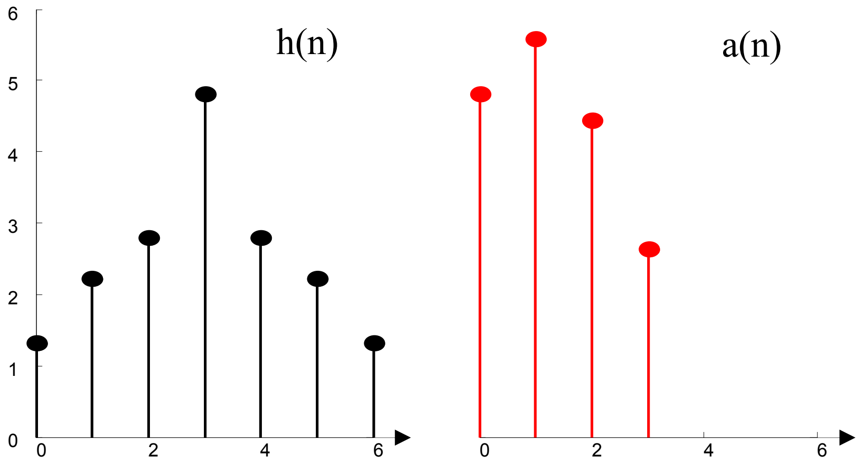


利用上式可由 $h(n)$ 得到滤波器频率响应

线性相位FIR滤波器

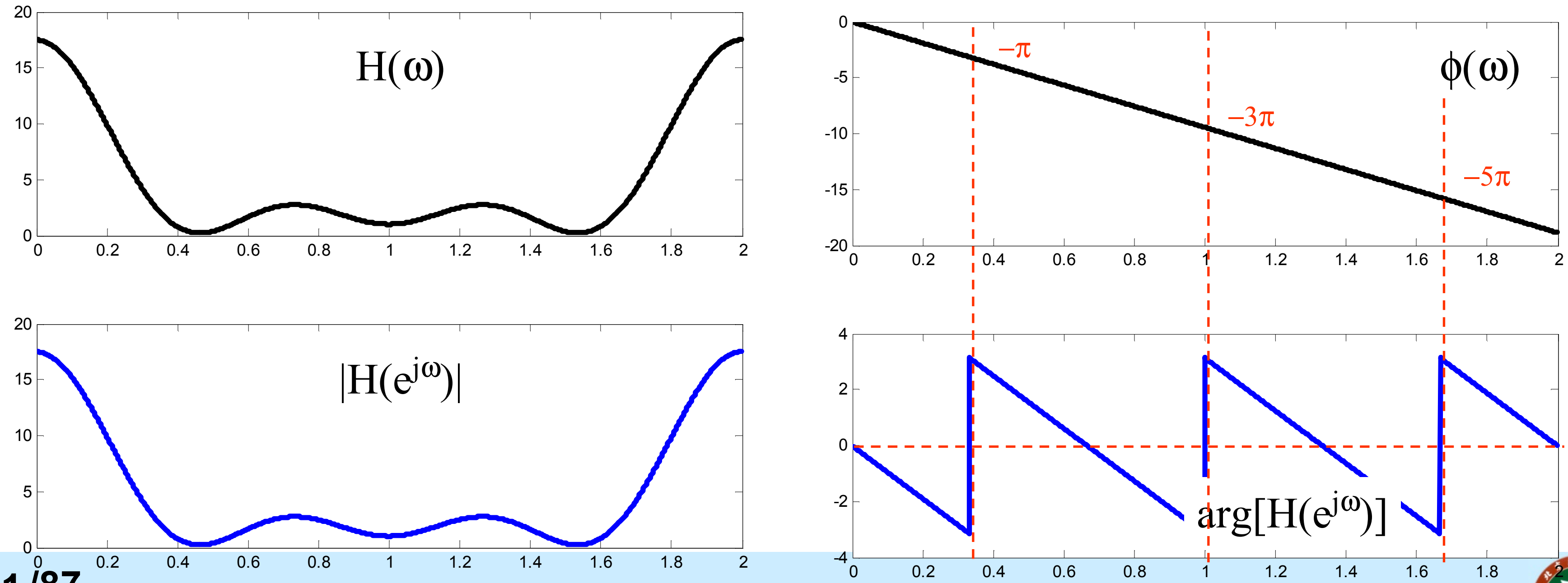
AN EXAMPLE





特点

- <u>幅频响应</u>：可实现低通、高通、带通带阻四种选频特性
- <u>相频响应</u>：线性相位响应：$-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega$



Case 2： $h(n)$中心偶对称，N 为偶数

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)}\right]$$

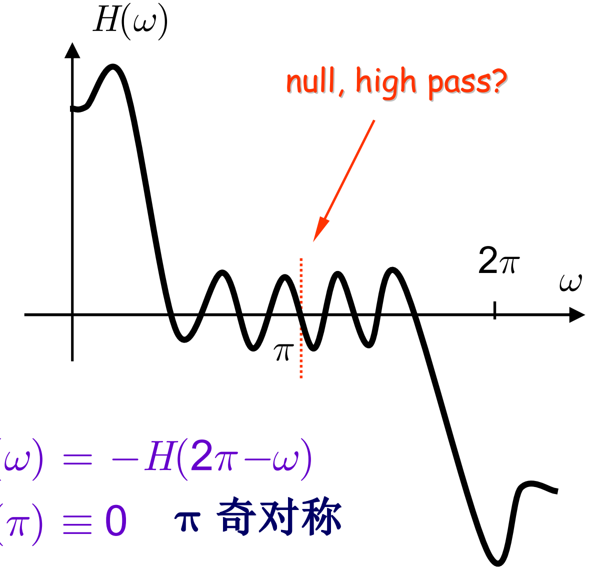
$$= e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)\left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\right]$$

$$= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N}{2}-n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

定义一个$(N/2+1)$点序列 $b(n)$:

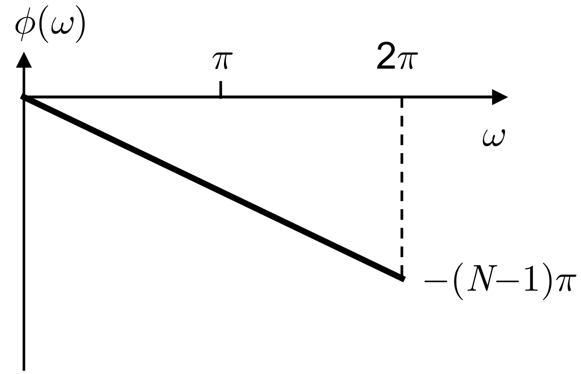
$$b(0)=0,\ b(n) = 2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\ n=1,2,\ldots,\frac{N}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{\underbrace{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}_{\phi(\omega)}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]}_{H(\omega)}$$

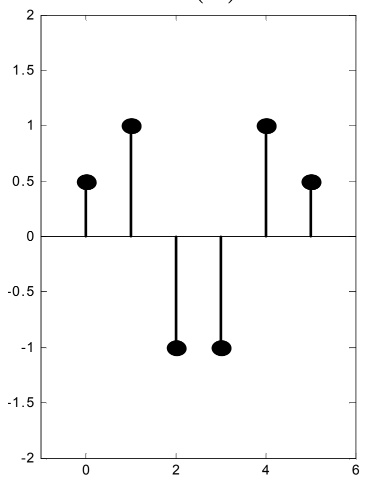


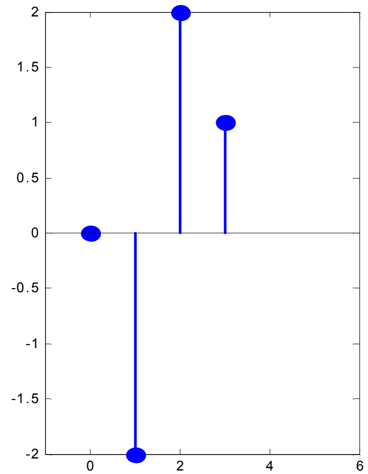
$H(\omega) = -H(2\pi-\omega)$

$H(\pi) \equiv 0$　π 奇对称



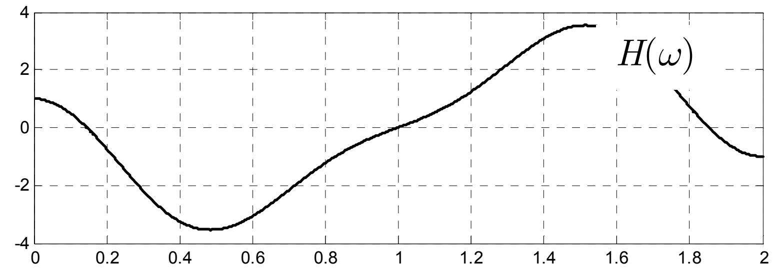
AN EXAMPLE

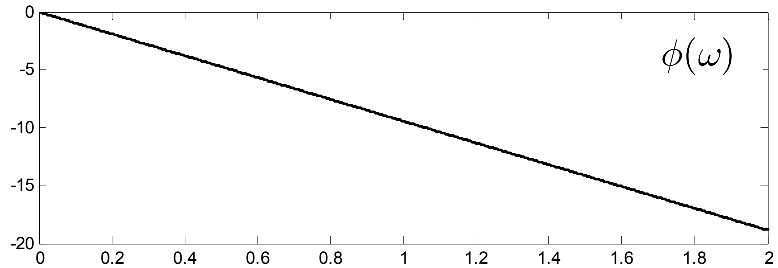


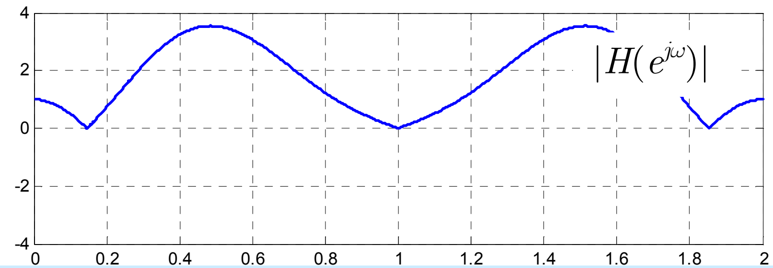


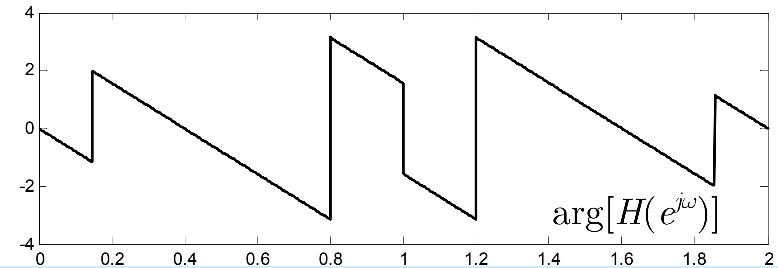
特点

- <u>幅频响应</u>：不可实现高通、带阻两种选频特性
- <u>相频响应</u>：线性相位响应： $-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega$









Case 3：$h(n)$中心奇对称，N 为奇数（中间项恒为零）

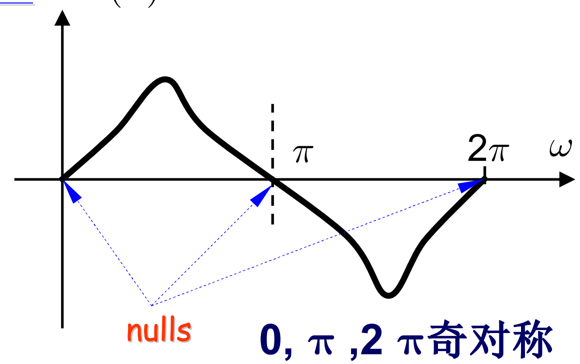
$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[e^{-j\omega n}-e^{-j\omega(N-1-n)}\right]$$

$$=e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)}\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\sin\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]\right\}$$

定义一个$(N+1)/2$点序列 $c(n)$：

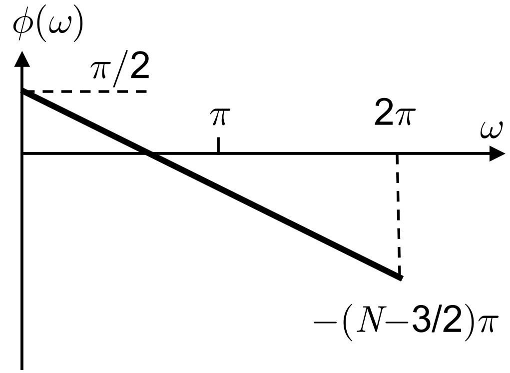
$$c(0)=0,\ c(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right),\ n=1,2,\ldots,\frac{N-1}{2}$$

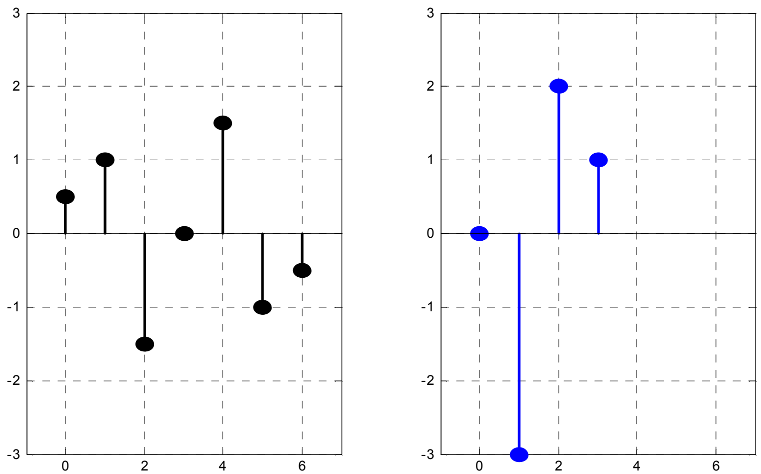
$$H(e^{j\omega})=e^{\overbrace{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)}_{\phi(\omega)}}\underbrace{\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}c(n)\sin[\omega n]\right\}}_{H(\omega)}$$



$$H(\omega)=-H(2\pi-\omega)$$

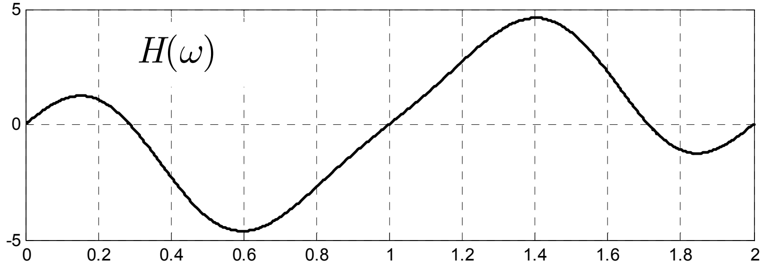
$$H(0)=H(\pi)=H(2\pi)\equiv 0$$

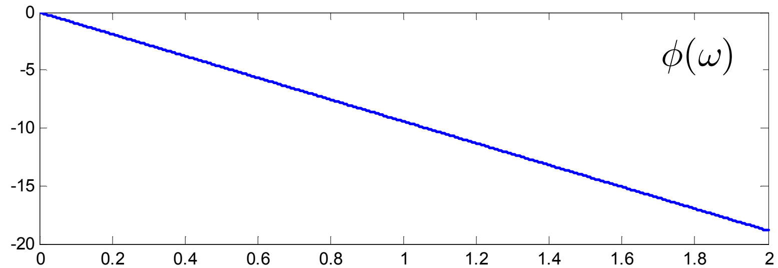


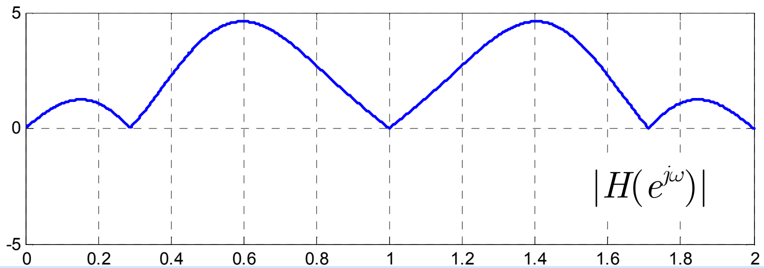


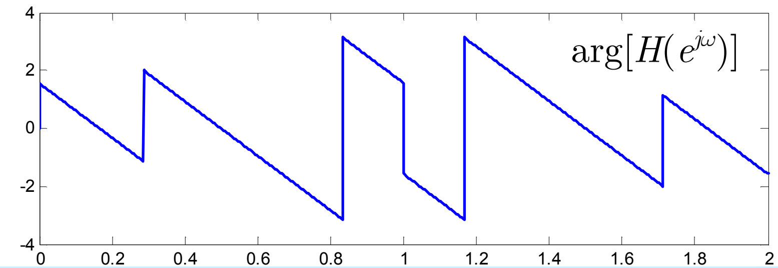
特点

- <u>幅频响应</u>：只可实现带通选频特性
- <u>相频响应</u>：线性相位响应：$\frac{\pi}{2}-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega$









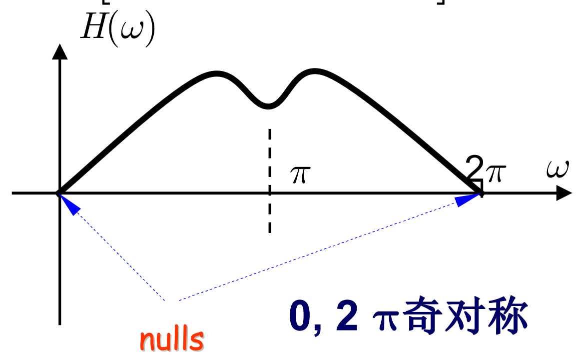
Case 4: $h(n)$中心奇对称，N 为偶数

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)\left[e^{-j\omega n}-e^{-j\omega(N-1-n)}\right]=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)2j\sin\left[\left(\frac{N}{2}-n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

定义一个 $N/2+1$ 点序列 $d(n)$:

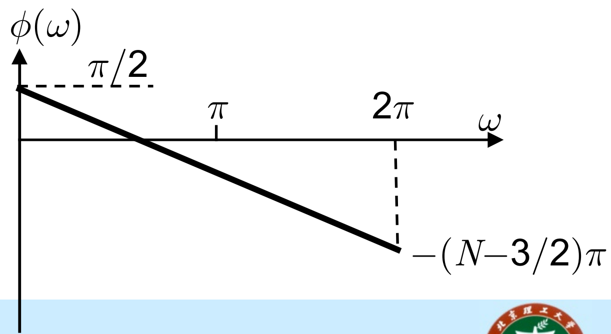
$$d(0)=0,\ d(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right),\ n=1,2,\ldots,\frac{N}{2}$$

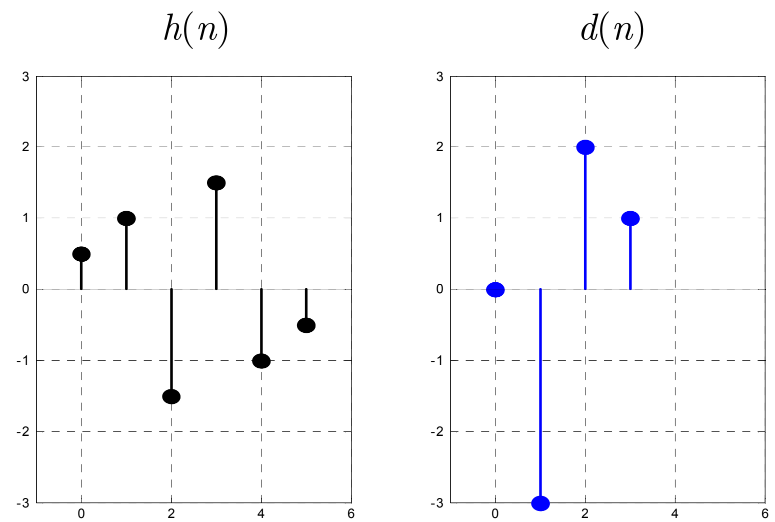
$$H(e^{j\omega})=e^{\overbrace{j\left(\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega\right)}^{\phi(\omega)}}\underbrace{\left\{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}}d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}}_{H(\omega)}$$

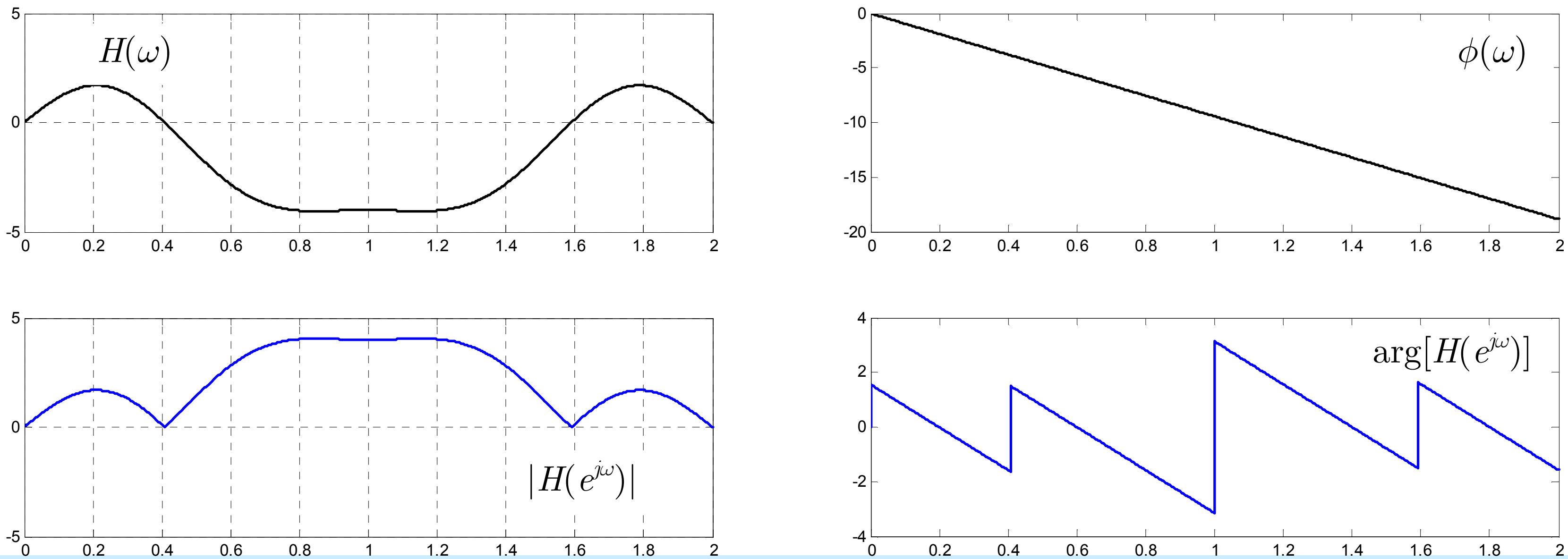


0, 2 π奇对称

$H(\omega) = H(2\pi-\omega)$
$H(0) = H(2\pi) \equiv 0$







特点

- <u>幅频响应</u>：不可实现低通、带阻选频特性
- <u>相频响应</u>：线性相位响应：$\frac{\pi}{2}-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega$

线性相位 FIR 数字滤波器特点

① **时域：**

$$h(n) = \pm h(N-n-1)$$

② **频域：**

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\left(\frac{L}{2}\pi - \frac{N-1}{2}\omega\right)}$$

$$H(z) = (-1)^L z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

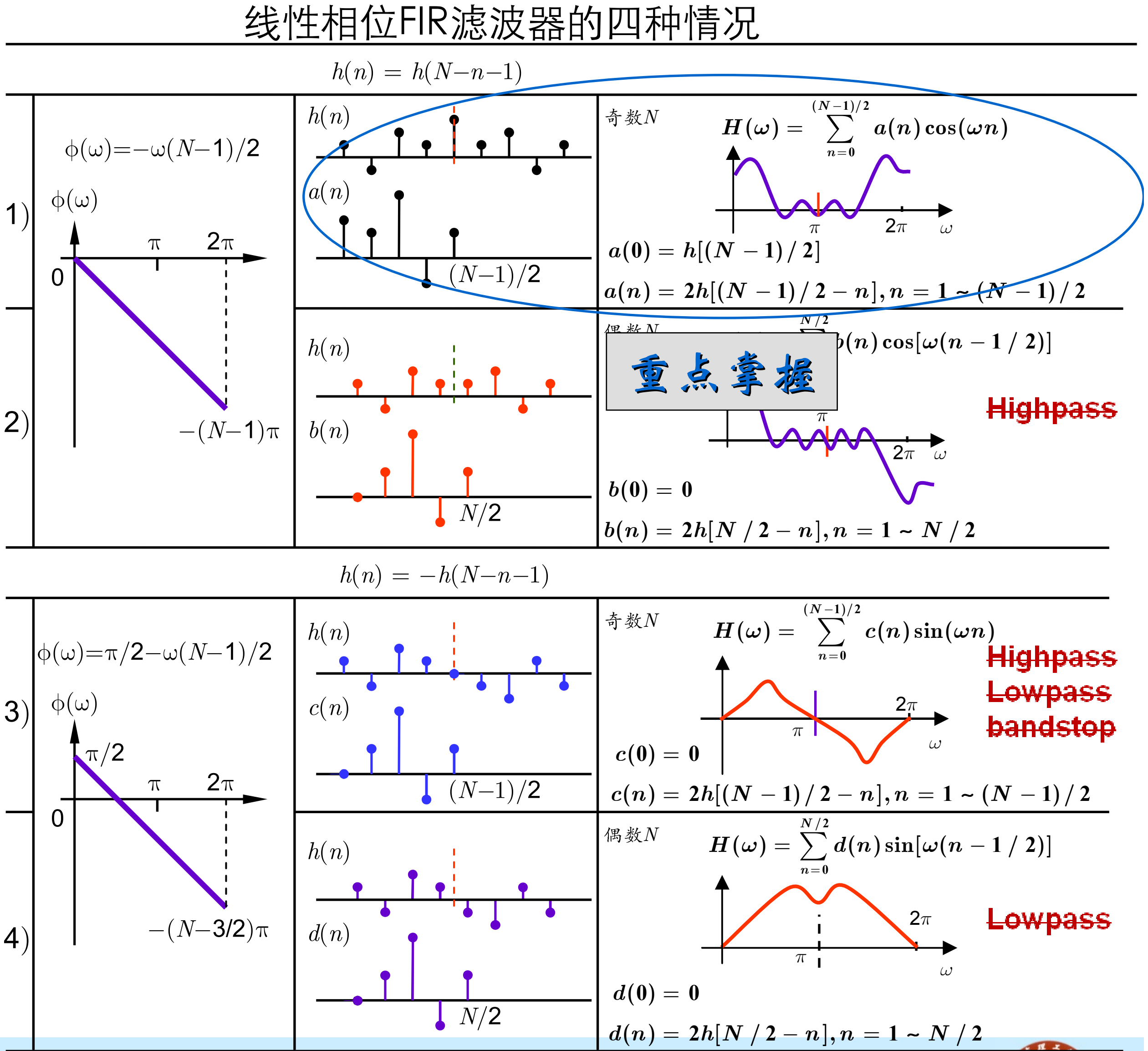
— $H(\omega)$ 为实函数

— $h(n)$ 偶对称：$L=0$

— $h(n)$ 奇对称：$L=1$

③ **零点：**

成倒数、共轭对出现



How to derive $H(e^{j\omega})$ from $h(n)$?

