100052205

数字信号处理
Digital Signal Processing

李慧琦 教授

信息与电子学院

北京理工大学

Tel: +86 (10) 68918239

Email: huiqili@bit.edu.cn

➤ 第二章离散时间信号与系统分析基础

以一维信号为例，讨论离散时间信号和信号处理系统的基本概念。

- 取样和取样定理
- 离散时间信号与系统的表示和运算规则
- 离散时间信号和系统的频域分析
- Z 变换
- 系统函数

Copyright @ Prof. Huiqi Li

§2-3 连续时间信号的取样及取样定理

A/D

- 采样过程

  ↓
- 频谱变化
- 量化

信号内容会不会丢失？

D/A

- 离散信号如何恢复成连续信号？

Copyright @ Prof. Huiqi Li

- 采（取）样 （Sampling）

开关每隔T秒暂短闭合 τ秒

1. 用一定宽度的脉冲进行采样
2. 用理想冲激脉冲进行采样

？区别

Copyright @ Prof. Huiqi Li

用一定宽度的脉冲进行取样

用理想冲激脉冲进行取样

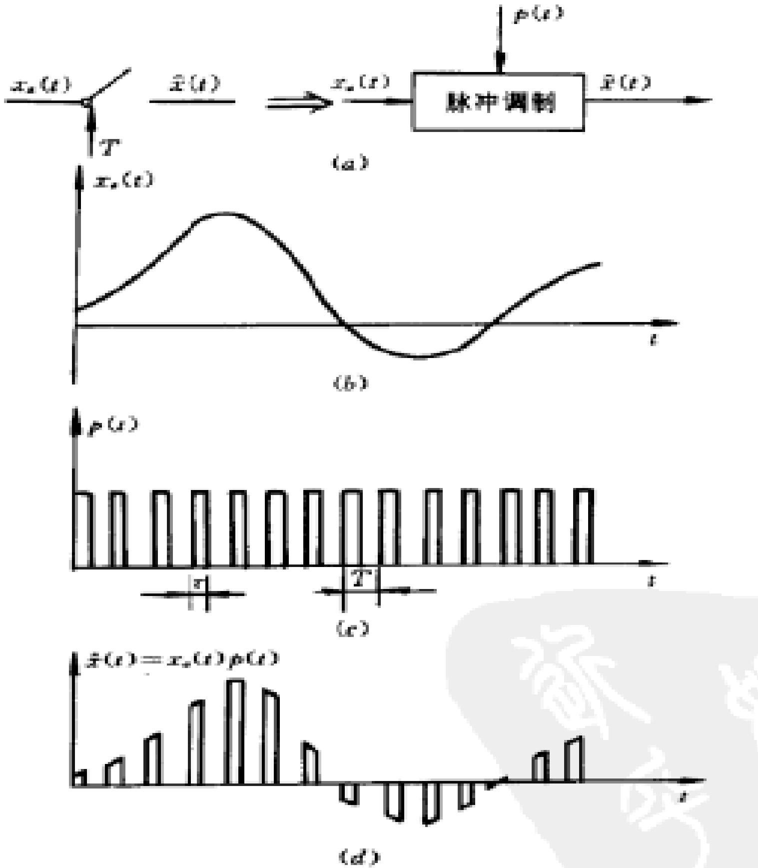


图 2—1 用一定宽度的脉冲进行取样得出的取样信号

(a) 信号取样原理图 (b) 连续时间信号 $x_a(t)$波形

(c) 取样脉冲 $p(t)$波形 (d) 取样信号 $\hat{x}(t)$波形

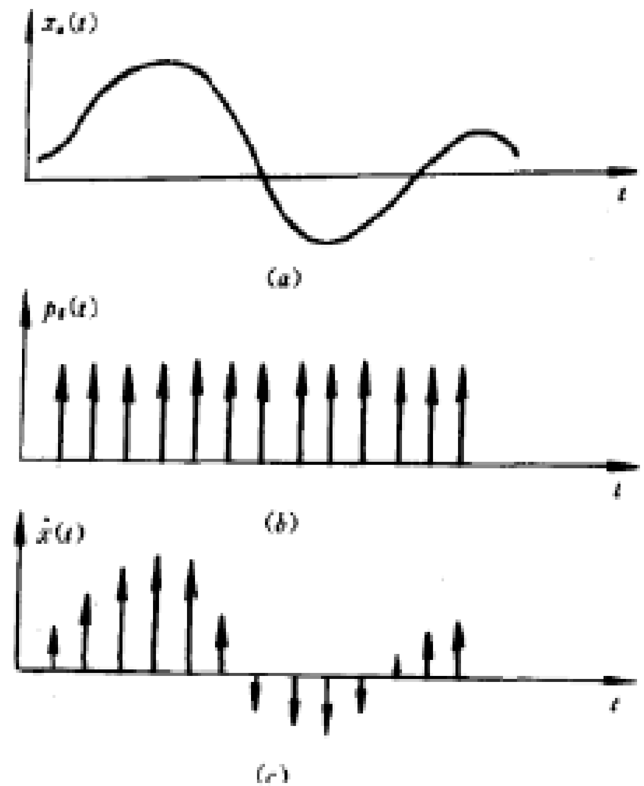


图 2—2 利用理想冲激取样所得的取样信号

(a) 连续时间信号 $x_a(t)$波形 (b) 冲激函数 $p_\delta(t)$波形

(c) 理想冲激取样信号 $\hat{x}(t)$波形

$\tau \longrightarrow 0$

理想冲激取样是实际取样的一种科学的本质的抽象

Copyright @ Prof. Huiqi Li

数字信号处理 (Digital Signal Processing)

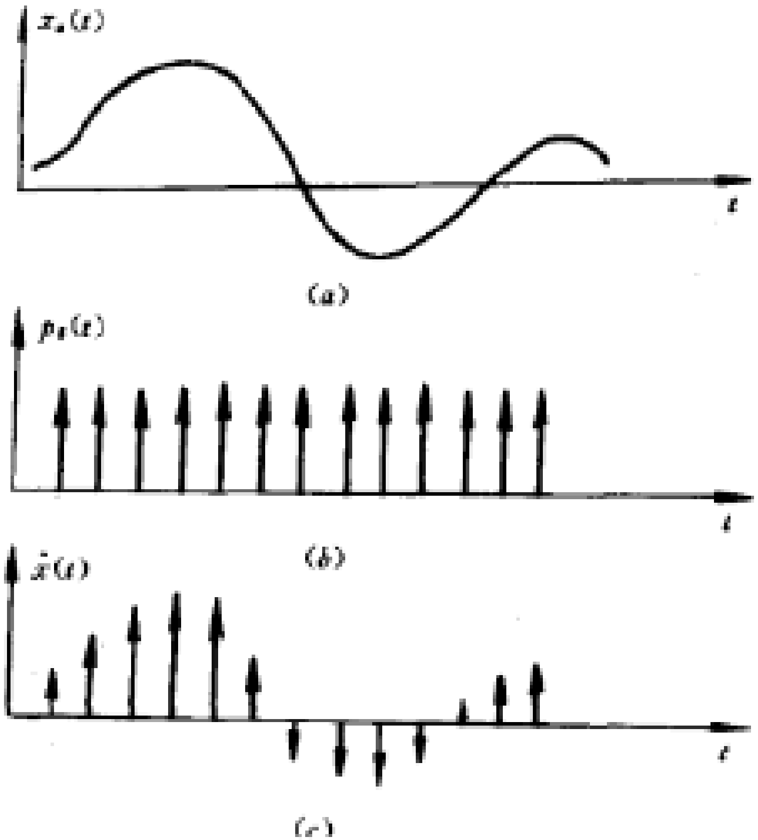


图 2－2　利用理想冲激取样所得的取样信号

(a) 连续时间信号 $x_a(t)$ 波形　(b) 冲激函数 $p_\delta(t)$ 波形

(c) 理想冲激取样信号 $\hat{x}(t)$ 波形

理想采样

$x_a(t)$　　连续时间信号

冲激函数

$$p_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

取样信号

$$\begin{aligned}\hat{x}(t)&=x_a(t)P_\delta(t)\\&=x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)\end{aligned}$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

- 取样带来的频谱变化

冲激脉冲序列傅氏级数展开

$$P_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$

$$f_s=\frac{1}{T};\quad \Omega_s=\frac{2\pi}{T}=2\pi f_s$$

回忆：傅氏级数

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m e^{jm\omega_0 t}$$

$$C_m=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt$$

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$ 取样角频率

注意：ω，Ω

模拟域， 数字域

Copyright @ Prof. Huiqi Li

理想取样信号傅氏变换

$$\hat{X}(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)p_\delta(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\frac{2\pi}{T}t}e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt$$

$$P_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\boxed{\Omega_s=\frac{2\pi}{T}}$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

