100052205

数字信号处理

Digital Signal Processing

李慧琦 教授

信息与电子学院

北京理工大学

Tel: +86 (10) 68918239

Email: huiqili@bit.edu.cn

第三章 离散傅里叶变换

本章主要内容

- 傅里叶变换的几种形式
- 离散傅里叶级数
- 离散傅里叶变换的定义和性质
- 频域采样
- DFT的应用

§ 3-6 频域采样

取样点数的限制

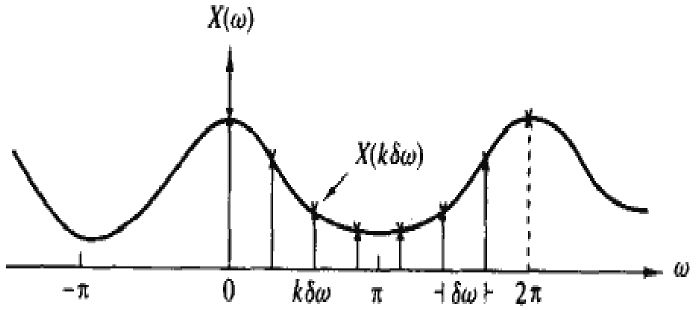
$\forall x(n)$, 任一非周期序列（绝对可和）

$$X(z) \to X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(k) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k,\, k=0,1,\cdots,N-1}$$

问题： $X(k), 0 \le k \le N-1 \xrightarrow{?} x(n)$

频率取样后，信息有没有损失？能否用序列频率特性取样值X(k)恢复出原序列x(n)？



∵频域取样→时域周期化

∴若 $x(n)$ 为无限长序列，
则不可能由 $X(k) \to x(n)$

若有 $x(n), n = 0, 1, \ldots, M-1$

如何选取**N**才能使

$$X(k) \to x(n)$$

$$0 \le k \le N-1 \qquad 0 \le n \le M-1$$

令 $\tilde{X}(k)=X\left(\left(k\right)\right)_N \longleftrightarrow \tilde{x}'(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn} \quad \forall n$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\\
&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{M-1}x(m)W_N^{km}\right]W_N^{-kn}\\
&=\sum_{m=0}^{M-1}x(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}\right]\\
&=\sum_{m=0}^{M-1}x(m)\delta\left((n+lN)-m\right) \quad \forall l,n\\
&=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}x(n+lN)\to x(n)
\end{aligned}
$$

的周期延拓（N为周期）

$$
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}
=\begin{cases}1, & m=n+lN\\ 0, & \text{其他}\end{cases}
=\delta((n+lN)-m)
$$