类型	*h*(n)	*H*g(ω)
1	*h*(n)=*h*(N-1-n)，*N*为奇数	*H*g(ω)关于ω=0、π、2π偶对称
2	*h*(n)=*h*(N-1-n)，*N*为偶数	*H*g(ω)关于ω=0、2π偶对称，关于ω=π奇对称
3	*h*(n)=-*h*(N-1-n)，*N*为奇数	*H*g(ω)关于ω=0、π、2π奇对称
4	*h*(n)=-*h*(N-1-n)，*N*为偶数	*H*g(ω)关于ω=0、2π奇对称，关于ω=π偶对称

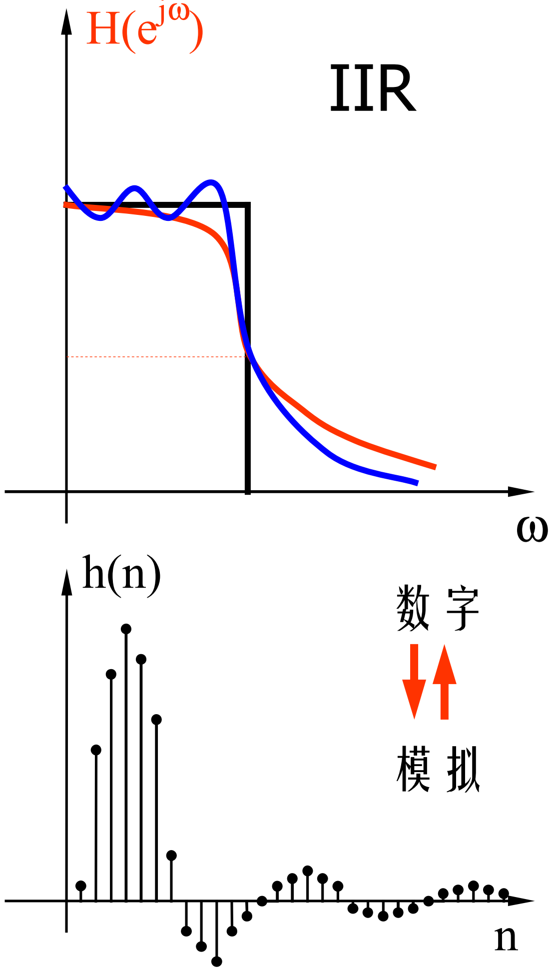
实际使用时，一般来说，

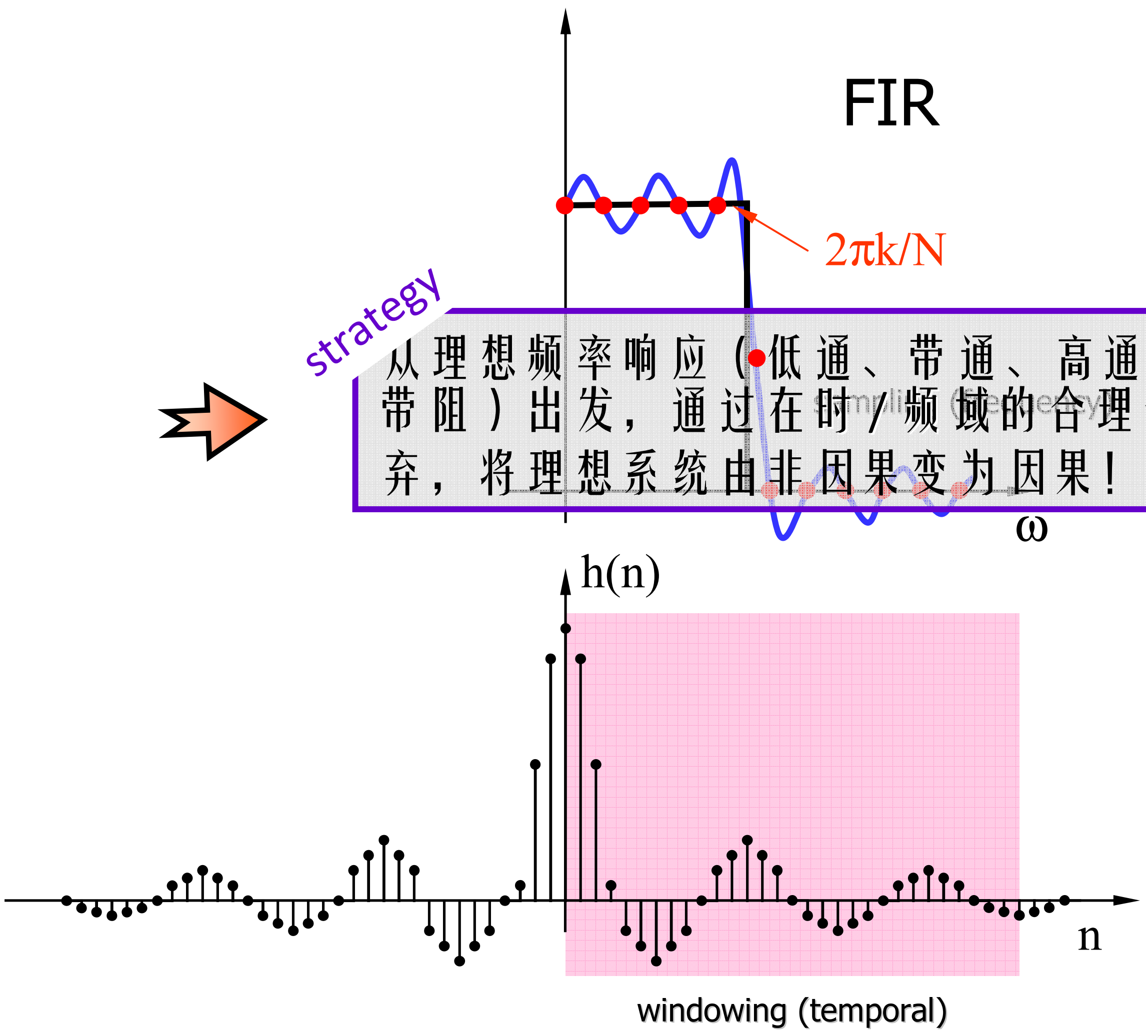
1 适合构成低通、高通、带通、带阻滤波器；（重点掌握）

2 适合构成低通、带通滤波器；

3 适合构成带通滤波器；

4 适合构成高通、带通滤波器。





strategy

从理想频率响应（低通、带通、高通及带阻）出发，通过在时/频域的合理舍弃，将理想系统由非因果变为因果！！

FIR数字滤波器的设计

- 需要掌握低通、带通、带阻、高通四种选频特性FIR滤波器的设计
- 若要求FIR数字滤波器具有线性相位响应，只考虑第一种情形，即h(n)为奇点数中心偶对称
- 需要掌握下述两种方法

- **窗函数方法（Windowing Method）**：在满足线性相位响应前提下，在时域舍弃一些不可实现的要求
- **频率采样方法（Frequency-Sampling Method）**在满足线性相位响应前提下，在频域舍弃一些不可实现的要求

➢窗函数方法：Windows

设计原理:

窗函数法设计 FIR 数字滤波器在时域进行：

设计 $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$ 逼近理想滤波器 $H_d(e^{j\omega})$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

理想滤波器非因果，$h_d(n)$ 无限长

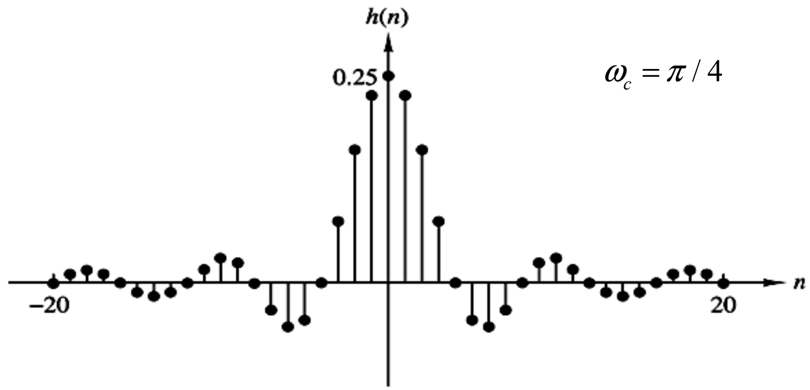


Figure 10.1.1 Unit sample response of an ideal lowpass filter.

解决方法

1. 用有限项和逼近无限项和，有限长序列逼近无限长序列 $h_d(n)$。

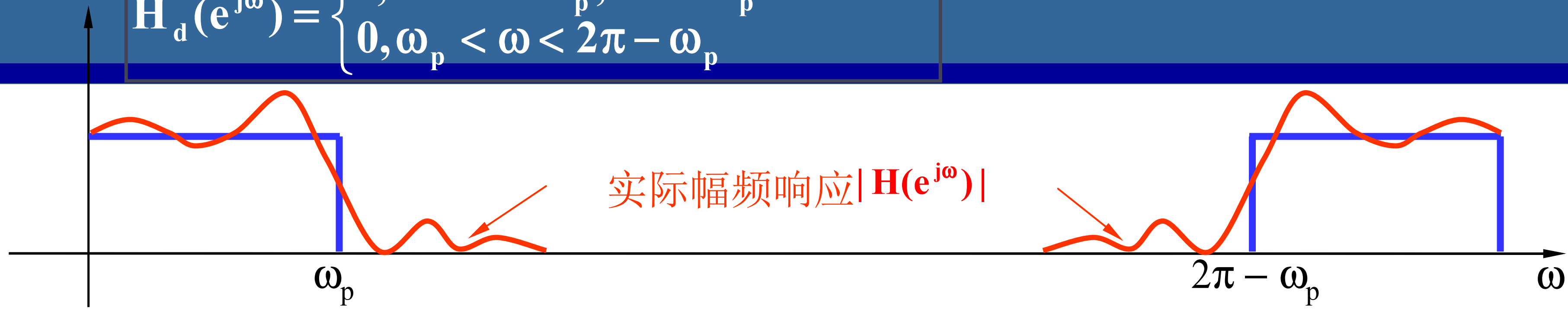
2. 将有限长的$h_d(n)$进行（N-1)/2 的有限延时，从而由非因果系统得到了因果系统。

用有限长的$h(n)$来逼近无限长非因果的$h_d(n)$

$$\text{截断：}\ h(n)=\begin{cases} h_d(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$h(n)=h_d(n)w(n) \qquad w(n):\text{窗函数}$$

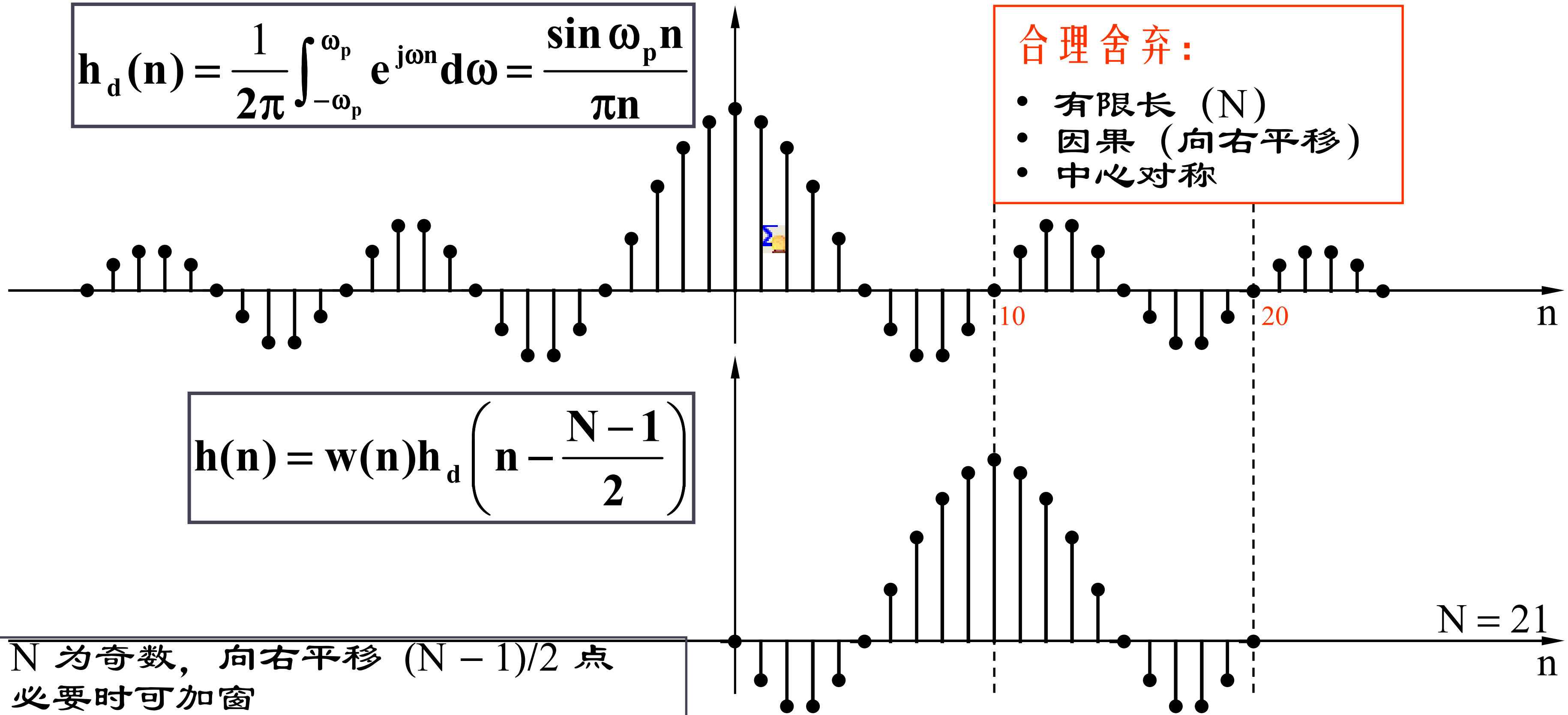
$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1, 0\le\omega\le\omega_p, 2\pi-\omega_p\le\omega\le 2\pi\\ 0, \omega_p<\omega<2\pi-\omega_p\end{cases}$$



$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_p}^{\omega_p}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin\omega_p n}{\pi n}$$

合理舍弃：

- 有限长（N）
- 因果（向右平移）
- 中心对称



$$h(n)=w(n)h_d\left(n-\frac{N-1}{2}\right)$$

- N 为奇数，向右平移 $(N-1)/2$ 点
- 必要时可加窗
- 中心偶对称（第一种线性相响情形）

EXAMPLE：截止频率为ω_p的线性相位N阶低通滤波器

1. 截止频率为ω_c理想低通滤波器

$$H_d'(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c \le |\omega| < \pi \end{cases} \qquad h_d'(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$$

2. $h_d'(n)$进行(N-1)/2的有限时延：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c \le |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin\left[\omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]}{\omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)} \end{aligned}$$

3．取矩形窗截断：

$$w(n)=R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

线性相位约束：

$$\alpha=\frac{N-1}{2}$$

$$\Rightarrow h(n)=\begin{cases}h_d(n)w(n)=\begin{cases}h_d(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\\ \alpha=\dfrac{N-1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow h(n)=\begin{cases}\dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)} & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

∵ $h_d(n)=h_d(N-1-n)$, $R_N(n)=R_N(N-1-n)$ ∴ $h(n)=h(N-1-n)$

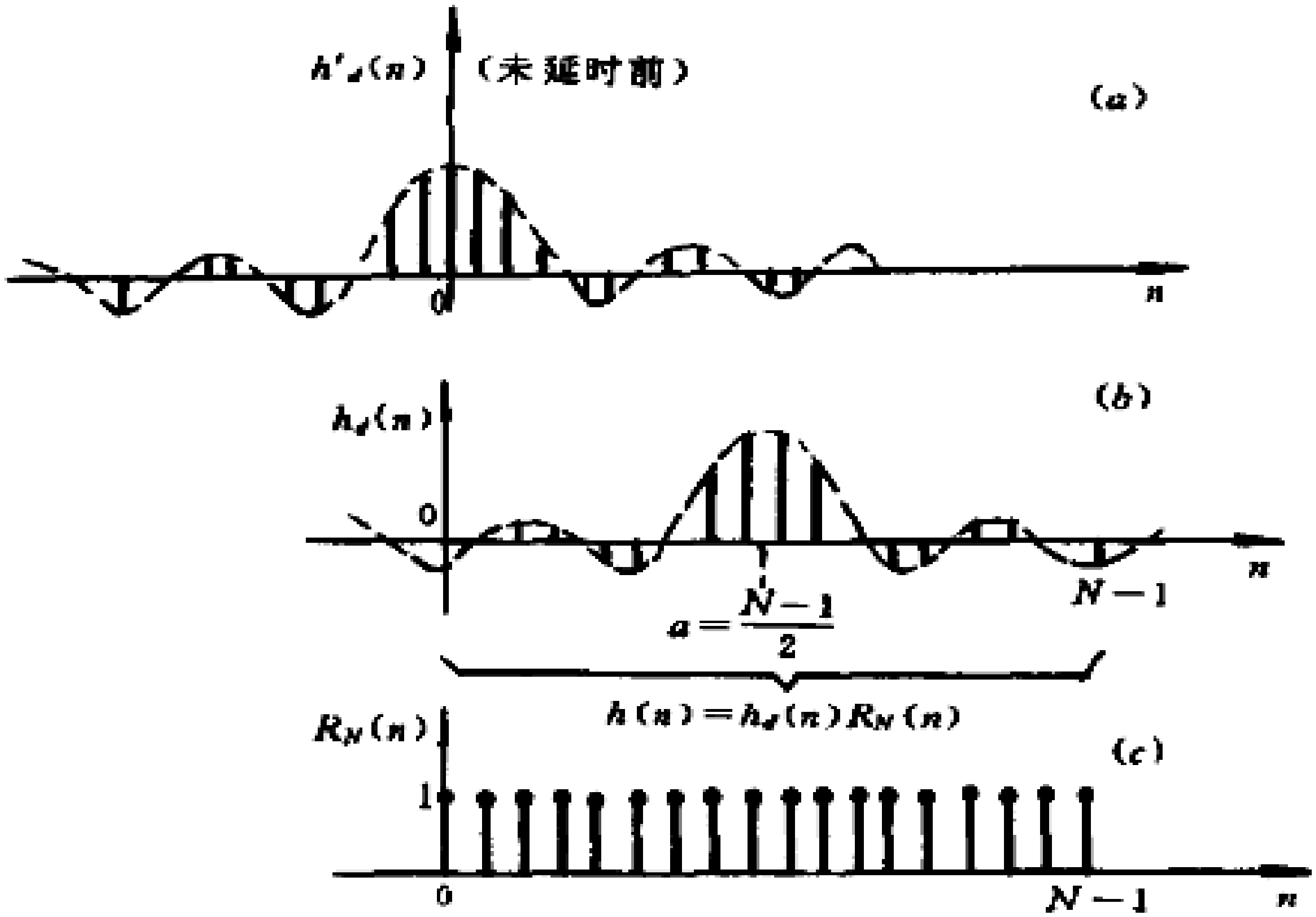


图 5-61 理想单位取样响应的直接截取

矩形窗截断影响

时域相乘，频域相卷．求 $h(n)$的频率特性：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-j\omega n}$$

对矩形窗：

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\omega(N-1)/2}\frac{\sin\left(\omega N/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}$$

$$W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$W_R(\omega) = \frac{\sin\left(\omega N/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}$$

