100052205

数字信号处理
Digital Signal Processing

李慧琦 教授

信息与电子学院

北京理工大学

Tel: +86 (10) 68918239

Email: huiqili@bit.edu.cn

第五章 数字滤波器

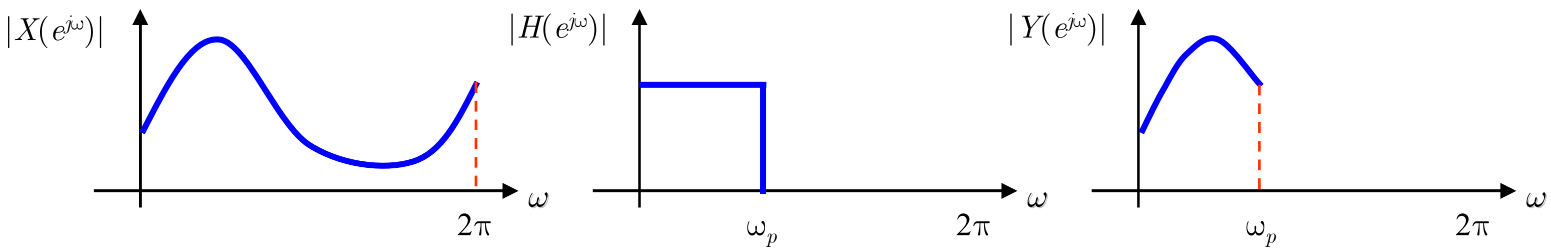
本章主要内容

- 数字滤波器的结构
    - IIR数字滤波器结构
    - FIR数字滤波器结构
- IIR滤波器设计
    - 脉冲响应不变法
    - 双线性变换法
- FIR滤波器设计
    - 窗函数设计法
    - 频率取样设计法

§5-1 引言

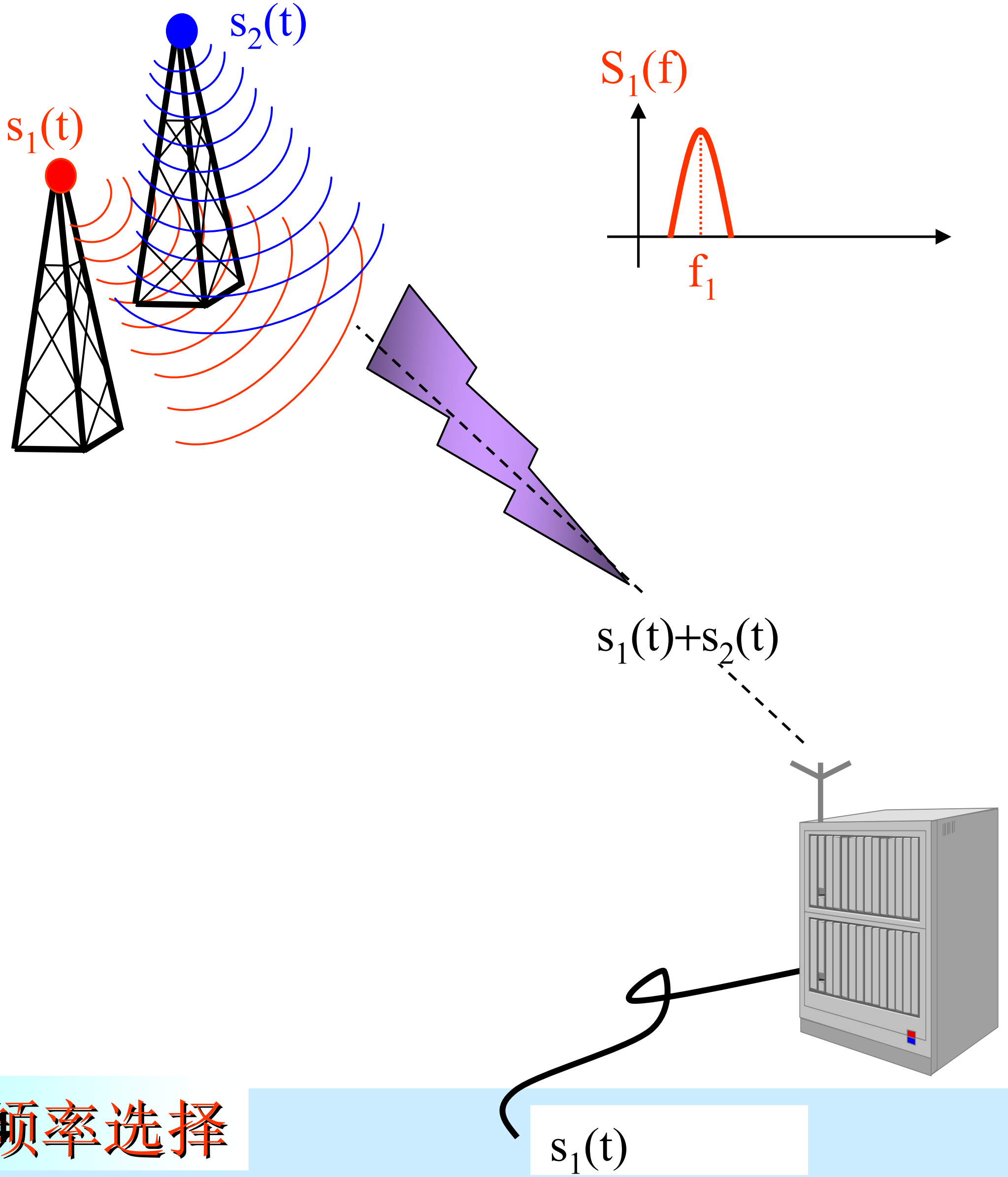
➢数字滤波器的基本概念

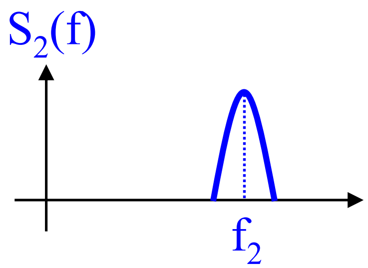
- **数字滤波器：用有限精度算法实现的离散线性非时变系统，完成信号滤波处理。**
- **数字滤波器的应用：信号分离、噪声抑制、频谱变形等。**
- 滤波器的一个非常重要的类型就是**频率选择性滤波器**。所谓频率选择性滤波，就是通过一定运算关系改变输入信号所含频率成分的相对比例或者滤除某些频率成分的器件。



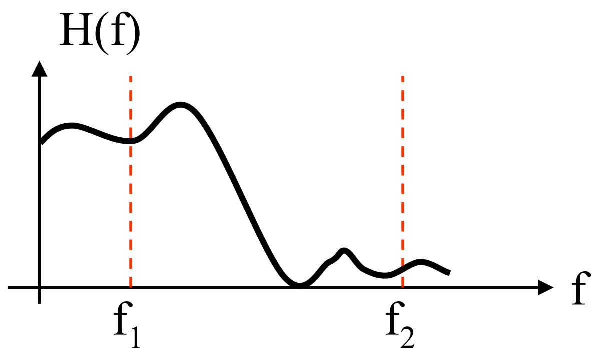
（低通滤波）

数字信号处理 (Digital Signal Processing)





$f_1 \neq f_2$



- Filter?

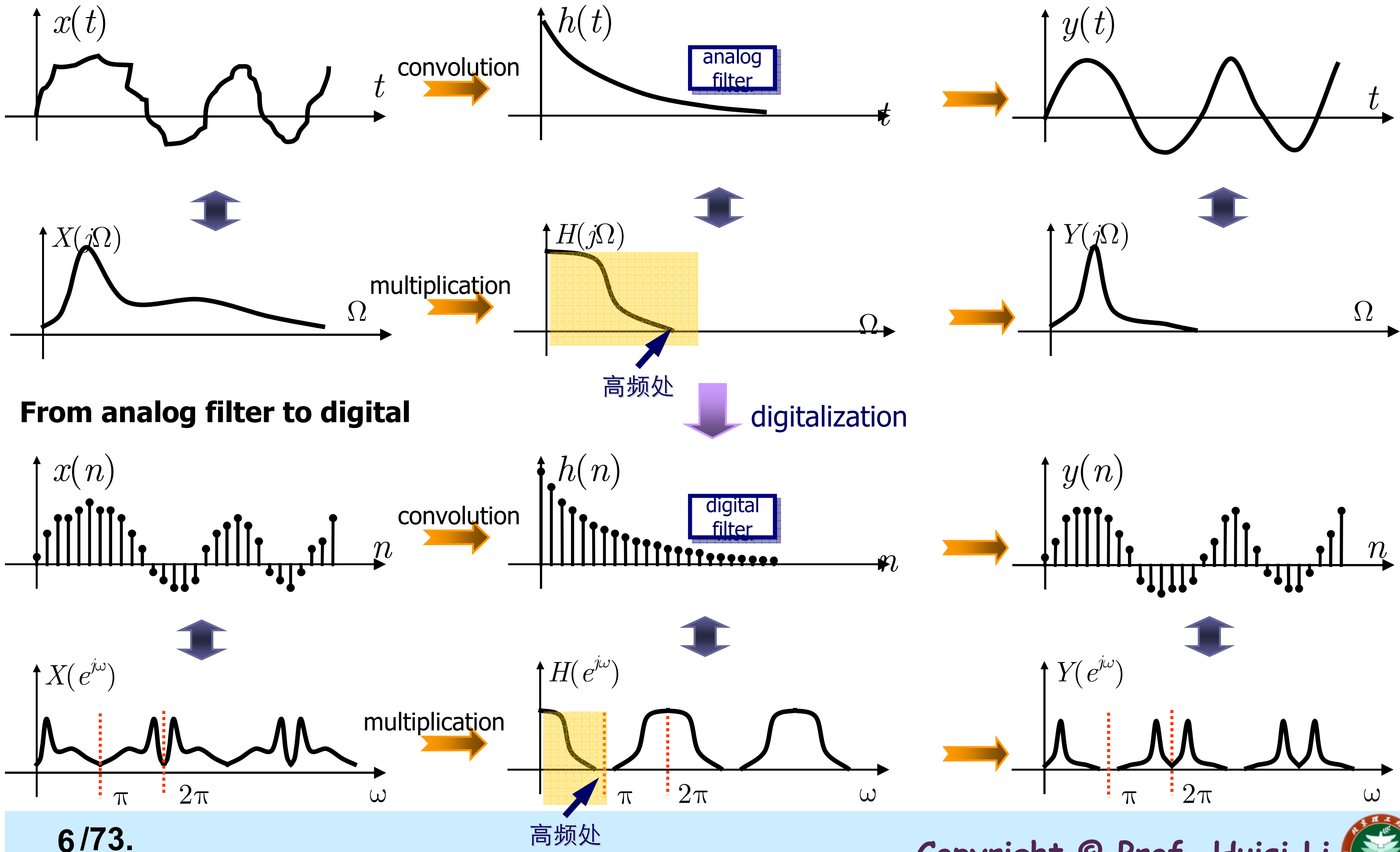
频率选择

- **LTI系统**（线性非时变系统）可视为频率选择数字滤波器

$$y(n) = x(n) * h(n)$$
$$Y(w) = X(w) \bullet H(w)$$

通过系统频率响应H(ω)来改变输入信号频谱**X(ω)**。

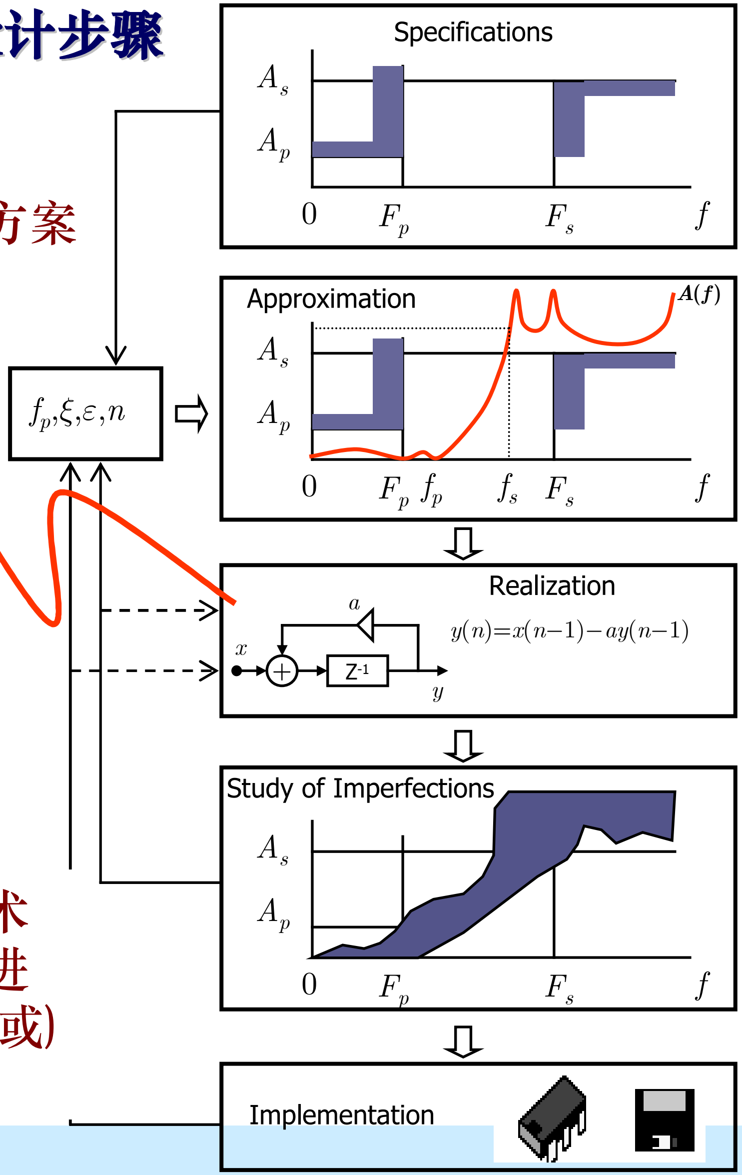
数字信号处理 (Digital Signal Processing)



数字信号处理 (Digital Signal Processing)

- **数字滤波器设计步骤**

滤波器实现方案并不唯一！



技术指标：按设计任务，确定滤波器性能要求，制定技术指标。

函数逼近：根据技术指标构造某一有理传递函数 H(z)或单位脉冲响应h(n)

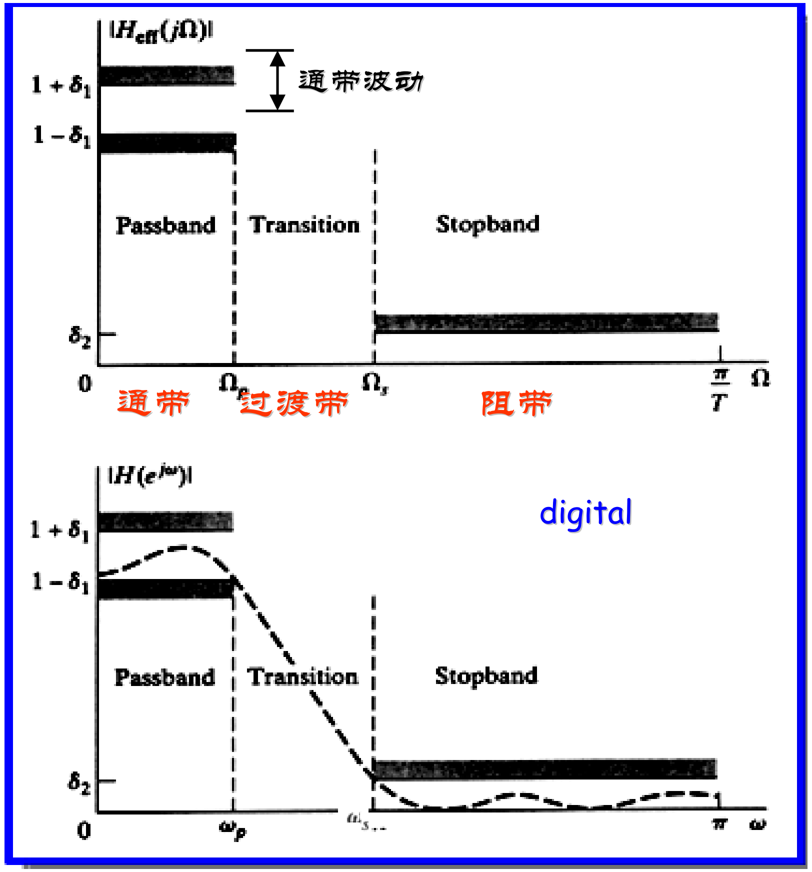
电路实现：将传递函数转化为方框图或程序(软件)。

缺陷研究：考虑滤波器系数的量化效应，乘积量化影响和动态范围限制

产品实现：用硬件或计算机实现

若不能满足技术要求，需重新进行函数逼近和(或)电路实现

技术指标



δ_p or δ_1 passband ripple 通带波动

δ_s or δ_2 stopband ripple 阻带波动

Ω_p, ω_p passband edge frequency 通带临界频率

Ω_s, ω_s stopband edge frequency 阻带临界频率

ε^2 passband ripple parameter 通带波动参数

$1 - \delta_p = 1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$

BW bandwidth = $\omega_u - \omega_l$

ω_c 3-dB cutoff frequency

ω_u, ω_l upper and lower 3-dB cutoff frequencies

} 3dB/截止带宽

$\Delta\omega$ transition band = $|\omega_p - \omega_s|$ 过渡带宽

A_p passband ripple in dB

$= \pm 20\log10(1 \pm \delta_p)$ 通带波动(dB)

A_s stopband attenuation in dB

$= -20\log10(\delta_s)$ 阻带衰减(dB)