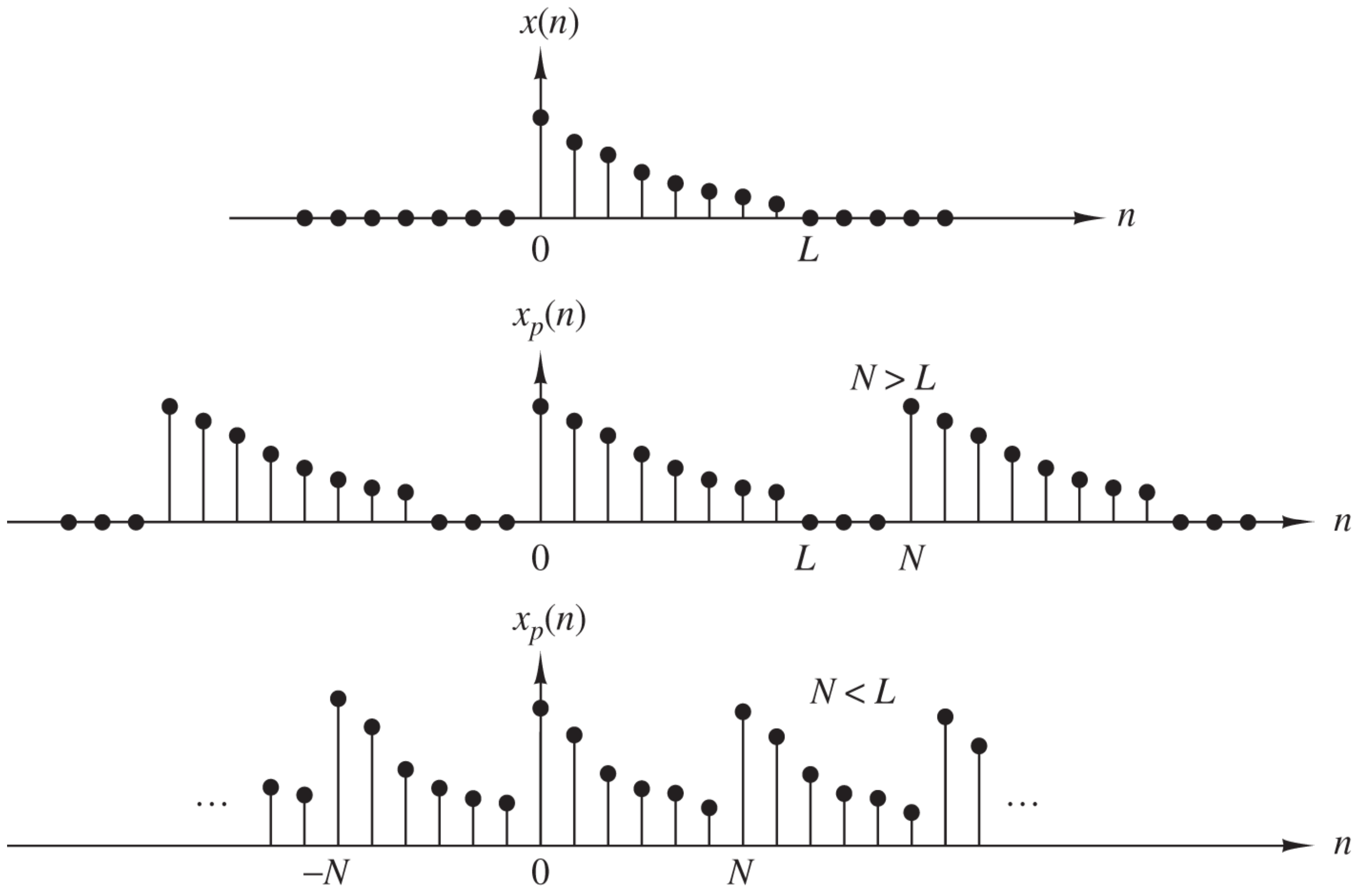


Figure 7.1.2 Aperiodic sequence $x(n)$ of length L and its periodic extension for $N \geq L$ (no aliasing) and $N < L$ (aliasing).

∴只有当 $N \geq M$ 时

$$\tilde{x}'(n) \to \tilde{x}'(n)R_N(n) \to x(n), \quad 0 \leq n \leq M-1$$

$$X(k) \quad \to \quad x(n)$$

$$0 \leq k \leq N-1 \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

- M 点序列 DTFT 一个周期内均匀采样 N 点，其逆 DFT 是该序列以 N 为周期延拓序列的主值序列
- M点序列 DTFT 一个周期内均匀采样 M 点，其逆 DFT 即为其本身

N点有限长序列**x(n)**，可从单位圆**X(z)**的**N**个取样值**X(k)**恢复，因而这**N**个**X(k)**也应该能完全表达整个**X(z)**函数及频响**X(e^{jw})**。

频域内插定理(DFT→ZT)

$$\begin{array}{c} X(k) \\ \Downarrow \\ x(n) \\ \Downarrow \\ X(z), X(e^{j\omega}) \end{array}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\sum_{n=0}^{N-1}\left(W_N^{-k}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-\boxed{W_N^{-kN}}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$W_N^{-kN}=1$$

$$=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\phi_k(z)$$

式中：

$$\phi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

（内插函数）

在已知X(k)时，可根据内插公式求得任意z点的X(z)值，因此X(z)的N个取样点的X(k)值，包含了z变换的全部信息。

类似的，有：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\phi(e^{j\omega})$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\phi(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

式中：

$$\phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

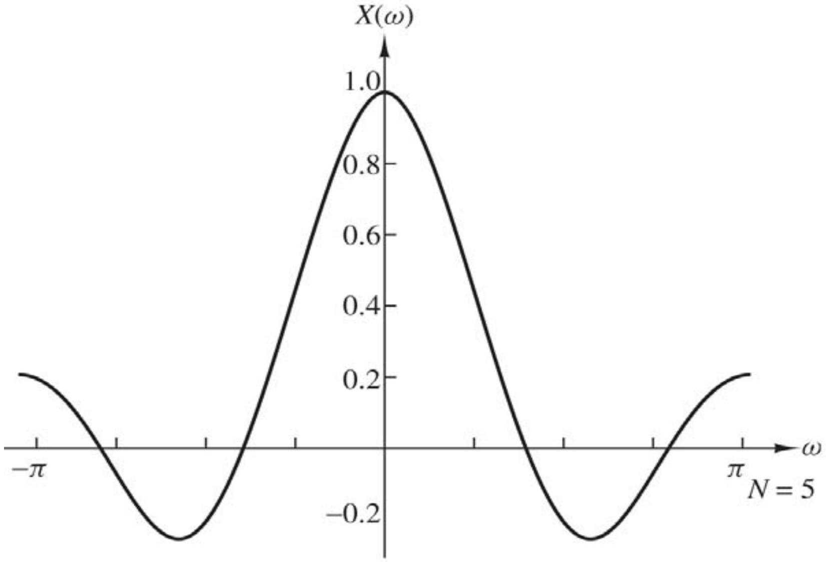


Figure 7.1.3 Plot of the function $[\sin(\omega N/2)]/[N\sin(\omega/2)]$.

$$\phi(\omega - k\frac{2\pi}{N}) = \begin{cases} 1 & \omega = k\frac{2\pi}{N} \\ 0 & \omega = i\frac{2\pi}{N}, \quad i \neq k \end{cases}$$

