Д.В.Беклемишев

КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

7-е изд., стер. — М.: Высш. шк. 1998.—320 с.

В учебнике (6-е изд. — 1987г.) излагается основной материал, входящий в объединенный курс аналитической геометрии и линейной алгебры: векторная алгебра, прямые и плоскости, линии и поверхности второго порядка, аффинные преобразования, системы линейных уравнений, линейные пространства, евклидовы и унитарные пространства, квадратичные формы, аффинные пространства, тензорная алгебра.

Для студентов высших учебных заведений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга отражает многолетний опыт преподавания аналитической геометрии и линейной алгебры в Московском физико-техническом институте. Особенности подготовки студентов в МФТИ вызывают необходимость ускоренного изложения курса математики, по объему приближающегося к университетскому. В связи с этим аналитическая геометрия излагается так, чтобы на простом и доступном материале подготовить студента к изучению линейной алгебры. Собственно линейной алгебре, т.е. теории линейных пространств, предпослана большая глава о системах линейных уравнений и матрицах. Ее цель — дать читателю исследование систем линейных уравнений, независимое от методов линейной алгебры. В этой же главе собраны и другие сведения, необходимые для дальнейшего изучения. Более подробное представление о строении книги можно получить из оглавления. Со времени первого издания в 1971 г. учебник неоднократно перерабатывался при сохранении общего плана и стиля изложения. Настоящее издание является стереотипным воспроизведением 6-го издания 1987 г. Мне хочется с благодарностью отметить то влияние, которое оказали на эту книгу преподаватели кафедры высшей математики МФТИ, прежде всего те, кто читал лекции по курсу аналитической геометрии и линейной алгебры. Особенно я благодарен проф. А.А. Абрамову, проф. Л.А. Беклемишевой, чл.- корр. РАН Л.Д. Кудрявцеву, проф. В.Б. Лидскому, академику Л.В. Овсянникову, проф. С.С. Рышкову, проф. С.А. Теляковскому. *Автор*

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

A, α — альфа
E, ε — эпсилон
I, i — йота
N, ν — ню
Σ, σ — сигма
X, χ — хи
B, β — бета
Z, ζ — дзета
K, κ — каппа
Ξ, ξ — кси
T, τ — тау
Ψ, ψ — пси

Γ, γ — гамма
H, η — эта
Λ, λ — лямбда
Π, π — пи
Υ, υ — ипсилон
Ω, ω — омега
Δ, δ — дельта
Θ, θ, ϑ — тета
M, μ — мю
P, ρ — ро
Φ, φ — фи

ГЛАВА I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Векторы

1. Предварительные замечания. Первые главы этой книги можно рассматривать как продолжение школьного курса геометрии. Известно, что каждая математическая дисциплина основывается на некоторой системе недоказываемых предложений, называемых аксиомами. Полный перечень аксиом геометрии, так же как и более подробные рассуждения о роли аксиом в математике, можно найти в книге Н. В. Ефимова [5]. (Цифры в квадратных скобках означают ссылки на список рекомендуемой литературы, помещенный в конце книги.)

Мы не ставим себе целью изложение логических основ предмета и потому просто опираемся на теоремы, доказываемые в курсе элементарной геометрии. Следовательно, все наши результаты можно считать доказанными лишь постольку, поскольку доказаны эти теоремы.

Равным образом мы не пытаемся дать определение основных геометрических понятий: точки, прямой, плоскости. Читатель, интересующийся их строгим введением, может обратиться к той же книге Н. В. Ефимова; мы же будем считать, что эти и другие введенные в курсе средней школы понятия известны читателю.

Мы предполагаем также известными школьное определение вещественных чисел и их основные свойства. (Строгая теория вещественного числа приводится в учебниках математического анализа.) Мы будем широко использовать то обстоятельство, что при выбранной единице измерения каждому отрезку можно сопоставить положительное вещественное число, называемое его длиной. *Единицу измерения длин мы будем считать выбранной раз навсегда* и, говоря о длинах отрезков, не будем указывать, какой единицей они измеряются.

2. Определение вектора. Отрезок прямой задается двумя равноправными точками — его концами. Но можно рассматривать направленный отрезок, определяемый упорядоченной парой точек. Про эти точки известно, какая из них первая (начало), а какая вторая (конец).

Определение 1. Направленный отрезок (или, что то же, упорядоченную пару точек) мы будем называть *вектором*. К векторам будем относить и так называемый *нулевой* вектор, у которого начало и конец совпадают.

Направление на отрезке принято отмечать стрелкой. Над буквенным обозначением вектора при письме ставится стрелка, например: $\overrightarrow{AB}$ (при этом буква, соответствующая началу вектора, обязательно ставится впереди). В книгах часто буквы, обозначающие вектор, набираются полужирным шрифтом, например: **а**. Нулевой вектор обозначается **0** или просто 0.

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной* (а также модулем и абсолютной величиной). Длина вектора обозначается $|\mathbf{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых, короче говоря, если существует прямая, которой они параллельны. Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

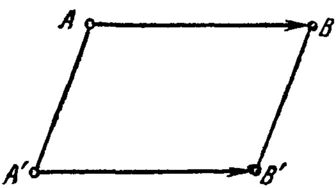

Рис. 1.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору, так как он не имеет определенного направления. Длина его, разумеется, равна нулю.

Определение 2. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины.

Из этого определения непосредственно вытекает, что, выбрав любую точку A', мы может построить (и притом только один) вектор $\overrightarrow{A'B'}$, равный некоторому заданному вектору $\overrightarrow{AB}$, или, как говорят, перенести вектор $\overrightarrow{AB}$ в точку A' (рис. 1).

3. О другом определении вектора. Заметим, что понятие равенства векторов существенно отличается от понятия равенства, например, чисел. Каждое число равно только самому себе, иначе говоря, два равных числа при всех обстоятельствах могут рассматриваться как одно и то же число. С векторами, как мы видим, дело обстоит по-другому: в силу определения существуют различные, но равные между собой векторы. Хотя в большинстве случаев у нас не будет необходимости различать их между собой, вполне может оказаться (см. с. 14), что в какой-то момент нас будет интересовать именно вектор $\overrightarrow{AB}$, а не другой, равный ему вектор $\overrightarrow{A'B'}$.

Для того чтобы упростить понятие равенства векторов (и снять некоторые связанные с ним трудности), иногда идут на усложнение определения вектора. Мы не будем пользоваться этим усложненным определением, но сформулируем его. Чтобы не путать, мы будем писать «Вектор» (с большой буквы) для обозначения определяемого ниже понятия.

Определение 3. Пусть дан направленный отрезок. Множество всех направленных отрезков, равных данному в смысле определения 2, называется *Вектором*

Таким образом, каждый направленнный отрезок определяет Вектор. Легко заметить, что два направленных отрезка определяют один и тот же Вектор тогда и только тогда, когда они равны. Для Векторов, как и для чисел, равенство означает совпадение: два Вектора равны в том и только в том случае, когда это один и тот же Вектор.

При параллельном переносе пространства точка и ее образ составляют упорядоченную пару точек и определяют направленный отрезок, причем все такие направленные отрезки равны в смысле определения 2. Поэтому параллельный перенос пространства можно отождествить с Вектором, составленным из всех этих направленных отрезков.

Из начального курса физики хорошо известно, что сила может быть изображена направленным отрезком. Но она не может быть изображена Вектором, поскольку силы, изображаемые равными направленными отрезками, производят, вообще говоря, различные действия (Если сила действует на упругое тело, то изображающий ее направленный отрезок не может быть перенесен даже вдоль той прямой, на которой он лежит.)

Это только одна из причин, по которым наряду с Векторами, т. е. множествами (или, как говорят, классами) равных направленных отрезков, приходится рассматривать и отдельных представителей этих классов. При этих обстоятельствах применение определения 3 усложняется большим числом оговорок. Мы будем придерживаться определения 1, причем по общему смыслу всегда будет ясно, идет ли речь о вполне определенном векторе, или на его место может быть подставлен любой, ему равный.

В связи с определением вектора стоит разъяснить значение некоторых слов, встречающихся в литературе.

Вместо определения 2 можно ввести другое определение равенства векторов, согласно которому векторы равны, если они равны по длине, лежат на одной прямой и направлены в одну сторону. В этом случае вектор может быть перенесен не в любую точку пространства, а только вдоль прямой, на которой он лежит. При таком понимании равенства векторы называются *скользящими векторами*. В механике сила, действующая на абсолютно твердое тело, изображается скользящим вектором.

Можно для векторов не вводить никакого особого понятия равенства, т. е. считать, что каждый вектор равен только самому себе и характеризуется, помимо длины и направления в пространстве, еще и точкой приложения. В этом случае векторы называются *приложенными векторами*. Как уже упоминалось, сила, действующая на упругое тело, изображается приложенным вектором.

Если нужно подчеркнуть, что равенство понимается в смысле определения 2, то вектор называется *свободным*. Свободным вектором изображается, например, угловая скорость тела. Определение 3 определяет свободный вектор.

4. Линейные операции над векторами. Линейными операциями называются сложение векторов и умножение вектора на число. Напомним их определения.

Определение. Пусть даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Построим равные им векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (т. е. перенесем конец $\mathbf{a}$ и начало $\mathbf{b}$ в одну и ту же точку B). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначается $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Заметим, что, выбрав вместо B другую точку, например B', мы получили бы в качестве суммы другой вектор $\overrightarrow{A'C'}$, равный вектору $\overrightarrow{AC}$.

Сложением векторов называют операцию, сопоставляющую двум векторам их сумму.

Определение. *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на вещественное число* α называется любой вектор $\mathbf{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\mathbf{b}|=|\alpha|\,|\mathbf{a}|$;

б) вектор $\mathbf{b}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$;

в) векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ направлены одинаково, если $\alpha>0$, и противоположно, если $\alpha<0$. (Если же $\alpha=0$, то из первого условия следует, что $\mathbf{b}=\mathbf{0}$.)

Произведение вектора $\mathbf{a}$ на число α обозначается $\alpha\mathbf{a}$.

Умножение вектора на число — операция, сопоставляющая вектору и числу произведение вектора на это число.

В курсе средней школы были выведены основные свойства линейных операций. Перечислим их без доказательства.

Предложение 1. 1) *Сложение векторов коммутативно, т. е. для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *выполнено* $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

2) *Сложение векторов ассоциативно, т. е. для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *выполнено* $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$.

3) *Прибавление нулевого вектора к любому вектору* $\mathbf{a}$ *не меняет последнего:* $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$.

4) *Для любого вектора* $\mathbf{a}$ *вектор* $(-1)\mathbf{a}$ *является противоположным, т. е.* $\mathbf{a}+(-1)\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

5) *Умножение вектора на число ассоциативно, т. е. для любых чисел* α *и* β *и любого вектора* $\mathbf{a}$ *выполнено* $(\alpha\beta)\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a})$.

6) *Умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению чисел, т. е. для любых чисел* α *и* β *и любого вектора* **a** *выполнено* $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$.

7) *Умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению векторов, т. е. для любых векторов* **a** *и* **b** *и любого числа* α *выполнено* $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$.

8) *Умножение вектора на единицу не меняет этого вектора:* $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

Вектор, противоположный вектору **a**, обозначается $-\mathbf{a}$. *Разностью* двух векторов **a** и **b** называется сумма вектора **a** и вектора, противоположного **b**, т. е. вектор $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ или коротко $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Вычитание — операция, обратная сложению, сопоставляющая двум векторам их разность: по сумме двух векторов $\mathbf{b}+\mathbf{x}=\mathbf{a}$ и одному из слагаемых **b** мы находим второе слагаемое $\mathbf{x}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ (рис. 2).

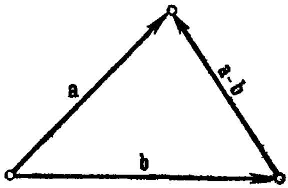

Рис. 2.

Вычитание определяется через сложение, и мы не будем считать его отдельной операцией. Точно так же не будем выделять деление вектора на число α, которое можно определить как умножение на число α^{-1}. Применяя линейные операции, мы можем составлять суммы векторов, умноженных на числа: $\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k$. Выражения такого вида называются *линейными комбинациями* векторов. Числа, входящие в линейную комбинацию, называются ее *коэффициентами.*

Сформулированные выше свойства линейных операций позволяют преобразовывать выражения, составленные из линейных комбинаций, по обычным правилам алгебры: можно раскрывать скобки, приводить подобные члены, переносить некоторые члены в другую часть равенства с противоположным знаком и т. д.

Перечисленные в предложении 1 восемь свойств линейных операций образуют в некотором смысле полный набор свойств: любые вычисления, использующие линейные операции над векторами, можно производить, основываясь на этих свойствах и не обращаясь к определениям линейных операций. Это обстоятельство будет в дальнейшем (гл. VI) иметь для нас принципиальное значение.

Линейные комбинации векторов обладают следующими очевидными свойствами: если векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ коллинеарны, то любая их линейная комбинация им коллинеарна; если векторы $a_1, \ldots, a_k$ компланарны, то любая их линейная комбинация с ними компланарна. Это сразу следует из того, что вектор αa коллинеарен a, а сумма векторов лежит в той же плоскости, что и слагаемые, и даже на той же прямой, если они коллинеарны.

Определение. *Базисом в пространстве* называются три некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

Базисом на плоскости называются два неколлинеарных вектора на этой плоскости, взятые в определенном порядке.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор на этой прямой.

Отметим, что векторы базиса на плоскости ненулевые, так как, если бы один из них был нулевым, они были бы коллинеарны. Точно так же никакие два из векторов базиса в пространстве не коллинеарны — в противном случае все три были бы компланарны.

Если вектор представлен как линейная комбинация некоторых векторов, то говорят, что он *разложен* по этим векторам. Чаще всего рассматривается разложение вектора по базису.

Определение. Если e_1, e_2, e_3 — базис в пространстве и $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, то числа α_1, α_2, α_3 называются *компонентами* (или *координатами*) вектора a в данном базисе. Аналогично определяются компоненты вектора на плоскости и на прямой. Компоненты вектора пишут в скобках после буквенного обозначения вектора. Например, a(1, 0, 1) означает, что компоненты вектора a в определенном ранее выбранном базисе равны 1, 0 и 1.

Теорема 1. *Каждый вектор, параллельный какой-либо прямой, может быть разложен по базису на этой прямой.*

Каждый вектор, параллельный какой-либо плоскости, может быть разложен по базису на этой плоскости.

Каждый вектор может быть разложен по базису в пространстве.

Компоненты вектора в каждом случае определяются однозначно.

Доказательство. Первое утверждение означает, что для каждого вектора a, коллинеарного ненулевому вектору e (базис на прямой), существует число α такое, что $a = \alpha e$. Таким числом является либо $|a|/|e|$, либо $-|a|/|e|$, смотря по тому, направлены ли a и e одинаково или противоположно.

Второе утверждение означает, что для каждого вектора $\mathbf{a}$, компланарного с двумя неколлинеарными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ (базис на плоскости), найдутся числа α_1 и α_2 такие, что $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2$. Чтобы указать эти числа, поместим начала всех трех векторов в одну точку O и проведем через конец A вектора $\mathbf{a}$ прямую AP, параллельную $\mathbf{e}_2$ (рис. 3). Тогда $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}$, причем $\overrightarrow{OP}$ коллинеарен $\mathbf{e}_1$, а $\overrightarrow{PA}$ коллинеарен $\mathbf{e}_2$. (В частности, любой из $\overrightarrow{OP}$ и

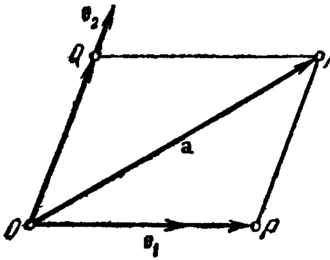

Рис. 3.

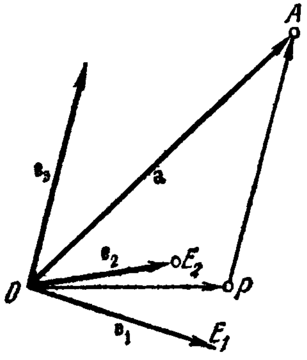

Рис. 4.

$\overrightarrow{PA}$ может оказаться нулевым.) В силу первого утверждения теоремы существуют α_1 и α_2 такие, что $\overrightarrow{OP}=\alpha_1\mathbf{e}_1$ и $\overrightarrow{PA}=\alpha_2\mathbf{e}_2$. Отсюда следует $\overrightarrow{OA}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2$.

Третье утверждение теоремы означает, что для каждого вектора $\mathbf{a}$ и некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ найдутся такие числа α_1, α_2 и α_3, что $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+$ $+\alpha_3\mathbf{e}_3$. Для доказательства поместим начала всех векторов в одну точку O (рис. 4) и проведем через конец A вектора $\mathbf{a}$ прямую AP, параллельную вектору $\mathbf{e}_3$. Тогда $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}$, причем $\overrightarrow{PA}$ коллинеарен $\mathbf{e}_3$, а $\overrightarrow{OP}$ компланарен $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. В силу уже доказанных утверждений найдутся такие числа α_1, α_2 и α_3, что $\overrightarrow{PA}=\alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\overrightarrow{OP}=$ $=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2$. Отсюда прямо вытекает третье утверждение.

Представим себе, что некоторый вектор $\mathbf{a}$ разложен по базису в пространстве двумя способами: $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+$ $+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{a}=\beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3$. Вычитая из первого выражения второе, мы получим $(\alpha_1-\beta_1)\mathbf{e}_1+(\alpha_2-\beta_2)\mathbf{e}_2+$ $+(\alpha_3-\beta_3)\mathbf{e}_3=0$. Если хоть одна из разностей в скобках не равна нулю, мы можем разложить один из векторов базиса по остальным. Например, при $\alpha_1-\beta_1\neq 0$ имеем

$$\mathbf{e}_1=-\frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_1-\beta_1}\mathbf{e}_2-\frac{\alpha_3-\beta_3}{\alpha_1-\beta_1}\mathbf{e}_3.$$

Это противоречит некомпланарности базисных векторов. Полученное противоречие доказывает единственность разложения по базису в пространстве. Аналогично доказывается единственность разложения и в других случаях. Теорема полностью доказана.

Возвращаясь к доказательству последней части теоремы, мы можем заметить, что оно одновременно является доказательством следующего предложения.

Предложение 2. *Равные векторы имеют одинаковые компоненты.*

В аналитической геометрии геометрические рассуждения о векторах сводятся к вычислениям, в которых участвуют компоненты этих векторов. Следующие два предложения показывают, как производятся известные нам операции над векторами, если заданы их компоненты.

Предложение 3. *При умножении вектора на число все его компоненты умножаются на это число.*

Действительно, если $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3$, то

$$\lambda\mathbf{a}=\lambda(\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3)=(\lambda\alpha_1)\mathbf{e}_1+(\lambda\alpha_2)\mathbf{e}_2+(\lambda\alpha_3)\mathbf{e}_3.$$

Предложение 4. *При сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.*

Действительно, если $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3$, то

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3)+(\beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3)=$$
$$=(\alpha_1+\beta_1)\mathbf{e}_1+(\alpha_2+\beta_2)\mathbf{e}_2+(\alpha_3+\beta_3)\mathbf{e}_3.$$

5. Линейная зависимость векторов. Линейная комбинация нескольких векторов называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю. Разумеется, тривиальная линейная комбинация любых векторов равна нулевому вектору. Линейная комбинация *не тривиальна*, если хоть один из ее коэффициентов отличен от нуля.

Определение. Векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю; иными словами, если существуют такие коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $\alpha_1\mathbf{a}_1+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k=0$ и $\alpha_1^2+\ldots+\alpha_k^2\neq 0$.

В противном случае, т. е. когда только тривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ равна нулю, эти векторы называются *линейно независимыми.* Если векторы линейно независимы, то из равенства $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots$ $\ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k = 0$ следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Отметим следующие свойства понятия линейной зависимости.

Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ есть нулевой, то эти векторы линейно зависимы. Действительно, рассмотрим их линейную комбинацию, у которой при нулевом векторе коэффициент 1, а при остальных—нули. Эта линейная комбинация нетривиальна и равна нулю.

Если к линейно зависимой системе векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ добавить один или несколько векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$, то полученная система $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$ также линейно зависима. Действительно, к имеющейся равной нулю нетривиальной линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ можно добавить векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$ с коэффициентами, равными нулю.

Предложение 5. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из них раскладывается в линейную комбинацию остальных.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы, т. е. существуют такие коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k = 0$ и хоть один из коэффициентов, например α_1, отличен от нуля. В этом случае $\mathbf{a}_1$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Действительно, мы можем написать

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad \mathbf{a}_2 \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\mathbf{a}_k.$$

Обратно, пусть один из векторов, например $\mathbf{a}_1$, разложен в линейную комбинацию остальных векторов:

$$\mathbf{a}_1 = \beta_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{a}_k.$$

Отсюда непосредственно видно, что линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ с коэффициентами $-1, \beta_2, \ldots$ $\ldots, \beta_k$ равна нулевому вектору. Так как она нетривиальная, то векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. Предложение доказано.

Понятие линейной зависимости будет играть большую роль в дальнейшем. Сейчас мы можем обойтись без него в силу простого геометрического смысла, который имеет линейная зависимость векторов.

Предложение 6. *Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, и наоборот, два линейно зависимых вектора коллинеарны.*

Действительно, пусть даны два коллинеарных вектора. Либо они оба нулевые, и тогда утверждение очевидно, либо один из них ненулевой, и тогда второй по нему раскладывается. В обоих случаях векторы линейно зависимы.

Обратно, в силу предложения 5 из двух линейно зависимых векторов один линейно выражается через другой, и, следовательно, они коллинеарны.

Предложение 7. *Любые три компланарных вектора линейно зависимы, и наоборот, три линейно зависимых вектора компланарны.*

Доказательство. Пусть даны три компланарных вектора. Рассмотрим какие-нибудь два из них. Если они коллинеарны, то линейно зависимы и сами по себе и вместе с третьим вектором. Если же два вектора не коллинеарны, то третий вектор по ним раскладывается и векторы линейно зависимы в силу предложения 5.

Обратно, из трех линейно зависимых векторов один раскладывается по двум остальным и, следовательно, им компланарен (и даже коллинеарен, если они коллинеарны)

Предложение 8. *Каждые четыре вектора линейно зависимы.*

Действительно, рассмотрим любые три из четырех векторов. Если они компланарны, то линейно зависимы и сами по себе и вместе с четвертым вектором. Если же они не компланарны, то четвертый вектор по ним раскладывается, откуда следует, что все четыре вектора линейно зависимы.

§ 2. Системы координат

1. Декартова система координат. Фиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M. *Радиус-вектором* точки M по отношению к точке O называется вектор $\overrightarrow{OM}$. Если в пространстве, кроме точки O, выбран некоторый базис, то точке M можно сопоставить упорядоченную тройку чисел — компоненты ее радиус-вектора.

Определение. *Декартовой системой координат* в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка носит название *начала координат*; прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *осями координат*. *Первая* — осью *абсцисс*, вторая — осью *ординат*, третья — осью *аппликат*. Плоскости, проходящие через оси координат, называют *координатными плоскостями*.

Определение. Компоненты радиус-вектора точки M по отношению к началу координат называются *координатами* точки M в рассматриваемой системе координат.

Первая координата называется *абсциссой*, вторая — *ординатой*, а третья — *аппликатой*.

Аналогично определяются декартовы координаты на плоскости и на прямой линии. Разумеется, точка на плоскости имеет только две координаты (абсциссу и ординату), а точка на прямой линии — одну.

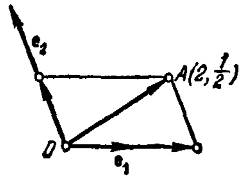

Рис. 5.

Координаты точки обычно пишут в скобках после буквы, обозначающей точку.

Например, запись A (2, 1/2) означает, что точка A имеет координаты 2 и 1/2 в ранее выбранной декартовой системе координат на плоскости (рис. 5).

Легко видеть, что при заданной системе координат координаты точки определены однозначно. С другой стороны, если задана система координат, то для каждой упорядоченной тройки чисел найдется одна-единственная точ-

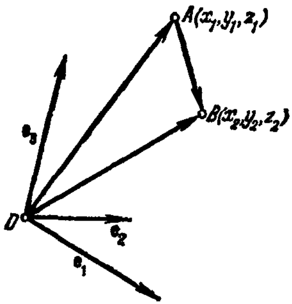

Рис. 6.

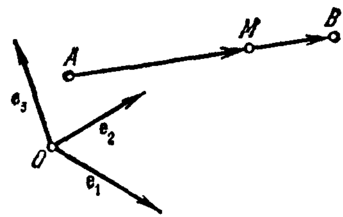

Рис. 7.

ка, имеющая эти числа в качестве координат. Система координат на плоскости определяет такое же соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел.

Рассмотрим две точки A и B, координаты которых относительно некоторой декартовой системы координат O, e_1, e_2, e_3 соответственно равны x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Поставим себе задачу найти компоненты вектора $\overrightarrow{AB}$. Очевидно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 6). Компоненты радиус-векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) по определению координат. Из предложения 4 § 1 следует, что $\overrightarrow{AB}$ имеет компоненты $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$. Этим доказано следующее

Предложение 1. *Чтобы найти компоненты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.*

2. Деление отрезка в заданном отношении. Найдем координаты точки M на отрезке AB, которая делит этот отрезок в отношении λ/μ, т. е. удовлетворяет условию

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{\lambda}{\mu},\qquad \lambda>0,\ \mu>0$$

(рис. 7). Это условие можно переписать в виде

$$\mu\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}. \tag{1}$$

Обозначив через $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ соответственно координаты точек A и B, а через $(x,\ y,\ z)$ координаты точки M, мы разложим обе части равенства по базису, причем компоненты векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ найдем по предложению 1. Тогда

$$\begin{aligned}\mu(x-x_1)&=\lambda(x_2-x),\\ \mu(y-y_1)&=\lambda(y_2-y),\\ \mu(z-z_1)&=\lambda(z_2-z).\end{aligned}$$

Из этих равенств можно найти x, y и z, поскольку $\lambda+\mu\neq 0$. Мы получаем окончательно

$$x=\frac{\mu x_1+\lambda x_2}{\lambda+\mu},\qquad y=\frac{\mu y_1+\lambda y_2}{\lambda+\mu},\qquad z=\frac{\mu z_1+\lambda z_2}{\lambda+\mu}. \tag{2}$$

Эти формулы известны под названием *формул деления отрезка в заданном отношении.*

Если в формулах (2) мы будем считать одно из чисел λ или μ отрицательным, то из равенства (1) видно, что точка $M(x,\ y,\ z)$ будет находиться на той же прямой вне отрезка AB, деля его в отношении $|\lambda/\mu|$. Поэтому формулы (2) служат решением более общей задачи. Именно, из них можно найти координаты точки, делящей отрезок AB в заданном отношении как внутренним, так и внешним образом.

На плоскости задача о делении отрезка решается так же, только базис состоит из двух векторов, и потому из формул (2) остаются только первые две.

3. Декартова прямоугольная система координат. Общие декартовы системы координат используются реже, чем специальный класс таких систем — декартовы прямоугольные системы координат.

Определение. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы попарно ортогональны и по длине равны единице. Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется *декартовой прямоугольной системой координат*.

Нетрудно проверить, что координаты точки относительно декартовой прямоугольной системы координат по абсолютной величине равны расстояниям от этой точки до соответствующих координатных плоскостей. Они имеют знак плюс или минус в зависимости от того, лежит точка по ту же сторону или по другую сторону от координатной плоскости, что и конец базисного вектора, перпендикулярного этой плоскости.

Аналогично находят координаты точки относительно декартовой прямоугольной системы координат на плоскости.

4. Полярная система координат. Декартовы системы координат — не единственный способ определять при помощи чисел положение точки относительно некоторого геометрического образа. Для этой цели используются многие другие типы координатных систем. Здесь мы опишем некоторые из них.

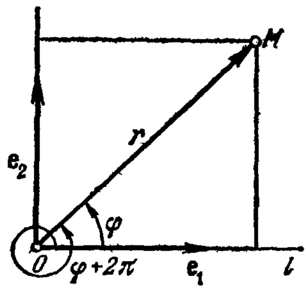

Рис. 8.

На плоскости часто употребляется *полярная система координат*. Она определена, если задана точка O, называемая *полюсом*, и исходящий из полюса луч l, который мы назовем *полярной осью*. Положение точки M фиксируется двумя числами: *радиусом* $r = |\overrightarrow{OM}|$ и углом φ между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. Угол φ называется *полярным углом*. Мы будем измерять его в радианах и отсчитывать от полярной оси против часовой стрелки. У полюса $r = 0$, а φ не определено. У остальных точек $r > 0$ и φ определено с точностью до слагаемого, кратного 2π. Это означает, что, например, пары чисел (r, φ), $(r, \varphi + 2\pi)$ и вообще $(r, \varphi + 2k\pi)$, где k — любое целое число, представляют собой полярные координаты одной и той же точки (рис. 8).

Иногда ограничивают изменение полярного угла какими-нибудь условиями, например: $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или $-\pi <$

$<\varphi\leqslant\pi$. Это устраняет неоднозначность, но зато вводит другие неудобства.

Пусть задана полярная система координат и упорядоченная пара чисел $(r,\ \varphi)$, первое из которых неотрицательно. Мы можем сопоставить этой паре точку, для которой эти числа будут полярными координатами. Именно, если $r=0$, то мы сопоставляем полюс. Если же $r>0$, то паре $(r,\ \varphi)$ ставим в соответствие точку, радиус-вектор которой имеет длину r и составляет с полярной осью угол φ. При этом парам чисел $(r,\ \varphi)$ и $(r_1,\ \varphi_1)$ сопоставляется одна и та же точка, если $r=r_1$, а $\varphi-\varphi_1=2\pi k$, где k — целое число.

Выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, поместив ее начало в полюс O и приняв за векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ векторы длины 1, направленные соответственно вдоль l и под углом $\pi/2$ к l (угол отсчитывается против часовой стрелки). Как легко видеть из рис. 8, декартовы координаты точки выразятся через ее полярные координаты так:

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi. \tag{3}$$

5. Цилиндрические и сферические координаты. В пространстве обобщением полярных систем координат являются цилиндрические и сферические системы координат. И для тех, и для других фигура,

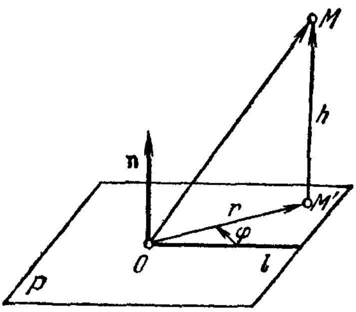

Рис. 9.

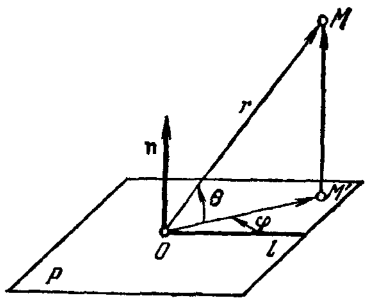

Рис. 10.

относительно которой определяется положение точки, состоит из точки O, луча l, исходящего из O, и вектора $\mathbf{n}$, равного по длине единице и перпендикулярного к l. Через точку O мы можем провести плоскость P, перпендикулярную вектору $\mathbf{n}$.

Пусть дана некоторая точка M. Опустим из нее перпендикуляр MM' на плоскость P.

Цилиндрические координаты точки M — это три числа $(r,\ \varphi,\ h)$. Числа $r,\ \varphi$ — полярные координаты точки M' по отношению к полюсу O и полярной оси l, а h—компонента вектора $\overrightarrow{M'M}$ по вектору $\mathbf{n}$. Она определена, так как эти векторы коллинеарны (рис. 9).

Сферические координаты точки—три числа (r, φ, θ). Они определяются так: $r=|\overrightarrow{OM}|$, как и для цилиндрических координат φ—угол вектора $\overrightarrow{OM'}$ с лучом l, а θ—угол вектора $\overrightarrow{OM}$ с плоскостью P (рис. 10).

§ 3. Скалярное и векторное произведения

1. Скалярное произведение. Под углом между векторами мы понимаем угол между векторами, равными данным и имеющими общее начало. В некоторых случаях мы будем указывать, от какого вектора и в каком направлении угол отсчитывается. Если такого указания не сделано, углом между векторами считается тот из углов, который не превосходит π. Если угол прямой, то векторы называются *ортогональными*.

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хоть один из векторов нулевой, то угол не определен, и скалярное произведение по определению считают равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Таким образом, мы можем записать

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi,$$

где φ—угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Очевидны следующие свойства операции скалярного умножения:

1. *Скалярное умножение коммутативно, т. е. для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *справедливо равенство* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

2. $(\mathbf{a}, \mathbf{a})=|\mathbf{a}|^2$ *для любого вектора* $\mathbf{a}$.

3. *Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители ортогональны или хотя бы один из них равен нулю.*

4. *Векторы ортонормированного базиса удовлетворяют соотношениям*

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)=(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)=(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)=1,$$
$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)=(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)=(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)=0.$$

Предложение 1. *Если базисные векторы* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *ортогональны, то компоненты любого вектора* $\mathbf{a}$ *находятся по формулам*

$$\alpha_1=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1)}{|\mathbf{e}_1|^2}, \quad \alpha_2=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{e}_2|^2}, \quad \alpha_3=\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{e}_3|^2}.$$

В частности, если базис ортонормированный, то

$$\alpha_1=(\mathbf{a},\ \mathbf{e}_1),\quad \alpha_2=(\mathbf{a},\ \mathbf{e}_2),\quad \alpha_3=(\mathbf{a},\ \mathbf{e}_3). \qquad (1)$$

Действительно, пусть $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, причем каждое слагаемое коллинеарно соответствующему базисному вектору. Мы знаем из доказательства теоремы 1 § 1, что $\alpha_1=\pm|\mathbf{a}_1|/|\mathbf{e}_1|$, где выбирается знак плюс или минус в зависимости от того, одинаково или противоположно направлены векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{e}_1$. Но, как видно из рис. 11, $\pm|\mathbf{a}_1|=|\mathbf{a}|\cos\varphi_1$, где φ_1—угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}_1$. Итак, $\alpha_1=|\mathbf{a}|\cos\varphi_1/|\mathbf{e}_1|=(\mathbf{a},\ \mathbf{e}_1)/|\mathbf{e}_1|^2$. Аналогично вычисляются и остальные компоненты.

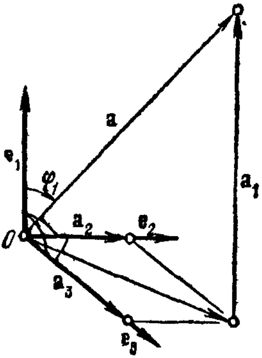

Рис. 11.

Из предложения 1 следует, что компоненты вектора в ортонормированном базисе равны произведениям его длины на косинусы углов, которые данный вектор составляет с соответствующими базисными векторами.

Следующее свойство носит название линейности скалярного произведения.

Предложение 2. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *и любых чисел* α *и* β *выполнено равенство* $(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b},\ \mathbf{c})=\alpha(\mathbf{a},\ \mathbf{c})+\beta(\mathbf{b},\ \mathbf{c})$. *В частности,* $(\alpha\mathbf{a},\ \mathbf{c})=\alpha(\mathbf{a},\ \mathbf{c})$ *и* $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{c})=(\mathbf{a},\ \mathbf{c})+(\mathbf{b},\ \mathbf{c})$.

Доказательство. Если $\mathbf{c}=0$, то утверждение очевидно. Допустим, что $\mathbf{c}\neq 0$. Примем $\mathbf{c}$ за первый вектор базиса и выберем остальные ортогонально к нему и между собой. Выражение $(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b},\ \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2$—первая компонента вектора $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$. Точно так же $(\mathbf{a},\ \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2$ и $(\mathbf{b},\ \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2$ — первые компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. В силу предложений 4 и 3 из § 1 мы имеем

$$(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b},\ \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2=\alpha(\mathbf{a},\ \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2+\beta(\mathbf{b},\ \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2.$$

Отсюда прямо вытекает требуемое равенство.

Легко доказать, что такая же формула справедлива для линейной комбинации любого числа векторов.

Используя коммутативность скалярного умножения, из предложения 2 мы получаем тождество

$$(\mathbf{a},\ \beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})=\beta(\mathbf{a},\ \mathbf{b})+\gamma(\mathbf{a},\ \mathbf{c}).$$

Пусть дан ортонормированный базис. Исследуем, как выражается скалярное произведение векторов **a** и **b** через их компоненты (α_1, α_2, α_3) и (β_1, β_2, β_3). Используя линейность скалярного произведения по первому сомножителю, напишем

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3,\ \mathbf{b}) = \\ = \alpha_1(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{b}) + \alpha_2(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}) + \alpha_3(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{b}).$$

Но, согласно предложению 1, скалярные произведения вектора **b** на базисные векторы равны его компонентам β_1, β_2 и β_3. Так мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Если базис ортонормированный, то скалярное произведение векторов выражается через их компоненты по формуле*

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \tag{2}$$

Отметим, что требование ортонормированности базиса в этой теореме очень существенно — в произвольном базисе выражение скалярного произведения через компоненты гораздо сложнее. Поэтому для задач, связанных со скалярным произведением, пользуются ортонормированными базисами. Если почему-либо все же надо вычислить скалярное призведение в неортонормированном базисе, следует скалярно перемножить разложения сомножителей по базису и, раскрыв скобки, подставить в полученное выражение известные скалярные произведения базисных векторов.

Теорема 1 позволяет написать выражение длины вектора через его компоненты в ортонормированном базисе:

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \tag{3}$$

а также выражение угла между векторами через их компоненты в ортонормированном базисе:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a},\ \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)}}. \tag{4}$$

Используя формулу (3), мы можем вычислить расстояние между точками, если заданы их координаты в *декартовой прямоугольной* системе координат. В самом деле, пусть точки A и B имеют соответственно координаты $(x,\ y,\ z)$ и $(x_1,\ y_1,\ z_1)$. Тогда расстояние между ними равно

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}. \tag{5}$$

2. Ориентация тройки векторов. Пусть даны два ортонормированных базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Можно ли совместить эти базисы при помощи движения? Разумеется, можно перенести и повернуть вектор $\mathbf{e}'_1$ так, чтобы он совпал с вектором $\mathbf{e}_1$. При этом плоскость векторов $\mathbf{e}'_2$ и $\mathbf{e}'_3$, перпендикулярная $\mathbf{e}'_1$, совместится с плоскостью векторов $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, перпендикулярной $\mathbf{e}_1$. Далее можно поворотом в этой плоскости добиться совмещения векторов $\mathbf{e}'_2$ и $\mathbf{e}_2$. После этого векторы $\mathbf{e}'_3$ и $\mathbf{e}_3$ окажутся коллинеарными. Они либо совпадут—тогда базисы совмещены,—либо окажутся противоположно направленными. В последнем случае базисы совместить нельзя.

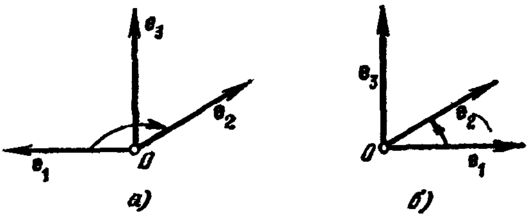

Рис. 12. *а*) Левый базис; *б*) правый базис.

Из этого рассуждения видно, что если два базиса не налагаются, то каждый третий базис налагается либо на первый, либо на второй. Таким образом, все ортонормированные базисы распадаются на два класса. Базисы, принадлежащие одному и тому же классу, налагаются, а базисы из разных классов не налагаются. Базис называется *правым* или *левым* в зависимости от того, вправо или влево направлен вектор $\mathbf{e}_1$, когда $\mathbf{e}_2$ направлен от нас, а вектор $\mathbf{e}_3$ направлен вверх (рис. 12). Один класс состоит из всех правых, а другой—из всех левых базисов. Это же определение распространяется и на любые базисы следующим образом.

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правоориентированной* или просто *правой*, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. В противоположном случае тройка называется *левоориентированной* или *левой*. (Начала векторов тройки предполагаются совмещенными.)

3. Векторное произведение. Определение. Пусть даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Построим по ним вектор $\mathbf{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\mathbf{c}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$[1]), где φ — угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

2) вектор $\mathbf{c}$ ортогонален векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

3) если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют правую тройку векторов.

Так построенный вектор $\mathbf{c}$ назовем *векторным произведением* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначим $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Приведенные условия определяют векторное произведение с точностью до равенства, если сомножители — ненулевые векторы. Если хоть один из сомножителей — нуль, то векторное произведение по определению есть нулевой вектор.

Из определения вытекает, что модуль векторного произведения неколлинеарных векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на сомножителях (если сомножители имеют общее начало). Подробнее это обсуждается в конце параграфа (п. 12).

Векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны[2]).

Пример 1. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — правый ортонормированный базис. Тогда $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]=\mathbf{e}_3$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]=\mathbf{e}_1$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]=\mathbf{e}_2$. Если $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ — левый ортонормированный базис, то $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]=-\mathbf{f}_3$, $[\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3]=-\mathbf{f}_1$, $[\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1]=-\mathbf{f}_2$.

Предложение 3. *Векторное умножение антикоммутативно, т. е. всегда* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=-[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$.

Действительно, из определения следует, что модуль векторного произведения не зависит от порядка сомножителей. Точно так же вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ коллинеарен вектору $[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$. Однако, переставляя сомножители, мы должны изменить направление произведения, чтобы было выполнено условие 3) определения. Действительно, если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — правая тройка, то $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — левая, а $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $-[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — снова правая тройка.

Ниже мы вернемся к векторному произведению, но сначала будет удобно ввести еще одну операцию.

4. Смешанное произведение. Определение. Число $(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$ называется *смешанным произведением* векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Предложение 4. *Смешанное произведение некомпланарных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на сомножителях. Оно по-*

---

[1]) $\sin\varphi \geqslant 0$, так как $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

[2]) Мы договорились считать нулевой вектор коллинеарным любому вектору.

ложительно, если тройка **a**, **b**, **c** *правая, и отрицательно, если она левая.*

Действительно, объем параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **c**, равен (рис. 13) произведению площади основания $|[\mathbf{b}, \mathbf{c}]|$ на высоту $|\mathbf{a}||\cos\theta|$. Здесь θ — угол между векторами **a** и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Поэтому мы можем записать

$$V = |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]||\mathbf{a}||\cos\theta| = |(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])| = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

Таким образом, первое утверждение доказано. Знак смешанного произведения совпадает со знаком $\cos\theta$, и потому смешанное произведение положительно, когда **a** направлен в ту же сторону от плоскости векторов **b** и **c**, что и вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, т. е. когда тройка **a**, **b**, **c** правая. Аналогично доказывается, что смешанное произведение левой тройки векторов отрицательно.

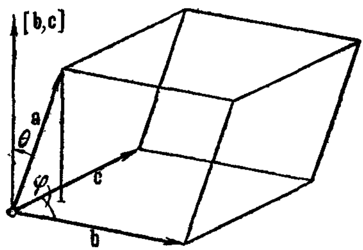

Рис. 13.

Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис, то $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$ или $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -1$, смотря по тому, правый это базис или левый.

Предложение 5. *Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители компланарны.*

Действительно, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}||[\mathbf{b}, \mathbf{c}]|\cos\theta$, где θ — угол между векторами **a** и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Равенство $|\mathbf{a}||[\mathbf{b}, \mathbf{c}]|\cos\theta = 0$ возможно только тогда, когда выполнено хоть одно из условий:

а) $|\mathbf{a}| = 0$. Очевидно,что тогда векторы компланарны.

б) $|[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| = 0$. Тогда **b** и **c** коллинеарны и, следовательно **a**, **b** и **c** компланарны.

в) $\cos\theta = 0$. Тогда вектор **a** ортогонален $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, т. е. компланарен **b** и **c**.

Обратное утверждение доказывается аналогично: если **a**, **b** и **c** компланарны и не имеют места случаи а) и б), то имеет место случай в).

При перестановке сомножителей в смешанном произведении, самое большее, может измениться только ориентация тройки этих векторов. Поэтому, согласно предложениям 4 и 5, может измениться только знак смешанного произведения. Для любых векторов **a**, **b** и **c** мы получаем, сравнивая ориентации троек векторов,

$$(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})=(\mathbf{c},\ \mathbf{a},\ \mathbf{b})=(\mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{a})=$$
$$=-(\mathbf{b},\ \mathbf{a},\ \mathbf{c})=-(\mathbf{c},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a})=-(\mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{b}). \quad (6)$$

Применяя предложение 2 к скалярному произведению $(\lambda\mathbf{a}_1+\mu\mathbf{a}_2,\ [\mathbf{b},\ \mathbf{c}])$, мы получим тождество

$$(\lambda\mathbf{a}_1+\mu\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})=\lambda(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})+\mu(\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}). \quad (7)$$

Из равенств (6) следуют аналогичные тождества для остальных сомножителей. Например, для второго сомножителя

$$(\mathbf{a},\ \lambda\mathbf{b}_1+\mu\mathbf{b}_2,\ \mathbf{c})=\lambda(\mathbf{a},\ \mathbf{b}_1,\ \mathbf{c})+\mu(\mathbf{a},\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{c}).$$

Действительно, мы можем переставить интересующий нас сомножитель на первое место, раскрыть скобки, а затем выполнить обратную перестановку.

Эти тождества выражают свойство линейности смешанного произведения.

Сейчас мы докажем линейность векторного произведения, т. е. следующее

Предложение 6. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *и любых чисел* λ *и* μ *имеет место равенство*

$$[\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\ \mathbf{c}]=\lambda[\mathbf{a},\ \mathbf{c}]+\mu[\mathbf{b},\ \mathbf{c}].$$

Для доказательства воспользуемся линейностью смешанного произведения по второму сомножителю:

$$(\mathbf{d},\ [\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\ \mathbf{c}])=\lambda(\mathbf{d},\ [\mathbf{a},\ \mathbf{c}])+\mu(\mathbf{d},\ [\mathbf{b},\ \mathbf{c}]).$$

Это равенство имеет место при всех $\mathbf{d}$. Мы можем выбрать ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и подставить вместо $\mathbf{d}$ последовательно каждый вектор этого базиса. В силу предложения 1 мы получим равенство всех компонент векторов $[\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b},\ \mathbf{c}]$ и $\lambda[\mathbf{a},\ \mathbf{c}]+\mu[\mathbf{b},\ \mathbf{c}]$, а отсюда и равенство векторов, которое нам было нужно доказать.

Аналогично можно доказать линейность векторного произведения по второму сомножителю.

5. **Выражение векторного и смешанного произведения через компоненты сомножителей.** Если заданы разложения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по векторам базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, мы можем написать, согласно предложению 6,

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]=[\{\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3\},\ \{\beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3\}]=$$
$$=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)[\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2]+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)[\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3]+$$
$$+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)[\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1]. \quad (8)$$

Как мы видели в примере 1, в ортонормированном базисе

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \pm\mathbf{e}_3, \quad [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \pm\mathbf{e}_1, \quad [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \pm\mathbf{e}_2,$$

где берется знак плюс, если базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ правый, и знак минус, если базис левый. Чтобы избежать постоянных замечаний об ориентации базиса, мы будем считать, что *базис выбирается всегда правый*. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 2. *В ортонормированном базисе векторное произведение выражается через компоненты сомножителей формулой*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,\mathbf{e}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\,\mathbf{e}_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,\mathbf{e}_3.$$

(*Если базис левый, то перед одной из частей этого равенства следует поставить знак минус.*)

Теперь может быть доказана

Теорема 3. *Смешанное произведение векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *выражается через их компоненты* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *и* $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *в произвольном базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *по формуле*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2)\,(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

Для доказательства напишем произведение $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ по формуле (8):

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)\,[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + (\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3)\,[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\,[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2].$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на вектор $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, имеем

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)\,(\mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]) + \alpha_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3)\,(\mathbf{e}_2, [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\,(\mathbf{e}_3, [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]).$$

(Слагаемые, содержащие смешанные произведения с равными сомножителями, мы не выписываем, так как они равны нулю.) Отсюда, учитывая равенства (6) и приводя подобные члены, мы получаем нужный нам результат.

6. Детерминанты второго и третьего порядка. Найденные нами формулы для векторного и смешанного произведения достаточно громоздки. Для их более наглядной записи употребляются детерминанты второго и третьего порядка[1]).

---

[1]) Детерминанты называют также определителями.

Рассмотрим четыре числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Из них можно составить таблицу

$$\left\|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2\end{matrix}\right\|.$$

Таблицы такого вида называются *матрицами второго порядка*. Число $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ называется *детерминантом* данной матрицы второго порядка или просто детерминантом второго порядка. Оно обозначается

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}.$$

Теперь выражение для векторного произведения в ортонормированном базисе перепишется так:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\mathbf{e}_1+\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1\end{vmatrix}\mathbf{e}_2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\mathbf{e}_3.$$

Из компонент трех векторов можно составить таблицу — *матрицу третьего порядка*

$$\left\|\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{matrix}\right\|.$$

Число

$$\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_3 & \beta_1 \\ \gamma_3 & \gamma_1\end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}$$

или, что то же самое,

$$\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}$$

называется *детерминантом* этой матрицы (или детерминантом третьего порядка) и обозначается

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}.$$

По теореме 3 в новых обозначениях

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \qquad (9)$$

В частности, в ортонормированном базисе

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}. \qquad (10)$$

При помощи теоремы 2 и определения детерминанта третьего порядка можно получить следующую запись векторного произведения через компоненты сомножителей в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Детерминанты тесно связаны с системами линейных уравнений, решения которых удобно записывать с их помощью. Этому будет посвящена значительная часть гл. V, а сейчас мы дадим только геометрическую иллюстрацию.

Пусть дана система из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= f_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= f_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= f_3. \end{aligned}\right\}$$

Фиксируем в пространстве некоторый базис и рассмотрим векторы $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ и $\mathbf{f}(f_1, f_2, f_3)$. Тогда систему можно рассматривать как координатную запись векторного равенства

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{f}. \tag{12}$$

Значит, решение системы x, y, z — коэффициенты разложения $\mathbf{f}$ по векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Мы можем быть уверены, что система имеет единственное решение, если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не компланарны, т. е. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$. Предположим, что это условие выполнено, и найдем решение. Для этого умножим обе части равенства (12) скалярно на векторное произведение $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Мы получим $x(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{f}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, и, следовательно, x равен отношению детерминантов

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогично находятся и остальные неизвестные.

Остановимся на следующем свойстве детерминантов. Из равенств (6) вытекает, что детерминант меняет знак при перестановке двух строк матрицы. Формула (7) означает, что

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_1' & \lambda\alpha_2 + \mu\alpha_2' & \lambda\alpha_3 + \mu\alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

7. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Начнем со следующего полезного предложения.

