100052205

数字信号处理

Digital Signal Processing

李慧琦 教授

信息与电子学院

北京理工大学

Tel: +86 (10) 68918239

Email: huiqili@bit.edu.cn

本节主要内容

- **Z** 变换的性质
- 单、双边**Z**变换
- 系统函数

§2-10 z变换的定理与性质

1、线性

$$Z\left[x(n)\right]=X(z),R_{x1}<|z|<R_{x2}$$

$$Z\left[y(n)\right]=Y(z),R_{y1}<|z|<R_{y2}$$

则：

$$Z\left[ax(n)+by(n)\right]=aX(z)+bY(z),R_1<|z|<R_2$$

通常两序列和的Z变换的收敛域为两个相加序列的收敛域的公共区域

如果线性组合中某些零点与极点互相抵消， 则收敛域可能扩大

例 已知

$$x(n)=a^n u(n)$$灌

$$y(n)=a^n u(n-N)$$

求$x(n)-y(n)$的Z变换。

解 由表2-1可知

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

又

$$Y(z)=\sum_{n=N}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{a^N z^{-N}}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

利用线性性质，***x*(*n*)-*y*(*n*)**的*Z*变换为

$$X(z)-Y(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a^n z^{-n}=\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}\qquad |z|>0$$

这时由于极点***z*=*a***消去，因此收敛域不是|***z***|>|***a***|，而扩展为|***z***|>**0**。 实际上，由于***x*(*n*)-*y*(*n*)**是***n*≥0**的有限长序列，故收敛域是除了|***z***|=**0**外的全部*Z*平面。

2. 序列的移位

$$Z[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

位移n_0可以为正（右移）也可以为负（左移）。

证

$$Z[x(n+n_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+n_0) z^{-n} = z^{n_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} = z^{n_0} X(z)$$

Z[x(n)] 和**Z[x(n+n_0)]**收敛域相同， 在**z=0** 或**z=** ∞可能除外。

n_0>0, 在**z=** ∞处引入极点， 在**z=0**处引入零点。

n_0<0, 在**z= 0**处引入极点， 在**z=**∞处引入零点。

3. 乘指数序列

$$Z[a^n x(n)] = X(a^{-1}z) \qquad |a|R_{x-} <|z|<|a|R_{x+}$$

证

$$Z[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n}$$

$$= X(a^{-1}z) \qquad R_{x-} <|a^{-1}z|< R_{x+}$$

所有极点、零点的坐标乘以因子**a**。

例

$$Z[u(n)] = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad \infty \geqslant |z| > 1$$

$$Z[a^n u(n)] = \frac{1}{1-(a^{-1}z)^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad \infty \geqslant |z| > |a|$$

4. X(z)的微分

$$Z[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

证

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}\right] \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+} \qquad \text{收敛域不变}$$

交换求和与求导的次序，则得

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{dz}(z^{-n}) = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = -z^{-1}Z[nx(n)]$$

所以

$$Z[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

5.复数序列的共轭

$$Z[x^*(n)] = X^*(z^*) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

式中，符号“*”表示取共轭复数。

证

$$Z[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n)(z^*)^{-n}]^*$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n}\right]^* = X^*(z^*) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

6. 初值定理（由X(z)求初值）

对于因果序列$x(n)$，即$x(n)=0$, $n<0$, 有

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

证　由于$x(n)$是因果序列，则有:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

7、 终值定理(由X(z)求终值)

若$x(n)$为因果序列，且$X(z)=Z[x(n)]$的全部极点，除有一个一阶极点可以在$z=1$处外，其余都在单位圆内，则

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$$

证 利用序列的移位性质可得

$$Z[x(n+1)-x(n)] = (z-1)X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

再利用$x(n)$为因果序列可得

$$(z-1)X(z) = \sum_{n=-1}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

分析一下(z-1)*X*(z)的收敛域。由于*X*(z)在单位圆上只有在z=1 处可能有一阶极点，函数(z-1)X(z)将抵消掉这个z=1处的可能极点，因此(z-1)X(z)的收敛域将包括单位圆，即在1≤|z|≤∞上都收敛，所以可以取z→1 的极限,

$$\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)] = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=-1}^{n}[x(m+1)-x(m)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\{[x(0)-0]+[x(1)-x(0)]+[x(2)-x(1)]+\cdots$$

$$+[x(n+1)-x(n)]\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}[x(n+1)] = \lim_{n\to\infty}x(n)$$

