100052205

数字信号处理

Digital Signal Processing

李慧琦 教授

信息与电子学院

北京理工大学

Tel: +86 (10) 68918239

Email: huiqili@bit.edu.cn

第三章 离散傅里叶变换

本章主要内容

- 傅里叶变换的几种形式
- 离散傅里叶级数
- 离散傅里叶变换的定义和性质
- 频域采样
- **DFT**的应用

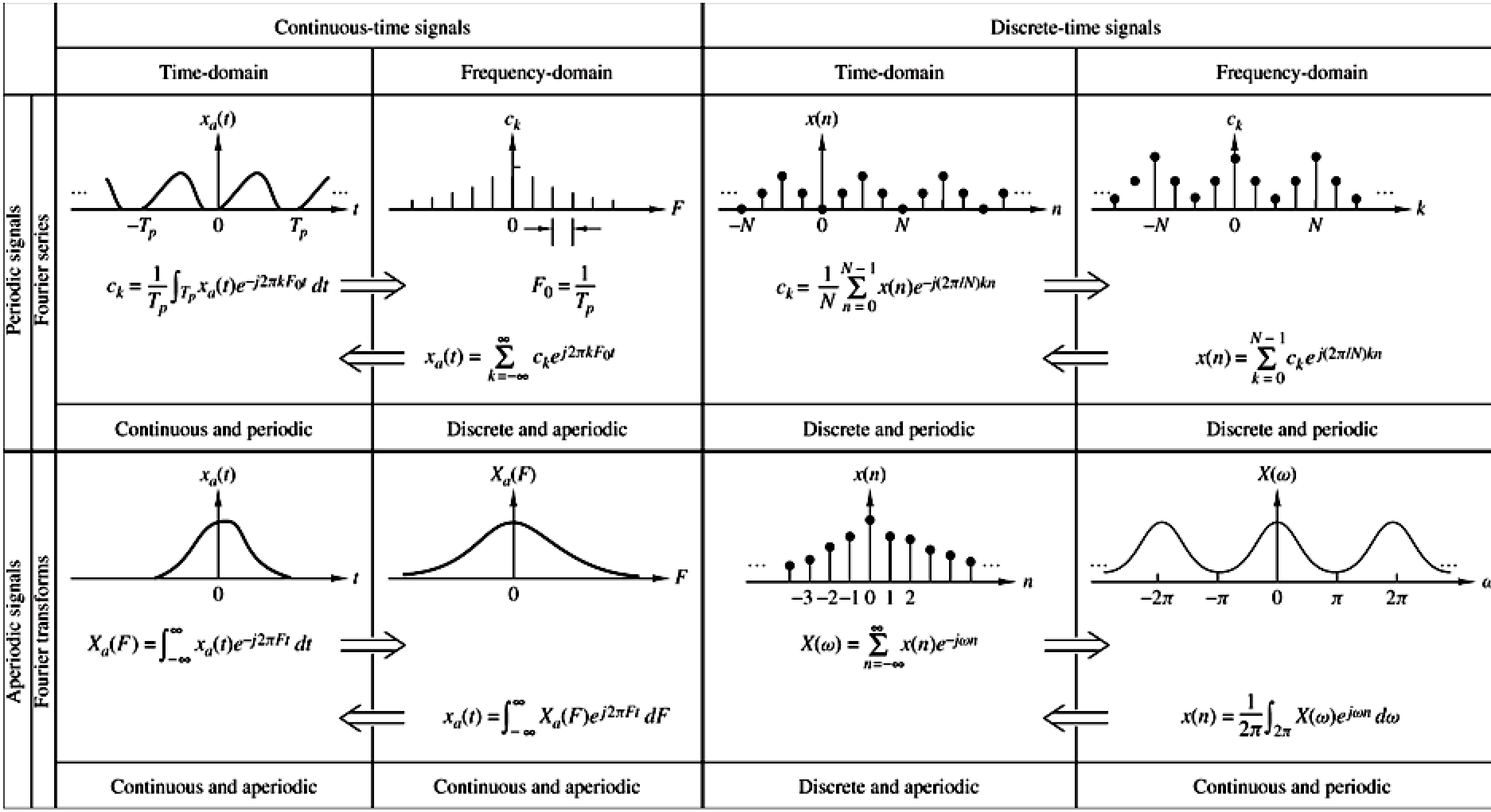
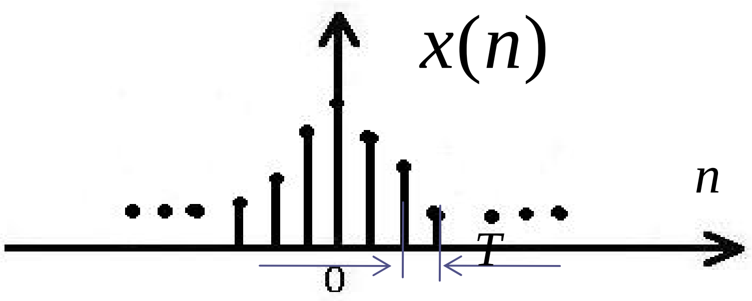