Предложение 7. *Каков бы ни был базис* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, *попарные векторные произведения базисных векторов линейно независимы.*

Докажем это от противного. Рассмотрим равную нулю линейную комбинацию интересующих нас векторов

$$\lambda[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]+\mu[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]+\nu[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]=0$$

и допустим, что какой-нибудь коэффициент, пусть для определенности λ, отличен от нуля. Умножив линейную комбинацию на $\mathbf{e}_1$, мы получим $\lambda(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)=0$, т. е. $\lambda\ \ 0$. Полученное противоречие доказывает наше предложение.

Следующие предложения дают необходимые и достаточные условия коллинеарности и компланарности векторов.

Предложение 8. *Обращение в нуль детерминанта матрицы из компонент трех векторов необходимо и достаточно для компланарности этих векторов.*

Предложение 8 сразу следует из предложения 5 и формулы (9), поскольку $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\neq 0$.

Предложение 9. *Пусть* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *и* $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — *компоненты векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *в некотором базисе. Эти векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

Достаточность условия очевидна: из равенства (13) по формуле (8) следует обращение в нуль $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, что равносильно коллинеарности векторов. Заметим, что мы пользуемся формулой (8), которая справедлива в любом базисе, и потому можем не требовать ортонормированности базиса. Наоборот, из обращения в нуль $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и формулы (8) мы можем вывести (13), так как в силу предложения 7 векторы $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$ и $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ линейно независимы.

В планиметрии признак коллинеарности двух векторов дается следующим предложением.

Предложение 10. *Обращение в нуль детерминанта матрицы из компонент двух векторов на плоскости необходимо и достаточно для коллинеарности этих векторов.*

Для доказательства мы будем считать, что рассматриваемая плоскость помещена в пространство и базис в этой плоскости дополнен третьим вектором до базиса в пространстве. Тогда вектор $\mathbf{a}$ с координатами (α_1, α_2) на плоскости имеет координаты (α_1, α_2, 0) относительно базиса в пространстве. Теперь, применяя предложение 9 к векторам $\mathbf{a}(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{b}(\beta_1, \beta_2)$, имеем единственное условие

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

для их коллинеарности (остальные два детерминанта равны нулю в силу $\alpha_3 = \beta_3 = 0$).

8. **Площадь параллелограмма.** Если в пространстве заданы два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеющих общее начало, то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, может быть найдена через их компоненты в ортонормированном базисе по формуле

$$S = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \sqrt{(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2}. \quad (14)$$

Площадь параллелограмма в планиметрии вычисляется аналогично. Хотя векторное произведение и не определено, мы можем, как и при доказательстве предложения 10, предполагать, что изучаемая плоскость помещена в пространство и третий базисный вектор выбран перпендикулярно плоскости и имеет длину 1. Тогда векторное произведение векторов на плоскости имеет одну-единственную компоненту, отличную от нуля, а именно третью, и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, выражается через их компоненты в ортонормированном базисе на плоскости формулой

$$S = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|, \quad (15)$$

т. е. равна абсолютной величине детерминанта

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Когда мы составляем выражение $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, то существенно, что вектор $\mathbf{a}$ считается первым, а $\mathbf{b}$ — вторым. Если бы вторым был $\mathbf{a}$, а первым $\mathbf{b}$, то компонента векторного произведения была бы $\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1$. Площадь параллелограмма не зависит от порядка векторов, так как она равна модулю этого выражения.

Введем теперь понятие ориентации параллелограмма на плоскости. Будем предполагать, что параллелограмм построен на двух векторах, т. е. две его смежные стороны являются векторами с общим началом.

Определение. Параллелограмм называется *ориентированным*, если пара векторов, на которой он построен, упорядочена. Ориентация называется *положительной*, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит против часовой стрелки, и *отрицательной* в противоположном случае.

Мы будем предполагать, что параллелограмм, построенный на базисных векторах e_1 и e_2 («базисный параллелограмм»), ориентирован положительно. Если мы помещаем плоскость в пространство, то $[e_1, e_2]=e_3$, так как базис в пространстве всегда правый. Неравенство $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1>0$ означает, что вектор $[a, b]$ направлен так же, как $[e_1, e_2]$, и, следовательно, параллелограмм, построенный на векторах a и b, ориентирован также положительно.

Принято считать площадь ориентированного параллелограмма числом со знаком: положительным для положительно ориентированных параллелограммов и отрицательным для отрицательно ориентированных.

Как показывают предыдущие рассуждения, если базисный параллелограмм ориентирован положительно, то число $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ равно площади ориентированного параллелограмма, построенного на векторах $a(\alpha_1, \alpha_2)$ и $b(\beta_1, \beta_2)$. Можно сказать также, что при $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1>0$ ориентация параллелограмма, построенного на векторах a и b, совпадает с ориентацией базисного параллелограмма, а при $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1<0$ противоположна ей.

9. Объем ориентированного параллелепипеда. Мы будем предполагать, что параллелепипед построен на трех векторах, т. е. три его ребра являются векторами, имеющими общее начало.

Определение. Параллелепипед называется *ориентированным*, если тройка векторов, на которой он построен, упорядочена. Ориентация называется *положительной*, если эта тройка правая, и *отрицательной* в противном случае.

Принято считать объем ориентированного параллелепипеда положительным, если его ориентация положительна, и отрицательным, если ориентация отрицательна. Предложение 4 можно теперь сформулировать следующим образом.

Предложение 11. *Смешанное произведение трех некомпланарных векторов равно объему ориентированного параллелепипеда, построенного на этих векторах.*

10. Двойное векторное произведение. Выражение $[a, [b, c]]$ называется *двойным векторным произведением* векторов a, b, c. Докажем, что

$$[a, [b, c]]=(a, c)\,b-(a, b)\,c. \tag{16}$$

С этой целью выберем ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 так, чтобы вектор e_1 совпадал по направлению с a (т. е. $a=\alpha e_1$, где $\alpha=|a|$). Обозначим через $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ и $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ координаты векторов b, c и $[b, c]$ соответственно. Тогда по формуле (1) имеем

$$(a, c)\,b=\alpha\gamma_1(\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3)$$

и

$$(a, b)\,c=\alpha\beta_1(\gamma_1e_1+\gamma_2e_2+\gamma_3e_3).$$

Это позволяет преобразовать правую часть формулы (16) к виду

$$\alpha(\gamma_1\beta_2-\beta_1\gamma_2)\,e_2+\alpha(\gamma_1\beta_3-\beta_1\gamma_3)\,e_3=-\alpha\Delta_3e_2+\alpha\Delta_2e_3.$$

С другой стороны, из формулы (11) непосредственно видно, что

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = -\alpha\Delta_3\mathbf{e}_2 + \alpha\Delta_2\mathbf{e}_3.$$

Это заканчивает доказательство.

11. Взаимный базис. Дадим следующее

Определение. Базис, составленный из векторов

$$\mathbf{e}_1^* = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}_2^* = \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}_3^* = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)},$$

называется *взаимным* для базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Из предложения 7 вытекает, что $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ не компланарны и действительно образуют базис.

Нетрудно проверить, что каждый ортонормированный базис совпадает со своим взаимным.

Предложение 12. *Если* $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ — *базис, взаимный базису* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, *то компоненты произвольного вектора* $\mathbf{a}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *находятся по формулам*

$$\alpha_1 = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_1^*), \quad \alpha_2 = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_2^*), \quad \alpha_3 = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_3^*).$$

Действительно, умножив равенство $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ скалярно на $\mathbf{e}_1^*$, мы получаем $(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1^*) = \alpha_1 \dfrac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$. Аналогично доказываются и остальные формулы.

Предложение 13. *Если* $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ — *базис, взаимный с* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, *то базис* $\mathbf{e}_1^{**}, \mathbf{e}_2^{**}, \mathbf{e}_3^{**}$, *взаимный с* $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$, *совпадает с* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

Доказательство начнем с того, что разложим вектор $\mathbf{e}_1^*$ по базису $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$, пользуясь формулами из предложения 12. Поскольку $\mathbf{e}_1^*$ имеет компоненты (1, 0, 0), мы видим, что

$$(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_1^{**}) = 1, \quad (\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^{**}) = (\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_3^{**}) = 0$$

Аналогично, раскладывая $\mathbf{e}_2^*$ и $\mathbf{e}_3^*$, получаем еще шесть равенств:

$$(\mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_2^{**}) = 1, \quad (\mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_1^{**}) = (\mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^{**}) = 0,$$
$$(\mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_3^{**}) = 1, \quad (\mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_1^{**}) = (\mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_2^{**}) = 0.$$

Но эти же равенства, в силу того же предложения 12, означают, что компоненты векторов $\mathbf{e}_1^{**}$, $\mathbf{e}_2^{**}$ и $\mathbf{e}_3^{**}$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны соответственно (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1), т. е. $\mathbf{e}_1^{**} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2^{**} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3^{**} = \mathbf{e}_3$. Предложение доказано.

12. О векторных величинах. В приложениях математики часто рассматриваются величины, изображаемые векторами: силы, скорости, моменты сил и т. д. Векторам, изображающим такие величины, приписывается размерность. Не вдаваясь в существо дела, мы ограничимся изложением формальных правил действий с размерностями.

С формальной точки зрения размерность — это одночлен, составленный из какого-то набора символов. Такие одночлены перемножаются и делятся по обычным правилам действий над одночленами. Имеют место следующие правила действий с размерностями:

1. Складывать векторные величины можно только в том случае, когда их размерности совпадают. При этом размерность суммы та же, что и у слагаемых.

2. При умножении векторной величины на скалярную их размерности перемножаются.

3. Модуль векторной величины имеет ту же размерность, что и сама величина.

4. Скалярное и векторное произведение имеют размерность, равную произведению размерностей сомножителей. Это легко следует из их определений и предыдущего правила.

Для того чтобы изобразить векторную величину на чертеже, мы должны условиться о масштабе: сколькими единицами длины (например, см) мы будем изображать одну единицу данной размерности (например, км, м/сек, Н).

Если в векторном произведении сомножители имеют размерность длины, то произведение имеет размерность площади. Масштаб для изображения единиц площади выбирается так, чтобы одна единица площади изображалась одной линейной единицей. При этом длина векторного произведения будет численно равна площади параллелограмма, построенного на сомножителях.

Поскольку единица длины у нас выбрана раз навсегда и не меняется, указанное соглашение ни к каким противоречиям привести не может. Однако оно не так безобидно, как может показаться. Именно, два математика, пользующиеся этим соглашением, но разными единицами длины (например, француз, пользующийся сантиметрами, и англичанин — дюймами), для одних и тех же векторов нарисуют несовпадающие векторные произведения.

§ 4. Замена базиса и системы координат

1. Изменение базиса. До сих пор мы предполагали, что рассматривается один базис. Однако выбор базиса ничем не ограничен, и принципиальное значение имеет задача о нахождении компонент вектора в одном базисе по его компонентам в другом базисе. При этом положение нового базиса относительно старого должно быть задано, а именно должны быть заданы компоненты новых базисных векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ в старом базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Пусть[1])

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= a_1^1\mathbf{e}_1 + a_1^2\mathbf{e}_2 + a_1^3\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}'_2 &= a_2^1\mathbf{e}_1 + a_2^2\mathbf{e}_2 + a_2^3\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}'_3 &= a_3^1\mathbf{e}_1 + a_3^2\mathbf{e}_2 + a_3^3\mathbf{e}_3.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Произвольный вектор $\mathbf{a}$ разложим по базису $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$:

$$\mathbf{a} = \alpha'_1\mathbf{e}'_1 + \alpha'_2\mathbf{e}'_2 + \alpha'_3\mathbf{e}'_3.$$

Обозначим компоненты вектора $\mathbf{a}$ в старом базисе через α_1, α_2 и α_3. Раскладывая каждый член предыдущего равенства по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, в силу предложений 4 и 3 § 1 мы имеем

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= a_1^1\alpha'_1 + a_2^1\alpha'_2 + a_3^1\alpha'_3,\\ \alpha_2 &= a_1^2\alpha'_1 + a_2^2\alpha'_2 + a_3^2\alpha'_3,\\ \alpha_3 &= a_1^3\alpha'_1 + a_2^3\alpha'_2 + a_3^3\alpha'_3.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Соотношения (2) и являются решением нашей задачи. Если нас заинтересует выражение новых компонент через старые, то нам придется решить систему уравнений (2) относительно неизвестных α'_1, α'_2, α'_3.

Точно тем же способом мы можем получить формулы, связывающие компоненты вектора в разных базисах на плоскости. Эти формулы таковы:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= a_1^1\alpha'_1 + a_2^1\alpha'_2,\\ \alpha_2 &= a_1^2\alpha'_1 + a_2^2\alpha'_2.\end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Коэффициенты при α'_1, α'_2 и α'_3 в формулах (2) можно записать в следующую матрицу третьего порядка:

$$\left\|\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{matrix}\right\|. \tag{3}$$

Эта матрица называется *матрицей перехода* от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базизу $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. В ее столбцах стоят компоненты новых базисных векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ и $\mathbf{e}'_3$ по старому базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

---

[1]) Здесь для удобства один из индексов мы располагаем сверху. Это не показатель степени. Например, a_3^1 читается «a один-три».

2. Изменение системы координат. Рассмотрим теперь две декартовы системы координат: старую O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и новую O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Пусть M — произвольная точка, координаты ее в этих системах обозначены соответственно (x, y, z) и (x', y', z'). Поставим себе задачу выразить x, y, z через x', y', z', считая известным положение новой системы координат относительно старой, т. е. считая известными старые координаты a_0^1, a_0^2, a_0^3 нового начала координат O' и компоненты новых базисных векторов в старом базисе, составляющие матрицу перехода (3).

Радиус-векторы точки M относительно точек O и O' связаны равенством $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, которое мы можем записать в виде

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2 + z'\mathbf{e}'_3, \tag{4}$$

так как x', y', z' — компоненты $\overrightarrow{O'M}$ в базисе $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Разложим каждый член равенства (4) по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, имея в виду, что компоненты $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OO'}$ равны координатам точек M и O', которые мы обозначили соответственно через x, y, z и a_0^1, a_0^2, a_0^3. Мы получим три числовых равенства, равносильных равенству (4):

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1^1x' + a_2^1y' + a_3^1z' + a_0^1, \\ y &= a_1^2x' + a_2^2y' + a_3^2z' + a_0^2, \\ z &= a_1^3x' + a_2^3y' + a_3^3z' + a_0^3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Равенства (5) и представляют собой закон преобразования координат точки при переходе от одной декартовой системы координат к другой.

3. Преобразование декартовой прямоугольной системы координат на плоскости. Формулы перехода от одной системы координат на плоскости к другой могут быть получены из (5), если там оставить только первые два равенства и в них вычеркнуть члены, содержащие z:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1^1x' + a_2^1y' + a_0^1, \\ y &= a_1^2x' + a_2^2y' + a_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Рассмотрим частный случай, когда обе системы координат декартовы прямоугольные. Через φ обозначим угол между векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}'_1$, отсчитываемый в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$. Тогда (рис. 14)

$$\mathbf{e}'_1 = \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}'_2 = \cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{e}_1 + \sin\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{e}_2.$$

В разложении $\mathbf{e}_2'$ ставится знак плюс, если кратчайший поворот от $\mathbf{e}_1'$ к $\mathbf{e}_2'$ направлен так же, как кратчайший поворот от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$, т. е. если новый базис повернут относительно старого на угол φ. Знак минус в разложении $\mathbf{e}_2'$

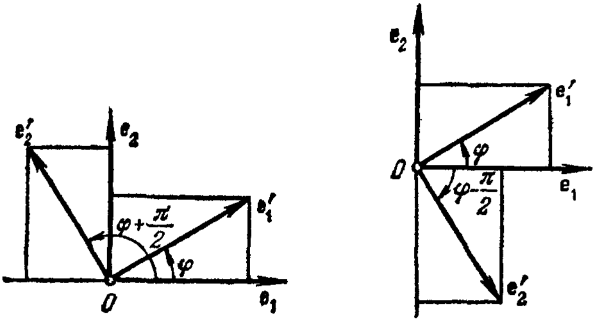

Рис. 14. Два случая взаимного расположения ортонормированных базисов на плоскости.

ставится в противоположном случае, когда новый базис не может быть получен поворотом старого. Поскольку

$$\cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin\varphi, \quad \sin\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos\varphi,$$

мы видим что

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\varphi \mp y' \sin\varphi + a_0^1, \\ y &= x' \sin\varphi \pm y' \cos\varphi + a_0^2, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

причем при повороте системы координат берется верхний знак.

ГЛАВА II

ПРЯМЫЕ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

§ 1. Общее понятие об уравнениях

1. Определение. Начнем с простого примера. Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат. Рассмотрим сферу радиуса r, центр которой находится в точке O с координатами (a, b, c). Сфера — множество точек, отстоящих от центра на одно и то же расстояние r. Обозначим через x, y, z координаты произвольной точки M и выразим через них равенство $|\overrightarrow{OM}|=r$. Мы получим

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r. \tag{1}$$

Возводя в квадрат обе части равенства (1), мы придадим ему более удобную форму:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \tag{2}$$

Очевидно, что это соотношение выполнено для всех точек сферы и только для них, и, следовательно, его можно рассматривать как запись определения сферы при помощи координат. Равенство (2) называется *уравнением сферы* в рассматриваемой системе координат.

Приведем еще один пример из геометрии на плоскости. *Графиком* функции $f(x)$ называется линия L, состоящая из точек, координаты которых связаны соотношением $y=f(x)$. Если нас интересует в первую очередь линия, а не функция, мы можем встать на другую точку зрения и считать, что соотношение $y=f(x)$ есть *уравнение линии* L.

Определим теперь, что следует вообще понимать под уравнением некоторого множества.

Пусть выбрана система координат. Под *уравнением множества* S в этой системе координат мы будем понимать выражение определения S через координаты его точек, т. е. высказывание, верное для координат точек, принадлежащих S, и неверное для координат точек, ему не принадлежащих.

Чаще всего уравнение представляет собой равенство, записанное «математическими символами», но это вовсе не обязательно: оно может быть словесным описанием, перечислением, программой для ЭВМ и т. д. Это должно представляться естественным для читателя, знакомого с общим определением функции и способами задания функций.

Часто уравнению множества точек в планиметрии придается форма $F(x, y)=0$, где F—функция от двух переменных, а в стереометрии—$F(x, y, z)=0$, где F—функция от трех переменных. Написанное выше уравнение сферы имеет такой вид, если не замечать то несущественное обстоятельство, что член r^2 написан в другой части равенства.

Может оказаться, что уравнение какого-либо множества удобнее записать в виде неравенства. Например, шар, ограниченный сферой с уравнением (2), имеет уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant r^2.$$

Уравнения такого вида мы будем называть *неравенствами*. Однако напрасно было бы надеяться разделить множества на такие, которые задаются равенствами, и такие, которые задаются неравенствами. Действительно, равенство

$$\Phi(x, y, z)=F(x, y, z)-|F(x, y, z)|=0$$

задает то же множество, что и неравенство $F(x, y, z) \geqslant 0$.

Следует подчеркнуть зависимость уравнения от системы координат: уравнения одного и того же множества в разных системах координат, вообще говоря, различны. Это связано с тем, что при изменении системы координат меняются и координаты точки.

Обучаясь математике, мы знакомимся с логическими и математическими правилами, по которым из одного верного высказывания можно получить другое верное высказывание. Строгое изучение этих правил относится к специальной науке—математической логике. Мы же, формулируя приведенные ниже предложения, будем просто считать, что такие правила известны. Естественно поэтому, что о доказательстве этих предложений не может быть речи.

Предложение 1. *Если P_S и P_T—уравнения множеств S и T, то уравнение пересечения $S \cap T$ есть выска-*

вывание, состоящее в том, что P_S и P_T верны одновременно.

Пусть P_S и P_T — равенства, содержащие координаты точки: $F_S(x, y, z)=0$ и $F_T(x, y, z)=0$. Тогда уравнение пересечения есть система уравнений

$$F_S(x, y, z)=0, \quad F_T(x, y, z)=0.$$

Предложение 2. *Если P_S и P_T — уравнения множеств S и T, то уравнение объединения $S \cup T$ есть высказывание, состоящее в том, что из P_S и P_T верно хотя бы одно.*

Если P_S и P_T имеют вид $F_S(x, y, z)=0$ и $F_T(x, y, z)=0$, то уравнение объединения можно написать в виде

$$F_S(x, y, z)\cdot F_T(x, y, z)=0.$$

Предложение 3. *Если P_S и P_T — уравнения множеств S и T, и S есть подмножество T, то из P_S следует P_T.*

Предложение 4. *Множества S и T совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения эквивалентны, т. е. из P_S следует P_T, а из P_T следует P_S.*

Проиллюстрируем два последних предложения. Уравнения (1) и (2) эквивалентны: переходя от (2) к (1), мы можем не ставить двойного знака перед корнем, так как $r > 0$. Наоборот, уравнение

$$z-c=\sqrt{r^2-(x-a)^2-(y-b)^2} \tag{3}$$

не эквивалентно уравнению (2). Действительно, хотя возведением в квадрат можно получить (2) из (3), но при извлечении корня из (2) мы получаем

$$z-c=\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2-(y-b)^2}.$$

Это означает, что равенство (2) выполнено не только для точек, удовлетворяющих уравнению (3), но и для точек, удовлетворяющих уравнению

$$z-c=-\sqrt{r^2-(x-a)^2-(y-b)^2}. \tag{4}$$

Уравнение (2) следует также и из (4). Таким образом, уравнения (3) и (4) определяют части сферы — «верхнюю» и «нижнюю» полусферы.

Иногда предложения 3 и 4 считают определениями отношений «следует» и «эквивалентно» для уравнений.

2. Алгебраические линии и поверхности. Изучение произвольных множеств точек — задача совершенно необъятная. В этом пункте мы определим сравнительно узкий класс множеств, все еще чересчур широкий для того, чтобы быть подробно изученным.

Определение. *Алгебраической поверхностью* называется множество, которое в какой-нибудь декартовой системе координат может быть задано уравнением вида

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s} = 0, \tag{5}$$

где все показатели степени — целые неотрицательные числа. Наибольшая из сумм[1] $k_1 + l_1 + m_1, \ldots, k_s + l_s + m_s$ называется *степенью уравнения*, а также *порядком алгебраической поверхности*.

Это определение означает, в частности, что сфера, уравнение которой в прямоугольной системе координат имеет вид (2), является алгебраической поверхностью второго порядка.

Определение. *Алгебраической линией* на плоскости называется множество, которое в какой-нибудь декартовой системе координат на плоскости может быть задано уравнением вида

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0, \tag{6}$$

причем все показатели — неотрицательные целые числа. Наибольшая из сумм $k_1 + l_1, \ldots, k_s + l_s$ называется *степенью уравнения*, а также *порядком линии*.

Легко видеть, что алгебраическая поверхность не обязательно является поверхностью в том смысле, какой мы интуитивно придаем этому слову. Например, уравнению $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют координаты ни одной точки. Уравнение

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2\right] = 0$$

определяет две точки, уравнение $y^2 + z^2 = 0$ определяет линию (ось абсцисс). Такое же замечание следует сделать и об алгебраических линиях. Читатель сам сможет найти соответствующие примеры.

Приведенные определения имеют существенный недостаток. Именно, неизвестно, какой вид имеет уравнение поверхности в какой-нибудь другой декартовой системе координат. Если же уравнение и имеет в некоторой дру-

[1]) Разумеется, здесь имеется в виду наибольшая из сумм, фактически входящих в уравнение, т. е. предполагается, что после приведения подобных членов найдется хотя бы одно слагаемое с ненулевым коэффициентом, имеющее такую сумму показателей. Это же замечание относится и к определению порядка алгебраической линии, приведенному ниже.

гой системе координат вид (5), то степень какого из этих уравнений мы будем называть порядком поверхности? Такие же вопросы возникают и об алгебраических линиях. Ответом служат следующие теоремы, называемые теоремами об *инвариантности* (неизменности) порядка.

Теорема 1. *Если поверхность в некоторой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида* (5), *то и в любой другой декартовой системе координат она может быть задана уравнением того же вида, имеющим ту же степень.*

Теорема 2. *Если линия на плоскости в некоторой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида* (6), *то и в любой другой декартовой системе координат она может быть задана уравнением того же вида, имеющим ту же степень.*

Обе теоремы доказываются одинаково. Докажем, например, теорему 2. С этой целью перейдем от той декартовой системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, о которой шла речь в определении, к произвольной новой декартовой системе координат O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$. Старые координаты x, y связаны с новыми координатами x', y' формулами (6) § 4 гл. I:

$$x = a_1^1 x' + a_2^1 y' + a_0^1,$$
$$y = a_1^2 x' + a_2^2 y' + a_0^2.$$

Чтобы получить уравнение линии в новой системе координат, подставим в ее уравнение выражения x и y через x' и y'. При возведении трехчлена $a_1^1 x' + a_2^1 y' + a_0^1$ в степень k мы получим многочлен относительно x' и y' степени k. При возведении $a_1^2 x' + a_2^2 y' + a_0^2$ в степень l мы получим многочлен степени l. Перемножая полученные многочлены, заметим, что каждый член вида $Ax^k y^l$ в левой части уравнения (6) переходит в многочлен степени $k+l$ относительно x' и y'. Сумма многочленов — это многочлен, степень которого не выше степеней слагаемых. (Она могла бы оказаться ниже, если бы члены с наибольшей суммой показателей уничтожились.) Итак, мы доказали пока, что алгебраическая линия в любой декартовой системе координат имеет уравнение вида (6), причем степень уравнения при переходе от одной системы координат к другой не может повыситься. Нам остается доказать, что она не может и понизиться и, следовательно, должна оставаться постоянной. Это легко доказать от противного. В самом деле, при обратном переходе от системы координат O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ к системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ старые координаты x', y' точки выражаются через ее новые координаты x, y приведенными выше формулами, но решенными относительно x', y'. Поэтому, если при переходе от O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ к O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ многочлен $F(x, y)$ перешел в многочлен $G(x', y')$, то при обратном переходе многочлен $G(x', y')$ перейдет в $F(x, y)$. Теперь допустим, что при переходе от системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, к системе O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ степень уравнения понизилась. Тогда при обратном переходе от O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ к O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ степень должна была бы повыситься, что, как мы знаем, невозможно.

Замечание. Свойство неизменности порядка не относится к различным уравнениям, которые линия или поверхность могут иметь в одной и той же системе координат. Хотя такие уравнения и эквивалентны, среди них могут быть уравнения различных степеней и даже не имеющие вида (5) или (6). Действительно, следующие три уравнения определяют окружность радиуса 1 с центром в начале декартовой прямоугольной системы координат:

$$\sqrt{x^2+y^2}=1, \quad x^2+y^2-1=0,$$
$$(x^2+y^2-1)^2=0. \tag{7}$$

Принято считать, что эквивалентные уравнения вида (6), имеющие разные степени, задают разные алгебраические линии (хотя множества точек, им удовлетворяющих, и совпадают!). Например, говорят, что уравнение (7) определяет «сдвоенную окружность».

Порядок алгебраической линии — первый встретившийся нам пример инварианта. Вообще *инвариантом* называют всякую величину, не меняющуюся при изменении системы координат. Только инвариантные комбинации величин (коэффициентов, показателей и т. д.), входящих в уравнение линии или поверхности, характеризуют геометрические свойства самой линии или поверхности, не зависящие от ее расположения относительно системы координат. Какой геометрический смысл имеет порядок линии, мы увидим в конце главы.

Теперь мы можем указать основной предмет курса аналитической геометрии. В нем исследуются главным образом алгебраические линии и поверхности первого и второго порядка, которые доступны для изучения средствами элементарной алгебры.

Прежде чем перейти к их свойствам, рассмотрим несколько более общих уравнений. Мы будем говорить о линиях и поверхностях. Формулирование их общих определений не входит в нашу задачу. Читатель, который любит, чтобы все было точно определено, может под линией и поверхностью понимать соответственно алгебраическую линию и поверхность, однако все результаты имеют место и в более общем случае.

3. Параметрические уравнения линий. Представим себе, что линия — это траектория движущейся точки. В каждый момент времени t нам известно положение точки, т. е. ее координаты относительно выбранной заранее системы координат. Это означает, что координаты точки (x, y, z) (или (x, y) для линии на плоскости) являются заданными функциями времени:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t). \tag{8}$$

Здесь не существенно, что переменная величина t имеет физический смысл времени. Если мы зададим координаты точки как функции от какой-нибудь переменной величины, или, как говорят, *параметра*, мы тем самым зададим линию.

Уравнения вида (8) называются *параметрическими уравнениями линии в пространстве*, а уравнения вида $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — *параметрическими уравнениями линии на плоскости*. Напомним, что уравнение линии есть высказывание о координатах точек, верное для точек линии и только для них. В данном случае полная формулировка этого высказывания следующая: существует такое число t, что выполнены равенства (8).

Например, уравнения $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ задают окружность радиуса r с центром в начале координат. В этом легко убедиться, если заметить, что t — здесь угол между радиус-вектором точки окружности и базисным вектором $\mathbf{e}_1$.

Уравнения $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = at$ задают *винтовую линию*, лежащую на цилиндре радиуса r и имеющую шаг винта, равный $2\pi a$.

4. Параметрические уравнения поверхностей. Конусы. По аналогии с параметрическими уравнениями линии введем параметрические уравнения поверхности. Уравнения вида

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v) \tag{9}$$

называются *параметрическими уравнениями поверхности*, если для каждой точки M на поверхности существует пара чисел u, v, при которой координаты M получаются из этих уравнений, и наоборот, для точки, не лежащей на поверхности, такой пары чисел не существует.

В качестве примера получим параметрические уравнения конуса. *Конусом* называется поверхность, составленная из прямых линий, проходящих через фиксированную точку — *вершину конуса*. Прямые носят название *образующих* (рис. 15), а линия, которая лежит на конусе, не проходит через вершину и пересекает все образующие, называется *направляющей* конуса

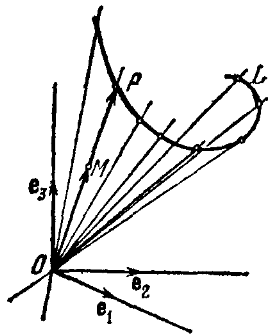

Рис 15. L — направляющая, MP — образующая,

Пусть задана декартова система координат, начало которой совпадает с вершиной конуса O, и даны параметрические уравнения направляющей $x=f(u)$, $y=g(u)$, $z=h(u)$. Образующая, проходящая через произвольную точку $M(x, y, z)$ на конусе, пересекает направляющую в точке P с координатами $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, где u — соответствующее значение параметра. Векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OP}$ коллинеарны, и потому существует число v такое, что $\overrightarrow{OM}=v\overrightarrow{OP}$. Записывая это равенство в координатах, мы выразим координаты произвольной точки на конусе через параметры u и v:

$$x=vf(u),$$
$$y=vg(u),$$
$$z=vh(u).$$

Читатель проверит, что точка, не лежащая на конусе, не удовлетворяет этим уравнениям ни при каких u и v.

5. Уравнения, не содержащие одной из координат. Рассмотрим частный случай, когда в уравнение поверхности не входит одна из координат, например z, и уравнение имеет вид $G(x, y)=0$. Пусть точки M_0 с координатами x_0, y_0, z_0 лежит на поверхности. Тогда точки с координатами x_0, y_0, z при любых z также лежат на поверхности. Легко заметить, что все точки с координатами такого вида заполняют прямую, проходящую через M_0 в направлении вектора $\mathbf{e}_3$. Таким образом, вместе со всякой точкой M_0 на поверхности лежит прямая, проходящая через M_0 в направлении $\mathbf{e}_3$.

Определение. Поверхность, которая состоит из прямых линий, параллельных заданному направлению, называется *цилиндрической поверхностью* или *цилиндром*, а прямые линии — ее *образующими* (рис. 16). Линию, лежащую на поверхности и пересекающую все образующие, называют *направляющей*.

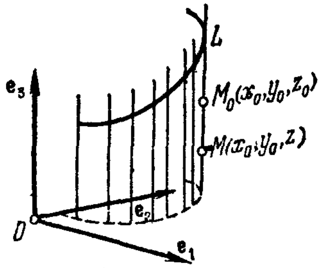

Рис. 16. L — направляющая, M_0M — образующая.

Мы показали, что уравнение, не содержащее одной из координат, определяет цилиндр с образующими, параллельными соответствующей оси координат.

В качестве примера рекомендуем читателю построить поверхность, заданную уравнением $x^2+y^2=r^2$ относительно декартовой прямоугольной системы координат в пространстве. Эта поверхность — *прямой круговой цилиндр*.

§ 2. Уравнения прямых и плоскостей

Этот и следующий параграфы посвящены уравнениям плоскости, прямой линии на плоскости, а также прямой линии в пространстве. В этих уравнениях много общего, и мы будем изучать их одновременно. В тех случаях, когда сходные предложения имеют, по существу, одинаковые доказательства, мы будем доказывать только одно из них.

1. Поверхности и линии первого порядка. Уравнение первой степени, или линейное уравнение, связывающее координаты точки в пространстве, имеет вид

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (1)$$

причем предполагается, что коэффициенты не равны нулю одновременно, т. е. $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Аналогично, уравнение первой степени, или линейное уравнение, связывающее координаты точки на плоскости, — это уравнение

$$Ax+By+C=0 \qquad (2)$$

при условии $A^2+B^2\neq 0$.

Мы докажем, что поверхности и линии первого порядка — это плоскости и прямые. Точнее, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *В общей декартовой системе координат в пространстве каждая плоскость может быть задана линейным уравнением. Обратно, каждое линейное уравнение* (1) *в общей декартовой системе координат определяет плоскость.*

Теорема 2. *В общей декартовой системе координат на плоскости каждая прямая линия может быть задана линейным уравнением. Обратно, каждое линейное уравнение* (2) *в общей декартовой системе координат на плоскости определяет прямую линию.*

Обе теоремы доказываются одинаково. Докажем, например, теорему 1.

Пусть нам дана некоторая плоскость. Выберем систему координат следующим образом. Начало координат O и первые два базисных вектора $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ мы поместим в плоскости, а вектор $\mathbf{e}_3$ выберем произвольно. В такой системе координат наша плоскость будет иметь линейное уравнение $z=0$. В силу теоремы об инвариантности порядка она имеет линейное уравнение и в любой другой декартовой системе координат.

Обратно, пусть даны общая декартова система координат и уравнение (1). Найдем множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Предположим для определенности, что в уравнении коэффициент C не равен нулю, и сделаем замену системы координат, положив

$$x'=x, \quad y'=y, \quad z'=Ax+By+Cz+D. \tag{3}$$

Множество, определяемое в старой системе координат уравнением (1), в новой системе координат будет иметь уравнение $z'=0$ и, следовательно, является плоскостью. Нам остается только доказать, что уравнения (3) действительно определяют переход к новой системе координат. Для этого решнм их относительно x, y и z. Мы получим

$$x=x', \quad y=y', \quad z=-\frac{A}{C}x'-\frac{B}{C}y'+\frac{z'}{C}-\frac{D}{C}.$$

На основании формул (5) § 4 гл. 1 мы можем сказать, что эти равенства задают переход от исходной системы координат к системе O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, где $O'(0,\ 0,\ -D/C)$, $\mathbf{e}_1'(1,\ 0,\ -A/C)$, $\mathbf{e}_2'(0,\ 1,\ -B/C)$, $\mathbf{e}_3'(0,\ 0,\ 1/C)$. Компоненты векторов $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ и $\mathbf{e}_3'$ таковы, что независимо от значений A, B и C векторы эти не компланарны. Это заканчивает доказательство теоремы.

Теоремы этого пункта полностью решают вопрос об уравнениях плоскости и прямой на плоскости. Однако ввиду важности этих уравнений мы получим их еще в других формах.

2. Параметрические уравнения прямой и плоскости. Прямая линия (на плоскости или в пространстве) полностью определена, если на ней задана точка M_0 и задан ненулевой вектор, параллельный этой прямой. Разумеется, и точку, и вектор можно выбирать многими различными способами, но пока мы будем считать, что они как-то выбраны, и называть их *начальной точкой* и *направляющим вектором прямой*. Аналогично, плоскость задается точкой и двумя неколлинеарными векторами, лежащими в этой плоскости, — *начальной точкой* и *направляющими векторами плоскости*.

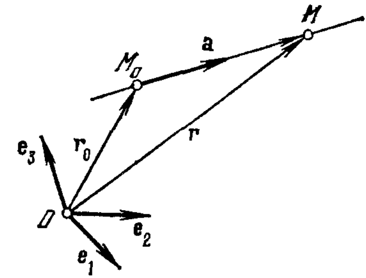

Рис. 17.

Мы будем предполагать, что задана декартова система координат в пространстве или на плоскости (если мы изучаем прямую линию в планиметрии). Это, в частности, означает, что каждой точке сопоставлен ее радиус-вектор относительно начала координат.

Пусть дана прямая. Обозначим через $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$ соответственнно радиус-вектор ее начальной точки M_0 и направляющий вектор прямой. Рассмотрим теперь некоторую точку M, радиус-вектор которой обозначим $\mathbf{r}$ (рис. 17). Вектор $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$, начало которого M_0 лежит на прямой, параллелен прямой тогда и только тогда, когда его конец, точка M, также лежит на прямой. В этом и только в этом случае для точки M найдется такое число t, что

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t\mathbf{a}. \tag{4}$$

Наоборот, какое бы число мы ни подставили в формулу (4) в качестве t, вектор $\mathbf{r}$ в этой формуле будет радиус-вектором некоторой точки на прямой.

В формуле (4) переменная величина t, пробегающая все вещественные значения, называется *параметром*, а уравнение (4) носит название *векторного параметрического* уравнения прямой.

Векторное параметрическое уравнение прямой выглядит одинаково и в планиметрии, и в стереометрии, но при разложении по базису оно сводится в одном случае к двум, а в другом случае к трем скалярным уравнениям. Действительно, обозначим координаты точек M и M_0 через (x, y) и (x_0, y_0), если изучается прямая на плоскости, и через (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0), если прямая в пространстве. Компоненты вектора $\mathbf{a}$ обозначим соответственно (a_1, a_2) и (a_1, a_2, a_3). Тогда, раскладывая по базису обе части равенства (4), мы получим

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=a_1t,\\ y-y_0&=a_2t \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=a_1t,\\ y-y_0&=a_2t,\\ z-z_0&=a_3t \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

в зависимости от того, сколько векторов составляют базис. Уравнения (5) называются *параметрическими уравнениями прямой на плоскости*, а уравнения (6) — *параметрическими уравнениями прямой в пространстве.*

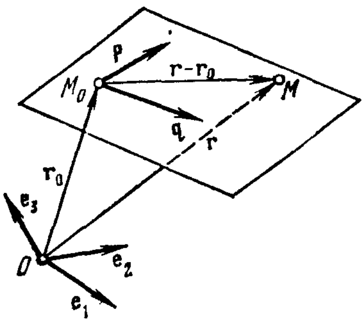

Рис. 18.

Получим теперь параметрические уравнения плоскости. Обозначим через $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ радиус-вектор начальной точки M_0 и направляющие векторы плоскости. Пусть точка M с радиус-вектором $\mathbf{r}$ — произвольная точка в пространстве. Начало вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ лежит на плоскости. Следовательно, его конец M лежит на плоскости тогда и только тогда, когда этот вектор лежит в рассматриваемой плоскости. Векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ не коллинеарны (рис. 18). Поэтому, если точка M лежит в плоскости (и только в этом случае), найдутся такие числа t_1 и t_2, что

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t_1\mathbf{p}+t_2\mathbf{q}. \tag{7}$$

Это уравнение называется *векторным параметрическим уравнением плоскости*. Каждой точке плоскости соответствуют значения двух параметров t_1 и t_2. Наоборот, какие бы числа мы ни подставили как значения параметров, уравнение (7) определяет радиус-вектор точки на плоскости.

Если (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) — координаты точек M и M_0, а (p_1, p_2, p_3) и (q_1, q_2, q_3) — компоненты векторов **p** и **q**, то, раскладывая обе части равенства (7) по базису, мы получаем

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=t_1p_1+t_2q_1,\\ y-y_0&=t_1p_2+t_2q_2,\\ z-z_0&=t_1p_3+t_2q_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Уравнения (8) называются *параметрическими уравнениями плоскости*.

Отметим, что начальная точка и направляющий вектор прямой образуют на этой прямой ее внутреннюю декартову систему координат. Значение параметра t, соответствующее какой-либо точке, является координатой этой точки по отношению к внутренней системе координат.

Аналогичное замечание можно сделать и о плоскости. Ее начальная точка и направляющие векторы образуют на ней внутреннюю систему координат. Значения параметров t_1 и t_2, соответствующие какой-либо точке, являются координатами этой точки по отношению к внутренней системе координат.

Рассмотрим переход от общих линейных уравнений плоскости и прямой на плоскости к их параметрическим уравнениям. Начальная точка находится просто: если в уравнении плоскости (1), скажем, коэффициент A отличен от нуля, то положим $y_0=z_0=0$ и найдем x_0 из уравнения. В результате получается точка $M_0(-D/A, 0, 0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (1), и она может быть принята за начальную точку. Для прямой на плоскости координаты начальной точки определяются аналогично.

Покажем теперь, как найти направляющие векторы. Пусть прямая линия на плоскости задана своим уравнением $Ax+By+C=0$ в общей декартовой системе координат и (x_0, y_0) — координаты какой-либо точки M_0 на прямой. Вычитая из уравнения прямой равенство Ax_0+ $+By_0+C=0$, мы приведем его к виду

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Рассмотрим теперь вектор с компонентами $(x-x_0, y-y_0)$. Его начало M_0 лежит на прямой, а потому он параллелен прямой тогда и только тогда, когда его конец — точка M с координатами (x, y) — лежит на прямой, и предыдущее уравнение удовлетворено. Обозначив компоненты вектора $\overrightarrow{M_0M}$ через α_1 и α_2, мы получаем следующее

Предложение 1. *Каждый ненулевой вектор, компоненты которого α_1, α_2 удовлетворяют уравнению $A\alpha_1+B\alpha_2=0$, может быть принят за направляющий вектор прямой $Ax+By+C=0$. В частности, направляющим вектором будет вектор с компонентами $(-B, A)$.*

Аналогично доказывается следующее

Предложение 2. *Любые два неколлинеарных вектора, компоненты которых удовлетворяют уравнению $A\alpha_1+B\alpha_2+C\alpha_3=0$, могут быть приняты за направляющие векторы плоскости, имеющей уравнение $Ax+By+$ $+Cz+D=0$ в общей декартовой системе координат.*

3. Исключение параметра из параметрических уравнений прямой. Рассмотрим на плоскости прямую линию, заданную параметрическими уравнениями (5). Поскольку направляющий вектор ненулевой, то отлична от нуля хотя бы одна из его компонент a_1, a_2.

Допустим сначала, что $a_1 \neq 0$. В этом случае из первого уравнения найдем $t=(x-x_0)/a_1$. Подставив t во второе уравнение, имеем

$$y-y_0=\frac{a_2}{a_1}(x-x_0),$$

или

$$y=kx+b, \tag{9}$$

где $k=a_2/a_1$, а $b=y_0-a_2x_0/a_1$. Уравнение (9) называют *уравнением прямой, решенным относительно ординаты.* Его можно получить также, решая уравнение $Ax+By+$ $+C=0$ относительно y.

Определение. Отношение компонент направляющего вектора a_2/a_1 называется *угловым коэффициентом прямой.*

Положив $x=0$ в уравнении (9), получим $y=b$. Это означает, что точка с координатами $(0, b)$ лежит на прямой (рис. 19) Она является точкой пересечения прямой с осью ординат. Все выше сказанное можно объединить в следующее

Предложение 3. *Если прямая не параллельна оси ординат ($a_1 \neq 0$), то ее уравнение может быть записано в виде (9), причем k — угловой коэффициент, а b — ордината точки пересечения прямой с осью ординат.*

Рассмотрим уравнение, решенное относительно ординаты, в декартовой прямоугольной системе координат. В этом случае свободный член b по абсолютной величине равен расстоянию от начала координат до точки пересечения прямой с осью ординат; b положительно, если эта точка лежит с той же стороны от начала координат, что и конец вектора $\mathbf{e}_2$; в противоположном случае b отрицательно.

Угловой коэффициент в декартовой прямоугольной системе координат представляет собой тангенс угла, ко-

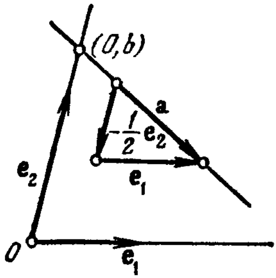

Рис. 19.

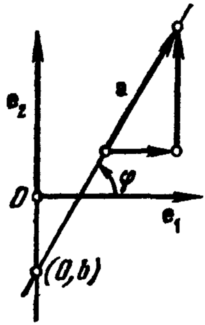

Рис. 20.

торый прямая образует с осью абсцисс. Угол этот отсчитывается от оси абсцисс в направлении кратчайшего поворота от оси абсцисс к оси ординат (рис. 20).

Предложение 4. *Если прямая параллельна оси ординат* ($a_1=0$), *то ее уравнение имеет вид* $x=x_0$, *где* x_0 — *абсцисса точки пересечения прямой с осью абсцисс.*

Для доказательства достаточно подставить $a_1=0$ в уравнения (5). Тогда первое из этих уравнений принимает вид $x=x_0$, а второе сводится к утверждению, что y произвольно. Иными словами, прямая состоит из точек с координатами (x_0, y) для всевозможных y.

Исключим теперь параметр из параметрических уравнений (6) прямой в пространстве. Сначала допустим, что ни одна из компонент направляющего вектора не равна нулю. Тогда

$$t=\frac{x-x_0}{a_1}, \quad t=\frac{y-y_0}{a_2}, \quad t=\frac{z-z_0}{a_3},$$

и мы получаем два равенства:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}, \qquad (10)$$

которым удовлетворяют координаты любой точки прямой и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на прямой. Поскольку прямая в пространстве всегда может быть представлена как линия пересечения двух плоскостей в соответствии с предложением 1 § 1, она и должна задаваться системой из двух линейных уравнений.

Если обращается в нуль одна из компонент направляющего вектора, например a_1, то уравнения прямой принимают вид

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{10'}$$

Эта прямая лежит в плоскости $x = x_0$ и, следовательно, параллельна плоскости $x = 0$. Читатель легко напишет уравнения прямой, если в нуль обращается не a_1, а другая компонента.

Когда равны нулю две компоненты направляющего вектора, например a_1 и a_2, прямая имеет уравнения

$$x = x_0, \qquad y = y_0. \tag{10''}$$

Такая прямая параллельна одной из координатных осей, в нашем случае — оси аппликат.

Часто пишут уравнение произвольной прямой в виде (10), условливаясь считать равным нулю числитель, если равен нулю знаменатель.

4. Векторные уравнения плоскости и прямой. Плоскость вполне определяется заданием ее начальной точки и ненулевого вектора $\mathbf{n}$, перпендикулярного плоскости. Такой вектор называется *нормальным вектором*. Если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки плоскости, то $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ лежит в плоскости и, следовательно,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0. \tag{11}$$

Обратно, легко видеть, что точка с радиус-вектором $\mathbf{r}$ лежит в плоскости, если $\mathbf{r}$ удовлетворяет (11). Равенство (11) мы назовем *векторным уравнением плоскости*.

Если $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — направляющие векторы плоскости, то вектор $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ может быть принят за нормальный вектор. Это приводит нас к векторному уравнению вида

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0. \tag{11'}$$

Векторному уравнению плоскости можно придать форму

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0, \tag{12}$$

где $D = -(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$. Такое уравнение не содержит радиус-вектора начальной точки.

Предложение 5. *Пусть x, y, z — компоненты вектора $\mathbf{r}$ в декартовой системе координат. Тогда скалярное произведение $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ при $\mathbf{n}\neq 0$ записывается линейным многочленом $Ax+By+Cz+D$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$.*

Обратно, для любого линейного многочлена найдутся такие векторы $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{n}\neq 0$, что в заданной системе координат $Ax+By+Cz+D=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$.

Первая часть предложения очевидна: подставим разложение вектора $\mathbf{r}$ по базису в данное нам выражение

$$(x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3-\mathbf{r}_0, \mathbf{n}),$$

раскроем скобки и получим многочлен $Ax+By+Cz+D$, в котором $D=-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ и

$$A=(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}), \quad B=(\mathbf{e}_2, \mathbf{n}), \quad C=(\mathbf{e}_3, \mathbf{n}). \tag{13}$$

A, B, C одновременно не равны нулю, так как ненулевой вектор $\mathbf{n}$ не может быть ортогонален всем базисным векторам.

Для доказательства обратного утверждения найдем сначала вектор $\mathbf{n}$ из равенств (13), считая A, B и C заданными. Будем искать этот вектор в виде

$$\mathbf{n}=\alpha[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]+\beta[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]+\gamma[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2].$$

Умножив скалярно это равенство на $\mathbf{e}_1$, получаем $(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})=\alpha(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Отсюда $\alpha=A/(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Аналогично находим β и γ. Вектор $\mathbf{n}$ не нулевой, так как $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$ и $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ линейно независимы (предложение 7 § 3 гл. I), а α, β и γ не равны нулю одновременно, так же как A, B и C.

Итак, мы можем придать заданному многочлену вид

$$x(\mathbf{e}_1, \mathbf{n})+y(\mathbf{e}_2, \mathbf{n})+z(\mathbf{e}_3, \mathbf{n})+D=(\mathbf{r}, \mathbf{n})+D.$$

Вектор $\mathbf{r}_0$ должен удовлетворять условию $-(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})=D$. Один из таких векторов мы можем найти в виде $\mathbf{r}_0=\lambda\mathbf{n}$. Подставляя, находим $-\lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n})=D$, откуда $\mathbf{r}_0=-D\mathbf{n}/|\mathbf{n}|^2$.

Заметим, что из доказанного предложения легко вытекает теорема 1. Кроме того, в качестве следствия получим следующее

Предложение 6. *Если система координат декартова прямоугольная, то вектор с компонентами A, B и C является нормальным вектором для плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.*

Это вытекает сразу из формул (13) в силу предложения 1 § 3 гл. I.

В случае общей декартовой системы координат A, B, C — компоненты вектора $\mathbf{n}$ по базису $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$, взаимному с $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Все, сказанное выше о плоскостях, почти без изменений может быть сказано и о прямых на плоскости. Если $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор начальной точки прямой, а $\mathbf{n}$ — ненулевой вектор, перпендикулярный этой прямой, то уравнение прямой на плоскости может быть написано в виде

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{n})=0 \text{ или } (\mathbf{r},\ \mathbf{n})+C=0.$$

В координатной форме это уравнение имеет вид $Ax+$ $+By+C=0$, где

$$A=(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{n}),\ B=(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{n}).$$

Имеет место

Предложение 7. *Если система координат декартова прямоугольная, то вектор с компонентами* (A, B) *перпендикулярен прямой с уравнением* $Ax+By+C=0$.