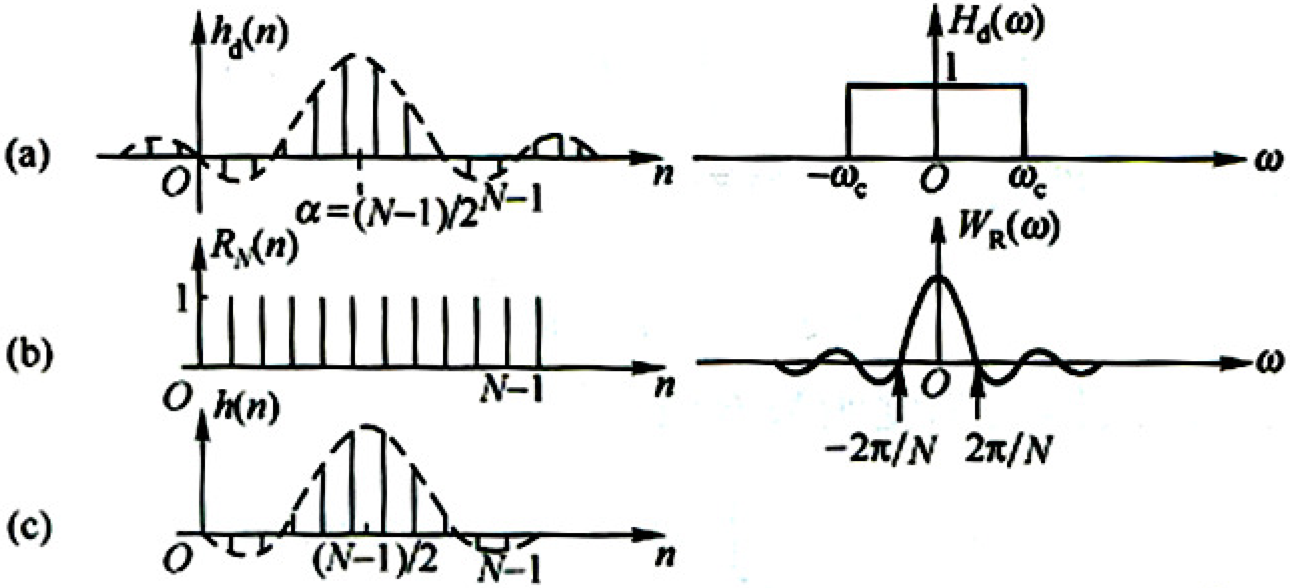


图 7.9　理想矩形幅频特性的 $h_d(n)$ 和 $H_d(\omega)$ 以及矩形窗函数序列的 $w(n)=R_N(n)$ 及 $W_R(\omega)$

$$\because\ H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

幅度函数： $H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c \le |\omega| \le \pi \end{cases}$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\theta}W_R(\omega-\theta)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)(\omega-\theta)}d\theta \\ &= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta \end{aligned}$$

令 $:H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j\theta(\omega)} = H(\omega)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta \\ \theta(\omega) = \left(\dfrac{N-1}{2}\right)\omega \end{cases}$$

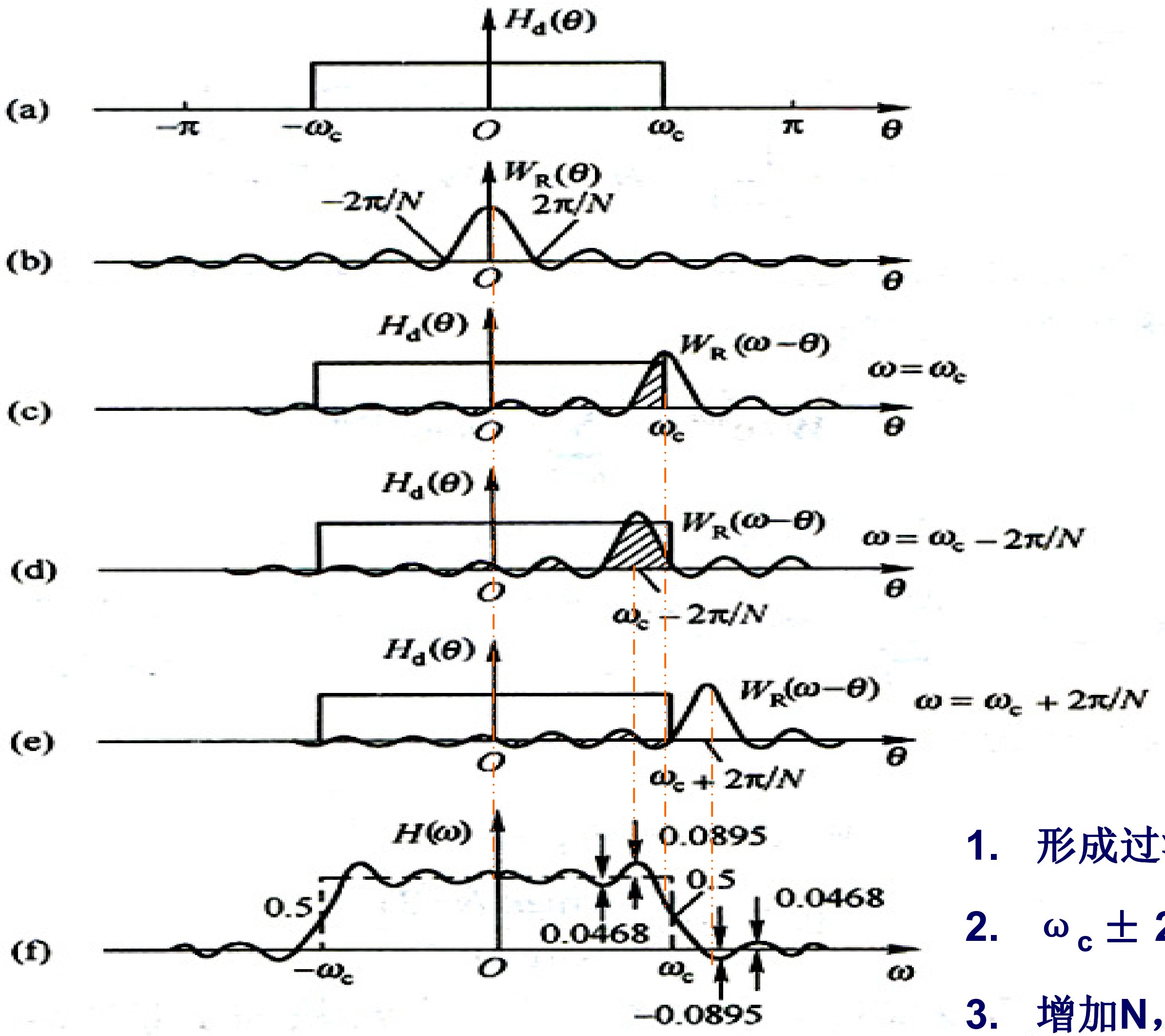


图 7.10　矩形窗的卷积过程

1. 形成过渡带，宽度4π/N.
2. $\omega_c \pm 2\pi/N$ 处出现最大肩峰值。
3. 增加N，减少过渡带宽度，不能改变肩峰值，Gibbs现象。

常用的窗函数

1.矩形窗 **肩峰8.95%，阻带最小衰减-21dB.**
2.三角形窗（Bartlett Window ）
（巴特利特窗）
3.汉宁窗（Hanning Window）
（余弦平方窗，升余弦窗）
4.海明窗（Hamming Window）
（改进的升余弦窗）
5.布拉克曼窗（Blackman Window）
（二阶升余弦窗）
6.凯泽窗(Kaiser Window)

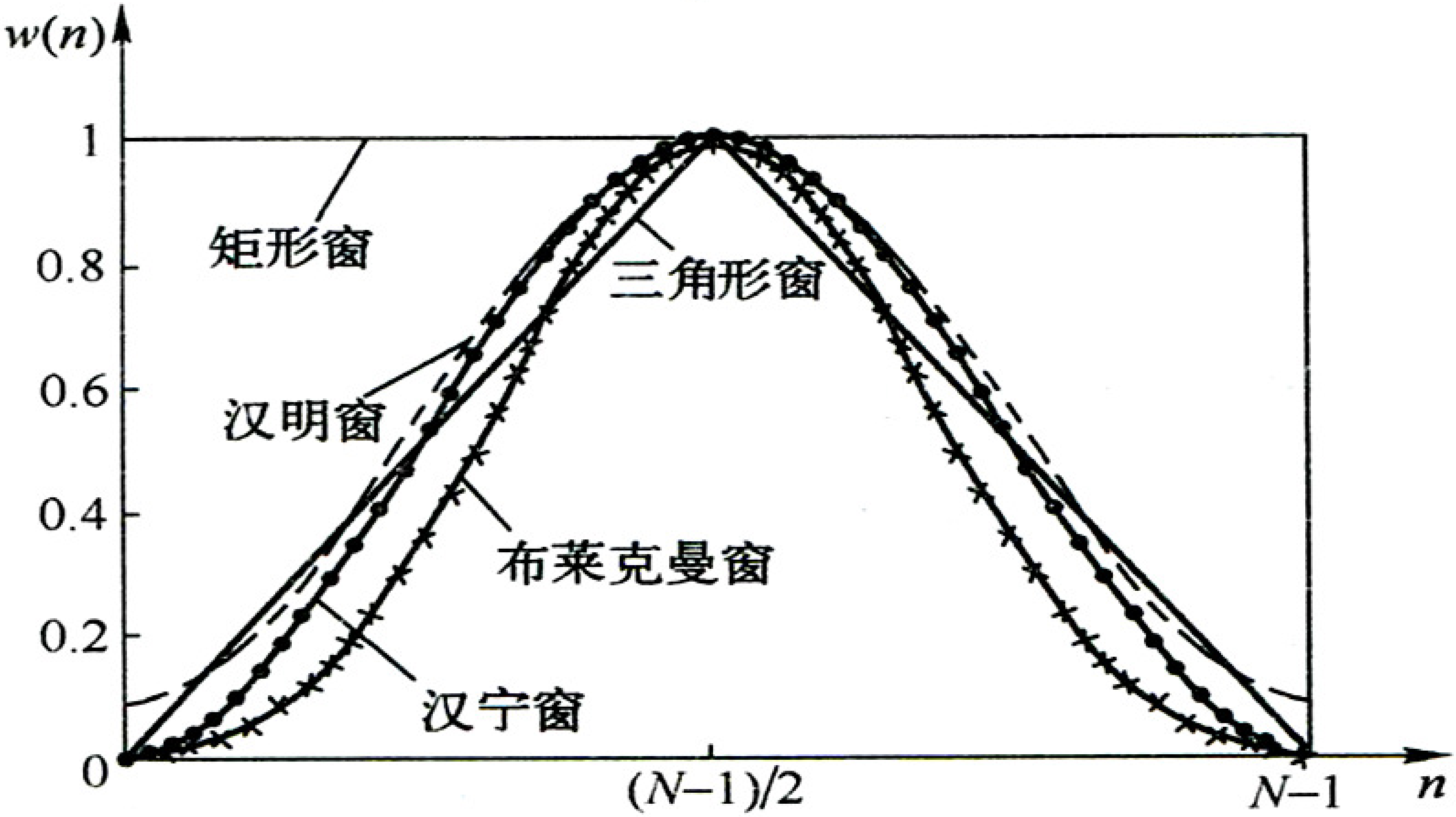


图 7.11　五种常用的窗函数

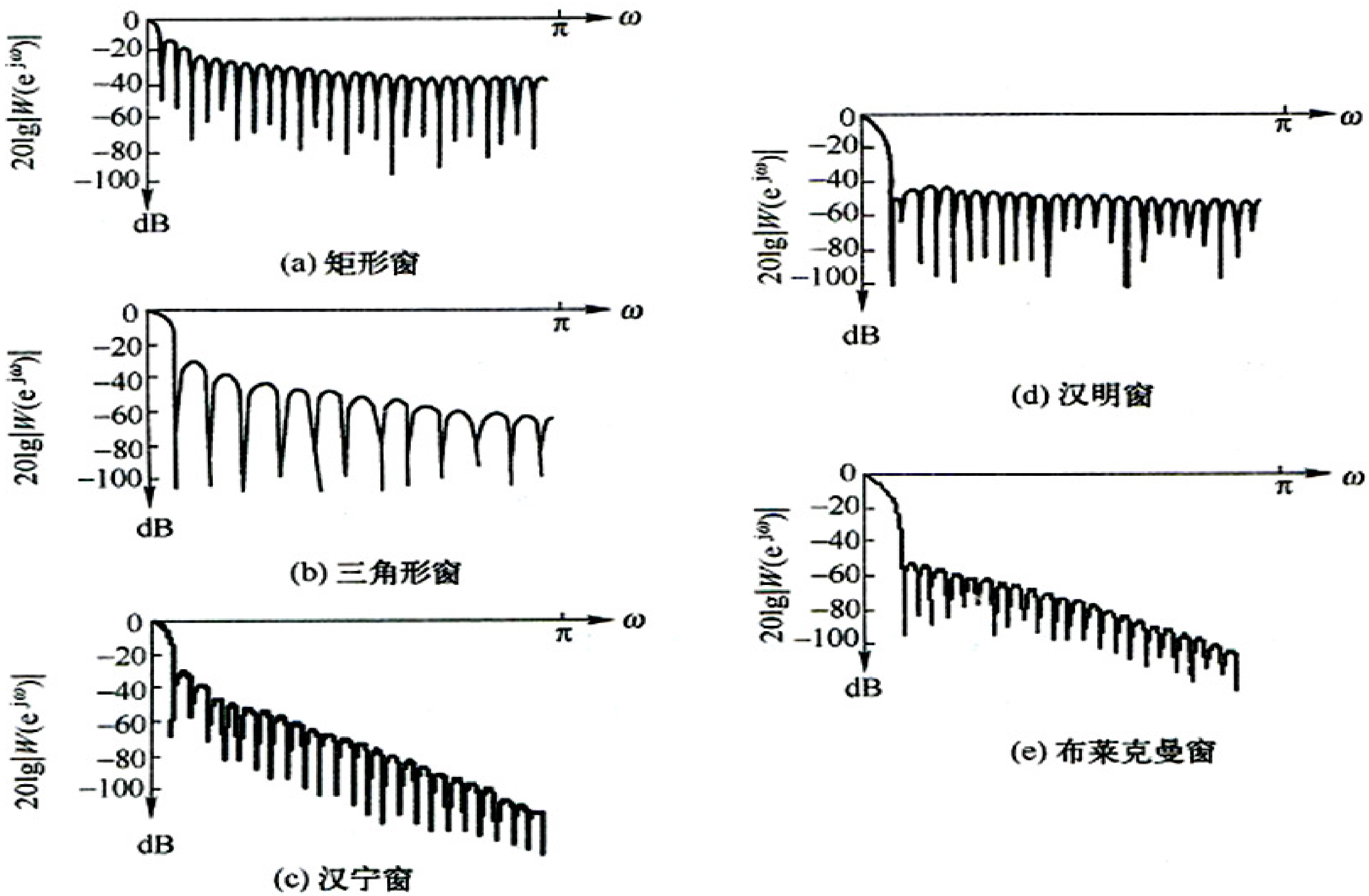


图 7.12　图 7.11 的各种窗函数的傅里叶变换（$N=51$）

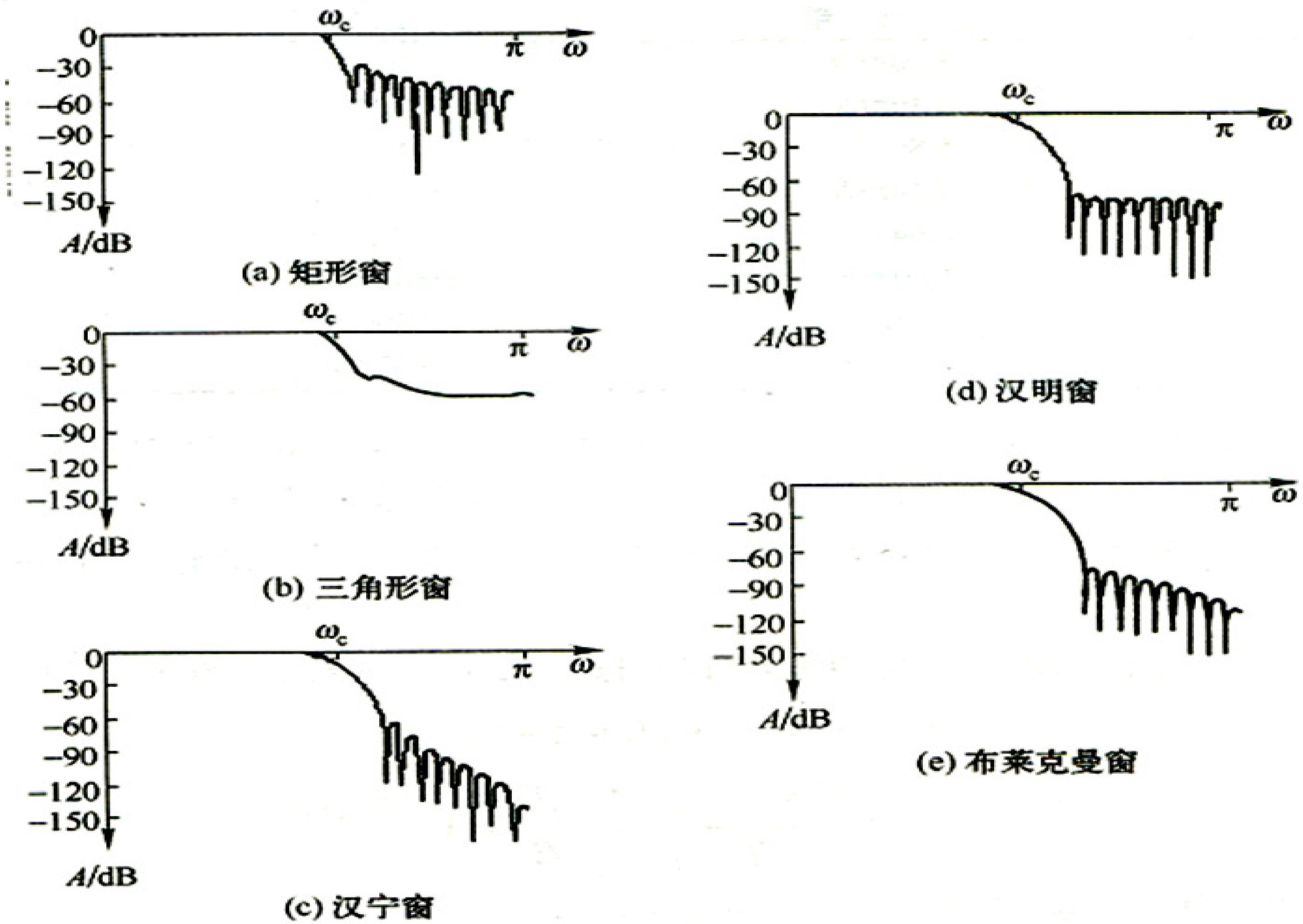


图 7.13　理想低通滤波器加窗后的幅度响应（$N=51$），　$A=20\lg|H(\omega)/H(0)|$

表 7.3　6 种窗函数的基本参数比较

窗　函　数	窗谱性能指标		加窗后滤波器性能指标	
	旁瓣峰值(dB)	主瓣宽度 $2\pi/N$	过渡带宽 $\Delta\omega/(2\pi/N)$	阻带最小衰减(dB)
矩形窗	−13	2	0.9	−21
三角形窗	−25	4	2.1	−25
汉宁窗	−31	4	3.1	−44
汉明窗	−41	4	3.3	−53
布莱克曼窗	−57	6	5.5	−74
凯泽窗 ($\beta=7.865$)	−57		5	−80

窗函数法的设计步骤

- 步骤一：根据给定指标确定理想低通数字滤波器的截止频率，以及相应的理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$，其相位响应为零；

- 步骤二：根据下式计算理想低通系统的单位脉冲响应序列 $h_d(n)$：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- 步骤三：确定滤波器阶数 N，将 $h_d(n)$ 向右平移 $(N-1)/2$，加窗得到 $h(n)$：

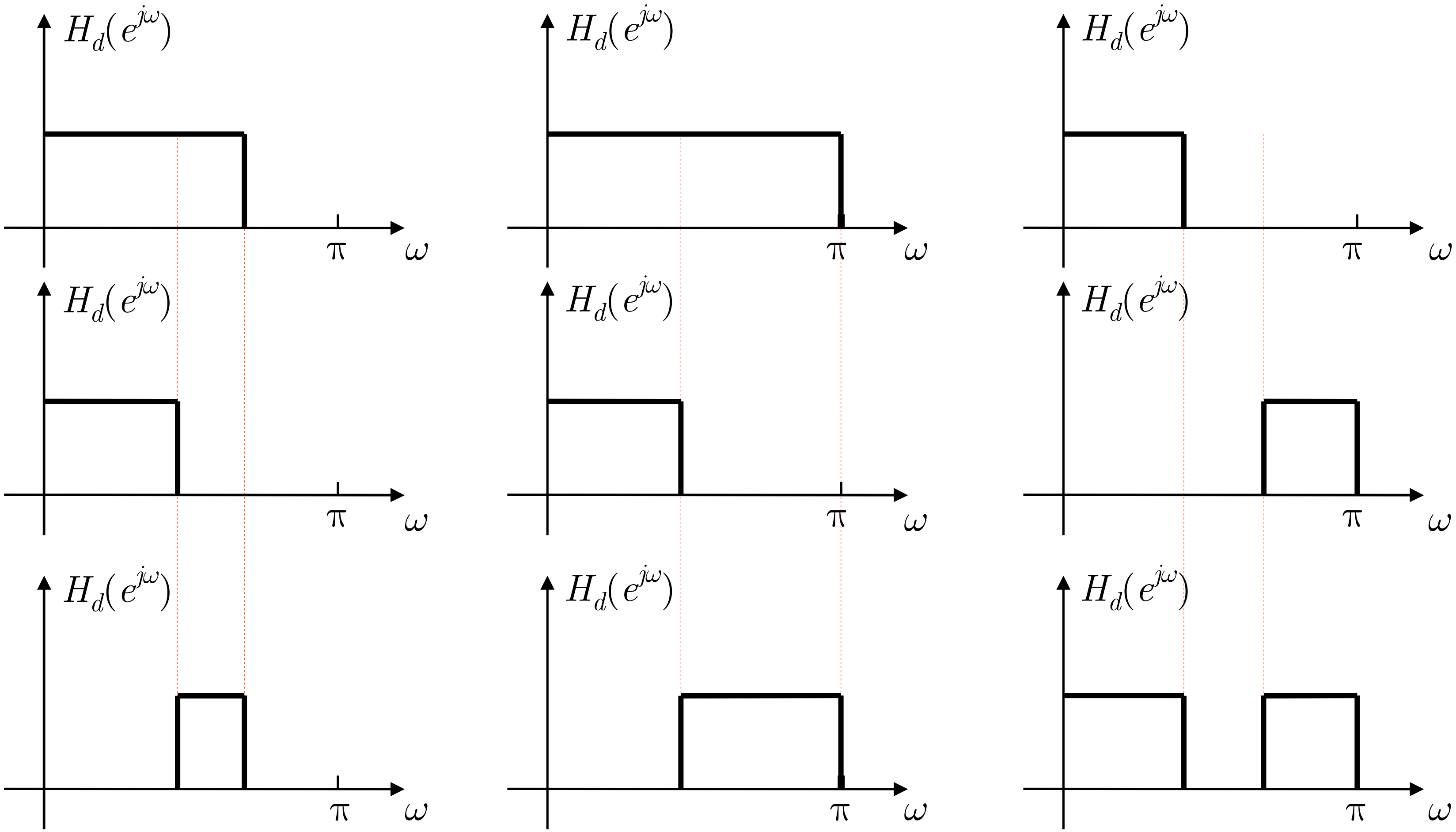
$$h(n) = w(n)h_d[n-(N-1)/2]$$

这样，实际频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W[e^{j(\omega-\theta)}]d\theta$$

- 步骤四：检验结果，如果不满足指标要求，则返回步骤三，重新选择窗长或窗形进行设计，直到满足要求为止

低通到高通、带通、带阻

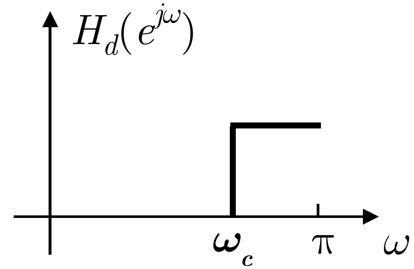


带通　　高通　　带阻

线性相位FIR高通滤波器的设计公式

— 理想高通的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & \omega_c \le |\omega| \le \pi \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \alpha = \frac{N-1}{2}$$