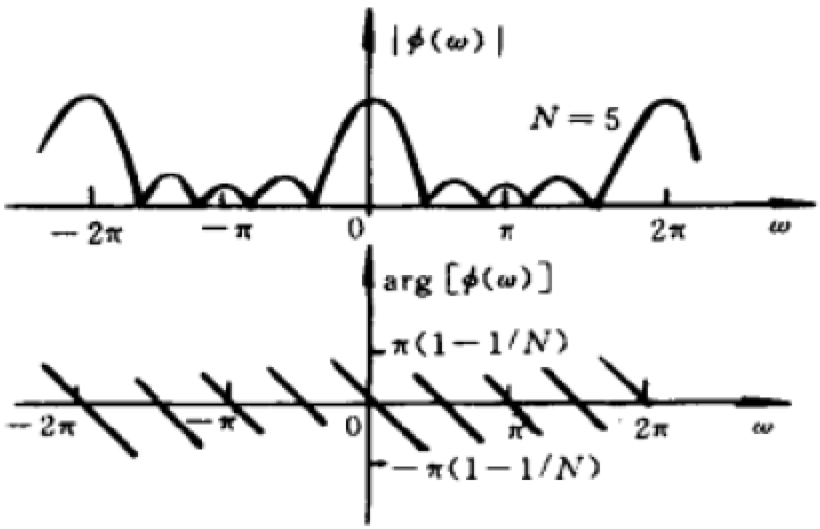


图 3—22　内插函数振幅特性与相位特性

相位：线性相移

$$\begin{cases} X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \\ X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jwn} \\ X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\phi(\omega - k\frac{2\pi}{N}) \end{cases}$$

§3-7 DFT对连续时间信号逼近的问题

若信号持续时间为有限长，则其频谱无限宽；
若信号的频谱为有限宽，则其持续时间无限长。
持续时间有限的带限信号是不存在的。

DFT对连续时间信号进行傅里叶分析的近似：

两个变换之间的差异是因为**DFT**需要对连续时间信号取样和截断为有限列长而产生。

1. 可用前置滤波器滤除幅度较小的高频分量，使连续时间信号的带宽小于折叠频率。

2.对于持续时间很长的信号，取样点数太多以致无法存储和计算，只好截取为有限长进行**DFT**。

$$x_a(t) \to x_a(nT) \to x(n) \xrightarrow{DFT} X(k) \approx X_a(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$X_a(e^{j\omega}) \approx X(e^{j\omega}) \;\text{——}\; X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

一、混叠现象 (Aliasing)

消除办法：

f_s 采样频率

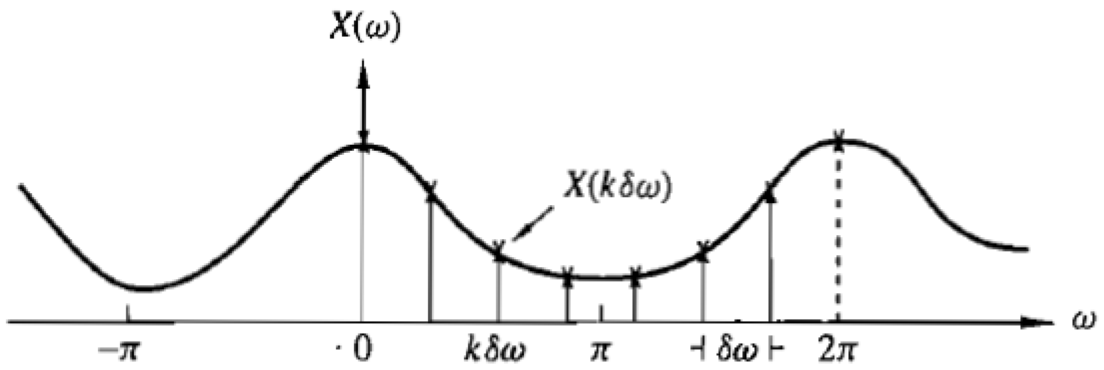
F:频率分量增量 $F = \dfrac{1}{NT} = \dfrac{f_s}{N}$

1. 时域采样定理 $f_s \geq 2f_h$

2. 频域采样定理 $N \geq N_n = \dfrac{f_s}{F} \geq \dfrac{2f_h}{F}$

二、栅栏效应 (Picket Fence Effect)

$$X(k) \approx X_a(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k,\,0\le k\le N-1}$$



办法：对 $x(n)$ 通过补零加长。

三、频谱泄露现象 (Spectrum Leakage)

$$x_a(nT) \rightarrow x(n), 0 \le n \le N-1$$

$$\downarrow$$

$$x_a(nT)R_N(n) \xleftrightarrow{FT} X_a(e^{j\omega})\widetilde{\otimes} R_N(e^{j\omega})$$

$\therefore X_a(k)$ 中的的频谱被展宽→泄漏

DTFT of R_N

例 2.20 若 $x(n)=R_5(n)=u(n)-u(n-5)$，求此序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。

解

$$X(e^{j\omega})=\mathrm{DTFT}[R_5(n)]$$

$$=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\left(\frac{e^{j\frac{5}{2}\omega}-e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\right)$$

$$=e^{-j2\omega}\left[\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}\right]=\left|X(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

其中，幅频特性

$$\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}\right|$$

相频特性

$$\varphi(\omega)=-2\omega+\arg\left[\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)}\right]$$

式中，arg[·]表示方括号内表达式引入的相移，此处，其值在不同 ω 区间分别为 0，π，2π，3π，… 图2.10画出了 $R_5(n)$ 及其幅频特性和相频特性。

