注：章节顺序安排以奥本海姆的书的顺序排布（强烈推荐此书）（但涉及到图片和页数还是按北理的教材）北理自编的教材不是说不行（毕竟你考研还要用），但总感觉差点意思。内容主要是一些关于信号与系统内容的理解，具体的定义、表格亦或是特别基本的公式还是自行看书比较好（主要是公式太难打不想打）

第一章 信号与系统

（1）信号的能量与功率：

能量计算式：

当上述积分式和无穷级数不绝对收敛时，我们认为信号的能量是无穷的，有限能量的信号通常称为能量信号。

功率计算式：

可以看到，能量信号在无穷区间上的平均功率必然为零，有限功率的信号记做功率信号。

在信号与系统涉及的范围内，我们认为周期信号均是功率信号，而非周期信号按幅度和持续时间是否无限可分为三类，持续时间有限的都是能量信号，持续时间无限而幅度有限的信号是功率信号。都无限的都不是。

（2）信号的运算：

连续信号的微分/积分对应离散信号的差分/求和

信号变换的图像遵循左加右减和先平移后反转（这个比先反转后平移简单）的规则（高中数学里绝对讲过）

（3）尺度变换

即和，注意尺度变换系数只加在变量上不加在常量上。

例如：，

需要注意的是离散信号由于只能在整数点上取值，因此尺度变换后的数据量可能会改变。

举个栗子： 设x[n]={0,1,2,3,4,5}

则有 x[2n]={0,2,4} x[n/2] = {0,0,1,0,2,0,3,0,4,0,5}

也就是说，**离散信号由于只能在整数点处取值的特点导致了一些不同于连续信号的特点和性质。**

（4）复指数信号

连续的复指数信号：

形如，其中C,a均为复数的信号，信号与系统中一般不研究带阻尼的复指数信号，即通常来说

因而利用欧拉公式可以得到

通过复指数信号和三角函数的关系不难得到复指数信号具有周期性。

离散的复指数序列：

我们以为例来讨论离散序列与连续信号的不同之处：

1.对具有周期性

对连续信号而言，我们很容易理解不同的必然会对应不同的函数图像，我们以数学表达式来说明这一点：

对于连续信号，不同的k对应着不同的值，因此函数图像整体是不相同的，但对于离散信号而言，当k为整数时，，因此对具有以为周期的周期性，在图像上导致了**频率相差的整数倍的信号图像完全相同**。这还造成了另外一个现象，即离散信号随着的增大，信号的振荡速率并不是越来越快的（见书p22图）