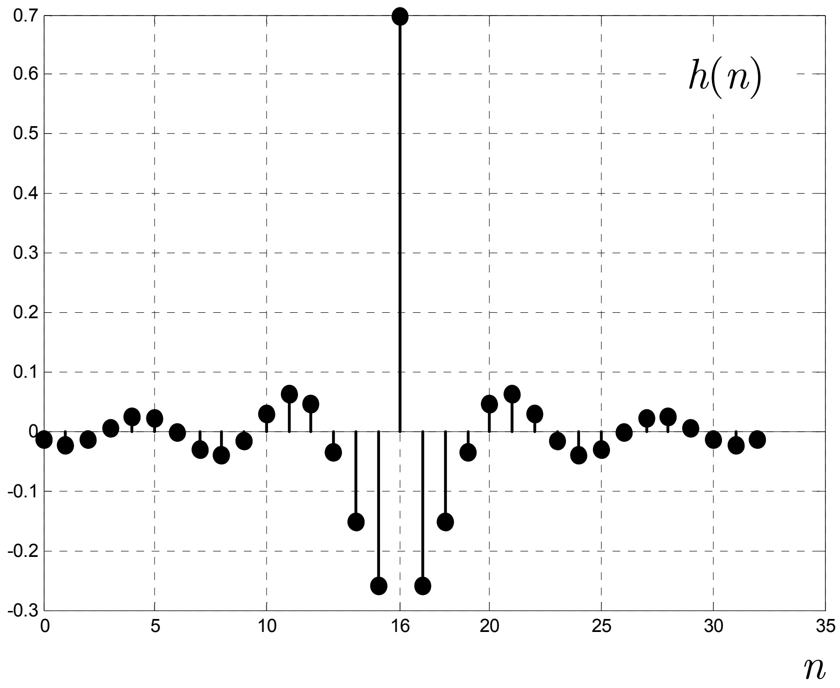
其单位抽样响应：

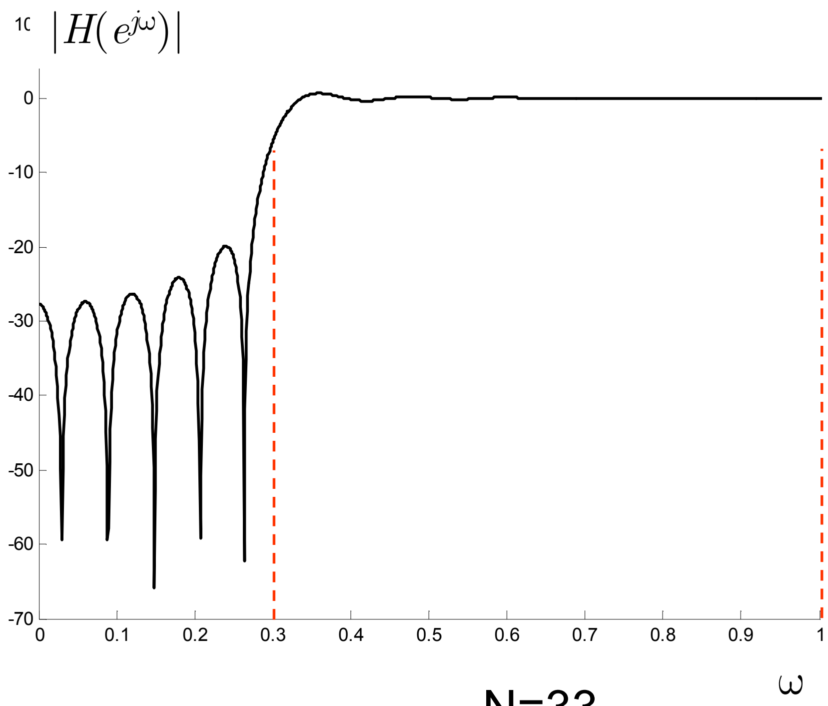
$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\alpha)}\left\{\sin[\pi(n-\alpha)] - \sin[\omega_c(n-\alpha)]\right\} & n \ne \alpha \\ \dfrac{1}{\pi}(\pi - \omega_c) & n = \alpha \end{cases}$$

高通滤波器(ω_c) = 全通滤波器 − 低通滤波器(ω_c)

$$\frac{\sin[\pi(n-16)]-\sin[0.3\pi(n-16)]}{\pi(n-16)}$$



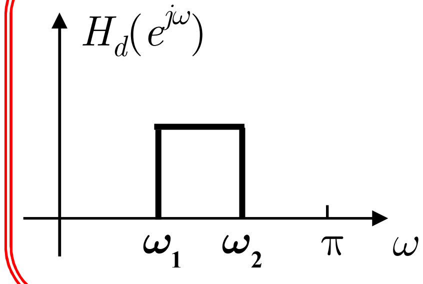


N=33
0.3π

线性相位FIR带通滤波器的设计公式

— 理想带通的频响：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & 0<\omega_1\le|\omega|\le\omega_2<\pi \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \alpha=\frac{N-1}{2}$$



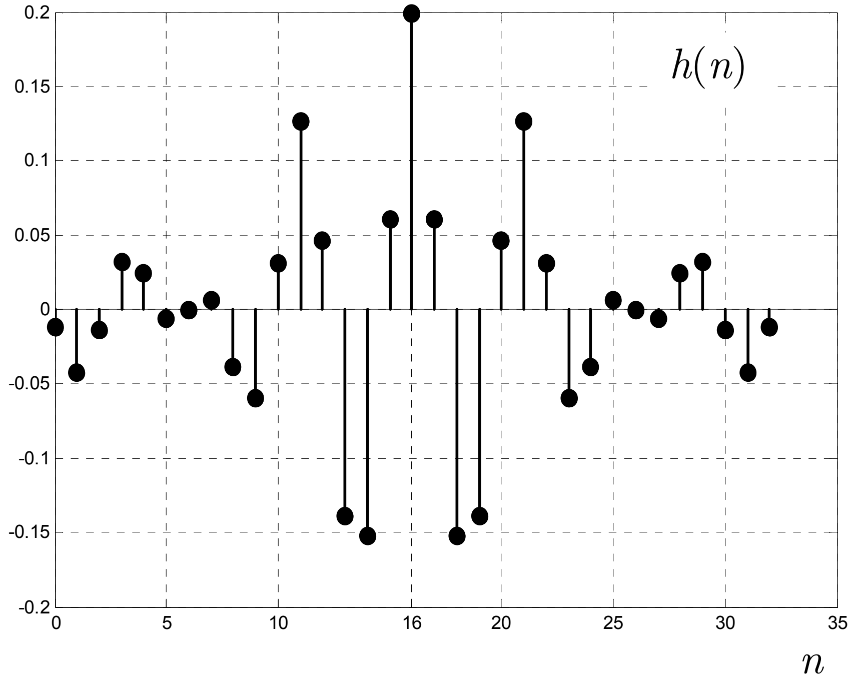
其单位抽样响应：

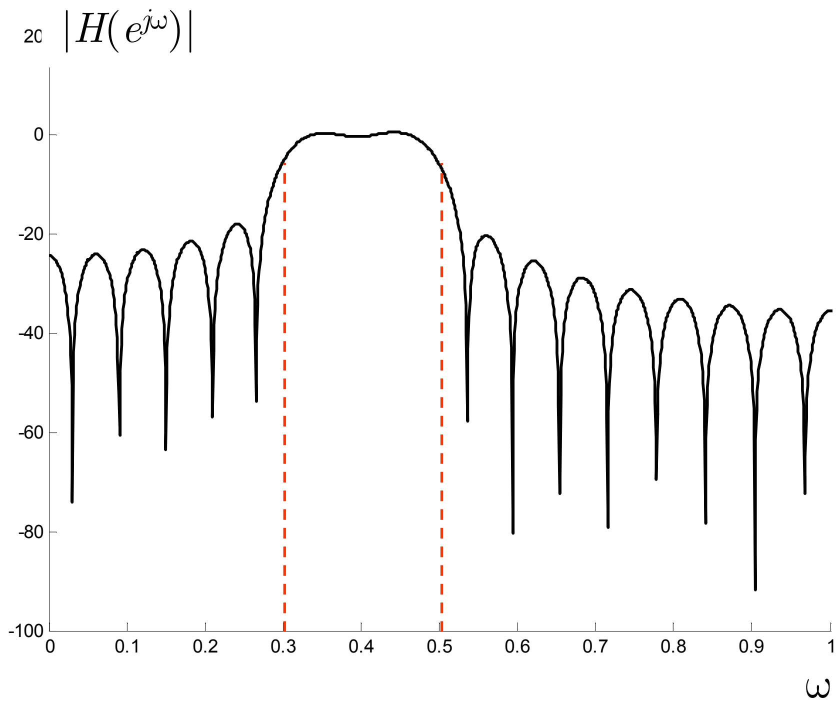
$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega+\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega\right]$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\alpha)}\left\{\sin\left[\omega_2(n-\alpha)\right]-\sin\left[\omega_1(n-\alpha)\right]\right\} & n\ne\alpha \\ \dfrac{1}{\pi}(\omega_2-\omega_1) & n=\alpha \end{cases}$$

带通滤波器(ω_1,ω_2) = 低通滤波器(ω_2) − 低通滤波器(ω_1)

$$\frac{\sin[0.5\pi(n-16)]-\sin[0.3\pi(n-16)]}{\pi(n-16)}$$





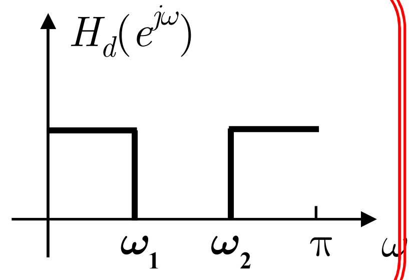
N=33

0.3π, 0.5π

线性相位FIR带阻滤波器的设计公式

— 理想带阻的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & 0 \le |\omega| \le \omega_1, \omega_2 \le |\omega| \le \pi \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \alpha = \frac{N-1}{2}$$



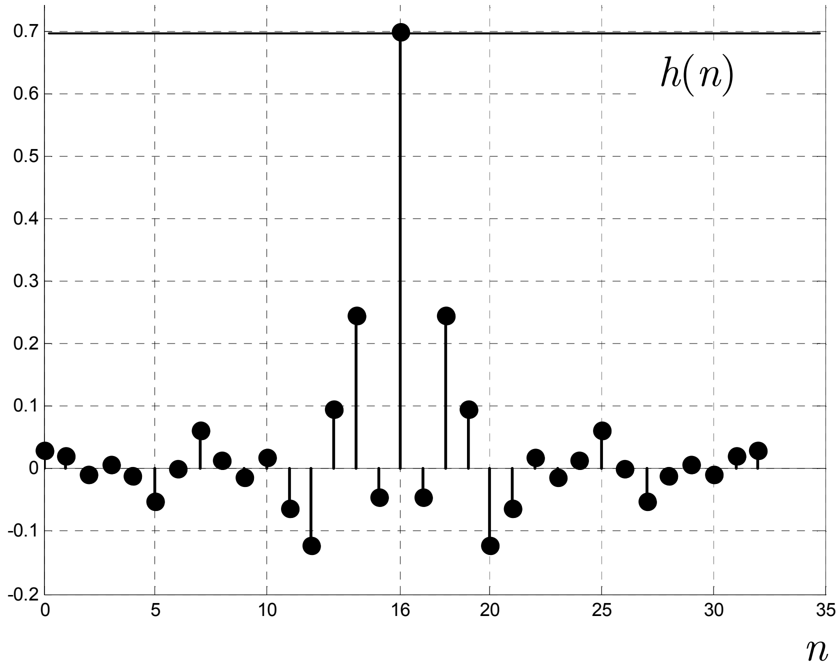
其单位抽样响应：

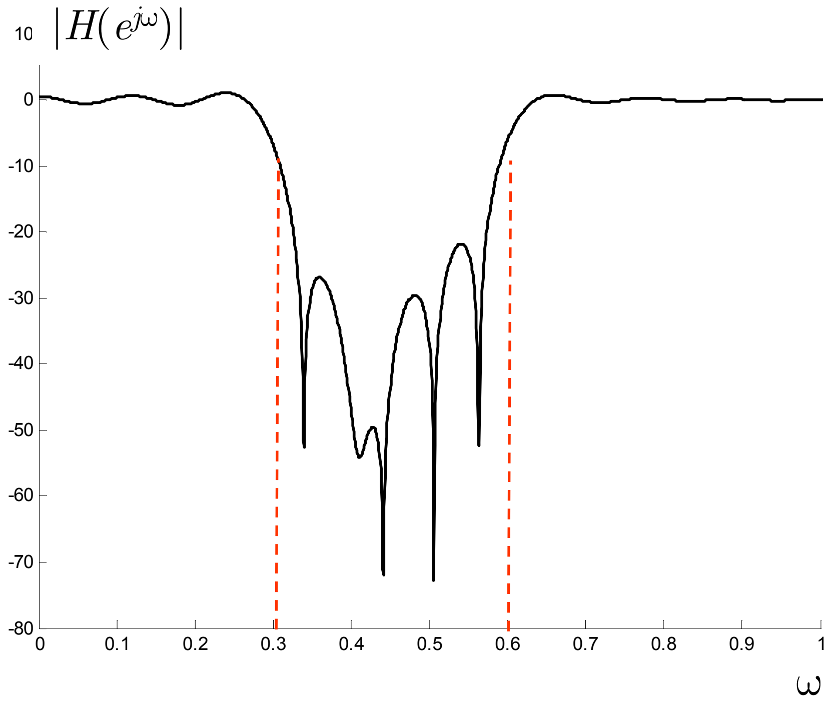
$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_2} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega + \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega + \int_{\omega_2}^{\pi} e^{j\omega(n-\alpha)}d\omega\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\alpha)}\left\{\sin\left[\pi(n-\alpha)\right] + \sin\left[\omega_1(n-\alpha)\right] - \sin\left[\omega_2(n-\alpha)\right]\right\} & n \ne \alpha \\ \dfrac{1}{\pi}\left(\pi + \omega_1 - \omega_2\right) & n = \alpha \end{cases}$$

$$\text{带阻滤波器}(\omega_1, \omega_2) = \text{高通滤波器}(\omega_2) + \text{低通滤波器}(\omega_1)$$

$$\frac{\sin[\pi(n-16)]+\sin[0.3\pi(n-16)]-\sin[0.6\pi(n-16)]}{\pi(n-16)}$$



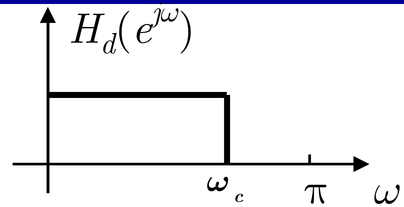


N=33

0.3π, 0.6π

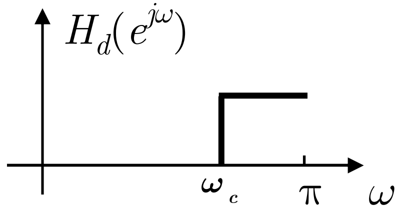
低通滤波器(ω_c) （要求掌握）

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(n-\alpha)}\sin[\omega_c(n-\alpha)] & n\neq\alpha\\[2ex] \dfrac{\omega_c}{\pi} & n=\alpha\end{cases}$$



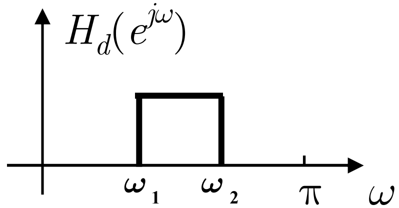
高通滤波器(ω_c) = 全通滤波器 − 低通滤波器(ω_c)

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(n-\alpha)}\left\{\sin[\pi(n-\alpha)]-\sin[\omega_c(n-\alpha)]\right\} & n\neq\alpha\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}(\pi-\omega_c) & n=\alpha\end{cases}$$



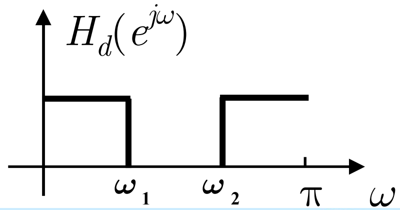
带通滤波器(ω_1,ω_2) = 低通滤波器(ω_2) − 低通滤波器(ω_1)

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(n-\alpha)}\left\{\sin[\omega_2(n-\alpha)]-\sin[\omega_1(n-\alpha)]\right\} & n\neq\alpha\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}(\omega_2-\omega_1) & n=\alpha\end{cases}$$



带阻滤波器(ω_1,ω_2) = 高通滤波器(ω_2) + 低通滤波器(ω_1)

$$h_d(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\left\{\sin[\pi(n-\alpha)]+\sin[\omega_1(n-\alpha)]-\sin[\omega_2(n-\alpha)]\right\} & n\neq\alpha\\[2ex] \dfrac{1}{\pi}(\pi+\omega_1-\omega_2) & n=\alpha\end{cases}$$



➢ 频率取样设计方法

- 窗函数方法是一种时域方法，它从预期频率特性出发，用该特性的付氏反变换$h_d(n)$作为滤波器系数。由于要使它实现，并改善有关特性而加窗截断，以有限长h(n)近似理想的$h_d(n)$。（实际滤波器的频率响应偏离理想值，产生了通带波纹、阻带衰减和过渡带）

- 频率取样法从频域出发，只选取理想频率响应（周期连续函数）的一些离散值，再通过内插得到实际可实现的频率响应（如果在单位圆上等间距采样，则此时从时域上看，滤波器的脉冲响应是理想值的周期延拓）。

设计原理

H(k) 是所要求的频率响应$H_d(e^{jw})$的N个等间隔取样值。

$$
\begin{aligned}
H(k) &= H_d(k) \\
&= H_d(z)\Big|_{z=e^{j(\frac{2\pi}{N})k}} \\
&= H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(\frac{2\pi}{N})k}
\end{aligned}
$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \Rightarrow H_d(z)$$

$$
\begin{cases}
H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\Phi_k(z) \\
\Phi_k(z) = \frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}
\end{cases}
$$

内插函数

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n} \quad =\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\right]z^{-n}$$

$$\begin{cases} H(z)=\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\Phi_k(z) \\ \Phi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \end{cases}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}\left(W_N^{-k}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-\underbrace{\boxed{W_N^{-kN}}}_{=1}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$z = e^{j\omega}$$

$$\begin{cases} H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\Phi_k\left(e^{j\omega}\right) \\ \Phi_k\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j(\omega-k\frac{2\pi}{N})}} \end{cases} \Rightarrow H_d\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$\begin{cases} H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\Phi_k(z) \\ \Phi_k(z) = \frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \end{cases}$$

$$\Phi_k\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N}\right)} e^{-j(\frac{N\omega}{2}-\frac{\omega}{2}+\frac{\pi k}{N})}$$

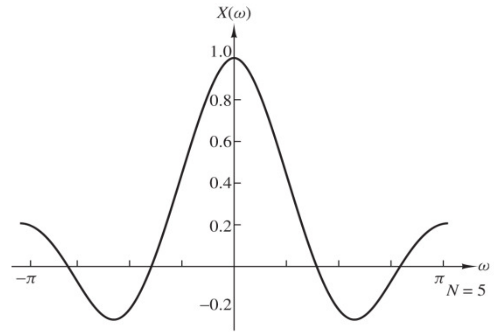


Figure 7.1.3 Plot of the function $[\sin(\omega N/2)]/[N\sin(\omega/2)]$.

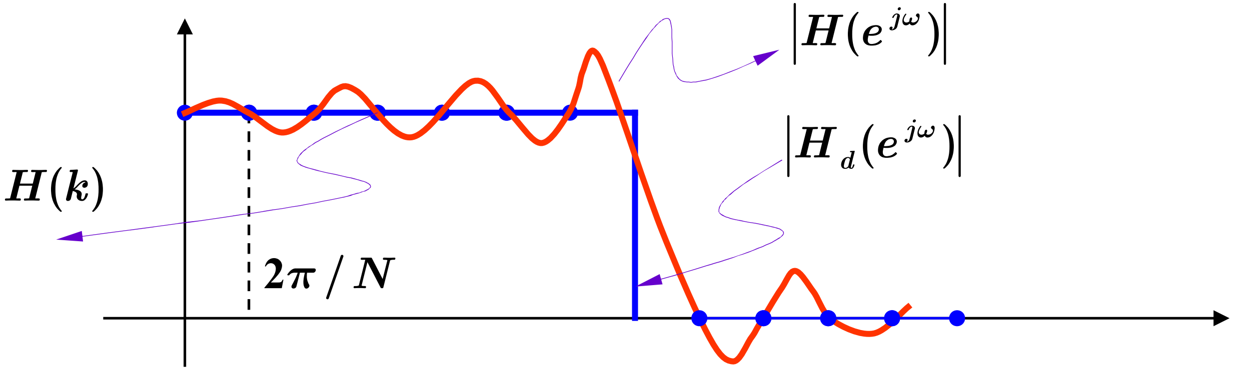
$$\Phi_k\left(e^{j\omega}\right) = \Phi\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) \Rightarrow \Phi(\omega) = \frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$ 内插函数

$$\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\Phi\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\left[\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N}\right)} e^{-j\frac{\pi k}{N}}\right]$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\Phi\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\left[\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N}\right)}e^{-j\frac{\pi k}{N}}\right]$$

$$s(\omega,k) = \frac{1}{N}\left[\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N}\right)}e^{-j\frac{\pi k}{N}}\right] \Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)s(\omega,k)}$$

内插函数



- 抽样点上，频率响应严格相等
- 抽样点之间，加权内插函数的延伸叠加
- 变化越平缓，内插越接近理想值，逼近误差较小

抽样值确定

若希望把预期频率特性的付氏反变换作为滤波器系数，则应满足下面几个条件：

（1）预期频率特性的取样点数应等于滤波器阶数 N，并在单位圆上等间隔分布；

（2）为保证滤波器系数为实数，单位抽样序列应为实序列，取样频率特性应具有圆周共轭对称性；

（3）为使频率特性具有线性相位，其幅度特性和付氏反变换之序列应为中心对称或中心反对称结构

线性相位约束条件

对第一类线性相位滤波器，h(n)为偶对称，N为奇数

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

$$\begin{cases} H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos[\omega n] \\ \theta(\omega) = -\left(\dfrac{N-1}{2}\right)\omega \end{cases}$$

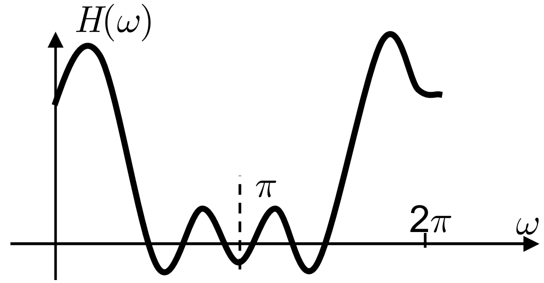
$$H(k) = H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1$$

$$\begin{cases} H(k) = H_k e^{j\theta_k} \\ \theta_k = \theta(\omega)\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = -\left(\dfrac{N-1}{2}\right)\dfrac{2\pi}{N}k \end{cases}$$