由于 $\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$ 是$X(z)$在z=1 处的留数，因此终值定理也可用留数表示， 即:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\mathrm{Res}[X(z),1]$$

$$x(\infty)=\mathrm{Res}[X(z),1]$$

8. 序列的卷积

若

$$w(n) = x(n) * y(n)$$

则

$$W(z) = Z[w(n)] = X(z)Y(z)$$

$$\max[R_{x-}, R_{y-}] < |z| < \min[R_{x+}, R_{y+}]$$

收敛域为两收敛域公共部分，若有极点消去，收敛域可以扩大

在线性时不变系统中，如果输入为$x(n)$，系统的单位脉冲响应为$h(n)$，则输出$y(n)$是$x(n)$与$h(n)$的卷积；利用卷积定理， 通过求出$X(z)$和$H(z)$，然后求出乘积$X(z)H(z)$的Z反变换，从而可得$y(n)$。这个定理得到广泛应用。

例　设$x(n)=a^n u(n)$,

琚琚　　$h(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1)$琚琚

求$y(n)=x(n) * h(n)$。

解

$$X(z)=Z[x(n)]=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

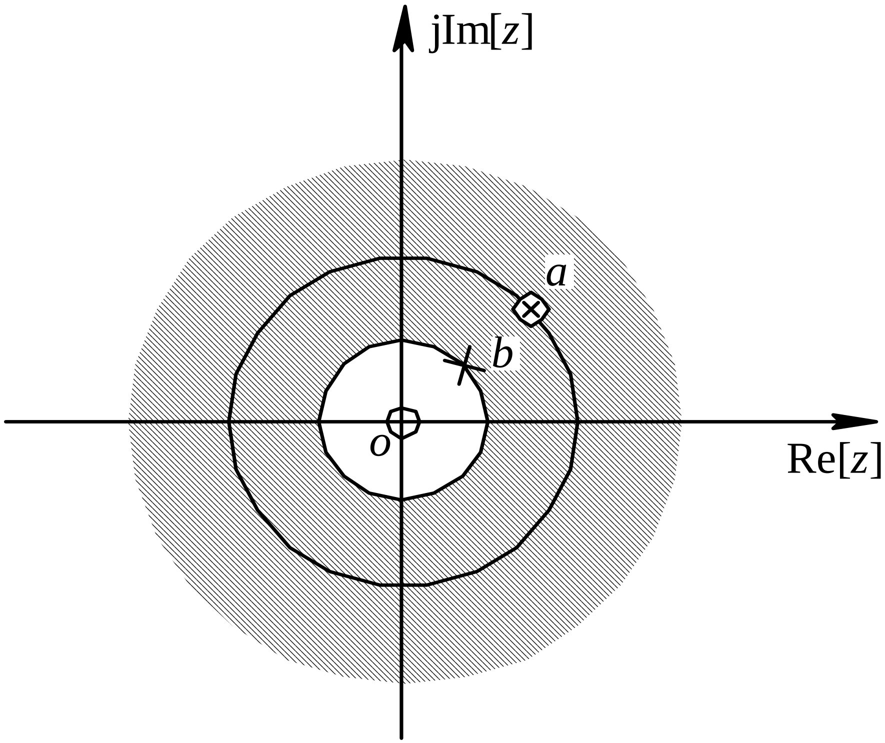
$$H(z)=Z[h(n)]=\frac{z}{z-b}-\frac{a}{z-b}=\frac{z-a}{z-b} \qquad |z|>|b|$$

所以

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z}{z-b} \qquad |z|>b$$

其Z反变换为

$$
\begin{aligned}
y(n) &= x(n) * h(n) \\
&= Z^{-1}[Y(z)] \\
&= b^n u(n)
\end{aligned}
$$



