100052205

数字信号处理

Digital Signal Processing

李慧琦 教授

信息与电子学院

北京理工大学

Tel: +86 (10) 68918239

Email: huiqili@bit.edu.cn

第三章 离散傅里叶变换

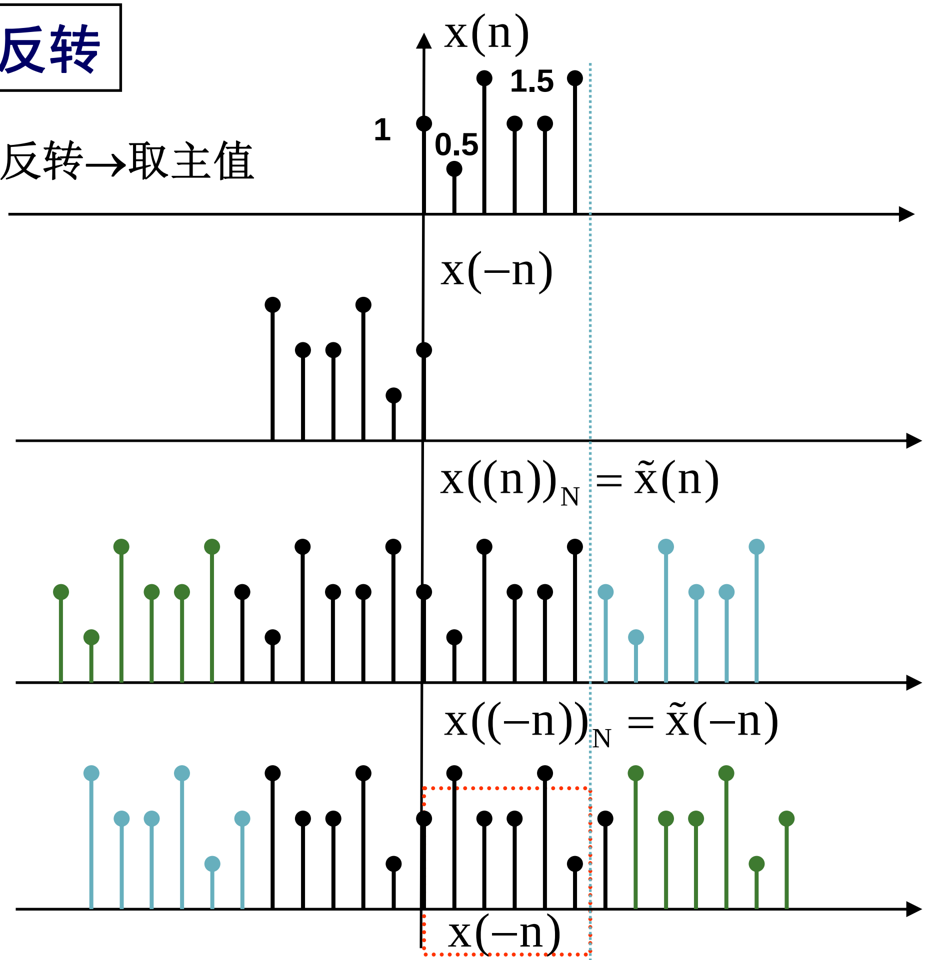
本章主要内容

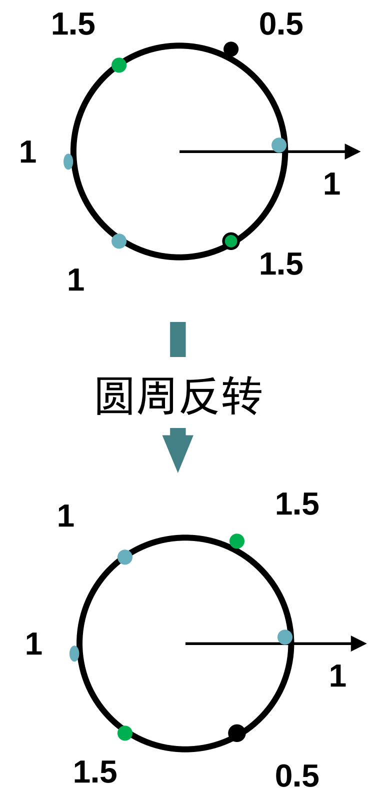
- 傅里叶变换的几种形式
- 离散傅里叶级数和离散傅里叶变换
- 离散傅里叶变换的性质
- 频域采样
- **DFT**的应用

Copyright @ Prof. Huiqi Li

● 圆周反转

周期化→反转→取主值





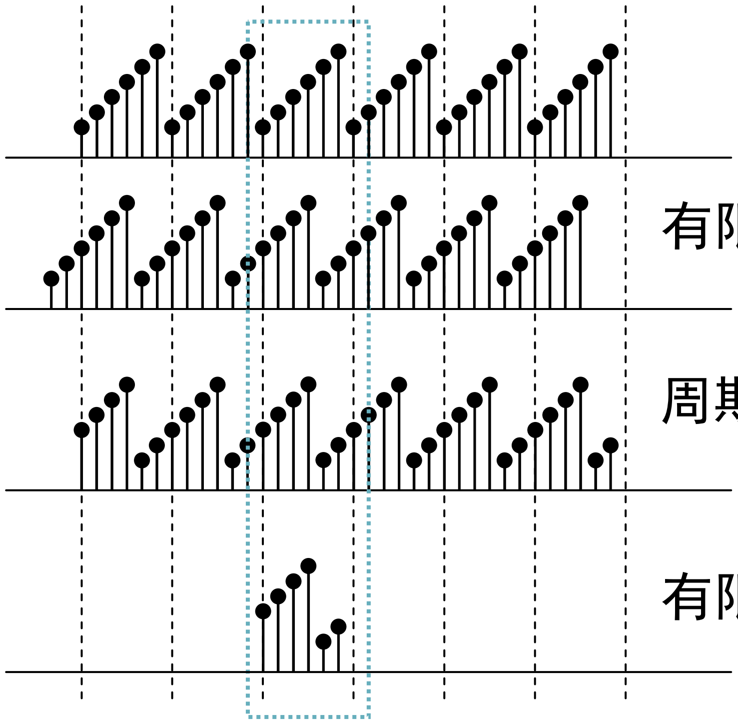
在涉及DFT范围内讨论和分析一个“有限长”序列务必将其视为某与之有关周期序列的主值序列，或实施圆周化操作

Copyright @ Prof. Huiqi Li

● 圆周位移

周期化→移位→取主值 = 圆周移位 $x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$

$$x(n) \rightarrow \tilde{x}(n) = x((n))_N \rightarrow \tilde{x}(n+m) = x((n+m))_N \rightarrow x((n+m))_N R_N(n)$$



有限长序列移位

周期序列移位（有限长序列移位的周期延拓）

有限长序列圆周移位（周期序列移位的主值）

Copyright @ Prof. Huiqi Li

$$x'(n) = x((n-m))_N R_N(n)$$

Example: If m=2, N=4

$$x'(n) = x((n-2))_4$$

$$x'(0) = x((-2))_4 = x(2)$$

$$x'(1) = x((-1))_4 = x(3)$$

$$x'(2) = x((0))_4 = x(0)$$

$$x'(3) = x((1))_4 = x(1)$$

x'(n） is x(n) shifted circularly by two units in time.