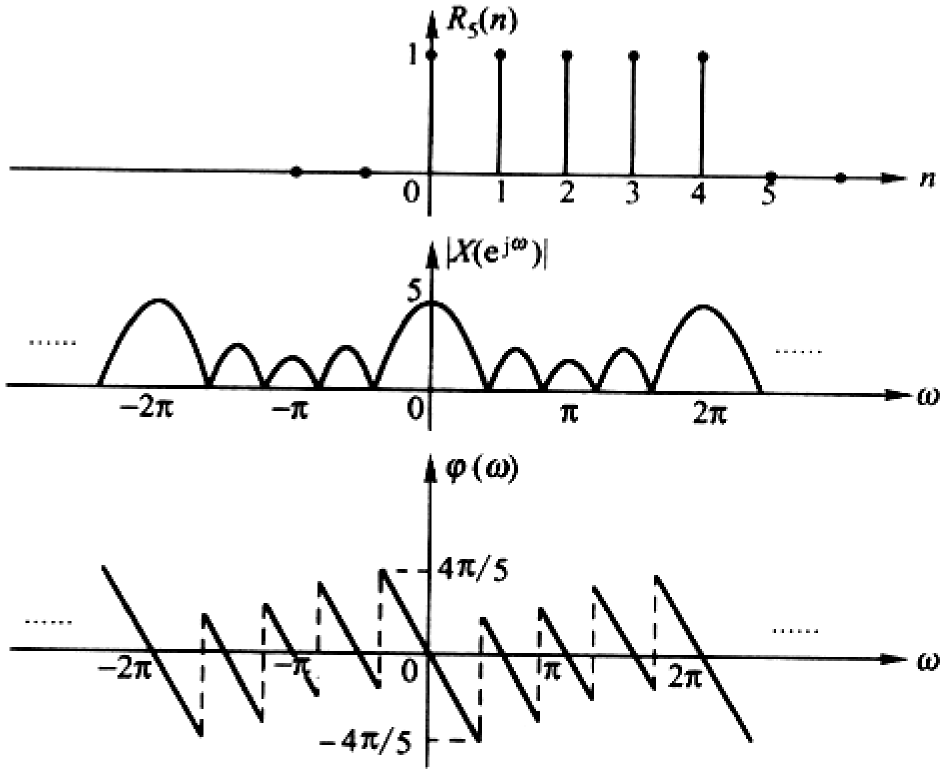


图 2.10　序列 $R_5(n)$ 的傅里叶变换

例：

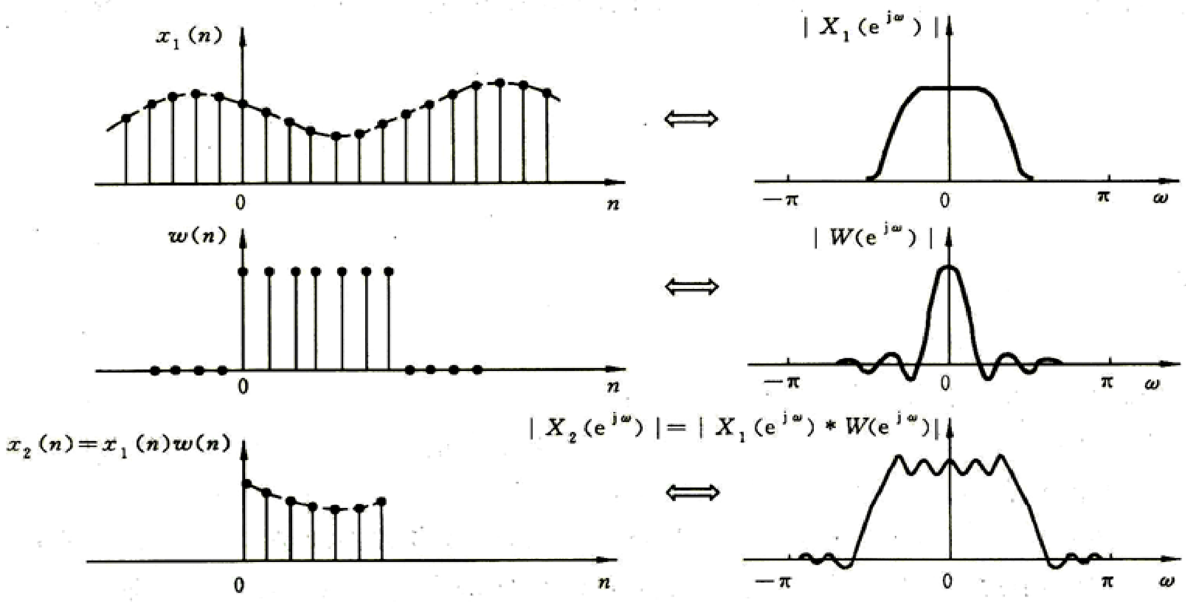


图 3-19　信号截断时产生的频谱泄漏现象

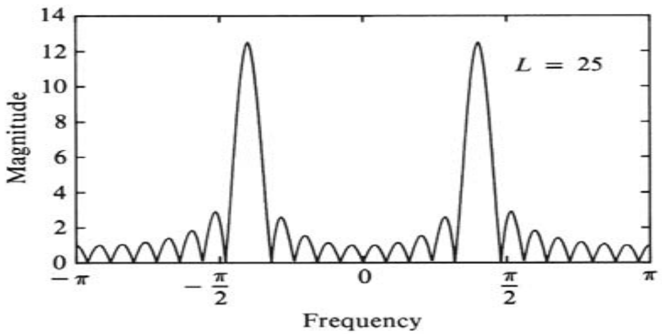


Figure 7.4.1 Magnitude spectrum for $L = 25$ and $N = 2048$, illustrating the occurrence of leakage.