- 数字滤波器（LTI系统）的表示形式

1．单位脉冲响应

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

2. 常系数差分方程描述线性时不变系统（Constant-coefficient difference equations）

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

N:（系统的阶）

3. 系统函数 （system function）：有理函数

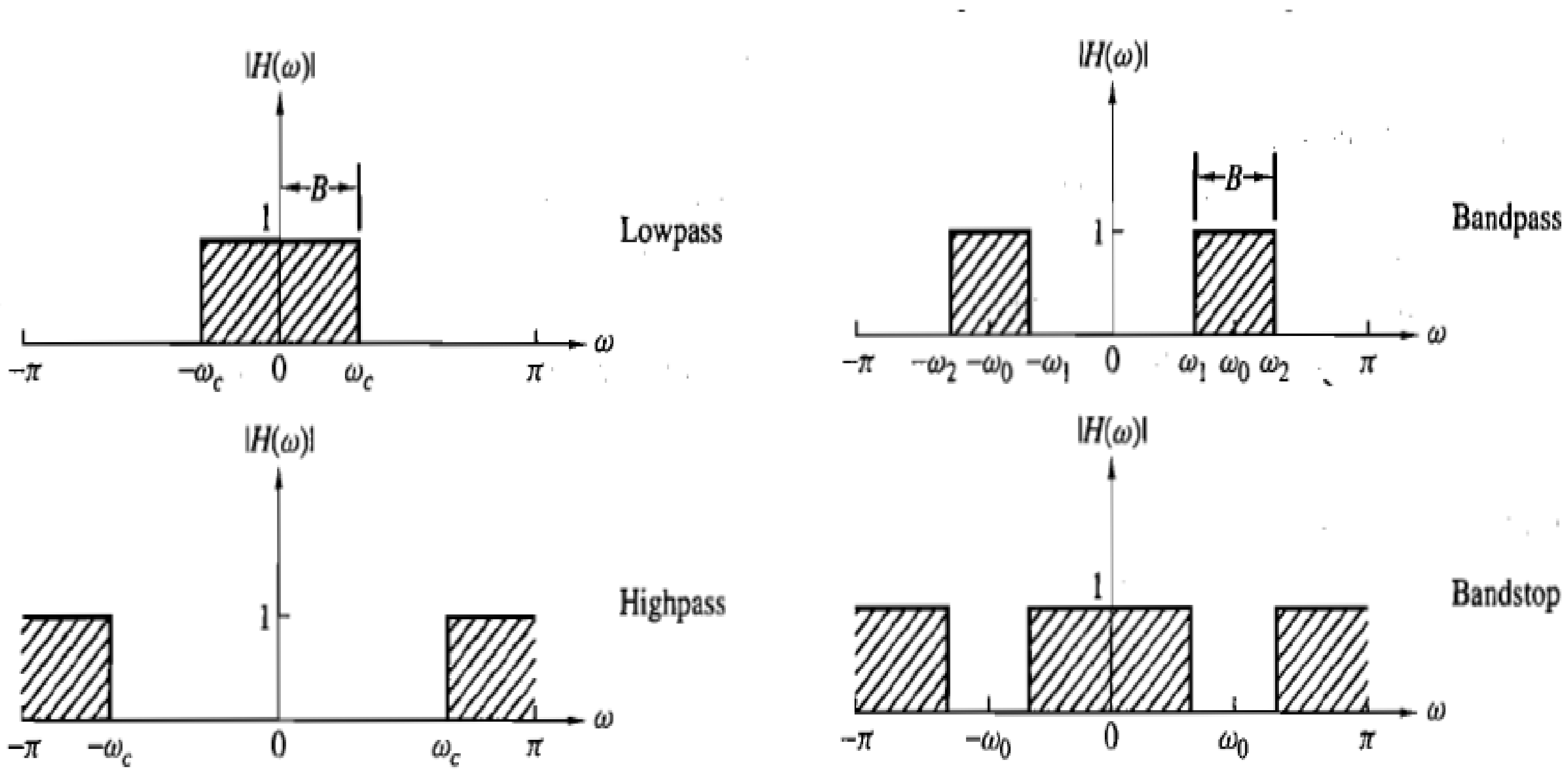
$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$h(n) \xleftrightarrow{z} H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

零、极点由{a_k} 和 {b_k}决定.

- **滤波器的分类:**

  性能: 低通、高通、带通、带阻



- **滤波器的分类:**

h(n) 的时间特性:

无限长单位脉冲响应（IIR)，有限长单位脉冲响应（FIR）

- **IIR: Infinite-duration impulse response**

无限长单位脉冲响应(冲激响应)系统

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$\downarrow$

当前和所有过去输入样本的加权线性组合-无限存储

- **FIR: Finite-duration impulse response**

有限长单位脉冲响应系统

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \text{ and } n \geq M$$

因果**FIR**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

$$\downarrow$$

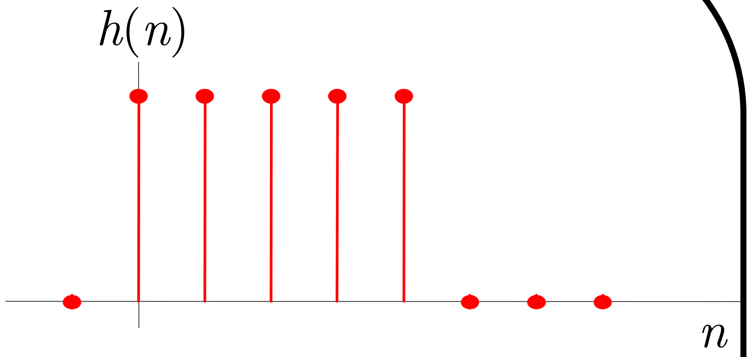
最近M个样本的加权线性组合 – M个样本的有限存储空间

FIR = Finite Impulse Response filter

系统的单位抽样响应$h(n)$仅有有限项，传递函数是z^{-1}的实系数多项式

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

不存在稳定性问题，可以实现线性相位

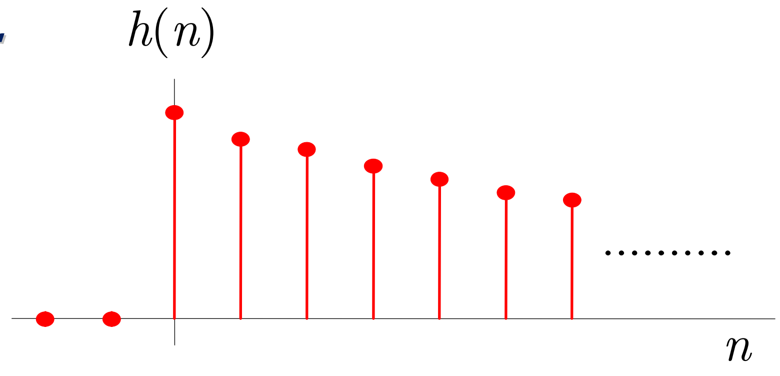


IIR = Infinite Impulse Response filter

系统的单位抽样响应$h(n)$具有无限项，传递函数是z^{-1}的实有理函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

传递函数必须满足稳定性条件



为达到相同的指标，FIR滤波器的阶数通常要高于IIR滤波器

FIR versus IIR

IIR 滤波器	FIR 滤波器
$h(n)$无限长	$h(n)$有限长
极点位于z平面任意位置	极点固定在原点
滤波器阶次低	滤波器阶次高得多
非线性相位	可具有严格的线性相位
递归结构	一般采用非递归结构
不能用FFT技术	可用FFT技术
可利用模拟滤波器设计技术	设计借助于计算机
用于设计规格化的选频滤波器	可设计各种幅频特性和相频特性的滤波器

- **滤波器的分类：递归和非递归离散时间系统**
  - **Recursive system（递归系统）**

$$y(n) = F\left[y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N), x(n), x(n-1), \dots, x(n-M)\right]$$

n 时刻输出依赖于过去的输出值、当前和过去的输入值.

系统中有反馈回路!

- **Non-recursive system（非递归系统）**

$$y(n) = F\left[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)\right]$$

n **时刻输出仅依赖于当前和过去的输入值.**

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k) \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(M)x(n-M) \\ &= F\left[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)\right] \end{aligned}$$

因果**FIR** 系统可非递归实现

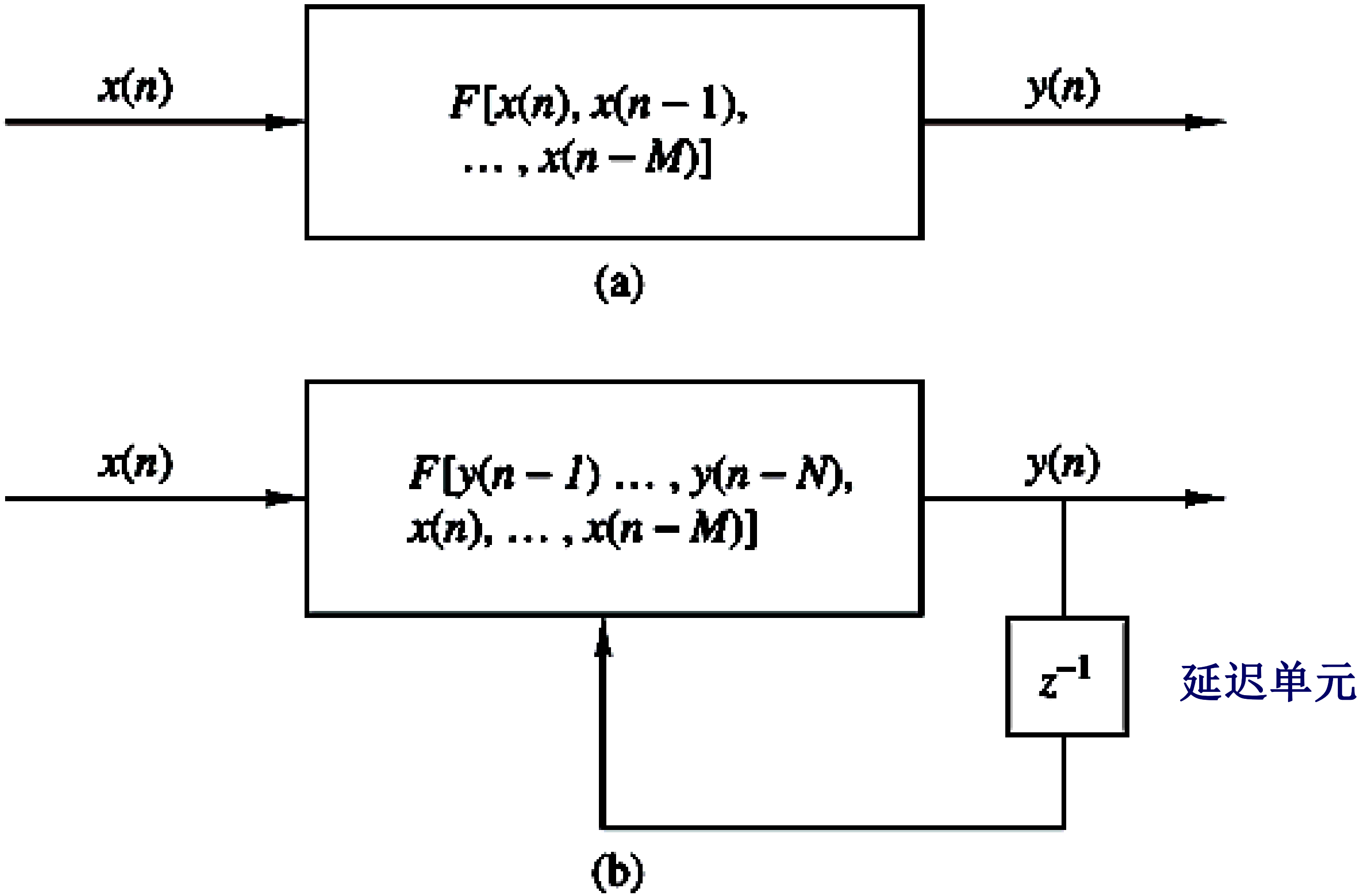


Figure 2.4.3 Basic form for a causal and realizable (a) nonrecursive and (b) recursive system.

滤波器设计本章涉及内容

- 定义技术指标（Define the specifications of filter）
- **函数逼近：**利用合适的方法确定滤波器系数

  （Selection of appropriate technique for filter's coefficient evaluation）
- **电路实现：**选择合适的滤波器实现结构

  （Selection of appropriate structure of filter）
- 分析有限字长效应（Analysis of finite word-length effect）
- 实现（Implementation）

—— IIR 滤波器设计

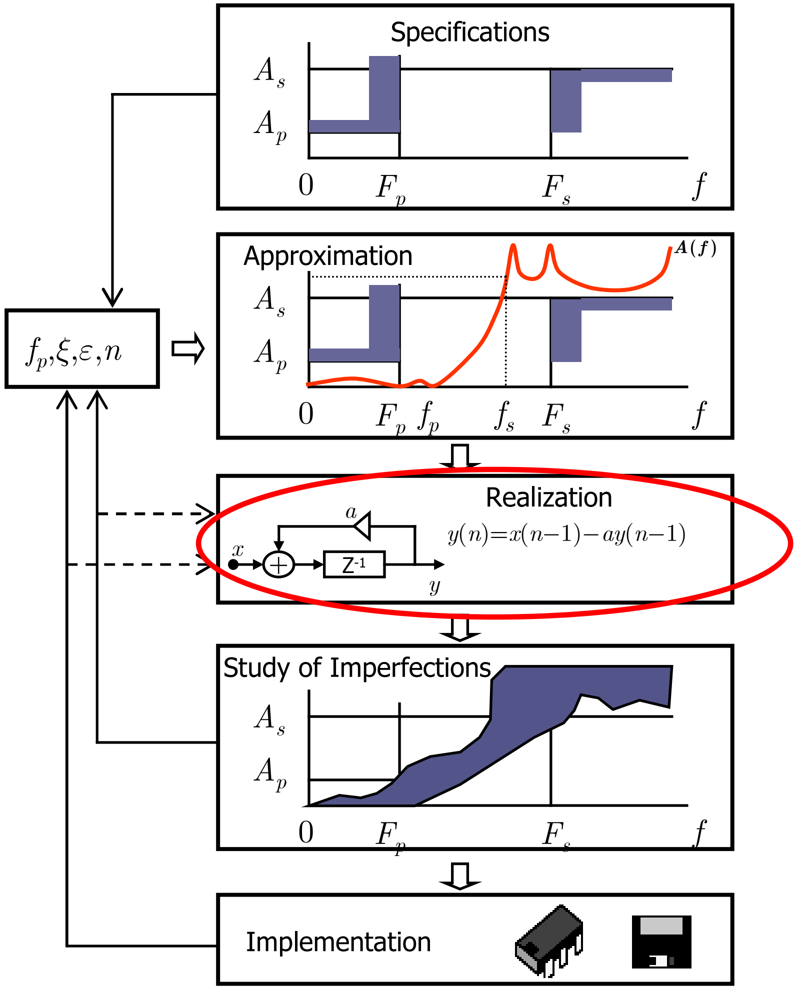
- 脉冲响应不变法（Impulse invariant）
- 双线性变换方法（Bilinear transformation）

—— FIR 滤波器设计

- 窗函数方法（Windowing）
- 频率采样方法（Frequency sampling）

- IIR 直接型（**Direct form**）
- IIR 级联型（**Cascade**）
- IIR 并联型（**Parallel**）
- FIR 直接型（**Transversal**）
- FIR 级联型（**Cascade**）
- FIR 线性相位型（**Linear phase**）
- FIR 频率采样型（**Frequency sampling**）
- FIR 快速卷积型（**Fast convolution**）

§5-2 数字滤波器的结构



电路实现：将传递函数转化为方框图或程序(软件)，要求经济、简单、廉价、字长短、动态范围高。

不考虑量化影响时，这些不同的实现方法是等价的。

为什么要研究数字滤波器的实现结构?

