100052205

数字信号处理
Digital Signal Processing

李慧琦 教授

信息与电子学院

北京理工大学

Tel: +86 (10) 68918239

Email: huiqili@bit.edu.cn

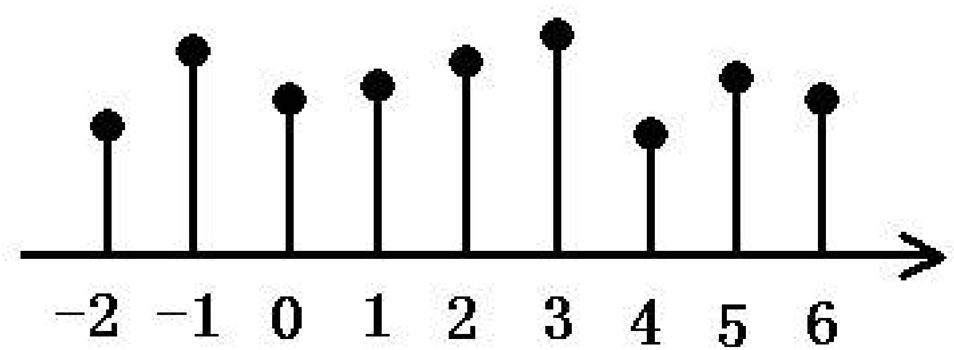
§2-3 离散时间信号的表示及运算规则

- **序列的表示法**

$x(n)$　注意：$x(n)$仅对整数值的n才有定义，对非整数值n没有定义

1. 集合表示法：　$\{x(0), x(1), \cdots, x(N-1)\}$

2. 图形表示法：



3. 函数表示法：

$$x(n)=\begin{cases}1, & n=1,3\\ 4, & n=2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

4. 列表法：

n	…	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
x(n)	…	0	0	0	1	4	1	0	0	…

• 序列的运算规则及符号表示

1. 序列的乘积

两序列相乘是指同序号***n***的序列值逐项对应相乘。 乘积序列**w(*n*)**可表示为

$$w(n) = x(n)y(n)$$

2. 序列的加减

两序列的加减是指同序号**n**的序列值逐项相加（或相减）而构成的一个新序列。 和序列**z(n)**可表示为

$$w(n) = x(n) \pm y(n)$$

3. 序列的标乘

序列x(n)的标乘是指x(n)的每个序列值乘以常数A。标乘序列y(n)可表示为

$$y(n) = Ax(n)$$

4. 序列的延时（移位）

序列x(n)，其移位序列y(n)为

$$y(n) = x(n - n_0)$$

当n_0为正时，则$x(n- n_0)$是指序列x(n)逐项依次延时（右移） n_0位而给出的一个新序列; 当m为负时，$x(n- n_0)$是指依次超前（左移） n_0位。