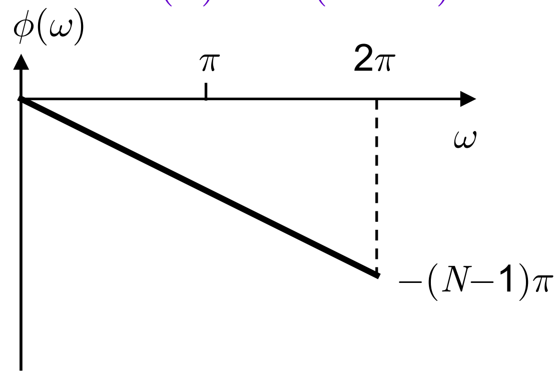
$$H(\omega) = H(2\pi-\omega)$$

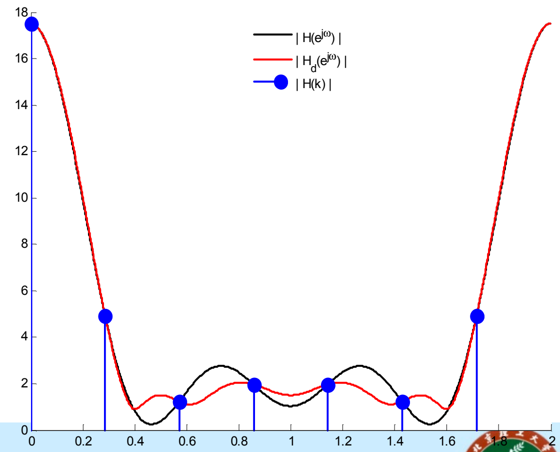
$$\Rightarrow \boxed{H_k = H_{N-k}}$$

N为偶数： $H_k = -H_{N-k}$

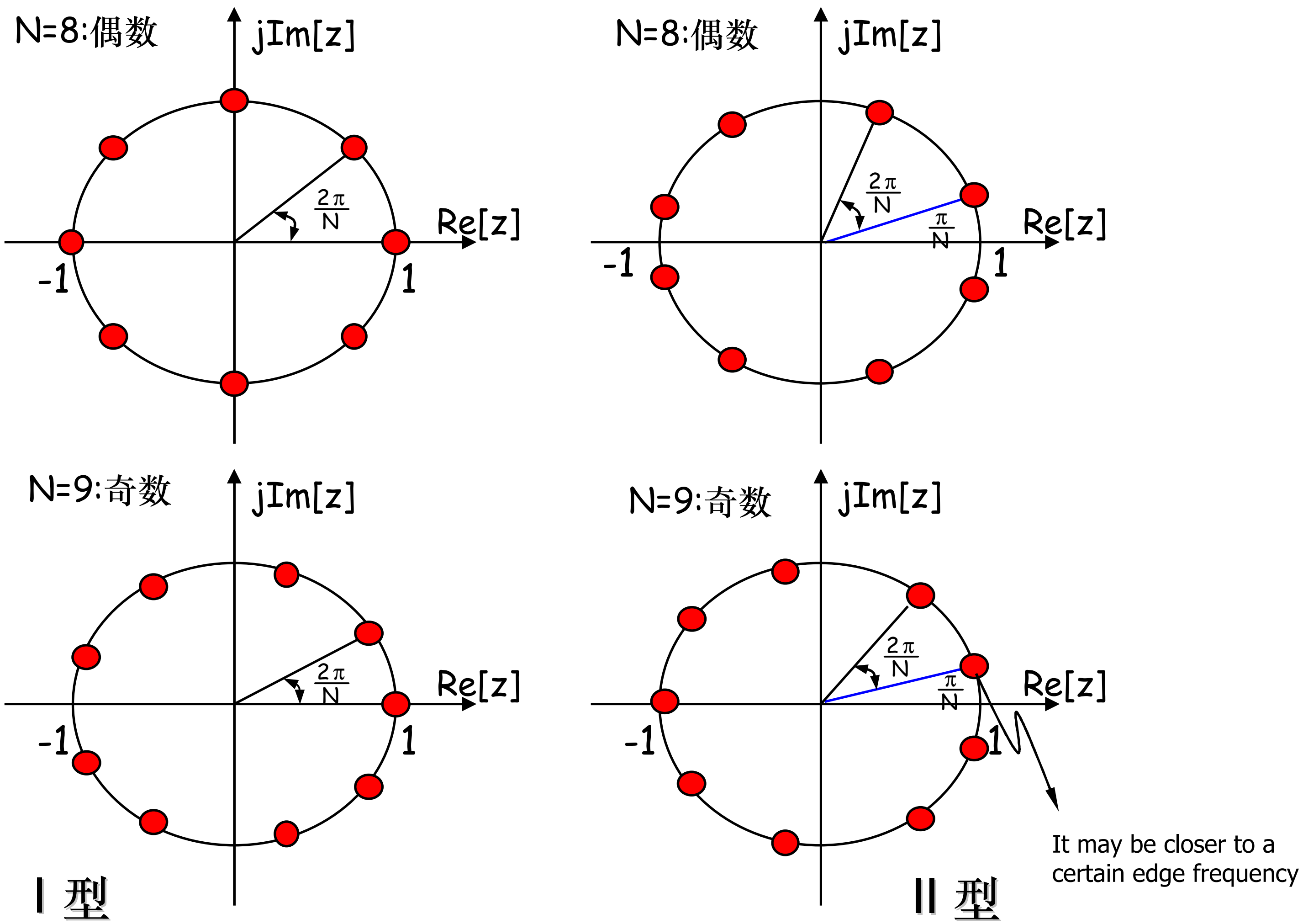


$H(\omega) = H(2\pi-\omega)$



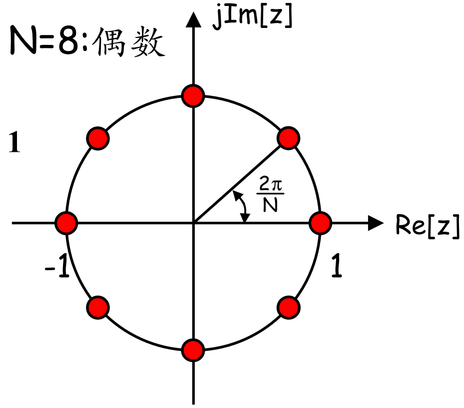


频率抽样两种方法


N=8:偶数
jIm[z]
Re[z]
$\frac{2\pi}{N}$
-1
1
N=8:偶数
jIm[z]
Re[z]
$\frac{2\pi}{N}$
$\frac{\pi}{N}$
-1
1
N=9:奇数
jIm[z]
Re[z]
$\frac{2\pi}{N}$
-1
1
N=9:奇数
jIm[z]
Re[z]
$\frac{2\pi}{N}$
$\frac{\pi}{N}$
-1
1
It may be closer to a certain edge frequency
I 型
II 型

1）第一种频率抽样

$$H(k)=H_d(k)=H_d(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

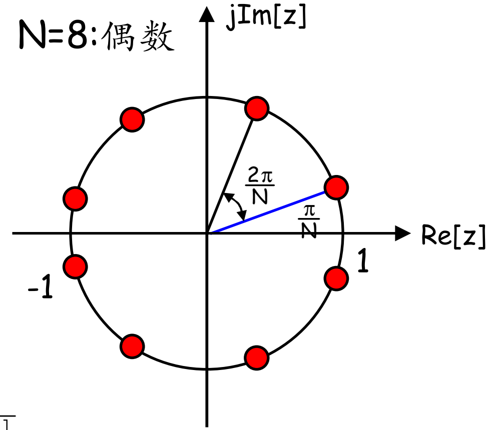


系统函数： $$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

频率响应： $$H(e^{j\omega})=\frac{1}{N}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)e^{-j\frac{\pi k}{N}}\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N}\right)}$$

2）第二种频率抽样

$$H(k)=H_d(z)\Big|_{z=e^{j(\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{N})}}=H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{N}}\qquad k=0,1,\ldots,N-1$$



系统函数： $$H(z)=\frac{1+z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)}z^{-1}}$$

频率响应： $$H(e^{j\omega})=\frac{\cos\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)e^{-j\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{j\sin\left[\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

线性相位约束条件

第一种抽样方法				
	$h(n)$ 中心偶对称 N 为奇数	$h(n)$ 中心偶对称 N 为偶数	$h(n)$ 中心奇对称 N 为奇数	$h(n)$ 中心奇对称 N 为偶数
幅度约束	$\lvert H(k)\rvert = \lvert H(N-k)\rvert$ $k=0\sim(N-1)/2$	$\lvert H(k)\rvert = \lvert H(N-k)\rvert$ $k=0\sim(N/2-1)$ $\lvert H(N/2)\rvert = 0$	$\lvert H(k)\rvert = \lvert H(N-k)\rvert$ $k=0\sim(N-1)/2$ $\lvert H(0)\rvert = 0$	$\lvert H(k)\rvert = \lvert H(N-k)\rvert$ $k=0\sim(N/2-1)$ $\lvert H(0)\rvert = 0$
相位约束	$\varphi(k) = -\varphi(N-k)$ $= -k(1-N^{-1})\pi$ $k=0\sim(N-1)/2$	$\varphi(k) = -\varphi(N-k)$ $= -k(1-N^{-1})\pi$ $k=0\sim(N/2-1)$	$\varphi(k) = -\varphi(N-k)$ $= \frac{\pi}{2} - k(1-N^{-1})\pi$ $k=0\sim(N-1)/2$	$\varphi(k) = -\varphi(N-k)$ $= \frac{\pi}{2} - k(1-N^{-1})\pi$ $k=0\sim(N/2-1)$ $\varphi(N/2) = 0$

线性相位 FIR 数字滤波器特点

① **时域：**

$$h(n) = \pm h(N-n-1)$$

② **频域：**

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\left(\frac{L}{2}\pi - \frac{N-1}{2}\omega\right)}$$

$$H(z) = (-1)^L z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

— $H(\omega)$ 为实函数

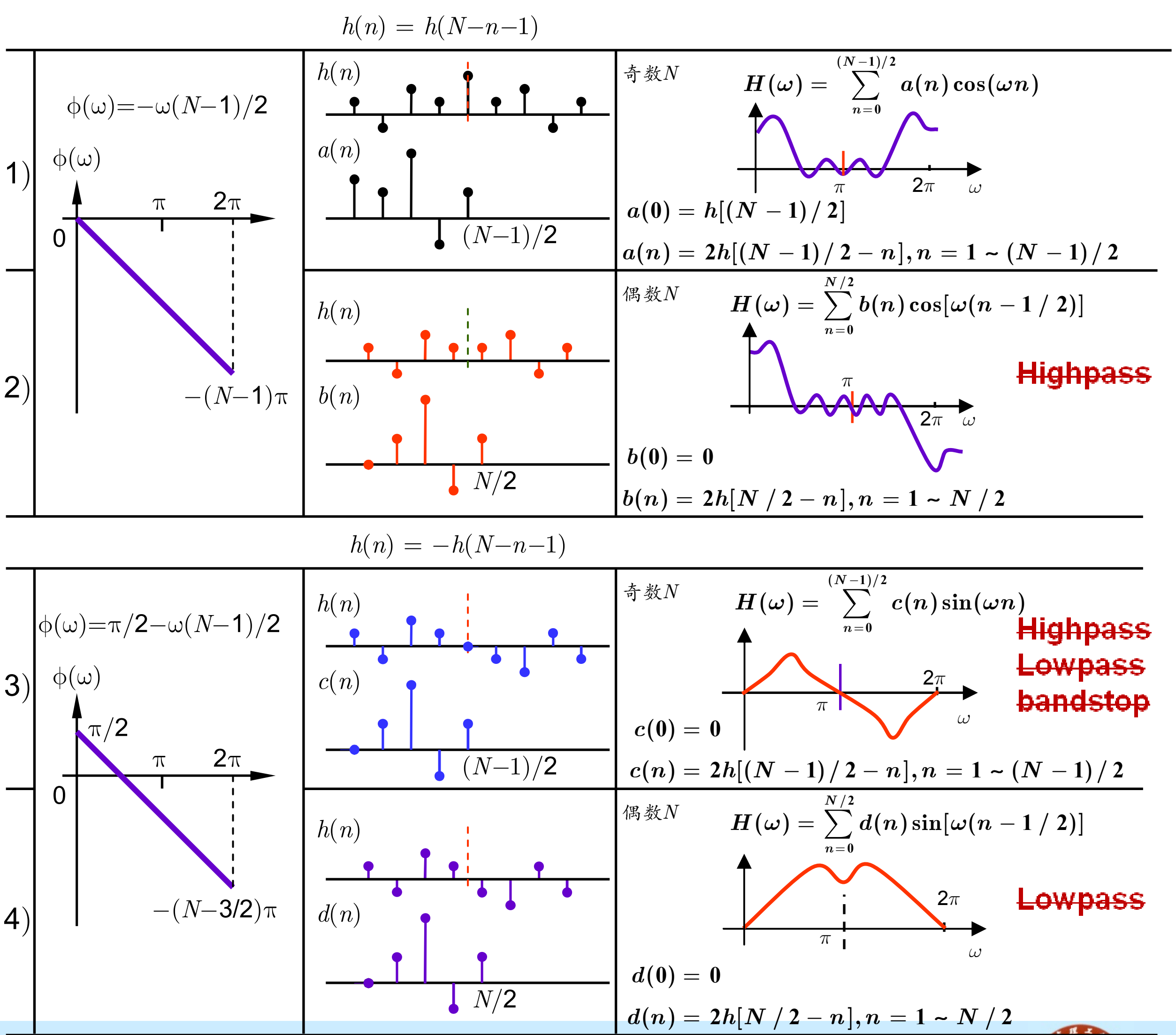
— $h(n)$ 偶对称： $L = 0$

— $h(n)$ 奇对称： $L = 1$

③ **零点：**

成倒数对出现

线性相位FIR滤波器的四种情况



对于第一种抽样方式，当**h(n)为实数**时

$$h(n) = h^*(n)$$

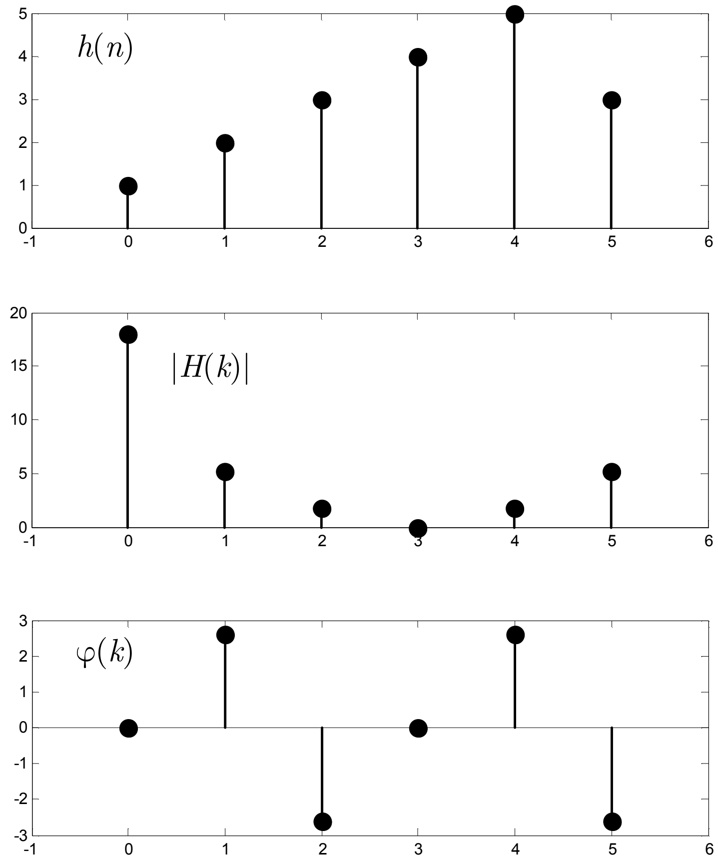
$$H(k) = DFT[h(n)]$$

根据 $H^*(N-k) = DFT[h^*(n)]$

于是 $H(k) = H^*(N-k)$

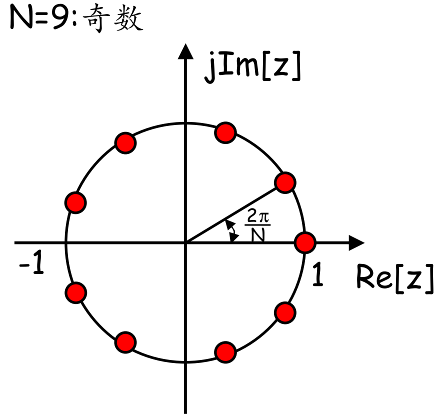
$$\begin{cases} |H(k)| = |H(N-k)| \\ \theta(k) = \arg[H(k)] = -\theta(N-k) \end{cases}$$

以$k = \dfrac{N}{2}$中心

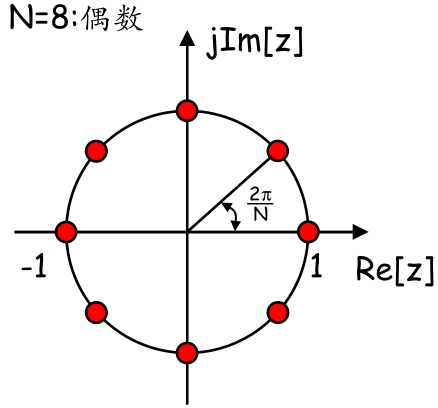


由： $\theta(\omega) = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega$

N为奇数： $\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right) & k = 0,\ldots,\frac{N-1}{2} \\ \frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right) & k = \frac{N+1}{2},\ldots,N-1 \end{cases}$



N为偶数： $\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right) & k = 0,\ldots,\left(\frac{N}{2}-1\right) \\ 0 & k = \frac{N}{2} \\ \frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right) & k = \left(\frac{N}{2}+1\right),\ldots,N-1 \end{cases}$



当 N 为奇数时：

$$H(k)=\begin{cases}|H(k)|e^{-j\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=0,\ldots,\dfrac{N-1}{2}\\ |H(k)|e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=\dfrac{N+1}{2},\ldots,N-1\end{cases}$$

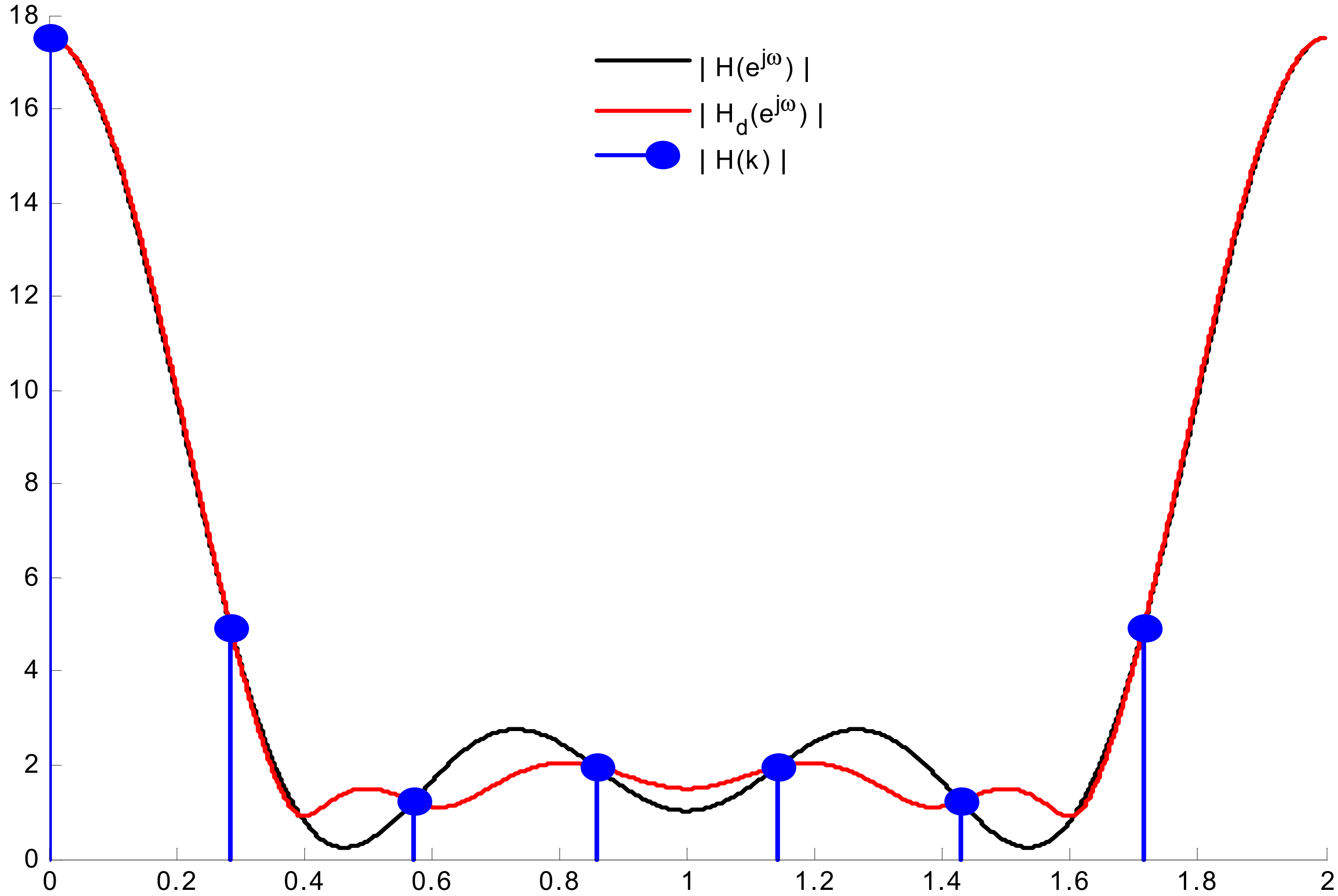
当 N 为偶数时：

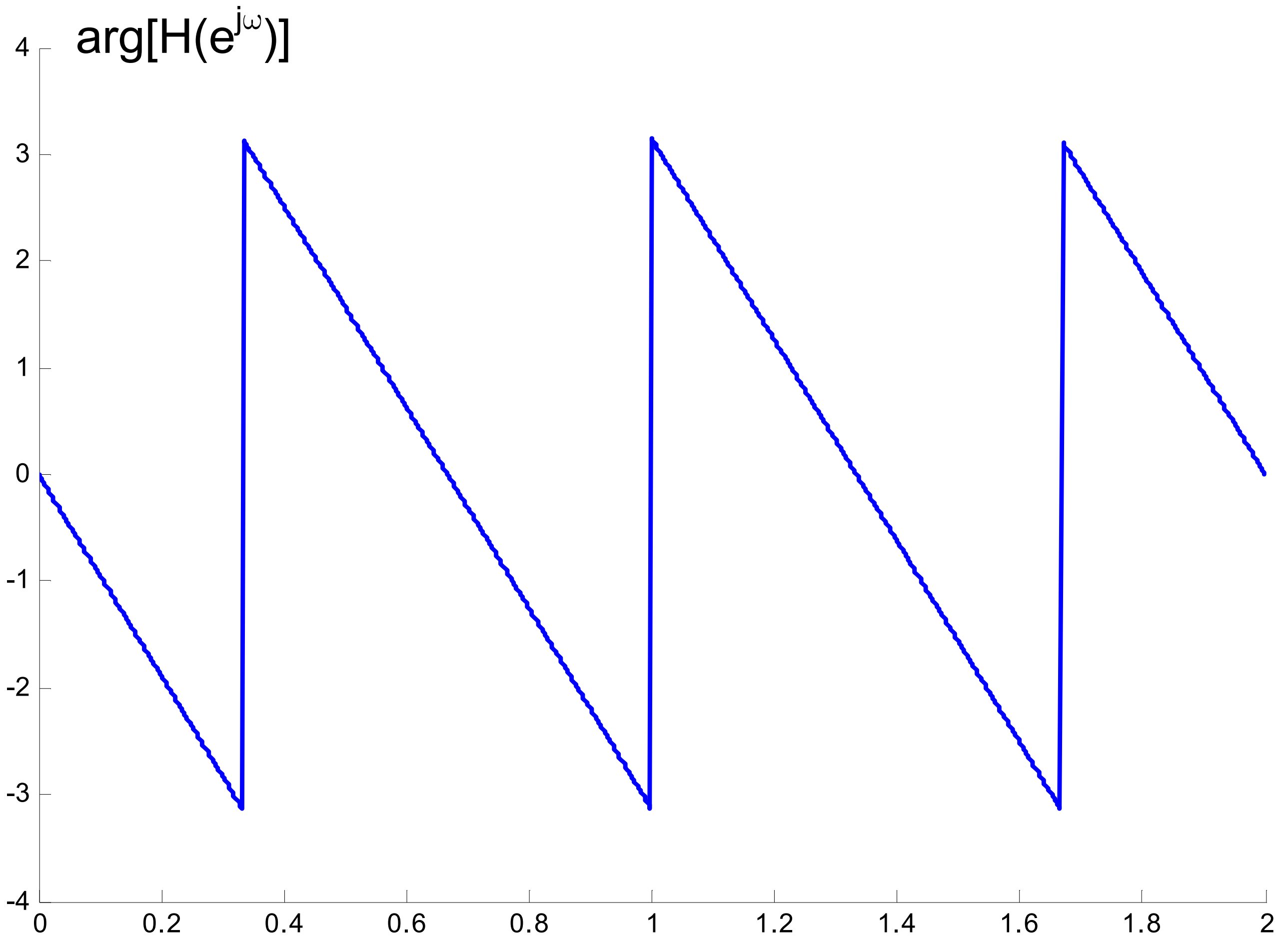
$$H(k)=\begin{cases}|H(k)|e^{-j\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=0,\ldots,\left(\dfrac{N}{2}-1\right)\\ 0 & k=\dfrac{N}{2}\\ |H(k)|e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=\left(\dfrac{N}{2}+1\right),\ldots,N-1\end{cases}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{\frac{|H(0)|\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\sum_{k=1}^{M}\frac{|H(k)|}{N}\left[\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)}+\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)}\right]\right\}$$