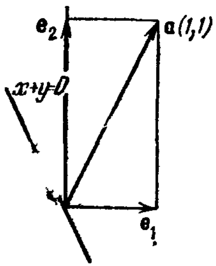

Рис. 21.

В этом предложении, как и выше в предложении 6, очень существенно, что система координат предполагается декартовой прямоугольной. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, изобразим на рис. 21 прямую $x+y=0$ и вектор с компонентами (1, 1) в том случае, когда базисные векторы хотя бы различны по длине.

Перейдем теперь к векторному уравнению прямой линии в пространстве. Оно может быть написано в виде

$$[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a}]=0. \tag{14}$$

Здесь $\mathbf{a}$ — направляющий вектор прямой, а $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор начальной точки прямой. В самом деле, это уравнение, как и векторное параметрическое уравнение прямой, выражает коллинеарность векторов $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$. Если мы обозначим $[\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a}]$ через $\mathbf{d}$, мы получим векторное уравнение прямой, не содержащее начальной точки:

$$[\mathbf{r},\ \mathbf{a}]=\mathbf{d}. \tag{15}$$

Если прямая задана уравнением (15), мы можем найти начальную точку прямой, например, в виде $\mathbf{r}_0=t\,[\mathbf{a},\ \mathbf{d}]$. Подставляя $\mathbf{r}_0$ в (15), мы получаем $t\,[[\mathbf{a},\ \mathbf{d}],\ \mathbf{a}]=\mathbf{d}$, откуда, по формуле двойного векторного произведения, $t\,\{(\mathbf{a},\ \mathbf{a})\,\mathbf{d}\,-$

$-(\mathbf{a},\ \mathbf{d})\,\mathbf{a}\} = \mathbf{d}$. Так как $(\mathbf{a},\ \mathbf{d}) = 0$, мы находим $t = (\mathbf{a},\ \mathbf{a})^{-1}$ и $\mathbf{r}_0 = |\mathbf{a}|^{-2}[\mathbf{a},\ \mathbf{d}]$.

Отметим, что так определенная точка $\mathbf{r}_0$ есть основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а $\mathbf{r} = t[\mathbf{a},\ \mathbf{d}]$ — параметрическое уравнение этого перпендикуляра.

5. Признаки параллельности плоскостей и прямых на плоскости. Из предложения 1 легко получить условие, накладываемое на коэффициенты уравнений двух прямых на плоскости, при котором эти прямые параллельны. Аналогичное условие для плоскостей вытекает из предложения 2 и формул (13). Следует, однако, иметь в виду, что это условие выполнено не только тогда, когда уравнения определяют различные параллельные прямые, но и в том случае, когда рассматриваемые уравнения определяют одну и ту же прямую. В этом случае нам будет удобнее говорить, что прямые, определяемые уравнениями, совпадают.

Предложение 8. 1) *Прямые линии, задаваемые уравнениями*

$$Ax + By + C = 0, \qquad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

в общей декартовой системе координат, параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при переменных в их уравнениях пропорциональны, т. е. существует такое число λ, *что*

$$A_1 = \lambda A, \qquad B_1 = \lambda B. \tag{16}$$

2) *Прямые совпадают в том и только в том случае, когда их уравнения пропорциональны, т. е., помимо равенств* (16), *выполнено (с тем же* λ*) равенство*

$$C_1 = \lambda C. \tag{17}$$

Доказательство. Первая часть предложения прямо следует из того, что векторы с компонентами $(-B,\ A)$ и $(-B_1,\ A_1)$ — направляющие для соответствующих прямых.

Докажем вторую часть. В равенствах (16) и (17) λ не может равняться нулю, так как коэффициенты уравнения прямой одновременно в нуль не обращаются. Поэтому, если выполнены эти равенства, уравнения эквивалентны и определяют одну и ту же прямую.

Проверим обратное. Если прямые параллельны, то, как мы видели, их уравнения должны иметь вид $Ax + By + C = 0$ и $\lambda(Ax + By) + C_1 = 0$ при некотором λ.

Если, кроме того, точка с координатами (x_0, y_0) принадлежит обеим прямым, то выполнены равенства $Ax_0 + By_0 + C = 0$ и $\lambda(Ax_0 + By_0) + C_1 = 0$. Из этих равенств вытекает, что $C_1 = \lambda C$. Предложение доказано.

Предложение 9. *Пусть плоскости P и Q заданы уравнениями*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

в общей декартовой системе координат. Для того чтобы они были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число λ, что

$$A_1 = \lambda A, \qquad B_1 = \lambda B, \qquad C_1 = \lambda C. \tag{18}$$

Плоскости P и Q совпадают тогда и только тогда, когда, кроме соотношений (18), *выполняется (при том же λ) равенство*

$$D_1 = \lambda D. \tag{19}$$

Доказательство. Необходимость. Согласно предложению 5 уравнения плоскостей P и Q можно представить в виде $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$ и $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{n}_1) = 0$, где векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_1$ связаны с коэффициентами уравнений формулами (13). Если плоскости параллельны, то $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_1$ коллинеарны и, следовательно, существует такое число λ, что $\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}$ Теперь, в силу (13), мы имеем $A_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}_1) = \lambda(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \lambda A$. Аналогично получаем и остальные равенства (18). Пусть теперь P и Q совпадают. Тогда, по доказанному выше, уравнение Q имеет вид $\lambda(Ax + By + Cz) + D_1 = 0$. Поскольку плоскости имеют общую точку, из

$$\lambda(Ax_0 + By_0 + Cz_0) + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

следует $D_1 = \lambda D$.

Достаточность. Нам нужно доказать, что два уравнения, удовлетворяющие условиям (18) и (19), являются уравнениями одной и той же плоскости, а уравнения, удовлетворяющие условию (18), определяют параллельные плоскости. Первое из утверждений очевидно, поскольку такие уравнения эквивалентны. Второе утверждение следует из предложения 2. Действительно, если выполнены условия (18), то компоненты направляющих векторов обеих плоскостей должны удовлетворять одному и тому же уравнению. А это означает, что одна и та же пара векторов может быть принята за направляющие векторы и той и другой плоскости. Предложение доказано.

Условия (16) выражают не что иное, как коллинеарность векторов с компонентами (A, B) и (A_1, B_1). Аналогично, условия (18) означают коллинеарность векторов с компонентами (A, B, C) и (A_1, B_1, C_1). Отсюда следует, что условие параллельности прямых на плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (16')$$

а условие параллельности плоскостей — в виде

$$\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (18')$$

(См. предложения 9 и 10 § 3 гл. I.)

Предложению 8 можно придать чисто алгебраическую формулировку, если учесть, что координаты точки пересечения прямых — это решение системы их уравнений.

Предложение 10. *Если*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0,$$

то система уравнений

$$Ax + By + C = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

не имеет решений или имеет бесконечно много решений (в зависимости от C и C_1). Если

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то, каковы бы ни были C и C_1, система имеет единственное решение (x, y).

Разумеется, предложение 10 легко доказать и непосредственно, не прибегая к геометрическим соображениям. Для гораздо более общего случая это будет сделано в гл. V. Такое доказательство является другим доказательством предложения 8.

6. Уравнения прямой в пространстве. Прямая в пространстве может быть задана как пересечение двух плоскостей и, следовательно, в общей декартовой системе координат определяется системой уравнений

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \qquad (20)$$

Полученный нами признак параллельности плоскостей позволяет указать условие, при котором эта система определяет единственную прямую. Пересечение плоскостей есть прямая линия тогда и только тогда, когда они не параллельны (в частности, не совпадают). Поэтому система (20) определяет единственную прямую линию тогда и только тогда, когда хоть один из детерминантов (18′) отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}^2 \neq 0. \tag{21}$$

Разумеется, система (20) может быть заменена на любую, ей эквивалентную. При этом прямая линия будет представлена как пересечение двух других проходящих через нее плоскостей. Уравнения (10) представляют ее как пересечение плоскостей

$$\frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}, \quad \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2},$$

параллельных соответственно оси абсцисс и оси аппликат.

Важно уметь находить какую-нибудь начальную точку и какой-нибудь направляющий вектор на прямой, заданной системой линейных уравнений. Условие (21) означает, что из трех детерминантов второго порядка хотя бы один отличен от нуля. Допустим для определенности, что $AB_1 - A_1B \neq 0$. Чтобы найти начальную точку прямой, будем рассматривать систему (20) как систему уравнений относительно неизвестных x и y. Переменной z придадим произвольное числовое значение, например 0. Для x и y получится система уравнений

$$Ax + By + D = 0, \quad A_1x + B_1y + D_1 = 0.$$

В силу предложения 10 у этой системы существует решение, которое мы обозначим (x_0, y_0). Точка M_0 с координатами $(x_0, y_0, 0)$ лежит на нашей прямой, так как ее координаты удовлетворяют системе (20).

Найдем теперь направляющий вектор прямой. Если система координат декартова прямоугольная, то векторы с компонентами A, B, C и A_1, B_1, C_1 перпендикулярны плоскостям $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. Следовательно, векторное произведение этих векторов параллельно прямой (20), по которой плоскости пересекаются. Вычисляя компоненты векторного произведения в ортонормированном базисе, мы получим следующие компоненты направляющего вектора прямой:

$$\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Предложение 11. *Вектор с компонентами* (22) *есть направляющий вектор прямой* (20), *какова бы ни была декартова система координат.*

Доказательство. Согласно предложению 2 каждый ненулёвой вектор, компоненты которого α_1, α_2, α_3 удовлетворяют уравнению $A\alpha_1+B\alpha_2+C\alpha_3=0$, параллелен плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Если, кроме того, α_1, α_2 и α_3 удовлетворяют уравнению $A_1\alpha_1+B_1\alpha_2+C_1\alpha_3=0$, то вектор параллелен также плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и, следовательно, может быть принят за направляющий вектор прямой (20). Вектор с компонентами (22)—ненулевой в силу неравенства (21). Непосредственно легко проверить, что его компоненты удовлетворяют обоим написанным выше условиям. На этом доказательство заканчивается.

§ 3. Некоторые задачи о прямых и плоскостях

1. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Пусть в пространстве задана общая декартова система координат и две точки M_1 и M_2 с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Чтобы написать уравнение прямой, проходящей через M_1 и M_2, достаточно принять M_1 за начальную точку, а $\overrightarrow{M_1M_2}$ за направляющий вектор прямой. Этот вектор не нулевой, если точки не совпадают. По формуле (10) § 2 мы получаем

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{1}$$

Если в этих равенствах какой-нибудь из знаменателей равен нулю, то следует приравнять нулю соответствующий числитель.

В планиметрии эта задача решается так же. Отличие только в том, что координаты точек теперь (x_1, y_1) и (x_2, y_2), и мы получаем (согласно предложениям 3 и 4 § 2) уравнение

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), \tag{2}$$

если $x_1 \neq x_2$, и

$$x=x_1,$$

если $x_1=x_2$.

2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Пусть M_1, M_2, M_3—не лежащие на одной прямой точки с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) в общей декартовой системе координат. Чтобы написать уравнение плоскости, проходящей через эти точки, выберем M_1 в качестве начальной точки, а векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ в качестве направляющих векторов. Тогда по формулам (11′) § 2 настоящей главы и (10) § 3 гл. I имеем

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

3. Признаки параллельности прямой и плоскости. Пусть прямая задана уравнением $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=t\mathbf{a}$, а плоскость — одним из уравнений $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{n})=0$, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{p}, \mathbf{q})=0$ или $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=t_1\mathbf{p}+t_2\mathbf{q}$. Прямая параллельна плоскости (а возможно, и лежит в плоскости), если $(\mathbf{a}, \mathbf{n})=0$ или $(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q})=0$. Пусть плоскость задана линейным уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Согласно предложению 2 § 2 получаем

$$Aa_1+Ba_2+Ca_3=0, \tag{3}$$

где a_1, a_2, a_3 — координаты вектора $\mathbf{a}$.

Пусть прямая линия задана двумя линейными уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Тогда по предложению 11 § 2, мы можем положить

$$a_1=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad a_2=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad a_3=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},$$

и условие (3) переписывается в виде

$$A\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}+B\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}+C\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Легко проверить, что все приведенные здесь условия являются не только необходимыми, но и достаточными.

Из формулы (4) следует, что три плоскости пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда коэффициенты их уравнений удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}\neq 0. \tag{5}$$

Действительно, это неравенство означает, что прямая линия, по которой пересекаются какие-нибудь две из плоскостей, не параллельна третьей плоскости.

4. Уравнения в отрезках. Уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{6}$$

называется *уравнением плоскости в отрезках*. Относительно него справедливо следующее

Предложение 1. *Если плоскость имеет уравнение вида* (6) *в декартовой прямоугольной системе координат, то числа a, b, c по абсолютной величине равны длинам отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат* (рис. 22). *Знаки этих чисел зависят от того, на какой полуоси (положительной или отрицательной) лежат соответствующие отрезки.*

Для доказательства достаточно подставить в уравнение (6) следующие тройки чисел: $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$.

Уравнение в отрезках для прямой линии на плоскости имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{7}$$

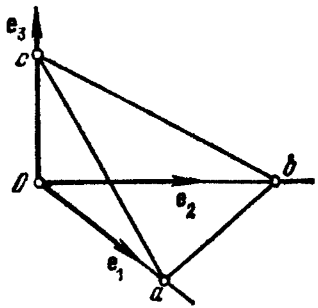

Рис. 22.

Относительно этого уравнения справедливо предложение, аналогичное предложению 1.

5. Полупространство. Пусть дана плоскость P и выбран определенный ее нормальный вектор $\mathbf{n}$. *Полупространством*, определяемым P и $\mathbf{n}$, называется множество точек M таких, что для некоторой точки M_0 на плоскости вектор $\overrightarrow{M_0M}$ составляет с $\mathbf{n}$ угол, не больший $\pi/2$.

Если $\mathbf{r}$—радиус-вектор точки M, а $\mathbf{r}_0$—точки M_0, то определение полупространства эквивалентно неравенству $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n})\geqslant 0$. Это неравенство и является *уравнением полупространства.*

Используя это, нетрудно проверить, что определение полупространства не зависит от выбора точки M_0 на плоскости. Действительно, если $M_0'(\mathbf{r}_0')$—другая точка плоскости, то вектор $\mathbf{a}=\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_0'$ перпендикулярен $\mathbf{n}$ и мы имеем

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0', \mathbf{n})=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0+\mathbf{a}, \mathbf{n})=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n}).$$

Мы получим уравнение полупространства в координатной форме, если вспомним, что выражение $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ в координатах записывается линейным многочленом $Ax+By+Cz+D$. Итак, полупространство в декартовой системе координат задается линейным неравенством

$$Ax+By+Cz+D\geqslant 0.$$

Обратно, каждое такое неравенство согласно предложению 5 § 2 можно записать в виде $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n})\geqslant 0$, откуда сразу получаем, что оно определяет полупространство.

Плоскость P и вектор $\mathbf{n}'=-\mathbf{n}$ определяют другое полупространство, задаваемое неравенством $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n}')\geqslant 0$ или $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n})\leqslant 0$. Его можно назвать «отрицательным» полупространством, в отличие от «положительного» полупространства $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n})\geqslant 0$. Однако такое наименование условно—оно определяется выбором вектора $\mathbf{n}$. Изменение направления этого вектора равносильно изменению знаков коэффициентов и свободного члена в уравнении плоскости или умножению уравнения плоскости на отрицательный множитель. При этом положительное полупространство становится отрицательным, и наоборот.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$—две точки, не лежащие в плоскости, и $Ax_1+By_1+Cz_1+D$ и $Ax_2+By_2+Cz_2+D$—результаты подстановки их координат в левую часть уравнения плоскости, то совпадение или несовпадение знаков этих чисел не зависит от выбора вектора $\mathbf{n}$ или от умножения уравнения плоскости на любой числовой множитель. При совпадении знаков точки лежат в одном полупространстве.

При решении задач иногда бывает полезно следующее замечание: если точка x_0, y_0, z_0 лежит на плоскости, то точка с координатами x_0+A, y_0+B и z_0+C лежит в «положительном» полупространстве. Иначе говоря, вектор с координатами A, B, C всегда направлен в «положительное» полупространство. Читатель легко может проверить это непосредственной подстановкой.

Вполне аналогично сказанному о полупространствах, мы можем определить, что такое *полуплоскость*, и доказать, что неравенство $Ax+By+C\geqslant 0$, связывающее декартовы координаты точки на плоскости, определяет полуплоскость. Вторая полуплоскость, ограниченная прямой $Ax+By+C=0$, задается неравенством $Ax+By+C\leqslant 0$.

6. Расстояние от точки до плоскости. Пусть дана плоскость с уравнением $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{p}, \mathbf{q})=0$ и точка M с радиус-вектором **R**. Расстояние от точки до плоскости проще всего определить, разделив объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{R}-\mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, на площадь его основания (рис. 23). Мы получим

$$h=\frac{|(\mathbf{R}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{p},\ \mathbf{q})|}{|[\mathbf{p},\ \mathbf{q}]|}.$$

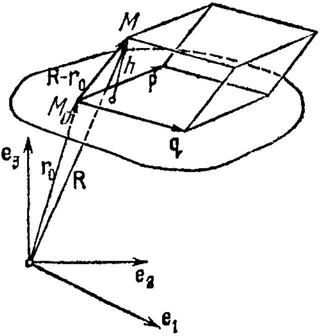

Рис. 23.

Для каждого вектора $\mathbf{n}$, нормального к плоскости, можно так выбрать направляющие векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, чтобы $[\mathbf{p},\ \mathbf{q}]=\mathbf{n}$. Поэтому при любом нормальном векторе $\mathbf{n}$ имеем

$$h=\frac{|(\mathbf{R}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|}. \qquad (8)$$

Если в декартовой прямоугольной системе координат точка M имеет координаты X, Y, Z, то равенство (8) запишется (предложение 6 § 2) так:

$$h=\frac{|AX+BY+CZ+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (9)$$

Здесь $D=-(\mathbf{r}_0,\ \mathbf{n})$, а A, B, C—компоненты $\mathbf{n}$.

Очевидно, $h=0$ тогда и только тогда, когда M лежит в плоскости. Уравнение

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

называют *нормированным уравнением плоскости*. Имеет место следующее

Предложение 2. *Расстояние от точки до плоскости равно абсолютной величине результата подстановки ее координат в нормированное уравнение плоскости.*

7. Расстояние от точки до прямой. Если прямая задана уравнением $[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a}]=0$, мы можем найти расстояние h от точки с радиус-вектором **R** до этой прямой, разделив площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{R}-\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$, на длину его основания (рис. 24). Результат можно записать формулой

$$h=\frac{|[\mathbf{R}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}. \qquad (10)$$

В случае прямой в пространстве мы не будем приводить координатной записи этого выражения. Рассмотрим прямую на плоскости, заданную в декартовой прямоугольной системе координат уравнением $Ax+By+C=0$. Возьмем в качестве направляющего вектор $\mathbf{a}(-B, A)$. Согласно формуле (15) § 3 гл. I

$$h=\frac{|(X-x_0)A-(Y-y_0)(-B)|}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{11}$$

где $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая точка прямой, X, Y — компоненты $\mathbf{R}$. Учитывая, что $C=-Ax_0-By_0$, мы находим

$$h=\frac{|AX+BY+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{12}$$

Исходя из (11), легко заметить, что

$$h=\frac{|(\mathbf{R}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|},$$

где $\mathbf{n}(A, B)$ — нормальный вектор прямой. Сравнив это выражение с формулой (8), мы видим, что аналогия между плоскостями и прямыми на плоскости сохраняется и в этой задаче.

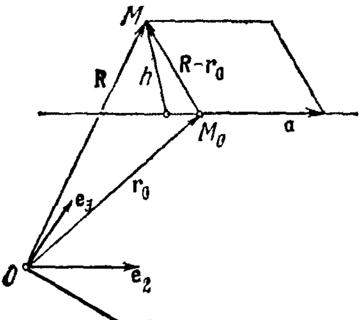

Рис. 24.

Уравнение вида

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

называется *нормированным уравнением прямой* на плоскости. Относительно него имеет место предложение, аналогичное предложению 2.

8. Расстояние между непараллельными прямыми в пространстве. Пусть прямые p и q не параллельны. Известно, что в этом случае существуют две такие параллельные плоскости P и Q, что прямая p лежит в P, а прямая q лежит в Q. (Если уравнения прямых $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=t\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r}-\mathbf{r}_2=t\mathbf{a}_2$, то плоскость P имеет начальную точку $\mathbf{r}_1$ и направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Аналогично строится плоскость Q.) Расстояние h между плоскостями P и Q называется *расстоянием между прямыми* p и q. Если p и q пересекаются, то P и Q совпадают и $h=0$.

Для того чтобы вычислить расстояние h, проще всего разделить объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, на площадь его основания (рис. 25). Мы получим

$$h=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2]|}.$$

Знаменатель этого выражения отличен от нуля, поскольку прямые не параллельны.

Предложение 3. *Прямые линии с уравнениями* $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{a}_1t$ *и* $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2+\mathbf{a}_2t$ *пересекаются тогда и только тогда, когда* $h=0$, *т. е.*

$$(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)=0, \qquad [\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2]\neq 0.$$

9. Вычисление углов. Чтобы определить угол между двумя прямыми, следует найти их направляющие векторы и вычислить угол между ними по формуле (4) § 3 гл. I. При этом следует иметь в виду, что, выбрав на одной из прямых направляющий вектор, направленный в другую сторону, тем же способом мы получим другой угол, дополняющий первый до π.

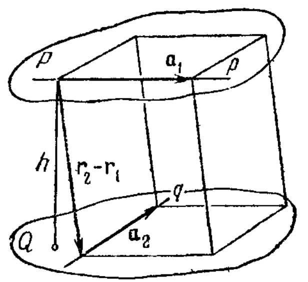

Рис. 25.

Для вычисления угла между прямой и плоскостью определяют угол θ между направляющим вектором прямой и вектором, перпендикулярным плоскости, и по нему находят искомый угол. Если направляющий вектор прямой выб рать так, чтобы $\cos\theta\geqslant 0$, и взять $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$, то угол между прямой и плоскостью дополняет θ до $\pi/2$.

Угол между плоскостями находят как угол между векторами, перпендикулярными плоскостям.

Все вычисления проще всего делать в декартовой прямоугольной системе координат. Тогда в качестве вектора, перпендикулярного плоскости, можно взять вектор с компонентами, равными коэффициентам при переменных в уравнении этой плоскости.

Пусть две прямые линии на плоскости заданы в декартовой прямоугольной системе координат уравнениями

$$y=k_1x+b_1, \qquad y=k_2x+b_2. \tag{13}$$

Обозначим через φ угол, отсчитываемый от первой пря мой ко второй в том направлении, в котором производится кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму; $\operatorname{tg}\varphi$ можно найти как тангенс разности углов, которые прямые составляют с осью абсцисс, а тангенсы этих углов равны угловым коэффициентам прямых. Мы получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{14}$$

Следует отметить, что эта формула не имеет смысла, когда знаменатель дроби обращается в нуль. В этом случае прямые перпендикулярны. Действительно, согласно предложению 1 § 2 векторы с компонентами $(1, k_1)$ и $(1, k_2)$—направляющие векторы прямых, и их скалярное произведение равно $1 + k_1 k_2$.

Предложение 4. *Для перпендикулярности прямых (13) необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$1 + k_1 k_2 = 0.$$

10. Некоторые задачи на построение. а) Перпендикуляр из точки на плоскость. Если плоскость задана уравнением $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$ и дана точка M с радиус-вектором $\mathbf{R}$, то прямая $\mathbf{r} = \mathbf{R} + t\mathbf{n}$ проходит через M и перпендикулярна плоскости. Решая совместно уравнение плоскости и уравнение прямой, найдем ортогональную проекцию точки на плоскость. Из $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0 + t\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 0$ получаем $t = -(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})/|\mathbf{n}|^2$, откуда радиус-вектор проекции

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \mathbf{n}\frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}.$$

б) Перпендикуляр из точки на прямую. Пусть прямая задана уравнением $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0$ и дана точка M с радиус-вектором $\mathbf{R}$. Вектор $\mathbf{p} = [\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]$ перпендикулярен плоскости, проходящей через прямую и точку M. Будем считать, что $\mathbf{p} \neq 0$. Вектор $[\mathbf{p}, \mathbf{a}] = [[\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}], \mathbf{a}]$ перпендикулярен $\mathbf{a}$ и $\mathbf{p}$ и, следовательно, лежит в указанной плоскости и перпендикулярен прямой. Итак, прямая

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + t[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{R} - \mathbf{r}_0]]$$

есть перпендикуляр, проведенный через M к заданной прямой.

в) Проекцию точки $M(\mathbf{R})$ на прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ можно найти, решая совместно уравнения прямой и плоскости $(\mathbf{r} - \mathbf{R}, \mathbf{a}) = 0$, проходящей через точку M перпендикулярно прямой. Из $(\mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t - \mathbf{R}, \mathbf{a}) = 0$ получаем $t = (\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})/|\mathbf{a}|^2$, откуда радиус-вектор проекции

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})/|\mathbf{a}|^2.$$

г) **Уравнение проекции прямой на плоскость просто получить, если не требуется находить ее направляющий вектор и начальную точку. Пусть заданная плоскость имеет уравнение $(\mathbf{r},\ \mathbf{n})+D=0$, а прямая — уравнение $[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,\ \mathbf{a}]=0$, причем $[\mathbf{a},\ \mathbf{n}]\neq 0$.** Тогда плоскость $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{n})=0$ проходит через прямую перпендикулярно заданной плоскости. Таким образом, проекция прямой на плоскость может быть задана системой двух уравнений как пересечение плоскостей. Если же нужно параметрическое уравнение проекции, то, по-видимому, лучше найти проекции каких-либо двух точек прямой на плоскость.

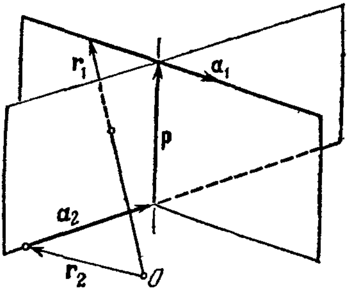

Рис. 26.

д) Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым. Пусть прямые $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{a}_1t$ и $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2+\mathbf{a}_2t$ не параллельны, т. е. $[\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2]\neq 0$ Вектор $\mathbf{p}=[\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2]$ перпендикулярен обеим прямым. Поэтому плоскость

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1,\ \mathbf{a}_1,\ [\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2])=0 \tag{15}$$

проходит через первую прямую и общий перпендикуляр (рис. 26), а плоскость

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2,\ \mathbf{a}_2,\ [\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2])=0 \tag{16}$$

— через вторую прямую и общий перпендикуляр к обеим прямым. Следовательно, общий перпендикуляр можно задать системой уравнений (15) и (16) как пересечение плоскостей. Чтобы найти его начальную точку, можно решить совместно уравнение первой прямой и уравнение плоскости (16). Направляющим вектором является вектор $\mathbf{p}=[\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2]$.

11. Пучок прямых. Связка и пучок плоскостей. *Пучком прямых на плоскости* называется совокупность прямых, проходящих через фиксированную точку — *центр пучка*. Обозначим через $U(x,\ y)$ и $V(x,\ y)$ трехчлены $A_1x+B_1y+C_1$ и $A_2x+B_2y+C_2$, причем будем предполагать, что $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$. В этом случае уравнения $U(x,\ y)=0$ и $V(x,\ y)=0$ определяют пересекающиеся прямые u и v. Обозначим координаты их точки пересечения M_0 через $(x_0,\ y_0)$. Уравнение

$$\alpha U(x,\ y)+\beta V(x,\ y)=0, \tag{17}$$

где $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, называется *уравнением пучка прямых*, определяемого прямыми u и v. Основанием для такого названия служит следующее

Предложение 5. *При любых α и β, не равных одновременно нулю, уравнение* (17) *определяет прямую линию, проходящую через центр пучка M_0. Обратно, каждая прямая, проходящая через M_0, имеет уравнение такого вида.*

Покажем, что коэффициенты при переменных в уравнении (17) одновременно не равны нулю. Перепишем это уравнение в виде

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)=0.$$

Допустим, что $\alpha A_1+\beta A_2=0$ и $\alpha B_1+\beta B_2=0$. Из предложения 10 § 2 вытекает, что значения $\alpha=0$ и $\beta=0$ единственные, которые удовлетворяют этим двум условиям. Но эти значения мы исключили. Таким образом, наше предположение неверно, уравнение (17) линейное и определяет прямую линию.

Поскольку очевидно, что

$$U(x_0, y_0)=0 \text{ и } V(x_0, y_0)=0,$$

мы имеем

$$\alpha U(x_0, y_0)+\beta V(x_0, y_0)=0.$$

Это значит, что прямая с уравнением (17) принадлежит к пучку.

Вторая часть предложения будет доказана, если окажется, что через любую точку, отличную от точки M_0, проходит прямая линия с уравнением вида (17). Легко проверить, так ли это. Рассмотрим некоторую точку M_1 с координатами (x_1, y_1). Подставив эти координаты в уравнение (17), имеем

$$\alpha U(x_1, y_1)+\beta V(x_1, y_1)=0.$$

Так как точка M_1 отлична от центра пучка, то числа $U(x_1, y_1)$ и $V(x_1, y_1)$ одновременно в нуль не обращаются. Поэтому мы вправе положить

$$\alpha=-V(x_1, y_1), \quad \beta=U(x_1, y_1).$$

При таких значениях α и β прямая с уравнением (17) проходит через M_1, и предложение полностью доказано. Заметим только, что каждая пара α, β определяет единственную прямую, но каждой прямой соответствует бесконечно много пропорциональных между собой пар α и β.

Если нам известны координаты центра пучка, то уравнение пучка можно написать в виде

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)=0,$$

положив, что пучок определяется прямыми с уравнениями

$$x-x_0=0 \text{ и } y-y_0=0.$$

Впрочем, и без того очевидно, что это — уравнение произвольной прямой, проходящей через заданную точку.

Связкой плоскостей называют совокупность плоскостей, проходящих через фиксированную точку — *центр связки*. Пусть плоскости с уравнениями

$$U(x, y, z)\equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$V(x, y, z)\equiv A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$W(x, y, z)\equiv A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

пересекаются в единственной точке M_0. Уравнение

$$\alpha U(x, y, z)+\beta V(x, y, z)+\gamma W(x, y, z)=0, \tag{18}$$

где $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$, называется *уравнением связки* с центром в точке M_0. Имеет место

Предложение 6. *При любых α, β и γ, не равных нулю одновременно, уравнение* (18) *определяет плоскость, проходящую через центр связки M_0, и каждая плоскость, проходящая через M_0, может быть задана уравнением такого вида.*

Для доказательства, используя предложение 5 § 2, представим U, V и W в виде

$$U(x, y, z)=(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1)+D_1,$$
$$V(x, y, z)=(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2)+D_2,$$
$$W(x, y, z)=(\mathbf{r}, \mathbf{n}_3)+D_3.$$

Тогда уравнение (18) заменится на

$$(\mathbf{r}, \alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_2+\gamma\mathbf{n}_3)+(\alpha D_1+\beta D_2+\gamma D_3)=0. \tag{19}$$

Поскольку плоскости пересекаются в единственной точке, их нормальные векторы не компланарны. Следовательно, $\alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_2+\gamma\mathbf{n}_3\neq 0$, как только $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$. Это означает, что уравнение (19), а вместе с ним и (18), определяет плоскость. Эта плоскость проходит через центр связки. Действительно, его координаты x_0, y_0, z_0 удовлетворяют уравнению (18), так как

$$U(x_0, y_0, z_0)=0,\ V(x_0, y_0, z_0)=0 \text{ и } W(x_0, y_0, z_0)=0.$$

Рассмотрим произвольную плоскость, проходящую через центр связки M_0. Пусть ее уравнение $(\mathbf{r}, \mathbf{n})+D=0$. Вектор $\mathbf{n}$ мы можем разложить по некомпланарным векторам $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$:

$$(\mathbf{r}, \alpha\mathbf{n}_1+\beta\mathbf{n}_2+\gamma\mathbf{n}_3)+D=0.$$

Сравним теперь это уравнение с уравнением (19) при тех же α, β и γ. Радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ центра связки M_0 удовлетворяет обоим уравнениям. Подставим его в каждое из уравнений и вычтем полученные числовые равенства одно из другого. Мы получим $D=\alpha D_1+\beta D_2+\gamma D_3$, что означает, что оба уравнения совпадают. Предложение доказано.

Предоставим читателю самостоятельно вывести *уравнение пучка плоскостей*, т. е. совокупности плоскостей, проходящих через фиксированную прямую — ось пучка. Уравнение пучка плоскостей имеет вид

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

где в скобках стоят правые части уравнений двух плоскостей пучка и $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Посмотрим на уравнение пучков прямых с несколько более общей точки зрения. Систему из уравнений прямых, определяющих пучок, можно рассматривать как уравнение центра пучка. Поэтому уравнение каждой прямой, проходящей через центр пучка, есть следствие этой системы. Так же можно рассуждать и о пучке, и о связке плоскостей. Наши результаты теперь можно сформулировать так: если система линейных уравнений имеет решение, то некоторое линейное уравнение является ее следствием тогда и только тогда, когда оно есть сумма уравнений системы, умноженных на некоторые числа.

Мы доказали это для нескольких частных случаев. В общем виде это вытекает из результатов гл. V о системах линейных уравнений.

12. О геометрическом смысле порядка алгебраической линии. Пусть на плоскости задана алгебраическая линия L, имеющая уравнение

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}+\ldots+A_sx^{k_s}y^{l_s}=0 \qquad (20)$$

в декартовой системе координат. Рассмотрим произвольную прямую, заданную параметрическими уравнениями

$$x=x_0+a_1t, \quad y=y_0+a_2t \qquad (21)$$

в той же системе координат. Найдем точки пересечения прямой и линии L. Они будут известны, если мы найдем соответствующие значения параметра t. Это будут те значения, при которых x и y, выраженные по формулам (21), удовлетворяют уравнению (20). Подставляя (21) в (20), получим

$$A_1 (x_0 + a_1 t)^{k_1} (y_0 + a_2 t)^{l_1} + \ldots$$
$$\ldots + A_s (x_0 + a_1 t)^{k_s} (y_0 + a_2 t)^{l_s} = 0. \quad (22)$$

При раскрытии скобок в каждом члене мы получим многочлены степеней $k_1 + l_1, \ldots, k_s + l_s$ относительно t. Их сумма будет многочленом относительно t степени не большей, чем максимальная из степеней слагаемых. Но максимальное из чисел $k_1 + l_1, \ldots, k_s + l_s$ является порядком линии L. Таким образом, степень уравнения (22) не превосходит порядка линии.

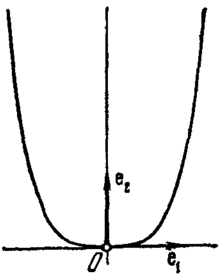

Рис. 27. Линия с уравнением $y = x^4$.

Может, конечно, случиться, что все коэффициенты уравнения равны нулю и оно представляет собой тождество. В этом случае прямая всеми своими точками лежит на линии. Если исключить этот случай, число корней уравнения и, следовательно, точек пересечения не превосходит порядка линии. Мы доказали следующее

Предложение 7. *Число точек пересечения алгебраической линии L с прямой, которая на ней не лежит целиком, не может превосходить порядка линии L.*

Существуют линии, которые ни с одной прямой не имеют наибольшего возможного числа точек пересечения, равного порядку линии. Примером может служить линия четвертого порядка, имеющая в декартовой прямоугольной системе координат уравнение $y = x^4$. Она пересекается с любой прямой не более чем в двух точках (рис. 27).

Пример. Архимедова спираль — линия с уравнением $r = a\varphi$ в полярной системе координат — пересекает каждую прямую, проходящую через полюс, в бесконечном числе точек. Следовательно, она не является алгебраической линией.

ГЛАВА III

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В первых параграфах этой главы мы будем заниматься линиями второго порядка на плоскости. Такую линию можно задать уравнением второго порядка общего вида[1])

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

в котором коэффициенты A, B и C не равны нулю одновременно.

§ 1. Исследование уравнения второго порядка

Мы хотим исследовать, что представляет собой произвольная линия второго порядка. Для этого мы зададимся некоторым уравнением (1), причем не будем относительно него предполагать ничего, кроме того, что A, B и C не равны одновременно нулю. Найдем множество точек, которые удовлетворяют уравнению (1), не предполагая заранее, что хоть одна такая точка существует. С этой целью мы будем менять декартову систему координат так, чтобы уравнение стало возможно проще. С самого начала будем считать систему координат декартовой прямоугольной, так как при переходе к прямоугольной системе координат общий вид уравнения (1) не изменится.

При повороте базиса декартовой прямоугольной системы координат на угол φ старые координаты x, y будут связаны с новыми координатами x', y' формулами перехода (ср. (7) § 4 гл. I)

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi, \qquad y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi.$$

В новых координатах уравнение (1) примет вид

$$A(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)^2+2B(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)\times$$
$$\times(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)+C(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)^2+\ldots=0.$$

---

[1]) Коэффициенты при произведении переменных и при их первых степенях обозначены $2B$, $2D$ и $2E$, так как ниже часто будут встречаться половины этих коэффициентов.

Здесь многоточием обозначены члены первой степени относительно x' и y' и свободный член, которые нам нет необходимости выписывать. Нас будет интересовать член с произведением $x'y'$ в преобразованном уравнении. В невыписанные члены произведение $x'y'$ не входит, и мы легко можем подсчитать, что коэффициент при $x'y'$

$$B' = -A\sin\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + C\sin\varphi\cos\varphi.$$

Если $B=0$, то поворачивать систему координат не будем. Если же $B\neq 0$, то выберем угол φ так, чтобы B' обратилось в нуль. Это требование приведет к уравнению $2B\cos 2\varphi = (A-C)\sin 2\varphi$ для φ. Если $A=C$, то $\cos 2\varphi = 0$ и можно положить $\varphi = \pi/4$. Если же $A\neq C$, то выбираем $\varphi = {}^1/_2 \operatorname{arctg}[2B/(A-C)]$. Для нас сейчас важно то, что хоть один такой угол всегда существует. После поворота системы координат на этот угол рассматриваемое уравнение заменится на уравнение

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0. \qquad (2)$$

Выражения для коэффициентов уравнения (2) через коэффициенты уравнения (1) и угол φ получить нетрудно, но они нам не нужны. Важно только, что за счет поворота системы координат произвольное уравнение второго порядка можно привести к виду (2). Теперь $B'=0$, а остальные коэффициенты мы по-прежнему считаем произвольными.

Сформулируем следующее вспомогательное

Предложение 1. *Если в уравнение* (2) *входит* (*с ненулевым коэффициентом*) *квадрат одной из координат, то при помощи переноса начала координат вдоль соответствующей оси можно обратить в нуль член с первой степенью этой координаты.*

В самом деле, пусть, например, $A'\neq 0$. Перепишем (2) в виде

$$A'\left(x'^2 + \frac{2D'}{A'}x' + \left(\frac{D'}{A'}\right)^2\right) + C'y'^2 + 2E'y' + F' - \frac{D'^2}{A'} = 0.$$

Если мы сделаем перенос начала координат, определяемый формулами $x'' = x' + D'/A'$, $y'' = y'$, то уравнение (2) приведется к виду

$$A'x''^2 + C'y''^2 + 2E'y'' + F'' = 0.$$

Предложение доказано.

А) *Предположим, что в уравнении* (2) $A'C'\neq 0$, т. е. A' и C' оба отличны от нуля. Согласно предложению 1 уравнение может быть приведено к виду

$$A'x''^2+C'y''^2+F''=0. \tag{2'}$$

Могут быть сделаны следующие предположения относительно знаков коэффициентов в этом уравнении.

1) *Коэффициенты A' и C' имеют один и тот же знак.* Для знака F'' имеются три возможности:

а) *Знак F'' противоположен знаку A' и C'.* Перенесем F'' в правую часть равенства и разделим на него Уравнение примет вид

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1, \tag{3}$$

где $a^2=-F''/A'$, $b^2=-F''/C'$.

Мы можем считать, что в этом уравнении $a \geqslant b$. В самом деле, если $a<b$, можно сделать дополнительную замену координат

$$x^*=y'', \quad y^*=x''. \tag{4}$$

Определение. Линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат может быть задана уравнением (3) при условии $a \geqslant b$, называется *эллипсом*, а уравнение (3)—*каноническим уравнением эллипса*.

При $a=b$ уравнение (3) есть *уравнение окружности* радиуса a. Таким образом, окружность есть частный случай эллипса.

б) *Знак F'' совпадает с общим знаком A' и C'.* Тогда, аналогично предыдущему, мы можем привести уравнение к виду

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=-1. \tag{5}$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки. Уравнение, которое приводится к каноническому виду (5), называется *уравнением мнимого эллипса*.

в) $F''=0$. Уравнение имеет вид

$$a^2x''^2+c^2y''^2=0. \tag{6}$$

Ему удовлетворяет только одна точка $x''=0$, $y''=0$. Уравнение, приводящееся к каноническому виду (6), называется *уравнением пары мнимых пересекающихся прямых*. Основанием для такого названия служит сходство с приведенным ниже уравнением (8).

2) *Предположим, что в уравнении (2') коэффициенты A' и C' имеют разные знаки.* Относительно свободного члена возможны два предположения.

а) $F'' \neq 0$. В случае необходимости делая замену (4), мы можем считать, что знак F'' противоположен знаку A'. Тогда уравнение приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

где $a^2 = -F''/A'$, $b^2 = F''/C'$.

Определение. Линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат может быть задана уравнением (7), называется *гиперболой*, а уравнение (7) — *каноническим уравнением гиперболы*.

б) $F'' = 0$. Уравнение имеет вид

$$a^2x''^2 - c^2y''^2 = 0. \tag{8}$$

Его левая часть разлагается на множители

$$(ax'' - cy'')(ax'' + cy'')$$

и, следовательно, обращается в нуль тогда и только тогда, когда равен нулю хоть один из множителей. Поэтому линия с уравнением (8) состоит из двух прямых. Прямые эти пересекаются в начале координат, и мы имеем, таким образом, пару пересекающихся прямых.

Б) *Допустим теперь, что* $A'C' = 0$ и, следовательно, один из коэффициентов A' или C' равен нулю. В случае необходимости делая замену (4), мы можем считать, что $A' = 0$. Заметим, что $C' \neq 0$, так как иначе порядок уравнения (2) понизился бы. Используя предложение 1, мы приведем уравнение линии к виду

$$C'y''^2 + 2D'x' + F'' = 0.$$

а) *Допустим, что* $D' \neq 0$. Сгруппируем члены следующим образом:

$$C'y''^2 + 2D'\left(x' + \frac{F''}{2D'}\right) = 0.$$

Теперь очевидно, что, перенеся начало координат вдоль оси абсцисс в соответствии с формулами перехода $x^* = x' + F''/2D'$, $y^* = y''$, мы приведем уравнение к виду

$$C'y^{*2} + 2Dx^* = 0,$$

или

$$y^{*2} = 2px^*, \tag{9}$$

где $p = -D'/C'$. Мы можем считать, что $p > 0$, так как в противном случае можно сделать дополннтельную замену координат, изменяющую направление оси абсцисс.

Определение. Линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат может быть задана уравнением (9) при условии $p>0$, называется *параболой*, а уравнение (9) — *каноническим уравнением параболы*.

б) *Допустим теперь, что* $D'=0$, т. е. уравнение имеет вид

$$C'y''^2+F''=0.$$

Если *знаки* C' *и* F'' *противоположны*, то, разделив на C', мы можем записать $y''^2-a^2=(y''-a)(y''+a)=0$ Обращение в нуль каждого из множителей определяет прямую и вся линия представляет собой *пару параллельных прямых*.

Если *знаки* C' *и* F'' *совпадают*, то, разделив на C', мы приводим уравнение к каноническому виду

$$y''^2+a^2=0. \qquad (10)$$

Этому уравнению не удовлетворяет ни одна точка. Уравнение, приводящееся к каноническому виду (10), называется *уравнением пары мнимых параллельных прямых*.

Может случиться, что $F''=0$. Тогда уравнение линии равносильно $y''^2=0$. Линия второго порядка представляет собой прямую. Левая часть уравнения (1), приводящегося к каноническому виду $y''^2=0$, представляет собой квадрат линейного многочлена, и потому уравнение эквивалентно линейному. Такое уравнение носит название *уравнения пары совпавших прямых*.

Соберем вместе полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть в декартовой системе координат задано уравнение второго порядка*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Тогда существует такая декартова прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$,

3) $a^2x^2+c^2y^2=0$, 4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

5) $a^2x^2-c^2y^2=0$, 6) $y^2=2px$,

7) $y^2-a^2=0$, 8) $y^2+a^2=0$,

9) $y^2=0$.

В соответствии с этим существует семь классов линий второго порядка: 1) эллипсы, 3) точки (пары мнимых пересекающихся прямых), 4) гиперболы, 5) пары пересекающихся прямых, 6) параболы, 7) пары параллельных прямых, 9) прямые (пары совпавших прямых).

Уравнению 2) мнимого эллипса и уравнению 8) пары мнимых параллельных прямых не удовлетворяет ни одна точка.

§ 2. Эллипс, гипербола и парабола

В предыдущем параграфе мы познакомились с классификацией линий второго порядка. Геометрические свойства только трех классов линий не являются очевидными. Ими мы и займемся в этом параграфе

1. Эллипс. Напомним, что мы назвали эллипсом линию, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

при условии $a \geqslant b$. Система координат, о которой говорится в определении, называется *канонической*.

Из уравнения (1) сразу следует, что для всех точек эллипса $|x| \leqslant a$ и $|y| \leqslant b$, т. е. эллипс лежит внутри прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$. Точки пересечения эллипса с осями канонической системы координат, имеющие координаты $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ и $(0, -b)$, называются *вершинами* эллипса. Расстояния от начала координат до вершин a и b называются соответственно *большой* и *малой полуосями* эллипса.

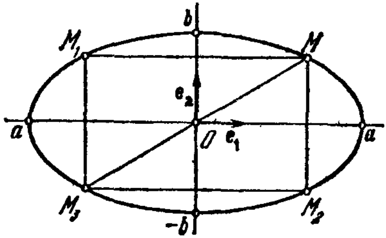

Рис. 28.

Поскольку в каноническое уравнение (1) входят только квадраты координат, это уравнение обладает следующим свойством: если координаты (x, y) какой-либо точки M ему удовлетворяют, то ему удовлетворяют и координаты $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ точек M_1, M_2 и M_3 (рис. 28). Отсюда вытекает такое предложение.

Предложение 1. *Для эллипса оси канонической системы координат являются осями симметрии, а начало канонической системы — центром симметрии.*

Центр симметрии называют просто *центром* эллипса.

Внешний вид эллипса (1) проще всего описать, сравнив его с окружностью радиуса a с центром в центре эллипса. Уравнение этой окружности напишем в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

При каждом x таком, что $|x|<a$, найдутся две точки окружности с ординатами $\pm a\sqrt{1-x^2/a^2}$ и две точки эллипса с ординатами $\pm b\sqrt{1-x^2/a^2}$ Пусть точке окружности соответствует точка эллипса с ординатой того же знака. Тогда отношение ординат соответствующих точек равно b/a. Итак, эллипс получается из окружности таким сжатием ее к оси абсцисс, при котором ордината каждой точки уменьшается в одном и том же отношении b/a (рис. 29)

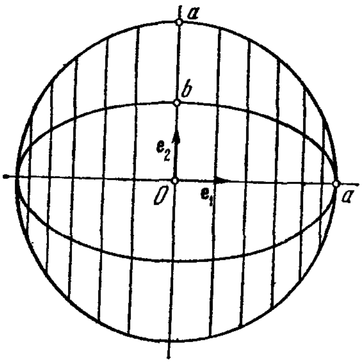

Рис. 29 Эллипс как сжатие окружности. Здесь $b/a=1/2$

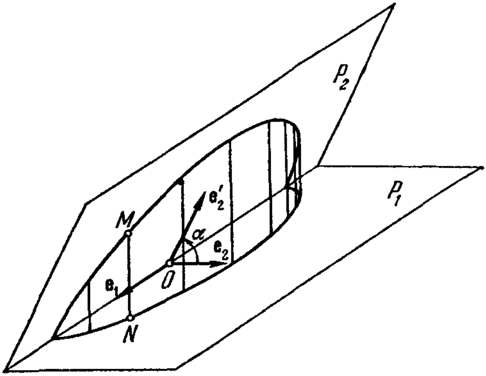

Рис. 30

Геометрически преобразование окружности в эллипс можно осуществить, взяв вторую плоскость P_2, пересекающуюся с исходной P_1 вдоль оси абсцисс под углом $\alpha=\arccos(b/a)$ (рис. 30) На плоскости P_2 выберем декартову прямоугольную систему координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}'_2$, у которой начало и базисный вектор $\mathbf{e}_1$ совпадают с началом и вектором $\mathbf{e}_1$ системы координат на плоскости P_1, а вектор $\mathbf{e}'_2$ составляет угол α с вектором $\mathbf{e}_2$. Рассмотрим окружность $X^2+Y^2=a^2$ на плоскости P_2. Если из точки $M(X, Y)$ на плоскости P_2 опустить перпендикуляр на плоскость P_1, то координаты (x, y) его основания N получатся по формулам $x=X$, $y=Y\cos\alpha=bY/a$. Поэтому эллипс является множеством оснований перпендикуляров, опущенных из точек окружности, или, как говорят, *ортогональной проекцией окружности*.

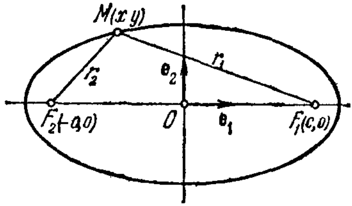

Рис. 31.

С эллипсом связаны две замечательные точки, называемые его фокусами. Пусть по определению

$$c^2=a^2-b^2 \qquad (2)$$

и $c \geqslant 0$. *Фокусами* называются точки F_1 и F_2 с координатами соответственно $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ в канонической системе координат.

Для окружности $c=0$ и оба фокуса совпадают с центром. Ниже мы будем предполагать, что эллипс не является окружностью.

Отношение

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (3)$$

называется *эксцентриситетом* эллипса. Отметим, что всегда $\varepsilon<1$.