n_0 =1, 单位延时。

位移图例

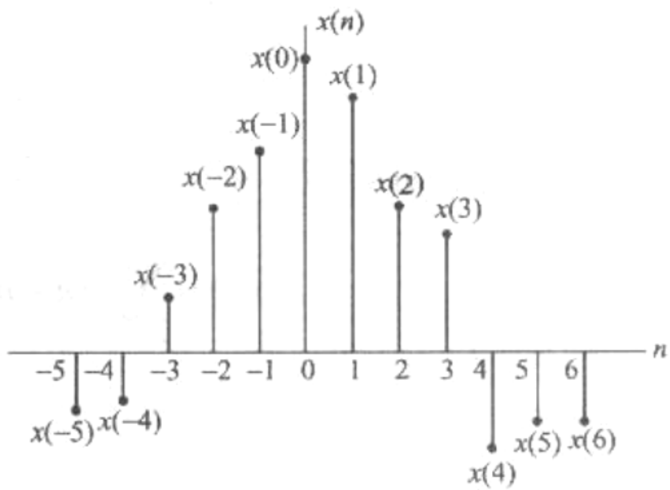


图 1.1 离散时间信号 $x(n)$ 的图形表示

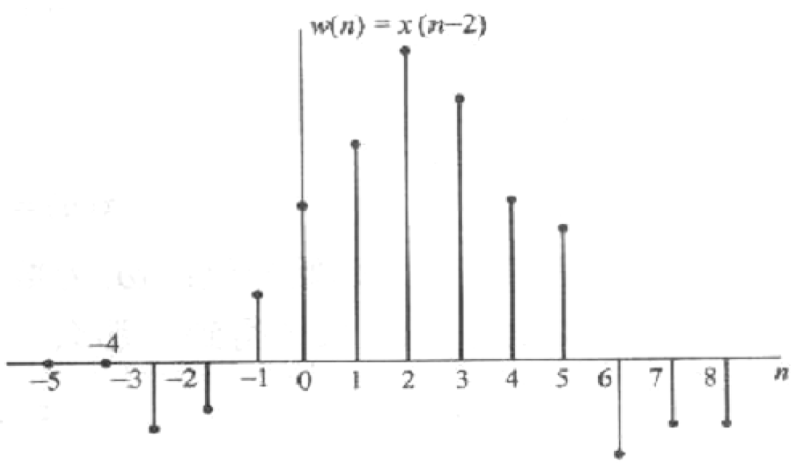
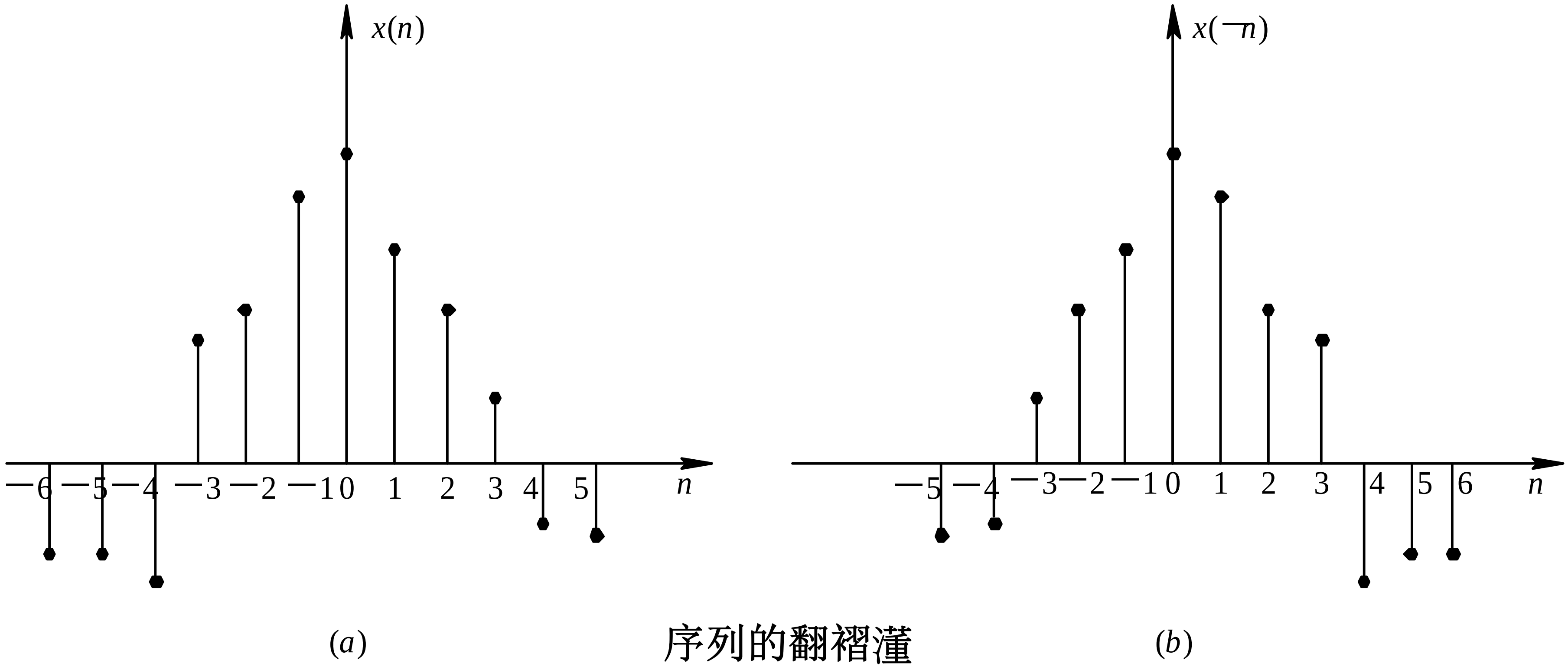