2.对不一定都具有周期性

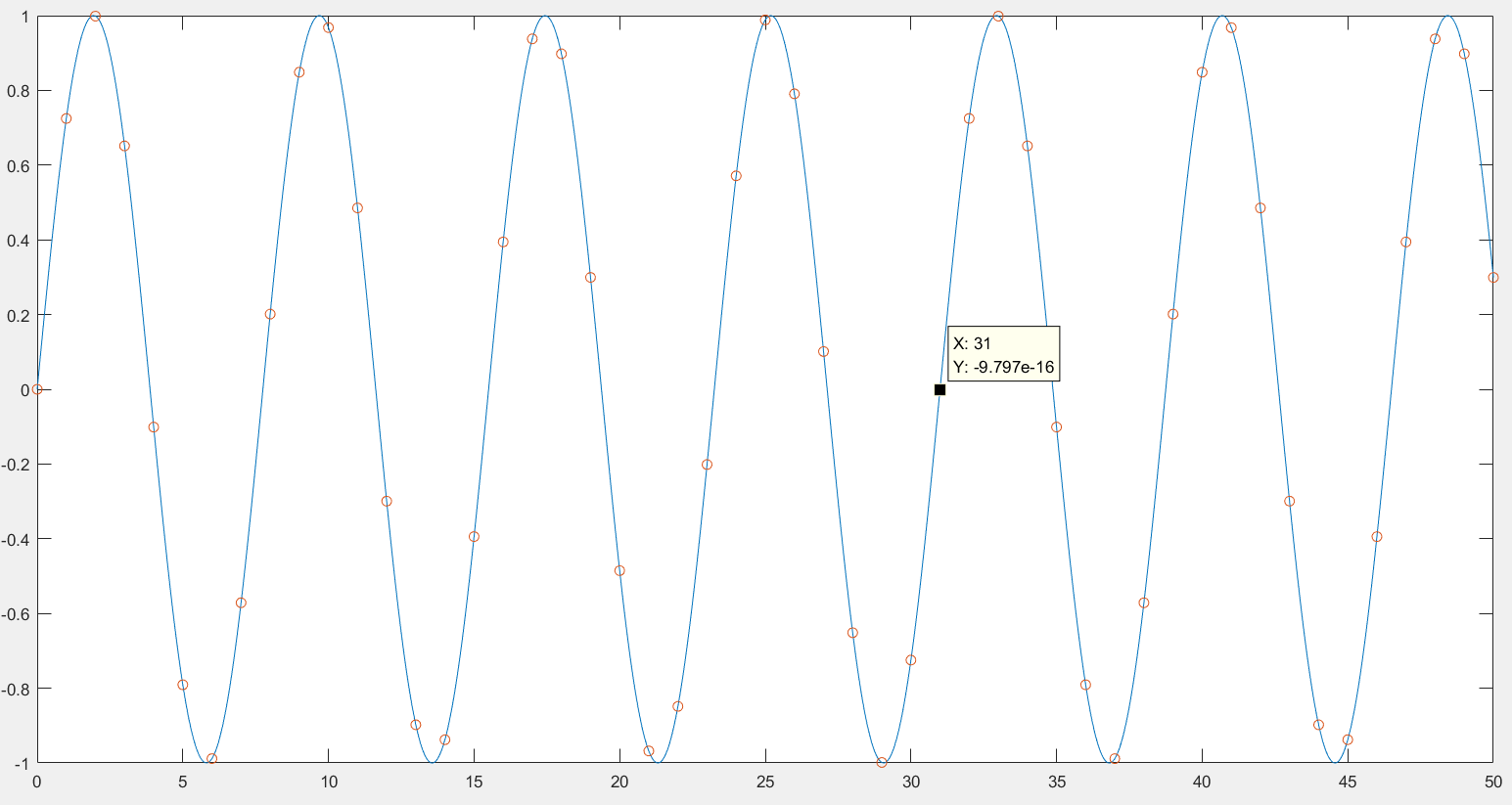
设存在周期且周期为N，则有

可推得需为一有理数，也即当为无理数时，离散序列不具备周期性。

根据上式还可以推得基波频率为

这引申出了另一个问题，在连续信号中的基波频率必然是，而离散信号却不见得，以一个例子说明这一点。

例：下图为与的图像



连续时间中很明显有，这就很明显的看出，由于离散不能取分数值，因此离散相比于连续最小正周期扩大了4倍，而这四倍正是，从而离散周期N=31，m=4，基波频率为

（5）单位阶跃函数和单位冲激函数

1.离散:

离散的没什么可说的，记住一些基本的公式就ok，例如阶跃和冲激的关系式、延时变换之类的。

2.连续:

连续单位阶跃函数注意u(0)的定义问题就行

连续单位冲激函数和一般的函数定义不同，属于广义函数，一定要记住的取值没有意义，是冲激面积为1即，因此不同于离散，连续单位冲激函数满足的是而不是

同样记住一些基本公式即可。

注意一下p17页复合函数的冲激强度计算。

通过这两个函数的关系，同样我们可以意识到连续时间的微分/积分和离散时间的差分/求和之间的相似关系。

（6）系统的互联

这部分主要是自动控制原理的内容，只需要理解一般的连续时间系统和离散时间系统是通过微分方程和差分方程来描述的即可。

框图的绘制只需要会直接II型的绘制即可，这部分在拉普拉斯变换中提及。

（7）系统的特性

1.线性

没啥可说的，线代里讲了一万次

2.时不变性

即当输入延时了t0时，输出也延时t0，通常来说有三种情况一般是时变的，即尺度变换，增益中带有时间量，以及信号存在的区间上下限中含时间量t

3.因果性

系统的输出仅取决于当前时刻和之前时刻的输入，而不取决于未来时刻。

注：因果性仅仅要求输入不能含有未来时刻，例如就是因果系统。

4.记忆性

若系统的输出仅取决于当前时刻，则称为无记忆，反之称记忆系统。无记忆系统必然是因果的。

5.可逆性

不同的输入必然对应不同的输出

6.稳定性

当输入有界时输出也有界

第二章 LTI系统

课本前面讲的那些（即2.1-2.3，3.1-3.3）大致了解即可，信号与系统不可能用高数的办法去解微分方程的（认真脸），这一章就一个问题，搞清楚卷积就行。

**注：课本上喜欢把连续和离散拆开来分开讲，事实上它们之间的共性居多，而差异又是需要关注的重点（尤其是后面DSP就是在关注连续和离散的差异问题），因此本文一般放在一块（再次吐槽北理自编教材的质量）**

**（1）卷积**

整个LTI系统实际上就是在讲卷积，卷积和的公式如下：

https://gss2.bdstatic.com/9fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D143/sign=ab6317f1b251f819f525074ee9b54a76/54fbb2fb43166d22dd3b844e442309f79152d298.jpg https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D250/sign=63806e1ae7cd7b89ed6c3d863f254291/2f738bd4b31c8701160cdc36267f9e2f0608ffac.jpg

公式没什么可说的记住就完事了。

对卷积的理解：

回想一下电分中学习的内容，对于一般的RC系统或者RLC系统，我们给出一个瞬时的输入，其输出并不会像纯电阻电路那样也是瞬时的，而是在一段时间内都会有输出直至衰减为0，也就是电分中提到的零状态响应，正是由于LTI系统中瞬时的输入会使得输出会在接下来的一段时间中持续出现，因此我们需要在LTI系统的分析中引入卷积。

考虑一个问题：

假设在一个游戏中，平A会使人受到持续伤害，在5秒内造成h[n]=[5,4,3,2,1]点伤害（被A后立刻造成第一次伤害），那么每隔1秒A一次一共A5次一共会造成多少点伤害？

我们可以将攻击记为x[n]=[1,1,1,1,1]

显然计算每秒伤害时要同时考虑之前攻击的遗留效果和本次攻击新叠加上去的伤害

y[0]=x[0]h[0]=5

y[1]=x[1]h[0]+x[0]h[1]=9

y[2]=x[2]h[0]+x[1]h[1]+x[0]h[2]=12 …

得到一般结论

正是卷积的表达式

也就是说，卷积实际上是在计算各个时刻的输入在所求时刻引起的响应之和，利用图形计算卷积时，可以采用翻转滑动求和的方式（课本88页），即将h[n]的图形对称翻转过去，再依次滑动h[n]的图形，将x[n],h[n]对应的值依次做乘积和。理解了离散的卷积，连续的就很容易理解了。

需要注意的是对于连续时间信号的卷积，设x(t)定义在[a,b]上，h(t)定义在[c,d]上，则卷积结果会定义在[a+c,b+d]上。

对于离散卷积，卷积结果的长度为

卷积的相关运算定律不介绍了，看书就完事了。

**（2）零状态响应和零输入响应**

在电分中已经学习过了两者的概念，在信号课程中，零状态响应指的是系统无初值y(0),y’(0)等等，而仅仅只有外界的输入x(t)，零输入响应则反过来，指无外界输入，而仅有系统初值，在研究微分方程和差分方程的系统时，分清此二者非常重要。