理想取样信号傅氏变换

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt$$

原连续时间信号傅氏变换

$$X_a(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j\Omega t}dt$$

结论：
1.乘以1/T
2.周期延拓

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a\left[j(\Omega-m\Omega_s)\right]$$

$$\boxed{\Omega_s=\frac{2\pi}{T}}$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

时域采样 ⟶ 频域周期性延展

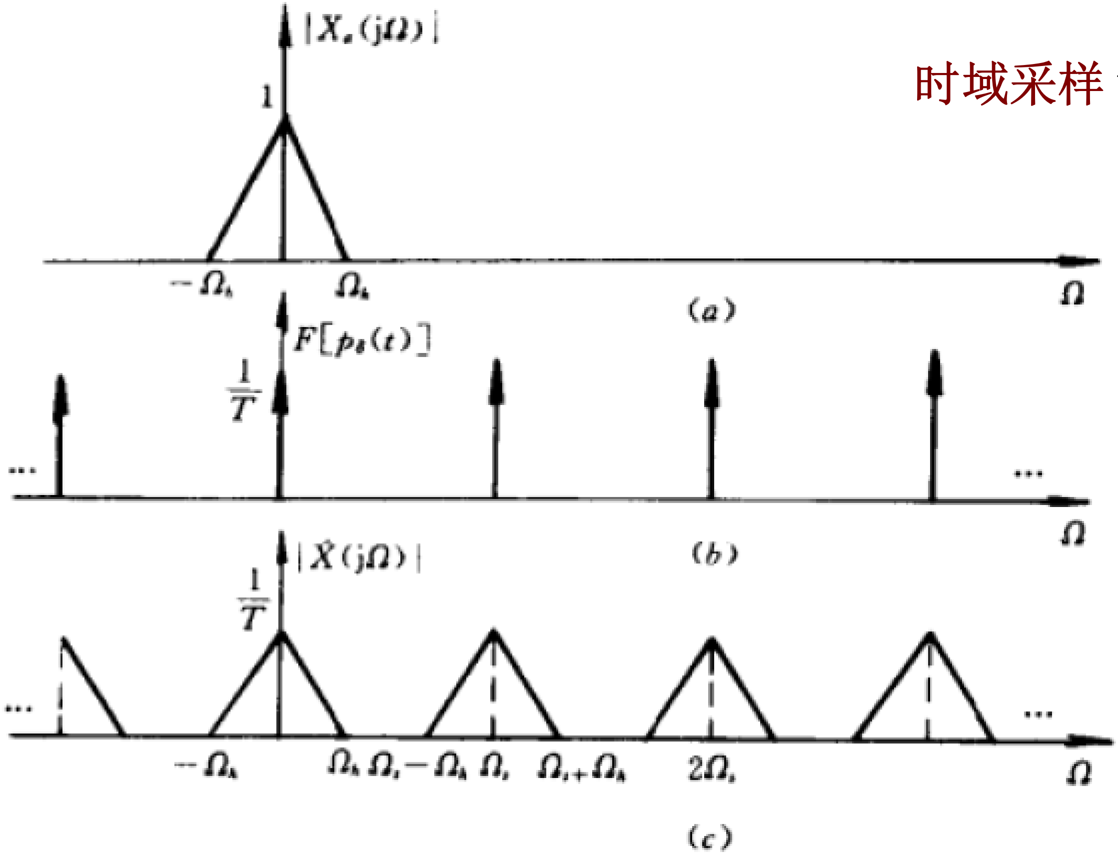


图 2—3 理想取样信号的频谱

(a) 原连续时间信号 $x_a(t)$的频谱 (b) $p_\delta(t)$的梳状谱

(c) 理想取样信号 $\hat{x}(t)$的频谱

Copyright @ Prof. Huiqi Li