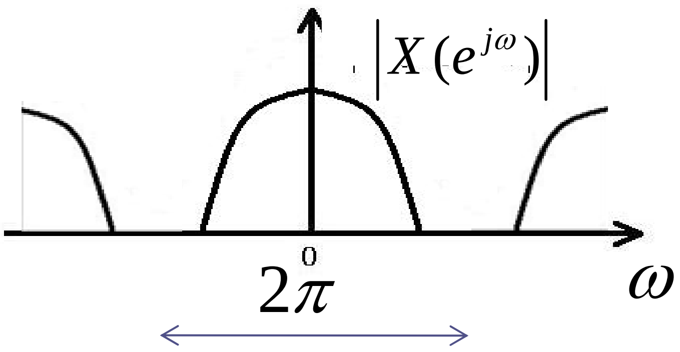
Figure 4.3.1 Summary of analysis and synthesis formulas.

§ 3-3 离散傅里叶级数(DFS)

DFS变换的推导

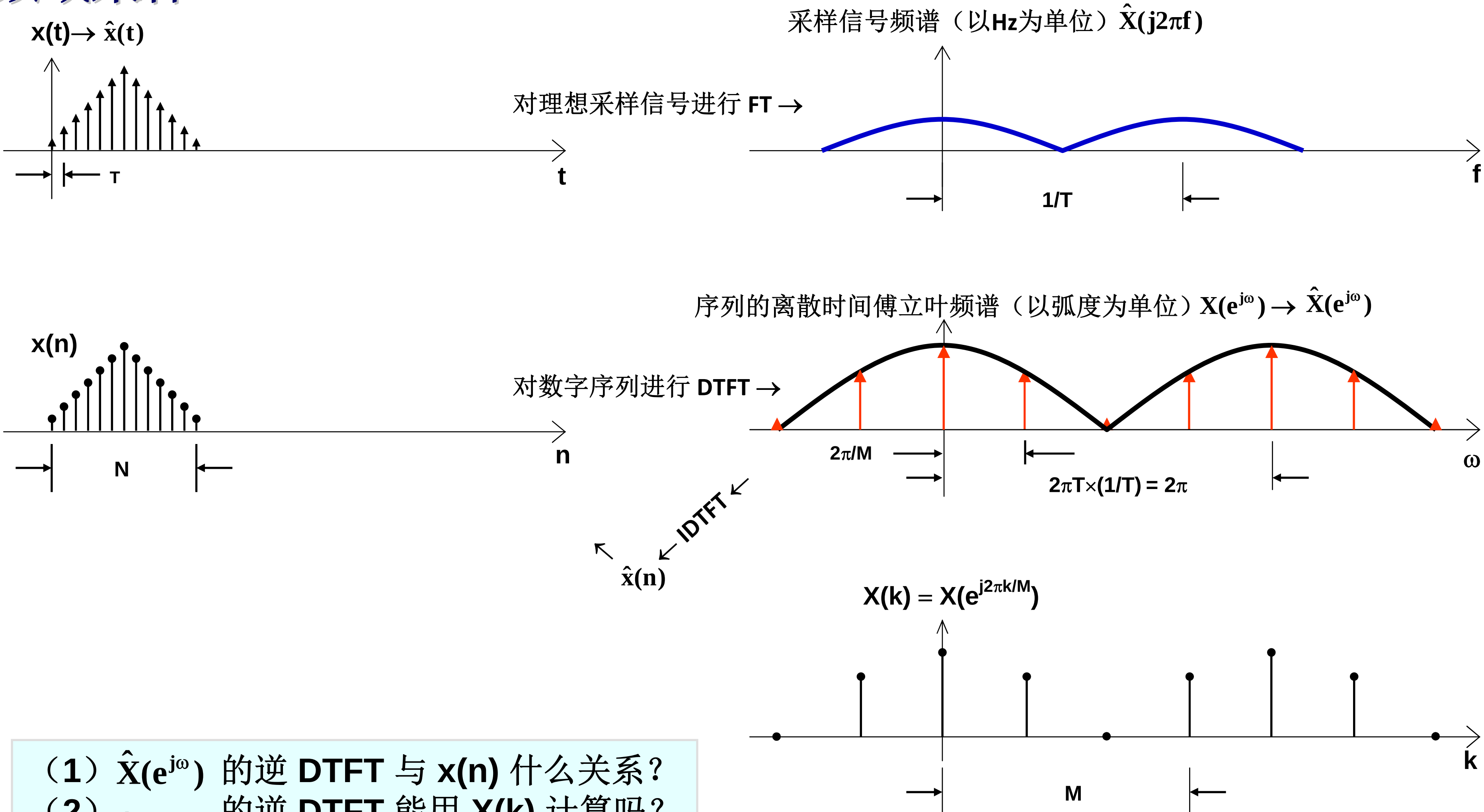
由**DTFT** $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ 由**DTFT**推导**DFS**