Предложение 2. *Расстояние от произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на эллипсе, до каждого из фокусов является линейной функцией от ее абсциссы x:*

$$\left.\begin{aligned} r_1&=|F_1M|=a-\varepsilon x,\\ r_2&=|F_2M|=a+\varepsilon x \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

(рис. 31). Подставим сюда выражение y^2, найденное из уравнения эллипса. Мы получим

$$r_1=\sqrt{x^2-2cx+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}.$$

Преобразуем подкоренное выражение, учитывая равенство (2):

$$r_1 = \sqrt{a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}}.$$

Мы видим, что под корнем стоит квадрат линейного двучлена, т. е. $r_1 = |a - \varepsilon x|$. Так как $\varepsilon < 1$ и $x \leqslant a$, имеем $a - \varepsilon x > 0$. Мы доказали первое из равенств (4). Второе доказывается аналогично.

Предложение 3. *Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы сумма ее расстояний до фокусов равнялась большой оси эллипса 2a*

Необходимость условия очевидна: если мы сложим равенства (4) почленно, то увидим, что

$$r_1 + r_2 = 2a. \qquad (5)$$

Докажем достаточность. Пусть для точки $M(x, y)$ выполнено условие (5), т. е.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и приведем подобные члены:

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \qquad (6)$$

Это равенство также возведем в квадрат и приведем подобные члены, используя соотношение (2). Мы придем к равенству, равносильному уравнению эллипса (1).

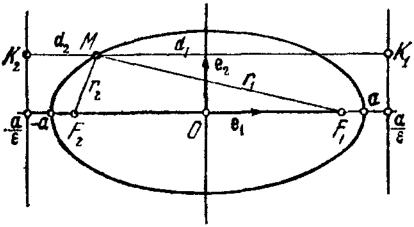

Рис 32

С эллипсом связаны две замечательные прямые, называемые его *директрисами*. Их уравнения в канонической системе координат (рис. 32):

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \qquad (7)$$

Директрису и фокус, которые лежат по одну сторону от центра, будем считать соответствующими друг другу.

Предложение 4. *Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету эллипса ε.*

Докажем это предложение для фокуса $F_2(-c, 0)$. Обозначим расстояние от произвольной точки эллипса $M(x, y)$ до директрисы с уравнением $x=-a/\varepsilon$ через d_2 Тогда, согласно формуле (12) § 3 гл II,

$$d_2 = x + \frac{a}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon x + a),$$

что только множителем $1/\varepsilon$ отличается от выражения (4) для r_2

Обратно, пусть для какой-нибудь точки плоскости $r_2/d_2 = \varepsilon$, т. е.

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{x+a/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Учитывая, что $\varepsilon = c/a$, это равенство легко привести к виду (6), из которого, как мы знаем, вытекает уравнение эллипса (1).

Для другого фокуса предложение вытекает из симметрии эллипса относительно оси ординат канонической системы координат.

Получим теперь уравнеиие касательной к эллипсу, заданному каноническ м уравнением. Известно, что угловой коэффициент прямой, которая касается графика функции в какой-то точке (x_0, y_0), равен производной этой функции в точке x_0. Пусть $y_0 \neq 0$. Через точку (x_0, y_0) на эллипсе проходит график функции $f(x)$, целиком лежащий на эллипсе. (Для $y_0 > 0$ это — график функции $f_1(x) = b\sqrt{1-x^2/a^2}$, для $y_0 < 0$ — функции $f_2(x) = -b\sqrt{1-x^2/a^2}$. Не уточняя знак y_0, обозначим через $f(x)$ подходящую функцию.) Для функции $f(x)$ выполнено тождество

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(f(x))^2}{b^2} = 1.$$

Дифференцируя его по x, находим

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2ff'}{b^2} = 0.$$

Подставляя $x = x_0$, $f(x_0) = y_0$ и решая относительно $f'(x_0)$, получаем, в силу $y_0 \neq 0$,

$$f'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$

Теперь мы можем написать уравнение касательной в точке (x_0, y_0):

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Для упрощения преобразуем его к виду $a^2yy_0+b^2xx_0=$ $=b^2x_0^2+a^2y_0^2$. Так как точка (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению эллипса, имеем $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$, откуда a^2yy_0+ $+b^2xx_0=a^2b^2$. Итак, уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1. \qquad (8)$$

При выводе уравнения (8) мы исключили вершины эллипса $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, положив $y_0\neq 0$. Для этих точек уравнение (8) превращается соответственно в уравнения $x=a$ и $x=-a$, которые определяют касательные в вершинах. Проверить это можно, заметив, что в вершинах x как функция от y достигает экстремума. Предоставим читателю проделать это подробно и показать тем самым, что уравнение (8) определяет касательную к эллипсу для любой точки (x_0, y_0) на эллипсе.

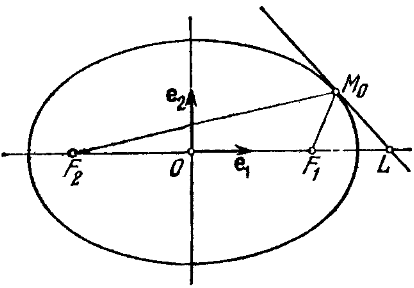

Рис. 33.

Предложение 5. *Касательная к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ есть биссектриса угла, смежного с углом между отрезками, соединяющими эту точку с фокусами.*

Доказательство. Пусть L — точка пересечения касательной с осью абсцисс (рис. 33). Из уравнения (8) сразу находим, что ее абсцисса равна a^2/x_0. Заметим, что $a^2/|x_0|>a$ и, следовательно, L лежит вне отрезка F_1F_2. Расстояния от L до фокусов равны $|F_1L|=|a^2/x_0-c|$ и $|F_2L|=|a^2/x_0+c|$, поэтому их отношение

$$\frac{|F_1L|}{|F_2L|}=\frac{|a^2/x_0-c|}{|a^2/x_0+c|}=\frac{|a-\varepsilon x_0|}{|a+\varepsilon x_0|}$$

равно отношению длин отрезков M_0F_1 и M_0F_2. Отсюда мы заключаем, что M_0L есть биссектриса внешнего угла треугольника $M_0F_1F_2$, что нам и требовалось. Следует заметить, что наше доказательство теряет смысл для вершин эллипса. Но для них утверждение очевидно.

2. Гипербола. Гиперболой мы назвали линию, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (9)$$

Система координат, о которой говорится в определении, называется *канонической*.

Из уравнения (9) сразу вытекает, что для всех точек гиперболы $|x| \geqslant a$, т. е. все точки гиперболы лежат вне вертикальной полосы ширины $2a$ (рис. 34). Ось абсцисс канонической системы пересекает гиперболу в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, называемых *вершинами* гиперболы. Ось ординат не пересекает гиперболу. Числа a и b называются соответственно *вещественной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

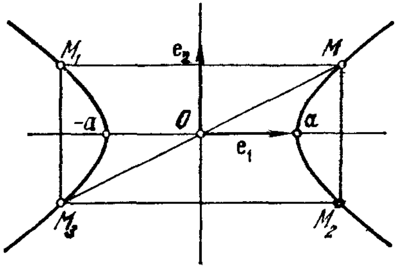

Рис. 34.

В точности так же, как и для эллипса, доказывается следующее

Предложение 6. *Для гиперболы оси канонической системы координат являются осями симметрии, а начало канонической системы — центром симметрии.*

Центр симметрии называется *центром* гиперболы (рис. 34).

Для исследования формы гиперболы найдем ее пересечение с произвольной прямой, проходящей через начало координат. Уравнение прямой возьмем в виде $y = kx$, поскольку мы уже знаем, что прямая $x = 0$ не пересекает гиперболу. Абсциссы точек пересечения находятся из уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1$$

или, если $b^2 - a^2k^2 > 0$,

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}.$$

Это позволяет указать координаты двух точек пересечения:

$$(ab/v,\ abk/v) \text{ и } (-ab/v,\ -abk/v),$$

где обозначено $v = (b^2 - a^2k^2)^{1/2}$. В силу симметрии достаточно проследить за движением первой из точек при изменении k (рис. 35).

Числитель дроби ab/v постоянен, а знаменатель принимает наибольшее значение при $k = 0$. Следовательно, наименьшую абсциссу имеет точка с координатами $(a, 0)$. С ростом k знаменатель убывает и абсцисса x растет, стремясь к бесконечности, когда k приближается к числу b/a. Прямая $y=bx/a$ с угловым коэффициентом b/a не пересекает гиперболу, и прямые с бо́льшими угловыми коэффициентами тем более ее не пересекают.

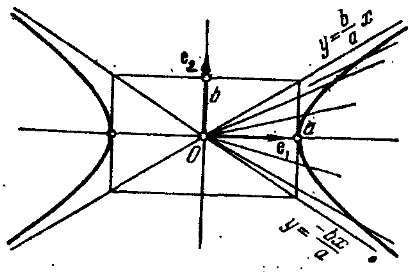

Рис. 35.

Любая прямая с меньшим положительным угловым коэффициентом пересекает гиперболу.

Если мы будем поворачивать прямую от горизонтального положения по часовой стрелке, то k будет убывать, а k^2 — расти и прямая будет пересекать гиперболу во все удаляющихся точках, пока не займет положения с угловым коэффициентом $-b/a$. К прямой $y=-bx/a$ относится все, что сказано о $y=bx/a$: она не пересекает гиперболу и отделяет прямые, пересекающие ее, от непересекающих.

Определение. Прямые с уравнениями $y=bx/a$ и $y=-bx/a$ в канонической системе координат называются *асимптотами* гиперболы.

Из приведенных выше рассуждений вытекает, что гипербола имеет вид, изображенный на рис. 35. Гипербола состоит из двух отдельных кусков, называемых ее *ветвями*.

Запишем уравнения асимптот в виде $bx-ay=0$ и $bx+ay=0$. Расстояния от точки M с координатами (x, y) до асимптот равны соответственно (ср. (12) § 3 гл. II)

$$h_1=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad h_2=\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если точка M находится на гиперболе, то $b^2x^2-a^2y^2=$ $=a^2b^2$ и

$$h_1h_2=\frac{|b^2x^2-a^2y^2|}{a^2+b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Предложение 7. *Произведение расстояний от точки гиперболы до асимптот п стоянно и равно* $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Отсюда следует важное свойство асимптот.

Предложение 8. *Если точка движется по гиперболе так, что ее абсцисса по абсолютной величине неог-*

раниченно возрастает, то расстояние от точки до одной из асимптот стремится к нулю.

Действительно, хотя бы одно из расстояний h_1 или h_2 при этих условиях должно неограниченно возрастать, и, если бы предложение было неверно, произведение не было бы постоянно.

С гиперболой связаны две замечательные точки, называемые ее фокусами. Введем число c, положив по определению

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (10)$$

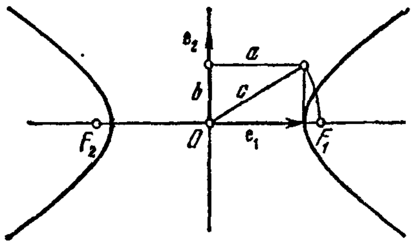

Рис. 36.

и $c > 0$. *Фокусами* гиперболы называются точки F_1 и F_2 с координатами соответственно $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ в канонической системе координат (рис. 36).

Отношение $\varepsilon = c/a$, как и для эллипса, называется *эксцентриситетом*. У гиперболы всегда $\varepsilon > 1$.

Предложение 9. *Расстояния от произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на гиперболе, до каждого из фокусов следующим образом зависят от ее абсциссы x:*

$$r_1 = |F_1M| = |a - \varepsilon x|,$$
$$r_2 = |F_2M| = |a + \varepsilon x|. \quad (11)$$

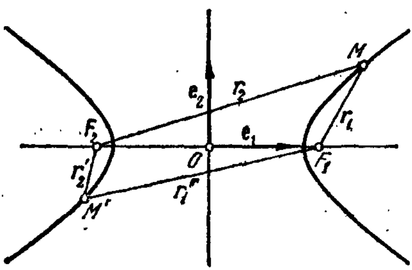

Рис. 37. $r_2 - r_1 = 2a$, $r_1' - r_2' = 2a$.

Доказательство этого предложения почти дословно совпадает с доказательством предложения 2, и мы не будем его воспроизводить.

Равенства (11) подробнее можно записать так (рис. 37): для $x \geqslant a$ (правой ветви гиперболы)

$$r_1 = \varepsilon x - a, \quad r_2 = \varepsilon x + a;$$

для $x \leqslant -a$ (левой ветви гиперболы)

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = -\varepsilon x - a.$$

Мы видим, что для правой ветви гиперболы $r_2 - r_1 = 2a$, а для левой $r_1 - r_2 = 2a$. В обоих случаях

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{12}$$

Это доказывает необходимость условия в следующем предложении.

Предложение 10. *Для того чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы разность ее расстояний до фокусов по абсолютной величине равнялась вещественной оси гиперболы.*

Для доказательства достаточности условия его нужно представить в виде

$$\pm\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Дальнейшее отличается от доказательства предложения 3 только тем, что нужно воспользоваться равенством (10), а не (2).

С гиперболой связаны две прямые линии, называемые ее *директрисами*. Их уравнения в канонической системе координат:

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{13}$$

Директрисы гиперболы лежат ближе к центру, чем вершины, и, следовательно, не пересекают гиперболу. Директрису и фокус, которые лежат по одну сторону от центра, будем считать соответствующими друг другу.

Предложение 11. *Для того чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету гиперболы ε.*

Докажем это предложение для фокуса F_2. Обозначим расстояние от произвольной точки гиперболы $M(x, y)$ до директрисы с уравнением $x = -a/\varepsilon$ через d_2 (рис. 38). Тогда, согласно формуле (12) § 3 гл. II, имеем

$$d_2 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{1}{\varepsilon}|\varepsilon x + a|,$$

что только множителем $1/\varepsilon$ отличается от r_2 (ср. (11)).

Достаточность условия доказывается так же, как в предложении 4 для эллипса.

Уравнение касательной к гиперболе в точке (x_0, y_0), лежащей на гиперболе, выводится так же, как и соответствующее уравнение (8) для эллипса. Оно имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{14}$$

Предложение 12. *Касательная к гиперболе в точке $M_0(x_0, y_0)$ есть биссектриса угла между отрезками, соединяющими эту точку с фокусами.*

Доказательство почти не отличается от доказательства предложения 5. Рекомендуем читателю полностью провести доказательство этого и остальных утверждений, сфор-

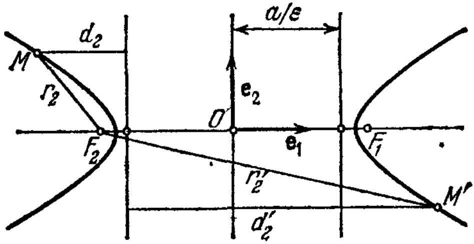

Рис. 38.

мулированных, но не доказанных для гиперболы в этом пункте.

3. Парабола. Параболой мы назвали линию, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$y^2 = 2px \tag{15}$$

при условии $p > 0$. Система координат, о которой говорится в определении, называется *канонической*.

Из уравнения (15) вытекает, что для всех точек параболы $x \geqslant 0$. Парабола проходит через начало канонической системы координат. Эта точка называется *вершиной* параболы.

Поскольку вместе с каждой точкой $M(x, y)$ уравнению параболы удовлетворяет и точка $M_1(x, -y)$, ось абсцисс канонической системы координат является осью симметрии параболы.

Форма параболы известна из курса средней школы, где парабола встречалась в качестве графика функции $y = ax^2$. Отличие уравнений объясняется тем, что в канонической системе координат по сравнению с прежней оси координат поменялись местами и коэффициент a^{-1} обозначен через $2p$.

Фокусом F параболы называется точка с координатами $(p/2,\ 0)$ в канонической системе координат (рис. 39).

Директрисой параболы называется прямая с уравнением $x=-p/2$ в канонической системе координат.

Предложение 13. *Расстояние от произвольной точки параболы до фокуса равно*

$$r=x+\frac{p}{2}. \tag{16}$$

Для доказательства подставим y^2 из уравнения (15) в выражение $r=\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}$ для расстояния от точки $M(x,\ y)$ до фокуса:

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+px}.$$

Преобразовав подкоренное выражение, мы находим

$$r=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

откуда в силу $x\geqslant 0$ вытекает (16).

Заметим, что расстояние от точки параболы до директрисы, согласно формуле (12) § 3 гл. II, также равняется

$$d=x+\frac{p}{2}.$$

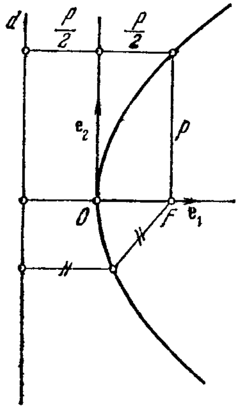

Рис. 39.

Отсюда вытекает необходимость условия в следующем предложении.

Предложение 14. *Для того чтобы точка M лежала на параболе, необходимо и достаточно, чтобы она была одинаково удалена от фокуса и от директрисы этой параболы.*

Докажем достаточность. Пусть точка $M(x,\ y)$ одинаково удалена от фокуса и от директрисы параболы (15), т. е.

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Возводя это равенство в квадрат и приводя подобные члены, мы получаем из него уравнение параболы. Это заканчивает доказательство.

Параболе приписывается эксцентриситет $\varepsilon=1$. В силу этого соглашения формула

$$\frac{r}{d}=\varepsilon,$$

связывающая расстояния от точки линии до фокуса и до директрисы, будет верна и для эллипса, и для гиперболы, и для параболы.

Выведем уравнение касательной к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на параболе. Пусть $y_0 \neq 0$. Через точку M_0 проходит график функции $y = f(x)$, целиком лежащий на параболе. (Это $y = \sqrt{2px}$ или $y = -\sqrt{2px}$, смотря по знаку y_0.) Для функции $f(x)$ выполнено тождество $(f(x))^2 = 2px$, дифференцируя которое имеем $2f(x)f'(x) = 2p$. Подставляя $x = x_0$ и $f(x_0) = y_0$, находим

$$f'(x_0) = \frac{p}{y_0},$$

поскольку $y_0 \neq 0$. Теперь мы можем написать уравнение касательной к параболе:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0).$$

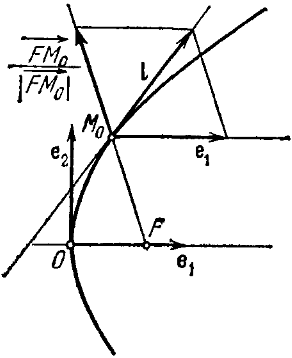

Рис. 40.

Упростим его. Для этого раскроем скобки: $yy_0 - y_0^2 = px - px_0$ — и заметим, что $y_0^2 = 2px_0$. Теперь уравнение касательной к параболе принимает окончательный вид:

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{17}$$

Заметим, что для вершины параболы, которую мы исключили, положив $y_0 \neq 0$, уравнение (17) превращается в уравнение $x = 0$, т. е. уравнение касательной в вершине. Итак, уравнение (17) справедливо для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ на параболе.

Предложение 15. *Касательная к параболе в точке M_0 есть биссектриса угла, смежного с углом между отрезком, который соединяет точку M_0 с фокусом, и лучом, выходящим из этой точки в направлении оси параболы* (рис. 40).

Доказательство. Вектор $\mathbf{l}$, который направлен вдоль биссектрисы указанного в предложении угла, можно получить как сумму векторов единичной длины, направленных по сторонам угла, т. е. $\overrightarrow{FM_0}/|\overrightarrow{FM_0}|$ и e_1. Если M_0 имеет координаты x_0 и y_0, то $\overrightarrow{FM_0} = (x_0 - p/2)e_1 + y_0 e_2$

и $|\overrightarrow{FM_0}| = x_0 + p/2$. Значит,

$$l = \left(\frac{x_0 - p/2}{x_0 + p/2} + 1\right) e_1 + \frac{y_0}{x_0 + p/2} e_2 = \frac{1}{x_0 + p/2}(2x_0 e_1 + y_0 e_2).$$

Теперь мы можем подсчитать угловой коэффициент биссектрисы $k = y_0/(2x_0)$. Выше мы вычислили угловой коэффициент касательной $k' = p/y_0$. Докажем, что $k = k'$. Действительно, $k/k' = y_0^2/(2px_0) = 1$. Предложение доказано.

§ 3. Линия второго порядка, заданная общим уравнением

1. Пересечение линии второго порядка и прямой. Рассмотрим линию второго порядка, заданную общим уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

в декартовой системе координат, и исследуем пересечение этой линии с произвольной прямой

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t. \qquad (2)$$

Значения параметра t, соответствующие точкам пересечения, должны удовлетворять уравнению, получаемому подстановкой (2) в (1):

$$A(x_0 + \alpha t)^2 + 2B(x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) + C(y_0 + \beta t)^2 + \\ + 2D(x_0 + \alpha t) + 2E(y_0 + \beta t) + F = 0. \qquad (3)$$

Раскрывая здесь скобки и приводя подобные члены, мы получим квадратное уравнение

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \qquad (4)$$

в котором

$$P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2, \qquad (5)$$

$$Q = (Ax_0 + By_0 + D)\alpha + (Bx_0 + Cy_0 + E)\beta, \qquad (6)$$

или при другой группировке слагаемых

$$Q = (A\alpha + B\beta)x_0 + (B\alpha + C\beta)y_0 + D\alpha + E\beta. \qquad (7)$$

Свободный член есть значение многочлена при $t = 0$, т. е.

$$R = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F. \qquad (8)$$

Вообще говоря, уравнение (4) — квадратное, оно имеет не больше двух корней, и прямая пересекает линию или в двух точках, или в одной (кратные корни) или не пересекает ее (комплексные корни). Но возможны исключительные прямые, для которых $P=0$, т. е.

$$A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2=0, \tag{9}$$

и, следовательно, уравнение (4) является линейным. В этом случае оно имеет один корень при $Q\neq 0$, а при $Q=0$ либо выполнено тождественно (если и $R=0$), либо не имеет решений. Следовательно, «исключительные» прямые пересекают линию в единственной точке, или лежат на ней целиком, или не пересекают совсем.

В равенство (9) не входят координаты x_0, y_0 начальной точки прямой. Кроме того, оно остается справедливым, если умножить α и β на ненулевой множитель, т. е. взять другой направляющий вектор прямой. Поэтому свойство «исключительности» связано только с направлением прямой.

Определение. Направление, определяемое вектором, компоненты которого удовлетворяют уравнению (9), называется *асимптотическим направлением* линии второго порядка

2. Число асимптотических направлений. Тип линии. Выясним, сколько асимптотических направлений может иметь линия второго порядка. Обозначив

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},$$

сформулируем следующее

Предложение 1. *Линия второго порядка имеет два асимптотических направления, если $\delta<0$, одно, если $\delta=0$, и ни одного, если $\delta>0$.*

Для доказательства рассмотрим несколько случаев:

1) Пусть $A=C=0$. Тогда обязательно $B\neq 0$ и $\delta=-B^2<0$. Уравнение (9) имеет вид $2B\alpha\beta=0$, и ему удовлетворяют векторы (1, 0) и (0, 1).

2) Пусть $C\neq 0$. Тогда вектор (0, 1) не является решением уравнения (9), и каждое решение этого уравнения можно задать угловым коэффициентом $k=\beta/\alpha$, удовлетворяющим уравнению $C^2k^2+2Bk+A=0$. Дискриминант этого уравнения $B^2-AC=-\delta$. Следовательно, оно имеет два корня при $\delta<0$, один корень при $\delta=0$ и не имеет вещественных корней при $\delta>0$.

3) Пусть $A\neq 0$. Мы поступаем, как и в предыдущем случае, с той разницей, что рассматривается не угловой коэффициент, а отношение $k_1=\alpha/\beta$, удовлетворяющее

уравнению $Ak_1^2+2Bk_1+C=0$. Дискриминант этого уравнения также равен $-\delta$.

Поскольку случаи 1)—3) исчерпывают все возможности, предложение доказано.

В силу предложения 1 не только знак δ определяет число асимптотических направлений, но и обратно, их число определяет знак δ. Это сразу проверяется от противного

Мы определили асимптотические направления при помощи аналитического условия (9). Поэтому в принципе при изменении системы координат асимптотическое направление могло бы перестать быть асимптотическим или, наоборот, обыкновенное направление сделаться асимптотическим. Можно доказать, хотя мы и не будем этого делать, что определение асимптотических направлений на самом деле не зависит от выбора системы координат.

Рис. 41. Асимптотические направления: а) у параболы; б) у гиперболы.

Используя канонические уравнения, легко проверить, что эллипс не имеет асимптотических направлений, парабола имеет одно, а гипербола два асимптотических направления (рис. 41). На этом основании линии второго порядка называются линиями *гиперболического*, *параболического* или *эллиптического типов*, смотря по тому, имеют ли они два, одно или не имеют ни одного асимптотического направления.

Для линий гиперболического типа $\delta<0$, для параболического типа $\delta=0$ и для эллиптического $\delta>0$.

3. **Диаметр линии второго порядка.** Назовем *хордой* любой отрезок, концы которого лежат на линии, а остальные точки на ней не лежат. Таким образом, хорда не может иметь асимптотического направления.

Мы предположим, что рассматриваемая линия второго порядка имеет по крайней мере одну хорду. Этому условию удовлетворяют эллипсы, гиперболы, пары пересекающихся прямых, параболы, пары параллельных прямых. Формально почти все следующие вычисления остаются справедливыми и для остальных линий и даже для уравнений мнимого эллипса и пары мнимых параллельных прямых, но геометрического смысла полученные результаты иметь не будут.

Фиксируем какое-нибудь неасимптотическое направление и исследуем множество середин хорд, имеющих это направление. Если начальная точка $M_0(x_0, y_0)$ секущей (2) находится в середине хорды, то корни уравнения (4) равны по абсолютной величине и отличаются знаком (рис. 42). Это выполнено в том и только в том случае, когда $Q=0$. В силу выражения (7) для Q это означает, что середины хорд направления (α, β)[1]) лежат на прямой

$$(A\alpha+B\beta)x+(B\alpha+C\beta)y+D\alpha+E\beta=0. \qquad (10)$$

Определение. Прямая (10) называется *диаметром линии второго порядка*, сопряженным направлению (α, β).

Стоит обратить внимание на то, что диаметром называется вся прямая. Это не означает, что середины хорд ее заполняют целиком. Такое положение возможно, но возможно также, что множество середин хорд есть, например, отрезок или луч.

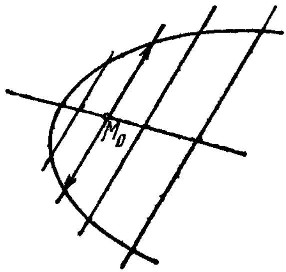

Рис. 42.

Конечно, остается сомнение, действительно ли уравнение (10) определяет прямую: не окажутся ли коэффициенты при переменных в нем оба равными нулю? Допустим, что это так, т. е.

$$A\alpha+B\beta=0, \quad B\alpha+C\beta=0.$$

Умножим первое из этих равенств на α, второе на β и сложим. В результате мы получим равенство (9), которое по предположению не имеет места. Итак, уравнение (10) определяет прямую.

4. Центр линии второго порядка. Изучим множество всех диаметров линии второго порядка. Оно описывается уравнением (10), в котором α и β меняются так, чтобы направление (α, β) не было асимптотическим. Используя (6), мы перепишем это уравнение в виде

$$(Ax+By+D)\alpha+(Bx+Cy+E)\beta=0, \qquad (11)$$

[1]) Здесь и далее мы обозначаем направление компонентами какого-нибудь ненулевого вектора, имеющего это направление. Ясно, что α и β интересуют нас только с точностью до общего множителя.

сразу заставляющем вспомнить пучок прямых. И действительно, если прямые $Ax+By+D=0$ и $Bx+Cy+E=0$ не параллельны, т. е.

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}\neq 0, \tag{12}$$

все диаметры принадлежат пучку, определяемому этими прямыми. Не утверждается, что каждая прямая этого пучка — диаметр: исключение составляют прямые асимптотического направления.

Центр пучка (11) при условии (12) определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+D=0, \\ Bx+Cy+E=0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Предложение 2. *Точка O, координаты которой удовлетворяют системе уравнений* (13), *является центром симметрии линии второго порядка.*

Предложение будет доказано, если мы покажем, что пересечение линии с любой прямой, проходящей через точку O, симметрично относительно этой точки.

Примем точку O за начальную точку прямой (2). Если прямая имеет неасимптотическое направление, то в силу равенств (6) и (11) уравнение (4) для этой прямой имеет вид $Pt^2+R=0$, причем $P\neq 0$. Если это уравнение имеет различные вещественные корни, то они отличаются один от другого только знаком. Если корень один, то он равен нулю. Итак, в любом случае множество точек пересечения симметрично относительно точки O.

Рассмотрим теперь прямую асимптотического направления. Для нее в уравнении (4) $P=Q=0$, и либо прямая целиком лежит на линии, либо не имеет с ней общих точек. Следовательно, и для прямых асимптотического направления множество точек пересечения симметрично относительно точки O.

Заметим, что предложение справедливо для любой линии второго порядка, независимо от условия (12). Разумеется, предполагается, что линия содержит хоть одну точку. В противном случае утверждение становится бессодержательным. При этом же условии мы можем доказать и обратное предложение.

Предложение 3. *Координаты центра симметрии линии* (1) *удовлетворяют системе уравнений* (13).

Доказательство. Пусть $O(x_0, y_0)$ — центр симметрии линии. Рассмотрим пересечение линии с произвольной прямой, проходящей через O, приняв эту точку за начальную точку прямой. Относительно O имеются две возможности:

1) Точка O лежит на линии. Пусть прямая имеет неасимптотическое направление (α, β). Тогда точка O — единственная точка пересечения, так как в противном случае с учетом симметрии точек пересечения было бы не меньше трех. Следовательно, уравнение (4) имеет кратный корень $t=0$, откуда следует $Q=0$. Итак, координаты O удовлетворяют равенству (11).

Из равенства (11) не следует еще, что координаты O удовлетворяют системе (13). Нам придется написать такое же равенство для другого неасимптотического направления (α', β'). Тогда для координат (x_0, y_0) имеем

$$(Ax_0+By_0+D)\alpha+(Bx_0+Cy_0+E)\beta=0,$$
$$(Ax_0+By_0+D)\alpha'+(Bx_0+Cy_0+E)\beta'=0,$$

где $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$. Рассматривая эти равенства как систему уравнений с коэффициентами α, β, α', β', мы получаем

$$Ax_0+By_0+D=0, \quad Bx_0+Cy_0+E=0, \tag{14}$$

как и требовалось.

2) Пусть точка O не лежит на линии. Если прямая, проходящая через O в направлении (α, β), пересекает линию в точке M, которой соответствует значение параметра t_1, то существует симметричная точка пересечения со значением параметра $-t_1$. Итак, $Pt_1^2+2Qt_1+R=0$ и $Pt_1^2-2Qt_1+R=0$, откуда в силу $t_1\neq 0$ следует $Q=0$.

Таким образом, если линия имеет точки пересечения с двумя различными прямыми, проходящими через O, то, как и выше, мы можем получить равенства (14) для координат точки O.

Докажем, что две такие прямые обязательно найдутся. Действительно, в противном случае все точки линии лежат на одной прямой. Эта прямая имеет неасимптотическое направление. В самом деле, она имеет с линией по крайней мере две общие точки, и, будь она асимптотического направления, все ее точки лежали бы на линии, в том числе и O. Это противоречит сделанному выше предположению, что O не лежит на линии. Теперь легко видеть, что линия состоит ровно из двух точек. Но из теоремы 1 § 1 следует, что таких линий нет. Предложение доказано.

Предложения 2 и 3 показывают, что условие $\delta \neq 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы у линии второго порядка существовал единственный центр симметрии. Линии, имеющие единственный центр симметрии, называются *центральными*. Таким образом, неравенство $\delta \neq 0$ является инвариантным (не зависящим от системы координат) признаком центральной линии. Равенство $\delta = 0$ является инвариантным признаком нецентральной линии.

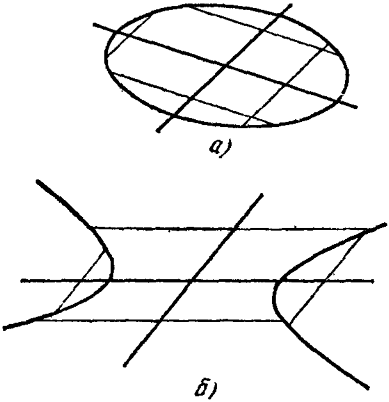

Рис. 43. Сопряженные направления: *а*) у эллипса; *б*) у гиперболы.

Вспомним, что $\delta \neq 0$ для линий эллиптического и гиперболического типов. Это — центральные линии. Линии параболического типа — нецентральные.

5. Сопряженные направления. Направление (α', β'), определяемое диаметром, сопряженным направлению (α, β), называется *сопряженным* для направления (α, β). Компоненты направляющего вектора диаметра (10), согласно предложению 1 § 2 гл. II, удовлетворяют условию

$$(A\alpha + B\beta)\alpha' + (B\alpha + C\beta)\beta' = 0 \tag{15}$$

или

$$A\alpha\alpha' + B(\alpha'\beta + \beta'\alpha) + C\beta\beta' = 0. \tag{16}$$

В последнее выражение пары чисел α, β и α', β' входят симметричным образом. Отсюда вытекает

Предложение 4. *Если направление* (α', β'), *сопряженное с* (α, β), *не является асимптотическим, то сопряженным для* (α', β') *будет* (α, β) (рис. 43).

Возникает вопрос, при каких условиях направление, сопряженное какому-нибудь направлению (α, β), может оказаться асимптотическим. Это легко выяснить.

Из равенства (15) следует, что в качестве α' и β' можно выбрать соответственно $-(B\alpha + C\beta)$ и $(A\alpha + B\beta)$. Подставим эти выражения в уравнение (9) для асимптотических направлений:

$$A(B\alpha + C\beta)^2 - 2B(B\alpha + C\beta)(A\alpha + B\beta) + C(A\alpha + B\beta)^2 = 0.$$

После приведения подобных членов мы получаем

$$(AC-B^2)(A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2)=0.$$

Поскольку (α, β) — не асимптотическое направление, это произведение может обращаться в нуль только за счет первого сомножителя. Мы получаем следующий результат

Предложение 5. *Если линия нецентральная* $(\delta=0)$, *то для любого направления* (α, β) *сопряженное направление — асимптотическое. Если линия центральная* $(\delta\neq 0)$, *то для любого направления* (α, β) *сопряженное направление — не асимптотическое* (рис. 44).

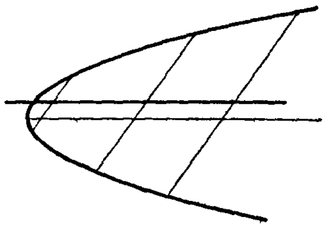

Рис. 44. У параболы любому направлению сопряжено асимптотическое.

6. Главные направления. Если диаметр перпендикулярен хордам, которым он сопряжен, то он является осью симметрии рассматриваемой линии. Введем следующее

Определение. Направление (α, β) и направление (α', β') сопряженного ему диаметра называются *главными направлениями*, если они перпендикулярны.

Если система координат декартова прямоугольная, то для главного направления α и β должны быть пропорциональны коэффициентам уравнения (10), т. е. должно существовать такое число λ, что

$$\left.\begin{aligned} A\alpha+B\beta&=\lambda\alpha,\\ B\alpha+C\beta&=\lambda\beta.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Исключая λ, мы получаем уравнение для α и β:

$$(A-C)\alpha\beta+B(\beta^2-\alpha^2)=0. \tag{18}$$

Если $B=0$ и $A=C$, то это уравнение выполнено тождественно. Если $B=0$, $A\neq C$, то ему удовлетворяют направления осей координат (1, 0) и (0, 1). Если же $B\neq 0$, уравнение (18) приводится к квадратному уравнению для углового коэффициента $k=\beta/\alpha$:

$$k^2+\frac{A-C}{B}k-1=0.$$

Читатель заметит, что последнее уравнение всегда имеет два корня k_1 и k_2, удовлетворяющих условию $k_1k_2=-1$. Согласно предложению 4 § 3 гл. II это означает, что направления с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 взаимно перпендикулярны. Мы получаем

Предложение 6. *Каждая линия второго порядка имеет хотя бы одну пару главных направлений. Или эта пара единственная, или каждая пара направлений является главной.*

Нетрудно доказать, что в последнем случае (т. е. когда $B=0$, $A=C$) уравнение (1) приводится к одному из следующих канонических видов: $x^2+y^2=r^2$, $x^2+y^2=0$ или $x^2+y^2=-r^2$.

Для нецентральной линии главными являются асимптотическое направление и перпендикулярное к нему.

7. Касательная к линии второго порядка. Как известно, *касательной к линии* называется предельное положение секущей, когда хорда стягивается в точку. Здесь мы выведем уравнение касательной к линии второго порядка, заданной уравнением (1). Дадим предварительно следующее

Определение. *Особой точкой* линии второго порядка называется центр симметрии, который лежит на линии.

Особыми точками являются: точка пересечения пары пересекающихся прямых, единственная точка пары мнимых пересекающихся прямых и каждая точка пары совпавших прямых.

В особой точке касательная не определена. Если точка лежит на прямой, входящей в состав линии, то касательная совпадает с этой прямой. Для общего случая докажем

Предложение 7. *Если неособая точка не лежит на прямой, входящей в состав линии, то через эту точку проходит диаметр.*

Доказательство. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$, лежащая на линии, не является центром симметрии. Тогда числа

$$\alpha=-(Bx_0+Cy_0+E) \quad \text{и} \quad \beta=Ax_0+By_0+D \tag{19}$$

одновременно не равны нулю и уравнение

$$(Ax+By+D)\alpha+(Bx+Cy+E)\beta=0 \tag{20}$$

есть уравнение диаметра, проходящего через M_0 и сопряженного направлению (α, β), если только это направление не асимптотическое. Допустим, что (α, β) — асимптотическое направление. Тогда для прямой, проходящей через M_0 в направлении (α, β), все коэффициенты уравнения (4) равны нулю: $P=0$ по определению асимптотического направления, $Q=0$ в силу равенств (6) и (19), $R=0$, так как M_0 лежит на линии. Таким образом, M_0 лежит на прямой, входящей в состав линии, что противоречит предположению.

Мы получим касательную к линии в точке M_0, если проведем через эту точку прямую линию в направлении (19), которому сопряжен диаметр, проходящий через эту точку. Эта прямая имеет уравнение $\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0$, или

$$(Ax_0+By_0+D)(x-x_0)+(Bx_0+Cy_0+E)(y-y_0)=0.$$

Преобразуем это уравнение с учетом того, что x_0 и y_0 удовлетворяют уравнению (1). Мы получим уравнение касательной к линии (1) в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$Axx_0+B(xy_0+yx_0)+Cyy_0+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0. \tag{21}$$

8. **Особые точки.** Исследуем, при каких условиях на коэффициенты уравнения (1) линия второго порядка имеет особую точку. Для координат x_0, y_0 такой точки должны быть справедливы равенства

$$Ax_0+By_0+D=0,$$
$$Bx_0+Cy_0+E=0,$$
$$Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F=0.$$

Умножим первое из них на x_0, второе на y_0 и вычтем из третьего. Мы получим эквивалентную систему равенств

$$\left.\begin{aligned} Ax_0+By_0+D=0,\\ Bx_0+Cy_0+E=0,\\ Dx_0+Ey_0+F=0 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Рассмотрим векторы $\mathbf{p}(A, B, D)$, $\mathbf{q}(B, C, E)$ и $\mathbf{r}(D, E, F)$. Равенства (22) представляют собой координатную запись векторного равенства

$$\mathbf{r}=-(x_0\mathbf{p}+y_0\mathbf{q}). \tag{23}$$

Отсюда следует, что при наличии у линии особой точки векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ компланарны, что может быть следующим образом записано через их компоненты:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F \end{vmatrix}=0. \tag{24}$$

Если линия центральная, то векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ не коллинеарны и условие компланарности (24) равносильно существованию разложения (23), т. е. существованию решения системы (22). Мы получили

Предложение 8. *Центральная линия имеет особую точку тогда и только тогда, когда* $\Delta = 0$.

Итак, сочетание условий $\delta \neq 0$ и $\Delta = 0$ характеризует пары пересекающихся прямых и пары мнимых пересекающихся прямых.

Рассмотрим нецентральные линии. Для них равенство $\Delta = 0$ выполнено всегда, когда существует центр симметрии, хотя бы и не являющийся особой точкой. Действительно, в силу $\delta = 0$ прямые (13) параллельны. Если система (13) имеет решение, то прямые совпадают. В этом случае их коэффициенты и свободные члены пропорциональны и, следовательно, векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ коллинеарны, откуда $\Delta = 0$.

Обратно, пусть для нецентральной линии $\Delta = 0$, т. е. векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ компланарны. Это может быть в двух случаях. 1) Векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ не коллинеарны, и $\mathbf{r}$ раскладывается по ним. Тогда, как и в случае центральных линий, существует особая точка. 2) Векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ коллинеарны. Это означает, что существует центр симметрии, не обязательно являющийся особой точкой, и даже целая прямая, каждая точка которой — центр симметрии. Мы доказали

Предложение 9. *Для нецентральных линий условие* $\Delta = 0$ *равносильно существованию центра симметрии.*

Итак, сочетание условий $\delta = 0$ и $\Delta = 0$ характеризует пары параллельных и пары совпавших прямых. Оно выполнено также и для уравнения пары мнимых параллельных прямых.

Из предложений 8 и 9 следует, что равенство $\Delta = 0$ является инвариантным, т. е. не может измениться при переходе к другой системе координат.

§ 4. Поверхности второго порядка

Подобно тому как в § 2 были описаны все наиболее интересные линии второго порядка, в настоящем параграфе мы опишем важнейшие поверхности второго порядка, а полную классификацию таких поверхностей отложим до гл. IX. Составить себе общее представление о большинстве поверхностей второго порядка можно, рассматривая поверхности вращения линий второго порядка вокруг их осей симметрии.

1. Поверхности вращения. Поверхность S называется *поверхностью вращения* с осью d, если она составлена из окружностей, которые имеют центры на прямой d и лежат в плоскостях, перпендикулярных этой прямой. В основе этого определения лежит следующее представление Рассмотрим линию L, которая лежит в плоскости P, проходящей через ось вращения d (рис. 45), и будем вращать ее вокруг этой оси Каждая точка линии опишет окружность, а вся линия — поверхность вращения.

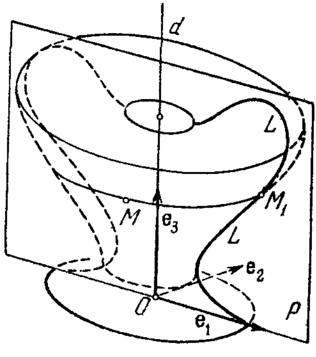

Рис 45

Выберем начало декартовой прямоугольной системы координат O, e_1, e_2, e_3 на оси вращения d, вектор e_3 направим вдоль d, а вектор e_1 поместим в плоскости P. Таким образом, точка O и векторы e_1 и e_3 образуют на плоскости P декартову систему координат. Допустим, что линия L, вращением которой получена поверхность, имеет в этой системе координат уравнение $\varphi(x, z) = 0$.

Рассмотрим точку $M(x, y, z)$ Через нее проходит окружность, которая имеет центр на оси d и лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси Радиус окружности равен расстоянию от M до оси, т е. $\sqrt{x^2+y^2}$. Точка M лежит на поверхности вращения тогда и только тогда, когда на указанной окружности имеется точка M_1, принадлежащая вращаемой линии L

Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит в плоскости P, и потому $y_1 = 0$ Кроме того, $z_1 = z$ и $|x_1| = \sqrt{x^2+y^2}$, так как M_1 лежит на окружности, проходящей через M Координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению линии L: $\varphi(x_1, z_1) = 0$. Подставляя в это уравнение x_1 и z_1, мы получаем следующее условие на координаты точки M, необходимое и достаточное для того чтобы M лежала на поверхности вращения S: равенство

$$\varphi(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \tag{1}$$

должно быть выполнено хотя бы при одном из двух знаков перед корнем. Это условие, которое может быть записано в эквивалентном виде

$$\varphi(\sqrt{x^2+y^2},\ z)\,\varphi(-\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0, \qquad (2)$$

и является уравнением поверхности вращения линии L вокруг оси d.

2. Эллипсоид. Рассмотрим поверхности, которые получаются при вращении эллипса вокруг его осей симметрии. Направив вектор e_3 сначала вдоль малой оси эллипса, а затем вдоль большой оси, мы получим уравнение эллипса в следующих видах:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2}{c^2}=1.$$

(Здесь через c обозначена малая полуось эллипса.) В силу формулы (1) уравнения соответствующих поверхностей вращения будут

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$

и

$$\frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2+y^2}{c^2}=1. \qquad (4)$$

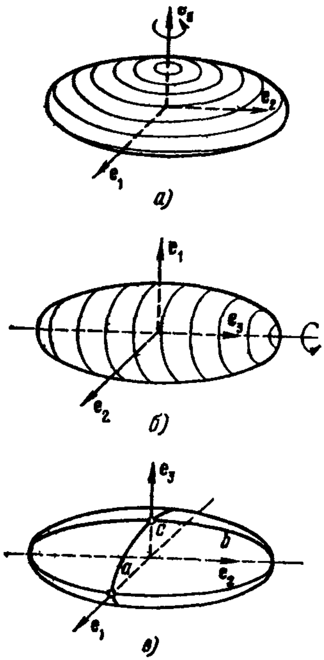

Рис. 46. а), б) Сжатый и вытянутый эллипсоиды вращения; в) эллипсоид

Поверхности (3) и (4) называются *сжатым* и *вытянутым эллипсоидами вращения*. Они изображены на рис. 46 а, б.

Каждую точку $M(x, y, z)$ на эллипсоиде вращения (3) сдвинем к плоскости Y (координатной плоскости, проходящей через e_1 и e_3) так, чтобы расстояние от точки до этой плоскости уменьшилось в постоянном для всех точек отношении $\lambda < 1$. После сдвига точка M совпадает с точкой M', координаты которой определяются равенствами $x'=x$, $y'=\lambda y$, $z'=z$. Таким образом, все точки эллипсоида вращения (3) переходят в точки поверхности с уравнением

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1, \qquad (5)$$

где $b=\lambda a$. Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение (5), назовем *эллипсоидом* (см. рис. 46 *в*). Если случайно окажется $b=c$, мы получим снова эллипсоид вращения, но уже вытянутый.

Эллипсоид, так же как и эллипсоид вращения, из которого он получен, представляет собой замкнутую ограниченную поверхность. Из уравнения (5) видно, что начало координат — центр симметрии для эллипсоида, а координатные плоскости — его плоскости симметрии.

Эллипсоид получается из эллипсоида вращения сжатием так же, как эллипс получается сжатием окружности. Сжатием сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ можно получить эллипсоид вращения (3). Для того чтобы из сферы получить вытянутый эллипсоид, нужно сделать аналогичное преобразование, но с $\lambda>1$ — растяжение.

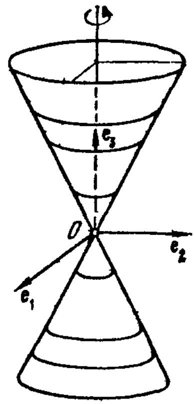

Рис. 47.

В этом параграфе нам часто придется прибегать к сжатию, и мы не будем каждый раз описывать его подробно.

3. Конус второго порядка. Рассмотрим на плоскости P пару пересекающихся прямых, задаваемую в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$ уравнением $a^2x^2-c^2z^2=0$. Поверхность (рис. 47), получаемая вращением этой линии вокруг оси аппликат, имеет уравнение

$$a^2(x^2+y^2)-c^2z^2=0 \tag{6}$$

и носит название *прямого кругового конуса*. Сжатие к плоскости Y переводит прямой круговой конус в поверхность с уравнением

$$a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2=0. \tag{7}$$

Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение (7), называется *конусом* или, подробнее, *конусом второго порядка*. Конус состоит из прямых линий, проходящих через начало координат. Сечения конуса плоскостями с уравнениями $z=\alpha$ для различных α представляют собой эллипсы

$$a^2x^2+b^2y^2=c^2\alpha^2.$$

4. Однополостный гиперболоид. *Однополостный гиперболоид вращения* — это поверхность вращения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг той ее оси, которая ее не пересекает. По формуле (1) мы получаем уравнение однополостного гиперболоида вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (8)$$

В результате сжатия этой поверхности мы получаем поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (9)$$

Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение (9), называется *однополостным гиперболоидом* (рис. 48).

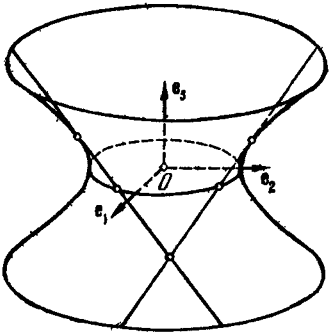

Рис. 48

Интересное свойство однополостного гиперболоида — наличие у него *прямолинейных образующих*. Так называются прямые линии, всеми своими точками лежащие на поверхности. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две прямолинейные образующие, уравнения которых можно получить следующим образом. Перенесем член y^2/b^2 в правую часть уравнения (9) и разложим обе части равенства на множители:

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Рассмотрим теперь прямую линию с уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где λ и μ — некоторые числа. Координаты каждой точки прямой удовлетворяют обоим уравнениям, а следовательно, и их произведению — уравнению (9). Поэтому все точки прямых линий с уравнениями вида (10) при всевозможных λ и μ лежат на однополостном гиперболоиде Такое же рассуждение можно провести и для семейства прямых

$$\begin{aligned} \lambda' \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) &= \mu' \left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \mu' \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) &= \lambda' \left(1+\frac{y}{b}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя координаты точки, лежащей на однополостном гиперболоиде, в одно из уравнений (10) и в одно из уравнений (11), мы найдем значения параметров λ, μ и λ', μ', которые соответствуют прямолинейным образующим, проходящим через эту точку. Естественно, что каждая пара параметров определена с точностью до общего множителя.

Если вместе с гиперболой мы будем вращать и ее асимптоты, то они опишут прямой круговой конус, называемый *асимптотическим конусом* гиперболоида вращения. При сжатии гиперболоида вращения в общий однополостный гиперболоид прямой круговой конус сжимается в некоторый конус, который называется *асимптотическим конусом* однополостного гиперболоида.

5. Двуполостный гиперболоид. *Двуполостный гиперболоид вращения* — это поверхность вращения гиперболы

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

вокруг той ее оси, которая ее пересекает По формуле (1) мы получаем уравнение двуполостного гиперболоида вращения

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2+y^2}{a^2}=1. \tag{12}$$

В результате сжатия этой поверхности получается поверхность с уравнением

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{13}$$

Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение вида (13), называется *двуполостным гиперболоидом* (рис. 49). Двум ветвям гиперболы соответствуют здесь две не связанные между собой части («полости») поверхности, в то время как при построении однополостного гиперболоида вращения каждая ветвь гиперболы описывает всю поверхность.