$$x(n) = \cos \omega_0 n$$

N point DFT
L: window length

解决办法:

1. 增加窗口长度 **L**

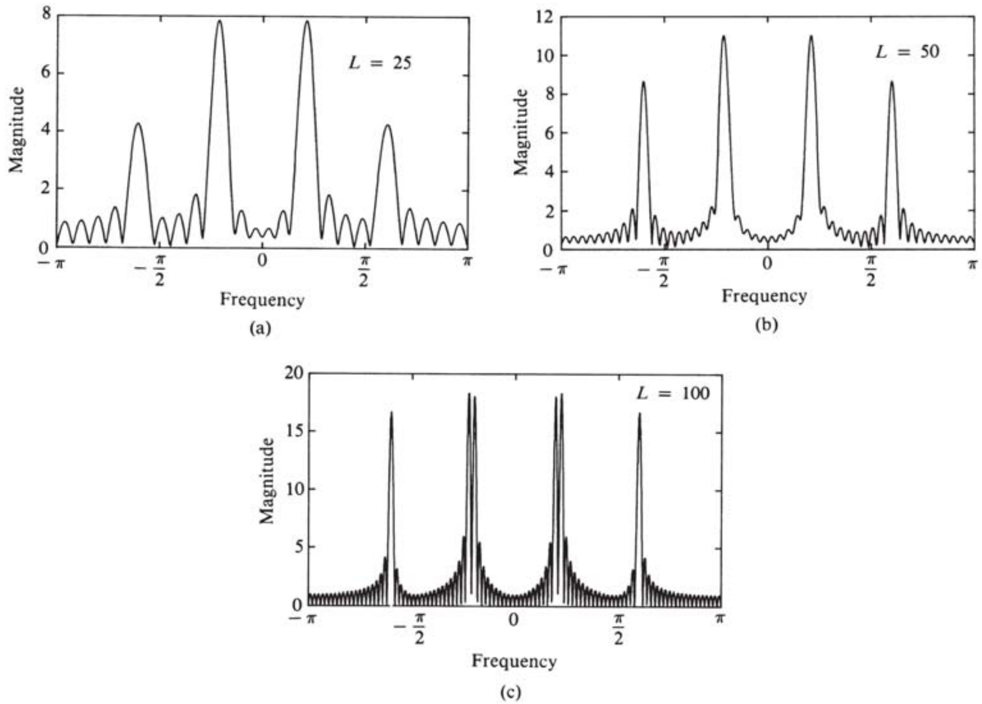


Figure 7.4.2 Magnitude spectrum for the signal given by (7.4.8), as observed through a rectangular window.

2. 应用其他窗函数

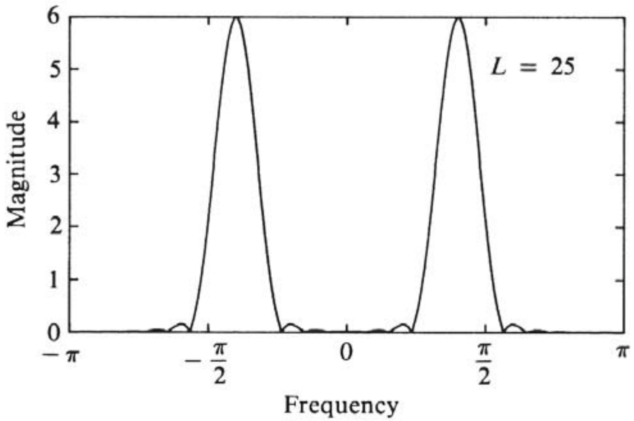
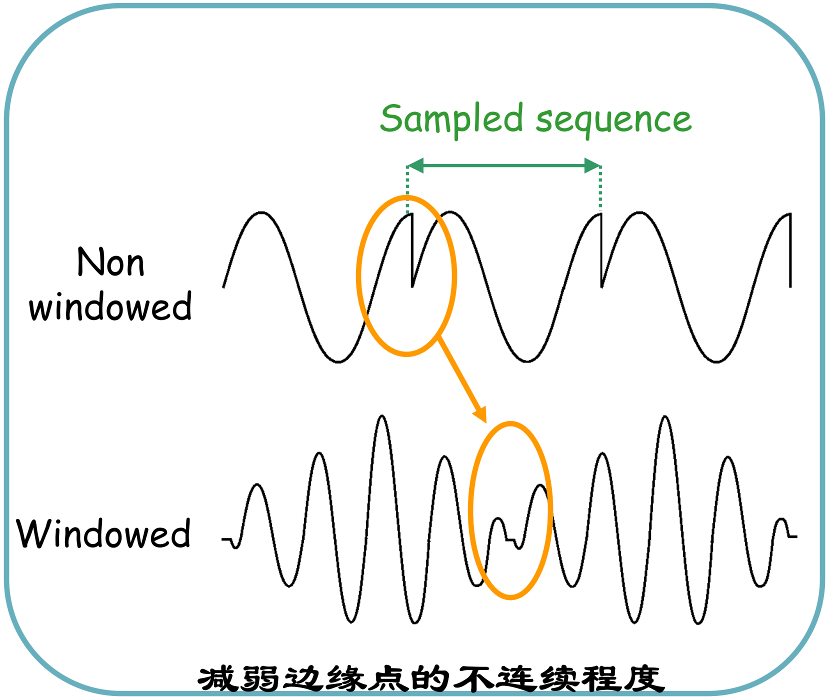


Figure 7.4.3 Magnitude spectrum of the Hanning window.