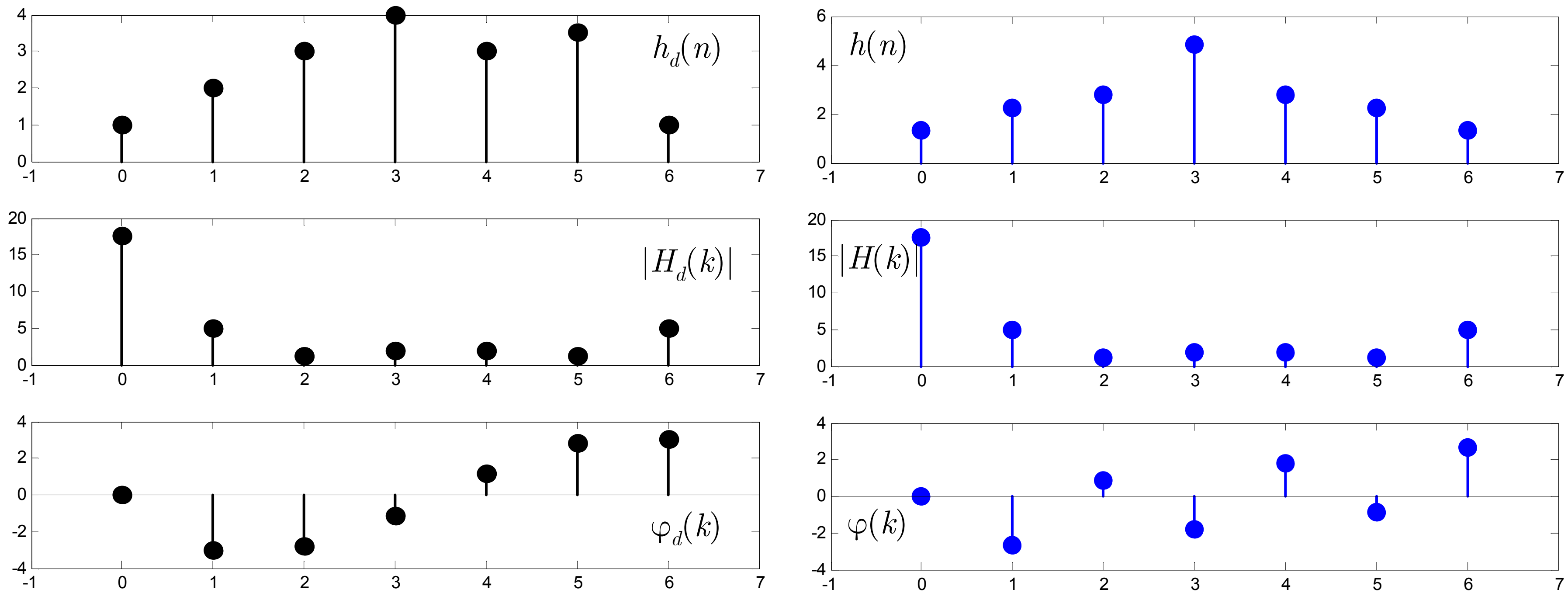
N为奇数$M=(N-1)/2$,　　N为偶数$M=N/2-1$

第一种抽样，偶对称，奇数点 $N = 7$

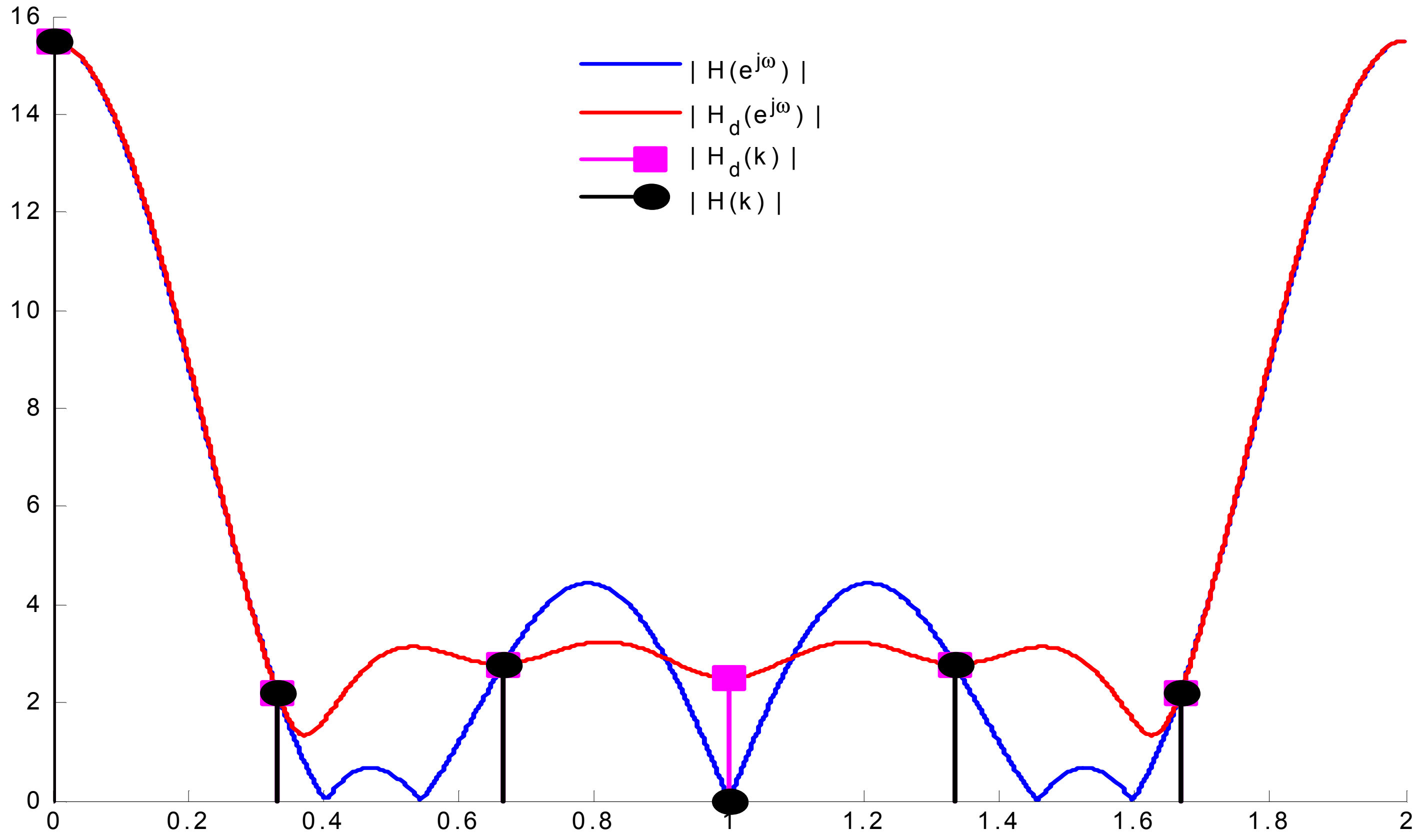




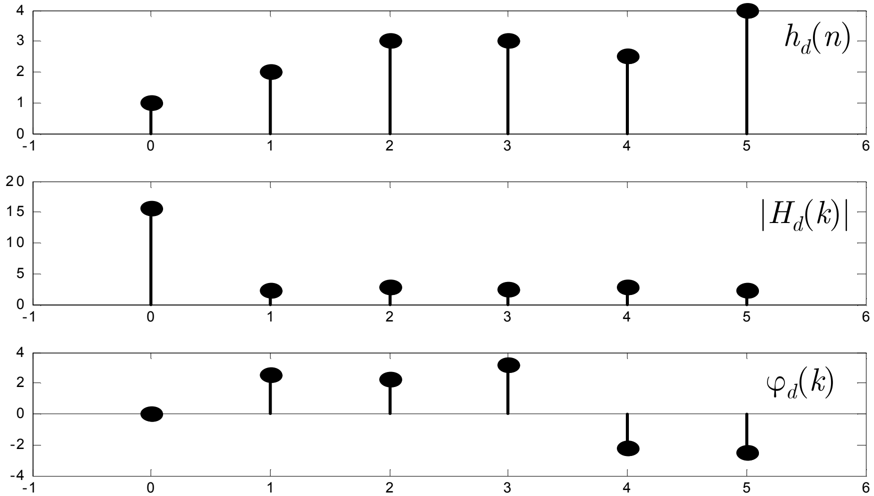
arg[H(e^jω)]
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