- **混叠 Aliasing**

若信号最高频率超过 $\Omega_s/2$，频谱会相互重叠起来，不能分开和恢复这些部分，造成信息损失。

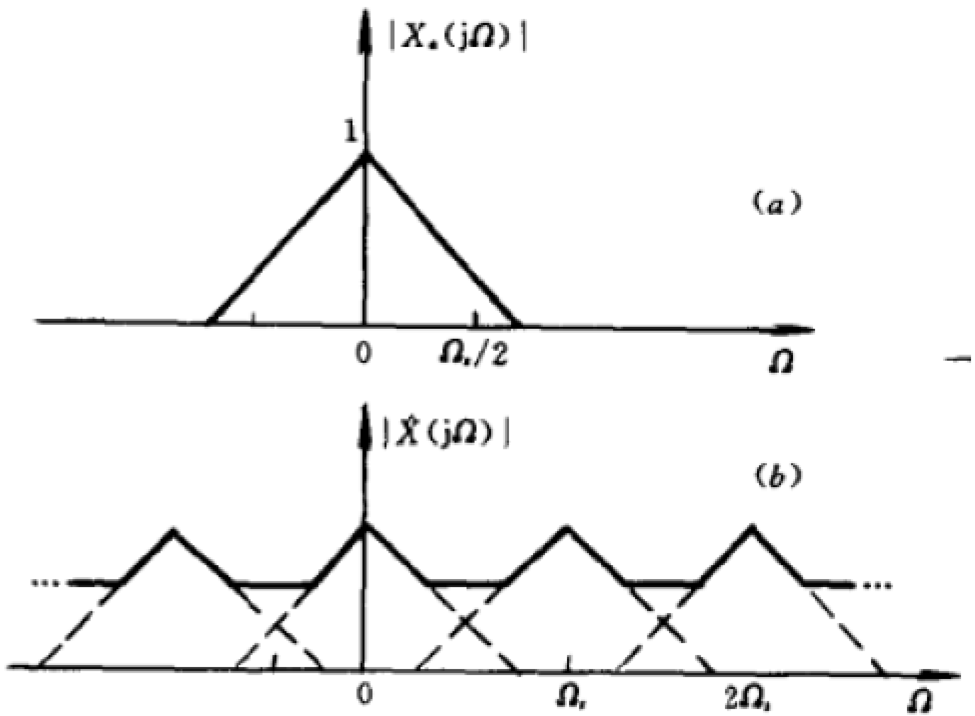


图 2—4 频谱的混叠

(a) 原连续时间信号 $x_a(t)$的频谱

(b) 信号取样后发生的频谱混叠现象

Example of aliasing: 混叠的例子

An example of aliasing is illustrated in Fig. 1.18, where two sinusoids with frequencies $F_0 = \frac{1}{8}$ Hz and $F_1 = -\frac{7}{8}$ Hz yield identical samples when a sampling rate of $F_s = 1$ Hz is used. From (1.4.17) it easily follows that for $k = -1$, $F_0 = F_1 + F_s = (-\frac{7}{8} + 1)$ Hz $= \frac{1}{8}$ Hz.