图 1.6 图 1.1 序列 $x(n)$ 的移位

5. 序列的翻转

如果序列为x(n)，则x(-n)是以n=0的纵轴为对称轴将序列x(n)加以翻转。x(n)及x(-n)如图 (a)、(b)所示。



序列的翻褶蘯

(a) x(n)序列； **(b) x(-n)**序列

6. 分支运算

一个信号同时加到系统中两点或更多点的过程称为分支运算。表示为

$y_1(n) = x(n)$ $y_2(n) = x(n)$

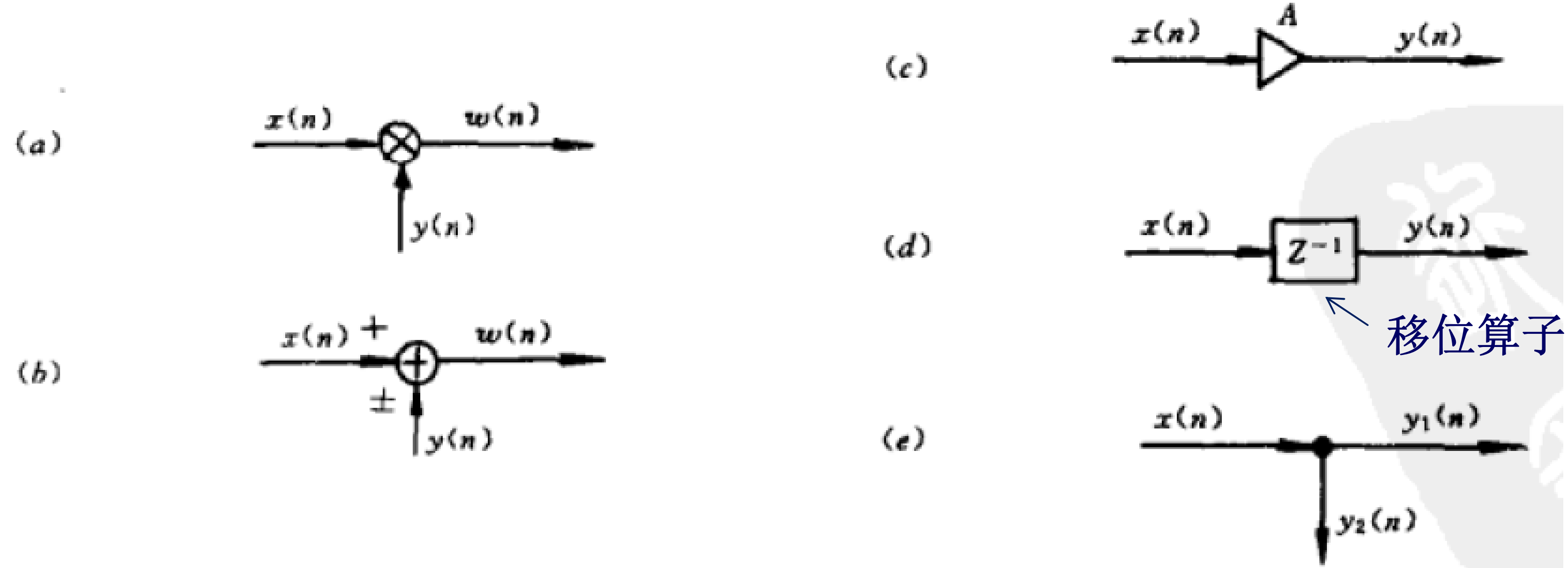