$h_d(n)$
$h(n)$
$|H_d(k)|$
$|H(k)|$
$\varphi_d(k)$
$\varphi(k)$

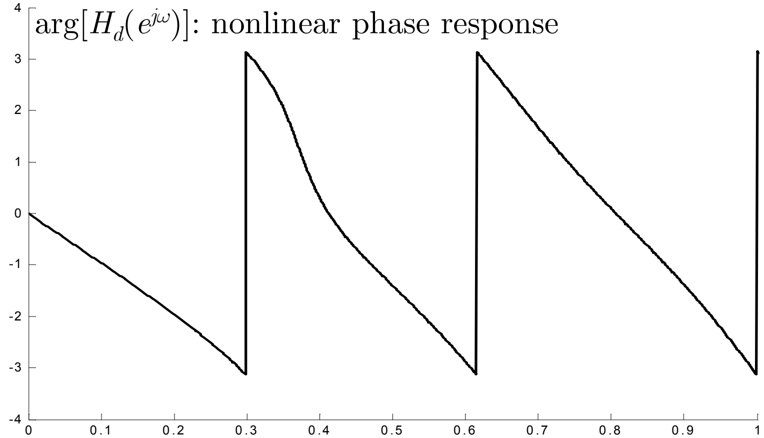
第一种抽样,偶对称,偶数点 $N=6$



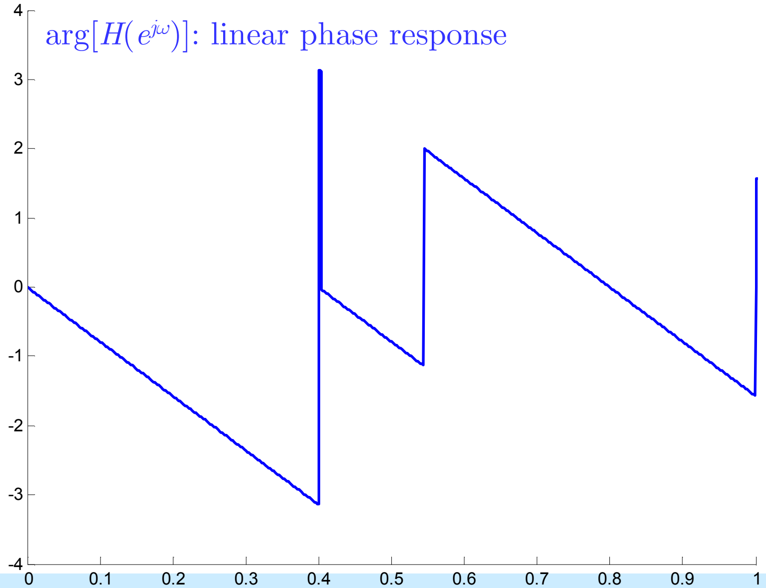
强行置零



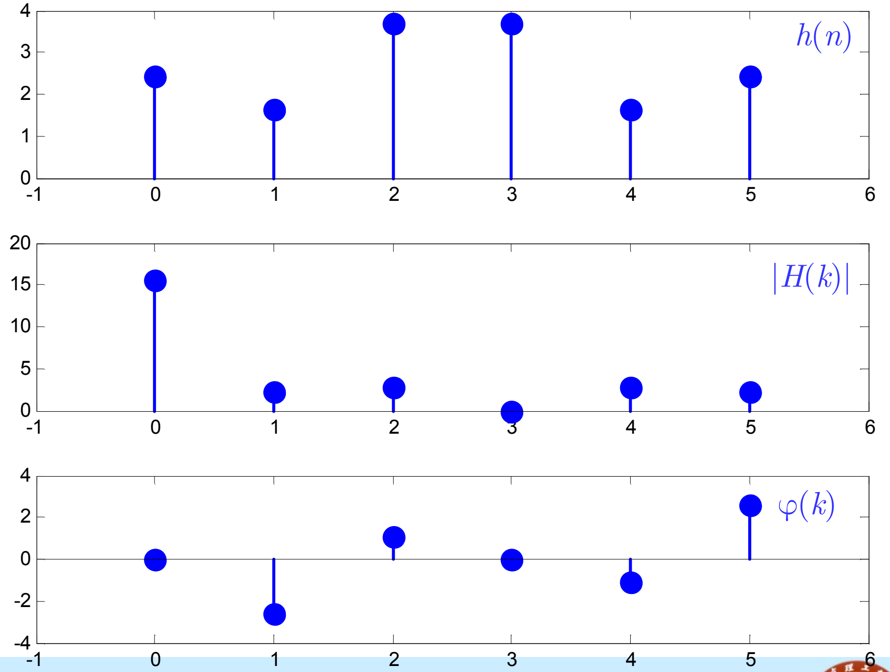
$h_d(n)$
$|H_d(k)|$
$\varphi_d(k)$



$\arg[H_d(e^{j\omega})]$: nonlinear phase response

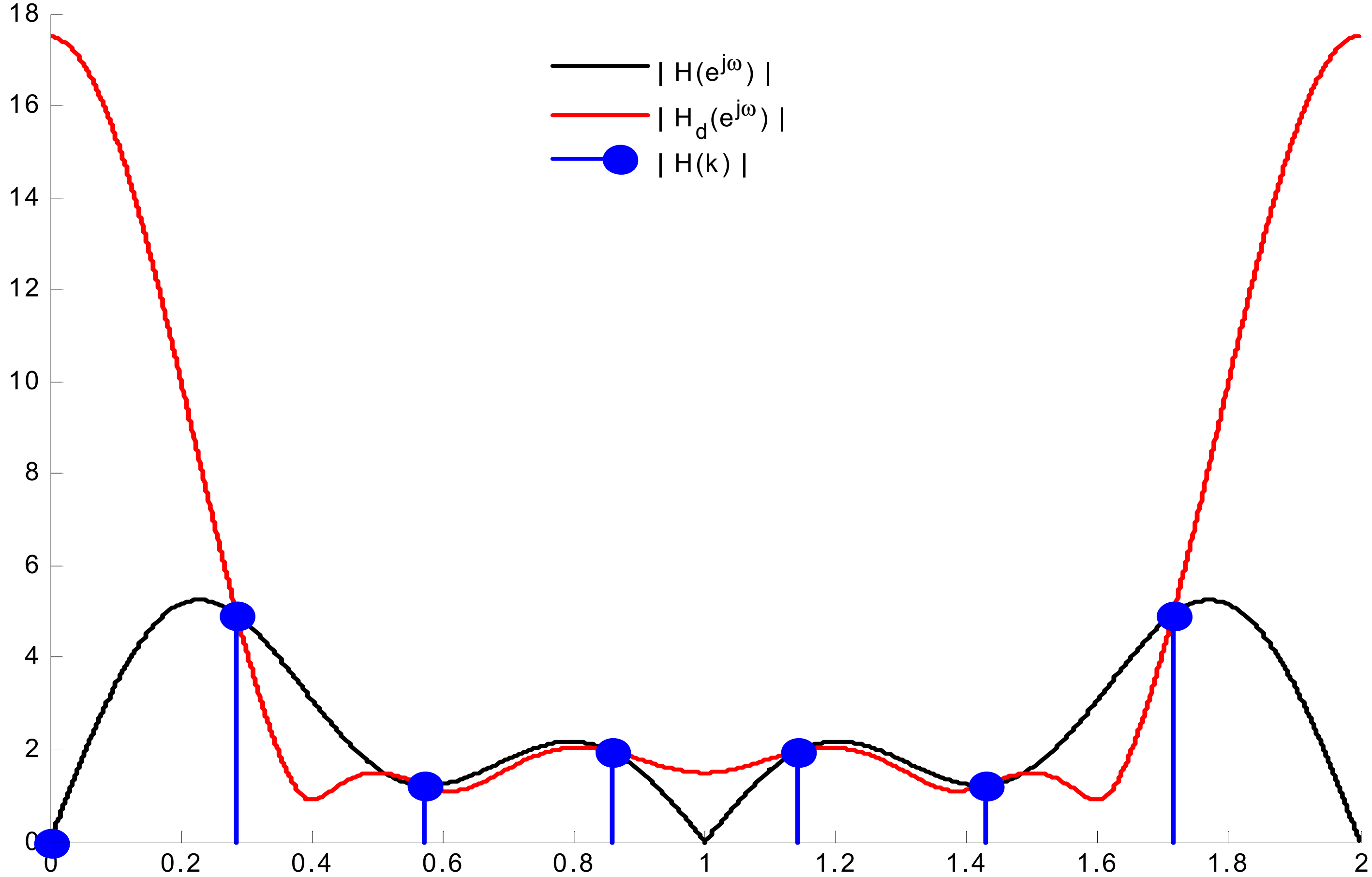


$\arg[H(e^{j\omega})]$: linear phase response

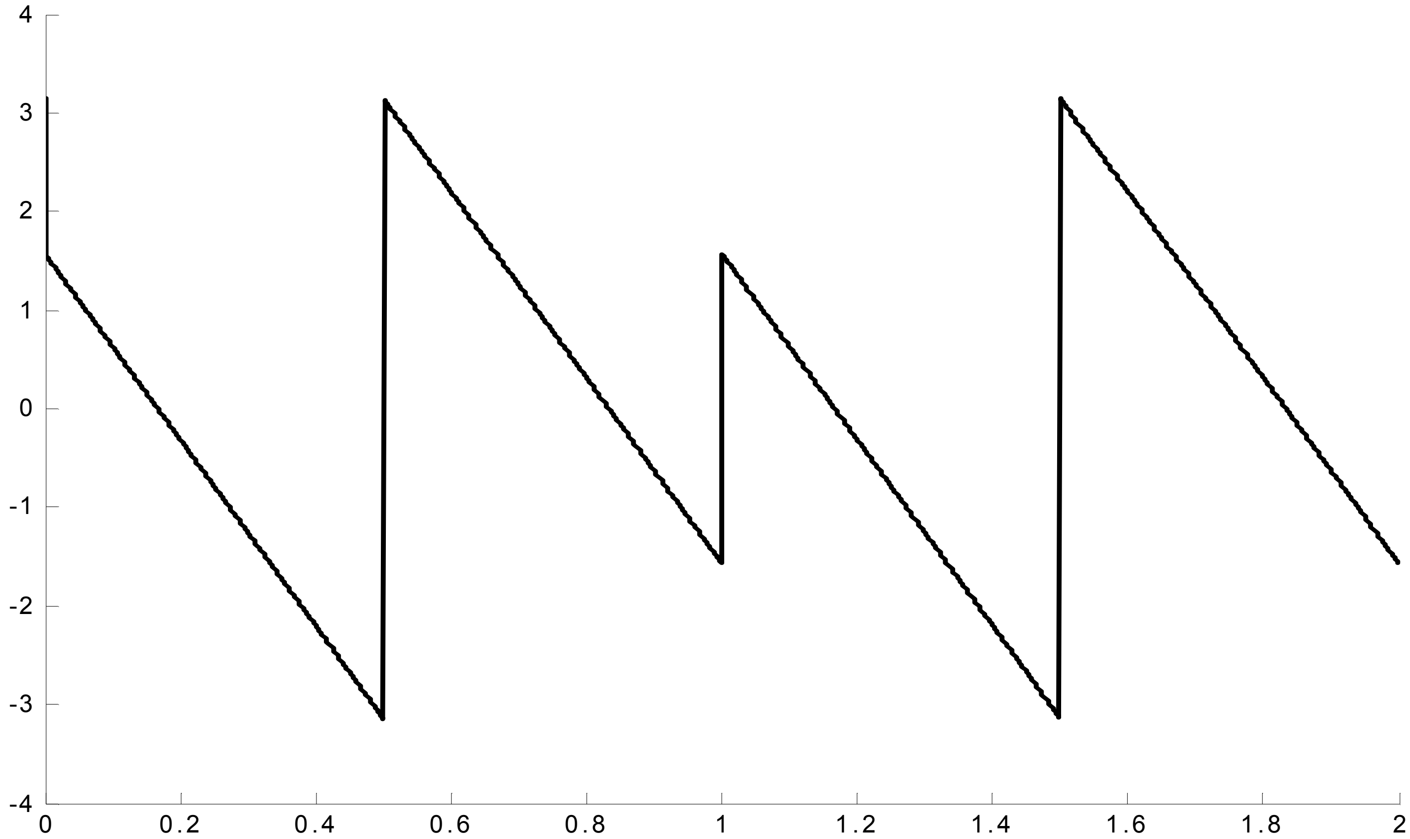


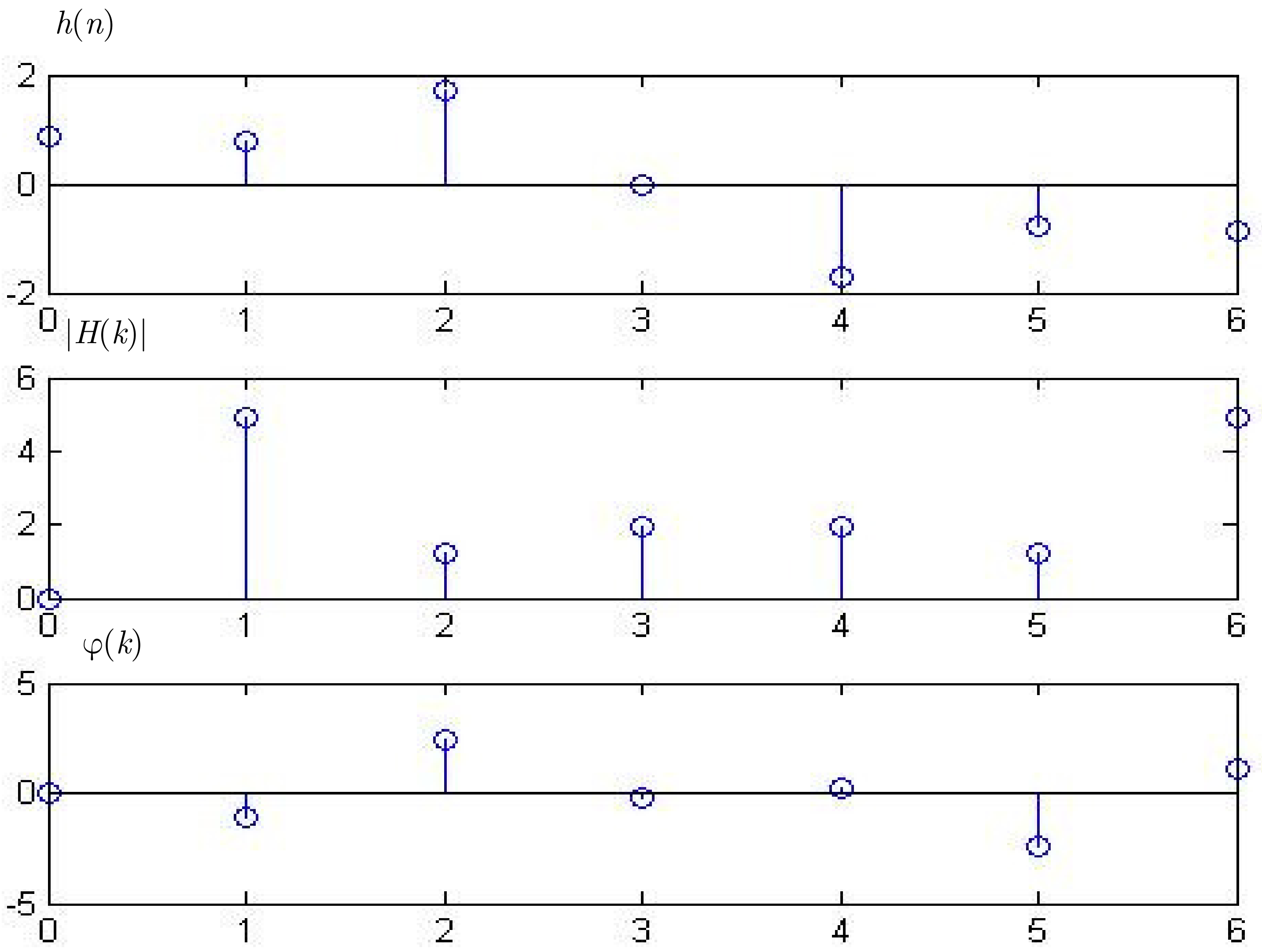
$h(n)$
$|H(k)|$
$\varphi(k)$

第一种抽样, 奇对称,奇数点 $N = 7$



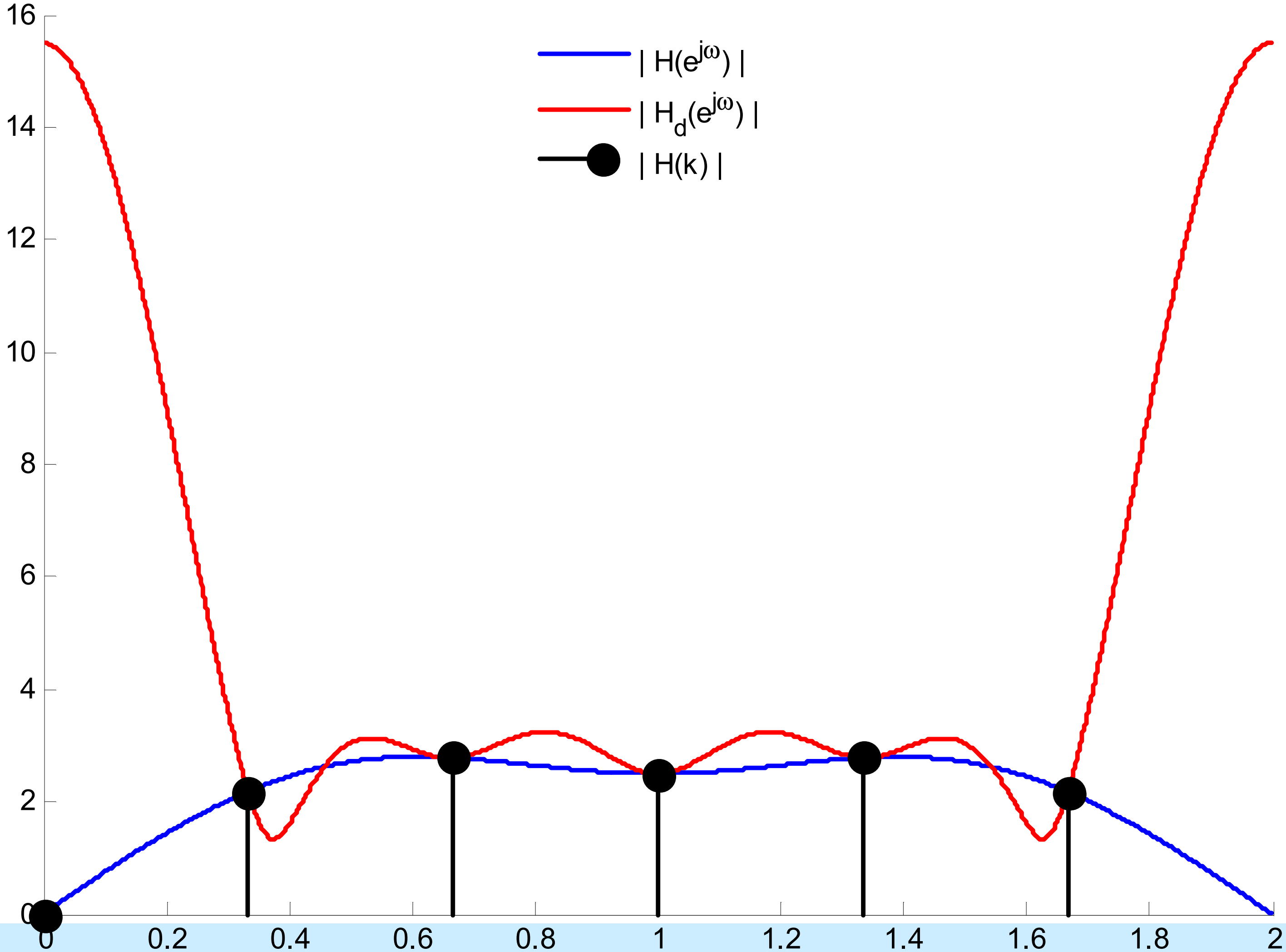
$\arg[H(e^{j\omega})]$



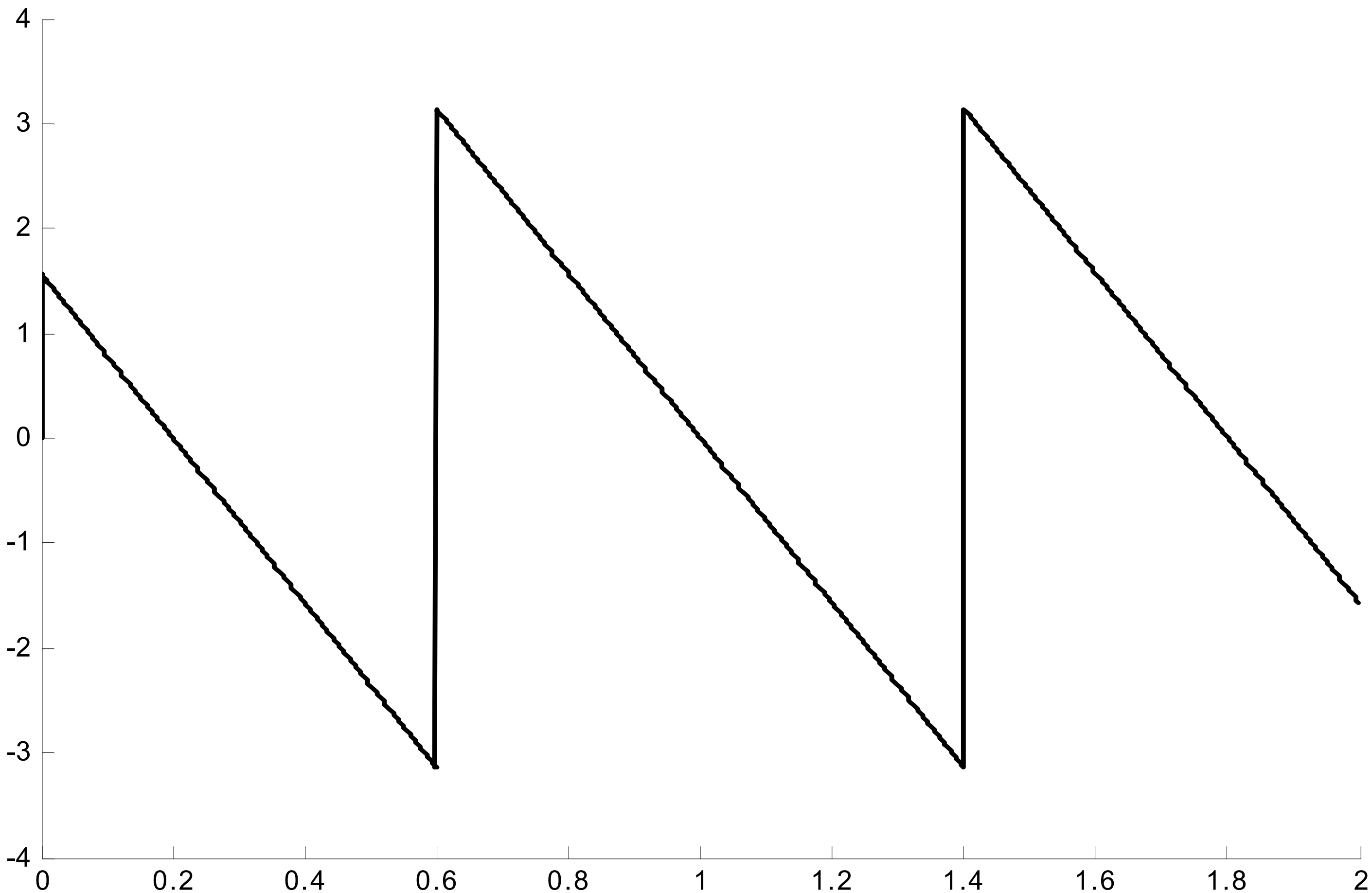


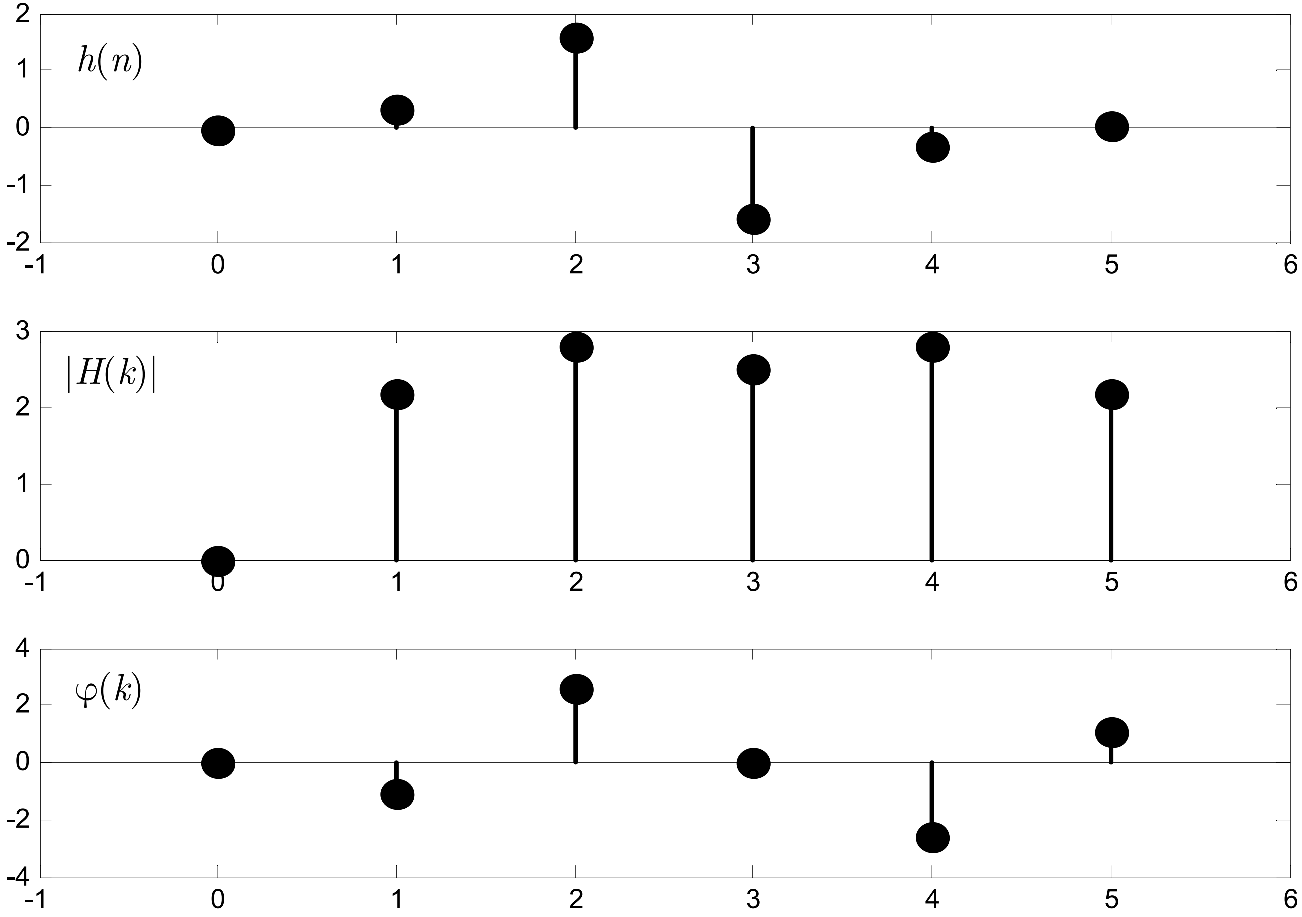
$h(n)$
2
0
-2
0
1
2
3
4
5
6
$|H(k)|$
6
4
2
0
0
1
2
3
4
5
6
$\varphi(k)$
5
0
-5
0
1
2
3
4
5
6

第一种抽样，奇对称，偶数点 $N = 6$



$\arg[H(e^{j\omega})]$





$h(n)$
$|H(k)|$
$\varphi(k)$
2
1
0
-1
-2
3
4
-4
-1
0
1
2
3
4
5
6

线性相位约束条件

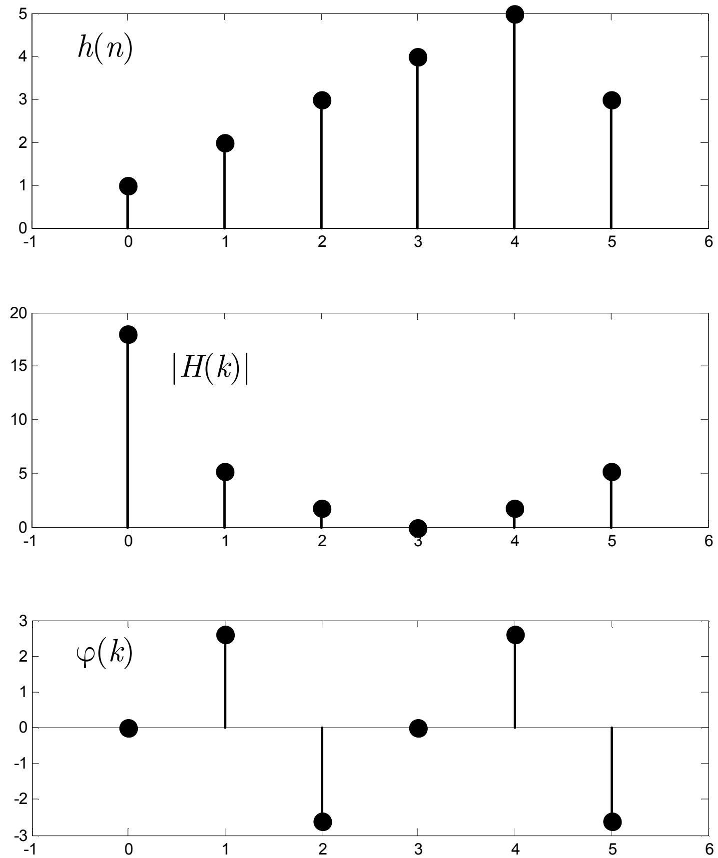
第二种抽样方法				
	$h(n)$ 中心偶对称 N 为奇数	$h(n)$ 中心偶对称 N 为偶数	$h(n)$ 中心奇对称 N 为奇数	$h(n)$ 中心奇对称 N 为偶数
幅度约束	$\lvert H(k)\rvert = \lvert H(N-k-1)\rvert$ $k = 0 \sim (N-1)/2$	$\lvert H(k)\rvert = \lvert H(N-k-1)\rvert$ $k = 0 \sim (N/2-1)$	$\lvert H(k)\rvert = \lvert H(N-k-1)\rvert$ $k = 0 \sim (N-1)/2$ $\lvert H(\frac{N-1}{2})\rvert = 0$	$\lvert H(k)\rvert = \lvert H(N-k-1)\rvert$ $k = 0 \sim (N/2-1)$
相位约束	$\varphi(k) = -\varphi(N-k-1)$ $= -(k+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{N})\pi$ $k = 0 \sim (N-3)/2$ $\varphi(\frac{N-1}{2}) = 0$	$\varphi(k) = -\varphi(N-k-1)$ $= -(k+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{N})\pi$ $k = 0 \sim (N/2-1)$	$\varphi(k) = -\varphi(N-k-1)$ $= \frac{\pi}{2} - (k+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{N})\pi$ $k = 0 \sim (N-3)/2$	$\varphi(k) = -\varphi(N-k-1)$ $= \frac{\pi}{2} - (k+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{N})\pi$ $k = 0 \sim (N/2-1)$

对于第二种抽样方式，当h(n)为实数时

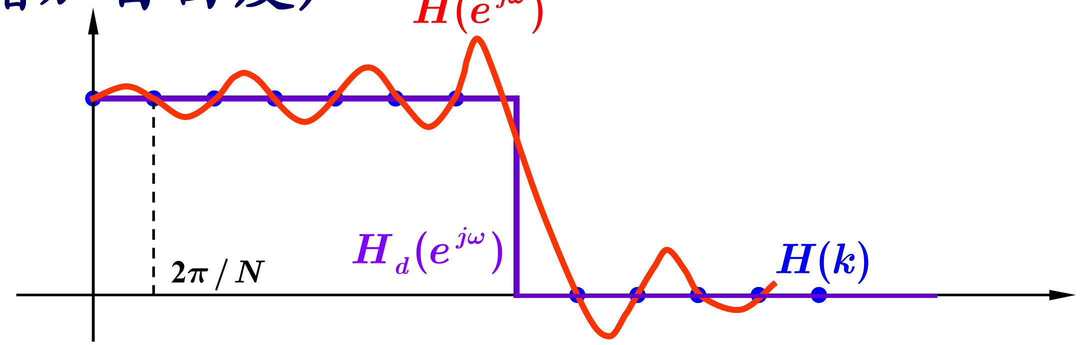
$$H(k) = H^*(N-1-k)$$

$$\begin{cases} |H(k)| = |H(N-1-k)| \\ \theta(k) = \arg[H(k)] = -\theta(N-1-k) \end{cases}$$

以$k = \dfrac{N-1}{2}$中心



过渡带的优化设计（增加自由度）



增加过渡带抽样点，可加大阻带衰减 ξ

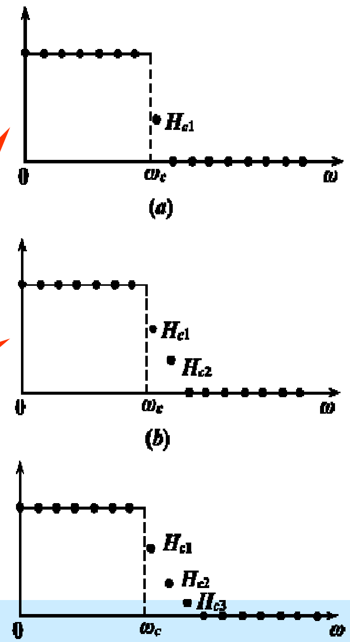
$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\,\Phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

不加过渡抽样点： $\xi = -20\text{dB}$

加一点： $\xi = -40 \sim -54\text{dB}$

加两点： $\xi = -60 \sim -75\text{dB}$

加三点： $\xi = -80 \sim -95\text{dB}$



NOTE

- 增加过渡带抽样点，可加大阻带衰减，但导致过渡带变宽
- 增加N，使抽样点变密，减小过渡带宽度，但增加了计算量

优点：频域直接设计；窄带

缺点：抽样频率只能是 $2\pi/N$ 或者 π/N 的整数倍，且截止频率 ω_c 不能任意取值(采样点可能无法触及)

FIR例(书P247）

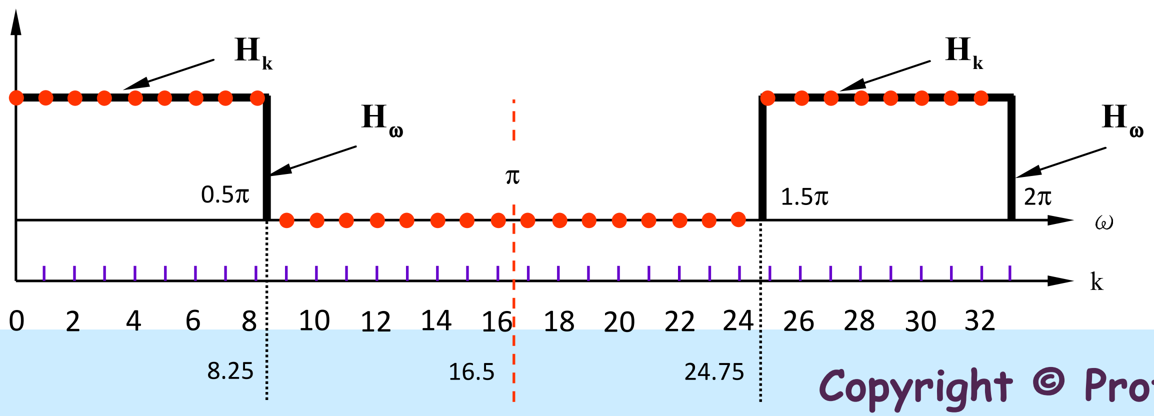
利用第一种频率抽样法设计一个频率特性为矩形的理想低通滤波器，截止频率为 0.5π，抽样点数为 $N = 33$，要求滤波器具有线性相位频率响应，并写出 $H(k)$，$h(n)$，$H(e^{j\omega})$ 和 $H(z)$

解：

$$H_d(e^{j\omega}) = H_\omega e^{j\phi(\omega)} = \begin{cases} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} = e^{-j16\omega} & 0 \le \omega \le 0.5\pi, 1.5\pi \le \omega \le 2\pi \\ 0 & 0.5\pi < \omega < 1.5\pi \end{cases}$$

按第一种频率抽样方式，N = 33，得抽样点：$\boxed{H(k) = H_k e^{j\phi_k}}$，其中

$$\underset{k=0\sim16}{H_k} = H_{N-k} = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le \left\lfloor \dfrac{N\omega_p}{2\pi} \right\rfloor = 8 \\ 0 & \left\lfloor \dfrac{N\omega_p}{2\pi} \right\rfloor + 1 = 9 \le k \le \left\lfloor \dfrac{N}{2} \right\rfloor = 16 \end{cases}; \quad \underset{k=0\sim32}{\phi_k} = -k\left(1-\frac{1}{N}\right)\pi = -\frac{32}{33}k\pi$$



$$h(n)=\frac{H_0}{N}+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}H_k\cos\left[-k\left(1-\frac{1}{N}\right)\pi+\frac{2\pi}{N}kn\right],n=0,1,\ldots,N-1$$

$$=\frac{1}{33}+\frac{2}{33}\sum_{k=1}^{8}\cos\left[\frac{2k\pi}{33}(n-16)\right],n=0,1,\ldots,32$$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{\frac{H_0\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\sum_{k=1}^{M}\frac{H_k}{N}\left[\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)}+\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)}\right]\right\}$$

$$=e^{-j16\omega}\left\{\frac{\sin\left(\frac{33\omega}{2}\right)}{33\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\sum_{k=1}^{8}\left[\frac{\sin\left[33\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{33}\right)\right]}{33\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{33}\right)}+\frac{\sin\left[33\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{33}\right)\right]}{33\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{33}\right)}\right]\right\}$$

$$=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\cos\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\right]\right\}$$