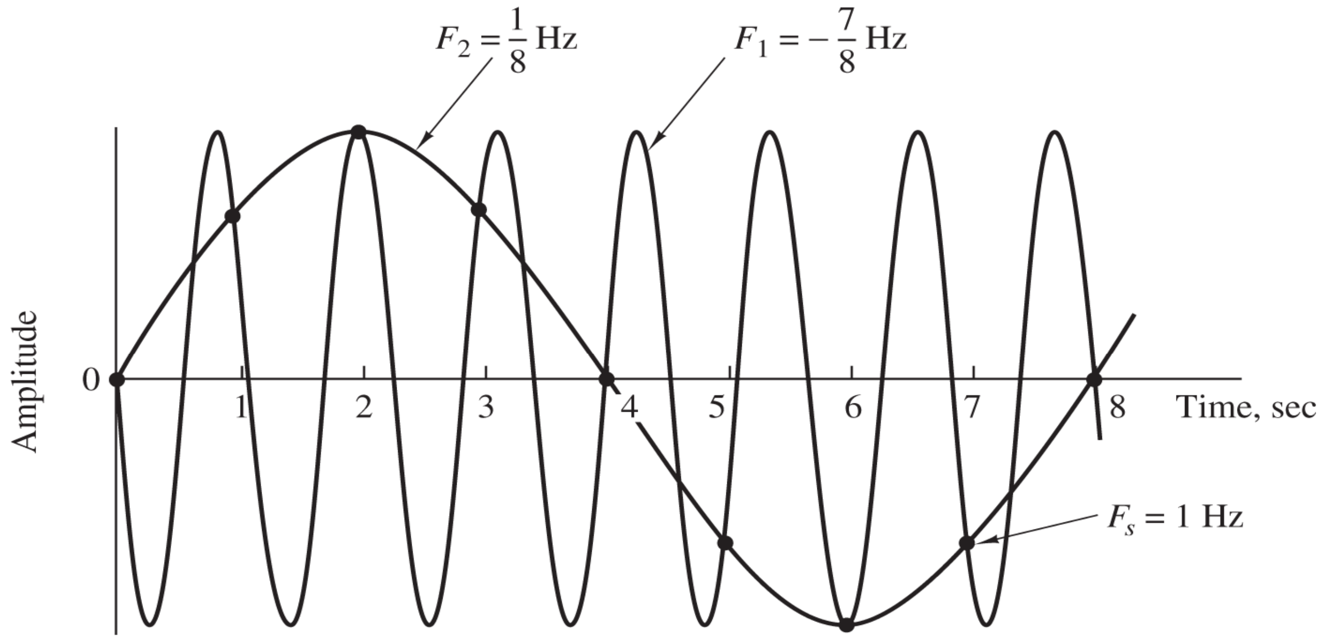


Figure 1.4.5 Illustration of aliasing.

Copyright @ Prof. Huiqi Li

- 取样定理： 如何避免混叠？

1.限带信号

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le \Omega \le \Omega_h \\ \Omega_s \ge 2\Omega_h \end{array}}$$