**（3）单位冲激响应**

从卷积的定义中我们可以得到

而h(t)可以说就是该LTI系统的性质，因此当输入一个单位冲激函数时，输出就反映了系统的性质，我们称之为单位冲激响应。离散也是同理。

**（4）LTI系统的特性**

（1）线性，时不变性

请看看本章的标题

（2）因果性

因果性定义为输出仅取决于当前的输入和之前的输入，再次回顾卷积的公式

https://gss2.bdstatic.com/9fo3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D143/sign=ab6317f1b251f819f525074ee9b54a76/54fbb2fb43166d22dd3b844e442309f79152d298.jpg https://gss3.bdstatic.com/7Po3dSag_xI4khGkpoWK1HF6hhy/baike/s%3D250/sign=63806e1ae7cd7b89ed6c3d863f254291/2f738bd4b31c8701160cdc36267f9e2f0608ffac.jpg

可以看到，i是从负无穷累和到正无穷，但因果性要求不能和未来的值有关，也就是要求在i>n时，必须有，也就是

这就是LTI系统具有因果性的条件

（3）记忆性

由于无记忆要求仅和当前时间有关，同因果性的分析可以得到

等价于

（4）可逆性

（5）稳定性

h(t)绝对可积，即

**（5）直接II型框图**

注：直接I型在DSP里讲

书上65页写出了直接II型框图的各个系数，下面以一个具体例子来说明为什么是这样

例：设微分方程为

1. 设一个辅助函数满足

其中的最高阶导数与微分方程中的最高阶一致（相当于作为连接x和y的桥梁），代入原始方程中确定系数为

由于直接II型框图x部分是反馈连接，因此将x的等式变形为在左侧

可以看到，这就是65页框图中y方向的系数为微分方程中x的系数，x方向的系数为微分方程中y的系数的负数或倒数的原因。

差分方程的框图也是同理。

框图是重点，一定要会画。

第三章 周期信号的傅里叶级数

课本又是用了两章分别讲连续和离散的傅里叶，事实上它们几乎相同，反而是傅里叶级数和傅里叶变换之间的区别需要重点掌握，因此本文还是将连续和离散放在一起说，把级数和变换拆开。

这一章要背的并不多，因为下一章的傅里叶变换会包括本章的内容，这里就重点理解为什么要引入傅里叶变换和感受这个过程即可。

（1）引入傅里叶分析的意义

（这部分肯定不会考论述题，但是看一下可以加深理解）

（信号与系统的傅里叶变换均是在复指数下进行，这部分在高数中打了\*号没讲，因此它和高数上直接在sin cos上展开的还不完全一致）

在线性时不变系统中，输入和输出满足一个卷积关系

当输入为复指数信号，即（）（s,z均为复数）时，可以推出

观察后面的积分式与和式，在给定系统的h(t)后，这个积分式与级数和求得的值必然是一个与s，z有关的**常数**（即不含t），我们将之记为H(s),H(z).即

从而得出一个结论，**复指数信号的输出还是具有相同指数的复指数信号，仅仅是在幅度上乘了H(s),H(z)**。那么，如果我们能把任意一个信号表示成复指数信号的加权和（事实上是可以的，因为复指数函数可以作为一组正交基），例如

则输出必然是

这样我们就可以只研究H(s)即可得到输出，而不再需要计算繁琐的卷积积分

这就是利用变换来研究LTI系统的方便之处，由于H(s)就代表了这个系统，我们将之称为**系统函数**。

（2）连续周期信号的傅里叶级数定义

由于傅里叶级数是在三角函数域上变换，而三角函数对应的是纯虚数（复变里有讲），因此在研究傅里叶变换时，我们取

在高数中讲过，能展开成傅里叶级数的必然是**周期函数，**展开式为

其中T为信号周期，

称为傅里叶系数或频谱系数

（3）离散周期信号的傅里叶级数定义

设x[n]周期为N，，我们来考虑一组复指数序列

由于在第一章中我们已经知道了，频率相差倍的图像完全相同，因此

只有k=0,1,2,…,N-1这N种不同图像，从k=N开始图像与之前完全一样，因此与连续信号k一直加到正无穷不同，离散信号级数只有这N项，这导致了离散傅里叶级数的公式为