Y(z)的零极点及收敛域

显然，在$z=a$处，$X(z)$的极点被$H(z)$的零点所抵消，如果$|b|<|a|$，则$Y(z)$的收敛域比$X(z)$与$H(z)$收敛域的重叠部分要大。

9. 序列乘积的z变换（复卷积定理）

若 $$w(n)=x(n)y(n)$$

则

$$W(z)=Z[w(n)]=Z[x(n)y(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

$$R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}$$

式中，*c*是哑变量V平面上*X*(*v*)与*Y*(*z*/*v*)的公共收敛域内环绕原点的一条反时针旋转的单封闭围线，满足:

$$R_{x-} < |v| < R_{x+} \quad , \quad R_{y-} < \left|\frac{z}{v}\right| < R_{y+}$$

将两个不等式相乘即得Z平面的收敛域为

$$R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+} \text{环}$$

V平面收敛域为

$$\max\left[R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}}\right] < |v| < \min\left[R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}}\right]$$

证 $W(z)=Z[w(n)]=Z[x(n)y(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)z^{-n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)v^{n-1}dv\right]y(n)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\left[\oint_c X(v)v^{n}\frac{dv}{v}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\left[X(v)\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}\right]\frac{dv}{v}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \qquad R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}$$

由推导过程看出**$X(v)$**的收敛域就是**$X(z)$**的收敛域，**$Y(z/v)$**的收敛域（**z/v**的区域）就是**$Y(z)$**的收敛域（**z**的区域），从而收敛域亦得到证明。 葍

不难证明，由于乘积**$x(n)y(n)$**的先后次序可以互调，故**X,Y**的位置可以互换，故下式同样成立。

$$W(z)=Z[x(n)y(n)]$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c Y(v)X\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv \qquad R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}$$

而此时围线c所在收敛域为

$$\max\left[R_{y-},\frac{|z|}{R_{x+}}\right]<|v|<\min\left[R_{y+},\frac{|z|}{R_{x-}}\right]$$

复卷积公式可用留数定理求解，但关键在于确定围线所在的收敛域。

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv=\sum_k \mathrm{Res}\left[X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1},a_k\right]$$

式中，$\{a_k\}$ 为 $X(v)Y\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}$ 在围线*c*内的全部极点。

若用$v=e^{j\theta}$, $z=e^{j\omega}$代入式，则可得

$$W(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

显然，上式是$X(e^{j\omega})$与$Y(e^{j\omega})$的卷积，又称为复卷积。

10. 帕塞伐（Parseval）定理

利用复卷积定理可以得到重要的帕塞伐定理。若有两序列$x(n)$、$y(n)$，则有:

$X(z)=Z[x(n)]$　　　　$R_{x-}<|z|<R_{x+}$珎漌

$Y(z)=Z[y(n)]$　　　　$R_{y-}<|z|<R_{y+}$珎

它们的收敛域满足以下条件:

$$R_{x-}R_{y-}<|z|=1<R_{x+}R_{y+}$$珎

那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^{*}(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c} X(v)Y^{*}\left(\frac{1}{v^{*}}\right)v^{-1}dv$$

积分闭合围线*c*应在$X(v)$和$Y^*(1/v)$的公共收敛域内，即

$$\max\left[R_{x-},\frac{1}{R_{y+}}\right]<|v|<\min\left[R_{x+},\frac{1}{R_{y-}}\right]$$

证　令

$$w(n)=x(n)y^*(n)$$

由于

$$Z\left[y^*(n)\right]=Y^*(z^*)$$

利用复卷积公式可得

$$W(z)=Z[w(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*\left(\frac{z^*}{v^*}\right)v^{-1}dv \qquad \boldsymbol{R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}}\text{环}$$

由于假设条件中已规定收敛域满足$\boldsymbol{R_{x-}R_{y-}<1<R_{x+}R_{y+}}$，因此在**|z|=1**收敛域内，也就是***W*(*z*)**在单位圆上收敛， 则

$$W(z)|_{z=1}=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

同时

$$W(z)|_{z=1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)z^{-n}|_{z=1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)$$