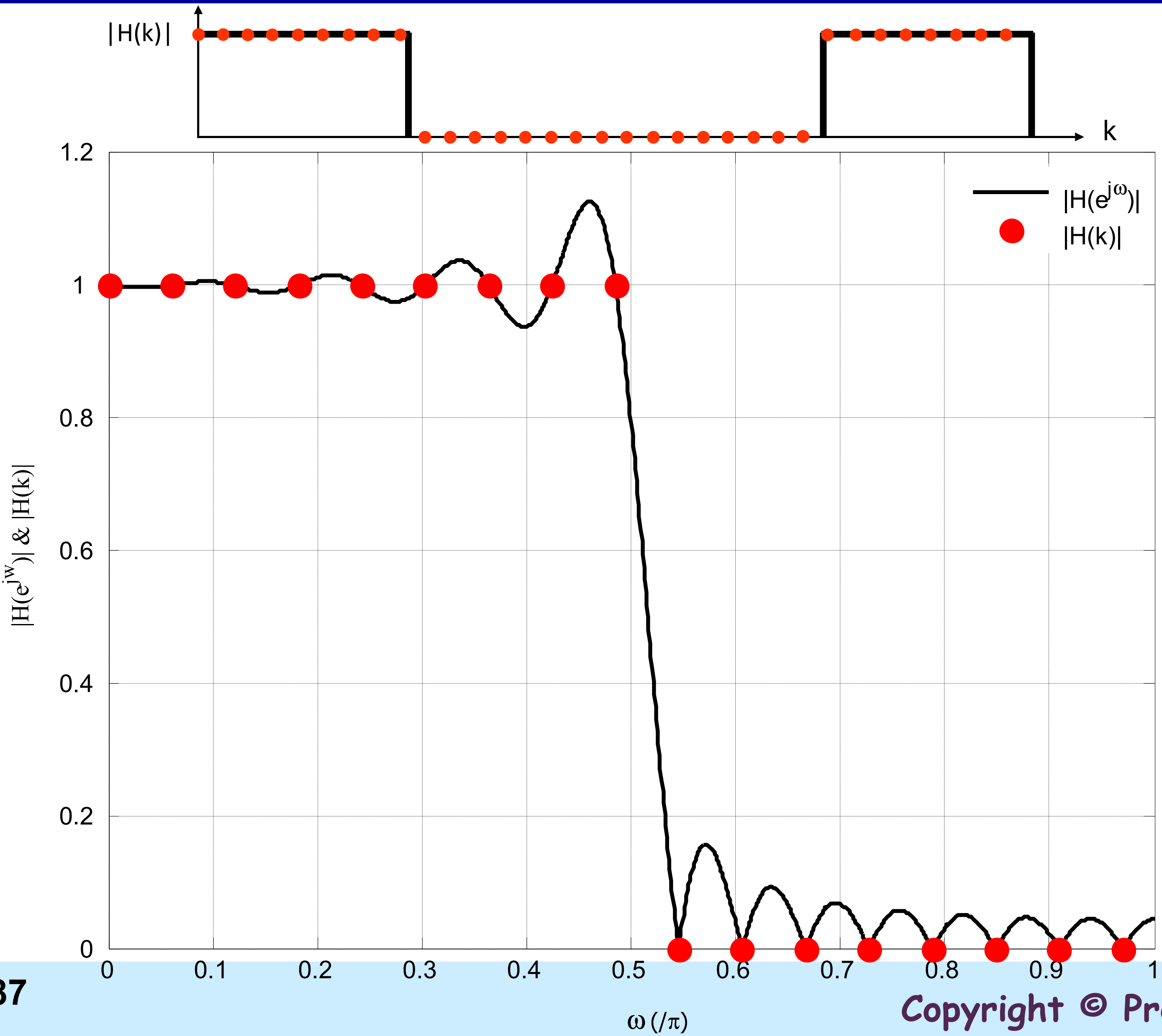
$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

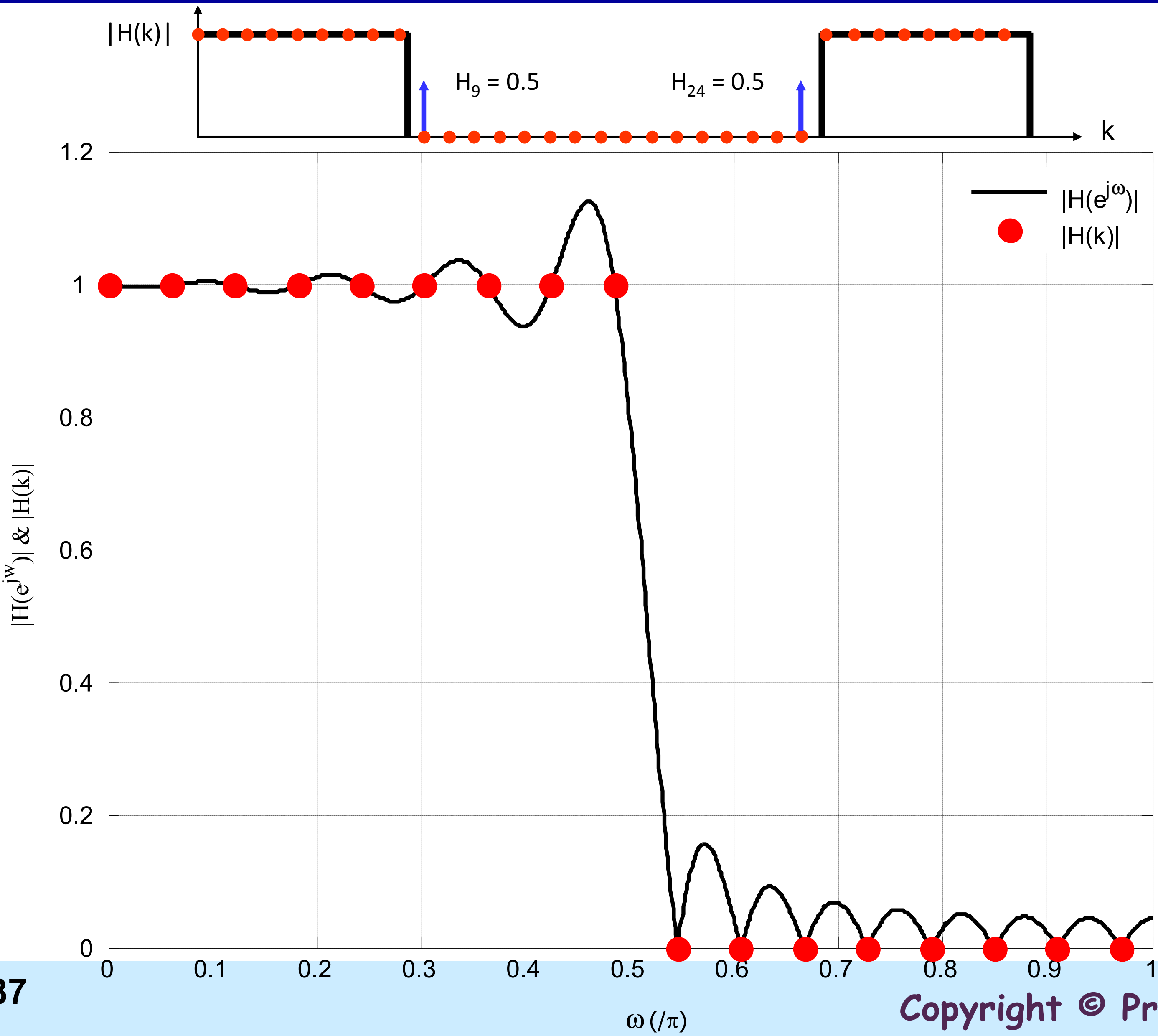
$$=\frac{1-z^{-N}}{N}\left[\frac{H_0}{1-z^{-1}}+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{2(-1)^k\cos\left(\frac{\pi}{N}k\right)(1-z^{-1})}{1-2\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)z^{-1}+z^{-2}}\right]$$

$$=\frac{1-z^{-33}}{33}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}+\sum_{k=1}^{8}\frac{2(-1)^k\cos\left(\frac{1}{33}k\pi\right)(1-z^{-1})}{1-2\cos\left(\frac{2}{33}k\pi\right)z^{-1}+z^{-2}}\right]$$

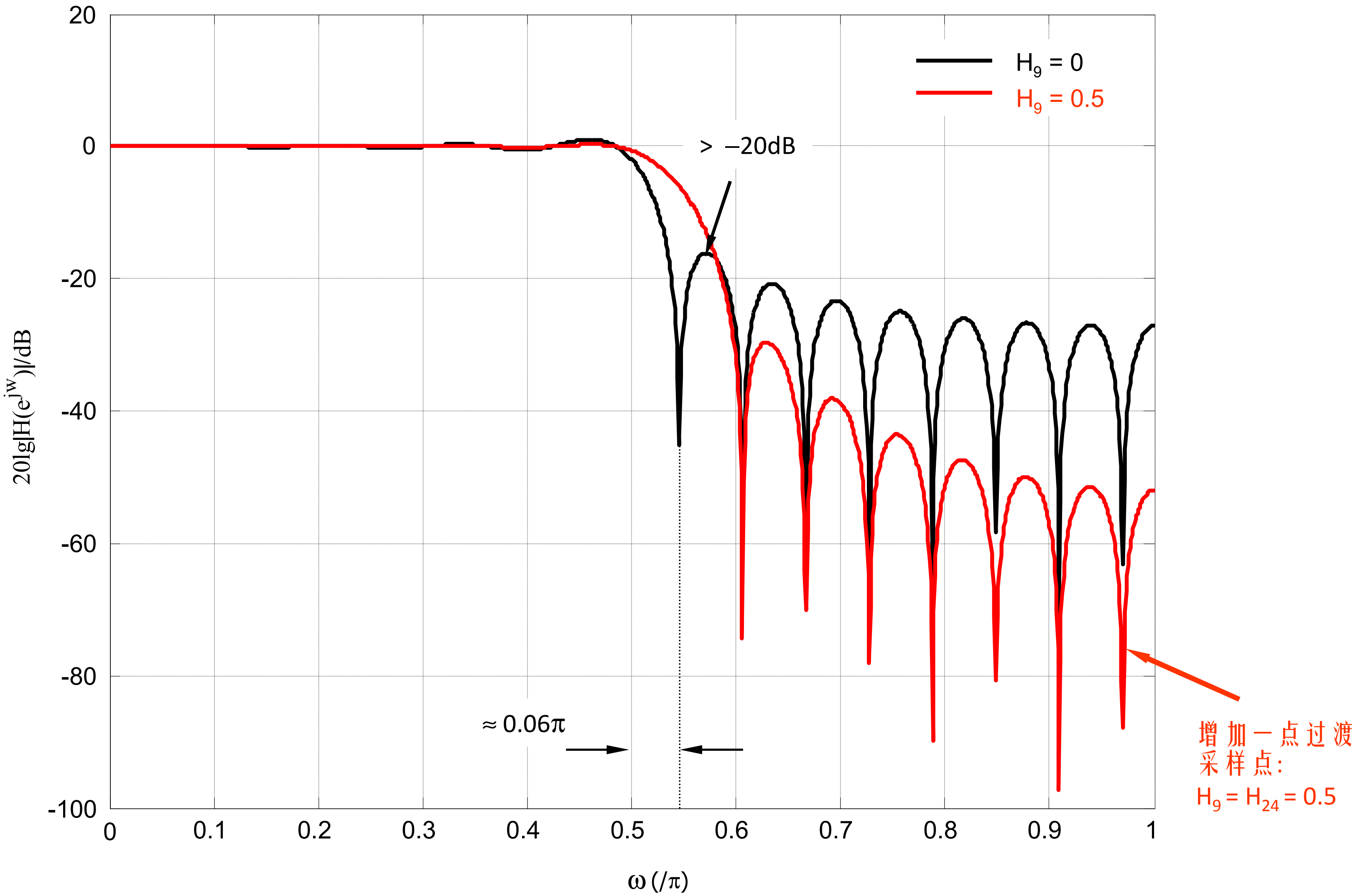
$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[z^{-n}\pm z^{-(N-1-n)}\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}$$

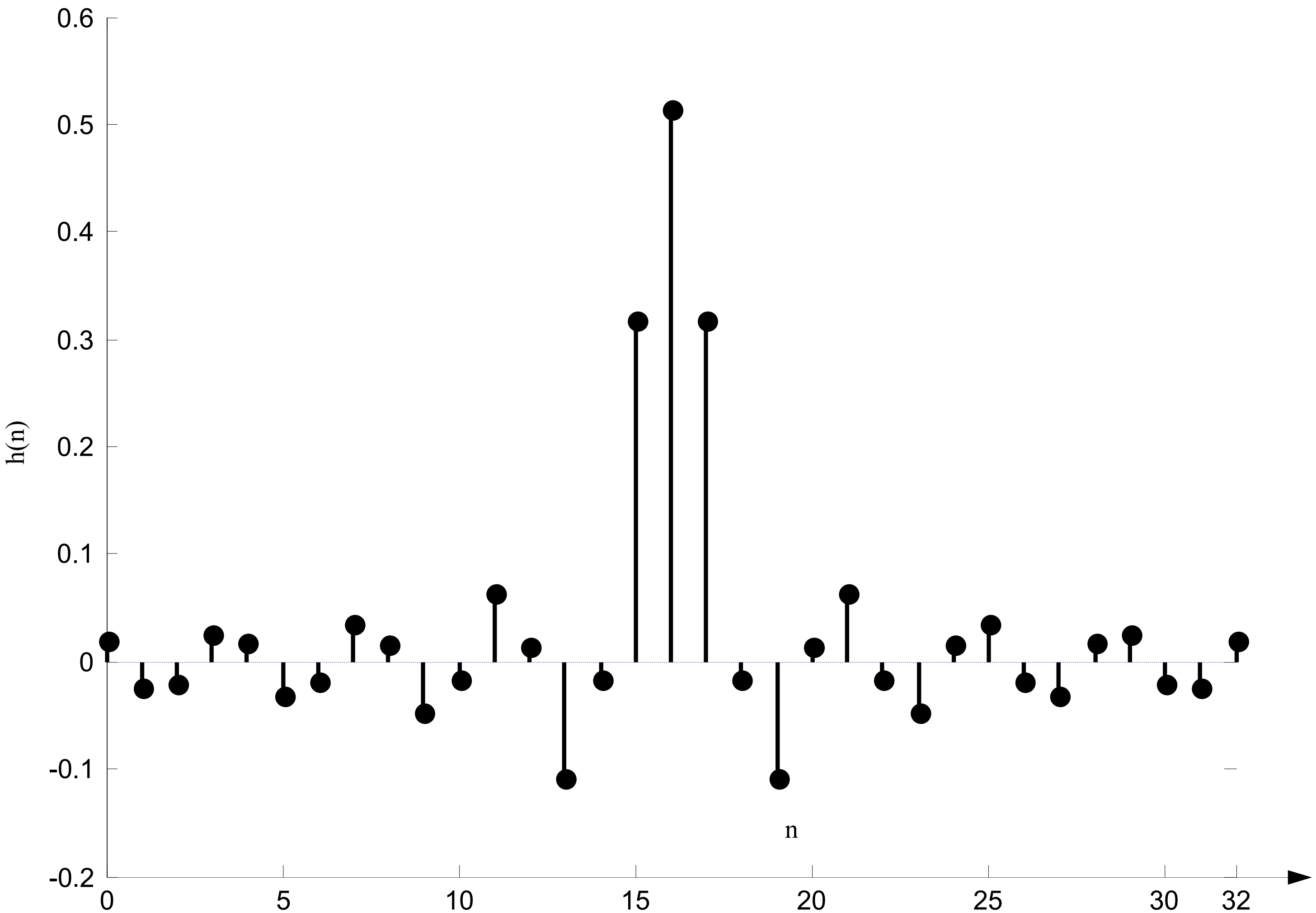
$$=\sum_{n=0}^{15}h(n)\left[z^{-n}\pm z^{-(32-n)}\right]+h(16)z^{-16}$$


|H(k)|
k
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
|H(e^jω)|
|H(k)|
|H(e^jw)| & |H(k)|
ω (/π)


|H(k)|
$H_9 = 0.5$
$H_{24} = 0.5$
k
|H(e^{jω})|
|H(k)|
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
|H(e^{jw})| & |H(k)|
ω (/π)

数字信号处理 (Digital Signal Processing)




0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
h(n)
n
0
5
10
15
20
25
30
32

只要求掌握：

- 第一种线性相位情形：h(n)为中心偶对称实序列，阶数N为奇数
- 第一种采样方式：

$$H_d(e^{j\omega}) = H_\omega e^{-j(N-1)\omega/2}\ ;\ H_\omega = H_{(2\pi-\omega)}\ ,|H_\omega| = |H_d(e^{j\omega})|$$

$$H(k) = H_d(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N} = \underbrace{H_{2\pi k/N}}_{H_k} e^{\overbrace{j[-(N-1)(2\pi k/N)/2]}^{\phi_k}} = H_k e^{j\phi_k}$$

◆ 频率采样符幅应满足条件：

$$H_k = H_{2\pi k/N} = H_{2\pi(N-k)/N} = H_{(N-k)}\ ;|H_k| = |H(k)|$$

◆ 频率采样相位应满足条件：

N为奇数

$$\phi_k = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = -k\pi\left(1-\frac{1}{N}\right);\ e^{j\phi_{(N-k)}} = e^{-j\phi_k}$$

系统单位脉冲响应、传函、频响

奇数点中心偶对称单位脉冲响应、第一种采样方式:

$$h(n)=\frac{H_0}{N}+\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}H_k\cos\left[-k\left(1-\frac{1}{N}\right)\pi+\frac{2\pi}{N}kn\right],n=0,1,...,N-1$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}=z^{-\frac{N-1}{2}}\left[h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}h(n)\left[z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}+z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\right]\right]$$

Windowing method

$$=\boxed{\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}}=\frac{1-z^{-N}}{N}\left[\frac{H_0}{1-z^{-1}}+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{2(-1)^kH_k\cos(\pi k/N)(1-z^{-1})}{1-2\cos(2\pi k/N)z^{-1}+z^{-2}}\right]$$

Sampling method

$z=e^{j\omega}$

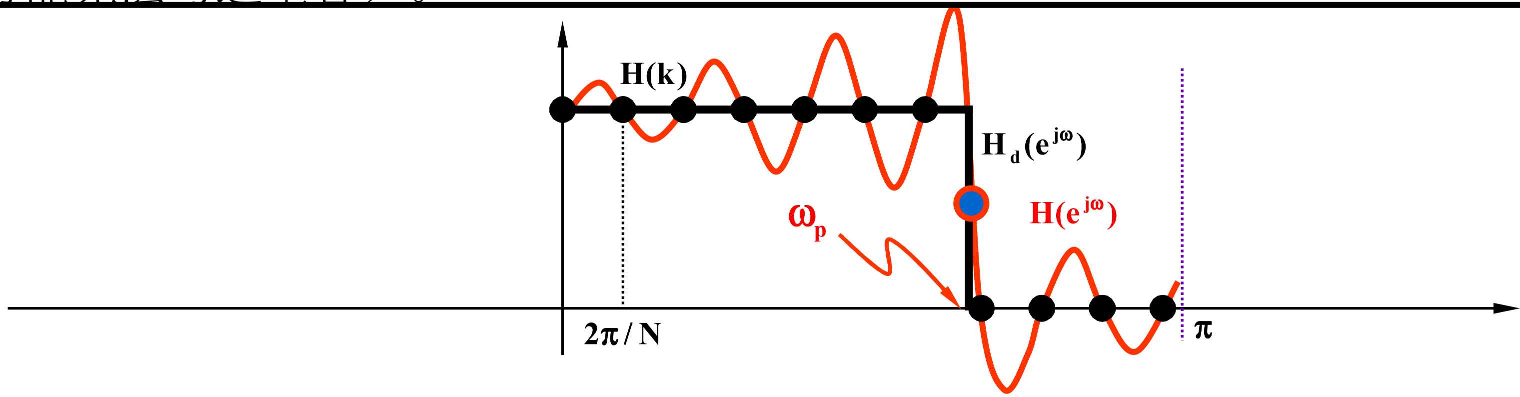
$$H(e^{j\omega})=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{\frac{H_0\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\frac{H_k}{N}\left[\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)}+\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)}\right]\right\}$$

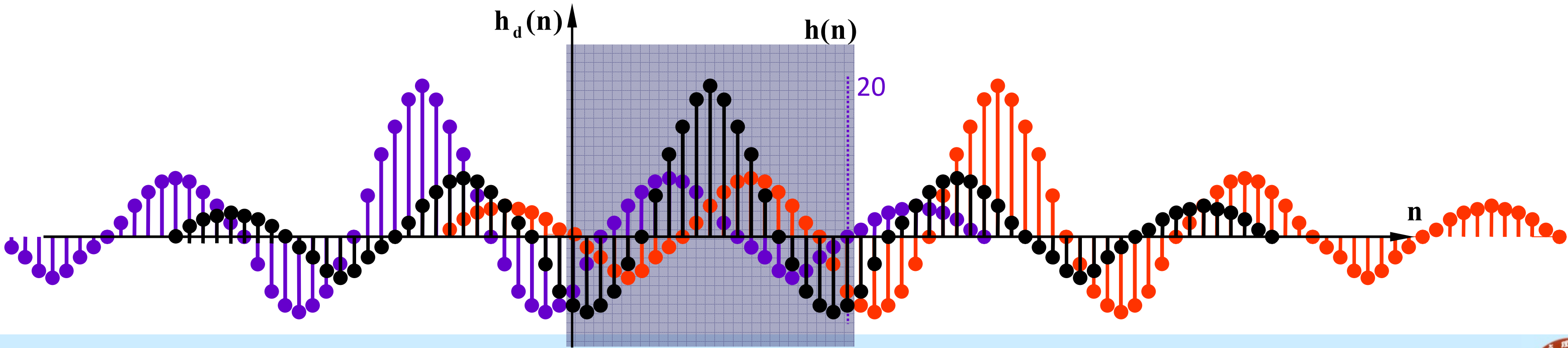
Sampling method

FIR频率采样设计方法步骤

- 确定滤波器的技术指标，及预期频率响应（简单起见，可从理想选频特性开始）
- 选择频率采样类型：
  - 类型 I：kF_s/N
  - 类型 II：$(k + ½)Fs/N$
- 计算所需频率采样点数N 及对应的频域采样值 H(k)，确定过渡带中频率采样点数 M 以及对应的幅度
- 计算滤波器传递函数H(z)和频率响应$H(e^{j\omega})$
- 检验结果是否满足指标，如果不满足，返回步骤二或三重新设计

- 虽然 FIR 数字滤波器的频率响应不能任意设定（有时物理不可实现），但一些特殊频点上的响应却可精确控制（根据频率采样定理、DFT与DTFT之间的关系）；
- 优点：频域直接设计：适合于窄带滤波器的设计；
- 缺点：抽样频率只能是π/N的整偶（或奇）数倍，且截止频率不能任意取值（采样点可能无法与之重合）。





复习

第3章要求：
- 熟练计算线性卷积、周期卷积及圆周卷积，弄清三者之间的关系
- 熟练计算DFT，弄清DFT与FT、ZT 及DTFT之间的关系

＊采样定理（时、频）＊连续信号→采样信号→数字序列

＊线性卷积→周期卷积→圆周卷积

＊ DTFT → DFS → DFT → FT

↓

ZT

第4章要求：
- 掌握按时间和频率抽取 基2、分裂基"L"蝶形推导
- 熟练画出三种算法实现流图

分而治之

＊按时间、频率抽取基2算法；混合基；分裂基；（线性调频z变换）

第5章要求：

- IIR巴特沃思数字低通滤波器设计（低通）：

  脉冲响应不变、双线性变换

- FIR线性相位响应数字滤波器设计（低通、高通、带通、带阻）：

  时域平移截断、频域均匀采样

合理舍弃

* 巴特沃斯模拟逼近→ 脉冲响应不变（折叠）/双线性变换数字化（变形）数↔模映射不同

* 窗函数方法（时域截断）；频率采样方法（频域采样）