2.信号最高频率

$$\boxed{\Omega_h \le \frac{1}{2}\Omega_s}$$

折叠频率：$\Omega_0 = \frac{1}{2}\Omega_s$

奈奎斯特频率：Ω_h

（信号最高频率）

香农采样定理：

取样频率必须大于原模拟信号频谱中最高频率的两倍，则 $x_a(t)$ 可由其取样信号 $x(nT)$ 来唯一表示。

Copyright @ Prof. Huiqi Li

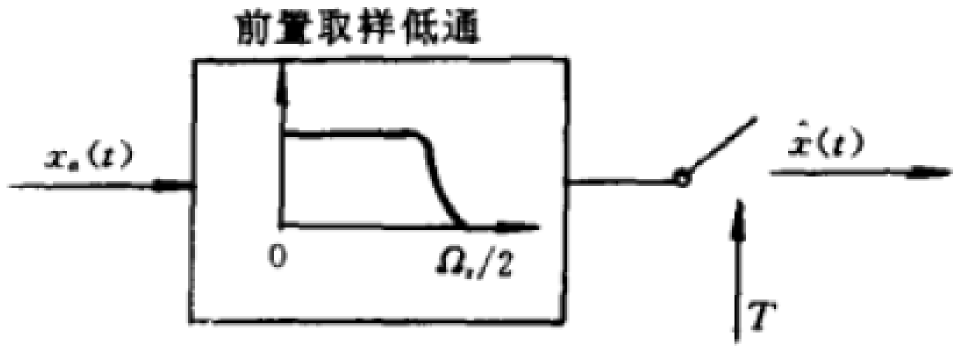


图 2—5　利用前置低通滤波器防止频谱混叠的产生

Copyright @ Prof. Huiqi Li

采用非零脉宽取样频谱？

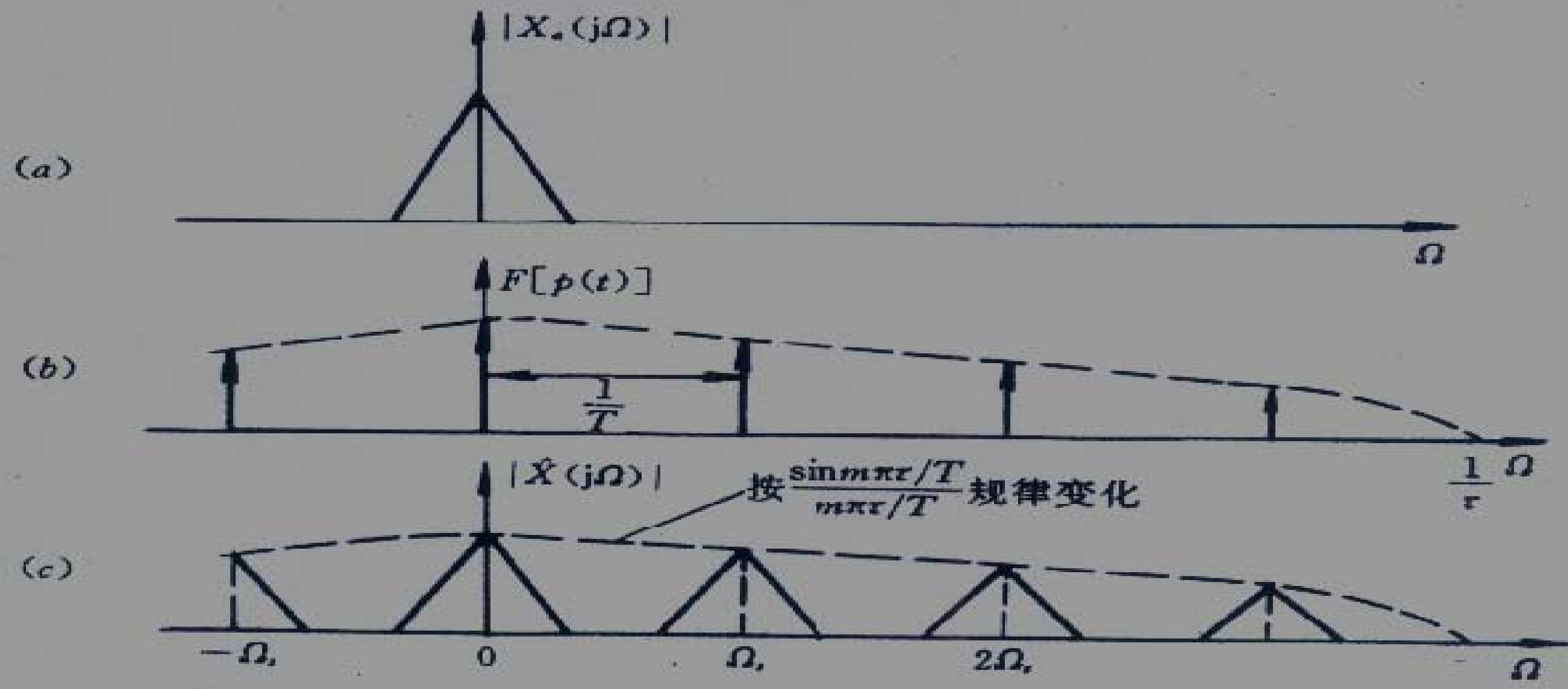


图 2—6　利用有限宽度的脉冲取样所得的取样信号幅度谱

(a) 原连续时间信号 $x_a(t)$ 的幅度谱　　(b) $p(t)$ 的频谱

(c) 利用有限宽度的脉冲取样所得的取样信号幅度谱

提示：采用非零脉宽取样相当于时域乘上周期方波，即频域频谱与sinc脉冲相卷。（参见32页，一个是时域，一个是频域）。

Copyright @ Prof. Huiqi Li

• 信号的恢复

设信号最高频率不超过折叠频率

$$X_a(j\Omega)=\begin{cases}X_a(j\Omega) & |\Omega|<\Omega_s/2\\ 0 & |\Omega|\ge\Omega_s/2\end{cases}$$

不产生混叠

$$\boxed{\hat{X}(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left[j(\Omega-k\Omega_s)\right]}$$

理想低通滤波器

$$H(j\Omega)=\begin{cases}T & |\Omega|<\Omega_s/2\\ 0 & |\Omega|\ge\Omega_s/2\end{cases}$$