Асимптотический конус для двуполостного гиперболоида определяется так же, как и для однополостного.

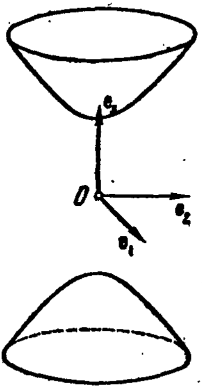

Рис. 49.

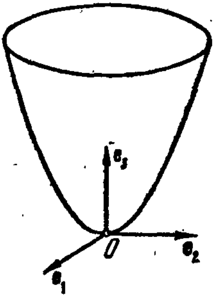

Рис. 50.

6. **Эллиптический параболоид.** При вращении параболы $x^2=2pz$ вокруг ее оси симметрии мы получаем поверхность с уравнением

$$x^2+y^2=2pz, \tag{14}$$

называемую *параболоидом вращения*. Сжатие к плоскости $y=0$ переводит параболоид вращения в поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{15}$$

Поверхность, которая имеет такое уравнение в некоторой декартовой прямоугольной системе координат, называется *эллиптическим параболоидом* (рис. 50). Внешний вид эллиптического параболоида ясен из способа его построения. Отметим, что сечения этой поверхности плоскостями $z=\alpha$ при $\alpha>0$ представляют собой эллипсы

$$\frac{x^2}{2\alpha a^2}+\frac{y^2}{2\alpha b^2}=1, \quad z=\alpha,$$

а сечения плоскостями, параллельными другим координатным плоскостям, например плоскостями $y=\alpha$, — параболы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\alpha^2}{b^2}=2z, \quad y=\alpha.$$

7. Гиперболический параболоид. По аналогии с уравнением (15) мы можем написать уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{16}$$

Поверхность, которая имеет в некоторой декартовой прямоугольной системе координат уравнение вида (16), назовем *гиперболическим параболоидом*. Исследуем внешний вид этой поверхности. Для этого рассмотрим сечение гиперболического параболоида плоскостью $x=\alpha$ при произвольном α. В этой плоскости выберем декартову прямоугольную систему координат O', $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с началом в точке $O'(\alpha, 0, 0)$. Относительно этой системы линия пересечения имеет уравнение

$$-\frac{y^2}{b^2}=2\left(z-\frac{\alpha^2}{2a^2}\right) \tag{17}$$

Эта линия — парабола, в чем легко убедиться, перенеся начало координат в точку O'' с координатами $(0, \alpha^2/2a^2)$ (координаты относительно исходной системы координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве равны $(\alpha, 0, \alpha^2/2a^2)$). Точка O'', очевидно, является вершиной параболы, ось параболы параллельна вектору $\mathbf{e}_3$, а знак минус в левой части равенства (17) означает, что ветви параболы направлены в сторону, противоположную направлению вектора $\mathbf{e}_3$. Заметим, что после переноса начала координат в точку O'' величина α не входит в уравнение параболы, и, следовательно, все сечения гиперболического параболоида плоскостями $x=\alpha$ представляют собой равные параболы.

Будем теперь менять величину α и проследим за смещением вершины O'' параболы в зависимости от α. Из приведенных выше координат точки O'' в системе O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ следует, что эта точка смещается по линии с уравнениями

$$z=\frac{x^2}{2a^2}, \quad y=0$$

в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Эта линия — парабола в плоскости $y=0$. Вершина параболы находится в начале координат, ось симметрии совпадает с осью аппликат, а ветви параболы направлены в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{e}_3$.

Теперь мы можем построить гиперболический параболоид следующим образом: зададим две параболы и будем перемещать одну из них так, чтобы ее вершина скользила по другой, оси обеих парабол были параллельны, параболы лежали во взаимно перпендикулярных плоскостях и ветви их были направлены в противоположные стороны. При таком перемещении подвижная парабола описывает гиперболический параболоид (рис. 51).

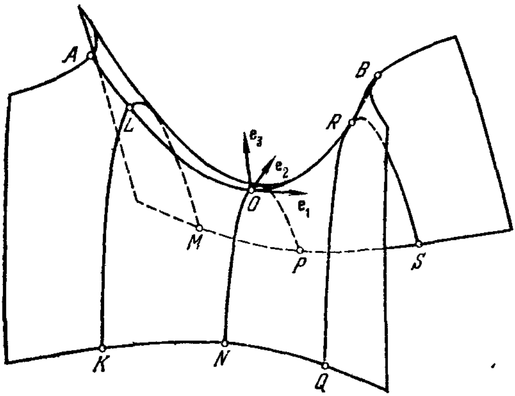

Рис. 51. AOB — неподвижная парабола, KLM, NOP и QRS — разные положения подвижной параболы.

Сечение гиперболического параболоида плоскостью $z=\alpha$ представляет собой гиперболу, которая в этой плоскости имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2\alpha,$$

в системе координат O^*, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ с началом в точке $O^*(0, 0, \alpha)$. Для больших положительных α полуоси гиперболы $\sqrt{2\alpha}\,a$ и $\sqrt{2\alpha}\,b$ велики и уменьшаются с уменьшением α. При этом та ось гиперболы, которая ее пересекает, параллельна вектору $\mathbf{e}_1$ (рис. 52). При $\alpha=0$ гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых. Если $\alpha<0$, то ось гиперболы, которая ее пересекает, параллельна вектору $\mathbf{e}_2$. Полуоси растут с увеличением $|\alpha|$. Отношение полуосей для всех гипербол при одном знаке α одно и то же. Поэтому, если мы нарисуем все сечения гиперболического параболоида на одной и той же плоскости, то получим семейство всех гипербол, имеющих в качестве асимптот пару пересекающихся прямых с уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (рис. 53).

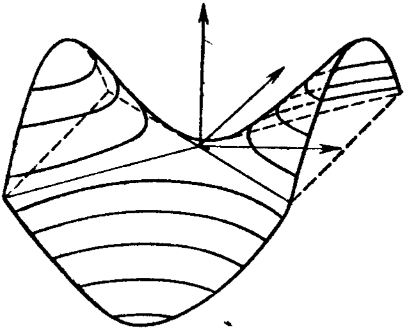

Рис. 52.

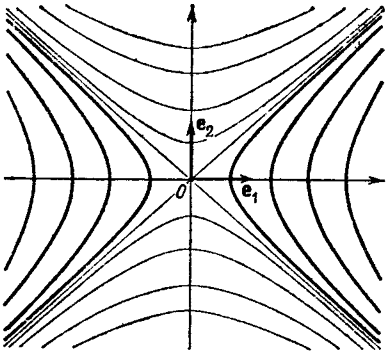

Рис. 53. Проекция сечений гиперболического параболоида. Тонкие линии соответствуют $\alpha < 0$, толстые — $\alpha > 0$.

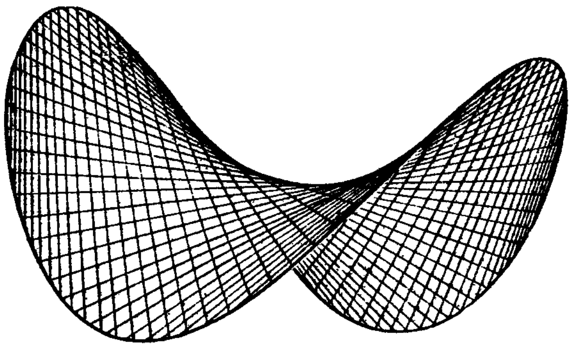

Рис. 54.

Гиперболический параболоид, как и однополостный гиперболоид, имеет два семейства прямолинейных образующих (рис. 54), уравнения которых следующие:

1) $\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\mu, \quad \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\lambda z,$

2) $\lambda'\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\mu', \quad \mu'\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\lambda' z.$

Выводятся эти уравнения так же, как и уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

ГЛАВА IV

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

§ 1. Отображения и преобразования

1. Определение. Под *отображением* $\mathfrak{f}$ плоскости P в плоскость R понимают закон или правило, по которому каждой точке плоскости P сопоставлена некоторая определенная точка на плоскости R. Мы будем пользоваться обозначением $\mathfrak{f}\colon P \to R$. Если потребуется указать, что точке A на плоскости P соответствует точка B на плоскости R, мы будем писать $B = \mathfrak{f}(A)$. Точки плоскости P называются *прообразами*, а соответствующие им точки плоскости R — их *образами*.

Из курса средней школы известны отображения плоскости на нее же. Такие отображения, для которых плоскости P и R совпадают, мы будем называть *преобразованиями*. В этом параграфе мы приведем для отображений основные факты, известные читателю для преобразований.

Подчеркнем, что ни для отображений, ни для преобразований мы не предполагаем, что каждая точка плоскости R является образом некоторой точки. Вполне может оказаться, что множество всех образов не совпадает с R.

2. Примеры. 1) Рассмотрим две плоскости P и R и сопоставим каждой точке плоскости P основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость R. Так будет определено отображение, называемое *ортогональным проектированием*. При ортогональном проектировании, вообще говоря, каждая точка плоскости R имеет единственный прообраз. В одном случае ортогональное проектирование резко меняет свои свойства. Именно, если плоскости взаимно перпендикулярны, то не каждая точка плоскости R имеет прообраз, а только точки, лежащие на линии пересечения плоскостей. Зато каждая из этих точек имеет бесконечно много прообразов — они заполняют перпендикуляр к R, восставленный из этой точки.

2) Примерами преобразований могут служить известные читателю параллельный перенос, поворот, осевая симметрия, гомотетия.

3) Рассмотрим прямую p на плоскости P и зададим число $\lambda > 0$. Из произвольной точки M, не лежащей на p, опустим перпендикуляр на эту прямую и обозначим его основание через N. Точку $\mathfrak{f}(M)$ определим соотношением $\overrightarrow{N\mathfrak{f}(M)} = \lambda\overrightarrow{NM}$. Если M лежит на p, то положим $\mathfrak{f}(M) = M$ (рис. 55). Так построенное преобразование $\mathfrak{f}$ называется *сжатием к прямой* p в отношении λ (Если уточнено, что $\lambda > 1$, определенное здесь преобразование можно называть *растяжением*)

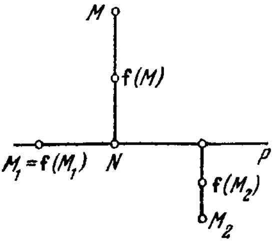

Рис. 55.

Мы уже пользовались сжатием к прямой в § 1 гл. III, когда изучали форму эллипса. Аналогичное преобразование пространства — сжатие к плоскости — мы применяли при определении поверхности второго порядка в § 4 гл. III.

4) Выберем на каждой из плоскостей P и R декартову прямоугольную систему координат и сопоставим точке с координатами x и y на плоскости P точку с координатами $x^* = x^2 - y^2$, $y^* = 2xy$ на плоскости R. Нетрудно убедиться, решая эти уравнения относительно x и y, что каждая точка плоскости R имеет два прообраза, за исключением начала координат, которое имеет один прообраз.

5) Зададим точку O и сопоставим каждой точке M, отличной от O, точку $\mathfrak{f}(M)$, которая определяется равенством

$$\overrightarrow{O\mathfrak{f}(M)} = \frac{\operatorname{arctg}|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{OM}|}\overrightarrow{OM}.$$

Положим $\mathfrak{f}(O) = O$. При этом каждой точке плоскости сопоставляется единственная точка внутри круга радиуса $\pi/2$ с центром в точке O. Каждая точка, лежащая внутри этого круга, имеет единственный прообраз, а точки, не лежащие внутри круга, не имеют прообразов.

6) Можно сопоставить каждой точке плоскости основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на фиксированную прямую p, а каждой точке на прямой —

саму эту точку. При этом всем точкам каждой прямой, перпендикулярной к p, сопоставляется одна и та же точка

7) Можно сопоставить каждой точке на плоскости P одну и ту же точку на плоскости R.

3. Произведение отображений. Обратное отображение. Из курса средней школы известно понятие композиции преобразований. Мы будем называть ее *произведением* и определим также и для отображений

Определение Пусть даны отображения $\mathsf{f}\colon P \to R$ и $\mathsf{g}\colon R \to S$. Отображение h, сопоставляющее точке A на плоскости P точку $\mathsf{g}(\mathsf{f}(A))$ на плоскости S, называют *произведением* отображения f на отображение g и обозначают $\mathsf{g}\circ\mathsf{f}$ Отображение, которое производится первым, пишется справа

Подчеркнем, что для того, чтобы можно было составить произведение отображений, нужно, чтобы плоскость, в которую отображает первое отображение, совпадала с плоскостью, которая отображается при втором отображении

Разумеется, произведение отображений, так же как и произведение преобразований, зависит от порядка сомножителей, т. е. $\mathsf{g}\circ\mathsf{f}$, вообще говоря, не совпадает с $\mathsf{f}\circ\mathsf{g}$ Стоит отметить, что для отображений оба произведения одновременно определены только тогда, когда $\mathsf{f}\colon P \to R$ и $\mathsf{g}\colon R \to P$

Предоставим читателю самостоятельно убедиться, что умножение отображений обладает свойством ассоциативности, т. е. если произведение $(\mathsf{f}\circ\mathsf{g})\circ\mathsf{h}$ определено, то произведение $\mathsf{f}\circ(\mathsf{g}\circ\mathsf{h})$ также определено и равно ему

Если мы обозначим через e_P и e_R тождественные преобразования плоскостей P и R, то для любого отображения $\mathsf{f}\colon P \to R$ будем иметь $\mathsf{f}\circ\mathsf{e}_P = \mathsf{f}$ и $\mathsf{e}_R\circ\mathsf{f} = \mathsf{f}$. Когда f — преобразование плоскости, эти равенства сводятся к $\mathsf{e}\circ\mathsf{f} = \mathsf{f}\circ\mathsf{e} = \mathsf{f}$

По определению отображения $\mathsf{f}\colon P \to R$ каждая точка плоскости P имеет только один образ. Примеры 4) и 6) показывают, что одна точка на плоскости R может иметь много прообразов, а в примерах 5), 6) и 7) не каждая точка плоскости R служит образом какой-нибудь точки

Определение. Отображение $\mathsf{f}\colon P \to R$ называется *взаимно однозначным* отображением плоскости P на плоскость R, если каждая точка плоскости R имеет прообраз и притом только один.

Отображения, рассмотренные в примерах 2), 3), взаимно однозначны, а в примерах 4)—7)—нет.

Пусть дано отображение $\mathfrak{f}: P \to R$. Точке A на плоскости P оно сопоставляет ее образ $\mathfrak{f}(A)$ на плоскости R. Теперь, наоборот, образу $\mathfrak{f}(A)$ любой точки A мы сопоставим саму эту точку. Очевидно, что такое соответствие удовлетворяет нашему определению отображения в том и только в том случае, когда каждая точка плоскости R является образом некоторой точки и при этом одной единственной. Это означает, что отображение $\mathfrak{f}$ должно быть взаимно однозначным.

Определение. *Обратным отображением* для взаимно однозначного отображения $\mathfrak{f}: P \leftrightarrow R$ мы назовем отображение $\mathfrak{f}^{-1}: R \to P$ такое, что $\mathfrak{f}^{-1}(\mathfrak{f}(A)) = A$ для каждой точки A на плоскости P.

Легко видеть, что определение обратного отображения равносильно соотношению $\mathfrak{f}^{-1} \circ \mathfrak{f} = \mathbf{e}_P$, где $\mathbf{e}_P$ — тождественное преобразование плоскости P.

Совпадающие точки должны иметь совпадающие образы, поэтому $\mathfrak{f}(\mathfrak{f}^{-1}(\mathfrak{f}(A))) = \mathfrak{f}(A)$ или $\mathfrak{f}(\mathfrak{f}^{-1}(B)) = B$ для любой точки B на плоскости R. Это, в частности, означает, что обратным для отображения $\mathfrak{f}^{-1}$ будет отображение $\mathfrak{f}$. Условие $\mathfrak{f}(\mathfrak{f}^{-1}(B)) = B$ равносильно равенству $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{f}^{-1} = \mathbf{e}_R$, где $\mathbf{e}_R$ — тождественное преобразование плоскости R.

Если $\mathfrak{f}$ — взаимно однозначное преобразование плоскости, то

$$\mathfrak{f}^{-1} \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{f} \circ \mathfrak{f}^{-1} = \mathbf{e}.$$

4. Координатная запись отображений. Пусть нам задано некоторое отображение плоскостей $\mathfrak{f}: P \to R$ По определению это означает, что задан закон, по которому каждой точке M на плоскости P сопоставлен ее образ $\mathfrak{f}(M)$ на плоскости R. Если мы выберем на плоскости P систему координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, а на плоскости R систему координат Q, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, то точка M будет определена парой чисел x, y, а точка M^* — числами x^*, y^*. Следовательно, отображение сопоставляет каждой паре чисел x, y некоторые числа x^* и y^*. Таким образом, задать отображение при выбранных системах координат — все равно что задать две функции, каждая из которых зависит от двух независимых переменных:

$$x^* = \varphi(x, y), \quad y^* = \psi(x, y). \tag{1}$$

Координатной записью отображения мы пользовались в примере 4) этого параграфа.

Подчеркнем, что системы координат на плоскостях P и R, вообще говоря, не связаны между собой: точка Q не должна совпадать с образом точки O, а векторы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$—с образами векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

При координатной записи преобразования, естественно, достаточно выбрать одну систему координат, так как и образ и прообраз находятся в одной плоскости.

Если функции φ и ψ определены для любых пар чисел, то формулы (1) при заданных системах координат на плоскостях P и R определяют отображение $\mathfrak{f}$: $P \to R$.

Отсюда, в частности, следует, что изучение произвольных отображений—задача столь же необозримая, как и изучение произвольных функций или произвольных линий. Здесь мы займемся очень узким, простым, но важным классом отображений. Среди остальных отображений они выделяются так же, как прямые линии среди произвольных линий на плоскости.

§ 2. Линейные отображения

1. Определение линейных отображений. Рассмотрим две плоскости P и R и дадим следующее

Определение. Отображение $\mathfrak{f}$: $P \to R$ называется *линейным*, если существуют такие декартовы системы координат на плоскостях P и R, в которых $\mathfrak{f}$ может быть задано формулами

$$\left.\begin{aligned} x^* &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y^* &= a_2x + b_2y + c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Взаимно однозначное линейное отображение называется *аффинным отображением*.

Подчеркнем, что в определении линейного отображения вовсе не требуется, чтобы коэффициенты a_1 и b_1 или a_2 и b_2 не обращались в нуль одновременно. Правые части формул (1)—многочлены степени не выше 1. Для аффинных отображений они линейные, и, более того, справедливо следующее

Предложение 1. *Для того чтобы линейное отображение, задаваемое формулами* (1), *было взаимно однозначным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Таким образом, аффинное отображение определяется формулами (1) *при условии* (2).

Доказательство. Наше утверждение вытекает, по существу, из предложения 10 § 2 гл. II. Нам нужно узнать, при каком условии каждая точка $M^*(x^*, y^*)$ имеет единственный прообраз $M(x, y)$. Координаты прообраза находятся решением системы (1), а она имеет единственное решение при любых свободных членах x^*-c_1 и y^*-c_2 тогда и только тогда, когда выполнено условие (2).

Приведем примеры аффинных и линейных отображений и преобразований.

1) Ортогональное проектирование (пример 1 § 1) является линейным отображением. Для доказательства выберем на плоскостях P и R декартовы прямоугольные системы координат так, чтобы линия пересечения этих плоскостей была их общей осью абсцисс. Тогда при ортогональном проектировании $\mathfrak{f}\colon P \to R$ точки M и $\mathfrak{f}(M)$ имеют одну и ту же абсциссу, а отношение их ординат равно косинусу угла между плоскостями. Итак,

$$x^* = x, \qquad y^* = y\cos\varphi.$$

Отображение аффинное тогда и только тогда, когда плоскости не перпендикулярны, т. е. $\cos\varphi \neq 0$.

2) Гомотетия проще всего записывается в декартовой системе координат с началом в центре гомотетии O. Поскольку вектор $\overrightarrow{OM}$ при гомотетии переходит в вектор $\overrightarrow{O\mathfrak{f}(M)} = \lambda\overrightarrow{OM}$, то точка M с координатами x, y переходит в точку $\mathfrak{f}(M)$ с координатами λx, λy. Итак, гомотетия определяется равенствами

$$x^* = \lambda x, \qquad y^* = \lambda y.$$

3) Сжатие к прямой (пример 3) § 1) мы запишем, приняв прямую, к которой производится сжатие, за ось абсцисс декартовой прямоугольной системы координат. Легко видеть, что в такой системе

$$x^* = x, \qquad y^* = \lambda y,$$

где λ—коэффициент сжатия.

4) Проектирование на прямую (пример 6) § 1) мы запишем, приняв эту прямую за ось абсцисс декартовой прямоугольной системы координат. В этой системе координат проектирование на прямую записывается формулами

$$x^* = x, \qquad y^* = 0.$$

Это—линейное, но не аффинное преобразование.

5) Отображение, сопоставляющее каждой точке плоскости P одну и ту же точку C плоскости R, записывается формулами $x^* = c_1$, $y^* = c_2$, где c_1, c_2 — координаты точки C. Это также линейное, но не аффинное отображение.

Определение линейного отображения обладает тем же недостатком, что и определение алгебраической линии: оно зависит от систем координат, и мы не знаем, будет ли линейное отображение задаваться формулами вида (1) в другой паре систем координат. Этот недостаток устраняется следующим предложением.

Предложение 2. *Каковы бы ни были декартовы системы координат на плоскостях P и R, линейное отображение $\mathbf{f}\colon P \to R$ задается формулами вида* (1).

Доказательство. Пусть отображение $\mathbf{f}$ задано равенствами (1) в системах координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и Q, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ на плоскостях P и R соответственно. Перейдем к новым системам координат O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ и Q', $\mathbf{p}'_1$, $\mathbf{p}'_2$. Пусть на плоскости P старые координаты точки выражаются через новые по формулам

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1, \\ y &= \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

а на плоскости R новые координаты выражаются через старые по формулам

$$\left.\begin{aligned} x^{*\prime} &= \lambda_1 x^* + \mu_1 y^* + \nu_1, \\ y^{*\prime} &= \lambda_2 x^* + \mu_2 y^* + \nu_2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Нам нужно найти выражение новых координат $x^{*\prime}$, $y^{*\prime}$ точки M^* через новые координаты x', y' точки M. С этой целью мы подставим в равенства (4) выражения (1) координат образа M^* через координаты прообраза M. Мы получим новые координаты M^*, выраженные через старые координаты M:

$$\begin{aligned} x^{*\prime} &= \lambda_1 (a_1 x + b_1 y + c_1) + \mu_1 (a_2 x + b_2 y + c_2) + \nu_1, \\ y^{*\prime} &= \lambda_2 (a_1 x + b_1 y + c_1) + \mu_2 (a_2 x + b_2 y + c_2) + \nu_2. \end{aligned}$$

Для нас важно, что правые части этих равенств — многочлены степени не выше 1 относительно x и y, т. е. имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x^{*\prime} &= A_1 x + B_1 y + C_1, \\ y^{*\prime} &= A_2 x + B_2 y + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Подставив в (5) выражения для x и y по формулам (3), мы найдем зависимость новых координат образа от новых координат прообраза, т. е. искомую зависимость

$$x^{*\prime}=A_1(\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1)+B_1(\alpha_2x'+\beta_2y'+\gamma_2)+C_1,$$
$$y^{*\prime}=A_2(\alpha_1x'+\beta_1y'+\gamma_1)+B_2(\alpha_2x'+\beta_2y'+\gamma_2)+C_2$$

Мы видим, что правые части этих равенств—многочлены степени не выше 1 относительно x' и y', т. е.

$$\left.\begin{aligned}x^{*\prime}&=a_1'x'+b_1'y'+c_1',\\ y^{*\prime}&=a_2'x'+b_2'y'+c_2'.\end{aligned}\right\}$$

Это и требовалось доказать.

Заметим, что аффинные отображения выделяются из линейных условием взаимной однозначности, которое не зависит от выбора систем координат. Поэтому определение аффинного отображения в дополнительном обосновании не нуждается.

2. Произведение линейных отображений. Доказательство предложения 2 было основано на том, что результат подстановки многочленов степени не выше 1 в многочлен степени не выше 1 будет снова таким же многочленом. Это же обстоятельство лежит в основе следующего предложения.

Предложение 3. *Если произведение линейных отображений определено, то оно является линейным отображением.*

Доказательство. Пусть заданы линейные отображения $\mathfrak{f}: P\to R$ и $\mathfrak{g}: R\to S$ и на плоскостях P, R и S выбраны декартовы системы координат. Тогда координаты точки $\mathfrak{f}(M)$ выражаются через координаты точки M формулами

$$\left.\begin{aligned}x^*&=a_1x+b_1y+c_1,\\ y^*&=a_2x+b_2y+c_2,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

а координаты точки $\mathfrak{g}(\mathfrak{f}(M))$ через координаты точки $\mathfrak{f}(M)$—формулами

$$\left.\begin{aligned}x^{**}&=d_1x^*+e_1y^*+f_1,\\ y^{**}&=d_2x^*+e_2y^*+f_2.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Подстановка (6) в (7) дает выражение координат $\mathfrak{g}(\mathfrak{f}(M))$ через координаты M:

$$x^{**}=d_1(a_1x+b_1y+c_1)+e_1(a_2x+b_2y+c_2)+f_1,$$
$$y^{**}=d_2(a_1x+b_1y+c_1)+e_2(a_2x+b_2y+c_2)+f_2.$$

Мы видим, что правые части—многочлены степени не выше 1. Это доказывает наше утверждение.

Предложение 4. *Произведение аффинных отображений является аффинным отображением*

В силу предложения 3 нам достаточно доказать, что произведение взаимно однозначных отображений также взаимно однозначно. Это довольно очевидно: при отображении: $\mathfrak{g}$: $R \longrightarrow S$ каждая точка A плоскости S имеет единственный прообраз B на плоскости R, а он, в свою очередь, имеет единственный прообраз C на плоскости P при отображении $\mathfrak{f}$: $P \longrightarrow R$. Эта точка C и будет единственным прообразом точки A при отображении $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ Предложение доказано.

Как и всякое взаимно однозначное отображение, любое аффинное отображение имеет обратное.

Предложение 5. *Отображение, обратное аффинному отображению, также является аффинным.*

Для доказательства нам надо решить уравнения (1) относительно x и y. Умножим первое уравнение на b_2, второе — на $-b_1$ и сложим их. Мы получим

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x=b_2\,(x^*-c_1)-b_1\,(y^*-c_2).$$

Из условия (2) следует, что x — линейный многочлен от x^* и y^*. Аналогично получаем выражение для y.

3. Образ вектора при линейном отображении. Рассмотрим на плоскости P вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ Обозначим координаты точек M_1 и M_2 в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ через (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет компоненты (x_2-x_1, y_2-y_1). Пусть формулы (1) задают линейное отображение $\mathfrak{f}$ $P \longrightarrow R$ в системах координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и Q, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$. Тогда образы M_1^* и M_2^* точек M_1 и M_2 имеют абсциссы

$$x_1^*=a_1x_1+b_1y_1+c_1 \quad \text{и} \quad x_2^*=a_1x_2+b_1y_2+c_1.$$

Следовательно, первая компонента вектора $\overrightarrow{M_1^*M_2^*}$ равна

$$x_2^*-x_1^*=a_1\,(x_2-x_1)+b_1\,(y_2-y_1).$$

Аналогично находим вторую компоненту $\overrightarrow{M_1^*M_2^*}$:

$$y_2^*-y_1^*=a_2\,(x_2-x_1)+b_2\,(y_2-y_1).$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство: компоненты $\overrightarrow{M_1^*M_2^*}$ выражаются только через компоненты $\overrightarrow{M_1M_2}$, а не через координаты точек M_1 и M_2 по отдельности. Рассмотрим два равных вектора на плоскости P.

Их компоненты одинаковы, и, следовательно, они при линейном отображении перейдут в векторы, компоненты которых также одинаковы.

Предложение 6. *При линейном отображении равные векторы переходят в равные векторы. При этом компоненты образа* (α_1^*, α_2^*) *в базисе* $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ *выражаются через компоненты прообраза* (α_1, α_2) *в базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *формулами*

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^* &= a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2, \\ \alpha_2^* &= a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из этих формул вытекает, что для линейного отображения $\mathfrak{f}$ при любых векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и любом числе α

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \mathfrak{f}(\mathbf{a}) + \mathfrak{f}(\mathbf{b}), \\ \mathfrak{f}(\lambda\mathbf{a}) &= \lambda\mathfrak{f}(\mathbf{a}). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Докажем, например, первое из равенств (9). Пусть γ_1^* и γ_2^* — компоненты вектора $\mathfrak{f}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Тогда

$$\gamma_1^* = a_1(\alpha_1+\beta_1) + b_1(\alpha_2+\beta_2),$$
$$\gamma_2^* = a_2(\alpha_1+\beta_1) + b_2(\alpha_2+\beta_2),$$

где α_1, α_2 и β_1, β_2 — компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Отсюда

$$\gamma_1^* = a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + a_1\beta_1 + b_1\beta_2 = \alpha_1^* + \beta_1^*,$$
$$\gamma_2^* = a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + a_2\beta_1 + b_2\beta_2 = \alpha_2^* + \beta_2^*.$$

Следующее предложение устанавливает геометрический смысл коэффициентов в формулах (1).

Предложение 7. *Пусть отображение* $\mathfrak{f}\colon P \to R$ *записано в системах координат* O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *и* Q_1, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ *на плоскостях* P *и* R *формулами* (1). *Тогда* (c_1, c_2) — *координаты точки* $\mathfrak{f}(O)$ *в системе координат* Q, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ *а* (a_1, a_2) *и* (b_1, b_2) — *компоненты* $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_1)$ *и* $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_2)$ *в базисе* $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$.

Подставим в (1) значения $x=0$ и $y=0$, т. е. координаты точки O. Мы видим, что координаты $\mathfrak{f}(O)$ равны c_1 и c_2.

Положим α_1 и α_2 в (8) равными компонентам $\mathbf{e}_1$, т. е. $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$. Тогда $\alpha_1^*=a_1$, $\alpha_2^*=a_2$ Следовательно, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_1)$ имеет компоненты a_1, a_2. Аналогично доказывается, что компоненты $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_2)$ равны b_1 и b_2.

Предложение 8. *Каковы бы ни были три точки* L, M *и* N, *не лежащие на одной прямой на плоскости* P, *и три точки* L^*, M^* *и* N^* *на плоскости* Q, *существует единственное линейное отображение* $\mathfrak{f}$ *такое, что* $L^* = \mathfrak{f}(L)$, $M^* = \mathfrak{f}(M)$ *и* $N^* = \mathfrak{f}(N)$. *Это отображение будет* *аффинным тогда и только тогда, когда L^*, M^* и N^* не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Векторы $\overrightarrow{LM}$ и $\overrightarrow{LN}$ не коллинеарны. Следовательно, L, $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{LN}$—декартова система координат на плоскости P. На плоскости R выберем систему координат произвольно, и пусть c_1, c_2—координаты L^*, а a_1, a_2 и b_1, b_2—компоненты векторов $\overrightarrow{L^*M^*}$ и $\overrightarrow{L^*N^*}$ в этой стистеме координат. Формулы

$$x^* = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y^* = a_2x + b_2y + c_2$$

определяют линейное отображение $\mathfrak{f}: P \to R$, которое, как легко видеть, обладает требуемым свойством $L^* = \mathfrak{f}(L)$, $M^* = \mathfrak{f}(M)$, $N^* = \mathfrak{f}(N)$ Более того, согласно предложению 7 это свойство однозначно определяет коэффициенты в формулах.

Условие (2), равносильное аффинности отображения, необходимо и достаточно для того, чтобы $\overrightarrow{L^*M^*}$ и $\overrightarrow{L^*N^*}$ не были коллинеарны, т. е. L^*, M^* и N^* не лежали на одной прямой.

Предложение 9. *При аффинном отображении* $\mathfrak{f}$ *образ* M^* *точки* M *в системе координат* $\mathfrak{f}(O)$, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_1)$, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_2)$ *имеет те же координаты, что и точка* M *в системе координат* O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Иными словами, в системах координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathfrak{f}(O)$, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_1)$, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_2)$ аффинное отображение $\mathfrak{f}$ записывается формулами $x^* = x$, $y^* = y$. Это утверждение немедленно следует из предложения 7.

Выберем на плоскостях P и R какие-либо декартовы системы координат и сопоставим точке M на плоскости P точку M^* на плоскости R с теми же координатами. Это соответствие будет аффинным отображением, определяемым формулами $x^* = x$, $y^* = y$. Из предложения 9 вытекает, что любое аффинное отображение можно описать таким образом.

§ 3. Аффинные преобразования

1. Ортогональные преобразования. Изучение аффинных преобразований мы начнем с пункта, посвященного перемещениям плоскости. Здесь и далее мы будем называть их *ортогональными преобразованиями*. Докажем сначала, что три основных вида ортогональных преобразований — параллельный перенос, поворот и осевая симметрия — являются аффинными преобразованиями.

а) Параллельный перенос на вектор **c** сопоставляет точке M с координатами x, y в некоторой декартовой системе координат точку M^* с координатами $x+c_1$, $y+c_2$, где c_1 и c_2 — компоненты **c**. Следовательно,

$$x^*=x+c_1, \quad y^*=y+c_2. \tag{1}$$

б) Рассмотрим поворот плоскости вокруг точки O на угол α. В полярной системе координат с полюсом в точке O образ M^* точки $M(r, \varphi)$ имеет координаты r и $\varphi+\alpha$. По формулам (3) § 2 гл. I мы можем перейти от полярной системы координат к декартовой прямоугольной системе координат с началом в точке O:

$$x^*=r\cos(\varphi+\alpha), \quad y^*=r\sin(\varphi+\alpha).$$

Отсюда, согласно формулам косинуса и синуса суммы двух углов, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} x^*&=x\cos\alpha-y\sin\alpha,\\ y^*&=x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

в) Чтобы получить координатную запись осевой симметрии, выберем ось симметрии за ось абсцисс декартовой прямоугольной системы координат. Тогда точка $M(x, y)$ переходит в точку M^* с координатами x, $-y$. Итак, при осевой симметрии

$$x^*=x, \quad y^*=-y. \tag{3}$$

Формулы (1), (2) и (3) имеют в правых частях линейные многочлены и, следовательно, задают линейные преобразования. Поскольку эти преобразования взаимно однозначны, они аффинные.

Ортогональное преобразование определяется как преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками. Известно, что оно сохраняет также и углы между прямыми.

Отсюда вытекает, что при ортогональном преобразовании декартова прямоугольная система координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ перейдет в декартову прямоугольную систему координат O^*, $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, а точка M с координатами x, y относительно O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ перейдет в точку M^* с теми же координатами x, y относительно системы координат O^*, $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$. Но связь координат одной и той же точки в разных системах координат нам известна (формулы (7) § 4 гл. I). В применении к точке M^* эти формулы дают выражение ее координат x^*, y^* в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ через ее координаты x, y в системе O^*, $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x\cos\varphi \mp y\sin\varphi + c_1, \\ y^* &= x\sin\varphi \pm y\cos\varphi + c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Здесь (c_1, c_2)—координаты точки O^*, а φ—угол между векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_1^*$, отсчитываемый в направлении от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_1^*$.

Вспомним, что x, y—координаты прообраза M. Это означает, что на формулы (4) можно смотреть как на координатную запись рассматриваемого ортогонального преобразования в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Итак, доказано

Предложение 1. *Произвольное ортогональное преобразование является аффинным и записывается в любой декартовой прямоугольной системе координат формулами вида* (4).

Из этого предложения легко следует

Предложение 2. *Любое ортогональное преобразование есть произведение поворота, параллельного переноса и, возможно, осевой симметрии.*

В самом деле, пусть некоторое ортогональное преобразование записано в декартовой прямоугольной системе координат формулами (4). При осевой симметрии относительно оси абсцисс этой системы координат точка $M(x, y)$ перейдет в точку $N(u, v)$, где $u = x$, $v = -y$. При повороте на угол φ вокруг начала координат точка N перейдет в точку $K(w, z)$, где

$$w = u\cos\varphi - v\sin\varphi = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$z = u\sin\varphi + v\cos\varphi = x\sin\varphi - y\cos\varphi.$$

Наконец, после параллельного переноса на вектор $\mathbf{c}(c_1, c_2)$ точка $K(w, z)$ перейдет в точку $M^*(w + c_1, z + c_2)$, координаты которой выражаются через координаты x, y по формулам (4) при нижних знаках у коэффициентов при y. Формулы (4) при верхних знаках мы получим, если пропустим осевую симметрию.

Мы видим, что произвольной точке плоскости построенное произведение преобразований сопоставляет тот же образ, что и заданное ортогональное преобразование. Предложение доказано.

Следует иметь в виду, что полученное разложение ортогонального преобразования в произведение не однозначно. Более того, можно поворот или параллельный перенос разложить в произведение осевых симметрий, произведение параллельного переноса и поворота представить как один поворот и т. д. Мы не будем уточнять, как это сделать, а выясним следующее общее свойство всех таких разложений.

Предложение 3. *При любом разложении данного ортогонального преобразования в произведение любого числа поворотов, параллельных переносов и осевых симметрий четность числа осевых симметрий, входящих в разложение, одна и та же*

Для доказательства рассмотрим на плоскости произвольный базис и проследим за изменением его ориентации (направления кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$) при ортогональном преобразовании. Следует заметить, что поворот и параллельный перенос не меняют ориентацию ни одного базиса, а осевая симметрия меняет ориентацию любого базиса. Поэтому, если данное ортогональное преобразование меняет ориентацию базиса, то в любое его разложение должно входить нечетное число осевых симметрий, и тогда меняется ориентация и любого другого базиса. Если же ориентация базиса не меняется, то число осевых симметрий в разложении может быть только четным, и в этом случае ориентация любого базиса остается прежней.

Определение. Ортогональные преобразования, которые могут быть разложены в произведение поворота и параллельного переноса, называются *ортогональными преобразованиями первого рода*; остальные называются *ортогональными преобразованиями второго рода*. Мы можем сформулировать

Предложение 4. *Ортогональные преобразования первого рода записываются формулами* (4) *при верхних знаках у коэффициентов при y и не меняют ориентацию ни одного базиса. Ортогональные преобразования второго рода записываются формулами* (4) *при нижних знаках и меняют ориентацию каждого базиса.*

2. Образ прямой линии. Ниже в этом параграфе f обозначает аффинное преобразование плоскости, записываемое в декартовой системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ формулами

$$\left.\begin{aligned} x^* &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y^* &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

при условии

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (6)$$

Рассмотрим на плоскости прямую линию с уравнением $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t$ и найдем ее образ при аффинном преобразовании $\mathbf{f}$. Радиус-вектор образа M^* произвольной точки M прямой можно вычислить так:

$$\mathbf{r}^*=\overrightarrow{OM^*}=\overrightarrow{O\mathbf{f}(O)}+\overrightarrow{\mathbf{f}(O)M^*}=\mathbf{c}+\mathbf{f}(\mathbf{r}).$$

Здесь $\mathbf{c}$ — постоянный вектор $\overrightarrow{O\mathbf{f}(O)}$, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M. Согласно свойству (9) § 2 аффинных преобразований, мы получаем

$$\mathbf{r}^*=\mathbf{c}+\mathbf{f}(\mathbf{r}_0)+\mathbf{f}(\mathbf{a})\,t. \tag{7}$$

При аффинном преобразовании ненулевой вектор переходит в ненулевой. Действительно, иначе нашлись бы две различные точки, которые переходят в одну, что невозможно для взаимно однозначного преобразования. Поэтому $\mathbf{f}(\mathbf{a})\neq 0$ и уравнение (7) является уравнением прямой линии. Итак, образы всех точек прямой $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t$ лежат на прямой (7).

Более того, преобразование $\mathbf{f}$ задает взаимно однозначное соответствие между точками прямых линий. При сделанном нами выборе начальных точек и направляющих векторов образ точки M имеет на прямой (7) то же значение параметра t, что и точка M на исходной прямой. Отсюда мы получаем следующее

Предложение 5. *При аффинном преобразовании прямая линия переходит в прямую линию,*
отрезок переходит в отрезок,
параллельные прямые переходят в параллельные.

Для доказательства второго утверждения надо заметить, что отрезок прямой состоит из точек, у которых значения параметра удовлетворяют неравенству вида $t_1\leqslant t\leqslant t_2$. Третье утверждение следует из того, что в силу формул (9) § 2 коллинеарные векторы переходят в коллинеарные.

Предложение 6. *При аффинном преобразовании отношение длин параллельных отрезков не изменяется.*

Доказательство. Пусть отрезки AB и CD параллельны. Это означает, что существует такое число λ, что $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$. Поэтому образы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ связаны той же зависимостью $\overrightarrow{A^*B^*}=\lambda\overrightarrow{C^*D^*}$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{|A^*B^*|}{|C^*D^*|}=|\lambda|.$$

Следствие. *Если точка C делит отрезок AB в некотором отношении λ, то ее образ C^* делит образ A^*B^* отрезка AB в том же отношении λ.*

3. Изменение площадей при аффинном преобразовании. Для начала рассмотрим произвольный параллелограмм. Выберем общую декартову систему координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и обозначим через (x_1, y_1) и (x_2, y_2) компоненты векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, на которых наш параллелограмм построен Площадь параллелограмма мы можем вычислить, пользуясь свойствами векторного произведения

$$S=|[\mathbf{p}, \mathbf{q}]|=|[x_1\mathbf{e}_1+y_1\mathbf{e}_2,\ x_2\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2]|=$$
$$=|x_1y_2-y_1x_2||[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]|.$$

Пусть афинное преобразование $\mathbf{f}$ записывается в выбранной системе координат формулами (5). Из предложения 7 § 2 следует, что $\mathbf{f}(\mathbf{e}_1)=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{f}(\mathbf{e}_2)=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2$. Согласно предложению 9 § 2 векторы $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ в базисе $\mathbf{f}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{f}(\mathbf{e}_2)$ имеют те же компоненты (x_1, y_1) и (x_2, y_2), что и их прообразы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Образ параллелограмма построен на векторах $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{q})$, и его площадь

$$S^*=|[\mathbf{f}(\mathbf{p}),\ \mathbf{f}(\mathbf{q})]|=|x_1y_2-x_2y_1||[\mathbf{f}(\mathbf{e}_1),\ \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)]|=$$
$$=|x_1y_2-x_2y_1||[a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2,\ b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2]|=$$
$$=|x_1y_2-x_2y_1||a_1b_2-a_2b_1||[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]|.$$

Отсюда окончательно

$$S^*/S=|a_1b_2-a_2b_1|. \tag{8}$$

Это выражение показывает, что отношение площади S^* образа к площади S прообраза одно и то же для всех параллелограммов. Отсюда же видно, что величина $|a_1b_2-a_2b_1|$ на самом деле не зависит от системы координат, в которой записано преобразование, хотя в ее выражение и входят коэффициенты, зависящие от системы координат. Эта величина представляет собой инвариант (см с. 42), выражающий геометрическое свойство преобразования.

Пусть $x_1y_2-x_2y_1>0$. Тогда, как мы видели в п. 8 § 3 гл. I, пары векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ориентированы одинаково и пары $\mathbf{f}(\mathbf{p})$, $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{f}(\mathbf{e}_2)$ также ориентированы одинаково. Поэтому, если при аффинном преобразовании ориентация базисных векторов меняется, то меняется и ориентация любой пары $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, имеющей ту же ориентацию Точно так же можно доказать, что меняется ориентация и любой пары, ориентированной противоположно паре базисных векторов.

Если же при аффинном преобразовании ориентация базиса не меняется, то не меняются ориентации и других упорядоченных пар векторов.

Это свойство, разумеется, не зависит от того, какая пара векторов выбрана в качестве базиса: или меняется ориентация каждой пары векторов, или не меняется ни у одной. Мы уже доказали это свойство для ортогональных преобразований.

Отметим теперь, что пара векторов $f(e_1)$, $f(e_2)$ ориентирована так же, как e_1, e_2, в том и только в том случае, когда $a_1b_2-a_2b_1>0$. Отсюда мы заключаем, что не только модуль детерминанта $a_1b_2-a_2b_1$, но и его знак не зависят от выбора системы координат. Можно утверждать, таким образом, что величина $a_1b_2-a_2b_1$ представляет собой инвариант, связанный с аффинным преобразованием. Геометрический смысл его — отношение площади произвольного ориентированного параллелограмма к площади ориентированного параллелограмма, который в него переходит при рассматриваемом аффинном преобразовании.

Займемся теперь площадями других фигур. Каждый треугольник может быть дополнен до параллелограмма, площадь которого равна удвоенной площади треугольника. Поэтому отношение площади образа треугольника к площади самого треугольника удовлетворяет равенству (8).

Каждый многоугольник может быть разбит на треугольники. Следовательно, формула (8) справедлива и для площадей произвольных многоугольников.

Мы не будем здесь касаться определения площади произвольных криволинейных фигур. Скажем лишь, что в тех случаях, когда эта площадь определена, она равна пределу площадей некоторой последовательности многоугольников, вписанных в рассматриваемую фигуру. Из теории пределов известно следующее предложение: если последовательность S_n стремится к пределу S, то последовательность δS_n, где δ — постоянное, стремится к пределу δS. На основании этого предложения мы заключаем, что формула (8) справедлива в самом общем случае.

В качестве примера найдем выражение площади эллипса через его полуоси. В § 2 гл. II мы доказали, что эллипс с полуосями a и b может быть получен сжатием окружности радиуса a к прямой, проходящей через ее центр. Коэффициент сжатия равен b/a. Очевидно, что при этом преобразовании квадрат со стороной 1, основание которого лежит на указанной прямой, перейдет в прямоугольник со сторонами b/a и 1. Таким образом, отношение площади образа квадрата к площади самого квадрата равно b/a. Мы видели, что при аффинном преобразовании площади всех фигур меняются в одном и том же отношении. Поэтому для площади эллипса мы имеем

$S = (\pi a^2)(b/a)$. Отсюда получаем, что

$$S = \pi ab.$$

4. Образы линий второго порядка. Мы видели, что прямая линия переходит в прямую. Это частный случай следующего предложения.

Предложение 7. *Аффинное преобразование переводит алгебраическую линию в алгебраическую линию того же порядка.*

В самом деле, пусть линия L в декартовой системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ имеет алгебраическое уравнение порядка p. Согласно предложению 9 § 2 образы всех точек линии L при аффинном преобразовании $\mathfrak{f}$ имеют в системе координат $\mathfrak{f}(O)$, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_1)$, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_2)$ те же координаты, что их прообразы в системе координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Следовательно, координаты образов в системе $\mathfrak{f}(O)$, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_1)$, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_2)$ связаны тем же алгебраическим уравнением порядка p. Это означает, что образ линии L в декартовой системе координат $\mathfrak{f}(O)$, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_1)$, $\mathfrak{f}(\mathbf{e}_2)$ определяется алгебраическим уравнением порядка p. Мы получили, что образ линии L является алгебраической линией того же порядка, что и сама линия.

Из предложения 7, в частности, следует, что линия второго порядка при аффинном преобразовании перейдет в линию второго порядка. Мы докажем более сильное утверждение. Именно, в теореме 1 § 1 гл. III линии второго порядка разделены на семь классов. Будет доказано, что класс линии сохраняется при аффинных преобразованиях. На этом основании классы линий второго порядка, перечисленные в указанной теореме, называют *аффинными классами*. Точнее наше утверждение формулируется так.

Предложение 8. *Линия второго порядка, принадлежащая к одному из аффинных классов, при любом аффинном преобразовании может перейти только в линию того же класса. Кроме того, каждую линию второго порядка подходящим аффинным преобразованием можно перевести в любую другую линию того же класса.*

Доказательство. Линию мы назовем ограниченной, если она лежит внутри некоторого параллелограмма. Легко видеть, что при аффинном преобразовании ограниченная линия должна перейти в ограниченную, а неограниченная — в неограниченную.

1) Эллипс — ограниченная линия второго порядка, а кроме эллипсов ограничены только линии, состоящие из

одной-единственной точки, — пары мнимых пересекающихся прямых. Поскольку эллипс ограничен и состоит больше чем из одной точки, он должен перейти в эллипс при любом аффинном преобразовании.

2) Гипербола состоит из двух не связанных между собой ветвей. Это свойство можно сформулировать так, что станет ясна его неизменность при аффинных преобразованиях. Именно, существует прямая линия, не пересекающая гиперболу, но пересекающая некоторые ее хорды (т. е. такая, что по обе ее стороны лежат точки гиперболы).

Из всех линий второго порядка только гиперболы и пары параллельных прямых состоят из двух не связанных между собой ветвей. У гиперболы эти ветви — не прямые линии, и поэтому она при аффинном преобразовании может перейти только в гиперболу.

3) Парабола — неограниченная линия второго порядка, состоящая из одного непрямолинейного куска. Этим свойством не обладают никакие другие линии второго порядка, и потому парабола может перейти при аффинном преобразовании только в параболу.

4) Если линия второго порядка представляет собой точку (пару мнимых пересекающихся прямых), прямую (пару совпавших прямых), пару пересекающихся или пару параллельных прямых, то из доказанных ранее свойств аффинных преобразований следует, что эта линия не может перейти в линию никакого другого класса.

Докажем теперь, что каждую линию второго порядка подходящим аффинным преобразованием можно перевести в любую другую линию того же аффинного класса. Для этого заметим следующее. В теореме 1 § 1 гл. III канонические уравнения линий второго порядка написаны в декартовой прямоугольной системе координат и содержат параметры a, b, ... Таким образом, по существу, каждое из выписанных в теореме уравнений представляет собой целое множество уравнений, соответствующих разным значениям параметров. Если мы откажемся от ортонормированности базиса, мы сможем привести все это множество к одному и тому же каноническому виду, уже не содержащему параметров. Например, замена координат $x' = x/a$, $y' = y/b$ переводит уравнение эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ в уравнение $x'^2 + y'^2 = 1$, каковы бы ни были a и b. (Последнее уравнение не есть уравнение окружности, так как система координат не декартова прямоугольная.) Читатель без труда покажет, что для каждого уравнения второго порядка существует общая декартова система координат, при переходе к которой это уравнение приводится к одному из видов:

$$1)\ x^2+y^2=1,\quad 2)\ x^2+y^2=-1,\quad 3)\ x^2-y^2=1,$$
$$4)\ x^2-y^2=0,\quad 5)\ x^2+y^2=0,\quad 6)\ y^2=2x,$$
$$7)\ y^2-1=0,\quad 8)\ y^2+1=0,\quad 9)\ y^2=0.$$

Такую систему координат мы назовем *аффинной канонической системой.*

Из предложения 9 § 2 следует, что аффинное преобразование, которое совмещает аффинные канонические системы координат двух линий одного класса, совмещает и эти линии. Предложение, таким образом, полностью доказано.