1．滤波器的基本特性（如有限长取样响应FIR与无限长取样响应IIR）决定了结构上有不同的特点；

2．不同结构所需的存储单元及乘法次数不同，前者影响复杂性，后者影响运算速度；

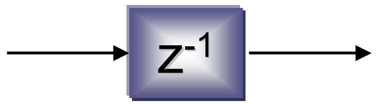
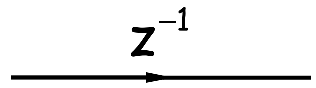
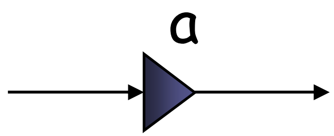
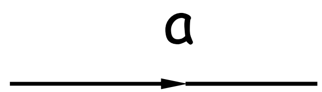
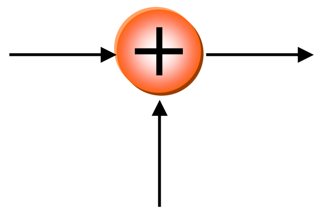
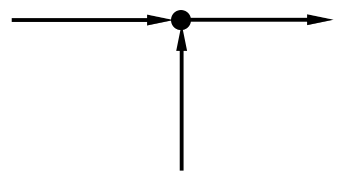
3．有限精度（有限字长）实现情况下，不同运算结构的精度及稳定性不同；

4．好的滤波器结构应使得滤波器性能易于控制，适合于模块化实现，便于时分复用。

- **滤波器实现:**
  - 软件
  - 硬件

- 系统的一个实现/系统的结构（方框图/流图）
  - **Delay elements** （延迟单元）
  - **Multipliers**（乘法器）
  - **Adders** （加法器）

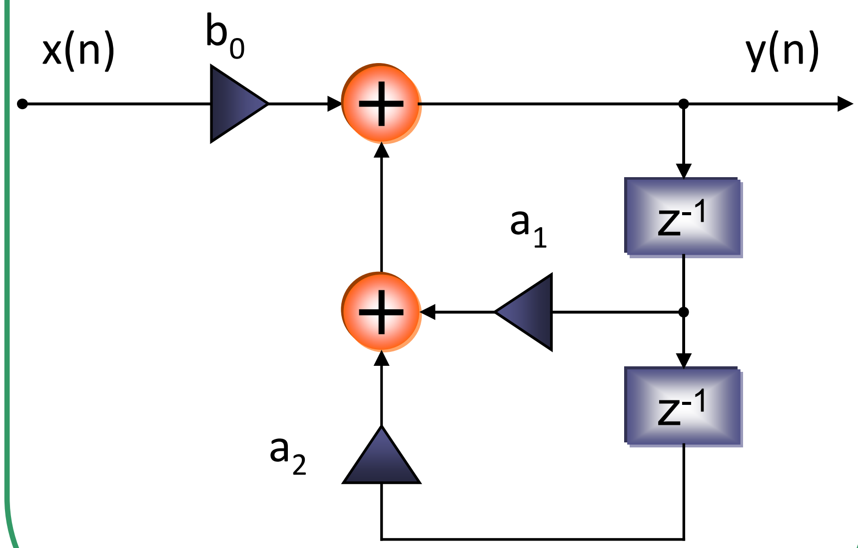
block diagram & flow graph

基本运算单元	方框图	流图
单位延时		
常数乘法器		
加法器		

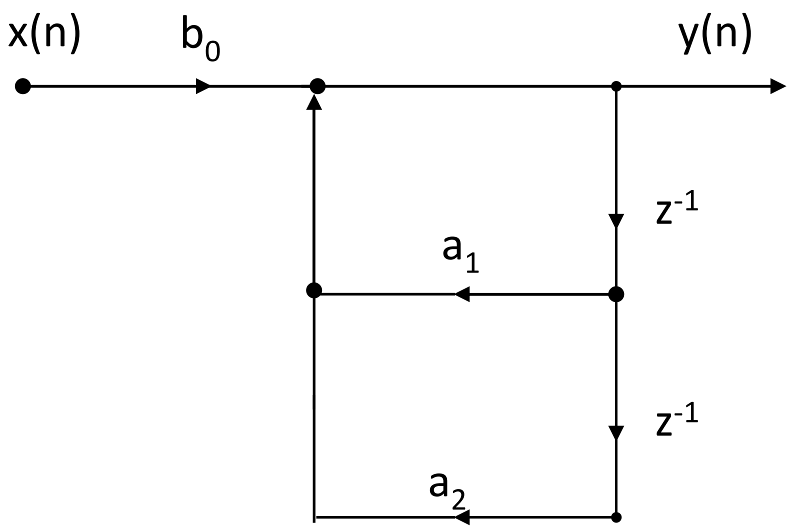
例：二阶数字滤波器

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$

方框图结构



流图结构

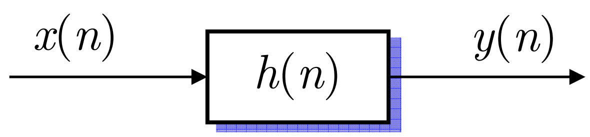


回顾：用系统函数分析LTI系统

LTI系统除了可以用线性常系数差分方程和单位取样响应描述外，还可以用系统函数来描述

系统函数定义为

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)z^{-n}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$



可见，系统函数实际是单位取样响应的z变换

一个因果性的LTI系统的**差分方程**可表示为

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

real

➢IIR 数字滤波器的结构

IIR 数字滤波器的特点：

系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

差分方程

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

1）系统的单位抽样响应$h(n)$无限长

2）系统函数$H(z)$在有限z平面（$0<|z|<\infty$）上有极点存在

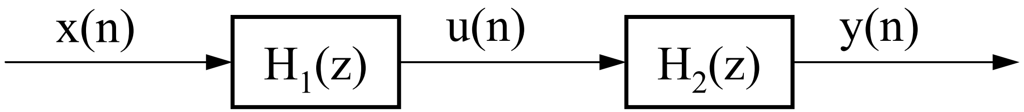
3）存在输出到输入的反馈，递归型结构: **直接型I、II，级、并联型**

1、直接型

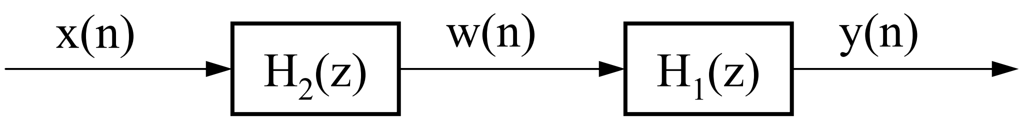
$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

$$H(z)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1-\sum\limits_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}=\underbrace{\left[\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}\right]}_{\substack{H_1(z)\\ \text{全零点}}}\times\underbrace{\left[\left(1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}\right)^{-1}\right]}_{\substack{H_2(z)\\ \text{全极点}}}$$

$$=H_1(z)H_2(z)=H_2(z)H_1(z)$$



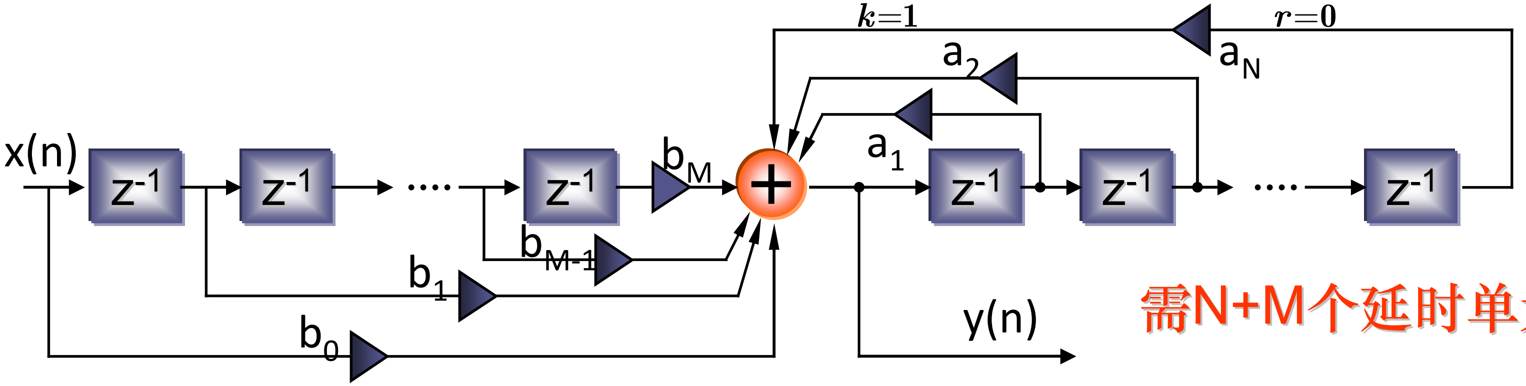
直接型 I



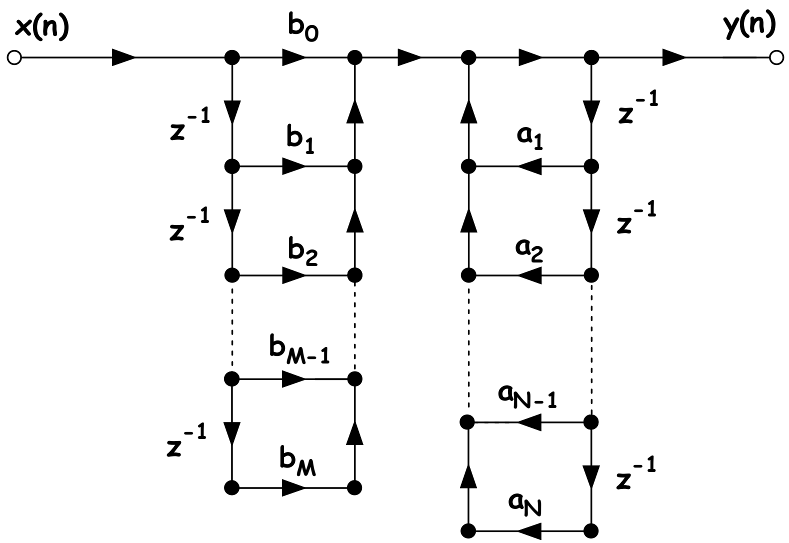
直接型 II

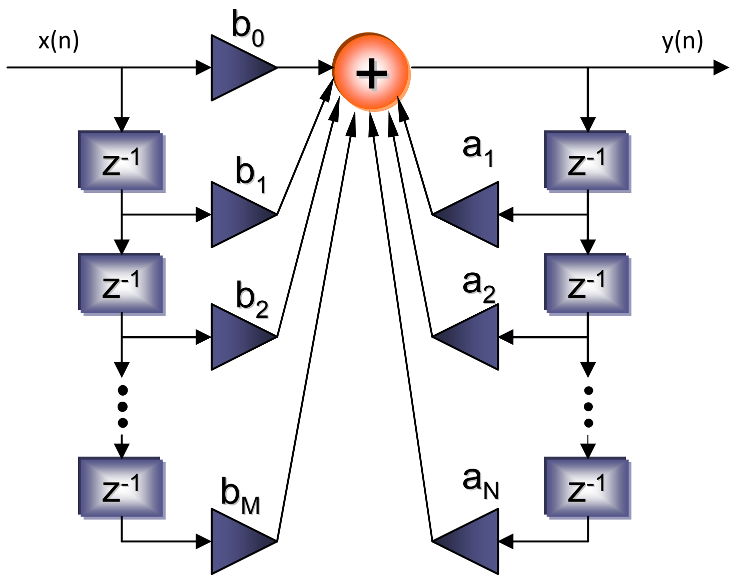
直接型 I

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

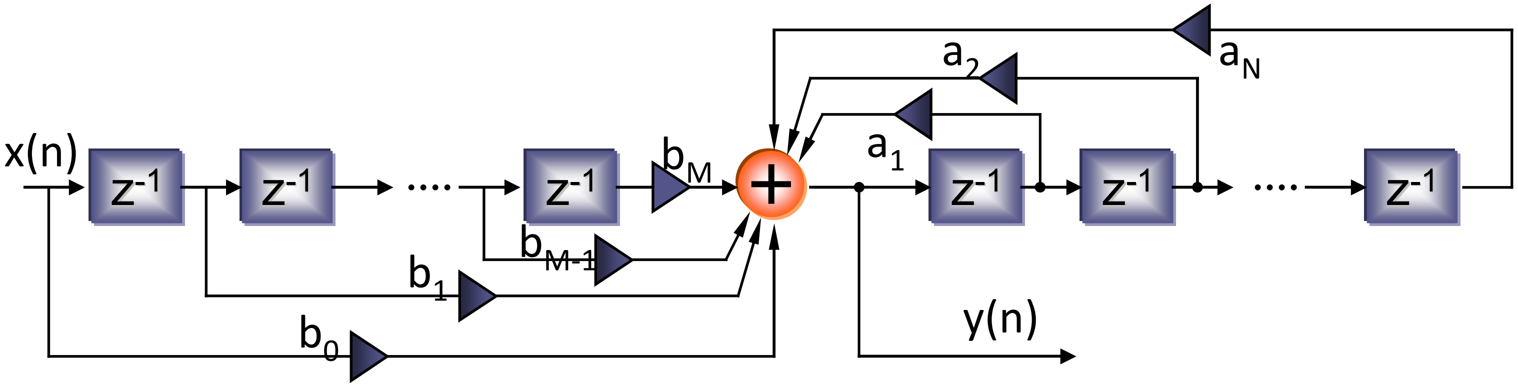


需N+M个延时单元





直接型 I 之特点



（1）两个网络级联：第一个横向结构 M 节延时网络实现零点，第二个有反馈的 N 节延时网络实现极点

（2）共需（ $N+M$ ）级延时单元

（3）系数 a_i，b_i 不直接决定单个零极点，因而不能很好地进行滤波器性能控制

（4）极点对系数的变化过于灵敏，从而使系统频率响应对系统变化过于灵敏，也就是对有限精度（有限字长）运算过于灵敏，容易出现不稳定或产生较大误差

2、直接型 II (典范型)

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\underbrace{\left(\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}\right)}_{\triangleq\frac{W(z)}{X(z)}\text{:all poles}}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}\right)}_{\triangleq\frac{Y(z)}{W(z)}\text{:all zeros}}=\frac{W(z)}{X(z)}\bullet\frac{Y(z)}{W(z)}$$

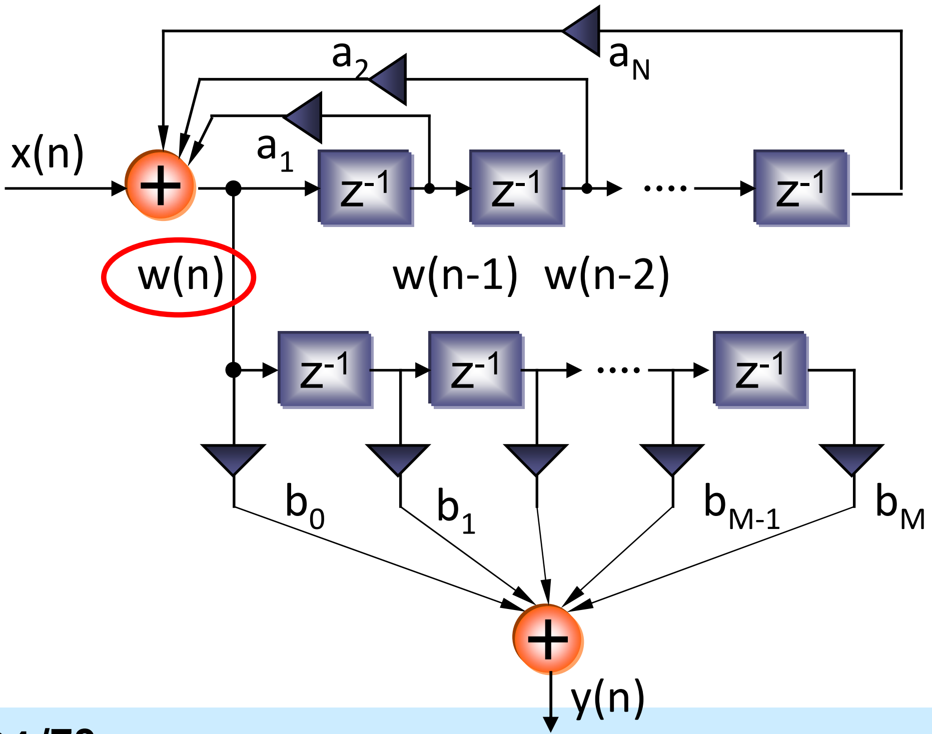
$$\Rightarrow w(n)=x(n)+\sum_{k=1}^{N}a_k w(n-k)$$

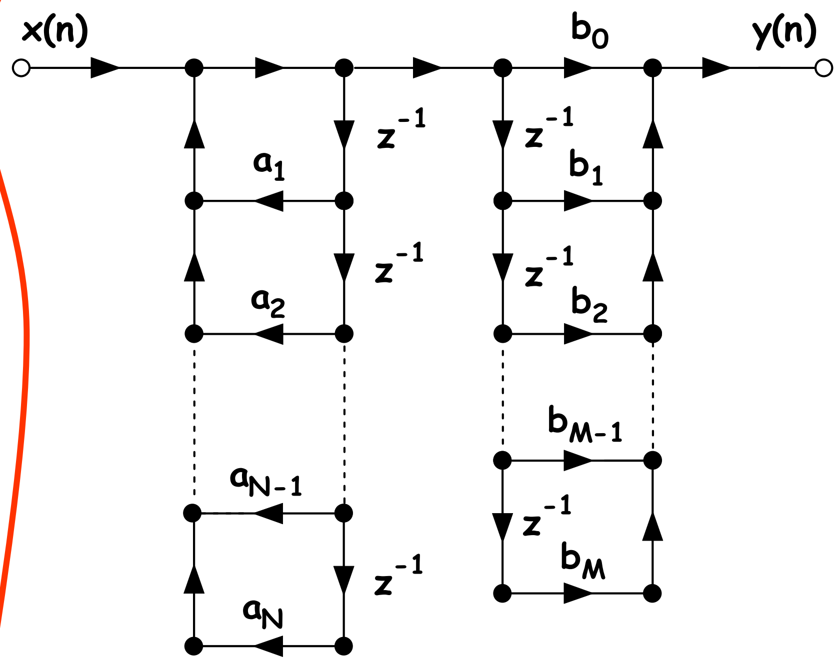
$$y(n)=\sum_{r=0}^{M}b_r w(n-r)$$

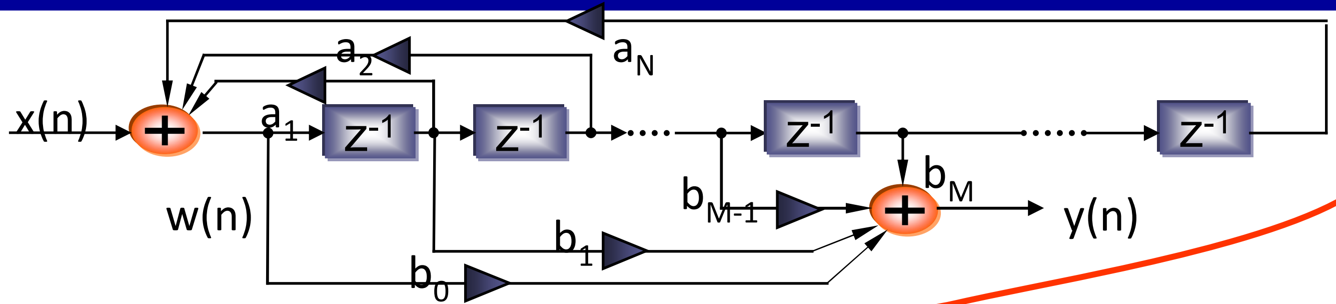
将全极点系统$H_2(z)$放在全零点系统$H_1(z)$之前

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\underbrace{\left(\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}\right)}_{\triangleq\frac{W(z)}{X(z)}\text{:all poles}}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}\right)}_{\triangleq\frac{Y(z)}{W(z)}\text{:all zeros}}=\frac{W(z)}{X(z)}\bullet\frac{Y(z)}{W(z)}$$