表示从任意起点起连续取N项

（4）频谱

以频率为横轴，以系数的模值为纵轴绘图，就得到了一个信号的频谱图

从公式中我们可以得到，频谱图必然是关于y轴的偶函数，也就是说会出现负频率，这是因为任何一个**实信号在复指数域上展开必然会对称的分为正负两边**，因此只要是实信号，必然在数学上会运算出负频率。还可以这么理解，在高数里我们把信号在cos sin上展开，此时没有负频率，但把cos sin展开为复指数时均会出现负频率。所以暂时把负频率当做没有物理意义，仅是数学计算的结果即可。

（5）傅里叶级数的收敛性

在本专业中判断收敛性主要使用狄利克雷条件，即

（1）在周期内绝对可积，即

（2）任何周期内的极值数目有限

（3）一个周期内的间断点数目有限，且间断点处的值有限

离散傅里叶级数必然收敛（因为它不是无穷级数，有限项加和就完事了怎么会不收敛）

吉伯斯现象了解一下就ok

第四章 非周期信号的傅里叶变换

（1）连续信号的傅里叶变换定义

上节提到的傅里叶级数仅仅只能对周期信号进行分析，事实上很多信号都是非周期的，对此我们采用下面的思路来理解。

考虑一个经典的波形

T为周期，

1. 随着信号周期的增大，离散的谱线会越来越密集

我们就想到一种可能，非周期信号可以理解为周期无穷大的信号，而T增大到无穷时谱线会密集到成为为连续函数，事实上这确实是正确的，也就是说，我们通过增大周期来逼近非周期信号，最后取极限得到最终非周期信号的结果，书上有详细的证明过程，最后可以得到

（2）离散时间信号的傅里叶变换定义

思考方式和连续信号相同，同样是构造一个周期信号，使之周期趋向于无穷从而逼近非周期信号，最后同样可以得到

可以看到虽然序列是离散的，但离散时间傅里叶变换是连续函数，同样也是关于y轴的偶函数。

**与连续的区别：**

1. 从正变换中可以看出

因此离散时间傅里叶变换以为周期

1. 反变换任意取连续的2长度积分即可

（3）傅里叶变换存在的条件

对于连续而言，仍然是狄利克雷条件，但是傅里叶变换要求其在全区间绝对可积，即

对于离散而言，虽然离散傅里叶级数必然收敛，但离散时间傅里叶变换是无穷级数，因而要求其绝对可和，即

（4）傅里叶级数和傅里叶变换的关系

虽然周期信号不满足绝对可积（绝对可和）的关系，但为了能将之联系起来，方便我们处理信号，我们在变换中引入单位冲激函数。

在推导傅里叶变换的定义式时，由于T趋向于，因此趋向于0，然后k越来越密直至成为连续函数。那么反过来想，各个傅里叶级数系数出现的点的横坐标正是k，因此我们可以利用间隔为的冲激串在傅里叶变换上取样，得到的冲激串强度就**正比于**（不是等于）周期函数的傅里叶级数系数，我们把这样的冲激串组成的函数就称为周期函数的傅里叶变换