连续频谱

频域采样



（1）$\hat{X}(e^{j\omega})$ 的逆 DTFT 与 $x(n)$ 什么关系？

（2）$\hat{X}(e^{j\omega})$ 的逆 DTFT 能用 $X(k)$ 计算吗？

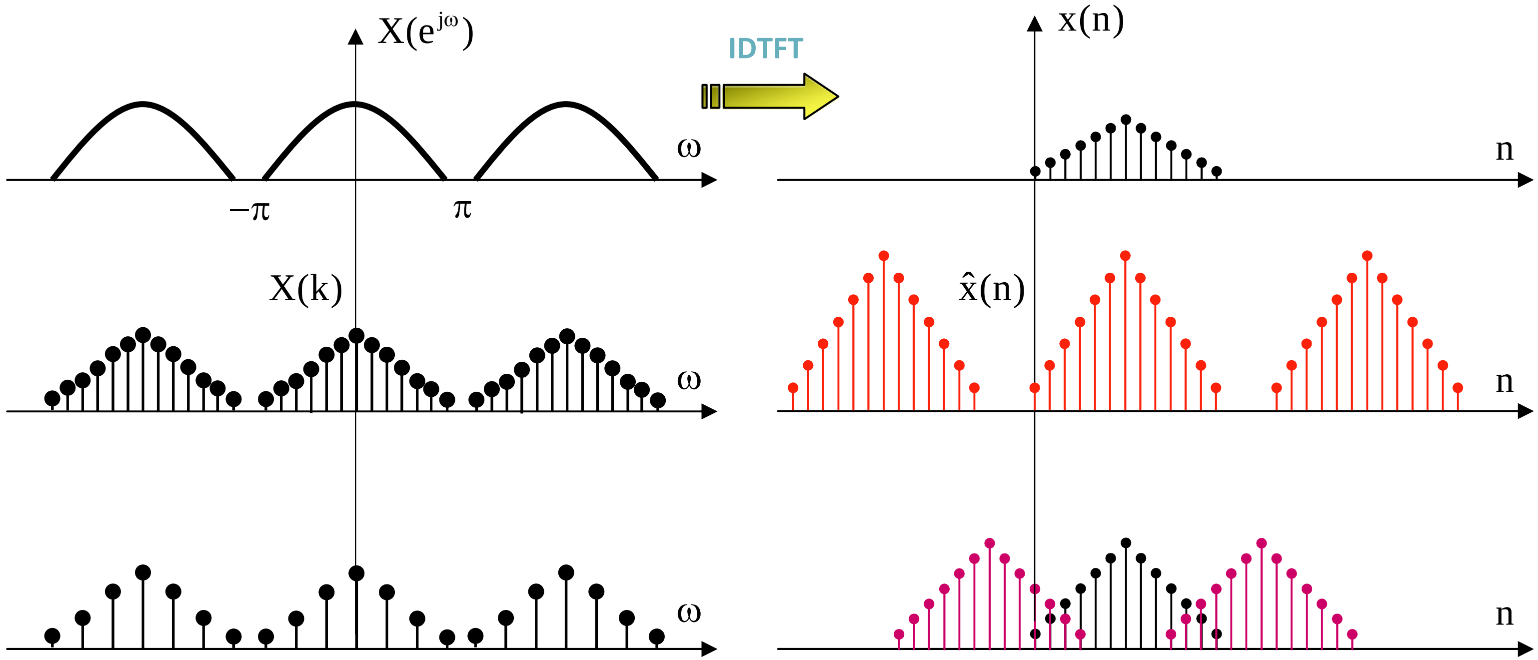
$$\hat{x}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\hat{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{X(e^{j\frac{2\pi}{M}k})}_{X(k)}\delta(\omega-2\pi k/M)\right]e^{j\omega n}d\omega=\boxed{\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{M-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{M}kn}}$$

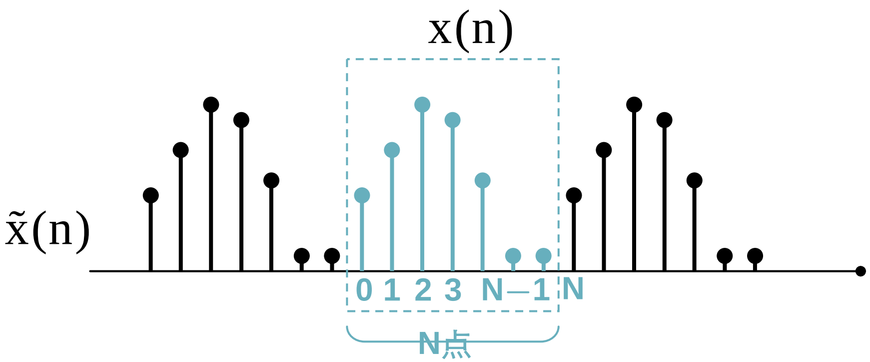
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[X(e^{j\omega})p_{\delta}(\omega)]e^{j\omega n}d\omega$$