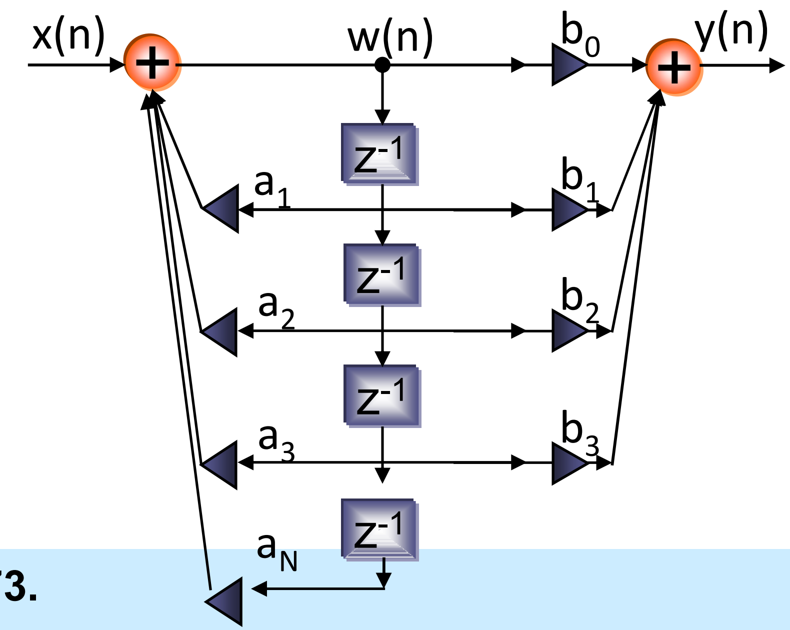
$$\Rightarrow w(n)=x(n)+\sum_{k=1}^{N}a_k w(n-k),\qquad y(n)=\sum_{r=0}^{M}b_r w(n-r)$$

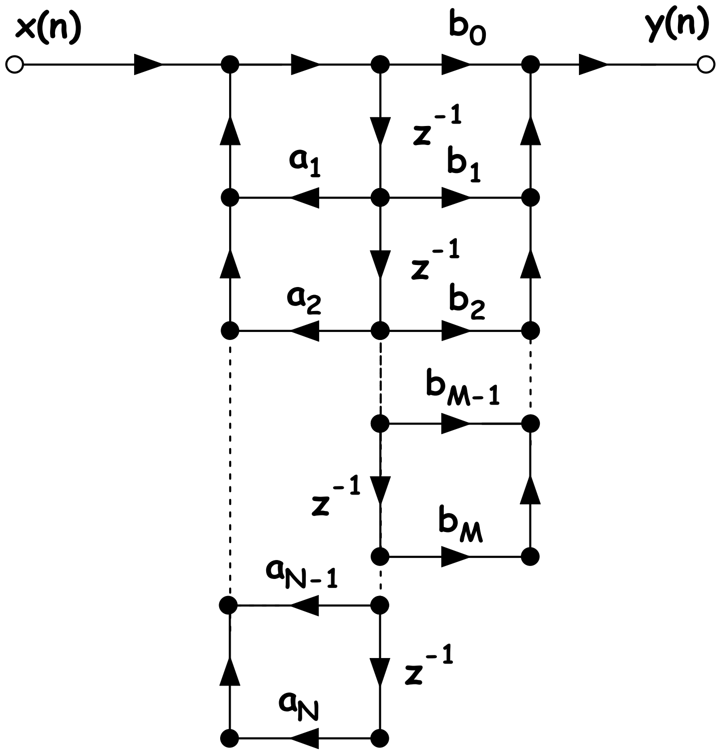




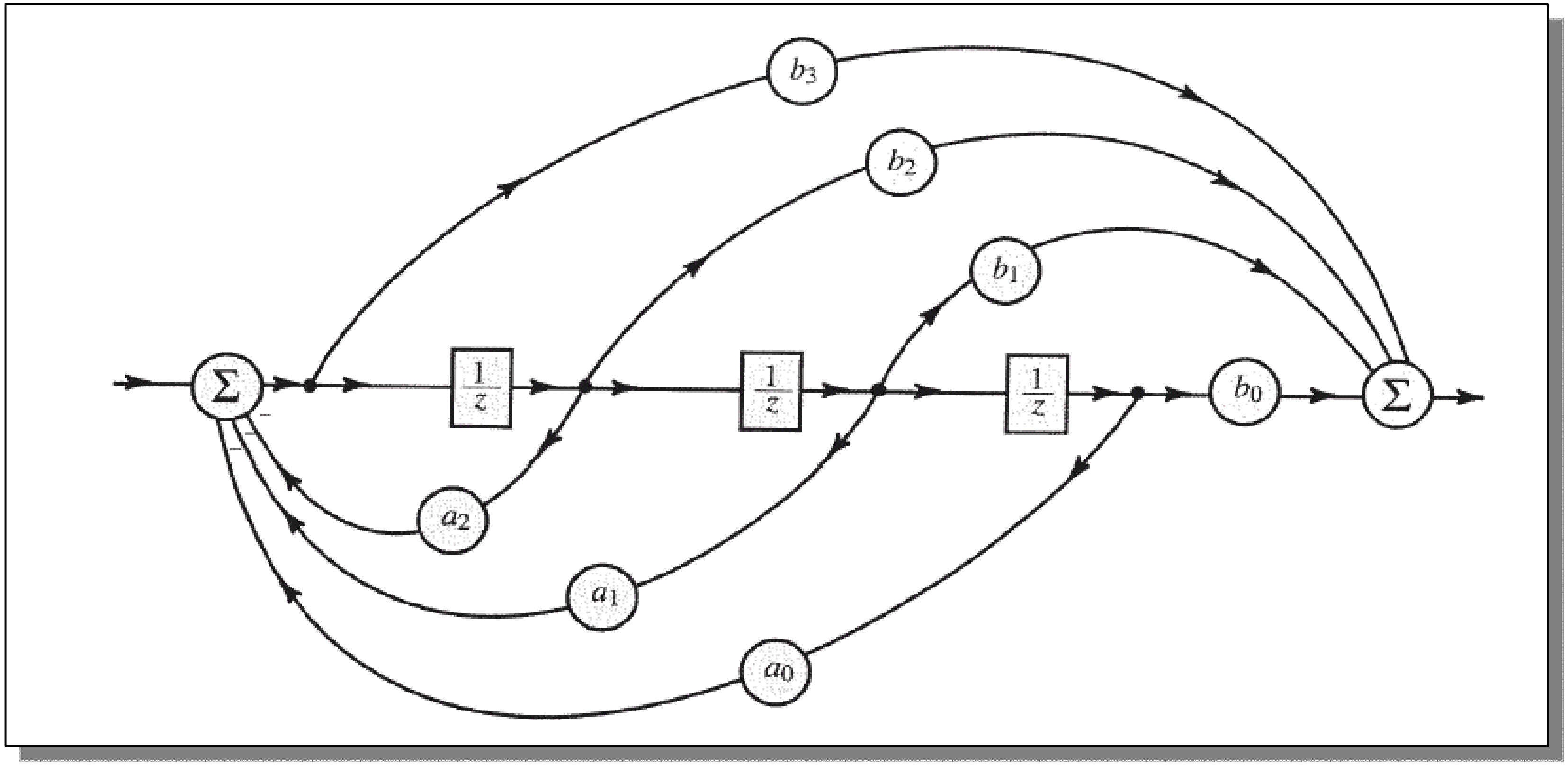


只需实现 N 阶滤波器所需的最少的 N 个延时单元，故又称典范型: N ≥ M





直接型 II (典范型)



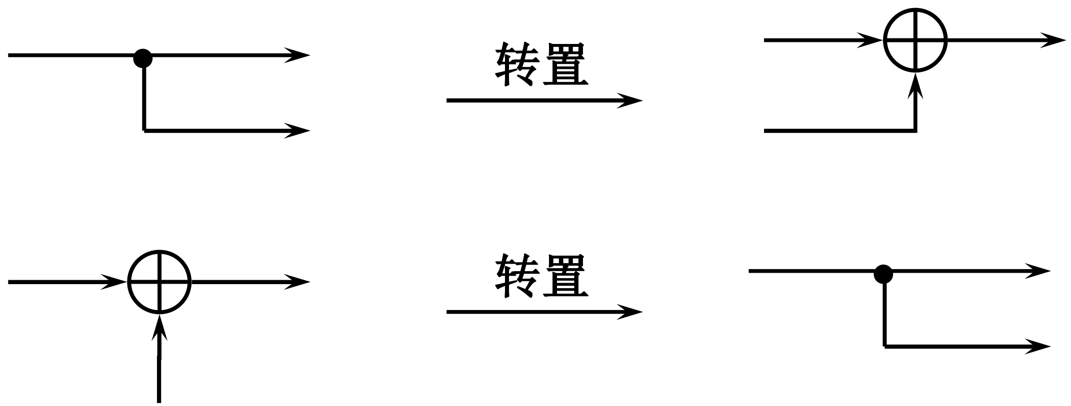
- Tapped-delay line (N or M) delays
- N + M + 1 multipliers
- 2 adders (N and M+1 inputs)

直接型 II（典范型)

3、转置型

转置定理-针对方框图

1.支路方向反向
2.输入输出位置互换
3.分支节点和相加节点互换



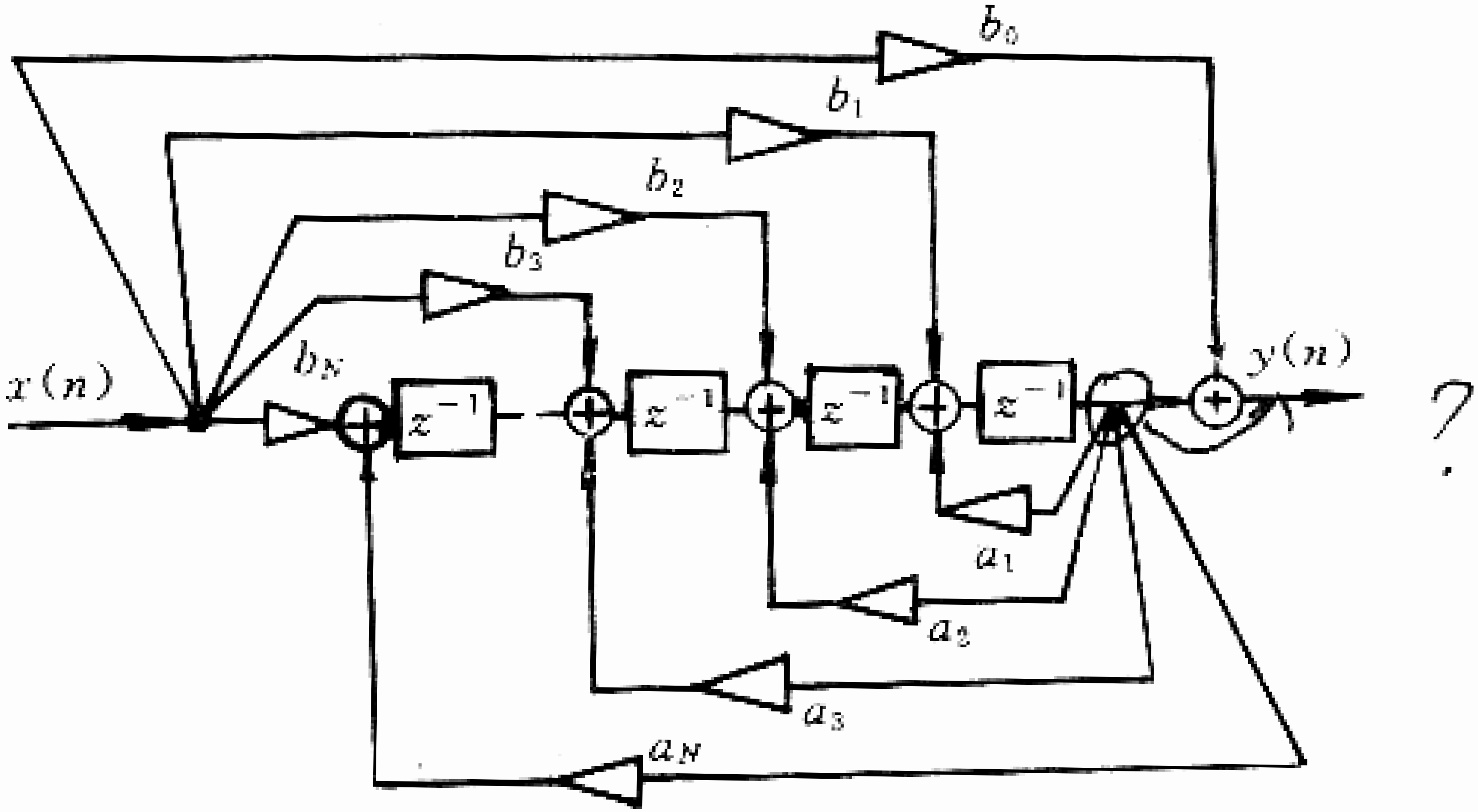


图 5－5　转置的直接型 Ⅱ 结构

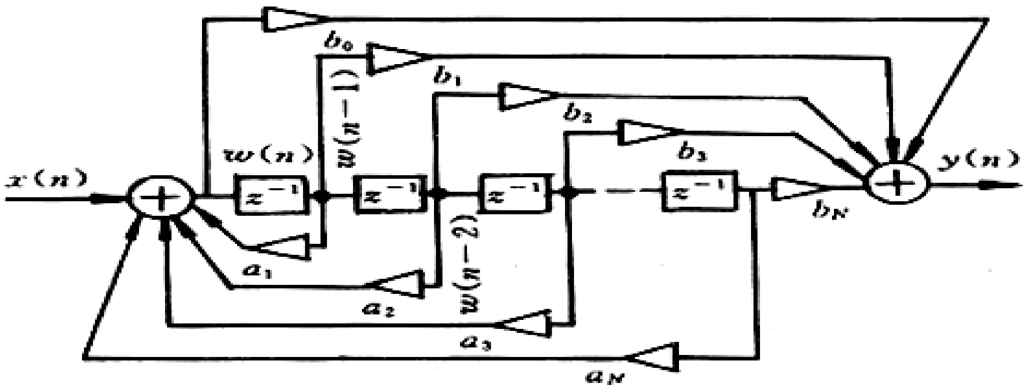


图 5—4 直接型 Ⅱ 结构方框图

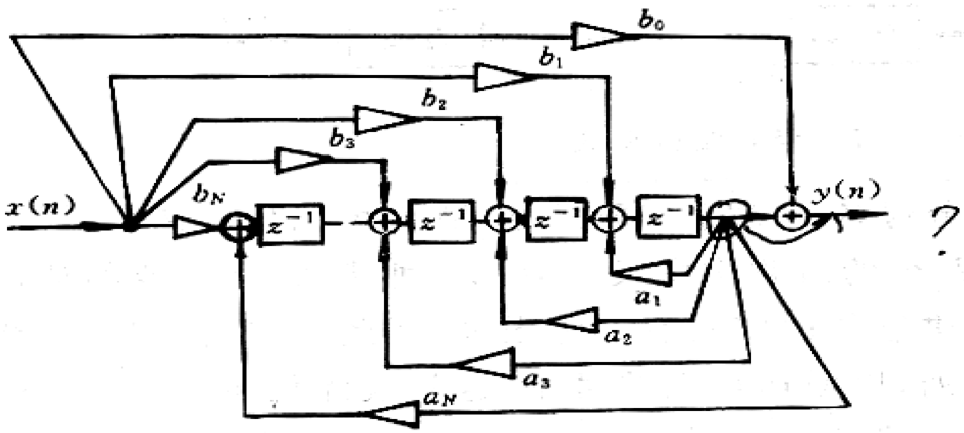
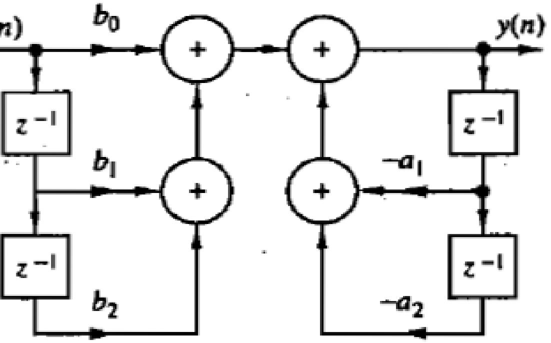
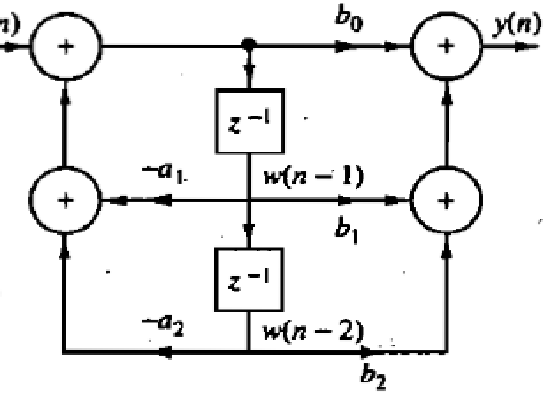
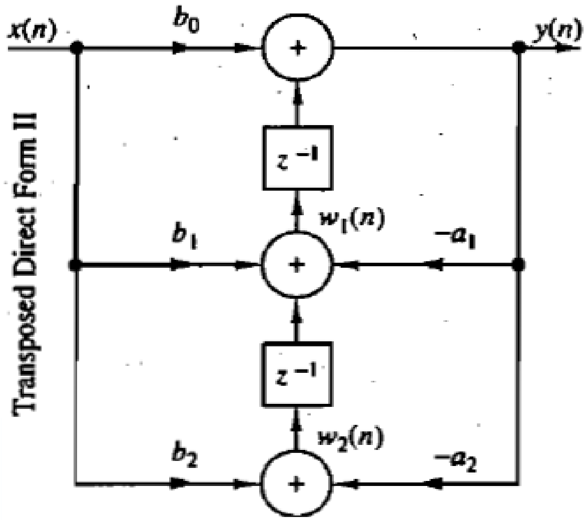