$$Y(j\Omega)=\hat{X}(j\Omega)H(j\Omega)=X_a(j\Omega)$$

$$y(t)=x_a(t)$$ 恢复原模拟信号

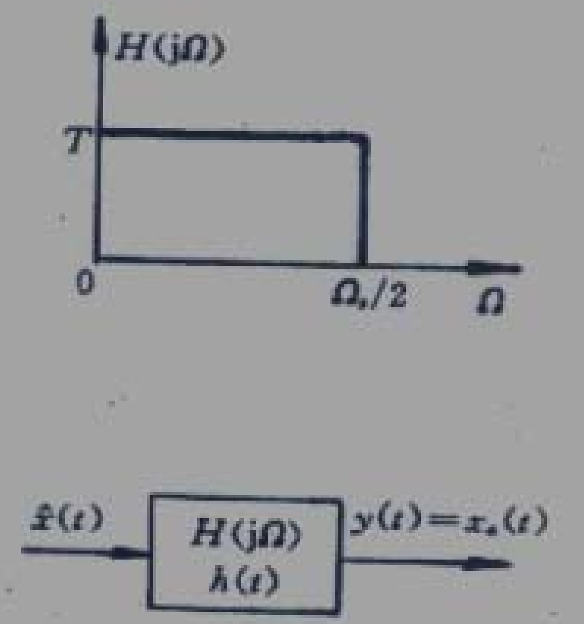


图 2-7 取样信号的恢复

Copyright @ Prof. Huiqi Li

- 取样内插公式

理想低通滤波器的脉冲响应

$$\boxed{h_a(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$\boxed{\Omega_s = \frac{2\pi}{T}}$$

$$= \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{\sin\frac{\Omega_s}{2}t}{\frac{\Omega_s}{2}t} = \frac{\sin\frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t}$$

$$\boxed{\text{内插函数}}$$

$$h_a(t-nT) = \frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

理想取样信号通过低通滤波器的输出（卷积）

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}(\tau)h_a(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(\tau-nT)h_a(t-\tau)d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-nT)h_a(t-\tau)d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\boxed{h_a(t-nT)}$$

Copyright @ Prof. Huiqi Li

内插公式

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)h_a(t-nT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

$$=x_a(t)$$

内插函数

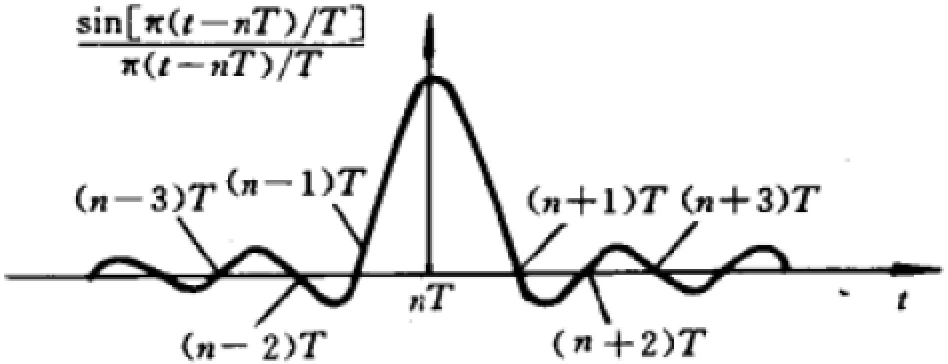
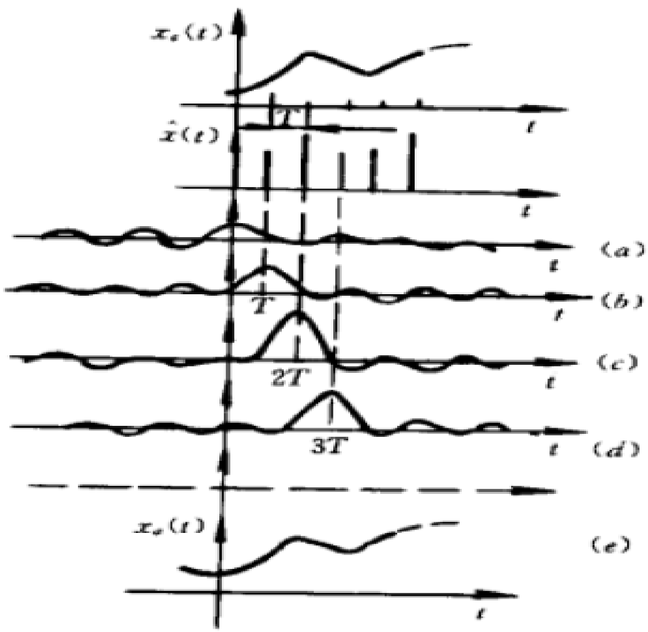


图 2—8 内插函数

采样点nT上，数值为1，其余取样点为0.