序列的N点圆周位移等同于其周期性延拓的线性位移。

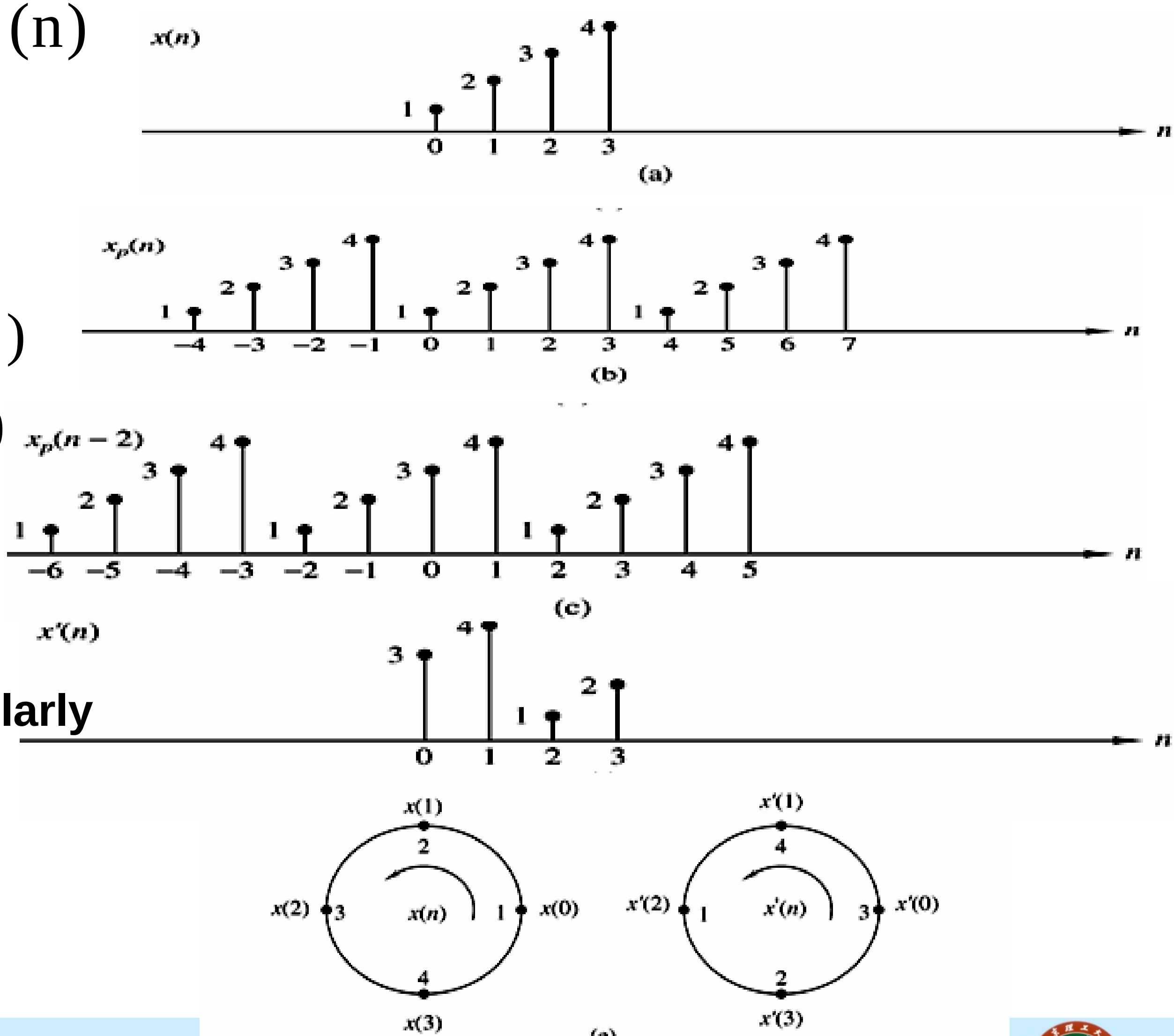


Figure 7.2.1 Circular shift of a sequence.

§ 3-5 离散傅里叶变换的性质

1.线性特性

$$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

$$X_3(k) = DFT\left[ax_1(n) + bx_2(n)\right] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

$N=\max[N_1,N_2]$

2.可用正变换计算逆变换

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W_N^{kn}\right]^* = \frac{1}{N}\left\{DFT[X^*(k)]\right\}^*$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

3.对称定理

$$\forall x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

则 $$\frac{1}{N}X(n) \xleftrightarrow{DFT} x(-k) = x(N-k)$$ 圆周反转！

$$0 \le n \le N-1 \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$\tilde{x}(-k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}DFT[X(n)]$$

4.反转定理

$$\forall x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

则 $$x(-n) \xleftrightarrow{DFT} X(-k)$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

5.序列的总和

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = X(k)\Big|_{k=0} = X(0)$$

6.序列的起始值

$$x(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

7.序列加长后的**DFT**

(a)

$$\forall x(n), 0 \le n \le N-1 \longleftrightarrow X(k), 0 \le k \le N-1$$

令

$$g(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \le mN-1 \end{cases} \quad \forall m \in I$$

问题：

$$\mathrm{G(k)=DFT\left[g(n)\right]} \quad \sim \quad \mathrm{X(k)}$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

由DFT的定义：

$$G(k)=\sum_{n=0}^{mN-1}g(n)W_{mN}^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{Nm}kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{k}{m}n}$$

$$=X(\frac{k}{m})=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}\frac{k}{m}}$$

$$k=0,1,\cdots,mN-1$$

而 $X(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$

$$k=0,1,\cdots,N-1$$

$$X(e^{j\omega})\xleftrightarrow{DTFT}x(n)$$

$\therefore G(k)$与$X(k)$ 具有相同的形状，不同之处是$G(k)$ 的频谱间隔比 $X(k)$ 的小。**即通过补零，可以得到更加细致的频谱。**

Copyright @ Prof. Huiqi Li

例 3.7 有限长序列 $x(n)$ 为下式，求其 $N=5$ 点和 $N=10$ 点的离散傅里叶变换 $X(k)$。

$$x(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{5-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{5}nk}=\begin{cases}5\times 1=5, & k=0\\ \dfrac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{5}k}}=0, & k=1,2,3,4\end{cases}$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

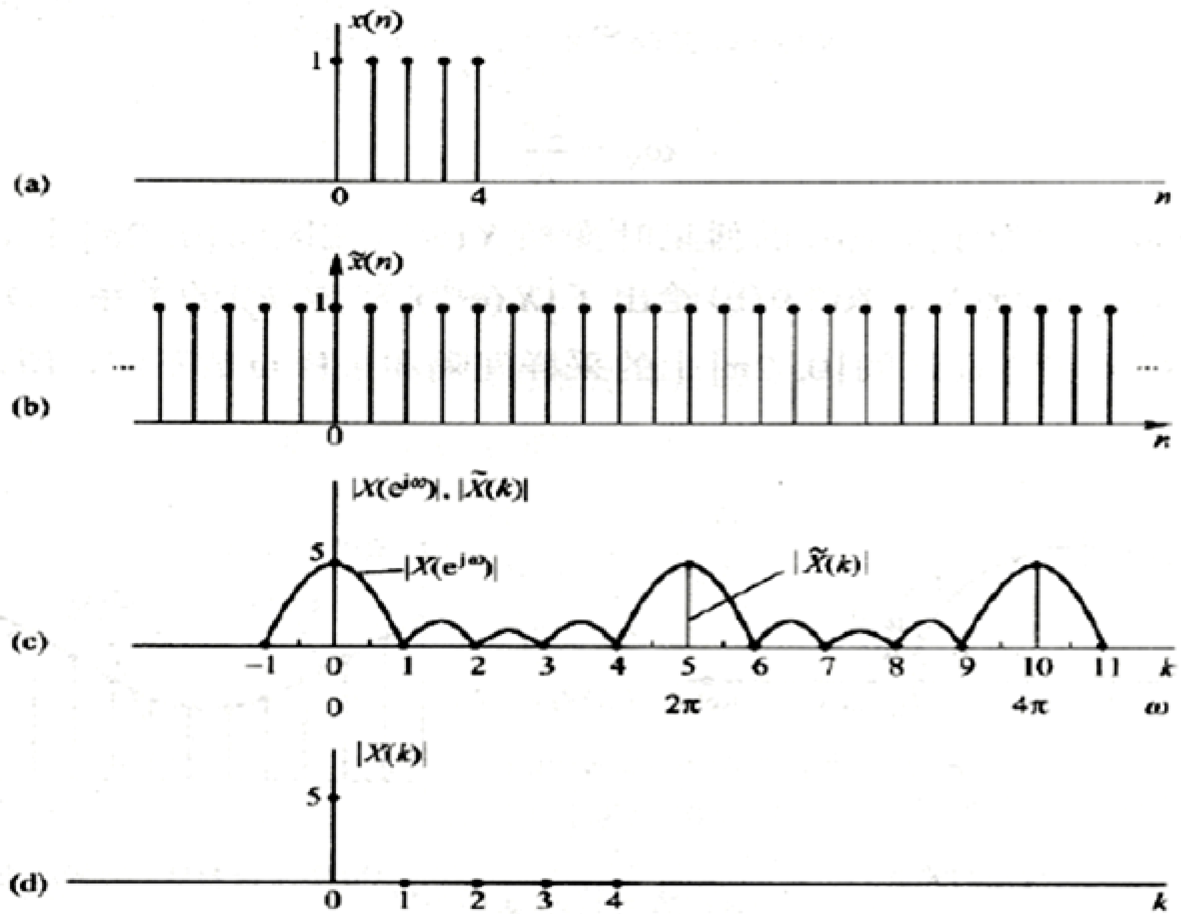


图 3.10　有限长序列 $x(n)$ 的 DFT 举例 1。(a) 有限长序列 $x(n)$；(b) $x(n)$ 的周期延拓序列的 $\tilde{x}(n)$ ($N=5$)；(c) $\tilde{x}(n)$ 的 DFS 系数的幅值 $|\tilde{X}(k)|$ 和 DTFT 的幅值 $|X(e^{j\omega})|$；(d) $x(n)$ 的 DFT 的幅值 $|X(k)|$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