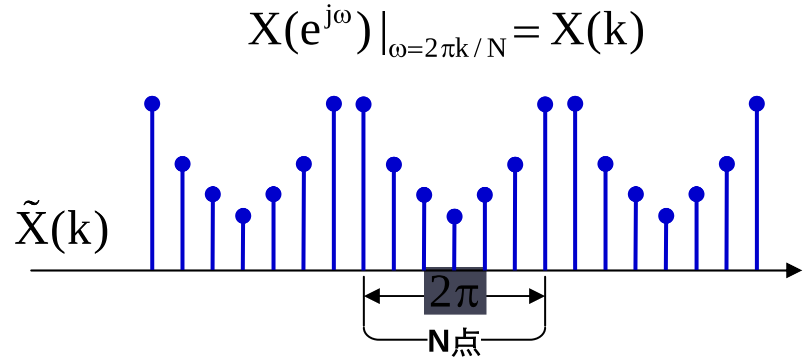
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(e^{j\omega})\left(\frac{M}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jMm\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{M}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega(n+mM)}d\omega=\boxed{\frac{M}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+mM)}$$



- 频域过采样会造成时域“稀疏延拓”： M > N
- 频域欠采样会造成时域“折叠延拓”： M < N
- 时频域不可能同时存在冗余！





$$\hat{x}(n) = \frac{M}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mM) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j\frac{2\pi}{M}k})e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

$$\Downarrow \quad \boxed{M = N}$$

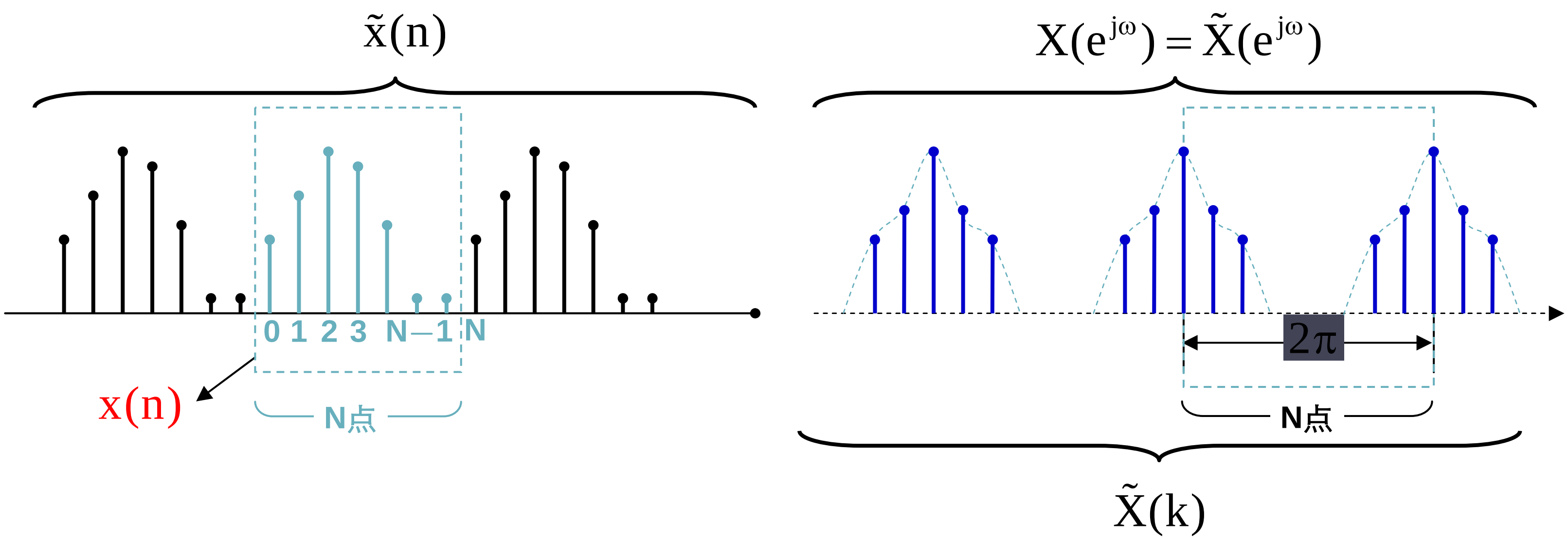
$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{M}k})e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \frac{2\pi}{N}\mathrm{IDTFT}[\hat{X}(e^{j\omega})]$$

DFS

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$\tilde{x}(n) \rightarrow \tilde{X}(k)$?