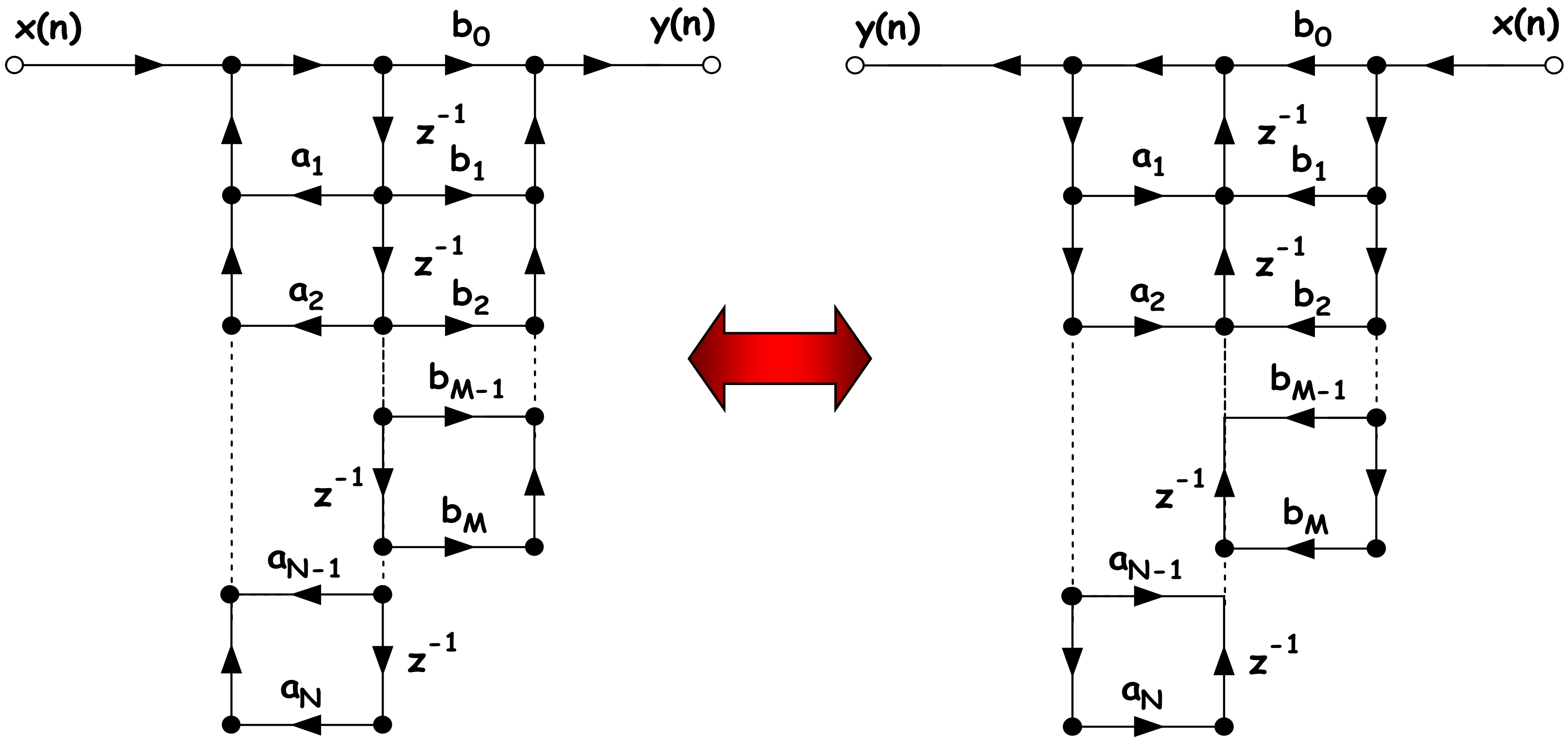
图 5—5 转置的直接型 Ⅱ 结构

TABLE 9.1 Some Second-Order Modules for Discrete-Time Systems

Structure	Implementation Equations	System Function
Direct Form I 	$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1)$ $+ b_2x(n-2)$ $- a_1y(n-1) - a_2y(n-2)$	$H(z) = \dfrac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$
Regular Direct Form II 	$w(n) = -a_1w(n-1) - a_2w(n-2)$ $+x(n)$ $y(n) = b_0w(n) + b_1w(n-1)$ $+b_2w(n-2)$	$H(z) = \dfrac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$
Transposed Direct Form II 	$y(n) = b_0x(n) + w_1(n-1)$ $w_1(n) = b_1x(n) - a_1y(n)$ $+w_2(n-1)$ $w_2(n) = b_2x(n) - a_2y(n)$	$H(z) = \dfrac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$

转置定理-针对流图

原网络中所有支路方向倒转，并将输入$x(n)$和输出$y(n)$相互交换，则其系统函数$H(z)$不改变



直接型的优点：

简单、直观

直接型的共同缺点：

- 系数 a_k，b_k 与零极点关系不直接，不易控制和调整滤波器的性能
- 极点对系数（零极点位置）的变化过于灵敏，易出现不稳定或较大误差
- 运算的累积误差较大

Very sensitive to the effects of coefficients quantization if N or M is large !!!

4、级联型：Cascade

将系统函数按零极点因式分解:

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-p_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-q_k z^{-1})(1-q_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z^{-1})}$$

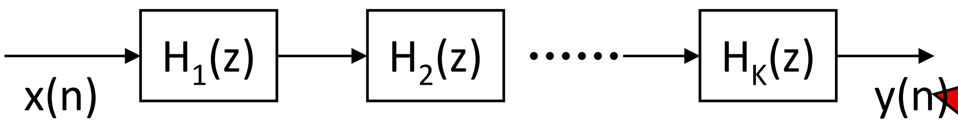
一阶因式　　　　二阶因式

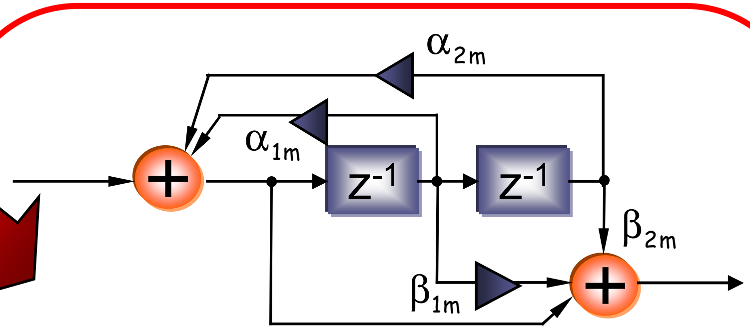
$$\begin{cases} A\text{为常数}, M=M_1+2M_2 \quad N=N_1+2N_2 \\ p_k \text{和} c_k \text{分别为实数零、极点} \\ q_k, q_k^* \text{和} d_k, d_k^* \text{分别为复共轭零、极点} \end{cases}$$

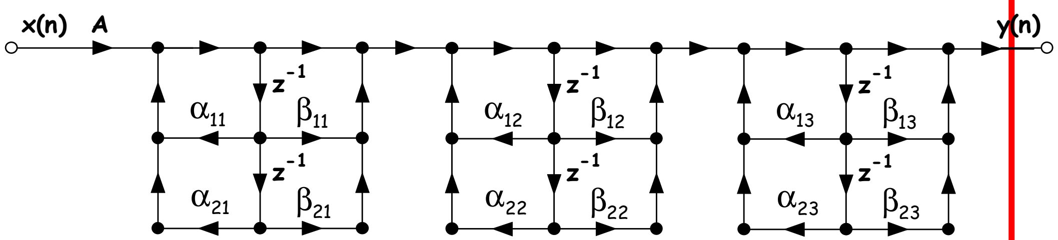
cascade of biquads

将共轭成对的复数组合成二阶多项式（系数为实数），为采用相同结构的子网络，将两个实零点/极点组合成二阶多项式，得到：

$$H(z)=A\left(\prod_{k}^{L}\left[\frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}\right]\right)=A\left(\prod_{k}^{L}H_{k}(z)\right)\qquad L=\left\lfloor\frac{N+1}{2}\right\rfloor$$







组合优化

级联型

级联型特点：

- 调整系数 β_{1k}，β_{2k} 能单独调整滤波器的第k对零点，而不影响其它零极点

  调整系数 α_{1k}，α_{2k} 能单独调整滤波器的第k对极点，而不影响其它零极点

  滤波器频率响应性能调整方便

- 所需存储单元少，可实现时分复用
- 组合方式多

缺点：存在误差传递（放大/缩小） 产生溢出
串行处理 运算效率不高

Much less sensitive to the effects of coefficients quantization！！！

5、并联型：Parallel

将$H(z)$展成部分分式之和：

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-N}G_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-g_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}$$

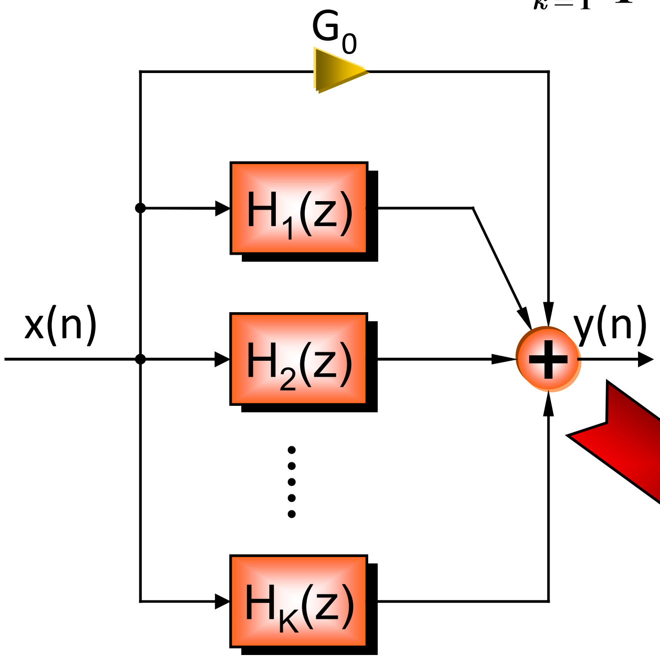
$$N=N_1+2N_2$$

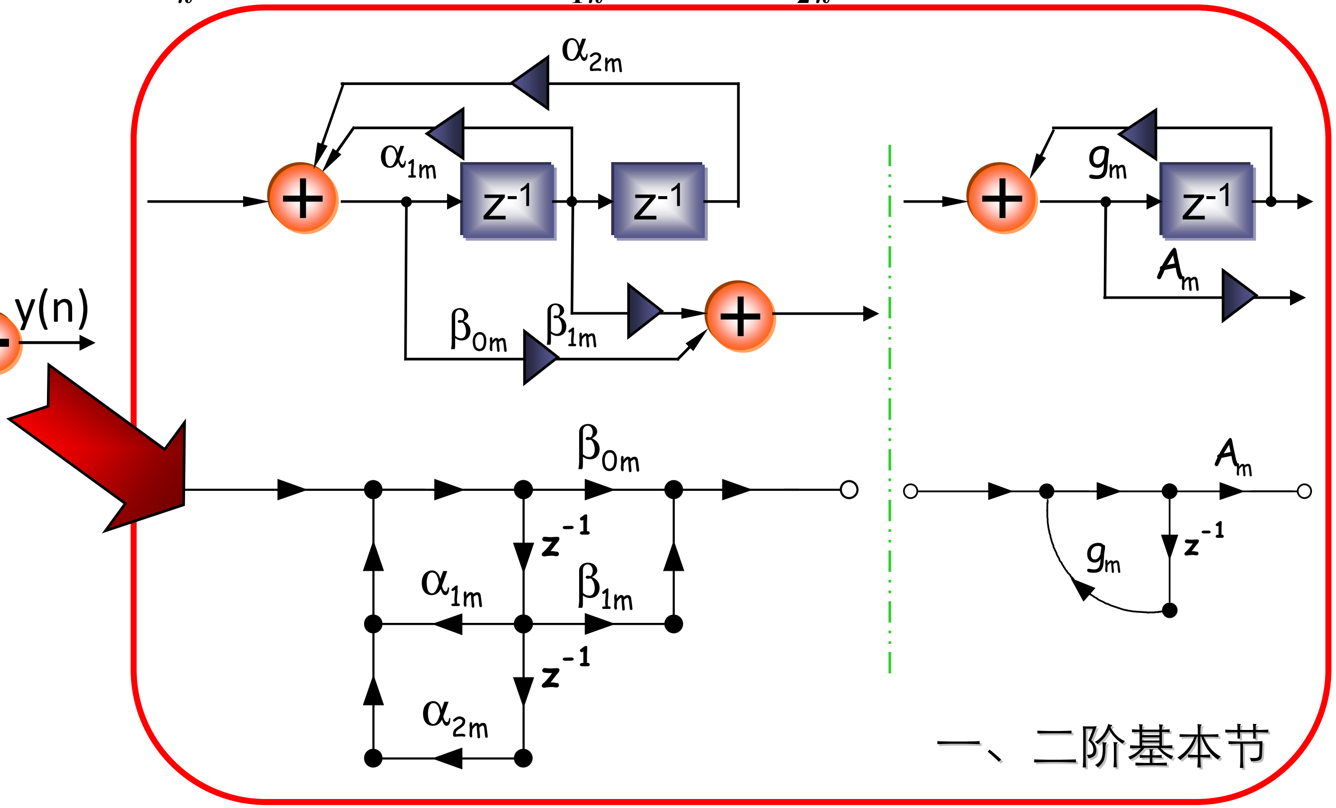
其中 $G_k, A_k, g_k, \beta_{0k}, \beta_{1k}, \alpha_{1k}, \alpha_{2k}$ 均为实数

(1) $M<N$: $\sum_{k=0}^{M-N}G_k z^{-k}$ 消失

(2) $M=N$: $\sum_{k=0}^{M-N}G_k z^{-k}\rightarrow G_0$

$$H(z)=G_0+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-g_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}\qquad (M=N)$$





并联型的特点：

- 通过调整系数 α_{1k} ，α_{2k} 可单独调整一对极点位置，但不能单独调整零点位置
- 各并联基本节的误差互相不影响，故运算误差最小
- 可进行并行运算，运算速度高

例：设IIR数字滤波器差分方程为：

$$y(n)=8x(n)-4x(n-1)+11x(n-2)-2x(n-3)+\frac{5}{4}y(n-1)-\frac{3}{4}y(n-2)+\frac{1}{8}y(n-3)$$

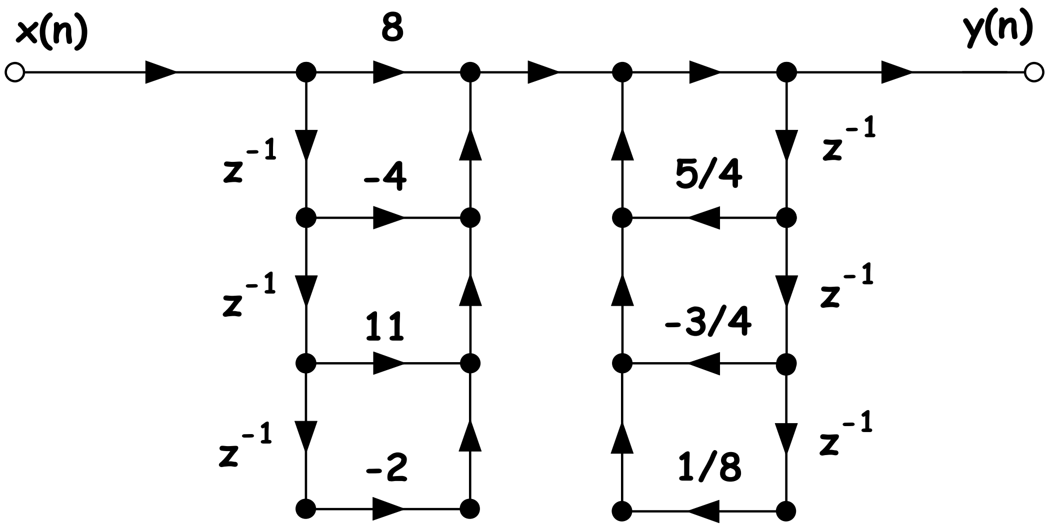
试用四种基本结构实现此差分方程。

解：对差分方程两边取 z 变换，得系统函数：

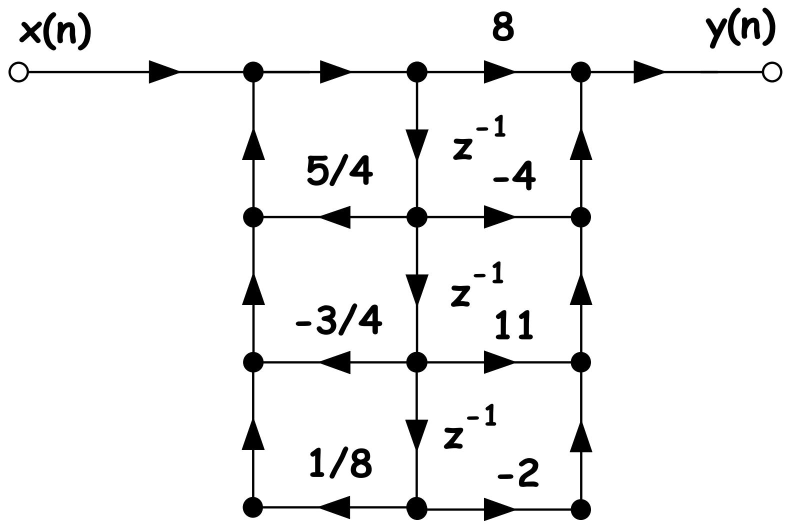
$$H(z)=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}$$

$$H(z)=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\frac{5}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}-\frac{1}{8}z^{-3}}=\frac{8-4z^{-1}+11z^{-2}-2z^{-3}}{1-\left(\frac{5}{4}z^{-1}-\frac{3}{4}z^{-2}+\frac{1}{8}z^{-3}\right)}$$