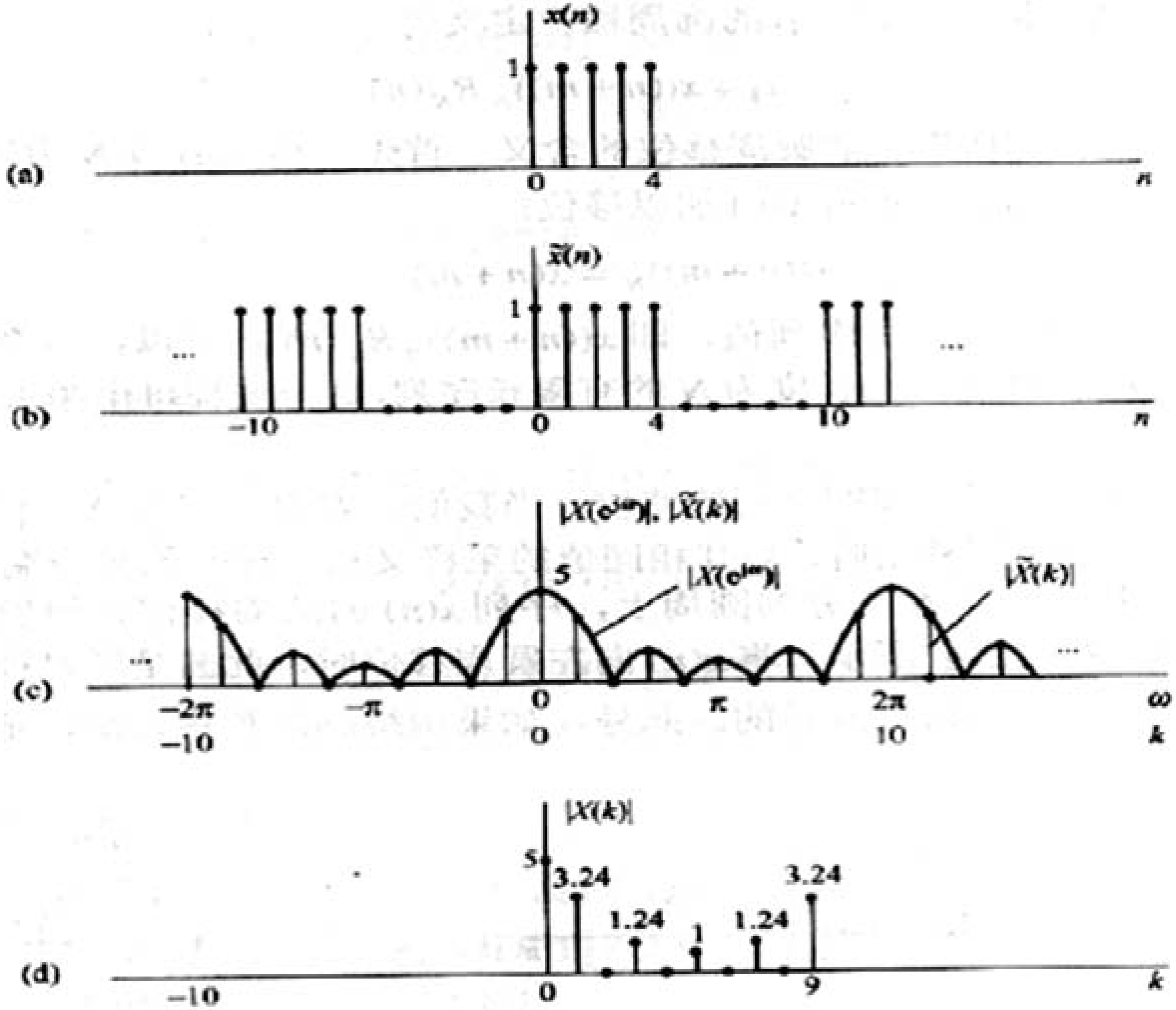
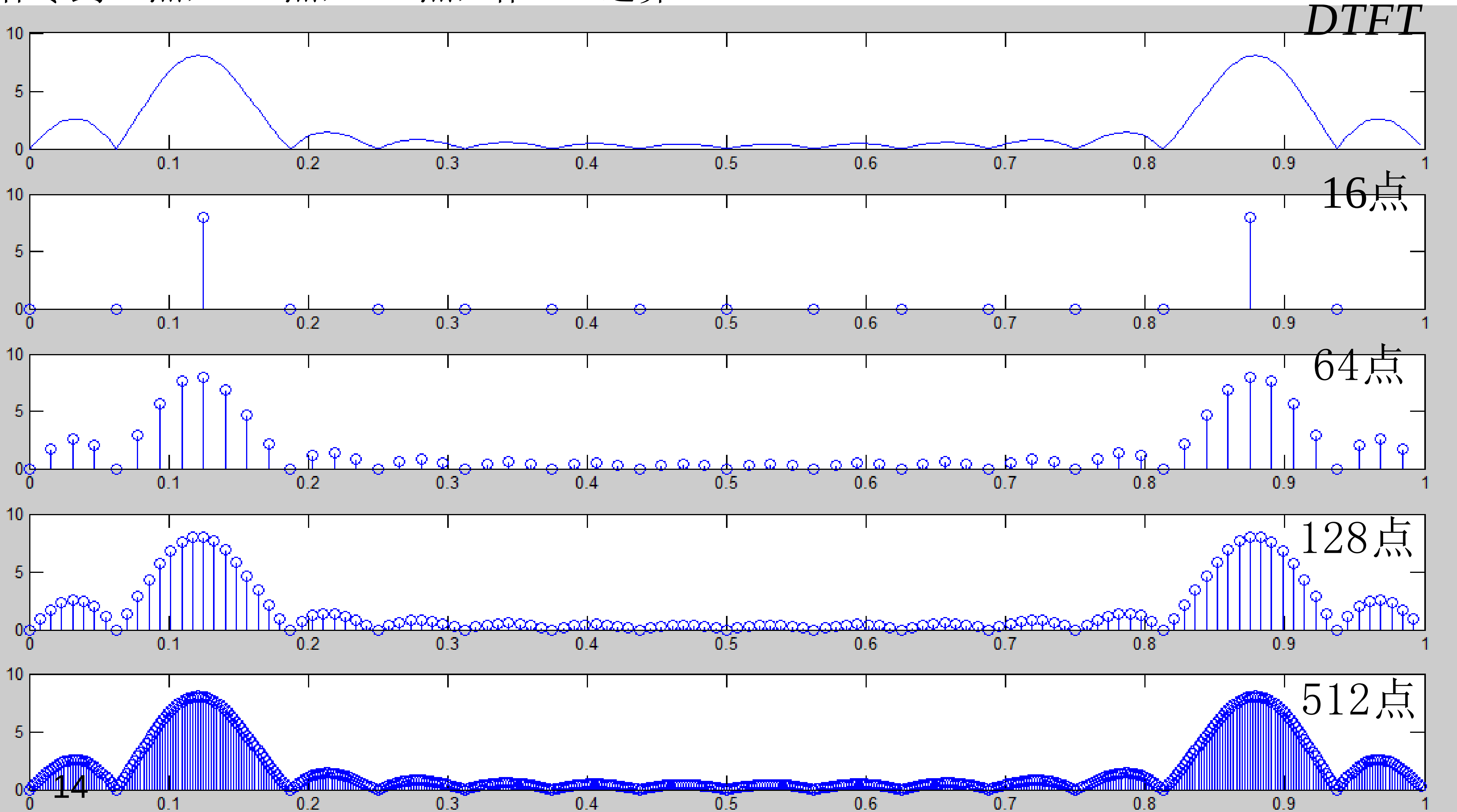


图 3.11　有限长序列 $x(n)$ 的 DFT 举例 2。(a) 有限长序列 $x(n)$；(b) $x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ ($N=10$)；(c) $x(n)$ 的 DFT 的幅值

Copyright @ Prof. Huiqi Li

$$x(n)=\sin(0.25\pi n)=\sin\left(\frac{2\pi}{8}n\right);n=0\cdots15,N=16$$

补零到64点，128点，512点，作DFT运算



```
>> n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)
L1=0:15
dft_16=fft(x,16)
L2=0:63
dft_64=fft(x,64)
L3=0:127
dft_128=fft(x,128)
L4=0:511
dft_512=fft(x,512)

nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(5,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(5,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(5,1,3)
stem(L2/64,abs(dft_64))
subplot(5,1,4)
stem(L3/128,abs(dft_128))
subplot(5,1,5)
stem(L4/512,abs(dft_512))
```


Copyright @ Prof. Huiqi Li

(b)

例：已知 $x(n)$ 是长为 N 点的有限长序列，$X(k)=DFT[x(n)]$现将$x(n)$的每两点之间补进 $r-1$ 个零值点,得到一个长为 rN 点的有限长度序列 $y(n)$，

$$y(n)=\begin{cases} x(n/r), & n=ir,\quad 0\le i<N \\ \mathbf{0}, & \text{其他 } n \end{cases}$$

试求 rN 点 $DFT[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

Copyright @ Prof. Huiqi Li

解:

$$y(n)=\begin{cases} x(n/r), & n=ir, i=0,1,\ldots,N-1 \\ 0, & others \end{cases}$$

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{rN-1} y(n)W_{rN}^{nk}=\sum_{i=0}^{N-1} x(ir/r)W_{rN}^{irk}$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1} x(i)W_{N}^{ik}, \qquad 0\le k\le rN-1$$