因此

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v}\right)v^{-1}dv$$

如果**$X(z)$**、**$Y(z)$**在单位圆上都收敛，则围线**c**可取为单位圆，即

v=e$^{j\omega}$ 錞珎珑珑

则式可变为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

帕塞伐定理的一个很重要的应用是计算序列的能量，一个序列值的平方总和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$ 称为“序列能量”，如果有**$y(n)=x(n)$**，则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$$

这表明时域中求能量与频域中求能量是一致的。 葺

z 变换特性表 表 2−2

序　列	z 变 换	收 敛 域
1. $ax(n)+by(n)$	$aX(z)+bY(z)$	$\max[R_{x-},R_{y-}]<\|z\|<\min[R_{x+},R_{y+}]$
2. $x(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$	$R_{x-}<\|z\|<R_{x+}$
3. $a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|R_{x-}<\|z\|<\|a\|R_{x+}$
4. $nx(n)$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	$R_{x-}<\|z\|<R_{x+}$
5. $x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x-}<\|z\|<R_{x+}$
6. $x(n)*y(n)$	$X(z)Y(z)$	$\max[R_{x-},R_{y-}]<\|z\|<\min[R_{x+},R_{y+}]$
7. $x(n)y(n)$	$\dfrac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y\left(\dfrac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$R_{x-}R_{y-}<\|z\|<R_{x+}R_{y+}$
8. $x(0)=X(\infty)$		$\|z\|>R_{x-}$
9. $x(\infty)=\mathrm{Res}[X(z),1]$		$(z-1)X(z)$收敛于$\|z\|\geq 1$
10. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)$ $=\dfrac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*\left(\dfrac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$		$R_{x-}R_{y-}<1<R_{x+}R_{y+}$

§2-11 单边z变换

$$\begin{cases} X(z) = \sum\limits_{\boxed{n=0}}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ z = r \cdot e^{j\omega} \end{cases}$$

单边Z变换

因果序列，单、双边Z变换相等。

§ 2-12 系统函数

系统函数的定义

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\Rightarrow \quad h(n) = Z^{-1}\left[H(z)\right]$$

$$H(z) = Z\left[h(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

系统函数 $H(z)$是单位取样响应 $h(n)$的 Z 变换；

如果 $H(z)$收敛域包含单位圆 $|z| = 1$，则单位圆上的系统函数就是系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = DTFT\left[h(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn\omega}$$

系统函数和差分方程的关系

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$Z\text{变换} \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$\Rightarrow H(z) = A\frac{\prod_{r=1}^{M}\left(1-c_r z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}$$

除比例常数A以外，整个系统函数可由其全部极、零点确定。

系统函数的收敛域

- 稳定系统 $s=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$
- 因果系统 $h(n)=0 \qquad n<0$
- 稳定因果系统

稳定系统：系统函数 $H(z)$ 在单位圆 $|z|=1$ 上收敛，系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 存在。

