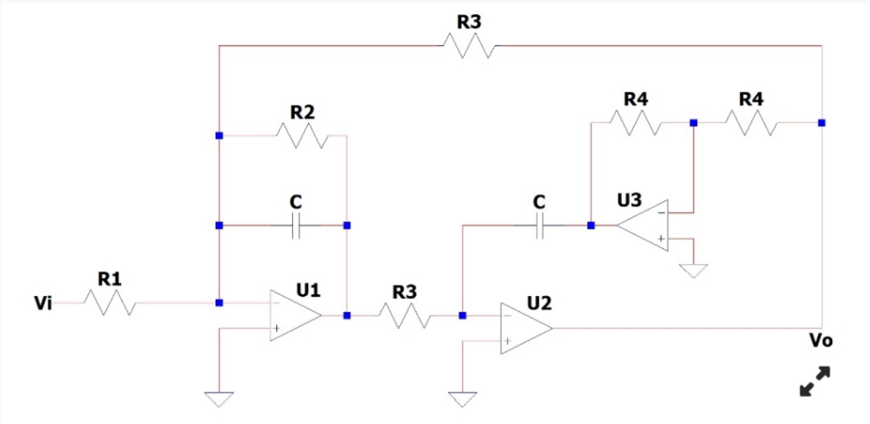
Para la siguiente red se pide:



Consignas de la actividad:

👉 Hallar la transferencia $T = \frac{V_o}{V_i}$ en función de ω_o y Q.

👉 Hallar los parámetros ω_o y Q y k.

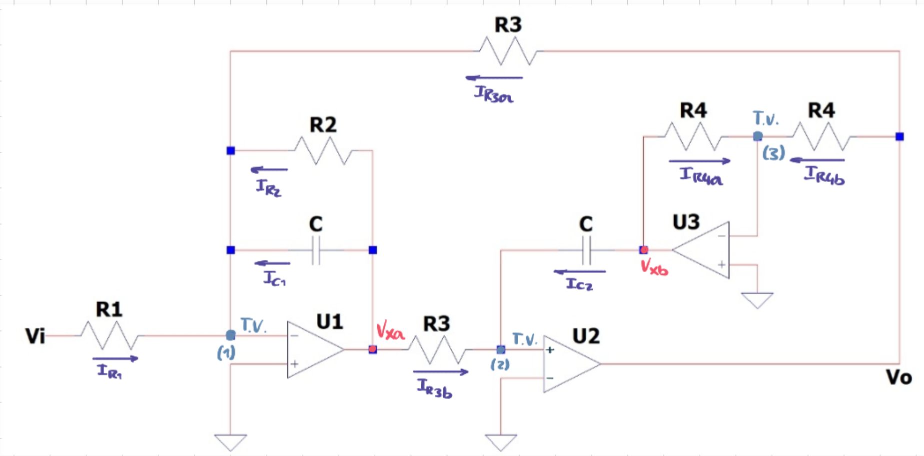
👉 Obtener el valor de los componentes para que el circuito se comporte como un Butterworth de 2do orden.

👉 Cómo podría obtener un filtro pasabajo Butterworth de 4to orden, a partir de un prototipo basado en este circuito, y que cumpla con $|T(0)| = 20\,\mathrm{dB}$.

Bonus:

- +10 💎 Obtener los valores de la red normalizados en frecuencia e impedancia.
- +10 ⚽ Simulación circuital de todos los experimentos.
- +10 🎸 Cómo podría obtener un circuito pasabanda con los mismos componentes originales y con qué parámetros quedaría diseñado (Ver ejemplo 4.6 en Schaumann).

#1/ #2



(1) $G_1 V_i + G_{3a} V_o + G_2 V_{xa} + sC_1 V_{xa} = 0$

(2) $G_{3b} V_{xa} + sC_2 V_{xb} = 0$

(3) $G_{4a} V_{xb} + G_{4b} V_o = 0$

$G_3 = G_{3a} = G_{3b}$

$G_4 = G_{4a} = G_{4b}$

$C = C_1 = C_2$

$G_1 V_i + G_3 V_o + \frac{sG_2C}{G_3} V_o + \frac{s^2C^2}{G_3} V_o = 0$

$V_{xa} = \frac{sC}{G_3} V_o$

$V_{xb} = -V_o$

$$G_1 V_i + G_3 V_o + \frac{sG_2C}{G_3} V_o + \frac{s^2C^2}{G_3} V_o = 0$$

$$T = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{1/R_1}{s^2 R_3 C^2 + s \frac{R_3}{R_2} C + \frac{1}{R_3}} = -\frac{1}{R_1 R_3 C^2} \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{R_3^2 C^2}}$$