$$Y(k)=X((k))_N R_{rN}(k)$$

Y(k): 周期为rN

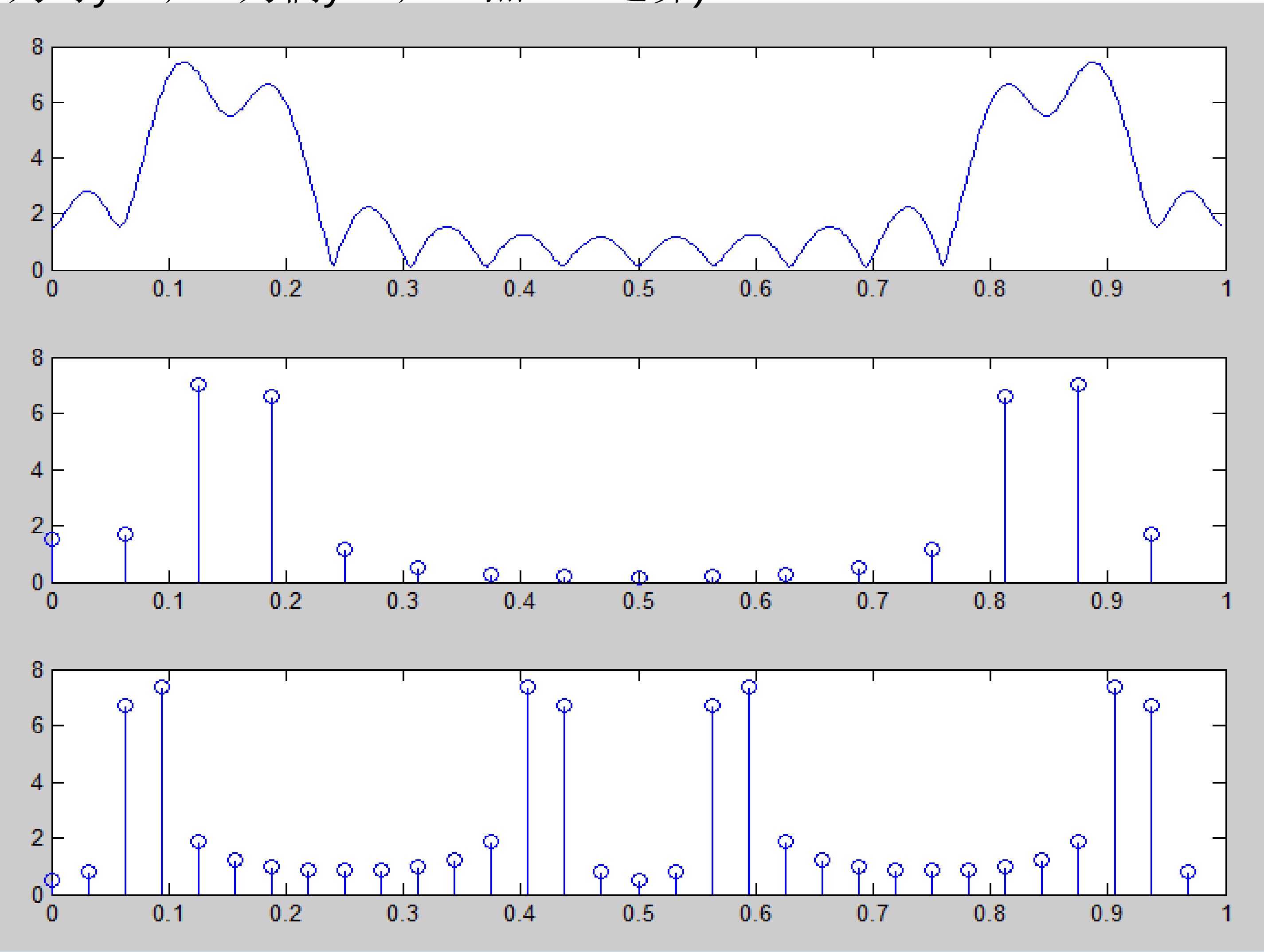
Y(k)：X(k) 周期性延展r 次。

Copyright @ Prof. Huiqi Li

插值序列的DFT　仿真如下：**r=2**

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.34*pi*n)；　n=0:15；16点DFT运算

(序列n为奇y=x；　n为偶y=0；16点DFT运算)



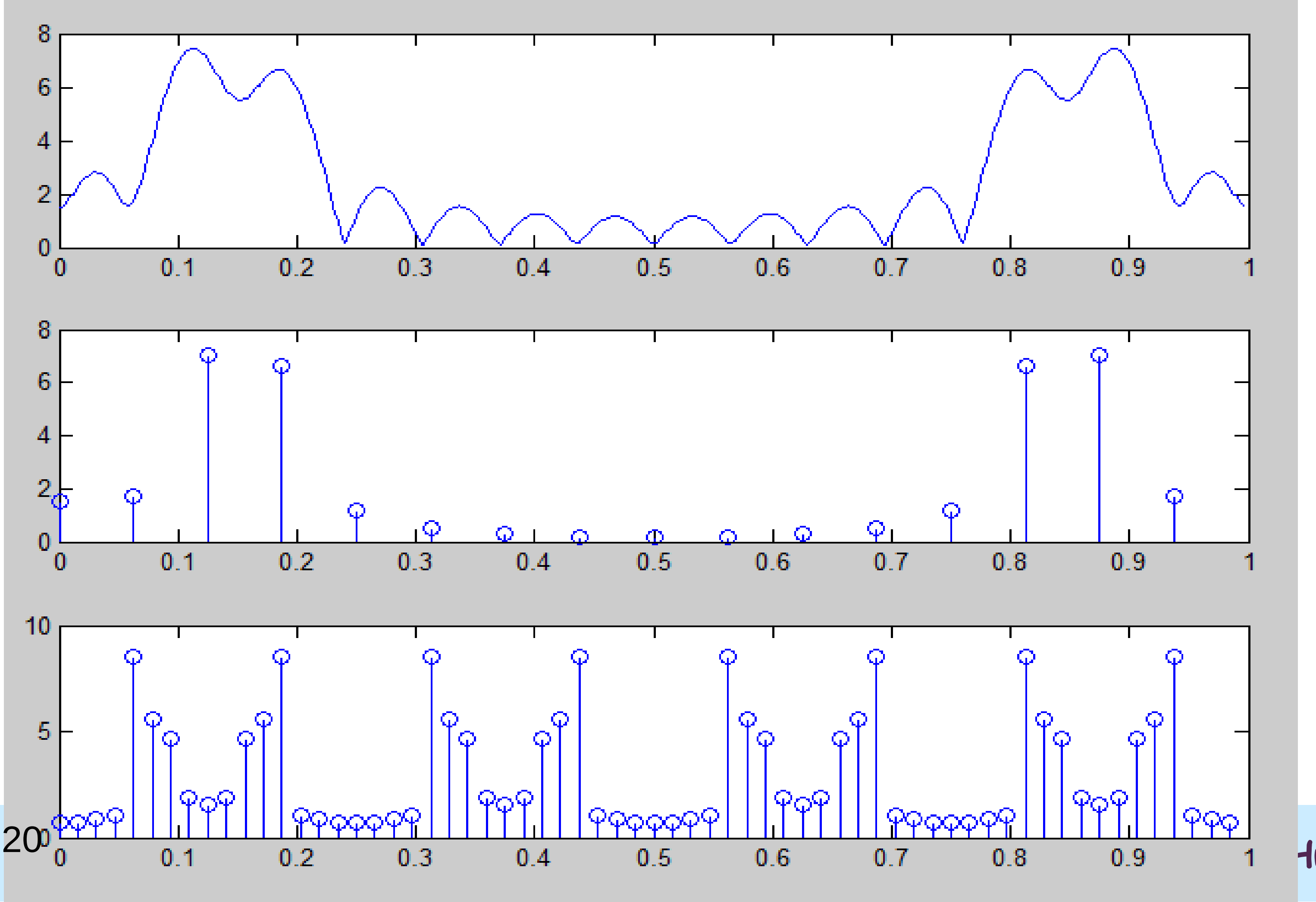
```
%插值序列DFT
n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)+sin(0.34*pi*n)

L1=0:15
dft_16=fft(x,16)

for m=1:32
if mod(m,2)==0
    y(m) = sin(0.25*pi*m/2)+sin(0.34*pi*m/2)
else
    y(m)=0
end
end

Ly=0:31
dft_y=fft(y,32)

nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(3,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(3,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(3,1,3)
stem(Ly/32,abs(dft_y))
```


Copyright @ Prof. Huiqi Li

插值序列的DFT　仿真如下：**r=4**

序列x=sin(0.25*pi*n)+ sin(0.34*pi*n) ;　n=0:15；16点DFT运算

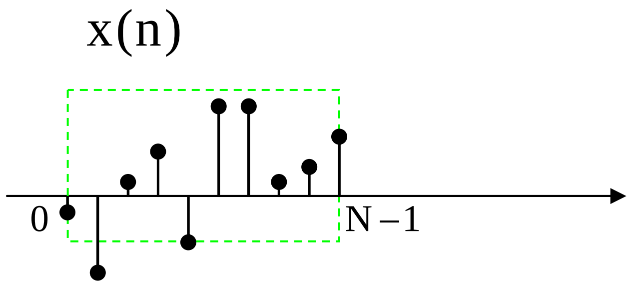
(序列mod(n,4)=0时y=x；　其余y=0；16点DFT运算)

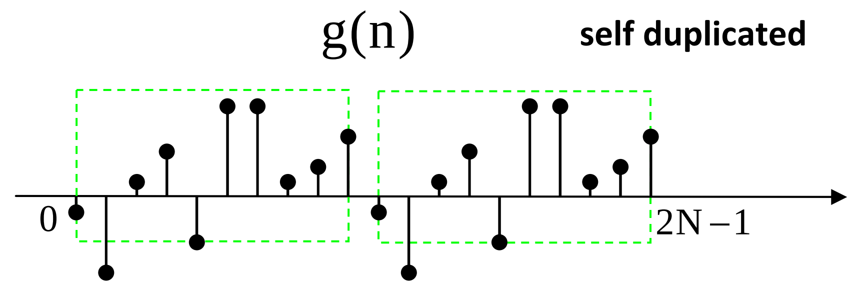


```
%插值序列DFT 02
n=0:15
x=sin(0.25*pi*n)+sin(0.34*pi*n)

L1=0:15
dft_16=fft(x,16)

for m=1:64
if mod(m,4)==0
    y(m) = sin(0.25*pi*m/2)+sin(0.34*pi*m/2)
else
    y(m)=0
end
end

Ly=0:63
dft_y=fft(y,64)

nx=0:15
K=512
dw=2*pi/K
k=0:511
X=x*exp(j*dw*nx'*k)
subplot(3,1,1)
plot(k*dw/(2*pi),abs(X))

subplot(3,1,2)
stem(L1/16,abs(dft_16))
subplot(3,1,3)
stem(Ly/64,abs(dft_y))
```


Copyright @ Prof. Huiqi Li

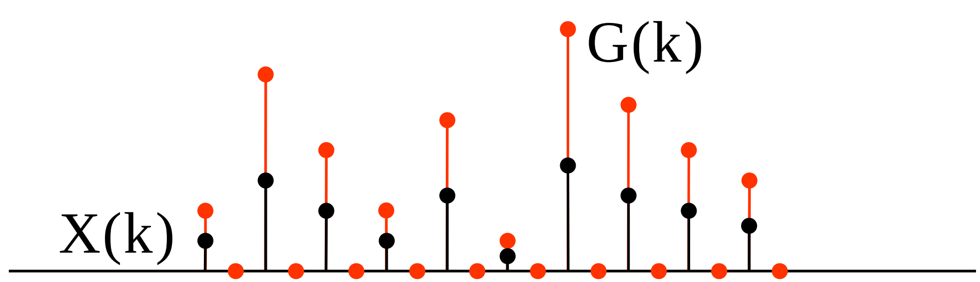
(c)





$$G(k)=DFT[g(n)]=\sum_{n=0}^{2N-1} g(n)e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn}(1+e^{-j\frac{2\pi}{2N}kN})$$

$$=\begin{cases} 2X(k/2), k: \text{even} \\ 0 \qquad , k: \text{odd} \end{cases} \qquad k=0,1,\ldots,2N-1$$