$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\omega n} \qquad -\infty < \omega < \infty$$

$$\tilde{X}(k) = \tilde{X}(e^{j\omega})\big|_{\omega = k\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad -\infty < k < \infty$$

$\tilde{X}(k) \rightarrow \tilde{x}(n)?$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kr} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kr}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j\frac{2\pi}{N}k(r-n)} \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(r-n)} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(r) e^{j\frac{2\pi}{N}k\cdot 0} = N\tilde{x}(r)$$

$$\therefore \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}k\cdot n} \xrightarrow{W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn}$$

DFS变换对

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn}$$

- $W_N = e^{-j2\pi/N}$ 性质

Symmetry （对称性）

$$(W_N^{nk})^* = W_N^{-nk} = W_N^{(N-n)k} = W_N^{n(N-k)}$$

Periodicity （周期性）

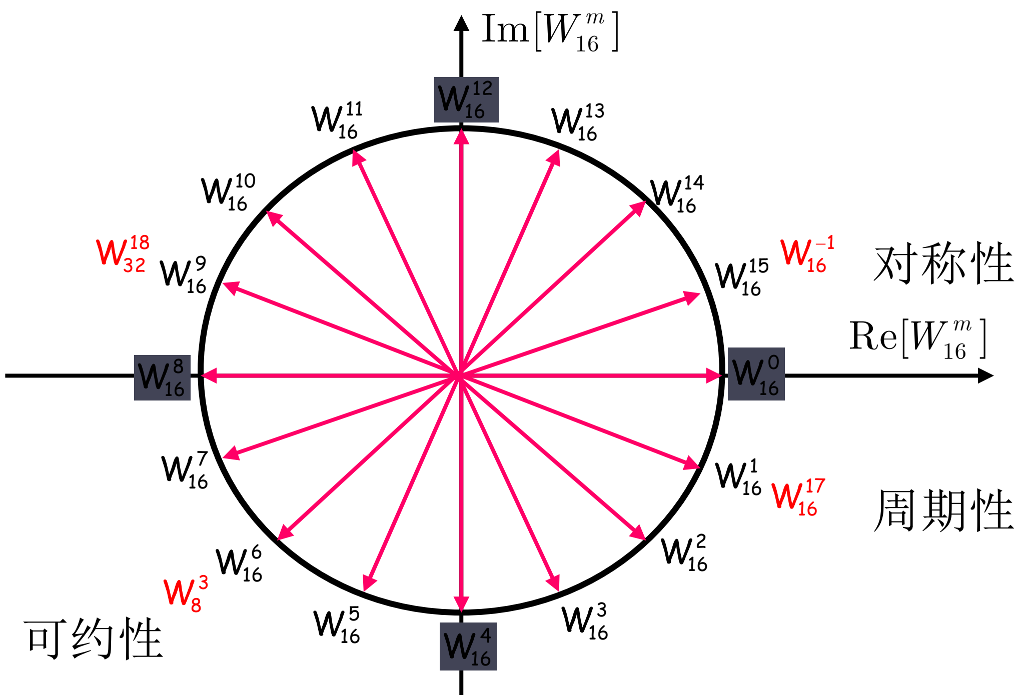
$$W_N^{k+N} = W_N^k$$

Reducibility （可约性）

$$W_N^k = W_{mN}^{mk} = W_{N/m}^{k/m}$$

正交性

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} = \begin{cases} N & n-m=iN \\ 0 & n-m \neq iN \end{cases}$$



例 3.1 设 $\tilde{x}(n)$ 为周期脉冲串，求其 DFS 系数。

$$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(n+rN) \qquad (r\ 为整数)$$

解 将周期脉冲串 $\tilde{x}(n)$ 展开成离散傅里叶级数

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}$$

$\tilde{X}(k)$ 就是其 k 次谐波系数。

因为对于 $0\leqslant n\leqslant N-1$，$\tilde{x}(n)=\delta(n)$，所以利用式(3.5)求出 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS 系数为

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)W_N^{nk}=1$$

例 3.2　已知周期序列 $\tilde{x}(n)$ 如图 3.2 所示，其周期 $N=10$，试求解 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数系数 $\tilde{X}(k)$。

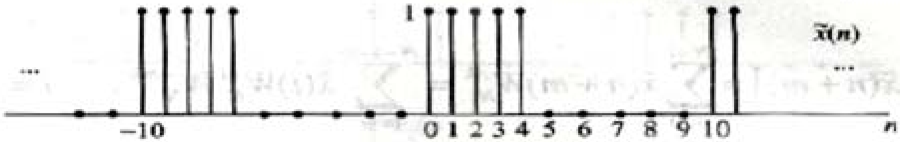


图 3.2　周期序列 $\tilde{x}(n)$（周期 $N=10$）

解　由式(3.5)有

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{10-1}\tilde{x}(n)W_{10}^{nk}=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\frac{2\pi}{10}nk}$$

$$\tilde{X}(k)=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi k}{10}\cdot 5}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{10}}}=e^{-j\frac{4\pi k}{10}}\frac{\sin(5\pi k/10)}{\sin(\pi k/10)} \tag{3.7}$$