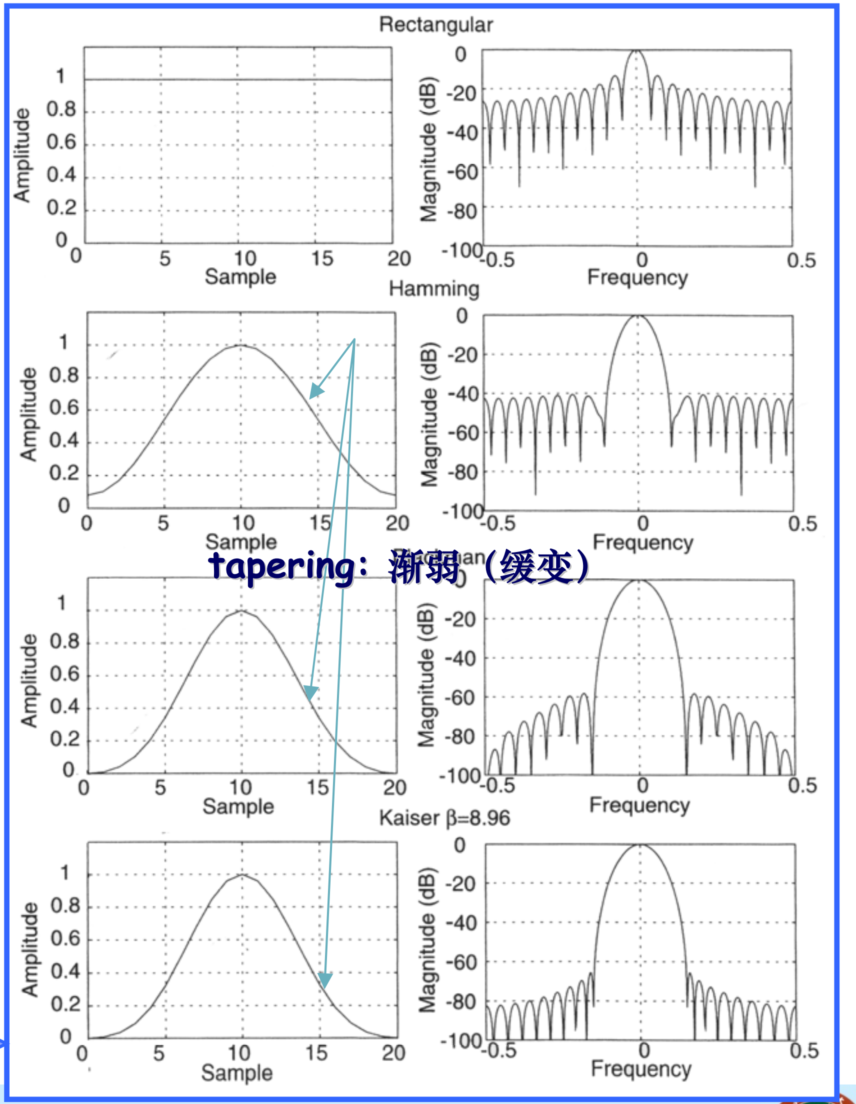
$$w(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2\pi}{L-1}n), & 0\le n\le L-1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

缓变加窗技术

In time it reduces end-points discontinuities.