Предложение 9. *Линии второго порядка одного аффинного класса при равных значениях параметров в канонических уравнениях могут быть совмещены подходящим ортогональным преобразованием.*

В самом деле, их совмещает то ортогональное преобразование, которое совмещает их прямоугольные канонические системы координат.

5. Описание всех аффинных преобразований. Мы видели, насколько аффинное преобразование может изменить все фигуры: окружность может перейти в произвольный эллипс, правильный треугольник — в совершенно произвольный. Казалось бы, никакие углы при этом сохраниться не могут. Однако имеет место следующее неожиданное.

Предложение 10. *Для каждого аффинного преобразования существуют две взаимно перпендикулярные прямые, которые перейдут во взаимно перпендикулярные.*

Для доказательства рассмотрим какую-либо окружность. При рассматриваемом аффинном преобразовании она перейдет в эллипс. Каждая ось симметрии эллипса — множество середин хорд, параллельных другой оси. При аффинном преобразовании хорда перейдет в хорду, параллельность хорд должна сохраниться и середина хорды переходит в середину (предложение 5). Поэтому прообразы осей симметрии эллипса — отрезки, обладающие тем же свойством: каждый из них есть множество середин хорд окружности, параллельных другому отрезку. Такие отрезки непременно являются двумя взаимно перпендикулярными диаметрами окружности. Таким образом, предложение доказано: существуют два взаимно перпендикулярных диаметра окружности, которые переходят во взаимно перпендикулярные отрезки — оси симметрии эллипса.

Это предложение позволяет нам описать все аффинные преобразования.

Теорема 1. *Каждое аффинное преобразование представляет собой произведение ортогонального преобразования и сжатий к двум взаимно перпендикулярным прямым.*

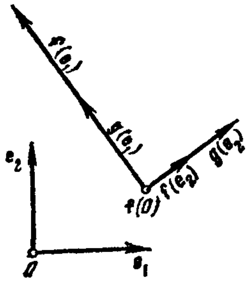

Рис. 56.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ два взаимно перпендикулярных вектора, которые при рассматриваемом аффинном преобразовании $\mathbf{f}$ перейдут во взаимно перпендикулярные векторы. Такие векторы существуют согласно предложению 10. Рассмотрим какую-нибудь точку O и систему координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Эта система перейдет в систему координат $\mathbf{f}(O)$, $\mathbf{f}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{f}(\mathbf{e}_2)$ (рис. 56). При помощи ортогонального преобразования $\mathbf{g}$ мы можем перевести точку O в $\mathbf{f}(O)$ и совместить направления базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ с направлениями их образов, т. е. мы можем выбрать $\mathbf{g}$ так, что

$$\mathbf{g}(O)=\mathbf{f}(O),\ \lambda_1\mathbf{g}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{f}(\mathbf{e}_1),\ \lambda_2\mathbf{g}(\mathbf{e}_2)=\mathbf{f}(\mathbf{e}_2),\ \lambda_1,\ \lambda_2>0.$$

Пусть $\mathbf{h}_1$ — сжатие в отношении λ_1 к прямой, проходящей через $\mathbf{f}(O)$ в направлении вектора $\mathbf{f}(\mathbf{e}_2)$. Оно переводит $\mathbf{g}(\mathbf{e}_1)$ в $\mathbf{f}(\mathbf{e}_1)$, а точку $\mathbf{f}(O)$ и вектор $\mathbf{g}(\mathbf{e}_2)$ не изменяет:

$$\mathbf{h}_1\circ\mathbf{g}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{f}(\mathbf{e}_1),\ \mathbf{h}_1\circ\mathbf{g}(O)=\mathbf{f}(O),\ \mathbf{h}_1\circ\mathbf{g}(\mathbf{e}_2)=\mathbf{g}(\mathbf{e}_2).$$

Пусть $\mathbf{h}_2$ — сжатие в отношении λ_2 к прямой, проходящей через $\mathbf{f}(O)$ в направлении вектора $\mathbf{f}(\mathbf{e}_1)$. Оно переводит $\mathbf{g}(\mathbf{e}_2)$ в $\mathbf{f}(\mathbf{e}_2)$, а точку $\mathbf{f}(O)$ и вектор $\mathbf{f}(\mathbf{e}_1)$ не изменяет. Таким образом,

$$\mathbf{h}_2\circ\mathbf{h}_1\circ\mathbf{g}(O)=\mathbf{f}(O),\ \mathbf{h}_2\circ\mathbf{h}_1\circ\mathbf{g}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{f}(\mathbf{e}_1),$$
$$\mathbf{h}_2\circ\mathbf{h}_1\circ\mathbf{g}(\mathbf{e}_2)=\mathbf{f}(\mathbf{e}_2).$$

Мы видим, что преобразование $\mathbf{h}_2\circ\mathbf{h}_1\circ\mathbf{g}$ переводит систему координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ в ту же систему координат, что и преобразование $\mathbf{f}$. Мы знаем из предложения 8 § 2, что аффинное преобразовавание вполне определяется образом какой-нибудь декартовой системы координат. Поэтому аффинные преобразования $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}_2\circ\mathbf{h}_1\circ\mathbf{g}$ совпадают, и теорема доказана.

§ 4. Понятие группы

1. Аффинная геометрия. Геометрия изучает свойства, общие для всех конгруэнтных фигур. Мы не исследуем, например, по отдельности треугольники со сторонами длиной 3, 4 и 5, начерченные на разных листах бумаги. Конгруэнтные фигуры рассматриваются как равные, и понятие конгруэнтности (равенства) фигур является, таким образом, одним из основных геометрических понятий.

Подчеркнем, что *равенство* (*конгруэнтность*) *фигур* определяется как возможность наложить одну фигуру на другую при помощи перемещения, т. е. преобразования, сохраняющего расстояние между точками.

Сейчас мы обсудим, что получится, если вместо ортогональных преобразований выбрать какую-нибудь другую совокупность преобразований и объявить равными фигуры, которые можно совместить преобразованиями из данной совокупности. Разумеется, фигуры, равные в таком смысле, будут, вообще говоря, не равны в смысле обычного определения. Поэтому у равных в новом смысле фигур будут общими не те свойства, какие были общими у фигур, равных в обычном смысле слова. Таким образом, изменится все содержание геометрии, и, введя новое определение равенства фигур, мы должны будем говорить о новой геометрии. Теоремы о свойствах фигур, неизменных при преобразованиях из некоторого заданного множества преобразований, образуют содержание геометрии, порождаемой данным множеством преобразований. Каждую геометрию, порождаемую некоторым множеством преобразований, называют *клейновой геометрией*.

Классическая геометрия, т. е. клейнова геометрия, в которой равенство определяется при помощи ортогональных преобразований, носит название *евклидовой* геометрии[1]).

Дадим краткое описание геометрии, в которой фигуры считаются равными, если их можно совместить аффинным преобразованием. Такая геометрия называется *аффинной*.

Аффинное преобразование переводит прямую линию в прямую линию. Поэтому в аффинной геометрии имеет смысл понятие прямой. Если бы некоторые аффинные преобразования — движения нашей новой геометрии — переводили прямые линии, скажем, в окружности, то понятие прямой утратило бы свой смысл.

Точно так же сохраняется определение параллельных и пересекающихся прямых.

Рассмотрим тройки точек, лежащих на одной прямой. Если одну такую тройку можно при помощи аффинного преобразования совместить с другой тройкой, то отношение, в котором средняя точка делит отрезок между крайними, одно и то же для обеих троек. Это отношение представляет собой свойство, общее для всех троек точек, равных в аффинной геометрии. Все теоремы, касающиеся этого отношения, входят в состав аффинной геометрии. Примером может служить теорема о том, что параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.

---

[1]) Здесь следует отметить, что большинство теорем евклидовой геометрии относится к свойствам фигур, не зависящим от выбора единицы измерения длин, и, таким образом, принадлежит к геометрии, порождаемой множеством преобразований подобия (произведений гомотетий и ортогональных преобразований). По указанной причине эту последнюю геометрию иногда также называют евклидовой.

Рассмотрим теперь отрезок прямой. Из предложения 8 § 2 следует, что каждый отрезок можно совместить с любым другим отрезком при помощи подходящего аффинного преобразования. Если аффинные преобразования мы считаем движениями, то должны сделать вывод, что все отрезки равны между собой. Поскольку равными оказываются отрезки любых длин, длина не является общим свойством всех равных между собой отрезков и не может рассматриваться в аффинной геометрии. Здесь мы не можем считать длину свойством отрезка, так же как в евклидовой геометрии мы не считаем свойством отрезка угол, который он составляет с направлением на север

Аналогично обстоит дело с измерением углов. Любые два неколлинеарных вектора, имеющих общее начало, можно при помощи подходящего аффинного преобразования перевести в любые другие два неколлинеарных вектора, имеющих общее начало. Поэтому в аффинной геометрии все углы равны между собой (за исключением углов в 0 и π) и измерение углов не имеет смысла

Предложение 8 § 2 показывает также, что для любых двух треугольников существует аффинное преобразование, их совмещающее Поэтому мы должны считать, что в аффинной геометрии все треугольники равны между собой.

Медиану треугольника в аффинной геометрии мы определить можем при аффинном преобразовании медиана переходит в медиану, так как середина отрезка переходит в середину Теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2.1, относится к аффинной геометрии.

Те же свойства треугольников, которые формулируются при помощи понятий длины и угла, не относятся к аффинной геометрии Например, не имеет смысла говорить о высоте треугольника, так как высота перейдет, вообще говоря, не в высоту при аффинном преобразовании.

В аффинной геометрии имеет смысл понятие алгебраической линии и, в частности, понятие линии второго порядка. Предложение 8 § 3 показывает, что все линии второго порядка, принадлежащие одному аффинному классу, равны между собой, а линии из разных аффинных классов не равны. Например, в аффинной геометрии окружности неотличимы от эллипсов, и окружности и эллипсы с любыми полуосями — это с точки зрения аффинной геометрии разные положения одной и той же линии, которую можно назвать эллипсом.

Эллипс не имеет фокусов и директрис В их определение входит понятие расстояния, и, следовательно, это определение не имеет смысла в аффинной геометрии. А вот центр у эллипса имеется — его можно определить, используя только понятие середины отрезка, которое относится к аффинной геометрии.

2. Значение клейновых геометрий. Здесь описана одна из многих геометрий, некоторые из них разработаны не менее детально, чем евклидова. Разумеется, при описании физического пространства евклидова геометрия была и останется незаменимой, но построение таких геометрий, как аффинная, и многих других, гораздо более диковинных, существенно с двух точек зрения.

Во-первых, их развитие играет важную роль в общем развитии математики и, таким образом, связано с физикой и другими науками, имеющими непосредственное приложение к практике. Например, идеи, о которых идет речь, сыграли существенную роль при построении теории относительности.

Во-вторых, изучение разного рода обобщенных геометрий позволяет глубже понять нашу евклидову геометрию. Например, Н. И. Лобачевский построил свою геометрию, исследуя независимость постулата о параллельных от остальных аксиом. (См. по этому поводу книгу [5].)

3. Определение группы преобразований. Рассмотрим теперь вопрос о том, какие совокупности преобразований могут быть использованы для определения равенства фигур в некоторой клейновой геометрии. Всякое понятие равенства должно удовлетворять трем аксиомам:

1. *Каждая фигура F равна самой себе, или $F=F$.*

2. *Если фигура F равна фигуре G, то фигура G равна F, или из $F=G$ следует $G=F$.*

3. *Если фигура F равна фигуре G, а G равна H, то фигура F равна фигуре H, или из $F=G$ и $G=H$ следует $F=H$.*

Эти аксиомы налагают определенные условия на совокупность преобразований $\mathfrak{G}$, определяющую равенство в клейновой геометрии. Именно, первая аксиома равносильна условию

1′. *Тождественное преобразование принадлежит совокупности $\mathfrak{G}$.*

Если бы мы, например, условились считать равными только те фигуры, которые можно совместить отражением, то фигуры, не имеющие осей симметрии, оказались бы не равными самим себе.

Вторая аксиома будет выполнена, если

2′. *Каждое преобразование из совокупности $\mathfrak{G}$ имеет обратное преобразование, также принадлежащее совокупности $\mathfrak{G}$.*

Если, например, совокупность $\mathfrak{G}$ содержит только преобразование, которое сопоставляет любой точке какую-нибудь одну точку A_0, то любая фигура F будет равна точке A_0, а точка A_0 может быть равна только самой себе, и, следовательно, $A_0 \neq F$, хотя $F=A_0$.

Рассмотрим третью аксиому. Пусть фигура F совмещается с G преобразованием $\mathfrak{f}$ из совокупности $\mathfrak{G}$, а G совмещается с H преобразованием $\mathfrak{g}$ также из $\mathfrak{G}$. Преобразование $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ совмещает фигуры F и H. Поэтому третья аксиома означает, что

3′. *Произведение любых двух преобразований из совокупности $\mathfrak{G}$ принадлежит к совокупности $\mathfrak{G}$.*

О п р е д е л е н и е. Совокупность преобразований $\mathfrak{G}$ называется *группой преобразований*, если она удовлетворяет приведенным выше условиям 1′, 2′, 3′.

Из сказанного видно, что каждой группе преобразований плоскости соответствует некоторая клейнова геометрия на плоскости.

Приведем некоторые примеры групп преобразований. Доказанные нами свойства ортогональных и аффинных преобразований позволяют заметить, что совокупность всех ортогональных преобразований и совокупность всех аффинных преобразований являются группами.

Читатель без труда поверит, что совокупность всех ортогональных преобразований первого рода является группой, а также что группу представляет собой совокупность всех преобразований подобия.

4. Группы. Рассмотрим произвольное множество объектов любой природы — чисел, точек, преобразований или чего угодно другого. Мы говорим, что на этом множестве задана *операция*, если задан закон, по которому любым двум элементам множества a и b сопоставлен некоторый элемент c. Операцию чаще всего называют *умножением*. В соответствии с этим элемент c называют *произведением* и обозначают ab.

Множество, на котором задана операция, называют *группой*, если операция удовлетворяет следующим условиям:

1. Умножение ассоциативно, т. е. $a(bc)=(ab)c$.

2. Существует *элемент* e, называемый *единичным*, такой, что для любого элемента a выполнены равенства

$$ae=ea=a.$$

3. Для каждого элемента a существует элемент a^{-1}, называемый *обратным*, такой, что $aa^{-1}=a^{-1}a=e$.

В случае преобразований, как было сказано в § 1, ассоциативность обязательно имеет место. Поэтому группы преобразований являются группами в смысле этого определения.

Примерами групп могут служить также: множество целых чисел с операцией сложения, множество не равных нулю вещественных чисел с операцией умножения, множество всех векторов с операцией сложения.

Множество целых чисел с операцией умножения не является группой. Также не является группой множество векторов пространства с операцией векторного умножения

Подробнее с темой настоящего параграфа можно познакомиться по книгам [9], [5], [6].

ГЛАВА V

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И МАТРИЦЫ

§ 1. Матрицы

1. Определение. Мы будем называть *матрицей размеров* $m \times n$ совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{matrix} \right\|.$$

Числа, составляющие матрицу, мы будем называть *элементами* матрицы. Если число строк в матрице равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число строк — ее *порядком*. Остальные матрицы носят название *прямоугольных*

Можно дать и такое определение матрицы.

Рассмотрим два множества целых чисел: $I=\{1, 2, \dots, m\}$ и $J=\{1, 2, \dots, n\}$. Через $I \times J$ обозначим множество всех пар вида (i, j), где i — число из I, а j — из J. *Матрицей* называется функция на множестве $I \times J$, т. е. закон, сопоставляющий каждой паре (i, j) некоторое число a_j^i.

Две матрицы мы будем называть *равными*, если они имеют одинаковые размеры и равны их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Рассматривая произвольные матрицы, мы будем обозначать их элементы буквами с двумя индексами. Если оба индекса расположены снизу, то первый из них обозначает номер строки, а второй — номер столбца; если один из индексов расположен сверху, как в написанной выше матрице, то этот индекс обозначает номер строки. Не следует путать верхние индексы с показателями степени.

Часто удобно бывает рассматривать матрицу как совокупность столбцов или как совокупность строк. Пусть

$$a_1=\begin{Vmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \dots \\ a_1^m \end{Vmatrix}, \quad a_2=\begin{Vmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \dots \\ a_2^m \end{Vmatrix}, \ \dots, \quad a_n=\begin{Vmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \dots \\ a_n^m \end{Vmatrix}.$$

Тогда написанную вначале матрицу можно записать в виде

$$\| a_1 a_2 \dots a_n \|.$$

Аналогично, если

$$a^1=\| a_1^1 \dots a_n^1 \|, \ \dots, \ a^m=\| a_1^m \dots a_n^m \|,$$

то та же матрица записывается в виде

$$\begin{Vmatrix} a^1 \\ \dots \\ a^m \end{Vmatrix}.$$

2. Сложение и умножение на число. Пусть A и B — матрицы, состоящие из m строк и n столбцов. Мы можем сопоставить им третью матрицу C тех же размеров $m \times n$, элементы которой равны суммам стоящих на тех же местах элементов матриц A и B. Иными словами, элементы c_{ij} матрицы C связаны с элементами a_{ij} и b_{ij} матриц A и B равенством

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \tag{1}$$

для всех $i=1, \dots, m$ и $j=1, \dots, n$.

Определение. Матрица C, определяемая по A и B формулой (1), называется их *суммой* и обозначается $A+B$.

Подчеркнем, что сумма определена только для матриц одних и тех же размеров.

Определение суммы матриц вполне соответствует определению суммы функций: складываются значения, соответствующие одному и тому же элементу области определения — одной и той же паре (i, j).

Определение. Матрица C, элементы которой c_{ij} равны произведениям элементов a_{ij} матрицы A на число α, называется *произведением* A на α и обозначается αA. Мы имеем

$$c_{ij}=\alpha a_{ij} \tag{2}$$

для всех $i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$.

Из свойств сложения и умножения чисел легко вытекает следующее

Предложение 1. *Для любых матриц A, B и C одних и тех же размеров и любых чисел α и β выполнены равенства*

$$A+B=B+A, \quad (A+B)+C=A+(B+C),$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B, \quad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,$$
$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A).$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей*. Если O — нулевая матрица размеров $m\times n$, то для любой матрицы A тех же размеров имеем

$$A+O=A.$$

Матрицу $(-1)A$ мы будем называть *противоположной матрице* A и обозначать $-A$. Она обладает тем свойством, что

$$A+(-A)=O.$$

Сумма матриц B и $-A$ называется *разностью* матриц B и A. Мы будем обозначать ее $B-A$.

3. Транспонирование матриц. Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить матрицу B из n строк и m столбцов по следующему правилу. Элементы каждой строки матрицы A записываются в том же порядке в столбцы матрицы B, причем номер столбца совпадает с номером строки. Ясно, что при этом i-я строка B состоит из тех же элементов в том же порядке, что и i-й столбец A. Эту матрицу

$$B=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

называют *транспонированной* по отношению к A и обозначают A^T. Переход от A к A^T называется *транспонированием*.

Определение транспонированной матрицы можно записать в виде mn равенств

$$b_{ji}=a_{ij},$$

связывающих элементы матриц A и B, для всех $i=1, \ldots$ $\ldots, m$ и $j=1, \ldots, n$.

4. Столбцы и строки. Матрицу размеров $1\times n$, т. е. состоящую из одной строки, мы будем называть *строкой длины n* или просто *строкой*. Матрицу размеров $m\times 1$, состоящую из одного столбца, мы будем называть *столбцом высоты m* или просто *столбцом*. Сложение строк определено для строк одной длины, так же как сложение столбцов — только для столбцов одной высоты. Для этих двух видов матриц мы подробнее изучим сложение и умножение на число. При этом речь будет идти только о столбцах, так как для строк все свойства формулируются и доказываются совершенно аналогично.

Столбцы и строки мы будем обозначать полужирными буквами.

Определение. Столбец $\mathbf{q}$ назовем *линейной комбинацией столбцов* $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$ одинаковой высоты, если при некоторых числах $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$

$$\mathbf{q}=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mathbf{p}_k,$$

или, в более подробной записи,

$$\left\|\begin{matrix} q^1 \\ q^2 \\ \cdots \\ q^n \end{matrix}\right\| = \alpha_1\left\|\begin{matrix} p_1^1 \\ p_1^2 \\ \cdots \\ p_1^n \end{matrix}\right\| + \alpha_2\left\|\begin{matrix} p_2^1 \\ p_2^2 \\ \cdots \\ p_2^n \end{matrix}\right\| + \ldots + \alpha_m\left\|\begin{matrix} p_m^1 \\ p_m^2 \\ \cdots \\ p_m^n \end{matrix}\right\|.$$

Отметим, что в силу определений сложения и умножения на число это равенство равносильно n числовым равенствам

$$\begin{aligned} q^1 &= \alpha_1 p_1^1+\alpha_2 p_2^1+\ldots+\alpha_m p_m^1, \\ q^2 &= \alpha_1 p_1^2+\alpha_2 p_2^2+\ldots+\alpha_m p_m^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q^n &= \alpha_1 p_1^n+\alpha_2 p_2^n+\ldots+\alpha_m p_m^n. \end{aligned}$$

Выражение «линейная комбинация» мы употребляли по отношению к векторам. Здесь имеет место не только формальное сходство определений. При выбранном базисе векторам соответствуют строки их компонент (длины 3), а линейной комбинации векторов — линейная комбинация координатных строк. Мы продолжим аналогию между векторами и строками и столбцами, определив понятие линейной зависимости. Обозначим символом $\mathbf{o}$ столбец, все элементы которого равны нулю, и введем следующее

Определение. Система из s столбцов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ одной и той же высоты называется *линейно независимой*, если из равенства

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s\boldsymbol{a}_s = \boldsymbol{o} \tag{3}$$

следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$. В противном случае, т. е если существуют s чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, одновременно не равных нулю и таких, что выполнено равенство (3), система $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ называется *линейно зависимой*.

Определения линейно зависимой и линейно независимой системы строк формулируются дословно так же.

Линейную комбинацию, все коэффициенты которой равны нулю, принято называть *тривиальной*. С помощью этого термина определение можно сформулировать так. Система столбцов линейно зависима, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация этих столбцов. Система столбцов линейно независима, если только тривиальная линейная комбинация этих столбцов равна нулю.

Пример. Столбцы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

(в столбце $\boldsymbol{e}_i$ на i-м месте стоит 1, остальные элементы равны нулю) являются линейно независимыми. Действительно, равенство $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{o}$ можно записать в виде

$$\alpha_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{Vmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда видно, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Укажем несколько свойств линейно зависимых систем столбцов. Предложения 2, 3, 4 формулировались в гл. I для векторов, и доказательства совпадали с приводимыми ниже.

Предложение 2. *Система из $s > 1$ столбцов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из столбцов есть линейная комбинация остальных.*

В самом деле, пусть система линейно зависима. Согласно определению выполнено равенство вида (3), в котором хотя бы один коэффициент отличен от нуля. Допустим для определенности, что это α_1. Тогда мы можем переписать равенство в виде

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}a_2 - \ldots - \frac{\alpha_s}{\alpha_1}a_s.$$

Отсюда видно, что первый столбец — линейная комбинация остальных.

Наоборот, когда один из столбцов (для определенности пусть это a_1) есть линейная комбинация остальных, имеет место равенство вида $a_1 = \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_s a_s$. Если перенести все члены в одну часть равенства, то это соотношение превратится в равенство нулю нетривиальной линейной комбинации столбцов $a_1, \ldots, a_s$.

Из доказательства видно, что можно представить как линейную комбинацию остальных столбцов каждый столбец, который входит в равную нулю линейную комбинацию с коэффициентом, отличным от нуля.

Предложение 3. *Если в систему входит нулевой столбец, то система линейно зависима.*

Действительно, нулевой столбец представляет собой тривиальную линейную комбинацию любых столбцов. Наше утверждение сводится к предложению 2.

Предложение 4. *Если некоторые из столбцов $a_1, \ldots, a_s$ составляют сами по себе линейно зависимую подсистему, то и вся система $a_1, \ldots, a_s$ линейно зависима.*

Нам дано, что существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация некоторых из столбцов $a_1, \ldots, a_s$. Если мы добавим к ней остальные столбцы с нулевыми коэффициентами, то получим равную нулю нетривиальную линейную комбинацию всех столбцов.

Предложение 5. *Любые столбцы, входящие в линейно независимую систему, сами по себе образуют линейно независимую систему.*

В самом деле, в противном случае мы пришли бы к противоречию на основании предыдущего предложения.

Предложение 6. *Если столбец a есть линейная комбинация столбцов $a_1, \ldots, a_s$, то он является также линейной комбинацией любой системы столбцов, содержащей $a_1, \ldots, a_s$.*

Для доказательства к данной линейной комбинации достаточно добавить недостающие столбцы с нулевыми коэффициентами.

Предложение 7. *Любой столбец a высоты n есть линейная комбинация столбцов $e_1, \ldots, e_n$, введенных формулой* (4).

Это видно из следующего равенства:

$$\begin{Vmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^n \end{Vmatrix} = a^1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix} + a^2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix} + \dots + a^n \begin{Vmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Коэффициентами линейной комбинации являются элементы столбца a.

§ 2. Детерминанты

В гл. I мы уже познакомились с детерминантами квадратных матриц второго и третьего порядков. Задача этого параграфа — определить и изучить детерминанты квадратных матриц любых порядков. Для этой цели удобно использовать символику, которую мы сейчас введем.

1. Символ $\sum$. В математике часто приходится рассматривать суммы большого числа слагаемых, причем все слагаемые имеют один и тот же вид и различаются только индексами. Для таких сумм принято следующее обозначение. Символ $\sum\limits_{k=1}^{n}$, после которого стоит некоторое выражение, содержащее индекс k, обозначает сумму таких выражений для всех значений индекса k от 1 до n, например:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\beta_k = \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n.$$

Индекс k называется *индексом суммирования*. Разумеется, в качестве индекса суммирования может быть употреблена и любая другая буква, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{s=1}^{n} P_s.$$

Имеют место следующие правила обращения со знаком суммы $\sum$, которые читатель без труда проверит.

Предложение 1. 1) *Множитель, не зависящий от индекса суммирования, может быть вынесен за знак суммы:*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha P_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} P_k.$$

2) $$\sum_{k=1}^{n} (P_k + Q_k) = \sum_{k=1}^{n} P_k + \sum_{k=1}^{n} Q_k.$$

Последняя формула представляет собой частный случай ($m=2$) следующего утверждения.

Предложение 2. *Два знака суммы могут быть переставлены, т. е.*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} P_{ik}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} P_{ik}.$$

Действительно, выражения P_{ik}, стоящие под знаком двойной суммы, зависят от двух индексов и могут быть выписаны в виде матрицы из m строк и n столбцов. И правая и левая части доказываемого равенства представляют собой сумму всех элементов матрицы: справа сначала сложены элементы каждого столбца и потом взята сумма всех полученных сумм, а слева сначала сложены элементы каждой строки и затем сложены полученные суммы.

Это предложение можно также получить, применяя несколько раз правила 1), 2).

Двойную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} P_{ik}$ обозначают через $\sum\limits_{i,\,k=1}^{n} P_{ik}$, если оба индекса пробегают одинаковые значения $1, \ldots, n$. Последовательным применением предложения 2 можно доказать, что многократная сумма

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\ldots\sum_{i_p=1}^{n_p} P_{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

не зависит от порядка, в котором расположены знаки суммирования. Такую сумму обозначают

$$\sum_{i_1 \ldots i_p} P_{i_1 \ldots i_p},$$

если все индексы пробегают одни и те же значения.

Иногда нам будет требоваться записать сумму всех слагаемых, кроме одного или двух. Если пропущено слагаемое с номером j, мы будем записывать эту сумму так: $\sum\limits_{k\neq j} P_k$. Аналогично, если пропущены слагаемые с номерами i и j, мы пишем $\sum\limits_{k\neq i,\,j} P_k$.

2. Определение детерминанта. Детерминанты[1]) определены только для квадратных матриц. Детерминант квадратной матрицы — это число, которое ей сопоставлено

[1]) Детерминанты называются также *определителями*.

и может быть вычислено по ее элементам в соответствии со следующим определением.

Определение. 1) *Детерминантом* матрицы порядка 1 называется единственный элемент этой матрицы.

2) *Детерминантом* матрицы

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{Vmatrix}$$

порядка $n>1$ называется число

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}M_k^1, \tag{1}$$

где M_k^1 — детерминант матрицы A_k^1 порядка $n-1$, полученной из A вычеркиванием первой строки и k-го столбца.

Детерминант матрицы A обозначается $\det A$ или, если нужно выписать элементы матрицы, — прямыми чертами по бокам этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

На первый взгляд определение детерминанта может показаться неэффективным: детерминант матрицы порядка n определяется через детерминанты матриц порядка $n-1$, а эти детерминанты сами не определены. В действительности же в этом ничего плохого нет. Для определения чисел M_k^1 мы можем воспользоваться той же формулой, поскольку она имеет место для матриц любого порядка. Тем самым мы выразим $\det A$ через детерминанты матриц порядка $n-2$. Можно продолжать этот процесс, пока мы не придем к матрицам первого порядка, а для них детерминант определен непосредственно.

Применим наше определение к матрицам порядка 2 и 3. Для матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

имеем $M_1^1=a_{22}$, $M_2^1=a_{21}$, и, следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Для матрицы

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix},$$

очевидно,

$$M_1^1=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_2^1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_3^1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

и

$$\det A=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Эти формулы совпадают с определением детерминантов второго и третьего порядков, введенным в гл. I.

Вычислим в качестве примера детерминант матрицы

$$E_n=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0\dots 0 \\ 0 & 1 & 0\dots 0 \\ . & . & . \;.\; . \;.\; . \\ 0 & 0 & 0\dots 1 \end{Vmatrix}.$$

Такая матрица называется *единичной* матрицей. Для нее $M_1^1=\det E_{n-1}$, где E_{n-1} — такая же матрица на единицу меньшего порядка, и $a_{1k}=0$, если $k\neq 1$. Поэтому $\det E_n=$ $=\det E_{n-1}$. Применяя это равенство $n-1$ раз, мы получим $\det E_n=\det E_1=1$.

Число M_k^1 называется *дополнительным минором* элемента a_{1k}. По аналогии мы можем определить *дополнительный минор* произвольного элемента a_{ij} как детерминант матрицы A_j^i, получаемой из исходной матрицы A вычеркиванием той строки и того столбца, в которых расположен элемент a_{ij}, т. е. i-й строки и j-го столбца. Дополнительный минор элемента a_{ij} обозначим M_j^i. Часто говорят о строках и столбцах минора, имея в виду строки и столбцы матрицы A_j^i. Мы будем пользоваться этой вольностью, так как к ошибке она привести не может.

3. Свойства детерминантов. Методом полной индукции докажем

Предложение 3. *Для каждой матрицы A порядка n имеет место формула*

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_1^i. \tag{2}$$

Эта формула называется *разложением детерминанта по первому столбцу.*

Доказательство. Очевидно, что для матриц второго порядка формула справедлива. Допустим, что наше утверждение имеет место для матриц порядка $n-1$, и докажем его для матриц порядка n. Для этого перепишем формулу (1), определяющую детерминант матрицы порядка n, выделив первый член суммы:

$$\det A = a_{11}M_1^1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_k^1.$$

При любом $k \geqslant 2$ в матрицу A_k^1 входит (без своего первого элемента) первый столбец матрицы A. Пользуясь предположением индукции, мы можем разложить M_k^1 по этому столбцу. Надо только учесть, что i-я строка матрицы A в матрицу A_k^1 входит под номером $i-1$, так как в A_k^1 не вошла первая строка матрицы A. Поэтому при $k \geqslant 2$

$$M_k^1 = \sum_{i=2}^{n} (-1)^i a_{i1} M_{k1}^{1i}.$$

Здесь M_{k1}^{1i} — детерминант матрицы порядка $n-2$, получаемой из A_k^1 вычеркиванием ее $(i-1)$-й строки и 1-го столбца или, что то же самое, получаемая из A вычеркиванием 1-й и i-й строк и 1-го и k-го столбцов.

Подставляя полученное выражение для M_k^1, находим

$$\det A = a_{11}M_1^1 + \sum_{k=2}^{n} \left\{ (-1)^{k+1} a_{1k} \sum_{i=2}^{n} (-1)^i a_{i1} M_{k1}^{1i} \right\}.$$

Внесем множитель, не зависящий от i, под внутренний знак суммы:

$$\det A = a_{11}M_1^1 + \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} (-1)^{k+i+1} a_{1k} a_{i1} M_{k1}^{1i}.$$

Изменим порядок суммирования и вынесем множитель, не зависящий от k, за внутренний знак суммы:

$$\det A = a_{11}M_1^1 + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_{1k} M_{k1}^{1i}. \qquad (3)$$

Нетрудно заметить, что внутренняя сумма представляет собой результат применения определения детерминанта к минору M_1^i. Действительно,

$$M_1 = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_{1k} M_{1k}^{i1},$$

так как в матрице A_1^i, детерминантом которой он является, по сравнению с A пропущен первый столбец и все номера столбцов уменьшены на 1. Теперь мы можем написать (3) в виде

$$\det A = a_{11}M_1^1 + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_1^i,$$

что совпадает с доказываемым равенством (2).

Предложение 4. *Для любой квадратной матрицы* $\det A = \det A^T$.

Докажем это предложение по индукции. Для матриц порядка 1 оно очевидно. Предположив, что предложение верно для матриц порядка $n-1$, докажем его для матриц порядка n. Пусть A_j^1 — матрица, получаемая из A вычеркиванием первой строки и j-го столбца, а B_1^j — матрица, получаемая из A^T вычеркиванием j-й строки и первого столбца. Легко видеть, что $B_1^j = A_j^{1T}$. Поэтому из предположения индукции следует, что $\det B_1^j = \det A_j^1$, или, словами, дополнительный минор элемента a_{1j} в матрице A равен дополнительному минору элемента b_{j1} в матрице A^T. Кроме того, $a_{1j} = b_{j1}$, и разложение $\det A$ по первой строке совпадает с разложением $\det A^T$ по первому столбцу.

Из предложения 4 следует равноправность строк и столбцов. Именно, если справедливо какое-либо утверждение о детерминантах, касающееся строк соответствующих матриц, то верно и аналогичное утверждение, касающееся столбцов, и обратно. В силу этого обстоятельства следующие ниже предложения достаточно доказать только для строк.

Предложение 5. *Если в квадратной матрице поменять местами какие-нибудь две строки (или два столбца), то детерминант матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.*

Докажем это утверждение для двух соседних строк методом полной индукции. Для матриц второго порядка оно проверяется непосредственно. Предположим, что утверждение верно для матриц порядка $n-1$, и докажем его для матриц порядка n.

Пусть номера переставляемых строк k и $k+1$. Напишем разложение детерминанта по первому столбцу, выделив в нем два слагаемых, соответствующих переставляемым строкам:

$$\det A = (-1)^{k+1}a_{k1}M_1^k + (-1)^{k+2}a_{k+1,1}M_1^{k+1} + \\ + \sum_{i\neq k,\, k+1}(-1)^{i+1}a_{i1}M_1^i.$$

Аналогично для матрицы B, которая получается из A

перестановкой k-й и $(k+1)$-й строк:

$$\det B = (-1)^{k+2} a_{k+1,1} N_1^k + (-1)^{k+2} a_{k1} N_1^{k+1} + \sum_{l \neq k, k+1} (-1)^{l+1} a_{l1} N_1^l.$$

При $l \neq k$, $k+1$ в M_1^l и N_1^l входят k-я и $(k+1)$-я строки, но в разном порядке, а остальные их строки одинаковы. Следовательно, по предположению индукции $N_1^l = -M_1^l$ при $l \neq k$, $k+1$.

Матрицы, детерминанты которых обозначены M_1^k и N_1^{k+1}, совпадают: они получаются вычеркиванием $(k+1)$-й строки из матрицы B или, что то же самое, k-й строки матрицы A. Поэтому $M_1^k = N_1^{k+1}$. Аналогично, $M_1^{k+1} = N_1^k$. Теперь, сравнивая $\det A$ и $\det B$, мы видим, что они равны по абсолютной величине и отличаются знаком.

Пусть теперь в матрице A порядка n переставляются строки с номерами i и j, и пусть для определенности $i < j$. Тогда между i-й и j-й строками находится $j-i-1$ строк. Перестановку i-й и j-й строк можно осуществить, переставляя только соседние строки: сначала j-ю строку переставляем последовательно с $j-i$ строками, стоящими над ней (последней из них будет i-я); затем i-ю строку переставляем на j-е место, меняя местами с каждой из $j-i-1$ строк ниже нее. Всего будет проделано нечетное число $2(j-i)-1$ перестановок соседних строк. Поскольку при каждой из них детерминант меняет знак, при перестановке i-й и j-й строк он тоже должен изменить знак.

Свойство, выражаемое предложением 5, называется *антисимметрией* детерминанта по строкам (столбцам).

Используя свойство антисимметрии по строкам и столбцам, мы можем доказать разложения детерминанта по любой строке и любому столбцу.

Теорема 1. *Для каждой матрицы A порядка n при произвольном i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет место формула*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} M_k^i \tag{4}$$

и при произвольном j $(1 \leqslant j \leqslant n)$—формула

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_j^k. \tag{5}$$

Заметим, что при $i = 1$ формула (4) есть определение детерминанта, а при $j = 1$ формула (5) совпадает с доказанным в предложении 3 разложением по первому столбцу. Докажем формулу (4) при $i \geqslant 2$. Для этого переставим i-ю строку матрицы на первое место так, чтобы не нарушить порядок остальных строк. Нужная нам перестановка будет осуществлена, если мы переставим i-ю строку последовательно со всеми строками, расположенными выше нее. Выше i-й находится $i-1$ строка. Поэтому, если B — матрица, полученная после перестановки, то $\det A = (-1)^{i-1} \det B$. Разложив $\det B$ по первой строке (i-й строке матрицы A), мы получим

$$\det A = (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{ik} N_k^1.$$

N_k^1 — детерминант матрицы, получаемой из B вычеркиванием первой строки и k-го столбца или, что то же самое, из матрицы A вычеркиванием i-й строки и k-го столбца. Поэтому $N_k^1 = M_k^i$, что и доказывает нужное разложение.

Формулу (5) можно получить таким же путем из разложения по первому столбцу.

Предложение 6. *Если i-й столбец (строка) матрицы A есть линейная комбинация столбцов (строк) $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, т. е. имеет вид $\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q}$, то*

$$\det A = \alpha \det A_p + \beta \det A_q,$$

где матрицы A_p и A_q получаются из A заменой i-го столбца (строки) соответственно на $\boldsymbol{p}$ и на $\boldsymbol{q}$.

Для доказательства достаточно обратить внимание на то, что в силу определения операций со столбцами мы имеем для всех k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ равенства $a_{ki} = \alpha p^k + \beta q^k$, где через p^k и q^k обозначены элементы столбцов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Подставляя эти равенства в разложение $\det A$ по i-му столбцу, мы получаем

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ki} M_i^k =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} p^k M_i^k + \beta \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} q^k M_i^k,$$

что и заканчивает доказательство.

Свойство, выраженное этим предложением, носит название *линейности детерминанта* по столбцу (строке). Разумеется, $\det A$ можно представить аналогичным образом и тогда, когда столбец матрицы A есть линейная комбинация $\alpha_1\boldsymbol{p}_1 + \ldots + \alpha_s\boldsymbol{p}_s$.

Иногда линейность детерминанта по столбцу формулируют в виде двух отдельных свойств:

1) *При умножении столбца матрицы на число ее детерминант умножается на это число.*

2) *Если столбец матрицы есть сумма двух столбцов, то ее детерминант есть сумма детерминантов соответствующих матриц.*

Предложение 7. *Если в матрице A столбцы (или строки) линейно зависимы, то* $\det A = 0$.

Отметим, что если матрица содержит нулевой столбец (или строку), то ее детерминант равен нулю. Это следует из разложения по столбцу (строке). Допустим теперь, что в матрице нет нулевого столбца.

Согласно предложению 2 § 1 доказываемое утверждение имеет и такую формулировку: если один из столбцов (одна из строк) матрицы A есть линейная комбинация остальных столбцов (строк), то $\det A = 0$. Эту последнюю формулировку мы и докажем. Начнем с частного случая.

Если в A есть два одинаковых столбца, то, переставив их, мы не изменим матрицу, а изменим знак у детерминанта. Следовательно, $\det A = 0$.

В общем случае пусть j-й столбец $\boldsymbol{a}_j$ есть линейная комбинация остальных столбцов: $\boldsymbol{a}_j = \sum\limits_{k \neq j} \alpha_k \boldsymbol{a}_k$. (Некоторые коэффициенты α_k могут равняться нулю, т. е. не все столбцы должны фактически входить в эту линейную комбинацию.) Применяя свойство линейности по столбцам, имеем $\det A = \sum\limits_{k \neq j} \alpha_k \det A_k$, где A_k — матрица, получаемая из A заменой j-го столбца на k-й. В этой матрице столбец $\boldsymbol{a}_k$ повторяется дважды; поэтому $\det A_k = 0$, что завершает доказательство.

4. Элементарные преобразования. Вычисление детерминантов. В связи с задачей вычисления детерминанта мы введем и в первый раз применим важное понятие — элементарные преобразования матрицы.

Определение. Мы назовем *элементарными преобразованиями матрицы* следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановку строк;
4) те же преобразования столбцов.

Комбинируя элементарные преобразования первого и второго вида, мы можем к любой строке прибавить линейную комбинацию остальных строк.

Предложение 8. *Детерминант матрицы не изменится, если к какой-либо его строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).*

Для доказательства нужно применить свойство линейности по строкам и учесть обращение в нуль детерминанта с линейно зависимыми строками.

Детерминант матрицы A можно вычислить так. Если все элементы ее первого столбца — нули, то $\det A = 0$. Если же в первом столбце есть ненулевые элементы, то берем любой из них (например, максимальный по абсолютной величине). Пусть это a_{k1}. В каждой строке, кроме k-й, мы прибавим k-ю строку, умноженную на $-a_{l1}/a_{k1}$, где a_{l1} — первый элемент преобразуемой строки. В результате все элементы, кроме одного, в первом столбце преобразованной матрицы будут равны нулю, и нам удобно будет разложить ее детерминант по первому столбцу. Мы получаем

$$\det A = (-1)^{k+1} a_{k1} \det A'.$$

Здесь $\det A'$ — дополнительный минор элемента a_{k1} в преобразованной матрице. Для вычисления $\det A'$ мы применяем тот же способ. Через $n-1$ шагов (если не раньше) детерминант будет найден.

Описанный здесь способ хорош тем, что по сравнению с другими требует меньшего числа арифметических операций. Для нахождения детерминантов небольших матриц, элементы которых — целые числа или обозначены буквами, этот способ лучше сочетать с разными искусственными приемами.

5. Миноры произвольного порядка. Рассмотрим некоторую, не обязательно квадратную матрицу A. Выберем какие-нибудь s номеров строк $i_1, \ldots, i_s$ и s номеров столбцов $j_1, \ldots, j_s$, причем будем предполагать, что эти номера расположены в порядке возрастания: $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$.

Определение. *Минором порядка* s матрицы A называется детерминант матрицы порядка s, образованной элементами, расположенными на пересечении выбранных строк и столбцов, т. е. число

$$L^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_s} = \begin{vmatrix} a^{i_1}_{j_1} & a^{i_1}_{j_2} & \ldots & a^{i_1}_{j_s} \\ a^{i_2}_{j_1} & a^{i_2}_{j_2} & \ldots & a^{i_2}_{j_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{i_s}_{j_1} & a^{i_s}_{j_2} & \ldots & a^{i_s}_{j_s} \end{vmatrix}.$$

Каждая матрица имеет столько миноров данного порядка s, сколькими способами можно выбрать номера $i_1, \ldots, i_s$ и $j_1, \ldots, j_s$. Нам удобно будет говорить, что минор $L_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_s}$ расположен в строках с номерами $i_1, \ldots, i_s$ и столбцах с номерами $j_1, \ldots, j_s$.

Если матрица A квадратная, то каждому минору $L_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_s}$ порядка s мы можем сопоставить *дополнительный минор* $M_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_s}$. Это по определению есть детерминант матрицы порядка $n-s$, получаемой из A вычеркиванием строк с номерами $i_1, \ldots, i_s$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_s$, т. е. тех, в которых расположен минор $L_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_s}$.

Алгебраическим дополнением минора мы назовем его дополнительный минор, умноженный на

$$(-1)^{i_1+\ldots+i_s+j_1+\ldots+j_s}.$$

Имеет место следующее предложение, известное под названием *теоремы Лапласа*.

Предложение 9. *Выберем s строк матрицы с номерами $i_1, \ldots, i_s$ и составим произведения всех миноров, расположенных в выбранных строках, на их алгебраические дополнения. Детерминант рассматриваемой матрицы равен сумме всех составленных произведений.*

Аналогичное утверждение имеет место и для столбцов.

Доказательство этого предложения мы не приводим и в дальнейшем не будем на него ссылаться. Заметим только, что разложение детерминанта по строке представляет собой частный случай предложения 9 для $s=1$.

6. Формула полного разложения детерминанта по элементам матрицы. Мы будем называть *перестановкой* чисел $1, \ldots, n$ эти числа, написанные в каком-либо определенном порядке. Например, из чисел 1, 2 можно образовать две перестановки: 1, 2 и 2, 1. Произвольную перестановку чисел $1, \ldots, n$ мы обозначим $i_1, \ldots, i_n$.

Будем говорить, что число i_k виновно в *нарушении порядка* в перестановке $i_1, \ldots, i_n$, если оно стоит левее меньшего числа. Например, при $n=4$ в перестановке 2, 4, 3, 1 числа 2 и 3 виновны каждое в одном нарушении порядка, число 4 — в двух. Итак, общее число нарушений порядка в этой перестановке равно четырем. Число нарушений порядка в перестановке $i_1, \ldots, i_n$ мы обозначим $N(i_1, \ldots, i_n)$.

Перестановка $i_1, \ldots, i_n$ называется *четной*, если $N(i_1, \ldots, i_n)$ — число четное, и *нечетной* в противном случае.

Докажем *формулу полного разложения*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 \ldots i_n)} (-1)^{N(i_1, \ldots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}. \quad (6)$$

Сумма в правой части равенства берется по перестановкам. Это означает, что каждой перестановке чисел 1, ..., n соответствует слагаемое. Слагаемое, соответствующее перестановке $i_1, \ldots, i_n$, составляют так: берут элемент из первой строки и i_1-го столбца, элемент из второй строки и i_2-го столбца и т. д. н перемножают их. В результате в произведение входит по одному и только одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Произведения складываются со знаками, определяемыми четностями соответствующих перестановок.

Доказательство. Формулу (6) мы докажем методом полной индукции. Пусть $n=2$ и дана матрица

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}.$$

Двум перестановкам (1, 2) и (2, 1) соответствуют два слагаемых $(-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22}$ и $(-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21}$. Их сумма равна $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, т. е. как раз детерминанту данной матрицы.

Допустим, что формула верна для матриц порядка $n-1$, и докажем ее для произвольной матрицы A порядка n. Детерминант определяется формулой (1). В k-е слагаемое этой формулы входит множитель M_k^1. По предположению индукции

$$M_k^1 = \det A_k^1 = \sum_{(i_1 \ldots i_{n-1})} (-1)^{N(i_1, \ldots, i_{n-1})} a_{2i_1} \ldots a_{ni_{n-1}},$$

здесь все номера $i_1, \ldots, i_{n-1}$ отличны от k, а первые индексы у сомножителей равны $2, \ldots, n$, так как, сохраняя старые обозначения для элементов матрицы A, мы должны учесть, что в матрицу A_k^1 не входят первая строка и k-й столбец.

Теперь в k-м слагаемом в формуле (1) можно внести множитель $(-1)^{k+1} a_{1k}$ под знак суммы и записать это слагаемое так:

$$(-1)^{k+1} a_{1k} M_k^1 = \sum_{(i_1 \ldots i_{n-1})} (-1)^{N(i_1, \ldots, i_{n-1})+k+1} a_{1k} a_{2i_1} \ldots a_{ni_{n-1}}.$$

Числа $k, i_1, \ldots, i_{n-1}$ составляют перестановку чисел $1, \ldots, n$, причем $N(k, i_1, \ldots, i_{n-1}) = N(i_1, \ldots, i_{n-1}) + k - 1$, так как правее k стоит ровно $k-1$ чисел, меньших k. Следовательно, $N(k, l_1, \ldots, l_{n-1})$ имеет ту же четность, что $N(l_1, \ldots, l_{n-1})+k+1$, и мы имеем

$$(-1)^{k+1} a_{1k} M_k^1 = \sum_{(l_1, \ldots, l_{n-1})} (-1)^{N(k, l_1, \ldots, l_{n-1})} a_{1k} a_{2l_1} \ldots a_{nl_{n-1}}.$$

В правой части этого выражения собраны все те члены из суммы (6), которые соответствуют перестановкам, имеющим k на первом месте. В сумму (1) входят слагаемые для любого k, и потому сумма (1) содержит все члены суммы (6) и, конечно, не содержит никаких других членов. Формула (6) доказана.

§ 3. Системы линейных уравнений (специальный случай)

1. Постановка задачи. Систему уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \ldots + a_n^1 x^n &= b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \ldots + a_n^2 x^n &= b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \ldots + a_n^m x^n &= b^m \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

мы будем называть *системой m линейных уравнений с n неизвестными* $x^1, \ldots, x^n$ [1]). Коэффициенты этих уравнений мы будем записывать в виде матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{Vmatrix},$$

называемой *матрицей системы*. Числа, стоящие в правых частях уравнений, образуют столбец b, называемый *столбцом свободных членов*.

Матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей системы* и в этой главе обозначается A^*:

$$A^* = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{Vmatrix}.$$

Если свободные члены всех уравнений равны нулю, система называется *однородной*.

Определение. Совокупность n чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ называется *решением системы* (1), если каждое уравнение

[1]) Индексы, различающие неизвестные, мы пишем вверху, так как в дальнейшем нам будет удобно записывать совокупность неизвестных в виде столбца.

системы обращается в числовое равенство после подстановки в него чисел α^i вместо соответствующих неизвестных x^i для всех $i=1, \ldots, n$.