图3.3为离散傅里叶级数系数 $\tilde{X}(k)$ 的幅值示意图。

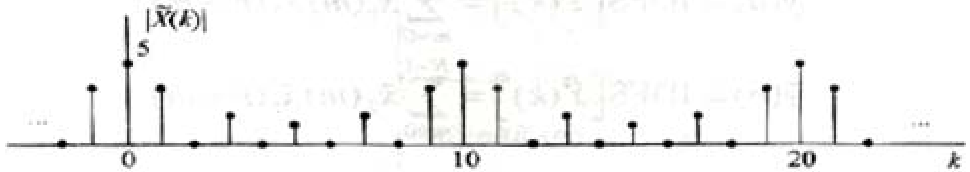


图 3.3　周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数系数 $\tilde{X}(k)$ 的幅值

DFS的主要性质

$\tilde{x}_1(n), \tilde{x}_2(n)$都是周期为N的周期序列

$$\tilde{X}_1(k) \overset{\triangle}{=} DFS\left[\tilde{x}_1(n)\right]$$

$$\tilde{X}_2(k) \overset{\triangle}{=} DFS\left[\tilde{x}_2(n)\right]$$

1.线性特性

迭加原理

$$\tilde{x}_3(n) = a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)$$

$$\tilde{X}_3(k) = DFS\left[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)\right] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$$

$\tilde{x}(n)$是周期为N的周期序列

$$\tilde{X}(k) \overset{\triangle}{=} DFS\left[\tilde{x}(n)\right]$$

2.序列位移

（1）时域移位

$$若\tilde{x}(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}(k), 则\tilde{x}(n-m) \xleftrightarrow{DFS} W_N^{mk}\tilde{X}(k)$$

$$\tilde{x}(n+m) \xleftrightarrow{DFS} W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

（2）频域移位

$$若\tilde{X}(k) \xleftrightarrow{IDFS} \tilde{x}(n), 则\tilde{X}(k-l) \xleftrightarrow{IDFS} W_N^{-nl}\tilde{x}(n)$$

$$\tilde{X}(k+l) \xleftrightarrow{IDFS} W_N^{nl}\tilde{x}(n)$$

证明

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) W_N^{nk} \qquad i = n+m$$

$$= \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki} W_N^{-mk}$$

$$= W_N^{-mk} \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki}$$

$$= W_N^{-mk} \tilde{X}(k)$$

$$\sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) W_N^{ki} = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}(i) W_N^{ki} = \tilde{X}(k)$$

3.周期卷积特性

（1）时域

$$\forall \tilde{x}_1(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_1(k),\quad \tilde{x}_2(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_2(k)$$

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$$

IDFS $\updownarrow$

$$\tilde{x}_3(n) = \sum_{m=0}^{\boxed{N-1}} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m)\tilde{x}_1(n-m)$$

$$= \tilde{x}_1(n) \tilde{\otimes} \tilde{x}_2(n) \rightarrow \text{周期卷积}$$

比较：

$*$ $\quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty}$

$\tilde{\otimes}$ $\quad \sum_{m=0}^{N-1}$ 仅一个周期

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_3(n+N)$$

时域周期卷积 $\longleftrightarrow$ 频域相乘

证明 $\tilde{x}_3(n) = IDFS[\tilde{X}_3(k)] = IDFS[\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)]$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)W_N^{-nk}$$

$$\tilde{X}_1(k) = \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)W_N^{mk}$$