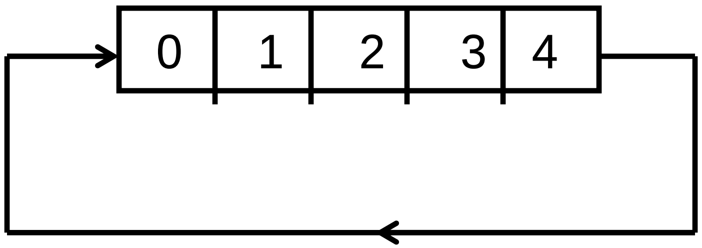
Copyright @ Prof. Huiqi Li

8.圆周移位定理

（**1**）时间移位定理

由DFS的性质：

右移m
$$\tilde{X}_1(k)=W_N^{km}\tilde{X}(k)$$



圆周移位

$$\begin{aligned}\therefore\ X_1(k) &= \tilde{X}_1(k)R_N(k)\\ &= W_N^{km}\tilde{X}(k)R_N(k)\\ &= W_N^{km}X(k)\end{aligned}$$

$$x_1(n)=x\left((n-m)\right)_N R_N(n)\leftrightarrow W_N^{km}X(k)$$

注意：有限长序列的圆周移位导致频谱线性相移，而对频谱幅度无影响

Copyright @ Prof. Huiqi Li

（2）频率移位定理（调制定理）

$$\forall x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$$

由DFS的性质（3－22）式：

$$\tilde{X}(k-l) \xleftrightarrow{DFS} W_N^{-nl}\tilde{x}(n)$$

$$\therefore X_2(k) = \tilde{X}(k-l)R_N(k) \xrightarrow{IDFT} W_N^{-nl}\tilde{x}(n)R_N(n)$$

$$= W_N^{-nl}x(n)$$

$$= x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nl}$$

$$\therefore X_2(k) = X\left((k-l)\right)_N R_N(k) \xleftrightarrow{DFT} W_N^{-nl}x(n)$$

注意：时域序列的调制等效于频域的圆周移位

Copyright @ Prof. Huiqi Li

9.圆周卷积（循环卷积）

（**1**）时域圆周卷积定理

由DFS的性质式：

$$\tilde{X}_3(k)=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$$

$$\updownarrow \text{DFS} \qquad \updownarrow \text{DFS}$$

周期卷积

$$\tilde{x}_3(n)=\tilde{x}_1(n)\,\tilde{\otimes}\,\tilde{x}_2(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

$$\therefore X_3(k) = \tilde{X}_3(k) R_N(k)$$

$$= \tilde{X}_1(k) \tilde{X}_2(k) R_N(k)$$

$$= X_1(k) X_2(k)$$

$$x_3(n) = \tilde{x}_3(n) R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) R_N(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2\big((n-m)\big)_N R_N(n)$$

$$= x_1(n) \circledast x_2(n)$$

$$\therefore X_1(k) X_2(k) \xleftrightarrow{DFT} x_1(n) \circledast x_2(n)$$

圆周卷积

Copyright @ Prof. Huiqi Li

（2）频域圆周卷积

$$x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

time	$x_3(n) = x_1(n) \circledast x_2(n)$ DFT $\Updownarrow$ IDFT $X_3(k) = X_1(k)X_2(k)$

frequency	$X_3(k) = \frac{1}{N} X_1(k) \circledast X_2(k)$ DFT $\Updownarrow$ IDFT $x_3(n) = x_1(n)x_2(n)$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

（**3**）线性卷积、周期卷积与圆周卷积的关系

考虑 **L** 点和 **M** 点序列 $\mathbf{y_1(n)}$ 和 $\mathbf{y_2(n)}$，两者线性卷积为：

$$y_3(n) = y_1(n) * y_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_1(m) y_2(n-m)$$

将 $\mathbf{y_1(n)}$ 和 $\mathbf{y_2(n)}$ 均以 **N** 为周期，延拓成两个周期序列，分别记为 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ ，对应的周期卷积为：

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \,\tilde{*}\, \tilde{x}_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m)$$

令 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ 的主值序列分别为 $x_1(n)$ ，$x_2(n)$（**N**点“有限长”序列）

Copyright @ Prof. Huiqi Li

则 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 N 点圆周卷积定义为 $\tilde{x}_3(n)$ 的主值序列：

$$x_3(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) = \tilde{x}_3(n) R_N(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \right] R_N(n)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) [x_2((n-m))_N R_N(n)]$$

圆周反转和圆周平移！！

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} y_3(n+pN)$$

两个长度可能并不等的序列分别以同样周期 **N** 延拓后所作之周期卷积为两者未延拓前之线性卷积的周期为 **N** 的延拓，若满足

$$\mathbf{N \geq L + M - 1}$$

则周期卷积之主值序列即圆周卷积与线性卷积内容完全相同！

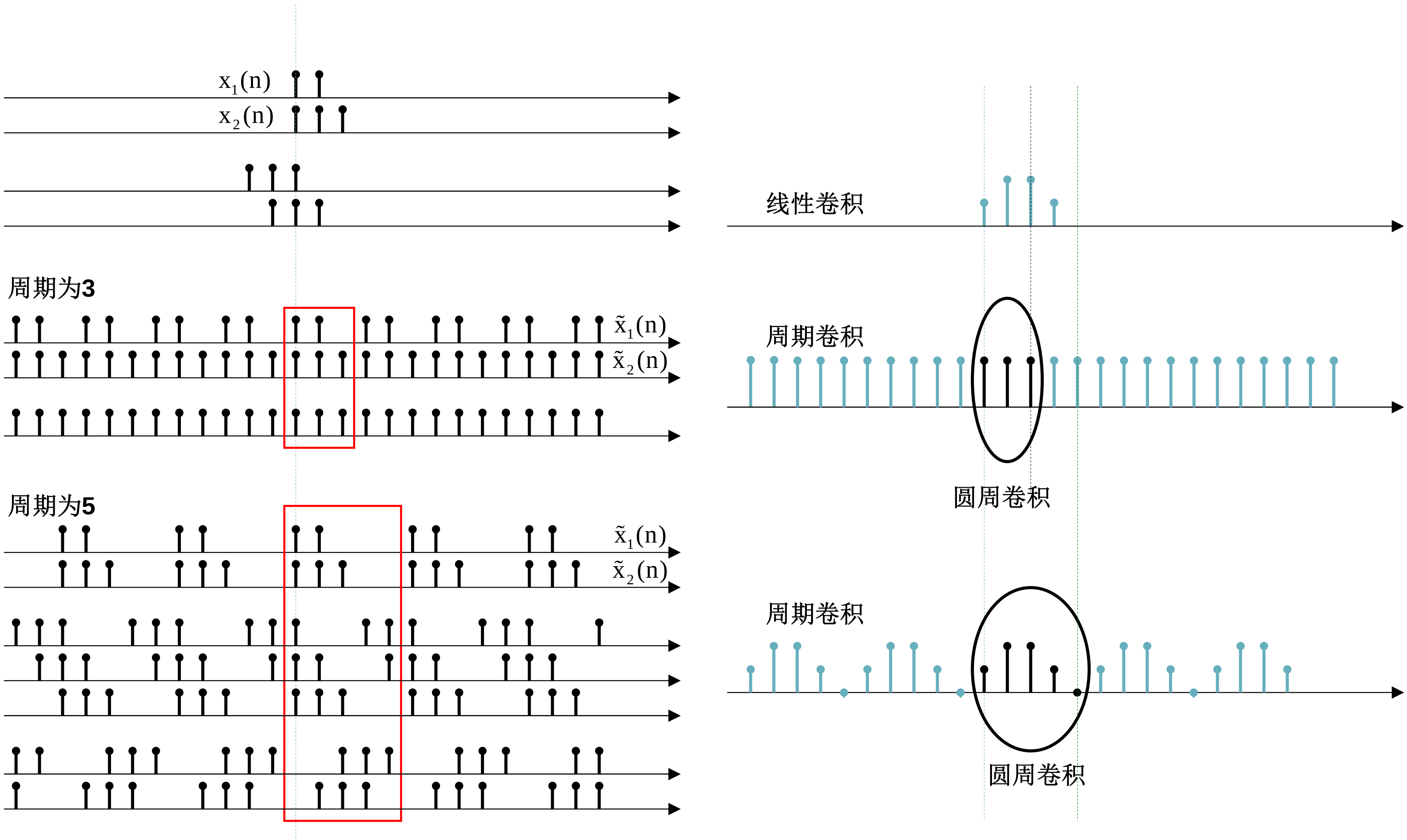
Conclusion

Copyright @ Prof. Huiqi Li

- 周期卷积是线性卷积以N为周期的周期延拓
- 圆周卷积是周期卷积的主值序列
- 圆周卷积和线性卷积相等的条件：

$$N \geqslant L+M-1$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li



Copyright @ Prof. Huiqi Li

圆周卷积在信号处理中的应用：计算序列的线性卷积

快速卷积法

基于圆周卷积定理，可以利用**DFT**计算两个有限长序列的线性卷积，后面将会看到，**DFT**可以快速计算，由此可以快速计算线性卷积：

1.补零**:**将两个序列补零，使得**DFT**点数为两者线性卷积的点数；

$$x(n) \to x'(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & N \le n \le L-1 \end{cases}$$

$$h(n) \to h'(n) = \begin{cases} h(n) & 0 \le n \le M-1 \\ 0 & M \le n \le L-1 \end{cases} \qquad L \ge N+M-1$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