Наша задача состоит в нахождении решений системы (1), причем мы не делаем заранее никаких предположений относительно коэффициентов и свободных членов системы и даже относительно числа уравнений и числа неизвестных. Поэтому могут представиться различные возможности. Система может вообще не иметь решения, как система

$$x^1+x^2=1,$$
$$x^1+x^2=0$$

(если бы решение существовало, то x^1+x^2 равнялось бы одновременно и нулю и единице). Система может иметь бесконечное множество решений, как система ($n=2$, $m=1$)

$$x^1+x^2=0.$$

Решением этой системы является любая пара чисел, отличающихся знаком и равных по абсолютной величине. Примеры систем, имеющих одно-единственное решение, в изобилии встречаются в школьном курсе алгебры.

Системы, не имеющие решений, мы будем называть *несовместными*, а имеющие решения—*совместными*.

2. Правило Крамера. Сейчас мы рассмотрим простейший случай, когда число уравнений равно числу неизвестных, $n=m$. Кроме того, мы наложим определенные условия и на коэффициенты системы. Если этого не сделать, нам придется изучать здесь, например, и систему, состоящую из одного уравнения, повторенного n раз. Мы хотим, чтобы все уравнения системы были в определенном смысле независимы. Уже в школьном курсе широко применялся следующий прием: умножали первое уравнение на число α, второе уравнение—на число β, а затем складывали эти уравнения почленно. Полученное уравнение (его естественно назвать *линейной комбинацией* исходных уравнений) является их следствием. Мы хотим, чтобы в нашей системе ни одно уравнение не являлось линейной комбинацией остальных. Если это выполнено, мы будем говорить, что уравнения *линейно независимы*.

В случае $m=n$ для линейной независимости уравнений системы достаточно потребовать, чтобы детерминант матрицы системы был отличен от нуля. (Поскольку $m=$

$=n$ и матрица квадратная, имеет смысл говорить о ее детерминанте.) Действительно, заметим, что при умножении какого-нибудь уравнения на число соответствующая строка матрицы системы умножается на это число. При сложении уравнений строки матрицы складываются. Поэтому, если одно из уравнений является линейной комбинацией остальных, соответствующая строка матрицы системы есть линейная комбинация остальных строк. Из предложения 7 § 2 следует, что при этом детерминант матрицы равен нулю.

Теорема 1 (правило Крамера). *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\left.\begin{array}{l} a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n = b^1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^n x^1 + \ldots + a_n^n x^n = b^n \end{array}\right\} \tag{2}$$

в случае, когда детерминант матрицы системы отличен от нуля, имеет решение, и притом только одно. Это решение находится по формулам

$$x^i = \frac{\Delta^i}{\Delta} \qquad (\text{для всех } i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

где через Δ обозначен детерминант матрицы системы, а через Δ^i — детерминант матрицы, получаемой из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов, т. е.

$$\Delta^i = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \ldots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & \ldots & a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Для доказательства возьмем расширенную матрицу системы A^* и припишем к ней сверху произвольную ее строку. Пусть номер этой строки j. В результате получается квадратная матрица $\bar{A}$ порядка $n+1$. В этой матрице две одинаковые строки, и потому

$$\det \bar{A} = \begin{vmatrix} a_1^j & \ldots & a_n^j & b^j \\ a_1^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & \ldots & a_n^n & b^n \end{vmatrix} = 0.$$

С другой стороны, мы можем вычислить $\det \bar{A}$ по определению. Итак,

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i^j M_i + (-1)^{n+1+1} \det A b^j = 0.$$

Здесь через M_i обозначен детерминант матрицы, получаемой из расширенной матрицы A^* вычеркиванием i-го столбца. Следовательно, учитывая, что $\Delta = \det A \neq 0$, мы можем написать

$$\frac{(-1)^{n+1}}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} a_i^j(-1)^{i+1}M_i = b^j.$$

Если внести множитель под знак суммы, это равенство примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x^i = b^j,$$

где

$$x^i = \frac{(-1)^{n+i}M_i}{\Delta} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Так определенный набор чисел $x^1, \ldots, x^n$, как мы видим, удовлетворяет j-му уравнению системы. Существенно, что числа $x^1, \ldots, x^n$ не зависят от j и потому удовлетворяют всем уравнениям системы, т. е. являются ее решением. Существование решения доказано.

Мы приведем x^i к нужному виду, если переставим в $\bar{A}$ последний столбец b на i-е место, т. е. поменяем его местами последовательно со столбцами с номерами n, $n-1, \ldots, i+1$. Всего нужно $n-i$ перестановок. Поэтому

$$x^i = \frac{(-1)^{n+i}(-1)^{n-i}\Delta^i}{\Delta} = \frac{\Delta^i}{\Delta}.$$

Это и есть требуемый вид для x^i.

Нам осталось доказать единственность полученного решения. Сделаем это от противного. Пусть нашлось два решения системы:

$$\alpha^1, \ldots, \alpha^n \quad \text{и} \quad \beta^1, \ldots, \beta^n. \tag{4}$$

Пользуясь операциями со столбцами, мы можем записать систему (1) в виде (см. с. 139)

$$x^1\begin{Vmatrix} a_1^1 \\ \ldots \\ a_1^n \end{Vmatrix} + \ldots + x^n\begin{Vmatrix} a_n^1 \\ \ldots \\ a_n^n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b^1 \\ \ldots \\ b^n \end{Vmatrix} \tag{5}$$

или, короче, $x^1a_1 + \ldots + x^na_n = b$, где $a_1, \ldots, a_n$ — столбцы матрицы системы, b — столбец свободных членов. Такая запись системы очень удобна, и мы будем часто ею пользоваться.

Результат подстановки решений (4) в систему имеет вид

$$\alpha^1 a_1 + \ldots + \alpha^n a_n = b,$$
$$\beta^1 a_1 + \ldots + \beta^n a_n = b.$$

Вычитая почленно второе равенство из первого, мы получаем

$$(\alpha^1 - \beta^1)\, a_1 + \ldots + (\alpha^n - \beta^n)\, a_n = o.$$

Если решения не совпадают, то хоть одна из разностей $\alpha^i - \beta^i$ отлична от нуля. Это означает, что столбцы $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$ линейно зависимы. В силу предложения 7 § 2 это противоречит тому, что $\det A \neq 0$. Теорема доказана.

Стоит заметить, что в доказательстве единственности мы вначале не использовали совпадение числа уравнений и числа неизвестных и, по существу, доказали более общее утверждение: если столбцы матрицы системы линейно независимы, то система не может иметь двух различных решений.

3. Пример. В качестве применения правила Крамера получим условие, при котором три плоскости пересекаются в одной точке. В общей декартовой системе координат плоскости могут быть заданы уравнениями

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0,\\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0,\\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Координаты точки пересечения должны удовлетворять одновременно всем трем уравнениям, т. е. быть решением системы (6). Мы видим, что при условии

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

существует единственная точка пересечения. Это условие мы получили в § 3 гл. II. Из правила Крамера следует только достаточность условия, поскольку оно само по себе является достаточным условием существования решения и его единственности.

Еще одна геометрическая интерпретация правила Крамера для систем из трех уравнений была приведена в п. 6 § 3 гл. I. Из нее вытекало не только условие единственности решения, но и формулы для нахождения этого решения.

Для исследования произвольной системы линейных уравнений нам потребуется изучить свойства прямоугольных матриц. Им и отведен следующий параграф.

§ 4. Ранг матрицы

1. Базисный минор. Определение минора порядка r матрицы A было дано на с. 151. Введем теперь следующее

Определение. В матрице A размеров $m\times n$ минор порядка r называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю или миноров порядка $r+1$ вообще нет, т. е. r совпадает с меньшим из чисел m или n.

Ясно, что в матрице может быть несколько разных базисных миноров. Все базисные миноры имеют один и тот же порядок. Действительно, если все миноры порядка $r+1$ равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка $r+2$, а следовательно, и всех бо́льших порядков. Это становится очевидным, если применить определенне детерминанта к какому-нибудь минору порядка $r+2$; все дополнительные миноры элементов его первой строки являются минорами порядка $r+1$ нашей матрицы и, следовательно, равны нулю.

Столбцы и строки, на пересечении которых расположен базисный минор, мы назовем *базисными* столбцами и строками.

Определение. *Рангом* матрицы называется порядок базисного минора, или, иначе, самый большой порядок, для которого существуют отличные от нуля миноры. Если каждый элемент матрицы равен нулю, то ранг такой матрицы, по определению, считают нулем.

Ранг матрицы A мы будем обозначать $\mathrm{Rg}\,A$.

Перебирать все миноры в поисках базисного—задача, связанная с большими вычислениями, если размеры матрицы не очень малы. Проще всего находить ранг матрицы и ее базисный минор при помощи элементарных преобразований.

Предложение 1. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.*

Доказательство. 1°. При умножении строки на число $\lambda\neq 0$ базисный минор либо не изменится, либо умножится на λ. Ни один минор, равный нулю, не сделается отличным от нуля.

2°. Если все миноры порядка $r+1$ равны нулю, то сложение строк не сделает ни один из них отличным от нуля. Действительно, полученный после преобразования минор либо равен алгебраической сумме двух миноров порядка $r+1$ исходной матрицы (в том случае, когда к строке, входящей в минор, прибавили строку, в него не входящую), либо он равен сумме минора порядка $r+1$ и детерминанта матрицы с двумя одинаковыми строками (в том случае, когда к строке, входящей в минор, прибавили другую строку, в него входящую). Из этих соображений следует, что ранг матрицы не может повыситься. Ясно, что он не может и понизиться, так как в противном случе при обратном преобразовании—вычитании строк — он бы повысился.

3°. При перестановке строк минор может изменить знак (если в него входят обе переставляемые строки), или может замениться на минор, не больше чем знаком отличающийся от другого минора той же матрицы (если содержит только одну из переставляемых строк), или вообще не изменится. Ясно, что при этом порядок базисного минора останется тем же.

4°. Неизменность ранга при элементарных преобразованиях столбцов доказывается аналогично.

Элементарные преобразования строк матрицы будут для нас предпочтительнее ввиду их тесной связи с преобразованиями систем линейных уравнений. Для системы из m уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x^1+\ldots+a_{1n}x^n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x^1+\ldots+a_{mn}x^n=b_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

расширенная матрица имеет вид

$$A^*=\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}.$$

Перестановке строк этой матрицы соответствует изменение порядка уравнений в системе. Умножение строки на число $\lambda\neq 0$ равносильно умножению соответствующего уравнения на это число. Наконец, прибавить в матрице A^* к одной строке другую—то же самое, что сложить соответствующие уравнения системы. При всех этих преобразованиях множество решений системы, разумеется, не меняется. Итак, доказано

Предложение 2. *Элементарным преобразованиям строк расширенной матрицы соответствуют преобразова-*

ния системы линейных уравнений в эквивалентную систему.

Покажем теперь, как находить базисный минор матрицы при помощи элементарных преобразований.

2. Приведение матрицы к упрощенному виду. Пусть дана матрица A размеров $m\times n$. Несколько первых ее столбцов могут оказаться состоящими из нулей. Пусть j_1 — номер первого столбца, содержащего ненулевые элементы. Если такого столбца не нашлось, ранг матрицы — нуль, а базисного минора нет.

Пусть $a_{i_1j_1}$ — ненулевой элемент j_1-го столбца. Переставим i_1-ю строку на первое место и разделим ее на $a_{i_1j_1}$. Обозначим элементы преобразованной матрицы через a'_{ij}. Мы имеем $a'_{1j_1}=1$. Элементарными преобразованиями строк обратим в нуль все остальные элементы j_1-го столбца. Для этого надо из каждой строки с (новым) номером $k\neq 1$ вычесть первую строку, умноженную на a'_{kj_1}.

После этого преобразования наша матрица примет вид

$$A_1=\left\|\begin{matrix}\begin{vmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \dots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \dots & 0 & 0\end{vmatrix} & U_1\end{matrix}\right\|.$$

Здесь U_1 — матрица размеров $m\times(n-j_1)$.

Может оказаться, что последние $m-1$ строк матрицы A_1 — нулевые. Тогда преобразования закончены. В противном случае пусть j_2 — номер самого левого столбца, содержащего ненулевой элемент в одной из последних $m-1$ строк. Переставим строки так, чтобы строка с этим ненулевым элементом стала второй, и разделим ее на этот элемент.

Обозначим элементы преобразованной матрицы через a''_{ij}. Тогда $a''_{2j_2}=1$

Элементарными преобразованиями строк обратим в нуль все остальные элементы j_2-го столбца. Для этого из каждой строки с номером $k\neq 2$ надо вычесть вторую строку, умноженную на a''_{kj_2}. При этом первые j_1 столбцов матрицы A_1 не изменятся, так как вторая строка в этих столбцах имеет нули. Матрица примет вид

$$A_2=\left\|\begin{matrix}\begin{vmatrix}0 & \dots & 0 & 1 & \underline{|* & \dots & *|} & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{vmatrix} & U_2\end{matrix}\right\|.$$

Здесь U_2—матрица размеров $m\times(n-j_1-j_2)$; звездочками обозначены элементы, о которых мы ничего не можем сказать.

Если в последних $m-2$ строках есть ненулевые элементы, то мы проделываем такое же преобразование, превращая столбец с номером j_3 в столбец, состоящий из нулей, за исключением единицы на третьем месте. Левее этого столбца в последних $m-2$ строках—только нулевые элементы, поэтому ранее преобразованные столбцы не изменятся.

Мы можем продолжать такие преобразования до тех пор, пока не окажется, что последние $m-r$ строк очередной матрицы A_r состоят из нулей, или не будут исчерпаны все строки.

Итак, мы получили следующее

Предложение 3. *При помощи элементарных преобразований строк каждую матрицу размеров $m\times n$ можно привести к следующему виду: некоторые r столбцов совпадают с первыми r столбцами единичной матрицы порядка m. Если $r<m$, то последние $m-r$ строк состоят из нулей.*

Вид матрицы, описанный в этом предложении, назовем *упрощенным видом.* Матрицы такого вида коротко назовем *упрощенными.*

Рассмотрим упрощенную матрицу. Ее минор, расположенный в первых r строках и столбцах $j_1, \ldots, j_r$, равен единице. Ненулевых миноров большего порядка, очевидно, нет. Следовательно, минор—базисный, а ранг упрощенной матрицы равен r.

Если мы привели матрицу A к упрощенному виду и получили упрощенную матрицу ранга r, это означает, что ранг исходной матрицы A также был равен r. В самом деле, ранг не мог измениться при элементарных преобразованиях. За базисный минор матрицы A можно принять минор, расположенный в столбцах с номерами $j_1, \ldots, j_r$ и строках, которые после перестановок попали на места $1, \ldots, r$ в упрощенной матрице. Это видно из того, что преобразуя матрицу, мы не прибавляли к строкам этого минора никаких строк, которые в него не входят. Поскольку полученный минор ненулевой, исходный тоже не равен нулю.

Обратим внимание на то, что в предложении 3 упрощенный вид матрицы достигается за счет преобразований строк. Это важно ввиду связи, отмеченной в предложении 2. Метод, примененный при доказательстве, называется *методом Гаусса*.

Рассмотрим квадратную матрицу с детерминантом, отличным от нуля. У нее все столбцы — базисные, и, следовательно, ее упрощенный вид — единичная матрица. Отсюда вытекает

Следствие. *Каждую квадратную матрицу с ненулевым детерминантом при помощи элементарных преобразований строк можно превратить в единичную матрицу.*

Поиск базисного минора при доказательстве предложения 3 приводит нас к самому левому набору столбцов, в котором существует базисный минор. Для упрощенного вида матрицы это не существенно. Имеет место

Предложение 4. *Пусть A — матрица размеров $m \times n$. Каков бы ни был базисный минор этой матрицы, при помощи элементарных преобразований строк A мы можем превратить базисные столбцы в столбцы единичной матрицы. Если $\operatorname{Rg} A = r < m$, то последние $m-r$ строк будут нулевыми.*

Доказательство. Пусть базисный минор расположен в строках $i_1, \ldots, i_r$ и столбцах $j_1, \ldots, j_r$. Переставим базисные столбцы на первые r мест и будем действовать так же, как при доказательстве предложения 3, с той разницей, что ненулевой элемент в очередном столбце берется не произвольно, а из строк с номерами $i_1, \ldots, i_r$. Такой элемент обязательно найдется, так как в противном случае оказалось бы, что мы обратили в нуль базисный минор элементарными операциями только с его строками. После окончания преобразований надо вернуть столбцы на прежние места. Впрочем, можно и не трогать столбцов, а немного видоизменить метод приведения матрицы.

3. Теорема о базисном миноре. Дальнейшее изложение существенно опирается на следующее утверждение, называемое *теоремой о базисном миноре.*

Теорема 1. *В произвольной матрице каждый столбец является линейной комбинацией базисных столбцов, а каждая строка — линейной комбинацией базисных строк.*

Для доказательства второго утверждения теоремы вспомним, какими элементарными преобразованиями мы приводили матрицу к упрощенному виду при доказательстве предложения 4. Помимо перестановок строк и умножения базисных строк на числа, мы прибавляли к какой-либо строке матрицы одну из ее базисных строк, умноженную на число. При этом базисные строки заменяются на линейные комбинации базисных строк, а к небазисным прибавляются линейные комбинации базисных. В упрощенной матрице небазисные строки — нулевые. Значит, мы прибавили к каждой небазисной строке исходной матрицы такую линейную комбинацию ее базисных строк, что получилась нулевая строка. Отсюда непосредственно вытекает доказываемое.

Первая часть теоремы будет доказана, если мы применим уже доказанное утверждение о строках к транспонированной матрице, заметив предварительно, что после транспонирования базисный минор остается базисным.

В предложении 7 § 2 утверждалось, что детерминант матрицы, столбцы которой линейно зависимы, равен нулю. Из теоремы о базисном миноре следует обратное утверждение.

Предложение 5. *Если A — квадратная матрица и $\det A = 0$, то по крайней мере один из столбцов — линейная комбинация остальных столбцов, а также одна из строк — линейная комбинация остальных строк.*

Действительно, условие $\det A = 0$ означает, что $\operatorname{Rg} A \leqslant n-1$, где n — порядок матрицы. Поэтому по крайней мере один из столбцов и одна из строк не пересекают базисный минор. Столбец и строка, не пересекающие базисный минор, линейно выражаются соответственно через столбцы и строки, в которых расположен базисный минор.

Теорема 2 (теорема о ранге матрицы). *Ранг матрицы A равен максимальному числу линейно независимых столбцов в этой матрице.*

Если $\operatorname{Rg} A = 0$, то все столбцы нулевые и нет ни одного линейно независимого столбца. Пусть $\operatorname{Rg} A = r > 0$. Покажем, что в A существует r линейно независимых столбцов. Действительно, рассмотрим составленную из элементов матрицы A матрицу A' порядка r, детерминантом которой является базисный минор. Столбцы A' представляют собой части столбцов A.

Если бы столбцы A, в которых расположен базисный минор, были линейно зависимы, то были бы линейно зависимы столбцы A' и базисный минор равнялся бы нулю.

Докажем теперь, что любые p столбцов матрицы A линейно зависимы, если $p > r$. Составим матрицу B из этих p столбцов. $\operatorname{Rg} B \leqslant r$, так как каждый минор матрицы B является минором матрицы A и, следовательно, в B нет отличного от нуля минора порядка, большего чем r.

Таким образом, $\operatorname{Rg} B < p$ и хотя бы один из столбцов матрицы B не входит в ее базисный минор.

Этот столбец линейно выражается через остальные. Тем самым теорема доказана.

Точно так же доказывается, что ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк. Отсюда вытекает интересное следствие.

Следствие. *Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов в этой матрице.*

§ 5. Общая теория линейных систем

1. Условия совместности. Теорема о базисном миноре позволяет дать простое и эффективное условие совместности системы линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1^1x^1 + \ldots + a_n^1x^n &= b^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^mx^1 + \ldots + a_n^mx^n &= b^m, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

носящее название *теоремы Кронекера—Капелли*.

Теорема 1. *Система* (1) *имеет хотя бы одно решение в том и только в том случае, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы A^*.*

Для доказательства перепишем систему (1), пользуясь определением операций со столбцами. Мы получим

$$x^1\left\|\begin{matrix} a_1^1 \\ \ldots \\ a_1^m \end{matrix}\right\| + \ldots + x^n\left\|\begin{matrix} a_n^1 \\ \ldots \\ a_n^m \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} b^1 \\ \ldots \\ b^m \end{matrix}\right\|. \tag{2}$$

1°. Если существует решение, то запись (2) означает, что столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы системы. Значит, добавление этого столбца не увеличивает общего числа линейно независимых столбцов и $\operatorname{Rg} A^* = \operatorname{Rg} A$.

2°. Пусть $\operatorname{Rg} A^* = \operatorname{Rg} A$. В этом случае базисный минор матрицы A является базисным и в матрице A^*. Это означает, что столбец свободных членов есть линейная комбинация тех столбцов матрицы A, в которых расположен базисный минор. По предложению 6 § 1 в этом случае столбец свободных членов есть линейная комбинация всех столбцов матрицы A. Коэффициенты этой линейной комбинации представляют собой решение системы (1).

Следствие. *Система* (1) *несовместна тогда и только тогда, когда в упрощенный вид расширенной матрицы*

A^* *входит строка* $\|0 \ \dots \ 0 \ 1\|$. (Предполагается, что столбцы не переставлялись.)

Доказательство. Если $\operatorname{Rg} A^* > \operatorname{Rg} A$, то любой базисный минор матрицы A^* должен содержать последний столбец. Если последний столбец является базисным, то в упрощенный вид матрицы A^* должна входить строка $\|0 \ \dots \ 0 \ 1\|$. Обратно, если такая строка содержится в матрице, то ее последний столбец не может быть линейной комбинацией остальных, и система с упрощенной матрицей несовместна. Но исходная система эквивалентна системе с упрощенной матрицей.

В качестве примера получим из теоремы Кронекера — Капелли условие параллельности двух не совпадающих прямых на плоскости Прямые

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0,\\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

параллельны, если не имеют общей точки, т. е. если

$$\operatorname{Rg}\left\|\begin{matrix} A_1 & B_2 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}\right\| < \operatorname{Rg}\left\|\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}\right\|.$$

Равенство рангов матрицы системы и расширенной матрицы можно выразить, понимая ранг как максимальное число линейно независимых строк. Это приведет нас к нижеследующему предложению 1, известному как *теорема Фредгольма*. Для практического исследования систем уравнений она не очень удобна, но имеет существенное теоретическое значение.

Транспонируем матрицу A системы (1) и рассмотрим систему из n линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1^1y_1 + \dots + a_1^my_m = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_n^1y_1 + \dots + a_n^my_m = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

с m неизвестными, с матрицей A^T и свободными членами, равными нулю. Она называется *сопряженной однородной* системой для системы (1).

Предложение 1 (теорема Фредгольма). *Для того чтобы система линейных уравнений* (1) *была совместна, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение сопряженной однородной системы* (4) *удовлетворяло уравнению*

$$b^1y_1 + \dots + b^my_m = 0, \tag{5}$$

где $b^1, \dots, b^m$ — *свободные члены уравнений* (1).

Докажем достаточность. Если соотношение (5) выполнено для всех решений системы (4), то система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1^1y_1 + \ldots + a_1^my_m &= 0,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\\ a_n^1y_1 + \ldots + a_n^my_m &= 0,\\ b^1y_1 + \ldots + b^my_m &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

решений иметь не может. Поэтому для нее ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы системы. Транспонируя обе матрицы и учитывая, что ранг матрицы не меняется при транспонировании, мы получаем, что

$$\operatorname{Rg}\begin{Vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 & b^1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_1^m & \ldots & a_n^m & b^m\\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix} > \operatorname{Rg}\begin{Vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 & b^1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_1^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{Vmatrix}.$$

Теперь из теоремы о ранге матрицы следует, что строка $\|0\ \ldots\ 0\ 1\|$ не является линейной комбинацией строк матрицы

$$A^* = \begin{Vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 & b^1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_1^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{Vmatrix},$$

и потому строка такого вида не может входить в упрощенный вид этой матрицы. Отсюда на основании следствия из теоремы Кронекера—Капелли мы заключаем, что система (1) совместна.

Необходимость условия будет установлена, если мы допустим, что условие не выполнено, и докажем, что тогда система (1) несовместна. Пусть условие не выполнено Это означает, что существует решение $y_1, \ldots, y_m$ системы (4), для которого $b_1y_1 + \ldots + b_my_m = p \neq 0$. Умножим уравнения системы (1) на числа $y_1, \ldots, y_m$ с соответствующими номерами и сложим их. Мы получим уравнение

$$0x^1 + \ldots + 0x^n = p,$$

которое не имеет решений. Если бы система (1) имела решения, они должны были бы удовлетворять этому уравнению. Следовательно, система несовместна.

В качестве примера применим теорему Фредгольма к выводу условия параллельности двух различных прямых на плоскости. Система (3) не имеет решений, если существуют такие числа y_1 и y_2, что $y_1A_1 + y_2A_2 = 0$, $y_1B_1 + y_2B_2 = 0$, но $y_1C_1 + y_2C_2 \neq 0$. Легко видеть, что y_1 и y_2 не равны нулю. Поэтому можно положить $-y_2/y_1 = \lambda$ и записать полученное условие в виде: существует число λ такое, что $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ и $C_1 \neq \lambda C_2$.

2. Нахождение решений. В этом пункте мы будем предполагать, что дана совместная система из m линейных уравнений с n неизвестными. Обозначим буквой r ранг матрицы системы. Поскольку ранг расширенной матрицы тоже равен r, мы можем выбрать базисный минор расширенной матрицы так, чтобы он был расположен в матрице системы. Применяя элементарные преобразования строк, приведем расширенную матрицу к упрощенному виду (предложение 3 § 4). Данная нам система линейных уравнений, согласно предложению 2 § 4, перейдет в эквивалентную ей систему из r линейно независимых уравнений.

Для удобства записи будем предполагать, что базисный минор расположен в первых r столбцах. Тогда преобразованную систему можно записать в виде

$$\left.\begin{array}{l} x^1 = \bar{b}^1 - (\bar{a}^1_{r+1} x^{r+1} + \ldots + \bar{a}^1_n x^n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^r = \bar{b}^r - (\bar{a}^r_{r+1} x^{r+1} + \ldots + \bar{a}^r_n x^n). \end{array}\right\} \tag{7}$$

Здесь $\bar{a}^i_j$ и $\bar{b}^i$ — элементы преобразованной расширенной матрицы. В левых частях равенств мы оставили неизвестные, соответствующие столбцам выбранного нами базисного минора, так называемые *базисные* неизвестные. Остальные неизвестные — называемые *параметрическими* — перенесены в правые части равенств.

Как бы мы ни задали параметрические неизвестные, по формулам (7) мы найдем базисные так, что они вместе с заданными параметрическими образуют решение системы (1). Легко видеть, что этим способом мы получим всю совокупность решений.

На формулах (7) можно было бы остановиться, но ниже мы дадим более простое и наглядное, а также принципиально важное описание совокупности решений системы линейных уравнений.

3. Приведенная система. Сопоставим системе уравнений (1) *однородную систему* с той же матрицей коэффициентов, т. е. систему

$$\left.\begin{array}{l} a^1_1 x^1 + \ldots + a^1_n x^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^m_1 x^1 + \ldots + a^m_n x^n = 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

По отношению к системе (1) она называется *приведенной*.

Предложение 2. *Если* $y_0^1, \ldots, y_0^n$ — *решение системы* (1), *то* $y^1, \ldots, y^n$ — *также решение системы* (1) *тогда и только тогда, когда найдется такое решение приведенной системы* $x^1, \ldots, x^n$, *что* $y^i = y_0^i + x^i$ *для любого* $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. 1°. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — столбцы матрицы системы (1), $\boldsymbol{b}$ — ее столбец свободных членов, $y_0^1, \ldots, y_0^n$ — решение:

$$y_0^1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + y_0^n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}, \tag{9}$$

а также $x^1, \ldots, x^n$ — решение приведенной системы:

$$x^1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}. \tag{10}$$

Складывая равенства (9) и (10) почленно, мы получаем

$$(y_0^1 + x^1)\,\boldsymbol{a}_1 + \ldots + (y_0^n + x^n)\,\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b},$$

т. е. числа $y_0^1 + x^1, \ldots, y_0^n + x^n$ удовлетворяют системе (1).

2°. Пусть $y^1, \ldots, y^n$ — решение системы (1):

$$y^1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + y^n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}. \tag{11}$$

Вычитая (9) из (11), имеем

$$(y^1 - y_0^1)\,\boldsymbol{a}_1 + \ldots + (y^n - y_0^n)\,\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}.$$

Это значит, что числа $x^1 = y^1 - y_0^1, \ldots, x^n = y^n - y_0^n$ удовлетворяют приведенной системе. Предложение доказано.

Записывая решения в столбцы высоты n, предложение 2 можно сформулировать так: если $\boldsymbol{y}_0$ — решение системы (1), то $\boldsymbol{y}$ — также решение этой системы тогда и только тогда, когда найдется такое решение $\boldsymbol{x}$ приведенной системы, что $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{x}$.

Далее для краткости мы будем пользоваться подобной записью.

4. Множество решений однородной системы. Любая однородная система линейных уравнений совместна. Она имеет решение $0, \ldots, 0$, которое называется *тривиальным решением*. Все предыдущие результаты о системах линейных уравнений, разумеется, верны и для однородных систем. В частности, справедливы формулы (7), которые для однородной системы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= -(\bar{a}^1_{r+1}x^{r+1} + \ldots + \bar{a}^1_n x^n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^r &= -(\bar{a}^r_{r+1}x^{r+1} + \ldots + \bar{a}^r_n x^n). \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

Действительно, в формулах (7) $\bar{b}^1 = 0, \ldots, \bar{b}^r = 0$, поскольку при элементарных операциях со строками нулевой столбец свободных членов может перейти только в нулевой столбец.

Множество решений однородной системы обладает двумя важными свойствами, выраженными в следующем предложении.

Предложение 3. *Если столбцы* $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ — *решения однородной системы, то их сумма* $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ — *также решение этой системы. Произведение решения однородной системы на любое число является решением той же системы.*

Доказательство. Нам дано, что

$$x_1^1\boldsymbol{a}_1+\ldots+x_1^n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o} \text{ и } x_2^1\boldsymbol{a}_1+\ldots+x_2^n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o}.$$

Из этих равенств вытекает

$$(x_1^1+x_2^1)\,\boldsymbol{a}_1+\ldots+(x_1^n+x_2^n)\,\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o}$$

и

$$\lambda x_1^1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\lambda x_1^n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o},$$

каково бы ни было λ. Предложение доказано.

Доказательства двух следующих предложений используют формулы (7′), и потому принятая в них нумерация переменных соответствует сделанному в формулах (7) и (7′) предположению, что базисный минор матрицы системы расположен в первых r столбцах.

Предложение 4. *Если ранг матрицы однородной системы равен* r, *то система имеет* $n-r$ *линейно независимых решений.*

Для доказательства придадим параметрическим неизвестным следующие $n-r$ наборов значений:

$$\begin{array}{rlllll}
1) & x^{r+1}=1, & x^{r+2}=0, & \ldots, & \ldots, & x^n=0;\\
2) & x^{r+1}=0, & x^{r+2}=1, & x^{r+3}=0, & \ldots, & x^n=0;\\
\multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\
n-r) & x^{r+1}=0, & \ldots, & \ldots, & x^{n-1}=0, & x^n=1.
\end{array}$$

Для каждого набора значений параметрических неизвестных найдем соответствующие значения базисных неизвестных. Полученные решения запишем в виде столбцов:

$$\boldsymbol{x}_1=\left\|\begin{matrix} x_1^1\\ \ldots\\ x_1^r\\ 1\\ 0\\ \ldots\\ 0\end{matrix}\right\|,\quad \boldsymbol{x}_2=\left\|\begin{matrix} x_2^1\\ \ldots\\ x_2^r\\ 0\\ 1\\ \ldots\\ 0\end{matrix}\right\|,\quad \ldots,\quad \boldsymbol{x}_{n-r}=\left\|\begin{matrix} x_{n-r}^1\\ \ldots\\ x_{n-r}^r\\ 0\\ \ldots\\ 0\\ 1\end{matrix}\right\|. \qquad (12)$$

Эти решения линейно независимы. Действительно, составим матрицу из столбцов $x_1, \ldots, x_{n-r}$. Она имеет минор порядка $n-r$, равный единице (в последних $n-r$ строках), поэтому ее ранг равен $n-r$, и все столбцы линейно независимы.

Совокупность решений (12) называется *нормальной фундаментальной системой решений.* Вообще, любая система из $n-r$ линейно независимых решений называется *фундаментальной системой решений.*

Предложение 5. *Пусть $x_1, \ldots, x_{n-r}$ — произвольная фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Тогда любое решение x системы представляет собой линейную комбинацию решений $x_1, \ldots, x_{n-r}$.*

Для доказательства составим матрицу X, столбцами которой являются решения x и $x_1, \ldots, x_{n-r}$. Ранг этой матрицы не меньше чем $n-r$, так как в ней есть $n-r$ линейно независимых столбцов. С другой стороны, он и не больше чем $n-r$. Действительно, первая из формул (7′) выражает первую базисную неизвестную x^1 как линейный многочлен от параметрических неизвестных, причем коэффициенты этого многочлена одни и те же для каждого столбца матрицы X. Поэтому первая строка матрицы есть линейная комбинация последних $n-r$ строк. Иначе можно сказать так: если последние $n-r$ строк матрицы X мы умножим на коэффициенты первой из формул (7′) и сложим, то мы получим первую строку этой матрицы. Аналогично при помощи остальных формул (7′) можно показать, что строки с номерами $2, \ldots, r$ — линейные комбинации последних строк. Поэтому элементарными преобразованиями можно обратить в нуль первые r строк матрицы X, а это значит, что ранг ее не превосходит $n-r$.

Мы видим, что ранг нашей матрицы равен $n-r$. Следовательно, она имеет базисный минор, расположенный в столбцах $x_1, \ldots, x_{n-r}$, и доказываемое предложение следует из теоремы о базисном миноре.

Пусть $x_1, \ldots, x_{n-r}$ — фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Рассмотрим столбец $x = C_1 x_1 + \ldots + C_{n-r} x_{n-r}$, или, в развернутом виде,

$$\left\| \begin{matrix} x^1 \\ \ldots \\ x^n \end{matrix} \right\| = C_1 \left\| \begin{matrix} x_1^1 \\ \ldots \\ x_1^n \end{matrix} \right\| + \ldots + C_{n-r} \left\| \begin{matrix} x_{n-r}^1 \\ \ldots \\ x_{n-r}^n \end{matrix} \right\|. \tag{13}$$

Из предложения 1 вытекает, что линейная комбинация любого числа решений однородной системы также является решением. Следовательно, каковы бы ни были числа $C_1, \ldots, C_{n-r}$, столбец $\boldsymbol{x}$, определяемый формулой (13), является решением рассматриваемой однородной системы уравнений. Наоборот, согласно предложению 5 для каждого решения однородной системы существуют такие числа $C_1, \ldots, C_{n-r}$, при которых оно имеет вид (13).

Естественно возникает вопрос, нет ли такой совокупности из $s < n-r$ решений, что каждое решение однородной системы линейных уравнений есть линейная комбинация решений из данной совокупности. Легко доказать, что ответ отрицательный. В самом деле, допустим, что такая совокупность решений существует, и составим матрицу G размеров $n \times (n-r+s)$, столбцами которой являются решения, входящие в эту совокупность и в нормальную фундаментальную систему решений. С одной стороны, мы имеем $\operatorname{Rg} G = s$, а с другой, $\operatorname{Rg} G = n-r$, и мы приходим к противоречию.

5. Общее решение системы линейных уравнений. Теперь мы можем собрать воедино наши результаты — предложения 2 и 5:

Теорема 2. *Если $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ — фундаментальная система решений приведенной системы уравнений, а $\boldsymbol{y}_0$ — некоторое решение системы* (1), *то столбец*

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + C_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + C_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r},$$

или в развернутом виде,

$$\left\| \begin{matrix} y^1 \\ \cdots \\ y^n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} y_0^1 \\ \cdots \\ y_0^n \end{matrix} \right\| + C_1 \left\| \begin{matrix} x_1^1 \\ \cdots \\ x_1^n \end{matrix} \right\| + \ldots + C_{n-r} \left\| \begin{matrix} x_{n-r}^1 \\ \cdots \\ x_{n-r}^n \end{matrix} \right\|, \qquad (14)$$

при любых числах $C_1, \ldots, C_{n-r}$ является решением системы линейных уравнений (1). *Наоборот, для каждого решения этой системы найдутся такие числа $C_1, \ldots, C_{n-r}$, при которых оно имеет вид* (14).

Выражение, стоящее в правой части равенства (14), называется *общим решением системы линейных уравнений.*

Теорема верна для любых систем линейных уравнений, в частности для однородных. Формула (14) совпадает с (13), если $\boldsymbol{y}_0$ — тривиальное решение.

Правило Крамера гласит, что для существования и единственности решения системы из n уравнений с n неизвестными достаточно, чтобы детерминант матрицы системы отличался от нуля. Из теоремы 2 следует необходимость этого условия.

Предложение 6. *Пусть A — матрица системы из n линейных уравнений с n неизвестными. Если* $\det A = 0$, *то система либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений.*

Доказательство. Равенство $\det A = 0$ означает, что ранг матрицы A меньше n, и, следовательно, приведенная система имеет бесконечно много решений. Если рассматриваемая система совместна, из формулы (14) вытекает, что и она имеет бесконечно много решений.

6. Примеры. Рассмотрим уравнение плоскости в декартовой системе координат

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{15}$$

как систему из одного линейного уравнения с тремя неизвестными. Пусть $A \neq 0$ и, следовательно, является базисным минором матрицы системы. Ранг расширенной матрицы не больше единицы, и система совместна. Одно ее решение можно найти, положив $y = z = 0$. Мы получим $x = -D/A$. Так как $n = 3$ и $r = 1$, фундаментальная система решений приведенной системы состоит из двух решений. Мы найдем их, дав параметрическим неизвестным два набора значений: $y = 1$, $z = 0$ и $y = 0$, $z = 1$. Соответствующие значения базисной неизвестной x будут $-B/A$ и $-C/A$. Итак, общее решение системы (15)

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -D/A \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_1 \begin{Vmatrix} -B/A \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + C_2 \begin{Vmatrix} -C/A \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{16}$$

Выясним геометрический смысл полученного решения. Очевидно, прежде всего, что решение $(-D/A, 0, 0)$ состоит из координат некоторой (начальной) точки плоскости или, что то же, из компонент ее радиус-вектора. В формуле (14) в качестве решения y_0 мы можем брать любое решение системы. Это соответствует тому, что начальная точка выбирается произвольно. Согласно предложению 2 § 2 гл. II компоненты лежащих в плоскости векторов удовлетворяют уравнению $A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0$, т. е. приведенной системе. Два линейно независимых решения этой системы могут быть приняты за направляющие векторы плоскости. Таким образом, формула (16) — не что иное, как параметрические уравнения плоскости, причем C_1 и C_2 — параметры. Произвол в выборе фундаментальной системы решений означает произвол в выборе направляющих векторов плоскости.

В качестве следующего примера рассмотрим прямую линию в пространстве. Относительно декартовой системы координат она может быть задана системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Мы будем предполагать, что минор $A_1B_2-A_2B_1$ отличен от нуля и, следовательно, является базисным. Так как ранг расширенной матрицы не может превосходить двух, система совместна.

Для того чтобы выразить базисные неизвестые x и y через параметрическую z, в нашем случае (система из двух уравнений с буквенными коэффициентамн) естественнее воспользоваться не методом Гаусса, а правилом Крамера.

Одно решение системы — компоненты радиус-вектора начальной точки прямой — можно найти, положив $z_0=0$. Мы получим

$$x_0=\frac{B_1D_2-B_2D_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad y_0=\frac{D_1A_2-D_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Приведенная система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z=0. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Ее фундаментальная система решений состоит из одного решения. Придав параметрической неизвестной z значение $z_1=1$, мы найдем из (18)

$$x_1=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad y_1=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}.$$

Однако нам удобнее взять не нормальную фундаментальную систему, а умножить найденное решение однородной системы на $A_1B_2-A_2B_1$. Итак, общее решение системы (17) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{Vmatrix} + C \begin{Vmatrix} B_1C_2-B_2C_1 \\ C_1A_2-C_2A_1 \\ A_1B_2-A_2B_1 \end{Vmatrix}. \qquad (19)$$

Направляющий вектор прямой в такой форме мы получили в предложении 11 § 2 гл. II.

§ 6. Умножение матриц

1. Определение и примеры. Рассмотрим сначала строку a с элементами a_i $(i=1, \ldots, n)$ и столбец b с элементами b_j $(j=1, \ldots, n)$. Существенно, что в a и в b число элементов одинаково. *Произведением* $\boldsymbol{a}$ *на* $\boldsymbol{b}$ называется число, равное сумме произведений элементов с одинаковыми номерами, т. е.

$$\boldsymbol{ab}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

Пусть теперь дана матрица A размеров $m\times n$ и матрица B размеров $n\times p$. Матрицы таковы, что длина строки (число столбцов) первой равна высоте столбца (числу строк) второй. Умножим каждую строку A на каждый столбец B. Полученные mp произведений запишем в виде матрицы C размеров $m\times p$. Именно, каждый столбец матрицы C составим из произведений всех строк матрицы A на соответствующий столбец матрицы B. Любая строка C состоит из произведений строки A, имеющей тот же номер, на все столбцы B. Таким образом, элементы матрицы C можно записать следующей формулой:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \tag{1}$$

$$(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,p).$$

Определение. Матрицу C, элементы которой выражаются через элементы матриц A и B по формулам (1), назовем *произведением* A *на* B и обозначим AB.

Определение произведения матриц формулируется более сложно и кажется менее естественным, чем определение суммы. Однако если бы кто-нибудь захотел определить произведение для матриц одинаковых размеров, перемножая соответствующие элементы, то такое определение не нашло бы себе существенных применений. Что же касается приведенного определения, то оно, как читатель в этом убедится, широко применяется.

Приведем несколько примеров.

1) Произведение квадратной матрицы A порядка n на столбец $\boldsymbol{x}$ высоты n:

$$A\boldsymbol{x}=\begin{Vmatrix} a_1^1\ldots a_n^1 \\ a_1^2\ldots a_n^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^n\ldots a_n^n \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ x^n \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_1^1x^1+\ldots+a_n^1x^n \\ a_1^2x^1+\ldots+a_n^2x^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^nx^1+\ldots+a_n^nx^n \end{Vmatrix}$$

Произведение представляет собой столбец высоты n. В обратном порядке эти матрицы перемножать нельзя, т. е. произведение $\boldsymbol{x}A$ не определено.

2) Произведение строки длины n на квадратную матрицу порядка n будет строкой длины n:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \ldots x_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{k1}x_k \ldots \sum_{k=1}^{n} a_{kn}x_k \end{Vmatrix}.$$

3) Произведение столбца высоты m на строку длины n — матрица размеров $m \times n$:

$$\begin{Vmatrix} x^1 \\ \ldots \\ x^m \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_1 \ldots a_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x^1a_1 & x^1a_2 \ldots x^1a_n \\ x^2a_1 & x^2a_2 \ldots x^2a_n \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot & \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ x^ma_1 & x^ma_2 \ldots x^ma_n \end{Vmatrix}.$$

4) Пусть A — матрица размеров $m \times n$, $\boldsymbol{e}_i$ — i-й столбец единичной матрицы¹) порядка m, а $\boldsymbol{e}_j$ — j-й столбец единичной матрицы порядка n. Тогда

$$\boldsymbol{e}_i^T A \boldsymbol{e}_j = \begin{Vmatrix} 0 \ldots 1 \ldots 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{Vmatrix} = a_{ij}.$$

П р е д л о ж е н и е 1. *j-й столбец матрицы AB есть линейная комбинация столбцов A с коэффициентами, равными элементам j-го столбца матрицы B.*

i-я строка матрицы AB есть линейная комбинация строк B с коэффициентами, равными элементам i-й строки матрицы A.

Оба утверждения доказываются одинаково. Докажем, например, первое. Для этого обозначим столбцы матриц A, B и AB соответственно через $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_p$ и $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_p$. Отметим, что столбцы матриц A и AB имеют одинаковую высоту. Поскольку для составления $\boldsymbol{c}_j$ мы последовательно умножаем все строки A на $\boldsymbol{b}_j$, имеем $\boldsymbol{c}_j = A\boldsymbol{b}_j$. Но, как видно из примера 1), произведение $A\boldsymbol{b}_j$ можно записать $b_{j1}\boldsymbol{a}_1 + \ldots + b_{jn}\boldsymbol{a}_n$. Этим наше предложение доказано.

2. Свойства умножения матриц. Умножение матриц не коммутативно. Даже если определены оба произведения AB и BA, они могут быть не равны, как показывает следующий пример:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \neq \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

¹) Определение единичной матрицы см. на с. 145.

Если какие-нибудь матрицы A и B удовлетворяют соотношению $AB=BA$, то они называются *перестановочными*. Перестановочные матрицы существуют. Например, единичная матрица порядка n

$$E_n=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 \dots 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0\\ . & . & . \quad . \quad . & .\\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1\end{Vmatrix}$$

перестановочна с любой квадратной матрицей того же порядка, т. е.

$$AE_n=E_nA=A. \tag{2}$$

Предоставим читателю самостоятельно проверить эти равенства в качестве упражнения на умножение матриц.

То обстоятельство, что каждая матрица A не меняется при умножении на единичную матрицу, представляет собой важное свойство единичной матрицы, которому она обязана своим названием. Если бы какая-нибудь другая матрица $\tilde{E}$ обладала этим же свойством, мы имели бы $\tilde{E}E=E$ и $\tilde{E}E=\tilde{E}$, откуда следовало бы $E=\tilde{E}$.

Очевидно, что каковы бы ни были A и B, если O — нулевая матрица, то

$$AO=O, \quad OB=O.$$

(Предполагается, что произведения определены.)

Предложение 2. *Умножение матриц ассоциативно, т. е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$ и выполнено равенство $(AB)C=$ $=A(BC)$.*

Действительно, обозначим размеры матриц A, B и C соответственно через $m_A\times n_A$, $m_B\times n_B$ и $m_C\times n_C$. Если AB определено, то $n_A=m_B$ и матрица AB имеет размеры $m_A\times n_B$. Поэтому, если определено произведение $(AB)C$, то $n_B=m_C$. Матрица AB состоит из элементов

$$\sum_{\alpha=1}^{n_A} a_{l\alpha}b_{\alpha\rho} \qquad (l=1, \dots, m_A;\ \rho=1, \dots, n_B),$$

и, следовательно, элементы $(AB)C$ имеют вид

$$\sum_{\rho=1}^{n_B}\left(\sum_{\alpha=1}^{n_A} a_{l\alpha}b_{\alpha\rho}\right)c_{\rho\lambda} \qquad (l=1, \dots, m_A;\ \lambda=1, \dots, n_C). \tag{3}$$

Поскольку $n_B = m_C$, определено произведение BC. Его элементы

$$\sum_{\rho=1}^{n_B} b_{\alpha\rho} c_{\rho\lambda} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m_A;\ \lambda = 1, \ldots, n_C).$$

Высота столбца матрицы BC равна n_A, т. е. длине строки матрицы A. Таким образом, определено произведение $A(BC)$. Элементы $A(BC)$ имеют вид

$$\sum_{\alpha=1}^{n_A} a_{i\alpha} \left(\sum_{\rho=1}^{n_B} b_{\alpha\rho} c_{\rho\lambda} \right) \qquad (i = 1, \ldots, m_A;\ \lambda = 1, \ldots, n_C). \quad (4)$$

В силу предложений 1 и 2 § 2 выражения (3) и (4) совпадают, и наше предложение доказано.

Предложение 3. *Умножение матриц дистрибутивно по отношению к сложению, т. е. если имеет смысл выражение $A(B+C)$, то*

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Если имеет смысл выражение $(A+B)C$, то

$$(A+B)C = AC + BC.$$

Обе части предложения доказываются одинаково. Докажем, например, первую. Очевидно, что B и C должны иметь одинаковые размеры $m \times n$, а A — размеры $p \times m$ (p может быть любым). Мы можем выразить элементы матрицы $A(B+C)$ через элементы матриц A, B и C:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{\lambda i} (b_{i\alpha} + c_{i\alpha}) \qquad (\lambda = 1, \ldots, p;\quad \alpha = 1, \ldots, n).$$

Согласно предложению 1 § 2 эта сумма может быть представлена в виде

$$\sum_{i=1}^{m} a_{\lambda_i} b_{i\alpha} + \sum_{i=1}^{m} a_{\lambda_i} c_{i\alpha}.$$

Суммы, составляющие это выражение, равны элементам матриц AB и AC, стоящим в строке с номером λ и в столбце с номером α. Этим утверждение доказано.

Легко может быть доказано следующее свойство умножения матриц.

Предложение 4. *Если произведение AB имеет смысл, то*

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

для любого числа α.

Предложение 5. *Ранг произведения двух матриц не превосходит рангов сомножителей.*

Для доказательства рассмотрим матрицу D, составленную из всех столбцов матриц A и AB. Запишем ее: $D=\| A \mid AB \|$. Очевидно, что $\operatorname{Rg} AB \leqslant \operatorname{Rg} D$. По предложению 1 столбцы AB являются линейными комбинациями столбцов A. Отсюда следует, что $\operatorname{Rg} D = \operatorname{Rg} A$. Мы имеем $\operatorname{Rg} AB \leqslant \operatorname{Rg} A$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{Rg} AB \leqslant \operatorname{Rg} B$. Для этого нужно составить матрицу D' из строк матрицы B и строк матрицы AB.

Предложение 6. *Если определено произведение AB, то определено и произведение $B^T A^T$ и выполнено равенство*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Пусть матрицы A и B имеют соответственно размеры $m \times n$ и $n \times p$. В матрице AB на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит элемент

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j} \qquad (i=1, \ldots, m; \quad j=1, \ldots, p). \tag{5}$$

j-я строка матрицы B^T состоит из элементов $b_{1j}, \ldots, b_{nj}$, а i-й столбец матрицы A^T — из элементов $a_{i1}, \ldots, a_{in}$. Поэтому произведение $B^T A^T$ определено, и в нем на пересечении j-й строки и i-го столбца стоит элемент

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha j} a_{i\alpha}.$$

Он совпадает с элементом (5), а индексы i и j пробегают в обоих выражениях одни и те же значения $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, p$. Этим предложение доказано.

Следствие. *Если определено произведение ABC, то*

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T.$$

Действительно, $(ABC)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T$.

3. Обратная матрица. Исследуем теперь, насколько возможно ввести операцию деления, обратную операции умножения. Введем следующее определение.