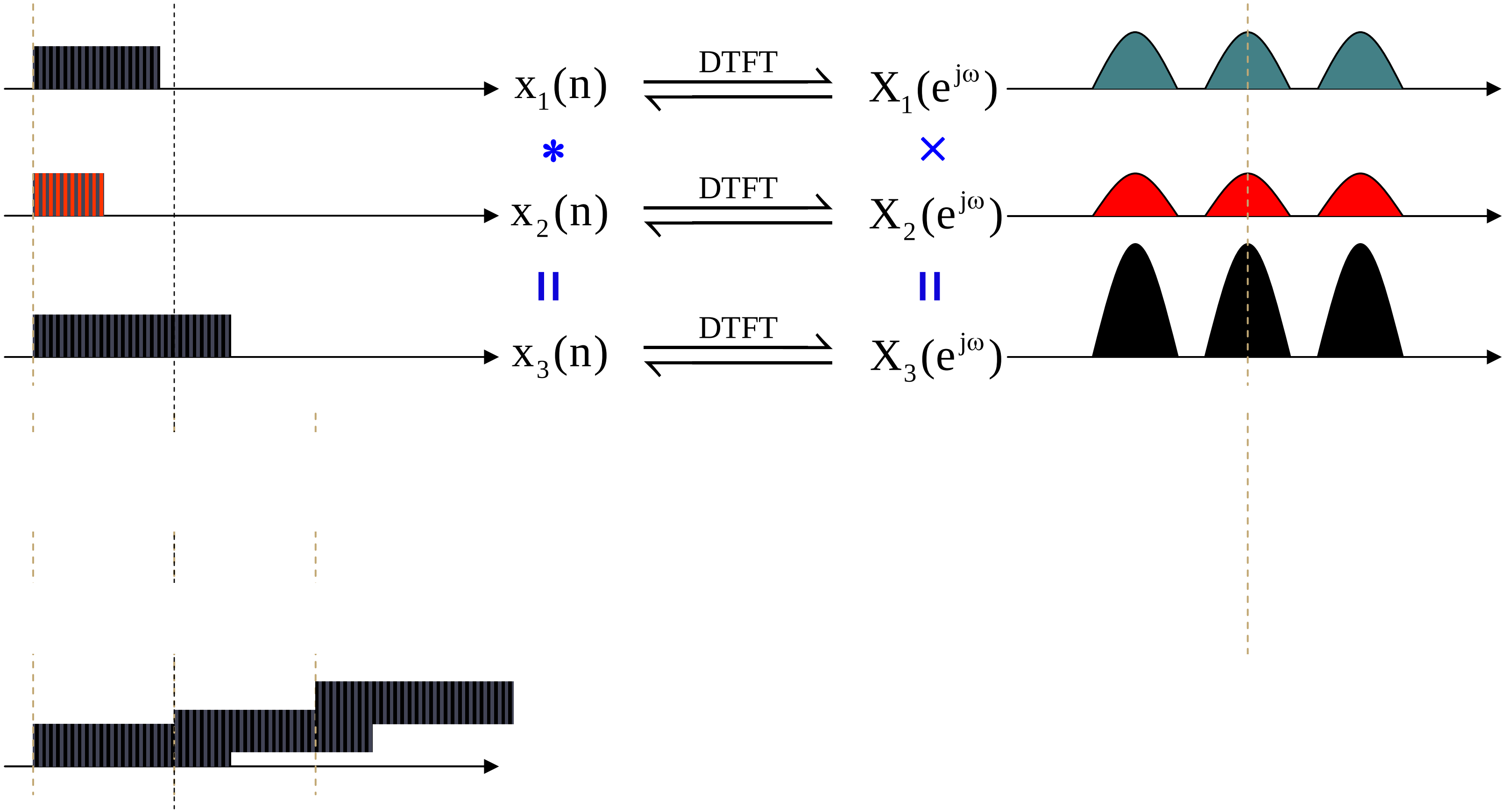
$$\tilde{x}_3(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{X}_2(k)W_N^{-(n-m)k}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_2(k)W_N^{-(n-m)k}]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