2.DFT: 对补零后的两序列分别作**DFT**，将结果相乘

$$X'(k) = DFT\left[x'(n)\right]$$

$$H'(k) = DFT\left[h'(n)\right]$$

3.IDFT: 对**2**中相乘结果作**IDFT**，即为原序列的线性卷积

$$x(n) * h(n) = IDFT\left[X'(k)H'(k)\right] \qquad 0 \le n \le L-1$$

$$\left(x'(n) \circledast h'(n)\right)$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

如果$N >> M$ ？

重叠保留/相加法

将**x(n)**分解成几段之和，每段长为**L**点

重叠相加：两序列**h(n), x$_k$(n)**补零到**L+M-1**点，每段卷积最后**M-1**点和下一段前**M-1**点重叠相加。

重叠保留：不补零，**x(n)**分段时相邻两段有**M-1**个点重叠，每段和**h(n)**圆周卷积的前**M-1**点舍去。

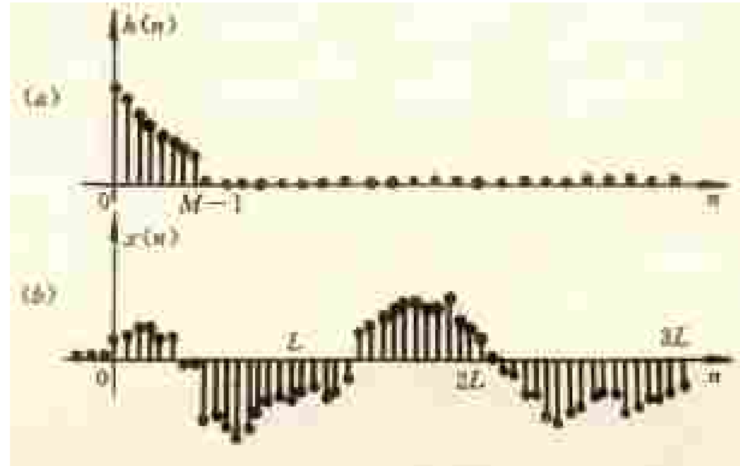


图 3—12 有限列长的单位取样响应及待处理的信号
(a) 单位取样响应 $h(n)$；(b) 待处理的信号 $x(n)$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

重叠相加法图示

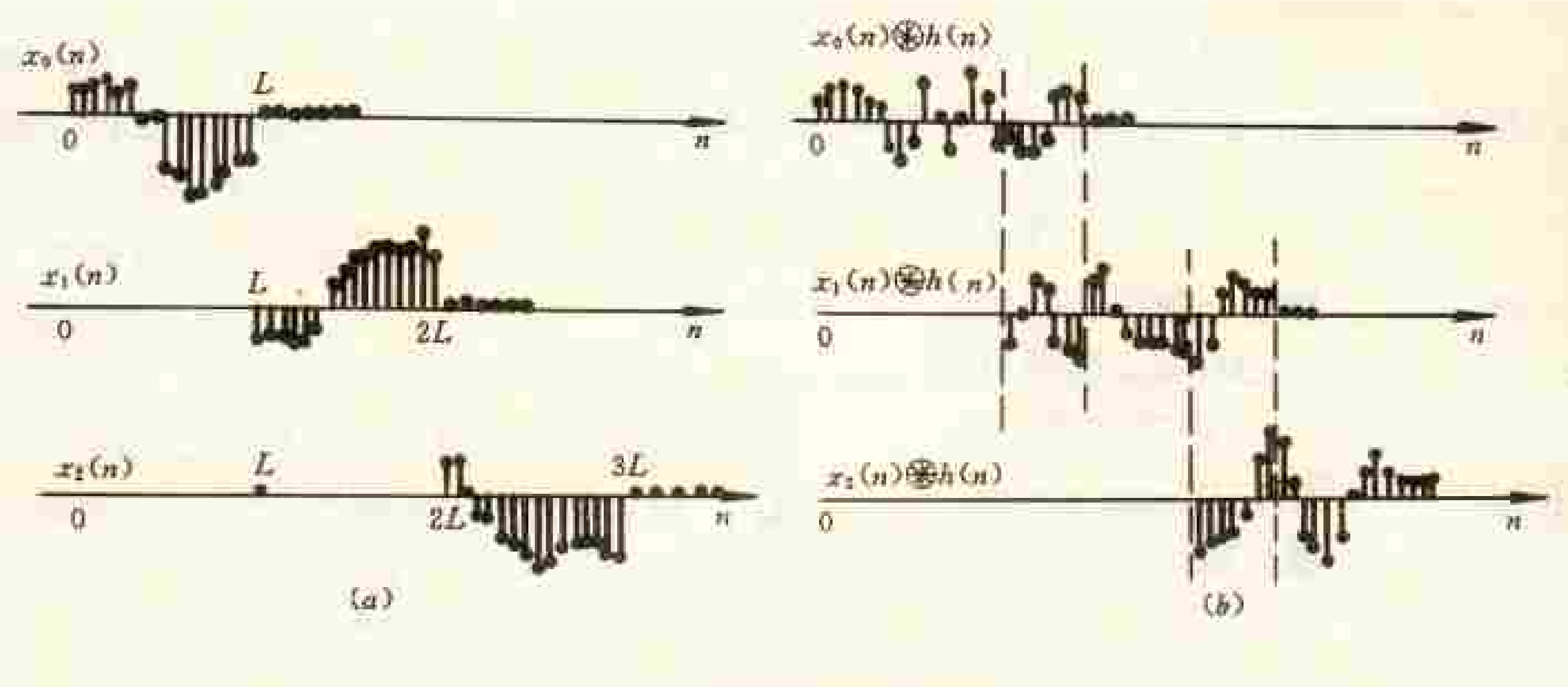


图 3−13 重叠相加法图形

(a) 将 $x(n)$分解为列长为 L 的不重叠的几段 (b) 每段 $x_k(n)$和 $h(n)$卷积的结果

Copyright @ Prof. Huiqi Li

重叠保留法图示

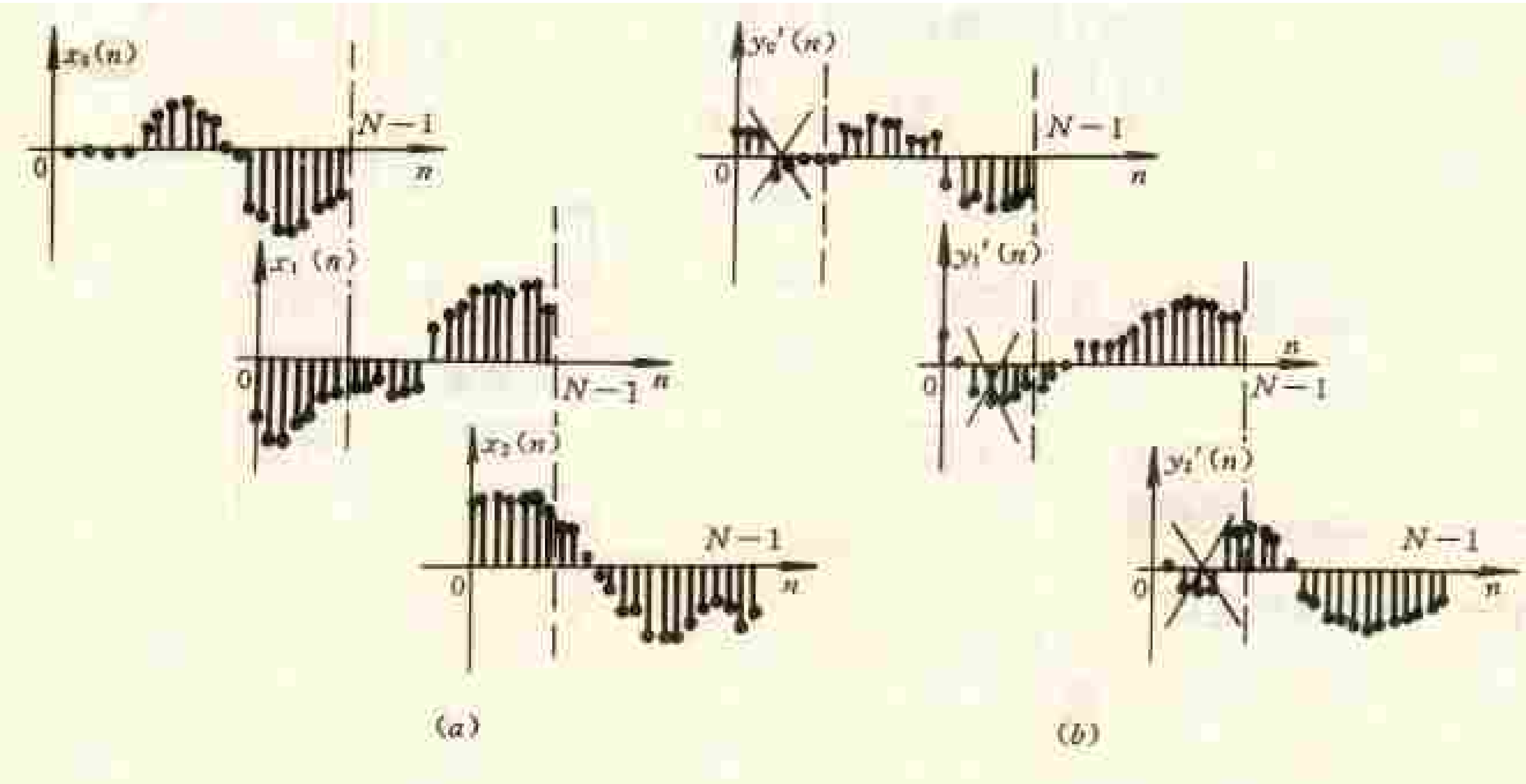


图 3−15　重叠保留法示意图

(a) $x(n)$分解为列长为 N 的重叠的几段

(b) 每一段与 $h(n)$圆周卷积的结果，图中标出在形成线性卷积时每一段要去掉的部分

Copyright @ Prof. Huiqi Li

10.圆周（循环）相关定理

$$X(k)=X_1^*(k)X_2(k)$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$x(n)=x_1^*(-n)\otimes x_2(n)$$

$$\because \tilde{X}_1^*(K)\xleftrightarrow{DFS}\tilde{x}_1^*(-n)$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)x_1^*\left((m-n)\right)_N R_N(n)$$

$$=\sum_{l=0}^{N-1}x_2\left((n+l)\right)_N x_1^*\left((l)\right)_N R_N(n)$$

其中$l\overset{\triangle}{=}m-n-pN$

$$=\sum_{l=0}^{N-1}x_1^*(l)x_2\left((l+n)\right)_N R_N(n)$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