因果系统：收敛域为通过离原点最远的 $H(z)$ 的极点的圆的外部。

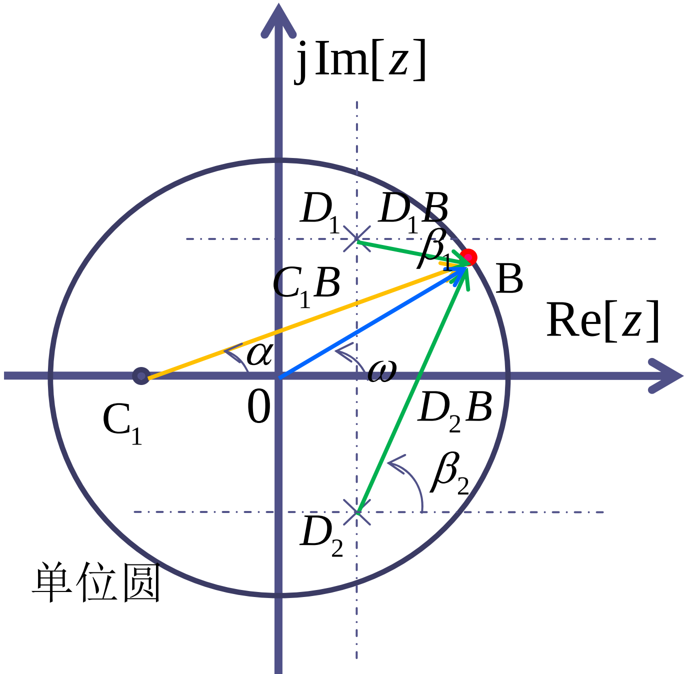
因果稳定系统：系统函数 $H(z)$ 必须在从单位圆到 ∞ 的整个区域收敛，即系统函数的全部极点必须在单位圆以内，且收敛域包含单位圆。

系统频率响应的几何确定法

$$H(z)=A\frac{\prod_{r=1}^{M}\left(1-c_r z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}=Az^{-(M-N)}\frac{\prod_{r=1}^{M}\left(z-c_r\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(z-d_k\right)}$$

设收敛域包括单位圆，系统频率响应为：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=Ae^{-j\omega(M-N)}\frac{\prod_{r=1}^{M}\left(e^{j\omega}-c_r\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(e^{j\omega}-d_k\right)}$$



z平面上零点c_r标志为“o”极点d_k标志为“×”，单位圆上$z=e^{j\omega}$的位置用B表示

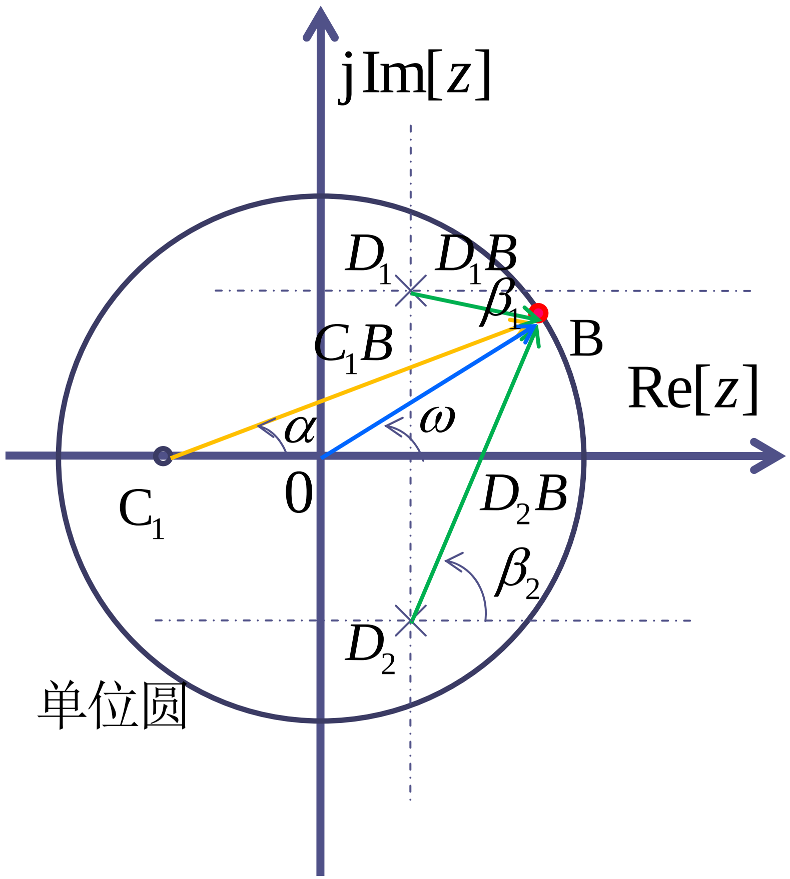
$c_r=\overrightarrow{OC_r}$； $d_k=\overrightarrow{OD_k}$； $z=e^{j\omega}=\overrightarrow{OB}$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=Ae^{-j\omega(M-N)}\frac{\prod_{r=1}^{M}\overrightarrow{C_rB}}{\prod_{k=1}^{N}\overrightarrow{D_kB}}$$