结论：只要满足取样率高于两倍信号最高频率，连续时间函数$x_a(t)$ 可以由它的取样值$x_a(nT)$来表达而不损失**任何**信息。这时只要把每一个取样瞬间的函数值乘上对应的内插函数并求其总和，即可得到$x_a(t)$ 。

Copyright @ Prof. Huiqi Li



(a) $x_a(0T)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-0T)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-0T)}$

(b) $x_a(1T)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-1T)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-1T)}$

(c) $x_a(2T)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-2T)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-2T)}$

(d) $x_a(3T)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-3T)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-3T)}$

(e) $x_a(t)=\Sigma x_a(nT)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-nT)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-nT)}$

图 2—9 内插函数叠加成连续时间函数 $x_a(t)$

特点：每一取样点上由于只有该取样值所对应的内插函数不为零，所以各取样点上的信号值不变，而取样点之间的信号则由各取样值内插函数波形延伸叠加而成。

Copyright @ Prof. Huiqi Li

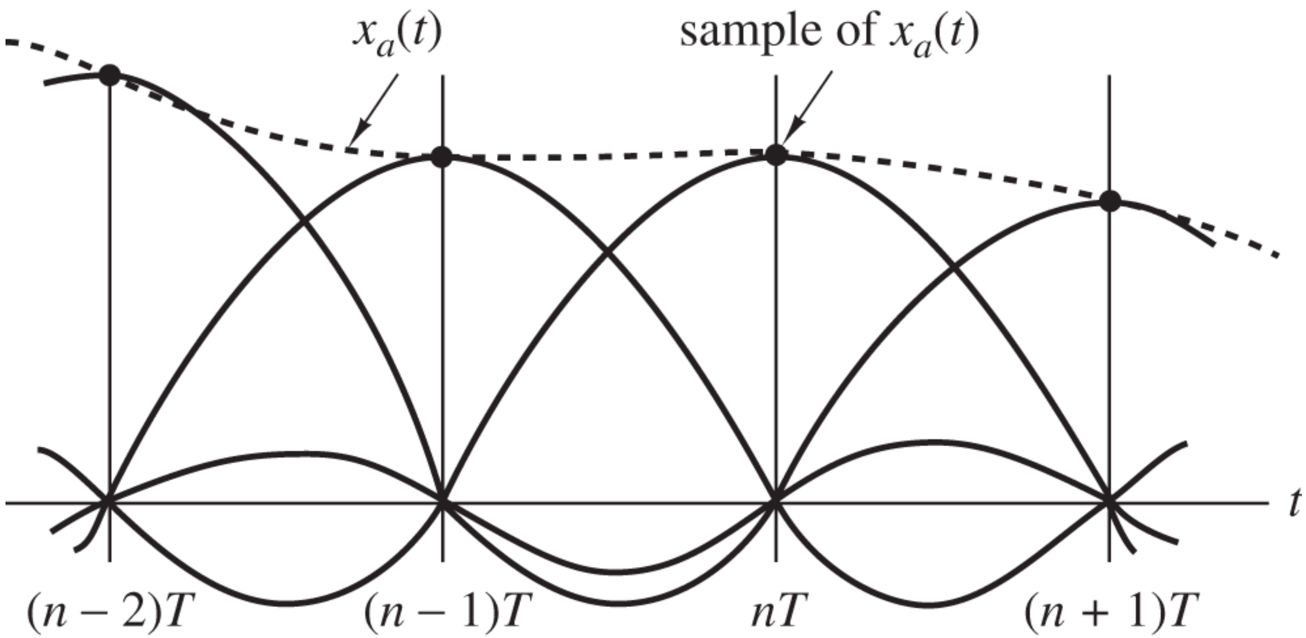


Figure 1.4.6 Ideal D/A conversion (interpolation).

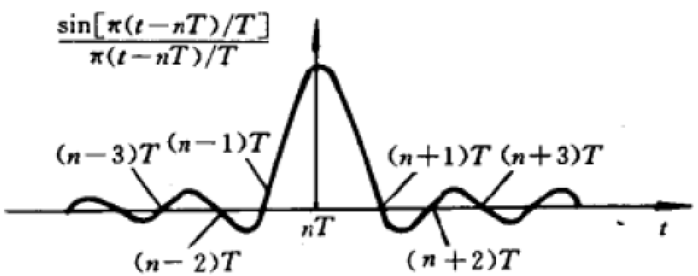


图 2—8 内插函数

内插函数是非因果的，非物理可实现的。

实际应用：阶梯式或零阶保持器

- 量化

量化误差：由量化所带来的误差。

$$-\frac{\Delta}{2} \le e_q(n) \le \frac{\Delta}{2}$$

量化分辨率 $\Delta = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{L-1}$ $\boldsymbol{L = 2^m}$ m 位二进制

L ↑ → Δ ↓

$e_q(n)$ ↓