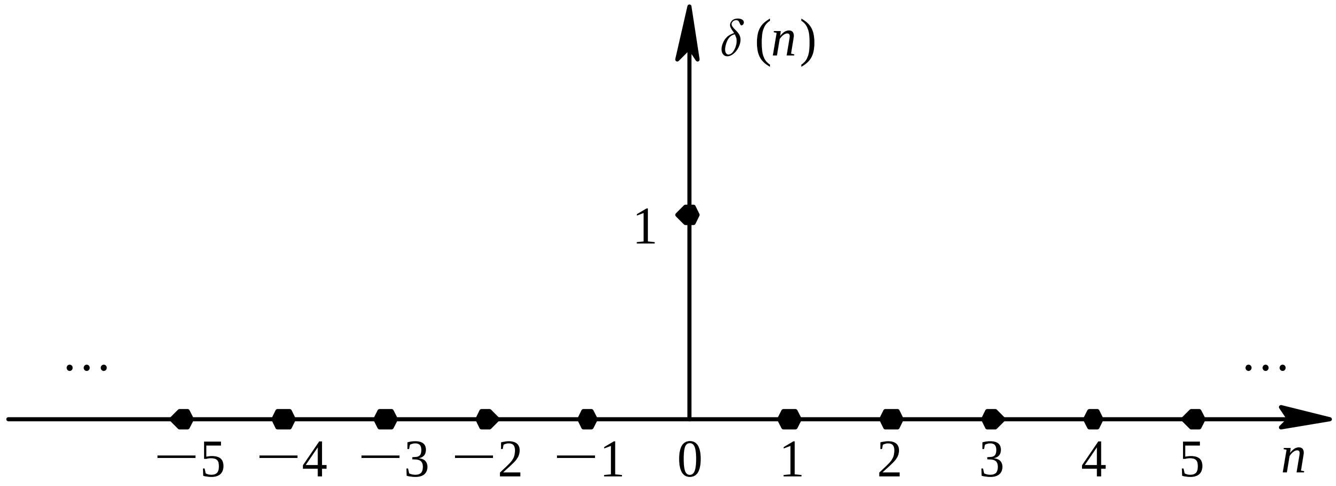
图 2—11 实现离散时间序列的运算

(a) 序列相乘；(b) 序列加/减；(c) 序列标乘；(d) 单位延时；(e) 分支运算

- **常用的典型序列**

1. 单位取样序列 $\delta(n)$ （单位脉冲序列，冲激）

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$



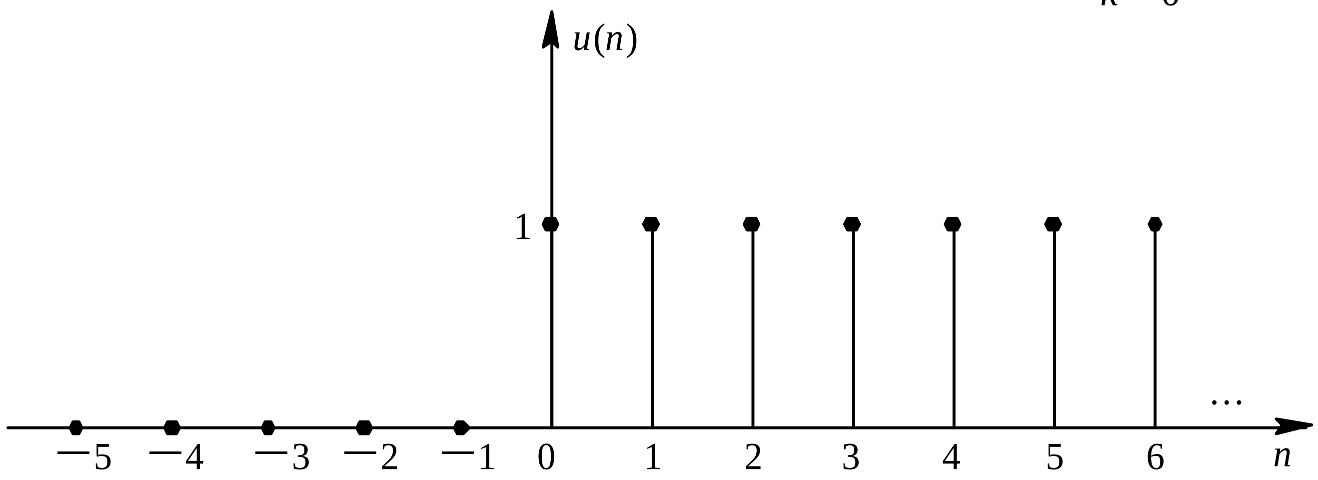
2. 单位阶跃序列u(n)