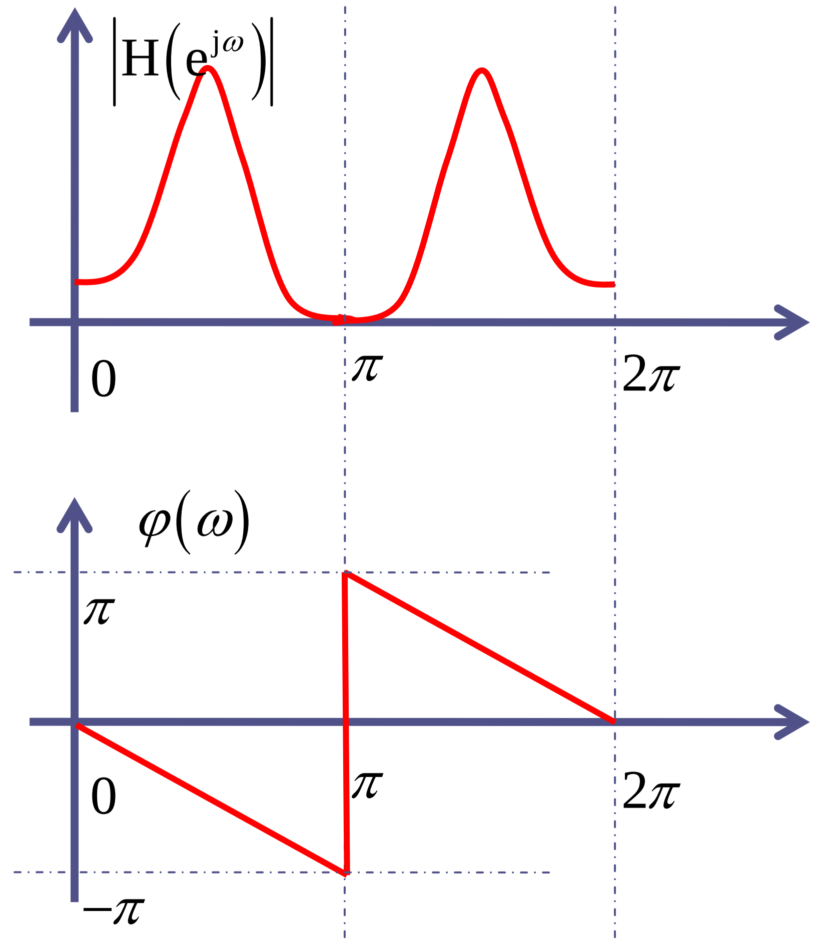
$$H\left(e^{j\omega}\right)=Ae^{-j\omega(M-N)}\frac{\prod_{r=1}^{M}\overrightarrow{C_r B}}{\prod_{k=1}^{N}\overrightarrow{D_k B}}$$

以极坐标表示：

$$\begin{cases}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=|A|\dfrac{\prod_{r=1}^{M}\left|C_r B\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|D_k B\right|}=\dfrac{\text{各零矢量模的连乘积}}{\text{各极矢量模的连乘积}}\\ \varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\alpha_r-\sum_{k=1}^{N}\beta_k-(M-N)\omega\\ =\text{零矢量幅角之和}-\text{积矢量复角之和}-(M-N)\omega\end{cases}$$



系统函数的零极点矢量图



系统的振幅特性和相位特性

可见，知道系统的零极点分布后，就能很容易确定零极点位置对系统特性的影响：

（**1**）当**B**点转到极点附近时，极点矢量长度最短，因而幅度特性可能出现峰值，且极点愈靠近单位圆，极点矢量长度就愈短，峰值就愈高愈尖锐。如果极点在单位圆上，则幅度特性为∞, 系统不稳定。