直接型 I 结构:



典范型结构:

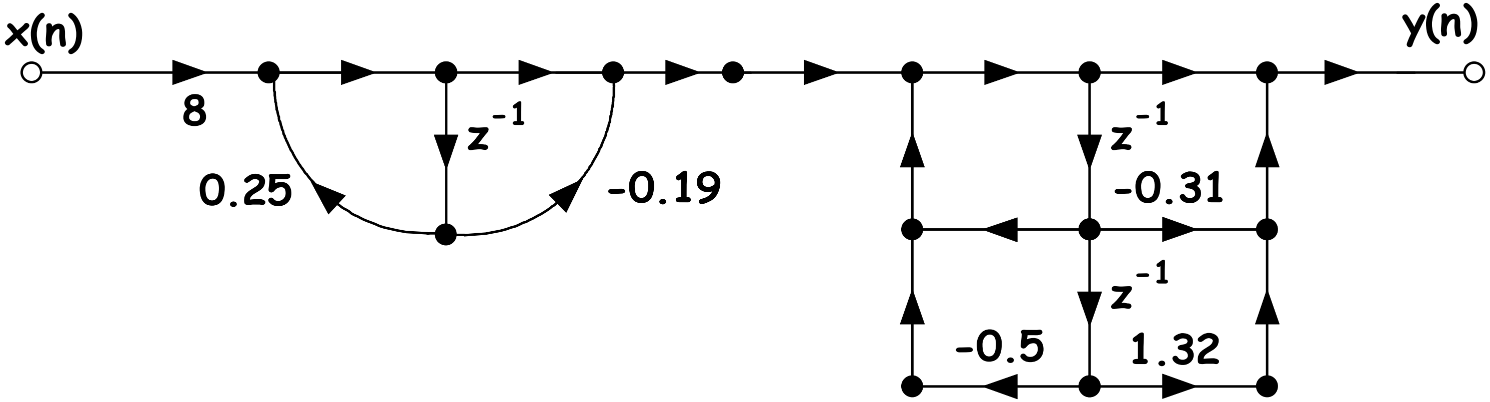


将 $H(z)$ 因式分解：

$$H(z)=\frac{\left(2-0.379z^{-1}\right)\left(4-1.24z^{-1}+5.264z^{-2}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

$$=(8)\left(\frac{1-0.19z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)\left(\frac{1-0.31z^{-1}+1.32z^{-2}}{1-\left(z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right)}\right)$$

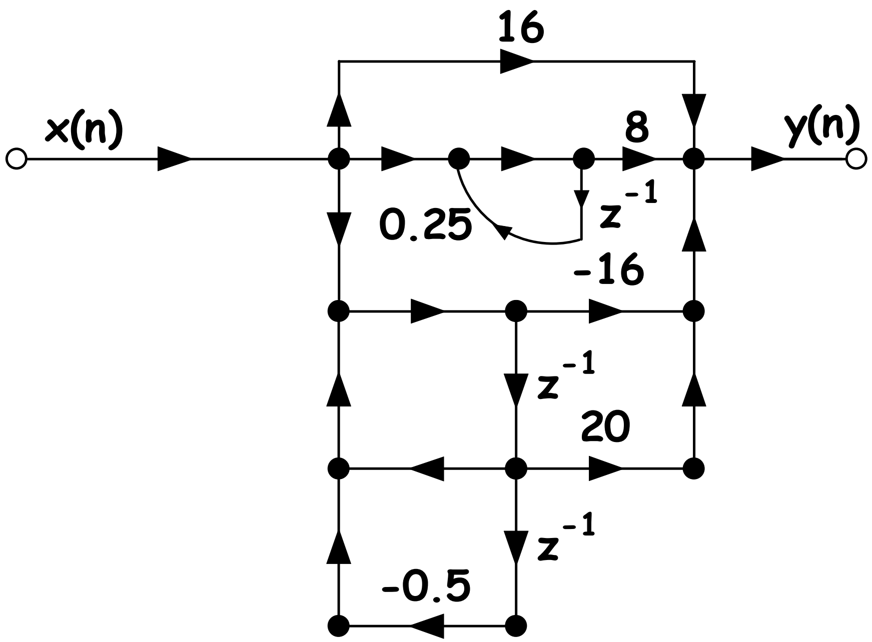
得级联型结构：



将 $H(z)$ 部分分式分解:

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - \left(z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

得并联型结构:



➢FIR 数字滤波器的结构

FIR数字滤波器的特点:

系统函数: $H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$

差分方程: $y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)x(n-k)=h(n)*x(n)$

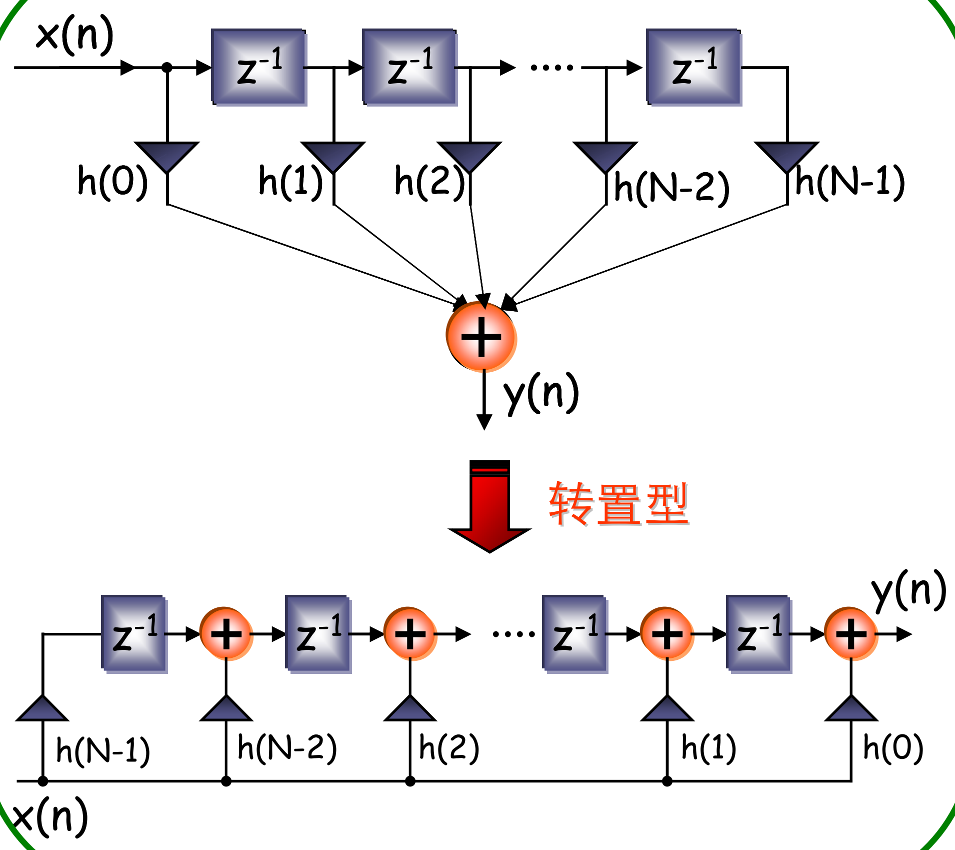
1）系统的单位抽样响应$h(n)$有限长（N点）

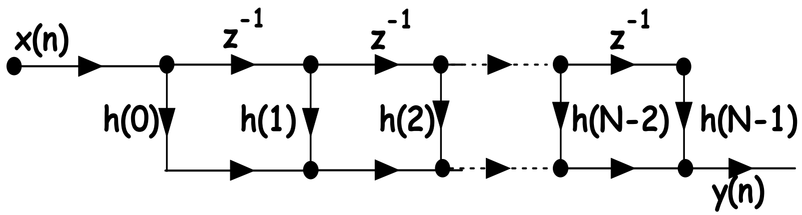
2）系统函数$H(z)$在$|z|>0$ 处收敛，有限z平面只有零点，全部极点在 $z=0$ 处（因果系统）

3）无输出到输入的反馈，一般为非递归型结构

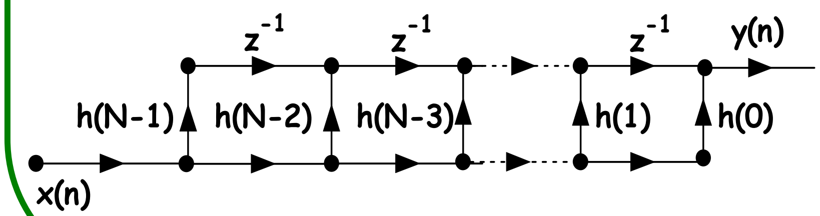
1、直接型 (卷积型)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$





- Tapped-delay line（N-1）delays
- N multipliers
- 1 adder（N inputs）



2、级联型

当需要灵活方便地控制滤波器的传输零点时，可将$H(z)$分解成实系数二阶因式的乘积形式:

$$H(z)=\prod_{k=1}^{M_1} H_{1k}(z)\prod_{k=1}^{M_2} H_{2k}(z)$$

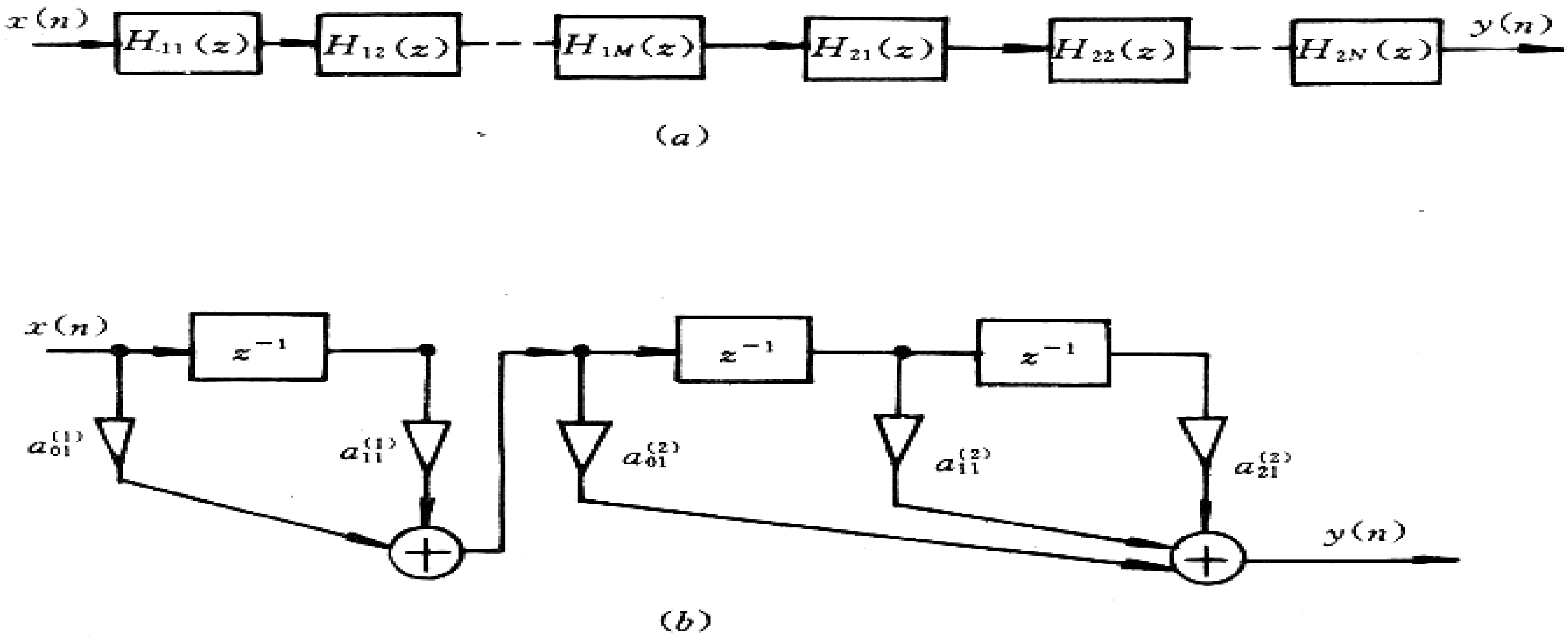
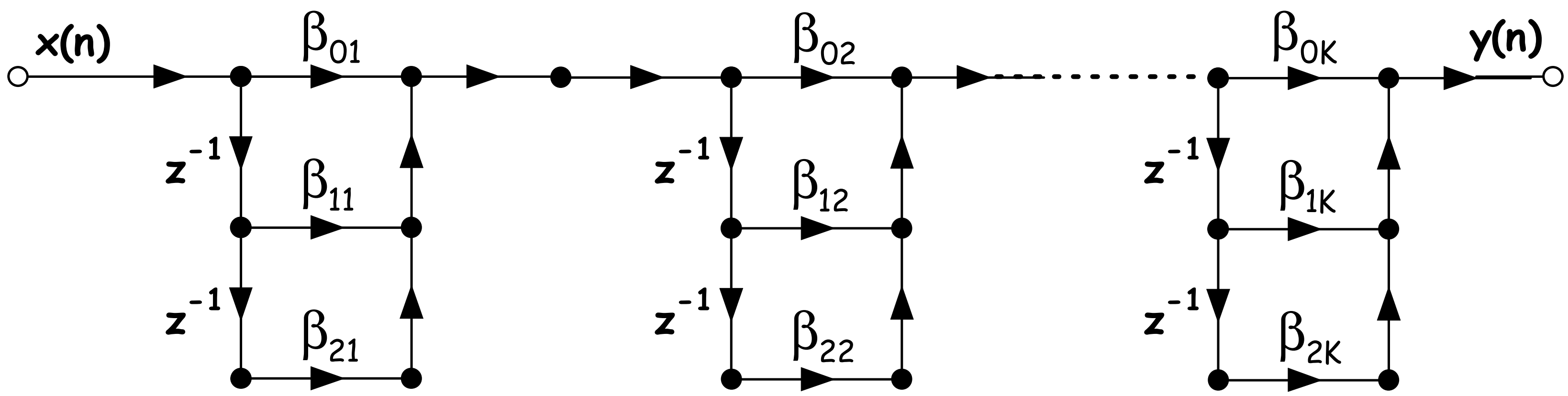


图 5—12　FIR 级联型结构之构成

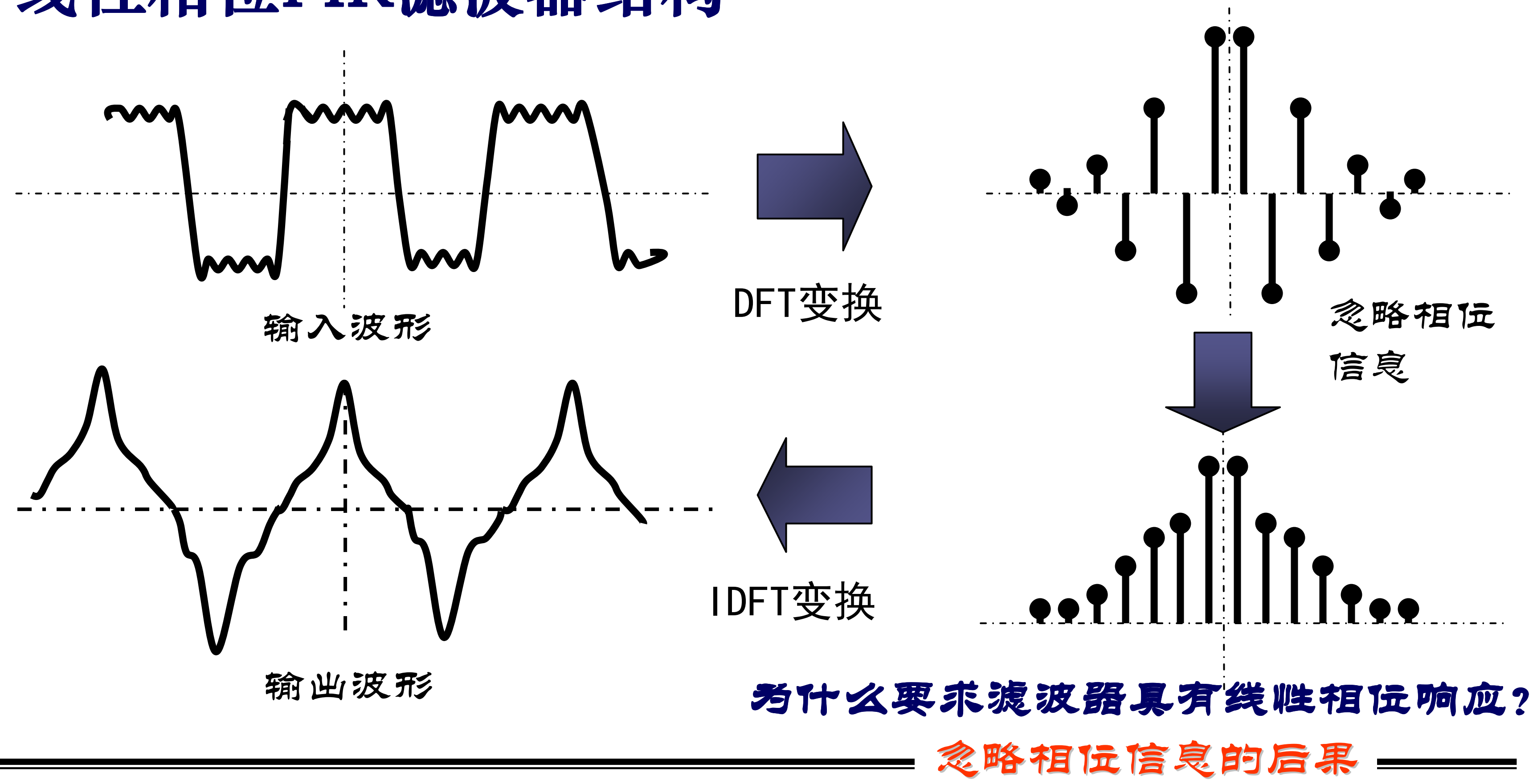
(a) 级联型结构框图　(b) 级联型具体结构

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\prod_{k=1}^{[N/2]}(\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})$$