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

δ (n)和u(n)间的关系为

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$



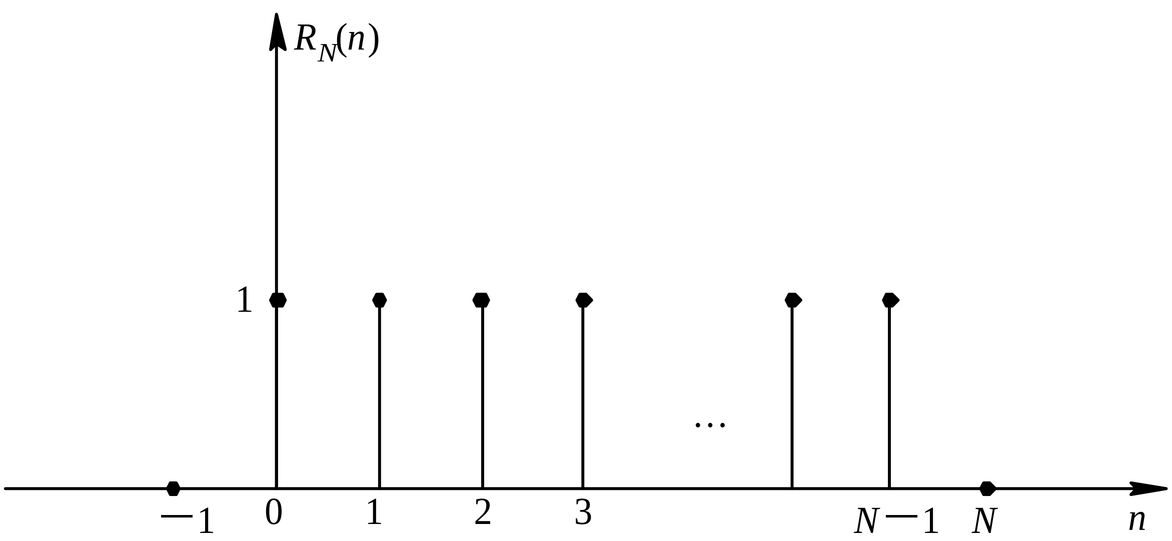
3．矩形序列$R_N(n)$

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & 其他n\end{cases}$$

$R_N(n)$和 $\delta(n)$、$u(n)$的关系为:

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

$$R_N(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots+\delta[n-(N-1)]$$



4．实指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$

|a|>1
|a|<1

a<0

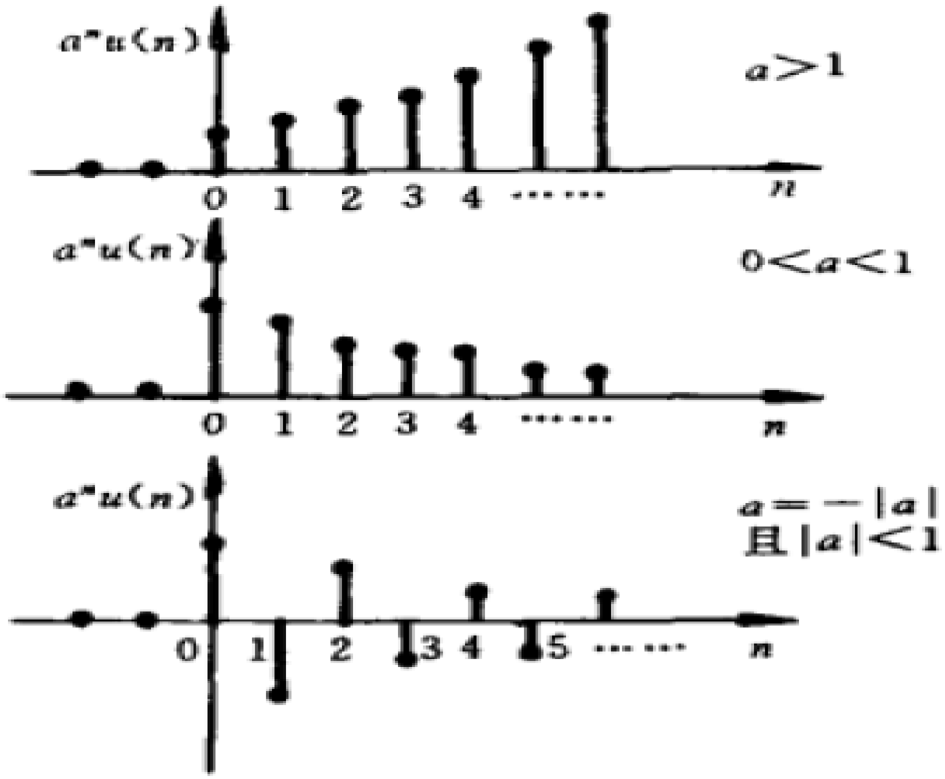


图 2—17　实指数序列 $a^n u(n)$

(a) $a^n u(n)$　$a>1$ 的图形

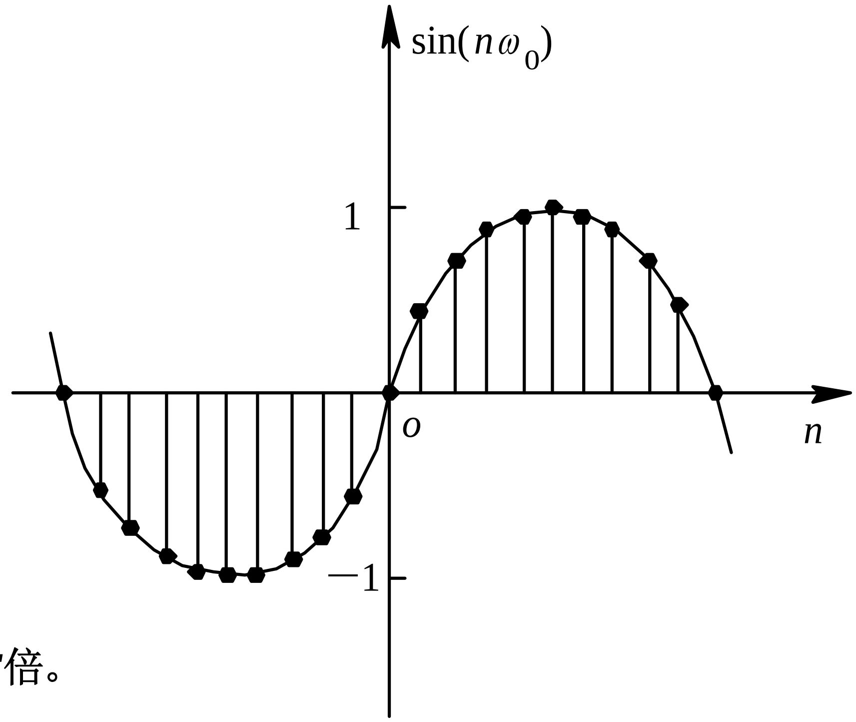
(b) $a^n u(n)$　$0<a<1$

(c) $a^n u(n)$　$a=-|a|$　$|a|<1$

5．　正弦序列

$$x(n)=\sin(n\omega_0)$$

ω_0为数字域频率



连续时间正弦信号采样

$$x_a(t)=\sin\Omega_0 t$$

$$x(n)=x_a(nT)=\sin n\Omega_0 T$$

$$\omega_0=\Omega_0 T=\frac{\Omega_0}{f}$$

$\Rightarrow$采样正弦信号的数字域频率ω_0是模拟域角频率Ω_0的T倍。

6. 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

$$x(n) = e^{\sigma n}(\cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n)$$

$$= e^{\sigma n}\cos\omega_0 n + je^{\sigma n}A\sin\omega_0 n$$

极坐标表示

$$x(n) = \left|x(n)\right|e^{j\arg\left[x(n)\right]} = Ae^{j\omega_0 n}$$

σ = 0: $$|x(n)| = 1$$

$$\arg[x(n)] = \omega_0 n$$

- **序列的周期性**

如果对所有n存在一个最小的正整数N，满足

$$x(n) = x(n+N)$$

则称序列$x(n)$是周期性序列，周期为N。

正弦序列的周期性?

$$x(n) = A\sin(\omega_0 n + \phi)$$

$x(n) = A\sin(\omega_0 n + \phi)$　　ω_0数字域角频率

$x(n+N) = A\sin(\omega_0(n+N)+\phi) = A\sin(\omega_0 N + \omega_0 n + \phi)$

若$\omega_0 N = 2\pi k$

$$\Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\omega_0}$$

讨论：$\boxed{N=\dfrac{2\pi k}{\omega_0}}$

(1)当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}=N$为正整数时，序列成为周期序列，周期为N

(2)当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{N}{k}$为有理数时，$N$和$k$互素，序列成为周期序列，周期为$N=k\dfrac{2\pi}{\omega_0}$

(3)当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为无理数时，序列为非周期序列

无论正弦序列是否为周期性，参数ω_0皆称作它们的频率

例 1.3 正弦序列 $x(n)=\sin(\omega_0 n)$（其波形如图1.12所示），设 $N=10$，说明正弦序列的包络线每隔 10 个样值重复一次，周期为 10。