11.帕斯维尔（**Parseval**）定理　　　**(**能量定理**)**

$$\forall x(n) \leftrightarrow X(k)$$

则 $$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

12. DFT的对称性

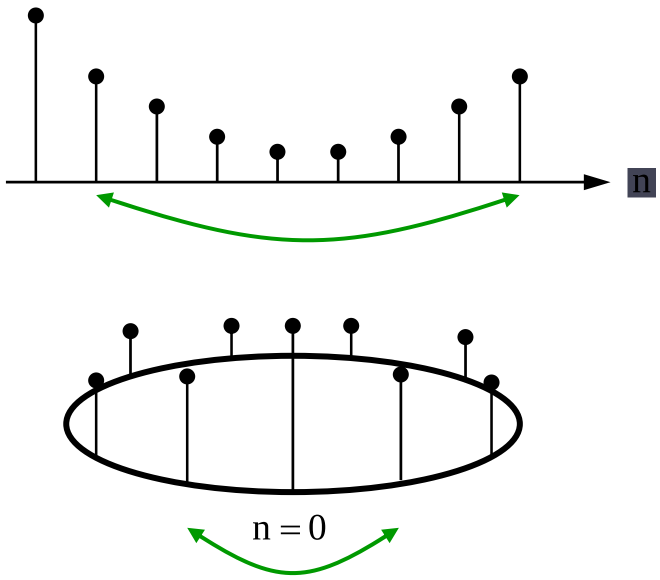
什么是圆周对称？

（1）回溯周期序列：主值序列（2D）

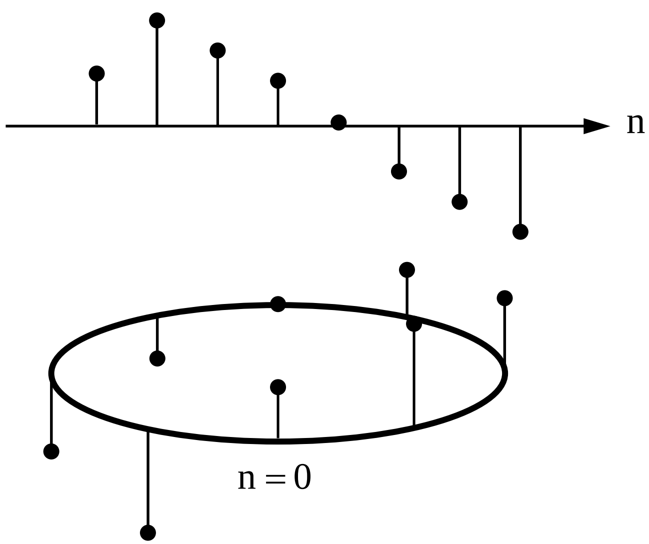
（2）圆周分析：圆周投影保持2π 周期性（3D）

（3）圆周对称 = 周期化后对称

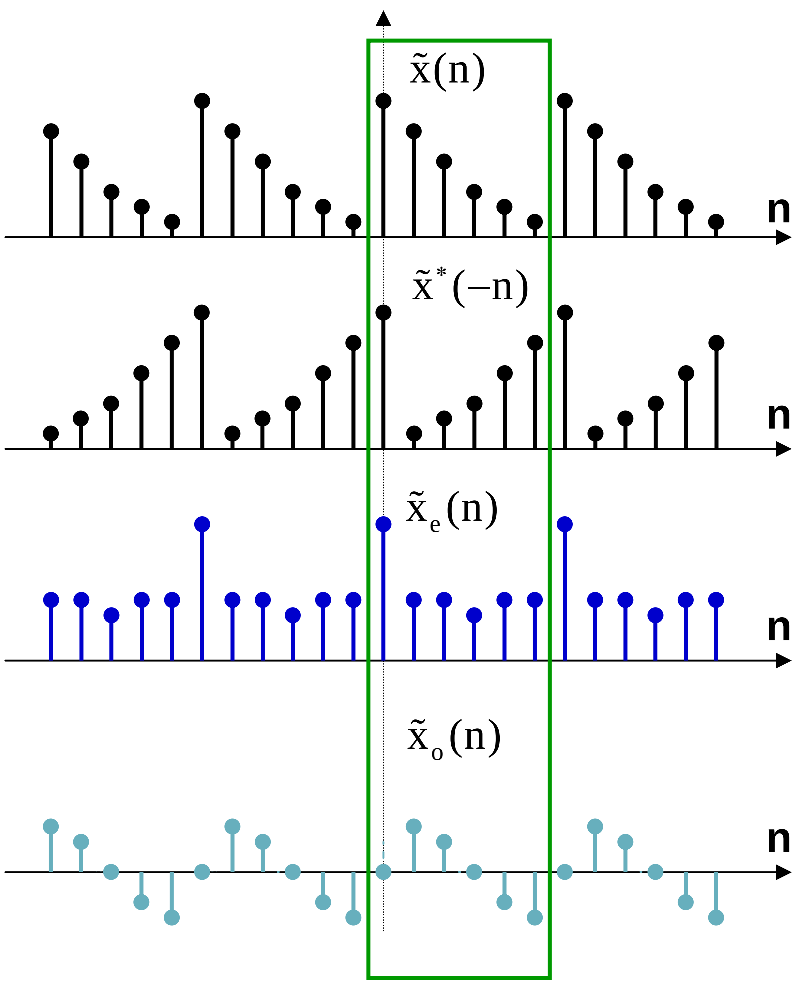
$x(n)=x(N-n)$ 圆周偶对称

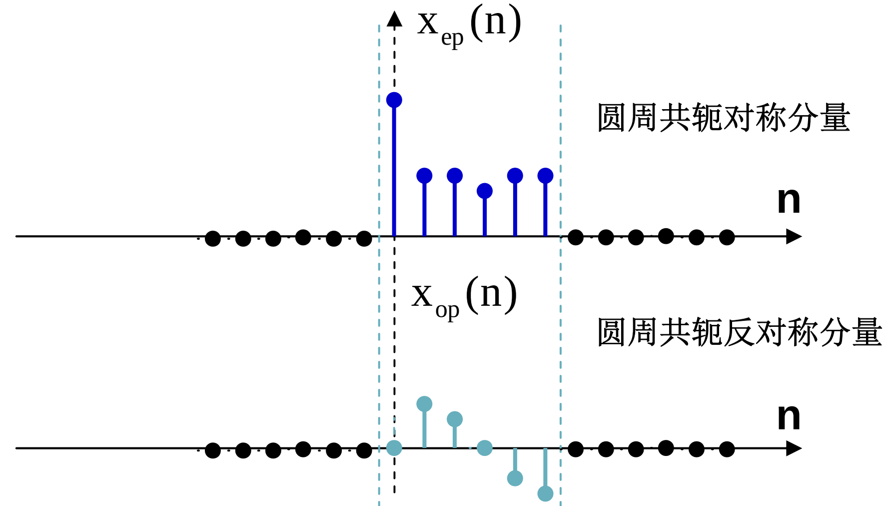


$x(n)=-x(N-n)$ 圆周奇对称



Copyright @ Prof. Huiqi Li





序列的对称分解

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n)$$

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

$$\tilde{x}_e(n) = \tfrac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)]$$