时域周期卷积定理

从线性卷积定理想起

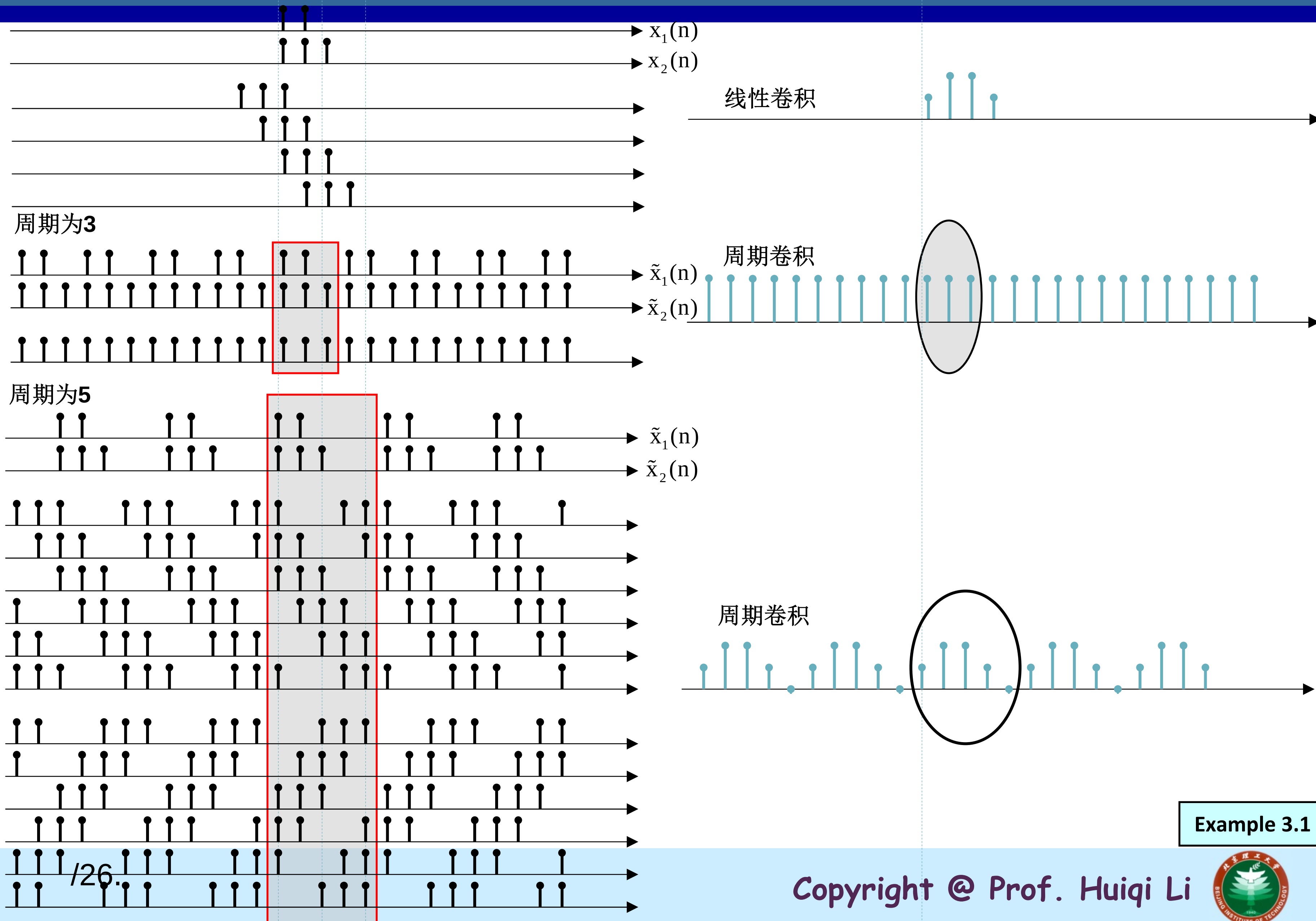


（2）频域

$$\tilde{x}_3(n)=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)\xleftrightarrow{DFS}\tilde{X}_3(k)=\frac{1}{N}\tilde{X}_1(k)\,\widetilde{\otimes}\,\tilde{X}_2(k)$$

时域相乘$\longleftrightarrow$频域周期卷积

数字信号处理 (Digital Signal Processing)



Example 3.1

4.对称特性

（1） $\forall \tilde{x}(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}(k)$

则 $\tilde{x}^*(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}^*(-k)$

$\tilde{x}^*(-n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}^*(k)$

$$DTFT\left[x(n)\right] = X\left(e^{j\omega}\right)$$
$$DTFT\left[x^*(n)\right] = X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$
$$DTFT\left[x^*(-n)\right] = X^*\left(e^{j\omega}\right)$$
$$x(n) \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)$$
$$x^*(n) \leftrightarrow X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$
$$x^*(-n) \leftrightarrow X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

（2） $\forall \tilde{x}(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}(k)$

则

$$\mathrm{Re}\left[\tilde{x}(n)\right] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_e(k) = \frac{1}{2}\left[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)\right]$$

$$j\,\mathrm{Im}\left[\tilde{x}(n)\right] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_o(k) = \frac{1}{2}\left[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)\right]$$

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)\right] \xleftrightarrow{DFS} \mathrm{Re}\left[\tilde{X}(k)\right]$$ 共轭对称

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)\right] \xleftrightarrow{DFS} j\,\mathrm{Im}\left[\tilde{X}(k)\right]$$ 共轭反对称

$$\mathrm{Re}\{x(n)\} = \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*(n)\right] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\right] = X_e(e^{j\omega})$$

$$j\,\mathrm{Im}\{x(n)\} = \frac{1}{2}\left[x(n) - x^*(n)\right] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\right] = X_o(e^{j\omega})$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*(-n)\right] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})\right] = \mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) - x^*(-n)\right] \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})\right] = j\,\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

（3）

$$\forall \tilde{x}(n) = \tilde{x}^*(n)$$ 实序列

$\downarrow$ $\downarrow$

$$\tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(-k)$$ 共轭对称

$\downarrow$

$$\left|\tilde{X}(k)\right| = \left|\tilde{X}(-k)\right|$$ 偶函数

$$\arg[\tilde{X}(k)] = -\arg[\tilde{X}(-k)]$$ 奇函数

实序列:$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$

1.$x(n) = x^*(n) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

$$2.\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \mathrm{Re}\left\{X(e^{j\omega})\right\} + j\,\mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\} \\ X^*(e^{-j\omega}) = \mathrm{Re}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} - j\,\mathrm{Im}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\left\{X(e^{j\omega})\right\} = \mathrm{Re}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} \\ \mathrm{Im}\left\{X(e^{j\omega})\right\} = -\mathrm{Im}\left\{X(e^{-j\omega})\right\} \end{cases}$$

$X(e^{j\omega})$实部是偶函数，虚部是奇函数

3.极坐标形式：$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\arg\left[X(e^{j\omega})\right]}$

幅度是ω的偶函数$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right|$

相位是ω的奇函数$\arg\left[X(e^{j\omega})\right] = -\arg\left[X(e^{-j\omega})\right]$