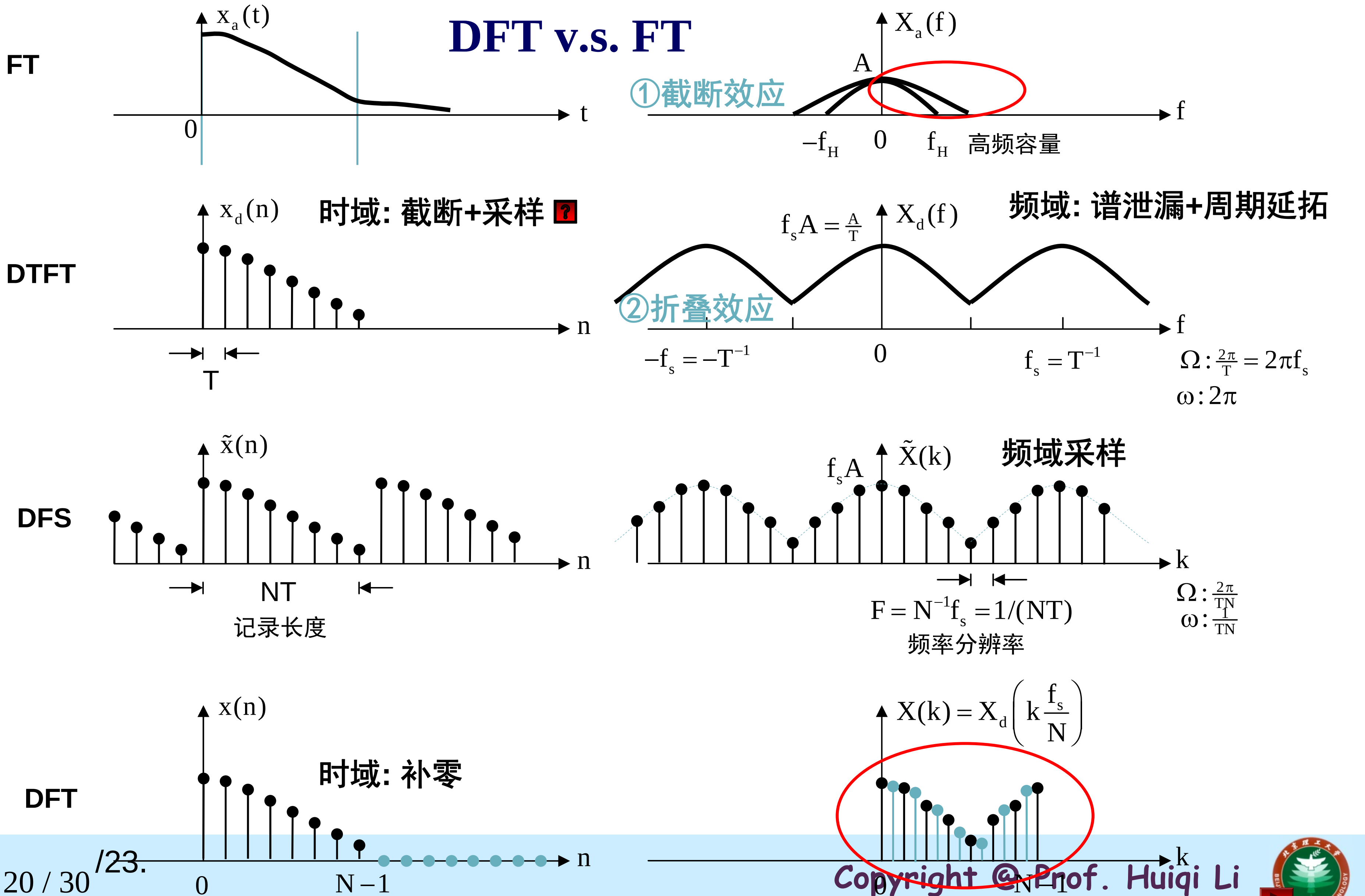
Some window functions



$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
x_a(t) \arrow[r, "\text{抽样}", "t=nT_s"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{FT}"] & x(n) \arrow[r, "\text{截短}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{DTFT}"] & x(n)d(n) \arrow[r, "\text{周期延拓}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{DTFT}"] & \tilde{x}_N(n) \arrow[r, shift left, "\text{周期延拓}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{DFS}"] & x_N(n) \arrow[l, shift left, "\text{取一个周期}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{DFT}"] \\
X_a(j\Omega) \arrow[r, "\text{周期延拓}", "\Omega_s=2\pi/T"'] & X(e^{j\omega}) \arrow[r, "\text{卷积}"] & X(e^{j\omega})*D(e^{j\omega}) \arrow[r, "\text{抽样}", "\Omega_0=\Omega_s/N"'] & \tilde{X}_N(n) \arrow[r, shift left, "\text{周期延拓}"] & X_N(n) \arrow[l, shift left, "\text{取一个周期}"]
\end{tikzcd}
$$

数字信号处理 (Digital Signal Processing)