（**2**）对于零点，当**B**点转到零点附近时，零点矢量长度变短，幅度特性将出现谷值，零点愈靠近单位圆，谷值就愈接近零。当零点处在单位圆上时，谷值为零。

结论：极点位置主要影响频响的峰值及尖锐程度，零点位置主要影响频响的谷值位置及形状。

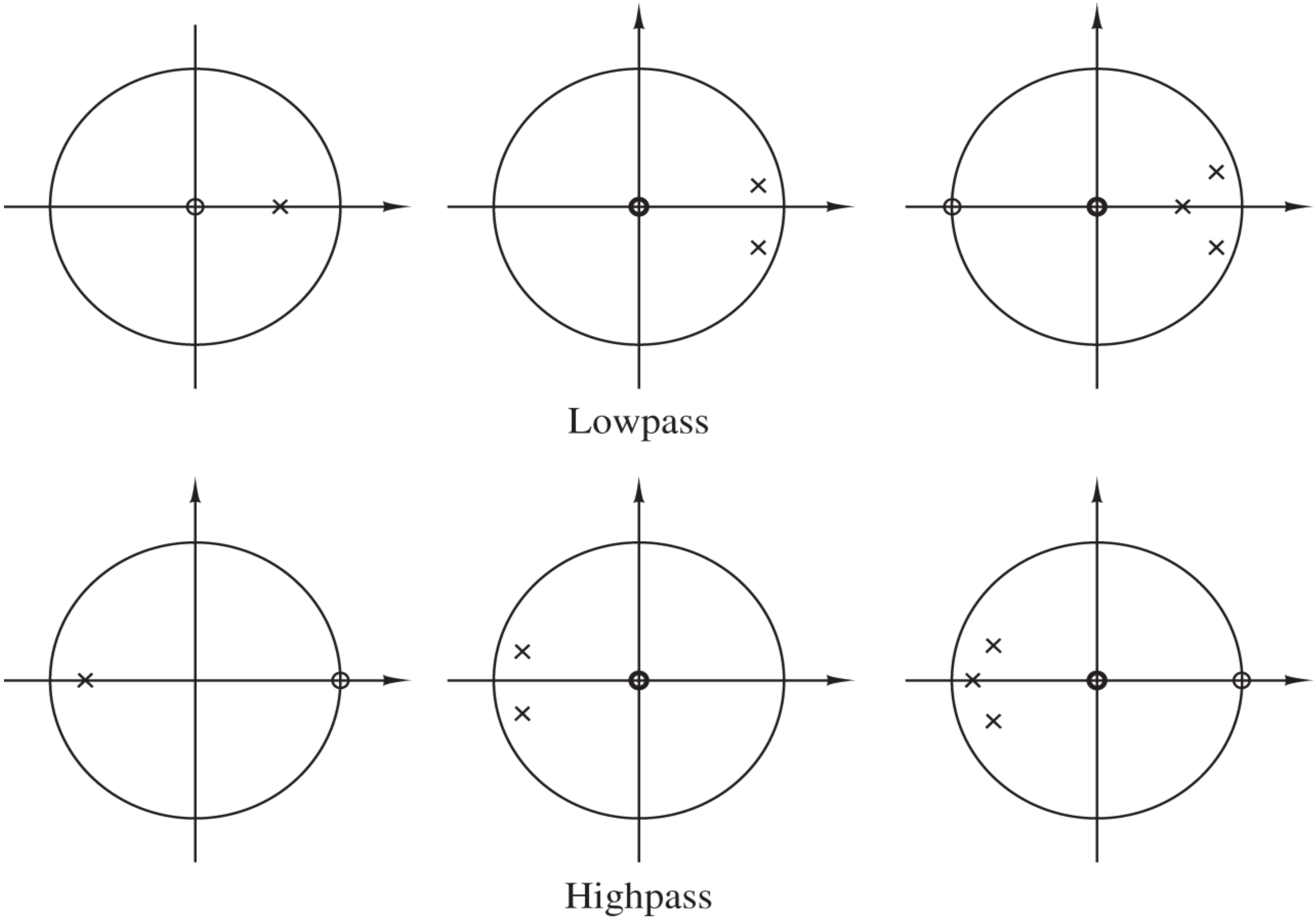


Figure 5.4.2 Pole–zero patterns for several lowpass and highpass filters.