例：

这样就使得周期函数也可以有傅里叶变换, 离散周期信号的傅里叶变换也是同理

我们将傅里叶级数和傅里叶变换统一起来之后，就可以利用傅里叶变换来求解周期信号的傅里叶级数，经分析有

但在这里要注意一个问题，对于离散傅里叶级数而言，是有限多个(N个)，但离散周期信号的傅里叶变换是无限区间的。

这一点可以这样理解，其实也是无限多个，只不过从N+1个起开始循环，因此

离散周期信号的傅里叶变换不要忘了体现其周期性，例如

（5）**傅里叶变换的性质（重点）**

P144页、p207页的性质表格必须背过，最好能推导一些（例如时域卷积等于频域相乘及其对偶）

对偶性：

简单来说就是如果A的B对应C的D，那么A的C就对应B的D（中间微小的系数差别要重点记忆）

几组典型对偶：

时域卷积与频域相乘，时域相乘与频域卷积

时域门函数和频域sinc函数，时域sinc函数和频域门函数（理想滤波器）

事实上很多性质之间就是对偶的，比如时移和频移

（6）周期非周期，连续离散，时域频域的关系

**时域周期必定频域离散（周期信号的傅里叶级数）**

**时域非周期必定频域连续（非周期信号的傅里叶变换）**

**时域离散必定频域周期（离散信号的变换有周期）**

**时域连续必定频域非周期（连续信号的变换都是无限区间无周期的）**

（7）常用傅里叶变换对

145页的表格必须背过（不需要背离散的变换对是因为可以通过抽样定理推导出来）

（8）其他

课本上的相关、能量谱、功率谱是随机信号的重点，小波变换是高级DSP的重点，DFT和圆周卷积是DSP的重点，这些可以都先不看。

（9）抽样定理

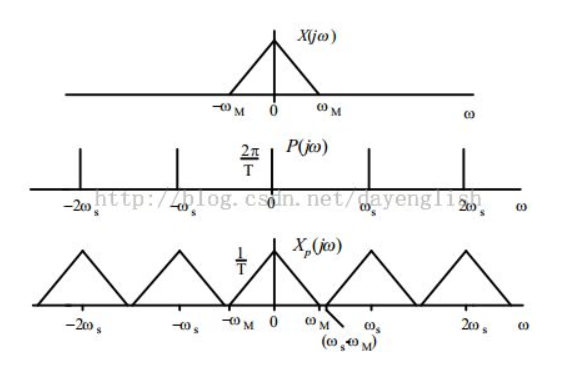
离散信号可以看作是等间隔地对连续时间信号进行抽样之后得到的数据，实际中的抽样都是用极短的脉冲来进行取样，在理论分析中我们自然就想到可以用理想的单位冲激函数来取样。

我们设取样函数的取样间隔为T，因此取样函数可表示为

因此取样结果为

对其做频域分析

可以看到取样之后的频谱在频域上具有了周期如下图所示



由图显然可以得到，对于带限于的信号抽样后的频谱若想不混淆，就必须满足，即抽样率和信号最大频率之间的关系，满足，此为抽样定理，记为奈奎斯特抽样率。

第五章 频率响应

我们在讲傅里叶变换的一开头就已经提到了，LTI系统对复指数信号的响应满足

那么在前面我们已经学习了把信号做傅里叶变换，那么自然就可以得到

其中

由于纯虚数时系统特性只和频率有关，因此此时特征函数又称频率响应

可以看到系统的频率响应恰好就是单位冲激响应的傅里叶变换，由傅里叶变换的性质可以得到

1. 线性常系数微分方程和差分方程系统的频率响应

设系统如下：

则有（注意系数是反过来的）

差分方程同理

有了该公式，我们就可以真正的跳过卷积，利用傅里叶变换计算系统的输入输出了。

1. 互联系统的结构

这部分自控重点讲，可简单了解

1. 频率响应的模和相位表示

经过LTI系统之后，输出的模和相位会有如下的变化

将称为增益，称为相移，由此可知，可能会出现幅度失真和相位失真两种情况。（这都是改变了信号各频率分量的相对相位关系）

1. 无失真传输

指响应仅在大小和时间上不同，而波形无差别，即

可推得

这样的系统具有常数增益和斜率恒定的相位曲线（线性相位）。

1. 群时延

群时延表征的是输出信号中频率为的分量相对于输入信号此频率的时间延后，由此可得线性相位的群时延为常数。

1. 理想滤波器的不可实现性
2. 佩利维纳条件：频率响应的模只可能在有限的几个点上为0不可能在某一连续频带内为0
3. 理想滤波器的单位冲激响应在t<0时仍存在，说明其无因果性，物理不可实现。