- 由于这种结构所需的系数比直接型多，所需乘法运算也比直接型多，很少用
- 由于这种结构的每一节控制一对零点，因而通常仅在需要控制传输零点时用

3、线性相位FIR滤波器结构

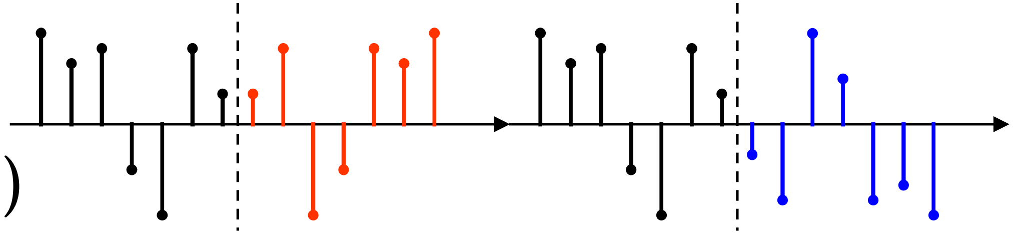


FIR系统的最主要特征之一就是可以构成具有线性相位特性的滤波器

FIR滤波器单位抽样响应$h(n)$为实数，$0 \le n \le N-1$，且满足：

偶对称：$h(n) = h(N-1-n)$

奇对称：$h(n) = -h(N-1-n)$



即对称中心在 $(N-1)/2$ 处，则这种 FIR 滤波器具有严格线性相位

***N* 为奇数时**

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

乘法：(N-1)/2 或 (N+1)/2

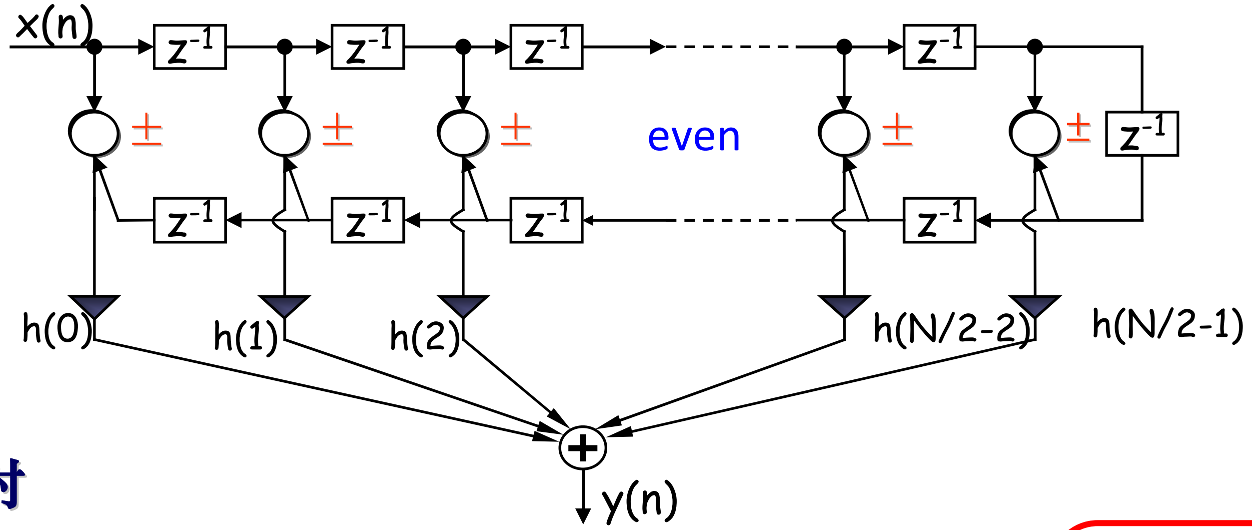
N 为偶数时

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

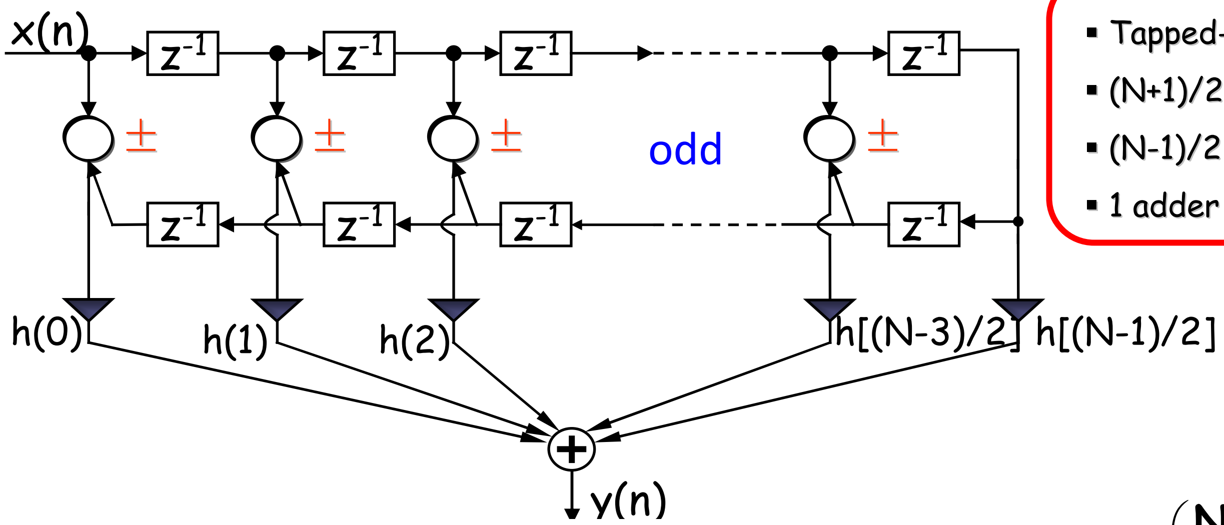
$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right]$$

乘法：N/2

N 为偶数时



N 为奇数时



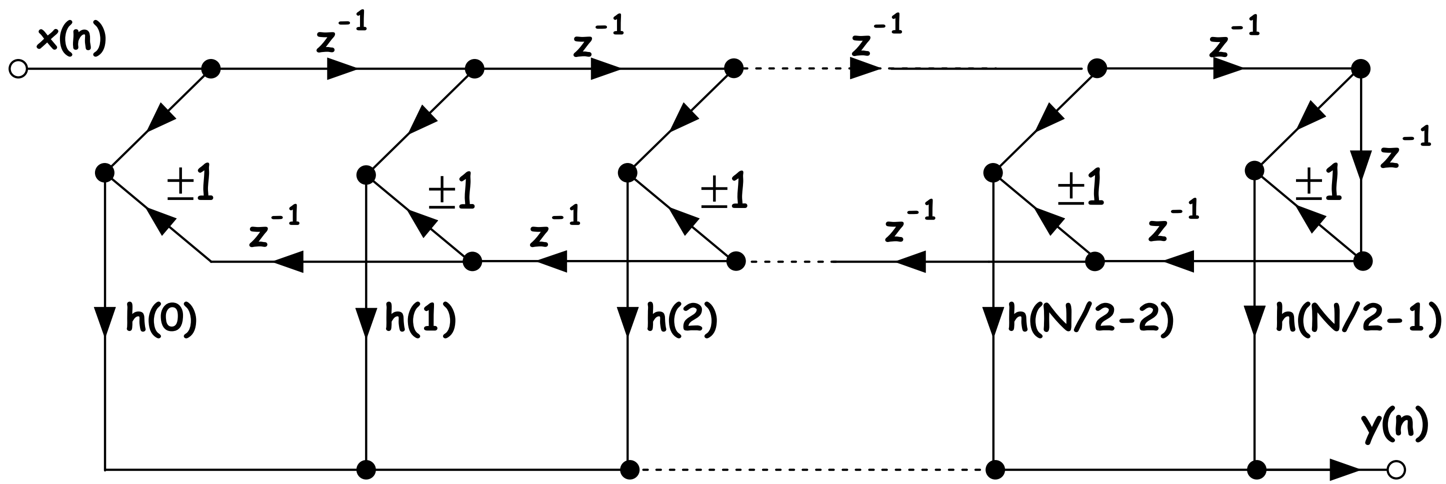
- Tapped-delay line (N-1) delays
- (N+1)/2 multipliers
- (N-1)/2 adders (2 inputs)
- 1 adder (N+1)/2 inputs

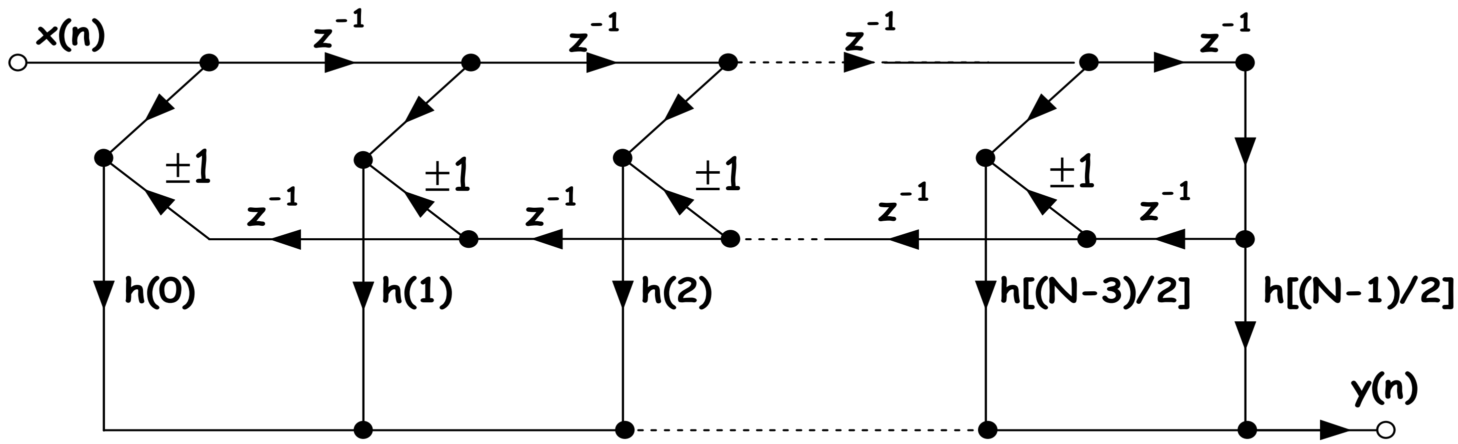
symmetric FIR

h(n) 偶对称，取 “+”

h(n) 奇对称，取 “-” ，且 $h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$

Li



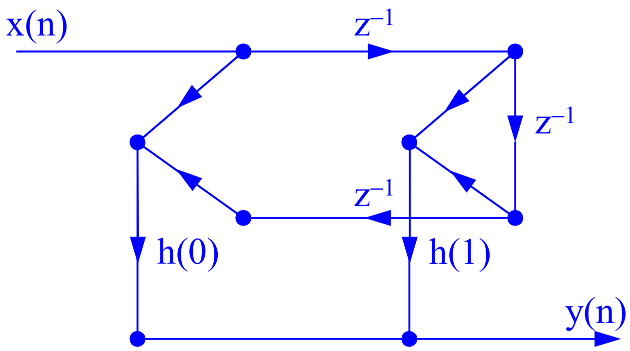


alternatively!

例：画出 4 阶和 5 阶线性相位 FIR 数字滤波器实现结构：

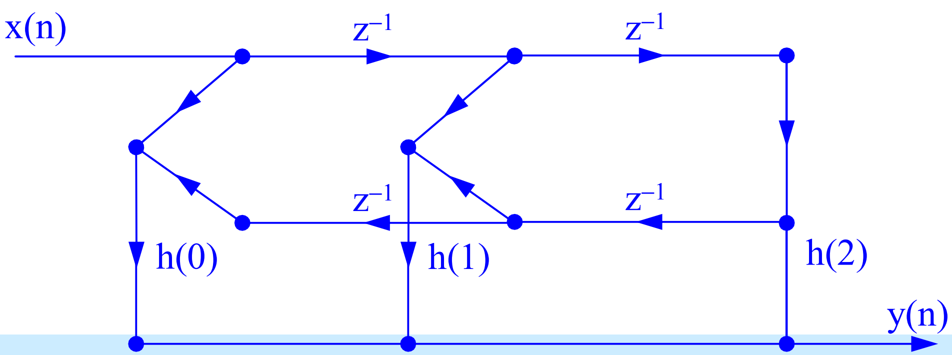
（1）$N=4$，$h(0)=h(3)$；$h(1)=h(2)$

$$H(z)=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+h(3)z^{-3}=h(0)[1+z^{-3}]+h(1)[z^{-1}+z^{-2}]$$



（2）$N=5$，$h(0)=h(4)$；$h(1)=h(3)$

$$H(z)=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2}+h(3)z^{-3}+h(4)z^{-4}=h(0)[1+z^{-4}]+h(1)[z^{-1}+z^{-3}]+h(2)z^{-2}$$



4、频率取样型

N个频率抽样$H(k)$恢复$H(z)$的内插公式：

$$H(z)=(1-z^{-N})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

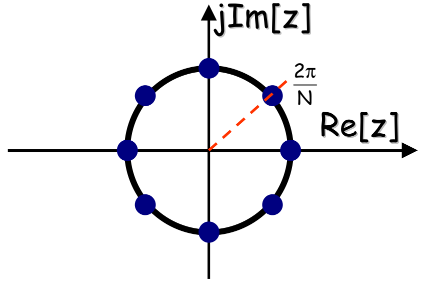
$$=\frac{1}{N}H_c(z)\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)$$

由此得到FIR滤波器的另一种结构：频率抽样型结构，它由两部分级联而成：

$$H_c(z)=(1-z^{-N}) \qquad \sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

（1）梳状滤波器(全零滤波器）：

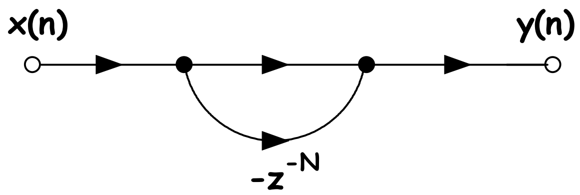
$$H_c(z) = (1 - z^{-N})$$



N个零点

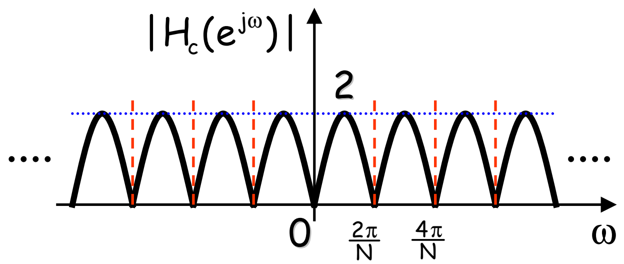
在单位圆上N个等分的零点

$$z_k = e^{j2\pi k/N}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$



$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N}$$

$$= e^{-j\frac{\omega N}{2}}\left(e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}}\right) = 2je^{-j\frac{\omega N}{2}}\sin\frac{\omega N}{2}$$



$$|H_c(e^{j\omega})| = 2|\sin(\frac{N}{2}\omega)|$$

（2）N个谐振器：

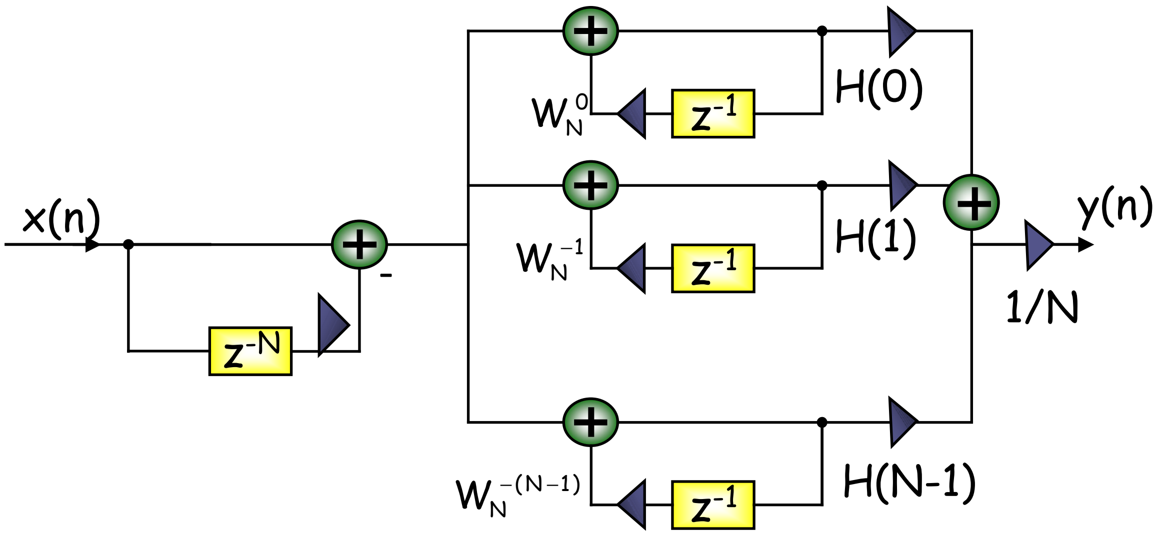
$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