Chequeo de unidades:

$$T = -\frac{1}{R_1 R_3 C^2} \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{R_3^2 C^2}} \longrightarrow \frac{1}{\left[\cancel{\Omega}\,\cancel{\Omega}\,\cancel{\frac{s^2}{\Omega^2}}\right]} \frac{1}{\left[\frac{1}{\cancel{s^2}} + \frac{1}{\cancel{s}}\frac{1}{\cancel{\Omega}\cdot\frac{\cancel{s}}{\cancel{\Omega}}} + \frac{1}{\cancel{\Omega^2}\cdot\frac{\cancel{s^2}}{\cancel{\Omega^2}}}\right]} \checkmark$$

Transferencia general de un LP:

$$T_{LP} = K \frac{\omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Trabajo sobre la transferencia obtenida para llegar a una expresión similar:

$$T = -\frac{1}{R_1 R_3 C^2} \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{R_3^2 C^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_0^2 = \frac{1}{R_3^2 C^2} \longrightarrow \omega_0 = \frac{1}{R_3 C} \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_2 C} \longrightarrow Q = \frac{R_2}{R_3} \end{array}\right\} K\omega_0^2 = -\frac{1}{R_1 R_3 C^2} \longrightarrow K = -\frac{R_3}{R_1}$$

$$\therefore T = -\frac{R_3}{R_1} \frac{\frac{1}{R_3^2 C^2}}{s^2 + s\frac{\frac{1}{R_3 C}}{\frac{R_2}{R_3}} + \frac{1}{R_3^2 C^2}} = K \frac{\omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \text{ ; siendo } \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{R_3 C} \\ Q = \frac{R_2}{R_3} \\ K = -\frac{R_3}{R_1} \end{array}\right.$$

#3

Función transferencia para un Butterworth de orden 2:

$$T_{(s)} = K \frac{1}{s^2 + s\sqrt{2} + 1}$$

se procede a llevar la transferencia de nuestro filtro a una de Butterworth:

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_0^2 = \frac{1}{R_3^2 C^2} = 1 \\ \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R_2 C} = \sqrt{2} \longrightarrow Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Normalización en frecuencia: $\Omega_\omega = \omega_0 = \frac{1}{R_3 C} \longrightarrow \$ = \frac{s}{\Omega_\omega} = \frac{s}{\omega_0}$

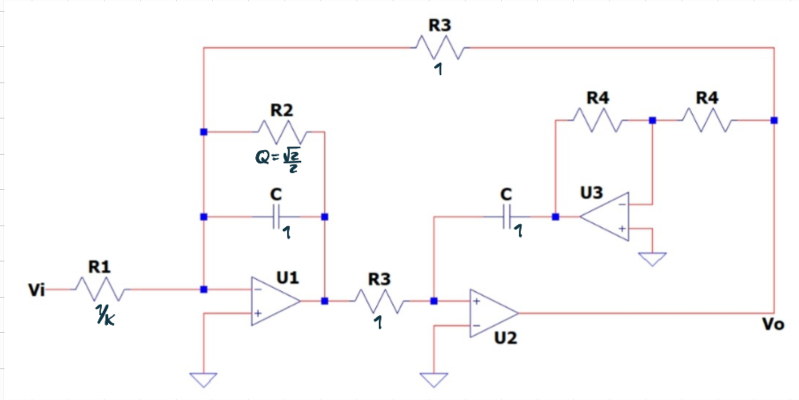
$$T_{(s)} = K \frac{\omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \longrightarrow T_{(\$)} = K \frac{\cancel{\omega_0^2}}{\$^2 \cancel{\omega_0^2} + \$ \frac{\cancel{\omega_0^2}}{Q} + \cancel{\omega_0^2}} \longrightarrow T_{(\$)} = K \frac{1}{\$^2 + \$ \, 1/Q + 1}$$