第六章 拉普拉斯变换

当复指数不再限于纯虚数时，即时，就由傅里叶变换变成了拉普拉斯变换，也就是说傅里叶变换是拉普拉斯变换的一个特殊情况。

那么为什么要引申到拉普拉斯变换呢，这是因为狄利克雷条件的绝对可积几乎只有衰减信号才能满足，而引入拉普拉斯变换之后，复数s的实部乘在信号上可能会使原本不绝对可积的信号满足条件从而可以变换，扩大了变换的适用范围。

拉普拉斯变换的表达式为

由于实际中的信号都是在t>0时才出现，因此下面的单边拉普拉斯变换式更加常用

1. 拉普拉斯变换的存在条件
2. x(t)在t>0的任一有限区间上分段连续
3. 存在M>0和 使得，即的增长比某一指数函数慢，这样就可以通过s的实数部分将函数变为绝对可积的。
4. **拉普拉斯变换的收敛域**

收敛域满足如下几条规则

1. 收敛域必然是平行于虚轴的带状区域
2. 若X(s)有理则收敛域不包括任何极点
3. 若x(t)有限时长或绝对可积，则在整个s平面上收敛
4. 右边信号(t从某一值延伸到正无穷)的收敛域为最右极点的右侧
5. 左边信号(t从某一值延伸到负无穷)的收敛域为最左极点的左侧
6. 双边信号收敛域不延伸到无穷，而是被某两个极点限制

注意：

收敛域非常重要，同一个拉普拉斯变换X(s)，收敛域不同，其对应的时域函数x(t)就不同

显然，时为傅里叶变换，也即若收敛域包括虚轴则信号就有傅里叶变换

1. **拉普拉斯变换的性质**

书p276页的表格必须背过，可以结合连续傅里叶变换的性质来背，初值和终值定理是用来解微分方程的。

卷积性质最好会推导

1. **常见信号的拉普拉斯变换**

P278页表格必须背过（注意收敛域）

1. 拉普拉斯反变换

留数定理法不用会，只需要学会部分分式法做拆项然后查表就行了，反变换时必须注意收敛域！！

1. 微分方程的s域解法

利用单边拉普拉斯变换的微分性质

将微分方程代换为拉普拉斯变换表达式解得Y(s)，再反变换回来即可。

注意零状态响应和零输入响应在解方程时的区别

第七章 Z变换

与连续傅里叶变换扩展为拉普拉斯变换类似，离散的也可以扩展为z变换，其意义和拉普拉斯变换差不多。

1. 定义

同样的就有单边z变换

1. 与离散时间傅里叶变换的关系

显然当时z变换成为傅里叶变换，也就是z平面上半径为1的单位圆，也就是说，相比于拉普拉斯变换是在纯虚数的基础上添加了实部，z变换是在单位模值复数的基础上乘了倍数。

1. **z变换的收敛域**

收敛域满足如下几条规则

* 1. 收敛域必然是以原点为中心的圆环
  2. 收敛域不包括任何极点
  3. 若x(t)有限时长，则在整个z平面上（z=0，z=∞需要另行讨论）收敛

若N1<0<N2，则两点都不包括

若N1>=0，不包括z=0

若N2<=0，不包括z=∞

4、右边信号(t从某一值延伸到正无穷)的收敛域为最外极点的外侧（若还是因果信号则包括正无穷）

5、左边信号(t从某一值延伸到负无穷)的收敛域为最内极点的内侧（若还是反因果信号则包括0）

6、双边信号收敛域不延伸到无穷，而是被某两个极点限制的圆环

注意：

收敛域同样非常重要，也会导致时域函数不同

1. **z变换的性质**

p320页表格

1. **常见信号的z变换**

p321页表格

1. z反变换

部分分式法以及长除法

1. 差分方程的z域解法

同样是利用单边z变换的性质

将微分转化到频域进行计算，同样要注意零输入和零状态响应的问题。