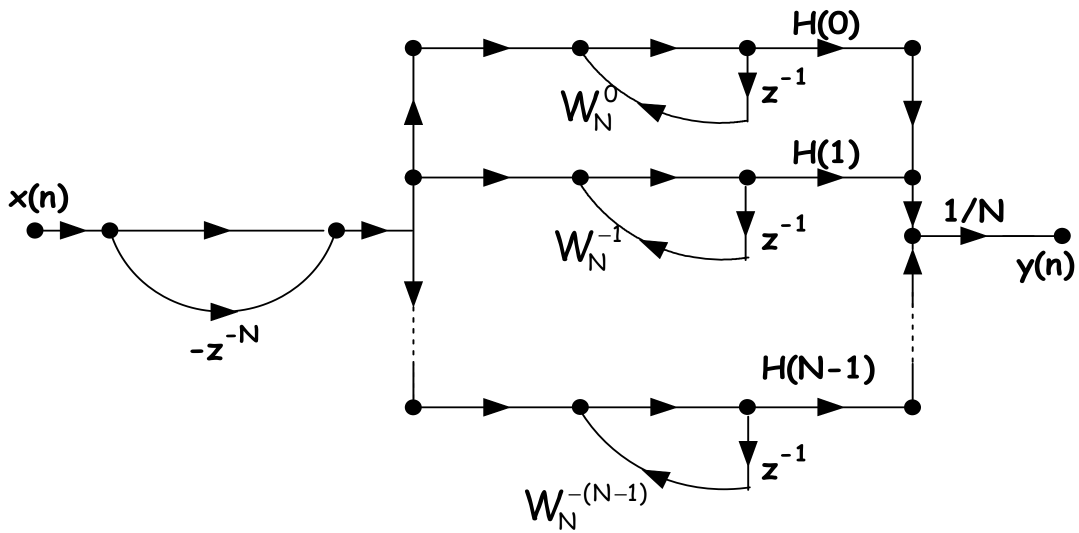
第 k 个谐振器
$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

为一阶网络，它存在一个位于 $z = W_N^{-k}$ 的极点，并在该处发生所谓谐振，即 $H_k(z) \to \infty$，而该极点正好与梳状滤波器的第k个零点相抵消，从而使这个频率上的频率响应等于$H(k)$。

将两部分级联起来，便得到所谓的**频率抽样结构**

$$H_c(z)\cdot H_k(z)=\left(z_k-e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)\left[\frac{H(k)}{\left(z_k-e^{j\frac{2\pi k}{N}}\right)}\right]=H(k)$$





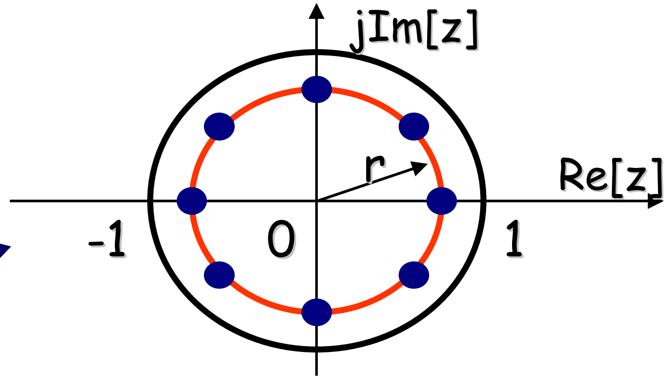
- 调整H(k)就可以有效地调整频响特性（在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处的响应即为H(k)
- 若h(n)长度相同，则除了各支路增益H(k)外网络结构完全相同，便于标准化、模块化
- 有限字长效应可能导致零极点不能完全对消(梳状滤波器的零点由延时器形成，并不受量化误差影响)，导致系统不稳定
- 系数多为复数，增加了复数乘法和存储量

修正之频率取样型

1.将零极点移至半径为 r 的圆上: $r<1, r\approx 1$

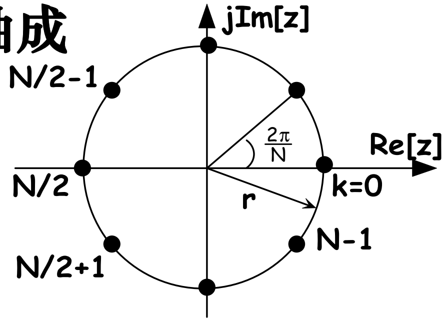
$$H(z)=(1-r^N z^{-N})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_r(k)}{1-rW_N^{-k}z^{-1}}$$

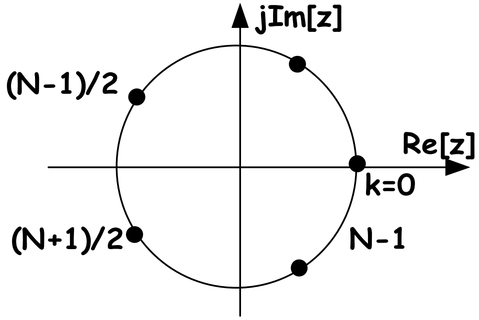
此时，第k个谐振器的极点变为 rW_N^{-k}



2.为了使系数是实数，可将共轭根合并.

这些共轭根在半径为r的圆周上以实轴成对称分布:





由对称性:

$$z_{N-k}=z_k^* \quad W_N^{-(N-k)}=W_N^k=(W_N^{-k})^*$$

又h(n)为实数，则 $H(k)=H^*((N-k))_N R_N(k)$

$$\boxed{H(k)=H^*(N-k)}$$

将第k个和第$(N-k)$个谐振器合并成一个实系数的二阶网络：

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - rW_N^{-(N-k)}z^{-1}}$$

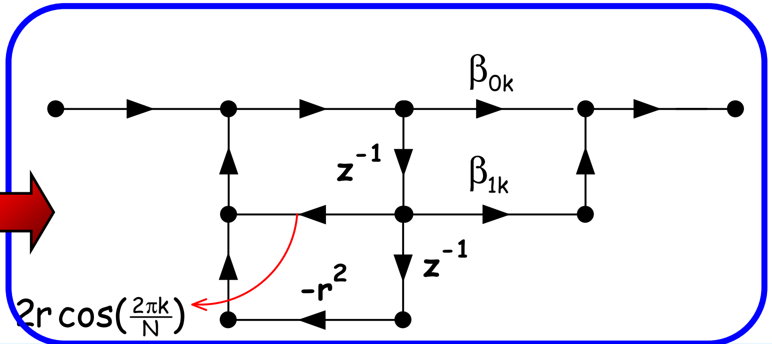
$$= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H^*(k)}{1 - r(W_N^{-k})^* z^{-1}}$$

$$= \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1}}{1 - z^{-1}2r\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + r^2z^{-2}}$$

其中 $\beta_{0k} = 2\,\mathrm{Re}[H(k)]\,;\ \beta_{1k} = -2r\,\mathrm{Re}[H(k)W_N^k]$ $\begin{cases} k = 1, 2, \ldots, \dfrac{N-1}{2}, N : odd \\ k = 1, 2, \ldots, \dfrac{N}{2} - 1, N : even \end{cases}$

remarks

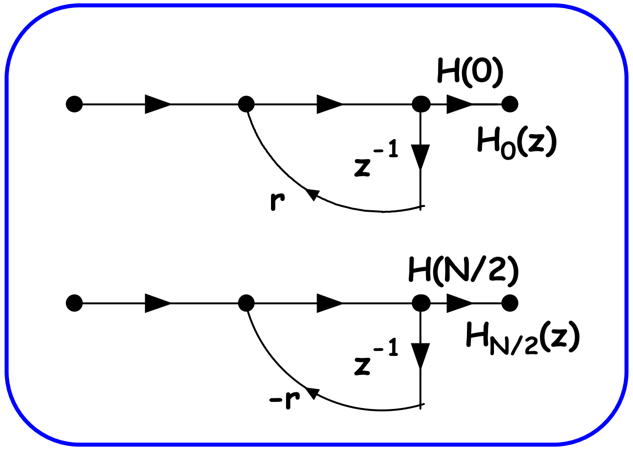
第k和第N-k个谐振器合并为一个二阶网络的极点在单位圆内，而不是在单位圆上，因而从频率响应的几何解释可知，它相当于一个有限Q(品质因数)的谐振器。其谐振频率为： $\omega_k = 2\pi k/N$



- 当 N 为偶数时，还有一对实数根，分别在 $k=0,\ N/2$ 两点

$$H_0(z)=\frac{H(0)}{1-rz^{-1}}$$

$$H_{N/2}(z)=\frac{H(N/2)}{1+rz^{-1}}$$

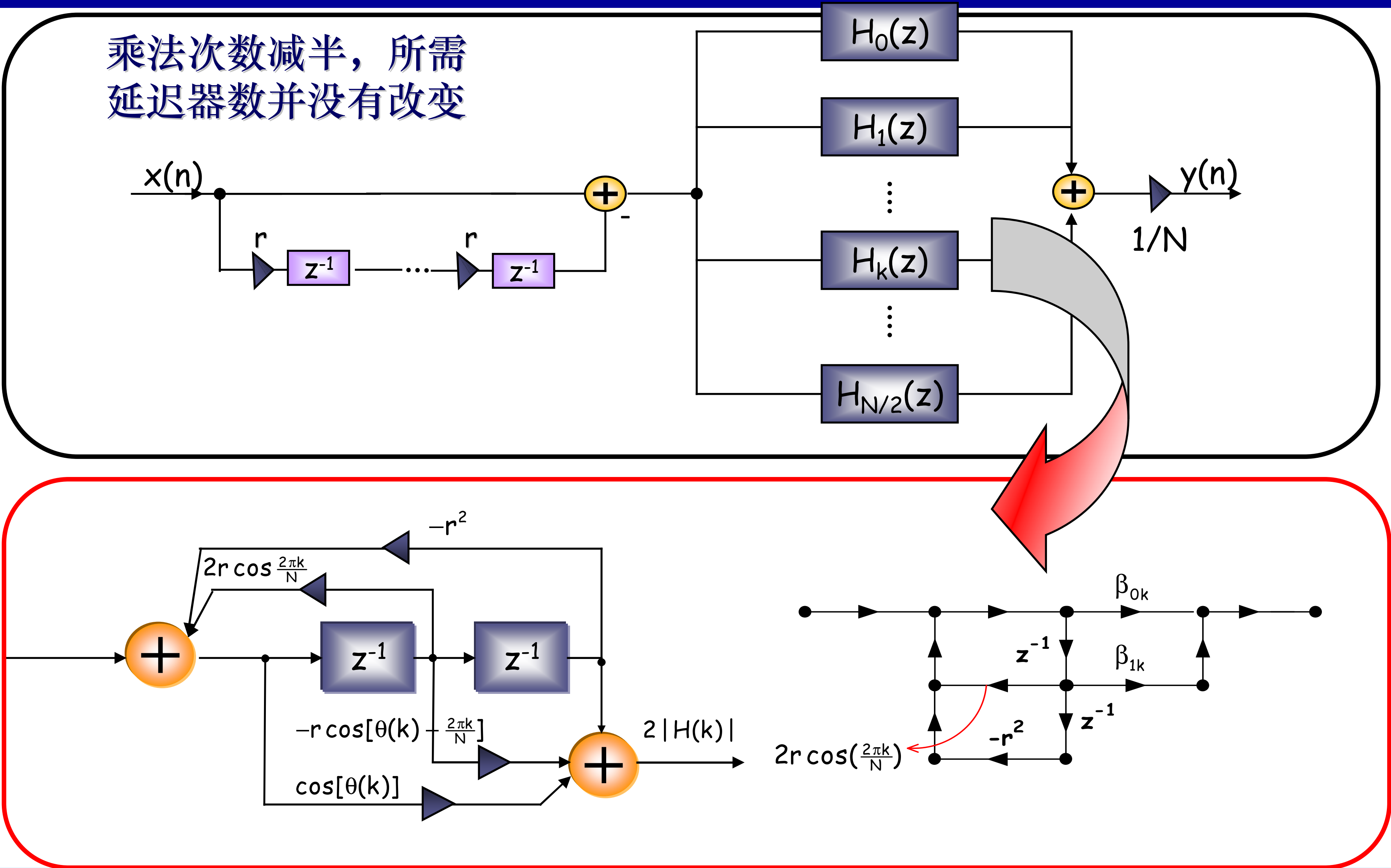


$$H(z)=\left(1-r^Nz^{-N}\right)\frac{1}{N}\left[H_0(z)+H_{N/2}(z)+\sum_{k=1}^{N/2-1}H_k(z)\right]$$

- 当 N 为奇数时，只有一个实数根，在 $k=0$ 处

$$H(z)=\left(1-r^Nz^{-N}\right)\frac{1}{N}\left[H_0(z)+\sum_{k=1}^{(N-1)/2}H_k(z)\right]$$

乘法次数减半，所需延迟器数并没有改变



修正频率采样结构的特点

（1）结构有递归部分—N个谐振器；又有非递归部分--梳状滤波器；

（2）它的零、极点数目只取决于单位抽样响应的长度，因而单位抽样响应长度相同，利用同一梳状滤波器、同一结构而只有加权系数β_{0k},β_{1k},H(0),H(N/2)不同的谐振器，就能得到各种不同的滤波器；

（3）其结构可以高度模块化，可时分复用。

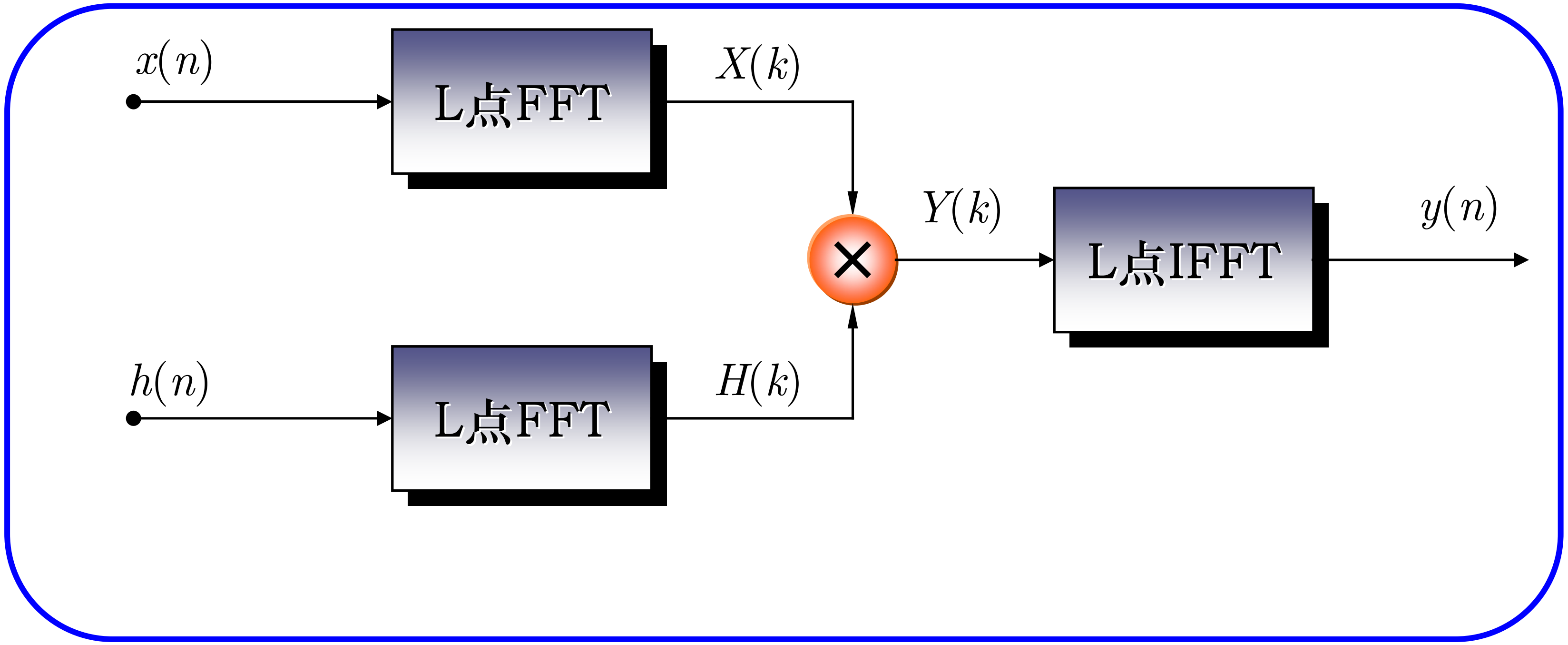
修正频率采样结构的应用范围

（1）如果多数频率特性的采样值$H(k)$为零，例：窄带低通情况下，这时谐振器减少，因而可以比直接型少用乘法器，但存储器还是比直接型多用一些；

（2）可以共同使用多个并列的滤波器。例：信号频谱分析中，要求同时将信号的各种频率分量分别滤出来，这时可采用频率采样结构的滤波器，大家共用一个梳状滤波器及N个谐振器，只是将各谐振器的输出适当加权组合就能组成各所需的滤波器。这样的结构具有很大的经济性；

（3）常用于窄带滤波，不适于宽带滤波。

5、快速卷积结构



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

$$Y(k) = X(k)H(k) \Rightarrow y(n) = \mathcal{IDFT}[Y(k)]$$

作业

第五章

1-4、7-14、16、18