解

$$\omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{2\pi}{10}=0.2\pi$$

表示相邻两个序列值间的弧度数为 0.2π。

ω_0 反映每个序列值出现的速率，ω_0 越小，两个序列值间的弧度也就越小。

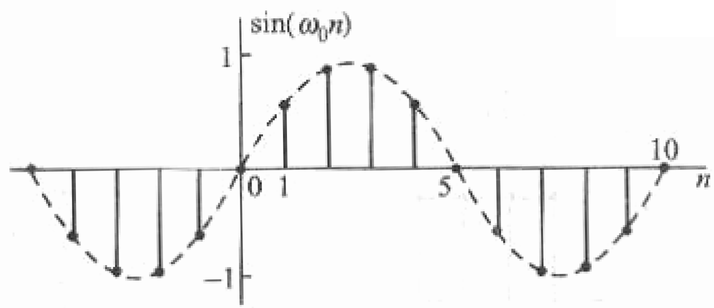


图 1.12　当 $\phi=0$, $\omega_0=\dfrac{2\pi}{10}$，$A=1$ 时的正弦序列（周期性序列，周期 $N=10$）

例 1.4 已知：正弦序列 $x(n)=\sin\frac{4\pi}{11}n$（其波形如图 1.13 所示），求其周期。

用单位脉冲序列表示任意序列

加权延时单位取样序列的线性组合

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

序列的能量

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^{2}$$

§2-4离散时间线性非时变系统与差分方程

离散时间线性非时变系统及卷积运算

离散时间系统运算关系 $T[\bullet]$ $y(n) = T\left[x(n)\right]$

线性系统

设系统具有： $y_1(n) = T[x_1(n)]$

$y_2(n) = T[x_2(n)]$

$$T[a\ x_1(n) + b\ x_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)]$$

$$= ay_1(n) + by_2(n)$$

那么该系统就是线性系统，即线性系统具有均匀性和叠加性。

非时变系统

系统的运算关系**T**［·］在整个运算过程中不随时间（即不随序列的延迟）而变化，这种系统称为时不变系统。

$$y(n) = T\left[x(n)\right]$$

$$y(n-k) = T\left[x(n-k)\right]$$

线性非时变系统（线性时不变系统)

同时具有线性和非时变的系统

LTI system*： *Linear Time-Invariant System

离散时间系统的时域分析

单位取样响应

线性时不变系统可用它的单位脉冲响应来表征。 $h(n)=T[\delta(n)]$

输入序列 $x(n)$ 可以写成 $\delta(n)$ 的移位加权和： $x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$

系统的输出 $y(n)$：

$$y(n)=T[x(n)]=T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T[\delta(n-m)]$$ 线性

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$ 非时变性

$$\Rightarrow\ y(n)=x(n)*h(n)$$

卷积运算的基本规律

- 交换律 $$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$
- 结合律 $$\begin{aligned} y(n)&=\left[x(n)*h_1(n)\right]*h_2(n)\\ &=\left[x(n)*h_2(n)\right]*h_1(n)\\ &=x(n)*\left[h_1(n)*h_2(n)\right] \end{aligned}$$
- 分配率 $$\begin{aligned} y(n)&=x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]\\ &=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n) \end{aligned}$$