DFT v.s. FT



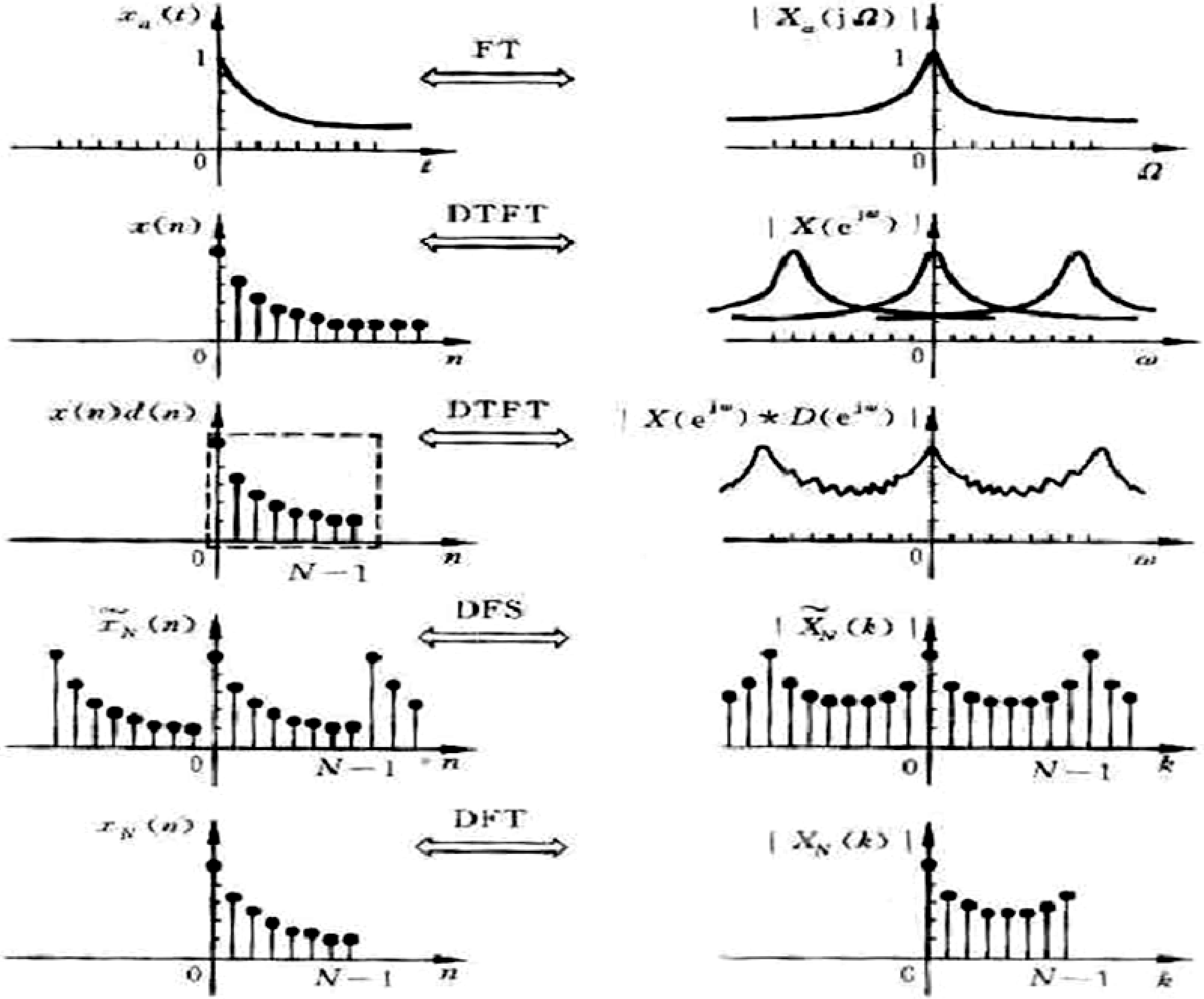


图 3-15 利用 DFT 对 CTFT(连续时间傅里叶变换)逼近的全过程

DFT 的应用

例 3.9 已知信号 $x(t)=0.15\sin(2\pi f_1 t)+\sin(2\pi f_2 t)-0.1\sin(2\pi f_3 t)$，其中 $f_1=1\,\text{Hz}$，$f_2=2\,\text{Hz}$，$f_3=3\,\text{Hz}$。从 $x(t)$ 的表达式可以看出，它包含三个正弦波，但从时域波形图 3.17(a) 来看，似乎是一个正弦信号，很难看到小信号的存在，因为它被大信号所掩盖。取 $f_s=32\,\text{Hz}$ 做频谱分析。

解 因 $f_s=32\,\text{Hz}$，故

$$x(n)=x(nT)=0.15\sin\left(\frac{2\pi}{32}n\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{32}n\right)-0.1\sin\left(\frac{6\pi}{32}n\right)$$

该信号为周期信号，其周期为 $N=32$。现对 $x(n)$ 做 32 点的离散傅里叶变换(DFT)，其幅度特性 $|X(k)|$ 如图 3.17(b) 所示。图 3.17(b) 中仅给出了 $k=0,1,\cdots,15$ 的结果。$k=16,17,\cdots,31$ 的结果可由 $|X(N-k)|=|X(k)|$ 得出。因 $N=32$，故频谱分辨率 $F=f_s/N=1\,\text{Hz}$；图 3.17 中，$k=1,2,3$ 所对应的频谱即为频率 $f_1=1\,\text{Hz}$, $f_2=2\,\text{Hz}$, $f_3=3\,\text{Hz}$ 的正弦波所对应的频谱，而且图中小信号成分可以清楚地显示出来。可见小信号成分在时域中很难辨识而在频域中容易识别。

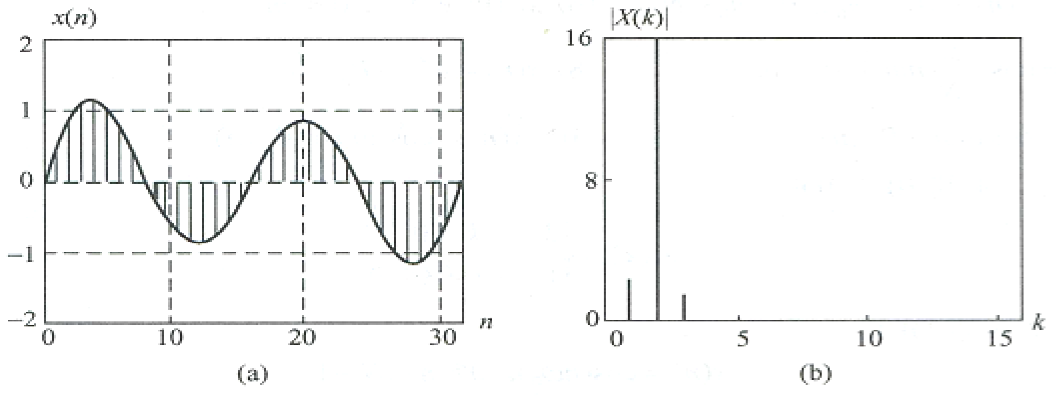


图 3.17 混合频率信号的时域、频域分析