Normalización en impedancia:

$$\left.\begin{array}{l} K = -\frac{R_3}{R_1} \\ Q = \frac{R_2}{R_3} \end{array}\right\} \Omega_Z = R_3 \left\{\begin{array}{l} K = -\frac{1}{R_{1n}} \\ Q = R_{2n} \\ R_{3n} = 1 \end{array}\right. \longrightarrow T_{(\$)} = K \frac{1}{\$^2 + \$\frac{1}{Q} + 1} = -\frac{1}{R_{1n}} \frac{1}{\$^2 + \$\frac{1}{R_{2n}} + 1}$$

Red normalizada que se comporta como Butterworth:

- $R_{2n} = Q = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $R_{1n} = -\frac{1}{k}$
- $R_{3n} = 1$
- $\omega_0 = \frac{1}{R_3 C} \xrightarrow{R_{3n}=1} \frac{1}{R_{3n} C} = 1 \longrightarrow C = 1$
- A R_4 le doy valor unitario, ya que no interfiere en la func. transferencia



$$T_{(s)} = k \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{Q} + 1} = -\frac{1}{R_{1n}} \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{R_{2n}} + 1} \quad ; \quad \Omega_z = R_3 \; ; \; \Omega_w = \frac{1}{R_3 C}$$

#4

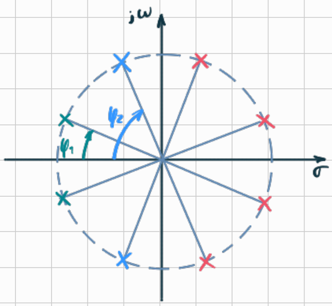
Filtro pasa bajos Butterworth de 4to orden:

$$T_{(\omega)} = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} = \frac{1}{1 + \omega^8} \longrightarrow T_{(s)}\Big|_{\omega = \frac{s}{j}} = \frac{1}{s^8 + 1}$$

polos: $s^8 = -1 = e^{j(\pi + 2k\pi)} = e^{j\pi(2k+1)}$

$$s_k = e^{j\pi\frac{2k+1}{8}} \; ; \; k = 0,1,2,3,4,5,6,7$$

- $s_0 = e^{j\frac{\pi}{8}}$
- $s_1 = e^{j\frac{3}{8}\pi}$
- $s_2 = e^{j\frac{5}{8}\pi}$
- $s_3 = e^{j\frac{7}{8}\pi}$
- $s_4 = e^{j\frac{9}{8}\pi}$
- $s_5 = e^{j\frac{11}{8}\pi}$
- $s_6 = e^{j\frac{13}{8}\pi}$
- $s_7 = e^{j\frac{15}{8}\pi}$



$$\begin{cases} \varphi_1 = \pi - \frac{7}{8}\pi = \frac{\pi}{8} \\ Q_1 = \frac{1}{2\cos\varphi_1} \cong 0{,}541 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2 = \pi - \frac{5}{8}\pi = \frac{3}{8}\pi \\ Q_2 = \frac{1}{2\cos\varphi_2} \cong 1{,}307 \end{cases}$$

Para formar el Butterworth de 4to orden, se pondrán en cascada 2 filtros de 2do orden cuyos factores de calidad sean $Q_1 = \frac{1}{2\cos(\pi/8)}$ y $Q_2 = \frac{1}{2\cos(\frac{3}{8}\pi)}$

Partiendo de la expresión normalizada de 2do orden:

$$T_{(s)} = k \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{Q} + 1} = -\frac{1}{R_{1n}} \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{R_{2n}} + 1} \quad ; \quad \Omega_z = R_3 \; ; \; \Omega_w = \frac{1}{R_3 C}$$

Para uno de 4to orden queda:

$$T_{(s)} = k^2 \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{Q_1} + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{Q_2} + 1}$$

Se pide que $|T_{(0)}| = 20\,dB \longrightarrow |T_{(0)}| = 10$ (veces)

$$|T_{(0)}| = k^2 = 10 \rightarrow k = \sqrt{10}$$

Finalmente la func. trans. del filtro de 4to orden Butterworth a partir del filtro planteado en #1, queda:

$$T_{(s)} = k^2 \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{Q_1} + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{1}{Q_2} + 1} \; ; \text{ siendo: } \begin{cases} Q_1 = R_{2n}^{I} = \dfrac{1}{2\cos(\pi/8)} \\ Q_2 = R_{2n}^{II} = \dfrac{1}{2\cos(\frac{3}{8}\pi)} \\ k^2 = \dfrac{1}{R_{1n}^2} = 10 \end{cases}$$

* norma: $\Omega_z = R_3$; $\Omega_w = \dfrac{1}{R_3 C}$