系统的稳定性和因果性

1.稳定系统

线性时不变系统是稳定系统的充分必要条件是单位脉冲响应绝对可和， 即

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

2.因果系统 （物理可实现）

线性时不变系统是因果系统的充分必要条件是

$h(n)=0 \qquad n<0$

3.因果序列

习惯上称**n<0**时，**x(n)=0**的序列**x(n)**为因果序列

4.稳定的因果系统 （设计目标）

满足稳定性，因果性条件的系统称为稳定的因果系统。

连续时间系统数学模型：微分方程
离散时间系统数学模型：差分方程

线性非时变离散系统：常系数线性差分方程

$$y(n) \sim x(n): \quad \sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

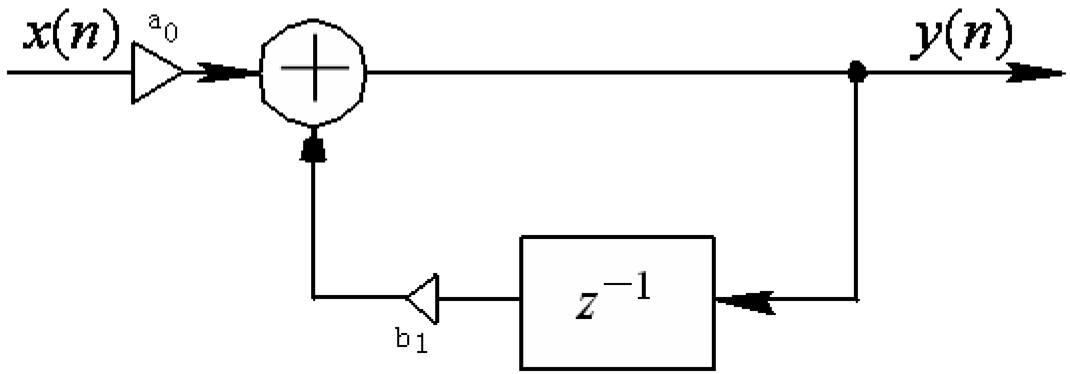
$$\downarrow$$

a_k 是常数

线性： **y(n-k)** 都只有一次幂，且没有**y(n-k)**彼此相乘

容易得到系统的运算结构,如

$$y(n) = a_0 x(n) + b_1 y(n-1)$$



§2-5 离散时间信号和系统的频域分析

系统的频率响应

输入频率为ω的复指数序列

$$x(n)=Ae^{j(\omega n+\phi_x)}=Ae^{j\omega n}e^{j\phi_x}; \qquad x(n-r)=Ae^{j\omega(n-r)}e^{j\phi_x}=e^{-j\omega r}x(n)$$

输出频率也为ω的复指数序列

$$y(n)=Be^{j(\omega n+\phi_y)}=Be^{j\omega n}e^{j\phi_y}; \qquad y(n-k)=Be^{j\omega(n-k)}e^{j\phi_y}=e^{-j\omega k}\bullet y(n)$$

输入输出方程：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k} y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\omega r} x(n)$$

$$y(n) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_r e^{-j\omega r}}{\sum_{r=0}^{M} a_k e^{-j\omega k}} x(n) = H\left(e^{j\omega}\right) \cdot x(n)$$

$$\Rightarrow B e^{j\omega n} e^{j\phi_y} = H\left(e^{j\omega}\right) \cdot A e^{j\omega n} e^{j\phi_x}$$

$$\Rightarrow H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{y(n)}{x(n)} = \frac{B e^{j\omega n} e^{j\phi_y}}{A e^{j\omega n} e^{j\phi_x}} = \frac{B e^{j\phi_y}}{A e^{j\phi_x}} = \frac{B(\omega) e^{j\phi_y}}{A(\omega) e^{j\phi_x}}$$

$$x(n) = A e^{j\omega n} e^{j\phi_x}$$

$$x(n-r) = e^{-j\omega r} x(n)$$

$$y(n) = B e^{j\omega n} e^{j\phi_y}$$

$$y(n-k) = e^{-j\omega k} y(n)$$

系统频率响应，由结构参数决定， 描述系统对不同频率的复指数序列的不同传输能力。

系统频率响应的两个性质

1.$H(e^{j\omega})$是ω的连续函数.

2.$H(e^{j\omega})$是ω的周期性函数,且周期为2π

一般只取系统在周期范围内的频率响应。

系统频率响应与单位取样响应的关系

$$x(n) = Ae^{j\omega n}e^{j\phi_x}$$

$$x(n-r) = e^{-j\omega r}x(n)$$

$$\begin{cases} y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ \quad = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}Ae^{j\omega n}e^{j\phi_x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}x(n) \\ y(n) = H(e^{j\omega}) \bullet x(n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

线性时不变系统的频率响应是系统的单位取样响应h(n)的傅氏变换，是h(n)的频谱。

序列的频域表示法

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h\left(n\right)e^{-j\omega n}$$

输出序列与输入序列的傅氏变换间的关系

线性时不变系统

$F[y(n)]=F[x(n)*h(n)]$

即

$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$　　推导见书33页

$H(e^{j\omega})$就是系统的频率响应。 由上式得知，对于线性时不变系统，其输出序列的傅里叶变换等于输入序列的傅里叶变换与系统频率响应的乘积。

作业

第二章

2、8、10、17、20、21、23、24