全通系统

$|H(\omega)|=1$， $0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$， 不改变幅度谱，仅改变相位谱。

极点零点互为倒数

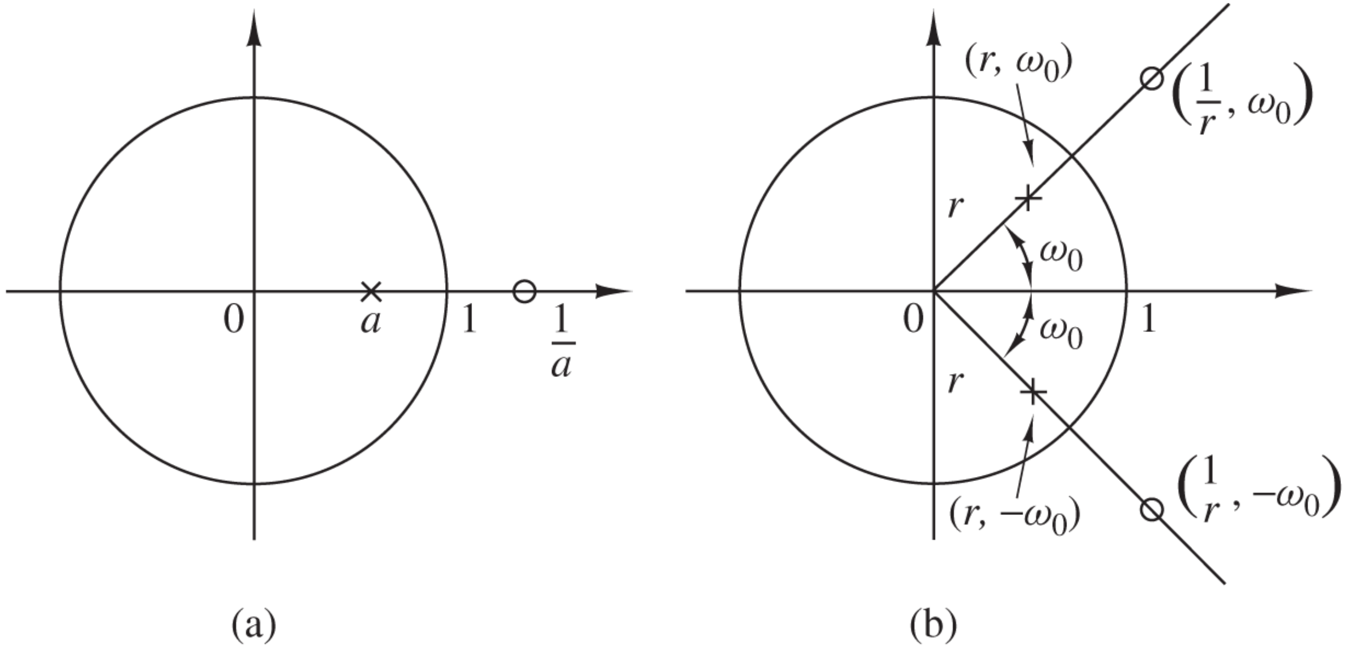


Figure 5.4.16 Pole–zero patterns of (a) a first-order and (b) a second-order all-pass filter.

无限长单位脉冲响应系统（IIR）— Infinite Impulse Response

- $h(n),\ 0 \le n < +\infty / |n| < +\infty$

- $H(z) = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$

- $y(n) = \sum\limits_{k=0}^{M} b_k x(n-k) + \sum\limits_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$

有限长单位脉冲响应系统（FIR）— Finite Impulse Response

- $h(n),\ 0 \le n \le N-1$
- $H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$
- $y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$

小结

连续时间信号与系统

傅里叶变换	频域
拉普拉斯变换	复频域

离散时间信号与系统

离散时间傅里叶变换	频域
z变换	复频域
离散傅里叶变换	离散频域