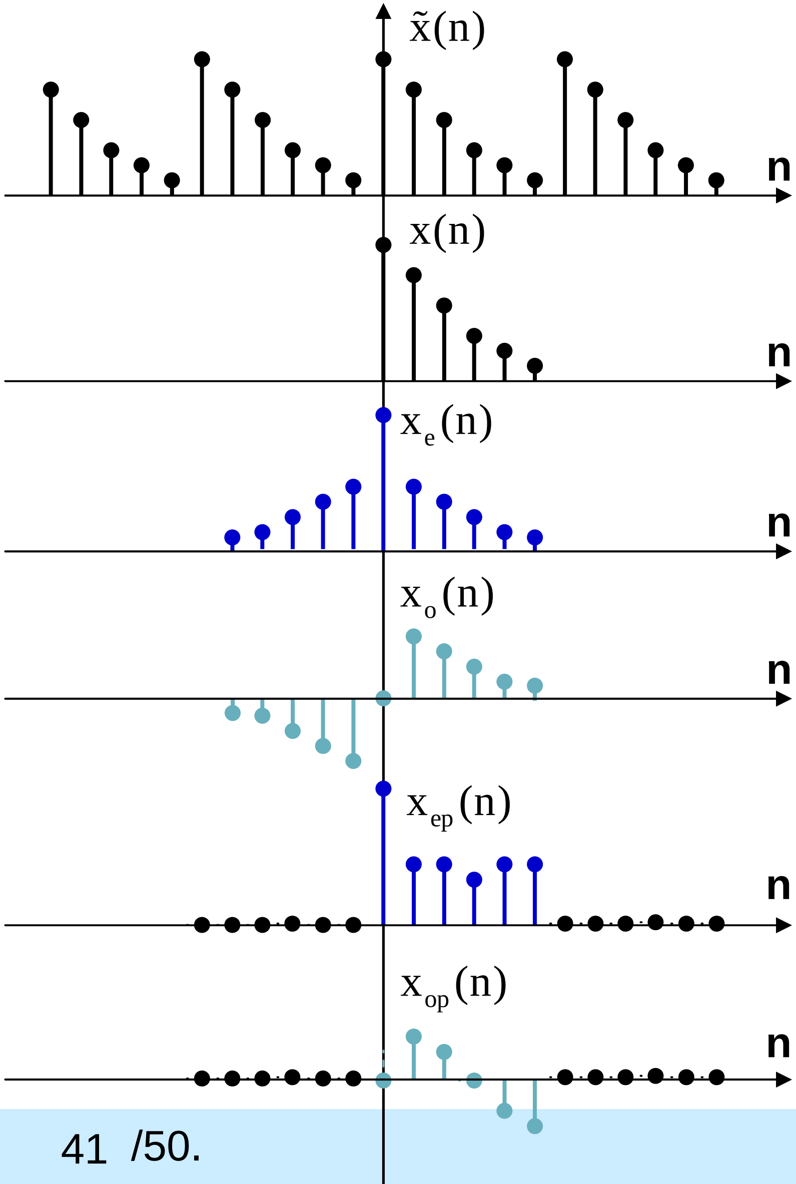
$$\tilde{x}_o(n) = \tfrac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)]$$

圆周反转共轭

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n) = \tfrac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n) = \tfrac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li



$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

普通平移

$$x_{ep}(n) = [x_e(n) + x_e(n-N)]R_N(n)$$

N点序列 2N−1序列

$$x_{op}(n) = [x_o(n) + x_o(n-N)]R_N(n)$$

有限长序列共轭对称分量，共轭反对称分量

↓

周期序列共轭对称分量，共轭反对称分量

↓

有限长序列圆周共轭对称分量，圆周共轭反对称分量

Copyright @ Prof. Huiqi Li

奇偶序列的DFT

$$x(n) = -x(-n) = -x((-n))_N R_N(n)$$ 奇序列

$$\Rightarrow$$

$$X(k) = -X(-k) = -X((N-k))_N R_N(k)$$ 奇对称

$$x(n) = x(-n) = x((-n))_N R_N(n)$$ 偶序列

$$\Rightarrow$$

$$X(k) = X(-k) = X((-k))_N R_N(k)$$ 偶对称

Copyright @ Prof. Huiqi Li

共轭复序列的DFT

$$\boxed{\mathrm{DFT}[x^*(n)] = X^*((-k))_N R_N(k) = X^*(-k)}$$

$$\mathrm{DFT}[x^*(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk}\right]^* R_N(k)$$

$$= X^*((-k))_N R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n}\right]^* R_N(k)$$

$$\boxed{\mathrm{DFT}[x^*((-n))_N R_N(n)] = \mathrm{DFT}[x^*(-n)] = X^*(k)}$$

$$\mathrm{DFT}[x^*((-n))_N R_N(n)]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x^*((-n))_N R_N(n) W_N^{nk} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((-n))_N W_N^{-nk}\right]^* = \left[\sum_{m=0}^{-N+1} x((m))_N W_N^{mk}\right]^*$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N W_N^{nk}\right]^* = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}\right]^* = X^*(k)$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

复数序列的DFT

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

DFT $\updownarrow$ $\updownarrow$

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$$

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n)$$

$\updownarrow$ $\updownarrow$

$$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n) = \tfrac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] = \tfrac{1}{2}[x(n) + \tilde{x}^*(-n)R_N(n)]$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n) = \tfrac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] = \tfrac{1}{2}[x(n) - \tilde{x}^*(-n)R_N(n)]$$

$$\mathrm{DFT}[x^*(-n)] = \mathrm{DFT}[\tilde{x}^*(-n)R_N(n)] = X^*(k)$$

$$\mathrm{DFT}[x^*(n)] = X^*(-k) = \tilde{X}^*(-k)R_N(k)$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

虚序列的DFT

$$\boxed{x(n) = jx_I(n) \xrightleftharpoons{\text{DFT}} X(k) = X_{op}(k)}$$

$$\mathrm{Re}[X_{op}(k)] = -\mathrm{Re}[X_{op}(-k)]$$

$$\mathrm{Im}[X_{op}(k)] = \mathrm{Im}[X_{op}(-k)]$$

实序列的DFT

$$\boxed{x(n) = x_R(n) \xrightleftharpoons{\text{DFT}} X(k) = X_{ep}(k)}$$

$$\mathrm{Re}[X_{ep}(k)] = \mathrm{Re}[X_{ep}(-k)] \qquad |X_{ep}(k)| = |X_{ep}(-k)|$$

$$\mathrm{Im}[X_{ep}(k)] = -\mathrm{Im}[X_{ep}(-k)] \qquad \arg[X_{ep}(k)] = -\arg[X_{ep}(-k)]$$

上述两种情况不论哪一种都只要知道一半数目的 $X(k)$，利用对称性质就可得到另一半数目的 $X(k)$。在 **DFT** 运算中利用这个特点，可以提高运算效率。

Copyright @ Prof. Huiqi Li

把两个实数序列$x_1(n)$和$x_2(n)$组合为单一的复序列$x(n)$，当算出复序列$X(k)$后，可以将$X(k)$分成两个独立的分量$X_{ep}(k)$和$X_{op}(k)$，它们分别对应于$x_1(n)$和$x_2(n)$的**DFT**。在一次计算中可以得到两个独立信号的变换。

Copyright @ Prof. Huiqi Li

x(n)	X(k)
偶序列	偶序列
奇序列	奇序列
实	实部为偶，虚部为奇
虚	实部为奇，虚部为偶
实偶	实偶
实奇	虚奇
虚偶	虚偶
虚奇	实奇
实部为偶，虚部为奇 实部为奇，虚部为偶	实 虚

Copyright @ Prof. Huiqi Li

DFT 可看作一组滤波器

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\qquad k=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn},\qquad n=0,1,\ldots,N-1$$

$$x_N=\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\\vdots\\x(N-1)\end{bmatrix},\qquad X_N=\begin{bmatrix}x(0)\\x(1)\\\vdots\\x(N-1)\end{bmatrix}$$

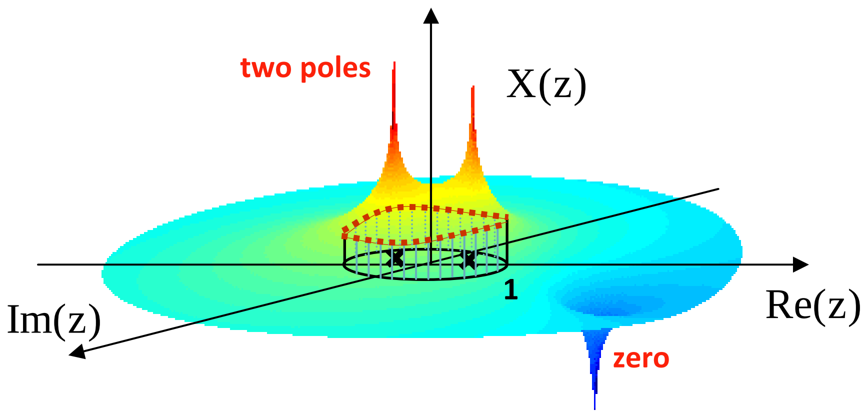
$$W_N=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&W_N&W_N^2&\cdots&W_N^{N-1}\\1&W_N^2&W_N^4&\cdots&W_N^{2(N-1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&W_N^{N-1}&W_N^{2(N-1)}&\cdots&W_N^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}$$

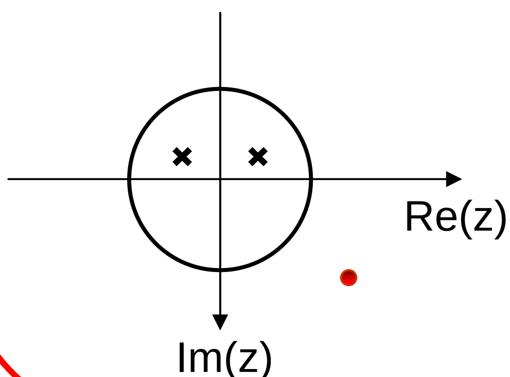
DFT是x(n) 序列的线性变换

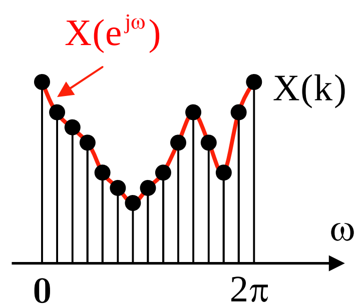
$$X_N=W_Nx_N$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

DFT与Z变换、DTFT的关系（ZT → DTFT → DFT）







$$
\begin{aligned}
X(z_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \Big|_{z=z_k=W_N^{-k}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \Big|_{\omega=2\pi k/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\
&= \mathrm{DFT}[x(n)] \\
&= X(k)
\end{aligned}
$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li