Определение. Матрица X, удовлетворяющая вместе с заданной матрицей A равенствам

$$XA = AX = E_n \tag{6}$$

(где E_n — единичная матрица некоторого порядка n), называется *обратной* к A и обозначается A^{-1}.

Поскольку A и A^{-1} перестановочны, они обе должны быть квадратными того же порядка n. Из (6) в силу предложения 5 мы имеем $\operatorname{Rg} E_n \leqslant \operatorname{Rg} A$. Отсюда $\operatorname{Rg} A = n$. Поэтому матрица A может иметь обратную только тогда, когда ее детерминант не равен нулю. Приведенное условие является не только необходимым, но и достаточным для существования обратной матрицы.

Предложение 7. *Каждая квадратная матрица с детерминантом, отличным от нуля, имеет обратную матрицу, и притом только одну.*

Доказательство. Для каждой матрицы A с $\det A \neq 0$ существует единственная матрица X такая, что $AX = E$. Действительно, при любом j столбец $\boldsymbol{x}_j$ матрицы X должен удовлетворять условию $A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{e}_j$, где $\boldsymbol{e}_j$ — j-й столбец единичной матрицы. Подробнее это условие записывается системой линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_j^1 + \ldots + a_{1n}x_j^n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{j1}x_j^1 + \ldots + a_{jn}x_j^n = 1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_j^1 + \ldots + a_{nn}x_j^n = 0. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

По правилу Крамера эта система уравнений имеет единственное решение, и, следовательно, каждый столбец матрицы X однозначно определен.

Докажем, что $XA = E$. С этой целью заметим, что $\det X \neq 0$ и по только что доказанному существует такая матрица Y, что $XY = E$. Мы найдем Y, если умножим обе части последнего равенства слева на матрицу A. Тогда $AXY = A$, откуда в силу $AX = E$ следует $Y = A$. Итак, матрица X удовлетворяет обоим условиям (6).

Способ, примененный при доказательстве существования, является основой для нахождения обратной матрицы. Согласно правилу Крамера i-я неизвестная в системе (7) находится по формуле $x_j^i = \Delta_i / \det A$, где Δ_i — детерминант матрицы, получаемой из A заменой ее i-го столбца на j-й столбец единичной матрицы. Разлагая Δ_i по этому столбцу, мы имеем только одно слагаемое, так как в $\boldsymbol{e}_j$ только один элемент равен 1, а остальные — нули. Следовательно, $\Delta_i = (-1)^{i+j} M_i^j$, где M_i^j — дополнительный минор элемента a_i^j в матрице A. Окончательно:

$$x_j^i = \frac{(-1)^{i+j} M_i^j}{\det A}. \qquad (8)$$

Можно решать систему (7) и методом Гаусса. Поскольку $\det A \neq 0$, по следствию из предложения 3 § 4, элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы системы мы можем превратить матрицу A в единичную матрицу. При этом столбец свободных членов $\boldsymbol{e}_j$ превратится в решение системы $\boldsymbol{x}_j$ (ср. формулы (7) § 5, в которых в данном случае отсутствуют параметрические неизвестные).

При различных j системы (7) отличаются только столбцами свободных членов. Поэтому элементарные преобразования строк расширенной матрицы одни и те же при любых j. Мы можем решать все системы одновременно, приписав к A столбцы свободных членов всех систем:

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\|. \tag{9}$$

Из сказанного выше следует: если мы при помощи элементарных преобразований строк матрицы (9) превратим ее левую половину в единичную матрицу, то ее правая половина превратится в матрицу A^{-1}.

Из свойств обратной матрицы укажем следующие: непосредственно из определения видно, что

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Кроме того,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \tag{10}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \tag{11}$$

Проверим формулу (10): $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = E$. Для доказательства формулы (11) транспонируем обе части равенства $AA^{-1} = E$, мы получим $(A^{-1})^T A^T = E$, откуда следует доказываемое.

4. Элементарные преобразования как умножение матриц. Детерминант произведения. Каждое элементарное преобразование строк матрицы A размеров $m \times n$ равносильно умножению A слева на некоторую квадратную матрицу порядка m. Именно, рассмотрим матрицу S_1, которая получается из единичной матрицы перестановкой i-й и j-й строк. Из предложения 1 легко следует, что при умножении A слева на S_1 соответствующие строки матрицы A переставятся.

Пусть S_2 — матрица, получаемая из единичной заменой i-й единицы на диагонали на $\lambda \neq 0$. Из предложения 1 следует, что при умножении A на S_2 слева i-я строка A умножится на λ.

Обозначим через S_3 матрицу, которая отличается от единичной заменой на единицу нулевого элемента на пересечении i-й строки и j-го столбца. Умножение A слева на S_3 равносильно прибавлению j-й строки A к i-й.

Заметим, что детерминанты S_1, S_2 и S_3 отличны от нуля: $\det S_1 = -1$, $\det S_2 = \lambda$, $\det S_3 = 1$. Если матрица A квадратная, то

$$\det(S_1A) = -\det A, \quad \det(S_2A) = \lambda \det A, \quad \det(S_3A) = \det A.$$

Таким образом, для матриц элементарных преобразований

$$\det(SA) = \det S \det A. \tag{12}$$

Последовательному выполнению элементарных преобразований соответствует умножение слева на произведение соответствующих матричных множителей.

Элементарные преобразования столбцов A можно осуществить, умножая A справа на аналогичные матрицы.

Предложение 8. *Если* $\det A \neq 0$, *то найдутся матрицы элементарных преобразований* $S_1, \ldots, S_p$ *такие, что* $A = S_1 \ldots S_p$.

Доказательство. Если $\det A \neq 0$, то существует A^{-1}. Так как $\det A^{-1} \neq 0$, элементарными преобразованиями строк матрица A^{-1} может быть превращена в единичную. Поэтому найдутся матрицы элементарных преобразований $S_1, \ldots, S_p$, для которых $S_1 \ldots S_p A^{-1} = E$. Очевидно, что это и есть нужные нам матрицы.

Теперь мы можем доказать

Предложение 9. *Для любых квадратных матриц* A и B *одного порядка* $\det(AB) = \det A \det B$.

Действительно, в случае $\det A = 0$ утверждение вытекает из оценки ранга произведения матриц (предложение 5). Если же $\det A \neq 0$, матрицу A можно представить как произведение матриц элементарных преобразований $A = S_1 \ldots S_p$. Теперь, применяя формулу (12), мы получаем

$$\det(AB) = \det(S_1 \ldots S_p B) =$$
$$= \det S_1 \ldots \det S_p \det B = \det A \det B.$$

§ 7. Комплексные числа и комплексные матрицы

1. Арифметические операции с комплексными числами. В дальнейшем нам неоднократно придется иметь дело с комплексными числами. Поэтому дадим определение и изложим вкратце основные свойства комплексных чисел.

Комплексным числом мы назовем упорядоченную пару вещественных чисел (a, b). Комплексные числа $z_1=(a, b)$ и $z_2=(c, d)$ *равны*, если $a=c$ и $b=d$. Вещественные числа будем считать частным случаем комплексных. Именно, *отождествим вещественное число a с комплексным числом* $(a, 0)$ (но не с $(0, a)$!).

Сложение комплексных чисел определяется формулой

$$(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2),$$

т. е. так же, как для строк длины 2. Свойства операции сложения легко следуют из этого определения. Сложение коммутативно и ассоциативно, прибавление нуля (который мы отождествили с парой $(0, 0)$) не меняет комплексного числа. Комплексное число $(-a, -b)$ является противоположным числу (a, b), т. е. в сумме с ним дает нуль. Число, противоположное z, мы обозначим $-z$. Разность z_1-z_2 чисел z_1 и z_2 определяется как сумма $z_1+(-z_2)$.

От строк длины 2 комплексные числа отличаются тем, что для них определено умножение. Именно, *произведением* чисел (a_1, b_1) и (a_2, b_2) называется число

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2)=(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2).$$

В частности, при *умножении на вещественное число* c имеем

$$c(a, b)=(c, 0)(a, b)=(ca, cb),$$

как и для строк длины 2. Умножение обладает обычными свойствами коммутативности и ассоциативности, оно дистрибутивно по отношению к сложению. Очевидно, что $1\cdot z=z$ для любого комплексного числа z.

Пусть комплексное число $z=(a, b)$ отлично от нуля. Это значит, что a и b не равны нулю одновременно, или $a^2+b^2\neq 0$. Рассмотрим число

$$z^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Для него

$$zz^{-1}=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right)=(1, 0)=1.$$

Число z^{-1} назовем *обратным к* z, а произведение $z_1\cdot z^{-1}$ — *частным* от деления z_1 на z. Таким образом, возможно деление на комплексное число, не равное нулю.

2. Число i. Обозначим буквой i и будем называть *мнимой единицей* число $(0, 1)$. Согласно определениям операций сложения и умножения любое комплексное число (a, b) можно представить в виде

$$(a, b)=(a, 0)+(0, b)=a(1, 0)+b(0, 1)=a+bi.$$

Это—принятая запись комплексных чисел, которой мы будем пользоваться в дальнейшем. Из определения умножения следует, что

$$i^2=(0, 1)(0, 1)=(-1, 0)=-1. \qquad (1)$$

Можно показать, что арифметические операции с комплексными числами производятся как с двучленами, принимая во внимание соотношение (1).

Из равенства (1) видно, что комплексные числа могут удовлетворить уравнениям, которым никакое вещественное число не удовлетворяет. Именно, уравнение $x^2+1=0$, не имеющее вещественных корней, имеет два комплексных корня: $x_1=i$ и $x_2=-i$. Очевидно, что, каково бы ни было отрицательное число a, комплексные числа $z_1=i\sqrt{|a|}$ и $z_2=-i\sqrt{|a|}$ являются квадратными корнями из a, т. е. $z_1^2=a$ и $z_2^2=a$.

Имеет место следующая теорема, называемая *основной теоремой алгебры*: *каждый многочлен степени n с комплексными* (а в частности и с вещественными) *коэффициентами имеет n, вообще говоря, комплексных корней, среди которых могут быть и совпадающие.* На эту теорему мы будем несколько раз ссылаться. Ее доказательство обычно приводится в курсах теории функций комплексного переменного.

3. Модуль и аргумент комплексного числа. Рассмотрим на плоскости декартову прямоугольную систему координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Мы можем сопоставить комплексному числу (a, b) точку с координатами a и b относительно этой системы. При этом каждому комплексному числу соответствует точка, каждой точке—комплексное число.

Пусть комплексному числу $z=(a, b)$ соответствует точка M. Обозначим $|\overrightarrow{OM}|$ через r, а угол от $\mathbf{e}_1$ до $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки, обозначим через φ. Тогда точка M будет иметь координаты $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ и мы получим

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Число r называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$. Модуль—неотрицательное вещественное число. Если $z=a+bi$, то

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

$|z|$ равен нулю тогда и только тогда, когда $a=b=0$, т. е. $z=0$. Если z вещественно, то $|z|$ — абсолютная величина z.

Число φ называется *аргументом* z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Аргумент z определен не однозначно, а, как и полярный угол точки в полярной системе координат, с точностью до слагаемого, кратного 2π.

При помощи простейших формул тригонометрии можно проверить, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

4. Комплексно сопряженное число. Число $a-bi$ называется *комплексно сопряженным* числу $a+bi$. Число, комплексно сопряженное z, принято обозначать $\bar{z}$. Поскольку $a-(-b)i=a+bi$, мы имеем $\bar{\bar{z}}=z$. Отметим следующие простые, но важные предложения.

1°. Число z вещественно тогда и только тогда, когда $z=\bar{z}$. Действительно, равенство $a+bi=a-bi$ показывает, что $b=0$.

2°. Произведение числа на комплексно сопряженное равно квадрату его модуля:

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2. \tag{2}$$

Следовательно, произведение $z\bar{z}$ всегда вещественно и неотрицательно.

3°. Для любых комплексных z_1 и z_2

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2, \tag{3}$$

$$\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2. \tag{4}$$

Чтобы доказать, например, второе из равенств, напишем

$$\overline{z_1 z_2}=\overline{(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)}=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_1b_2+b_1a_2)$$

и

$$\bar{z}_1\bar{z}_2=(a_1-b_1 i)(a_2-b_2 i)=(a_1a_2-b_1b_2)-i(a_1b_2+b_1a_2).$$

Первое равенство доказывается аналогично.

По индукции нетрудно показать, что, сколько бы ни было дано чисел, число, комплексно сопряженное их сумме или произведению, равно соответственно сумме или произведению комплексно сопряженных им чисел.

4°. Пусть $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ — многочлен с вещественными коэффициентами и λ — его корень. Согласно предыдущему из $a_n\lambda^n+\ldots+a_1\lambda+a_0=0$ следует

$$a_n(\bar{\lambda})^n+\ldots+a_1\bar{\lambda}+a_0=\overline{a_n\lambda^n+\ldots+a_1\lambda+a_0}=0.$$

Таким образом, $\bar{\lambda}$—также корень данного многочлена. Отсюда вытекает, что *многочлен с вещественными коэффициентами всегда имеет четное число невещественных корней*. Это предложение имеет такое следствие: любой многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хоть один вещественный корень.

5. Комплексные матрицы. Перечисленные в п. 1 свойства четырех арифметических действий над комплексными числами такие же, как и для вещественных чисел. Поэтому все утверждения о вещественных числах, в которых используются только эти свойства, распространяются и на комплексные числа. В частности, мы можем, как и в § 2, определить детерминант квадратной матрицы, элементы которой—комплексные числа. Это будет комплексное число, но относительно него будут справедливы все предложения, доказанные нами в § 2.

При исследовании систем линейных уравнений в §§ 3, 4 и 5 мы пользовались только теми свойствами сложения, вычитания, умножения и деления, которые совпадают для вещественных и для комплексных чисел. Поэтому все доказанное нами справедливо и для систем линейных уравнений с комплексными коэффициентами и свободными членами.

На матрицы с комплексными элементами распространяется все сказанное о матрицах в §§ 1 и 6. Определение и свойства сложения и умножения матриц, включая построение обратной матрицы, формулируются и доказываются одинаково для вещественных и для комплексных чисел.

Собственно, в предыдущих параграфах этой главы мы нигде не уточняли, с какими числами имеем дело. Это было и не нужно, так как все сказанное в одинаковой мере относится к обоим случаям. Следует только подчеркнуть, что, рассматривая линейные комбинации комплексных столбцов, мы можем брать в качестве коэффициентов любые комплексные числа.

Остановимся на некоторых особенностях комплексных матриц. Пусть z_{kj}—элементы матрицы Z. Если $z_{kj}=a_{kj}+b_{kj}i$, то матрица Z может быть представлена в виде

$$Z=A+Bi,$$

где матрицы A и B составлены из элементов a_{kj} и b_{kj} соответственно. A называется *вещественной частью*, а B—

мнимой частью матрицы Z. Две комплексные матрицы Z и Z_1 равны тогда и только тогда, когда $A=A_1$ и $B=B_1$. Таким образом, одно равенство, связывающее комплексные матрицы, равносильно двум равенствам между вещественными матрицами. Здесь полное сходство с равенством комплексных чисел.

Матрицу, составленную из элементов $\bar{z}_{kj}$, мы будем называть *комплексно сопряженной* матрице Z и обозначать $\bar{Z}$. Из сказанного в предыдущем пункте видно, что для любых матриц

$$\overline{Z_1+Z_2}=\bar{Z}_1+\bar{Z}_2, \tag{5}$$

$$\overline{Z_1Z_2}=\bar{Z}_1\bar{Z}_2, \tag{6}$$

$$\overline{\det Z}=\det\bar{Z} \tag{7}$$

(если только сумма, произведение и детерминант в одной из частей равенства определены).

При доказательстве последнего соотношения можно воспользоваться разложением (6) § 2. Мы получим

$$\overline{\det Z}=\overline{\sum_{(j_1\ldots j_n)}(-1)^{N(j_1,\ldots,j_n)}z_{1j_1}\ldots z_{nj_n}}=$$

$$=\sum_{(j_1\ldots j_n)}(-1)^{N(j_1,\ldots,j_n)}\bar{z}_{1j_1}\ldots\bar{z}_{nj_n}=\det\bar{Z}.$$

Равенства (5) и (6) доказываются аналогично.

Матрица вещественна (т. е. состоит из вещественных чисел) в том и только в том случае, когда она равна своей комплексно сопряженной, поскольку тогда каждый ее элемент равен своему комплексно сопряженному.

ГЛАВА VI

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Основные понятия

1. Определение линейного пространства. В этой книге нам уже встречались множества, в которых были определены операции сложения и умножения на число. В гл. I мы рассматривали множество векторов (направленных отрезков). Двум векторам по правилу параллелограмма мы сопоставили вектор, называемый их суммой. Вектору **a** и числу α сопоставлен вектор, названный произведением **a** на α.

В множестве матриц одних и тех же размеров мы ввели операцию сложения, назвав суммой матрицу, элементы которой равны суммам соответствующих элементов слагаемых. Была для матриц введена и операция умножения на число: произведение матрицы на число есть матрица, элементы которой — произведения элементов исходной матрицы на это число. При этом, если элементы матрицы — комплексные числа, то имеет смысл умножение и на комплексное число. Свойства этих операций, выраженные предложением 1 § 1 гл. V, совпадают со свойствами тех же операций с векторами, сформулированными в предложении 1 § 1 гл. I.

В каждом множестве операции определяются по-своему, но имеют одни и те же свойства: коммутативность и ассоциативность сложения, дистрибутивность умножения на число по отношению к сложению чисел и т. д. При вычислениях с векторами или с матрицами мы не вспоминаем определения операций, а используем только эти свойства. Ниже мы приведем и другие примеры множеств, в которых определены операции, обладающие теми же свойствами.

Естественно возникает необходимость исследовать множество, состоящее из элементов какой угодно природы, в котором определены операции сложения двух элементов и умножения элемента на число. Эти операции могут быть определены каким угодно способом, лишь бы они обладали определенным набором свойств.

Определение. Множество $\mathscr{L}$ мы назовем *линейным пространством*, а его элементы—*векторами*, если:

1) Задан закон (*операция сложения*), по которому любым двум элементам x и y из $\mathscr{L}$ сопоставляется элемент, называемый их *суммой* и обозначаемый $x+y$.

2) Задан закон (*операция умножения на число*), по которому элементу x из $\mathscr{L}$ и числу α сопоставляется элемент из $\mathscr{L}$, называемый *произведением* x на α и обозначаемый αx.

3) Для любых элементов x, y и z из $\mathscr{L}$ для любых чисел α и β выполнены следующие требования (или аксиомы):

1°. $x+y=y+x$.

2°. $(x+y)+z=x+(y+z)$.

3°. Существует элемент o такой, что для каждого x из $\mathscr{L}$ выполнено равенство $x+o=x$.

4°. Для каждого x существует элемент $-x$ такой, что $x+(-x)=o$.

5°. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

6°. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

7°. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.

8°. Произведение любого элемента x на число 1 равно x, т. е. $1x=x$.

Если в п. 2) мы ограничиваемся вещественными числами, то $\mathscr{L}$ называется *вещественным линейным пространством*; если же определено умножение на любое комплексное число, то линейное пространство $\mathscr{L}$ называется *комплексным*.

Вектор $-x$ называется *противоположным* вектору x. Вектор o называется *нулевым вектором* или *нулем*.

Мы будем обозначать векторы строчными латинскими буквами, а числа, как правило, греческими.

Приведем еще несколько примеров линейных пространств.

Пример 1. Рассмотрим множество всех функций от одной независимой переменной ξ, определенных и непрерывных для $0\leqslant\xi\leqslant 1$. Любым двум функциям $f(\xi)$ и $g(\xi)$ из этого множества можно сопоставить их сумму в обычном смысле слова $f(\xi)+g(\xi)$, которая будет также определена и непрерывна для $0\leqslant\xi\leqslant 1$ и, следовательно, будет принадлежать рассматриваемому множеству. Числу α и функции $f(\xi)$ сопоставляется функция $\alpha f(\xi)$

(обычное произведение функции на число), которая определена и непрерывна для $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, если этим свойством обладает $f(\xi)$. Все восемь аксиом выполнены. Роль нуля играет функция, тождественно равная нулю.

Пример 2. Пусть $\mathscr{P}$ — множество всех многочленов от одной переменной, степень которых не выше заданного числа n. Сумма двух многочленов из $\mathscr{P}$ есть также многочлен степени не выше n, и произведение многочлена из $\mathscr{P}$ на число принадлежит $\mathscr{P}$. Легко проверить, что аксиомы линейного пространства выполнены и в этом случае. Роль нуля играет многочлен, все коэффициенты которого равны нулю $\mathscr{P}$ будет вещественным или комплексным линейным пространством, смотря по тому, рассматриваем мы многочлены с вещественными или с комплексными коэффициентами.

Пример 3. Множество комплексных чисел по отношению к обычным операциям сложения и умножения на комплексное число представляет собой комплексное линейное пространство. Аналогично, множество вещественных чисел по отношению к обычным операциям будет вещественным линейным пространством.

Пример 4. Множество комплексных чисел по отношению к обычным операциям сложения и умножения на вещественное число представляет собой вещественное линейное пространство.

Пример 5. Существует линейное пространство, состоящее из одного элемента. Такое пространство называется *нулевым*. Единственный элемент по необходимости оказывается нулем и самому себе противоположным. Операции задаются равенствами $o+o=o$ и $\alpha o=o$.

2. Простейшие следствия. Из аксиом, определяющих линейное пространство, вытекает, что может быть только один нулевой вектор и для каждого вектора только один противоположный. Действительно, допустим, что существуют два вектора o_1 и o_2, удовлетворяющих аксиоме 3°. Тогда их сумма должна быть равна каждому из них: $o_1+o_2=o_1=o_2$. Аналогично, если какой-нибудь вектор x имеет два противоположных $-x_1$ и $-x_2$, то сумма $(-x_1)+x+(-x_2)$ должна быть равна и $-x_1$ и $-x_2$.

Равенство $o+o=o$ означает, что противоположным для нулевого вектора является он сам, а из равенства $(-x)+(x)=o$ следует, что противоположным вектором для $-x$ является вектор x.

Сумму векторов y и $-x$ мы будем обозначать $y-x$ и называть *разностью* векторов y и x.

Легко видеть, что для любого вектора x выполнено равенство $0x=o$. В самом деле,

$$0x=0x+x-x=(1+0)x-x=o.$$

Отсюда вытекает, что $(-1)x=-x$ для любого x. Действительно,

$$(-1)x+x=(1-1)x=0x=o.$$

Отметим также, что произведение любого числа на нулевой вектор равно нулевому вектору, поскольку

$$\alpha o=\alpha(x-x)=\alpha x-\alpha x=o.$$

Если $\alpha x=o$, то либо $\alpha=0$, либо $x=o$. В самом деле, пусть $\alpha\neq 0$. Тогда мы можем умножить данное равенство на α^{-1} и получить $1x=o$.

Выражение вида $\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n$, как и в предыдущих главах, мы будем называть *линейной комбинацией* векторов $x_1,\ldots,x_n$ с коэффициентами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.

Из всего вышесказанного следует, что действия с векторами в линейном пространстве производятся по тем же правилам, что и действия с векторами (направленными отрезками) обычного геометрического пространства.

3. Линейная зависимость. По аналогии с соответствующими определениями для векторов и для столбцов, введенными в гл. I и V, мы можем определить линейно зависимую и линейно независимую систему векторов в линейном пространстве. Напомним, что линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю.

Определение. Система векторов называется *линейно зависимой*, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация этих векторов. В противном случае, т. е. когда только тривиальная линейная комбинация векторов равна нулю, система векторов называется *линейно независимой*.

О линейно зависимых и линейно независимых системах векторов справедливы те же предложения, что и о таких же системах столбцов. Мы приведем здесь только формулировки, так как доказательства не отличаются от доказательств предложений о столбцах (см. предложения 2—5 § 1 гл. V).

Предложение 1. *Система из $k>1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.*

Предложение 2. *Если в систему входит нулевой вектор, то она линейно зависима.*

Предложение 3. *Если некоторые из векторов, входящих в систему, сами по себе образуют линейно зависимую подсистему, то вся система линейно зависима.*

Предложение 4. *Каждая подсистема линейно независимой системы векторов сама линейно независима.*

4. Базис. Следующее определение будет играть важную роль в дальнейшем.

Определене. *Базисом* в пространстве $\mathscr{L}$ мы назовем упорядоченную конечную систему векторов, если: а) она линейно независима и б) каждый вектор из $\mathscr{L}$ есть линейная комбинация векторов этой системы.

В определении сказано, что базис—упорядоченная система векторов. Это означает, что каждому вектору в базисе приписан определенный номер. Из одной и той же системы векторов можно получить разные базисы, по-разному нумеруя векторы.

Коэффициенты линейной комбинации, о которой идет речь в определении, называются *компонентами* или *координатами* вектора по базису.

Векторы базиса $e_1, \ldots, e_n$ мы будем записывать в строку: $e = \| e_1 \ldots e_n \|$, а компоненты $\xi^1, \ldots, \xi^n$ вектора x по базису e—в столбец:

$$\xi = \left\| \begin{matrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \end{matrix} \right\|,$$

который назовем *координатным столбцом* вектора.

Теперь разложение вектора по базису можно записать в любом из следующих видов [1]:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i = \| e_1 \ldots e_n \| \cdot \left\| \begin{matrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \end{matrix} \right\| = e\xi.$$

Предложение 5. *Если задан базис, то компоненты вектора определяются однозначно.*

В самом деле, в противном случае мы имели бы два равенства $x = \sum \xi^i e_i$ и $x = \sum \xi_1^i e_i$, из которых вытекало бы $\sum (\xi^i - \xi_1^i) e_i = o$. Поскольку система векторов $e_1, \ldots, e_n$ линейно независима, все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, и, следовательно, $\xi^i = \xi_1^i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

---

[1]) Элементы строки e—векторы, а не числа. Мы можем распространить на такие строки определения операций с матрицами.

П р е д л о ж е н и е 6. *Координатный столбец суммы векторов равен сумме их координатных столбцов. Координатный столбец произведения вектора на число равен произведению координатного столбца данного вектора на это число.*

Для доказательства достаточно выписать следующие цепочки равенств:

$$x+y=e\xi+e\eta=e(\xi+\eta)$$

и

$$\alpha x=\alpha e\xi=e(\alpha\xi),$$

где ξ и η — координатные столбцы векторов x и y. Здесь используются свойства умножения матриц — предложения 3 и 4 § 6 гл. V.

Из предложения 6 легко следует, что координатный столбец линейной комбинации векторов есть линейная комбинация их координатных столбцов с теми же коэффициентами. Отсюда вытекает

П р е д л о ж е н и е 7. *Векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы их координатные столбцы.*

Доказательство очевидно: равенство нулю нетривиальной линейной комбинации векторов влечет за собой обращение в нуль линейной комбинации их координатных столбцов с теми же коэффициентами. Так же доказывается и обратное предложение

Т е о р е м а 1. *Если в линейном пространстве существует базис из n векторов, то любой другой базис в этом пространстве состоит из того же числа векторов.*

Действительно, пусть в пространстве существуют два базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$, причем $m>n$. Каждый из векторов базиса $f_1, \ldots, f_m$ мы расположим по базису $e_1, \ldots, e_n$ и составим матрицу, столбцами которой будут полученные координатные столбцы. Каждый столбец имеет высоту n, а всего их m Поэтому матрица имеет размеры $n\times m$, и ранг ее не превосходит n. В силу теоремы 2 § 4 гл. V столбцы матрицы линейно зависимы, а следовательно зависимы и векторы $f_1, \ldots, f_m$. Таким образом, наше предположение приводит к противоречию.

Теперь мы можем ввести следующее

О п р е д е л е н и е. Линейное пространство, в котором существует базис из n векторов, назовем *n-мерным*, а число n — *размерностью* пространства.

В нулевом пространстве нет базиса, так как система, состоящая из одного нулевого вектора, является линейно зависимой. *Размерность нулевого пространства* по определению считаем *равной нулю.*

Может случиться, что, каково бы ни было натуральное число m, в пространстве $\mathscr{L}$ найдется m линейно независимых векторов. Такое пространство называется *бесконечномерным.* Базис в нем не существует.

Примеры. 1) Множество векторов на плоскости является двумерным линейным пространством, а множество всех векторов пространства, изучаемого в элементарной геометрии, представляет собой трехмерное линейное пространство (см. предложения 7 и 8 § 1 гл. I).

2) Линейное пространство столбцов высоты n имеет размерность n. Действительно, столбцы единичной матрицы порядка n линейно независимы (см. пример на с. 140) и любой столбец высоты n является их линейной комбинацией (предложение 7 § 1 гл. V). Линейное пространство столбцов высоты n называют *арифметическим n-мерным пространством.*

3) Линейное пространство функций от одного аргумента, определенных и непрерывных на отрезке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, является бесконечномерным. Чтобы это проверить, достаточно доказать, что при любом m в этом пространстве существуют m линейно независимых векторов. Зададимся произвольным числом m. Векторы нашего пространства—функции $\xi^0 \equiv 1$, ξ, ξ^2, $\ldots$, ξ^{m-1}—линейно независимы. Действительно, то, что линейная комбинация этих векторов с коэффициентами $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$ равна нулевому вектору, означает, что многочлен

$$\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \ldots + \alpha_{m-1}\xi^{m-1}$$

тождественно равен нулю. А это возможно только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю.

В линейной алгебре изучаются конечномерные линейные пространства. Далее всюду, кроме некоторых примеров, мы будем предполагать пространство конечномерным.

В пространстве конечной размерности существует бесконечно много различных базисов. Это видно из следующих предложений, которыми мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Предложение 8. *В n-мерном пространстве каждая упорядоченная система из n линейно независимых векторов является базисом.*

В самом деле, если дана такая система векторов, то каждый вектор пространства раскладывается по этим векторам, так как иначе в пространстве нашлось бы $n+1$ линейно независимых векторов.

Предложение 9. *В n-мерном пространстве каждую упорядоченную линейно независимую систему из $k<n$ векторов можно дополнить до базиса.*

Это вытекает из того, что к любой такой системе можно присоединить еще один вектор, который через нее линейно не выражается. (Если бы это было не так, то система сама была бы базисом.) Теперь мы имеем $k+1$ линейно независимых векторов. Если $k+1<n$, то повторяем рассуждение. Мы действуем так до тех пор, пока не получим n линейно независимых векторов, в число которых входят данные k векторов.

В частности, до базиса можно дополнить любой ненулевой вектор.

5. Замена базиса. Если в n-мерном пространстве даны два базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$, то мы можем разложить каждый вектор базиса $e'_1, \ldots, e'_n$ по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_i^j e_j \quad (i=1, \ldots, n). \tag{1}$$

Компоненты σ_i^j можно записать в виде квадратной матрицы порядка n:

$$S = \begin{Vmatrix} \sigma_1^1 \ldots \sigma_n^1 \\ \sigma_1^2 \ldots \sigma_n^2 \\ \ldots\ldots \\ \sigma_1^n \ldots \sigma_n^n \end{Vmatrix}.$$

Столбцы матрицы—это координатные столбцы векторов $e'_1, \ldots, e'_n$ по базису $\boldsymbol{e}$. Поэтому столбцы матрицы S линейно независимы и $\det S \neq 0$.

Определение. Матрицу, j-й столбец которой есть координатный столбец вектора e'_j по базису $\boldsymbol{e}$, мы назовем *матрицей перехода* от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$.

Равенство (1) можно переписать в матричных обозначениях:

$$\| e'_1 \ldots e'_n \| = \| e_1 \ldots e_n \| S, \tag{2}$$

или

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e} S.$$

Это легко проверить, перемножая матрицы. Умножая обе части равенства (2) на матрицу S^{-1} справа, мы получим

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' S^{-1}.$$

Отсюда следует, что S^{-1} будет матрицей перехода от e' к e.

Предложение 10. *Пусть задан базис e. Каждая матрица S с детерминантом, не равным нулю, служит матрицей перехода от e к некоторому базису e'.*

Действительно, если $\det S \neq 0$, столбцы матрицы S линейно независимы. Они служат координатными столбцами n линейно независимых векторов, которые и составляют нужный нам базис e'.

Вычислим, как связаны между собой компоненты одного и того же вектора в двух базисах e и e'. Рассмотрим вектор x и обозначим через ξ и ξ' его координатные столбцы в базисах e и e'. Это означает, в частности, что $x = e'\xi'$. Подставим сюда выражение e' через e и матрицу перехода S от базиса e к базису e'. Мы получим $x = eS\xi'$. Но, с другой стороны, $x = e\xi$. Сравнивая два последних выражения, в силу единственности разложения вектора по базису имеем

$$\xi = S\xi'. \tag{3}$$

Подробнее эта формула может быть переписана в виде

$$\left\| \begin{matrix} \xi^1 \\ \dots \\ \xi^n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sigma_1^1 \dots \sigma_n^1 \\ \dots\dots \\ \sigma_1^n \dots \sigma_n^n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi'^1 \\ \dots \\ \xi'^n \end{matrix} \right\|$$

или, если выполнить умножение матриц,

$$\xi^i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^i \xi'^j \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{4}$$

Этот результат мы уже имели для трехмерного пространства (формула (2) § 4 гл. I).

§ 2. Линейные подпространства

1. Определение и примеры. В обычном геометрическом пространстве сумма векторов, лежащих в некоторой плоскости, также лежит в этой плоскости, и умножение вектора на число не выводит его из плоскости, в которой он лежит. Теми же свойствами обладают векторы, лежащие на прямой линии. Для линейных пространств обобщением плоскости и прямой служат линейные подпространства.

Определение. Непустое множество $\mathscr{L}'$ векторов в линейном пространстве $\mathscr{L}$ называется *линейным под-*

пространством, если: а) сумма любых векторов из $\mathscr{L}'$ принадлежит $\mathscr{L}'$ и б) произведение каждого вектора из $\mathscr{L}'$ на любое число также принадлежит $\mathscr{L}'$.

Читатель без труда докажет, что в силу этого определения любая линейная комбинация векторов из $\mathscr{L}'$ принадлежит $\mathscr{L}'$. В частности, нулевой вектор, как произведение $0x$, должен лежать в $\mathscr{L}'$. Точно так же для каждого вектора x из $\mathscr{L}'$ противоположный вектор, равный $-1x$, лежит в $\mathscr{L}'$.

Сложение и умножение на число, определенные в пространстве $\mathscr{L}$, будут такими же операциями в его подпространстве $\mathscr{L}'$. Справедливость аксиом линейного пространства для $\mathscr{L}'$ прямо вытекает из их справедливости в $\mathscr{L}$. Таким образом, каждое линейное подпространство само является линейным пространством.

Пример 1. Пусть дано некоторое множество $\mathscr{P}$ векторов в линейном пространстве $\mathscr{L}$. Обозначим через $\mathscr{L}'$ совокупность всевозможных линейных комбинаций, каждая из которых составлена из конечного числа векторов, принадлежащих $\mathscr{P}$. Множество $\mathscr{L}'$ является подпространством в $\mathscr{L}$. Действительно, если x и y принадлежат $\mathscr{L}'$, то

$$x=\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i, \qquad y=\sum_{j=1}^{m} \mu_j q_j,$$

где все p_i и q_j принадлажат $\mathscr{P}$. Мы видим, что $x+y=$ $=\sum\lambda_i p_i+\sum\mu_j q_j$, т. е. сумма снова является линейной комбинацией конечного числа векторов из $\mathscr{P}$. Точно так же для вектора $x=\sum\lambda_i p_i$ имеем $\alpha x=\sum(\alpha\lambda_i)p_i$.

Так построенное подпространство $\mathscr{L}'$ называется *линейной оболочкой* множества $\mathscr{P}$.

Пусть $p_1, \ldots, p_m$ — линейно независимая система векторов из $\mathscr{P}$, обладающая тем свойством, что каждый вектор из $\mathscr{P}$ есть линейная комбинация этих векторов. (Если пространство конечномерно, то очевидно, что в каждом множестве, содержащем ненулевые векторы, такая система найдется.) Векторы $p_1, \ldots, p_m$ образуют базис в линейной оболочке множества $\mathscr{P}$. В самом деле, каждую линейную комбинацию векторов из $\mathscr{P}$ множно представить как линейную комбинацию векторов $p_1, \ldots, p_m$, так как каждый вектор из $\mathscr{P}$ можно разложить по $p_1, \ldots, p_m$ и подставить эти разложения в рассматриваемую линейную комбинацию.

В частности, если $\mathscr{P}$ — конечное множество векторов, мы имеем отсюда

П р е д л о ж е н и е 1. *Размерность линейной оболочки конечного множества векторов не превосходит числа этих векторов.*

П р и м е р 2. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений с n неизвестными. Совокупность всех решений этой системы представляет собой подпространство в линейном пространстве столбцов высоты n.

Для доказательства достаточно сослаться на свойства решений однородной системы (предложение 3 § 5 гл. V).

Каждая фундаментальная система решений рассматриваемой системы уравнений является базисом в этом подпространстве.

П р и м е р 3. В каждом линейном пространстве множество, состоящее из одного нулевого вектора, является линейным подпространством. Это подпространство называется *нулевым.*

П р и м е р 4. Множество, состоящее из всех векторов пространства $\mathscr{L}$, является подпространством, т. е. все пространство $\mathscr{L}$ можно считать и подпространством.

Предоставим читателю проверить определение в двух последних примерах.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть $\mathscr{L}'$—подпространство n-мерного линейного пространства $\mathscr{L}_n$. Тогда $\mathscr{L}'$ имеет размерность $k \leqslant n$. Если $k = n$, то $\mathscr{L}'$ совпадает с $\mathscr{L}_n$.*

Доказательство нужно только для того случая, когда $\mathscr{L}'$—ненулевое подпространство. В этом случае мы можем, исходя из любого ненулевого вектора, построить базис в $\mathscr{L}'$ так, как это сделано в доказательстве предложения 9 § 1. Процесс построения должен закончиться не дальше, чем на n-м векторе, так как каждая линейно независимая система в $\mathscr{L}'$ есть такая же система в $\mathscr{L}_n$ и, следовательно, не может содержать более n векторов.

Пусть базис в $\mathscr{L}'$ содержит n векторов. Тогда любой вектор из $\mathscr{L}_n$ раскладывается по этому базису и, таким образом, принадлежит $\mathscr{L}'$. Мы видим, что подпространство $\mathscr{L}'$ совпадает с $\mathscr{L}_n$.

Поскольку $\mathscr{L}'$ есть линейная оболочка своего базиса, из предложения 2 вытекает, что каждое подпространство конечномерного пространства есть линейная оболочка конечного множества векторов. Это относится и к нулевому подпространству, так как оно—линейная оболочка нулевого вектора.

Сформулируем еще следующее достаточно очевидное

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть $\mathscr{L}'$—подпространство в n-мерном пространстве $\mathscr{L}$. Если базис $e_1, \ldots, e_k$ в $\mathscr{L}'$*

дополнить до базиса $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ в $\mathscr{L}$, то в базисе $e_1, \ldots, e_n$ все векторы из $\mathscr{L}'$ и только такие векторы будут иметь компоненты $\xi^{k+1}=0, \ldots, \xi^n=0$.

Действительно, если для вектора x имеем $\xi^{k+1}=0, \ldots$ $\ldots, \xi^n=0$, то $x=\xi^1e_1+\ldots+\xi^ke_k$ и, следовательно, лежит в $\mathscr{L}'$. Обратно, вектор x из $\mathscr{L}'$ раскладывается в линейную комбинацию $x=\xi^1e_1+\ldots+\xi^ke_k$. Это же разложение будет разложением по базису $e_1, \ldots, e_n$, если положить $\xi^{k+1}=0, \ldots, \xi^n=0$.

Заметим, что равенства $\xi^{k+1}=0, \ldots, \xi^n=0$ можно рассматривать как систему линейных уравнений, связывающую координаты вектора x. Это—система ранга $n-k$, и множество ее решений—подпространство $\mathscr{L}'$. Нетрудно показать, что $\mathscr{L}'$ и в любом базисе определяется однородной системой уравнений ранга $n-k$. Действительно, при изменении базиса старые компоненты вектора выразятся через новые по формулам (4) § 1 и в новом базисе система уравнений примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{k+1}\xi'^i=0, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^n\xi'^i=0.$$

Ранг этой системы равен также $n-k$, поскольку строки матрицы перехода линейно независимы. Итак, мы доказали

Предложение 4. *Пусть в n-мерном пространстве $\mathscr{L}$ выбран базис. Тогда координатные столбцы векторов, принадлежащих k-мерному подпространству $\mathscr{L}'$, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений ранга $n-k$*[1]).

2. Сумма и пересечение подпространств. Рассмотрим два подпространства $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ одного линейного пространства $\mathscr{L}$.

Определение. Будем называть *суммой* подпространств $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ и обозначать $\mathscr{L}'+\mathscr{L}''$ линейную оболочку их объединения $\mathscr{L}' \cup \mathscr{L}''$.

Подробнее определение означает, что вектор x из $\mathscr{L}'+\mathscr{L}''$ (и только такой) представим в виде $x=\sum_i \alpha_i p_i+$ $+\sum_j \beta_j q_j$, где векторы p_i лежат в $\mathscr{L}'$, а векторы q_j—в $\mathscr{L}''$. Обозначая написанные выше суммы через x' и x'', мы видим, что подпространство $\mathscr{L}'+\mathscr{L}''$ состоит из векто-

[1]) При $\mathscr{L}'=\mathscr{L}$ система имеет ранг 0, т. е. не содержит ни одного нетривиального уравнения.

ров, представимых в виде $x=x'+x''$, где x' — вектор из $\mathscr{L}'$, а x'' — из $\mathscr{L}''$.

Пусть размерности подпространств $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ равны k и l. Выберем базис $e_1, \ldots, e_k$ в $\mathscr{L}'$ и базис $f_1, \ldots, f_l$ в $\mathscr{L}''$. Каждый вектор из $\mathscr{L}'+\mathscr{L}''$ раскладывается по векторам $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$. Мы получим базис в $\mathscr{L}'+\mathscr{L}''$, если удалим из этой системы векторов те векторы, которые линейно выражаются через остальные. Сделать это можно, например, так.

Выберем какой-либо базис в пространстве $\mathscr{L}$ и составим матрицу из координатных столбцов всех векторов $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$. Те векторы, координатные столбцы которых содержат базисный минор этой матрицы, составляют базис в $\mathscr{L}'+\mathscr{L}''$ Доказательство не сложно, и мы его предоставим читателю.

Определение. Назовем *пересечением подпространств* $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ и обозначим $\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''$ множество векторов, которые принадлежат одновременно обоим подпространствам

Пересечение $\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''$ есть подпространство.

Действительно, если векторы x и y лежат в $\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''$, то они лежат и в $\mathscr{L}'$ и в $\mathscr{L}''$. Поэтому вектор $x+y$ и при любом α вектор αx также лежат и в $\mathscr{L}'$ и в $\mathscr{L}''$, а следовательно, и в $\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''$.

В конечномерном пространстве $\mathscr{L}$ подпространства $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ задаются системами уравнений. Их пересечение задается системой, получаемой объединением всех уравнений из систем, определяющих $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$. Фундаментальная система решений такой системы уравнений — базис в подпространстве $\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''$.

Теорема 1. *Размерность суммы двух подпространств равна сумме их размерностей минус размерность их пересечения.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ — два подпространства в пространстве $\mathscr{L}$ конечной размерности. Рассмотрим в их сумме $\mathscr{L}'+\mathscr{L}''$ следующую систему векторов Если пересечение $\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''$ — ненулевое пространство, то возьмем базис $e_1, \ldots, e_k$ в $\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''$ и дополним его векторами $f_1, \ldots, f_l$ до базиса в $\mathscr{L}'$ и векторами $g_1, \ldots, g_m$ до базиса в $\mathscr{L}''$. Если же $\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''$ — нулевое пространство, то просто берем объединение базиса в $\mathscr{L}'$ и базиса в $\mathscr{L}''$ Докажем прежде всего, что каждый вектор x в $\mathscr{L}'+\mathscr{L}''$ является линейной комбинацией выбранных нами векторов Это следует из того, что $x=x'+x''$, где x' лежит в $\mathscr{L}'$, а x'' — в $\mathscr{L}''$. Тогда x' разлагается по векторам $f_1, \ldots, f_l, e_1, \ldots, e_k$, а x'' — по векторам $e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_m$.

Теперь покажем, что рассматриваемая система векторов линейно независима. Возьмем какую-нибудь равную нулю линейную комбинацию этих векторов:

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha^i f_i + \sum_{j=1}^{k} \beta^j e_j + \sum_{s=1}^{m} \gamma^s g_s = o. \tag{1}$$

Вектор $x = \sum \gamma^s g_s$ лежит в $\mathscr{L}''$. Но, очевидно, $x = -\sum \alpha^i f_i - \sum \beta^j e_j$, и поэтому x лежит и в $\mathscr{L}'$. Таким образом, вектор x должен находиться в пересечении $\mathscr{L}' \cap \mathscr{L}''$. Отсюда на основании предложения 3 можно заключить, что $\alpha^1 = \ldots = \alpha^l = 0$ и $\gamma^1 = \ldots = \gamma^m = 0$. В равенстве (1) остаются только члены

$$\beta^1 e_1 + \ldots + \beta^k e_k,$$

если $\mathscr{L}' \cap \mathscr{L}'' \neq o$. Но и их коэффициенты равны нулю, так как векторы $e_1, \ldots, e_k$ линейно независимы. Таким образом, линейная комбинация (1) обязательно тривиальная и все векторы линейно независимы. Мы показали, что система векторов $f_1, \ldots, f_l, e_1, \ldots, e_k, g_1, \ldots, g_m$ является базисом в подпространстве $\mathscr{L}' + \mathscr{L}''$.

Теперь закончить доказательство не представляет труда. В самом деле, размерность $\mathscr{L}'$ равна $l+k$, размерность $\mathscr{L}''$ равна $k+m$, размерность $\mathscr{L}' \cap \mathscr{L}''$ есть k, а размерность суммы $\mathscr{L}' + \mathscr{L}''$, как мы показали, равна $k+l+m$.

Из теоремы 1 следует, в частности, что два подпространства, сумма размерностей которых больше n — размерности всего пространства, обязательно имеют ненулевое пересечение. Действительно, размерность их суммы не может превосходить n.

3. Прямая сумма подпространств. Если пересечение подпространств $\mathscr{L}'$ и $\mathscr{L}''$ — нулевое подпространство, то сумма $\mathscr{L}' + \mathscr{L}''$ называется *прямой суммой* и обозначается $\mathscr{L}' \dotplus \mathscr{L}''$ или $\mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}''$.

Размерность прямой суммы равна сумме размерностей слагаемых. Пусть $f_1, \ldots, f_l$ — базис в $\mathscr{L}'$, а $g_1, \ldots, g_m$ — базис в $\mathscr{L}''$. Из доказательства теоремы 1 видно, что система векторов $f_1, \ldots, f_l, g_1, \ldots, g_m$ является базисом в $\mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}''$.

Предложение 5. *Каждый вектор x в прямой сумме $\mathscr{L}' \oplus \mathscr{L}''$ раскладывается в сумму векторов x' из $\mathscr{L}'$ и x'' из $\mathscr{L}''$ единственным образом.*

Действительно, если мы имеем два таких разложения $x=x'+x''$ и $x=y'+y''$, то $x'-y'=y''-x''$. Ясно, что вектор $x'-y'\in\mathscr{L}'$, но он равен $y''-x''$ и, следовательно, принадлежит $\mathscr{L}''$. Таким образом, $x'-y'\in\mathscr{L}'\cap\mathscr{L}''$, откуда $x'=y'$ и $x''=y''$.

В заключение параграфа отметим, что понятия суммы и пересечения подпространств легко могут быть распространены на любое конечное число подпространств.

Сумма нескольких подпространств называется *прямой суммой*, если каждое из них имеет нулевое пересечение с суммой остальных.

§ 3. Линейные отображения

1. Определение. Пусть $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$ — два линейных пространства, оба вещественные или оба комплексные. Под *отображением* $\mathbf{A}$ пространства $\mathscr{L}$ в пространство $\tilde{\mathscr{L}}$ понимается закон, по которому каждому вектору из $\mathscr{L}$ сопоставлен единственный вектор из $\tilde{\mathscr{L}}$. Мы будем писать коротко $\mathbf{A}: \mathscr{L}\to\tilde{\mathscr{L}}$. Образ вектора x обозначается $\mathbf{A}(x)$.

Определение. Отображение $\mathbf{A}: \mathscr{L}\to\tilde{\mathscr{L}}$ называется *линейным*, если для любых векторов x и y из $\mathscr{L}$ и любого числа α выполнены равенства

$$\mathbf{A}(x+y)=\mathbf{A}(x)+\mathbf{A}(y),\quad \mathbf{A}(\alpha x)=\alpha\mathbf{A}(x). \tag{1}$$

Следует подчеркнуть, что знак «$+$» в правой и левой частях первой из формул (1) обозначает две, вообще говоря, различные операции: сложение в пространстве $\tilde{\mathscr{L}}$ и сложение в пространстве $\mathscr{L}$. Аналогичное замечание относится и ко второй формуле.

Из определения немедленно вытекает, что при линейном отображении линейная комбинация векторов переходит в такую же линейную комбинацию их образов.

Линейное отображение мы будем называть линейным *преобразованием*, если пространства $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$ совпадают.

Приведем несколько примеров линейных отображений.

1) Пусть λ — фиксированное число. Сопоставим каждому вектору x пространства $\mathscr{L}$ вектор λx. Легко видеть, что это линейное преобразование.

2) При аффинном преобразовании плоскости двумерное пространство векторов, в ней лежащих, отображается само на себя. При этом сумма векторов переходит в сумму

образов, а результат умножения вектора на число — в произведение его образа на это же число.

3) Выберем в n-мерном вещественном линейном пространстве $\mathscr{L}_n$ какой-нибудь базис. Это сопоставит каждому вектору его координатный столбец и, следовательно, определит линейное отображение рассматриваемого пространства в пространство столбцов высоты n.

Если мы сопоставим каждому вектору его первую компоненту, то получим отображение пространства $\mathscr{L}_n$ в линейное пространство $\mathscr{R}$ вещественных чисел. В силу правил действий с компонентами векторов такое отображение является линейным. Линейные отображения $\mathscr{L}_n \to \mathscr{R}$ называются *линейными функциями* на $\mathscr{L}_n$. Мы будем изучать их ниже, в гл. VIII.

4) Пусть $C^0[-1, 1]$ и $C^0[0, 2]$ — пространства функций, непрерывных соответственно на отрезках $[-1, 1]$ и $[0, 2]$. Сопоставим функции $f(x)$ из $C^0[-1, 1]$ функцию $f(x+1)$ из $C^0[0, 2]$. Так построенное отображение, очевидно, является линейным. Менее тривиальный пример можно получить, сопоставив каждой функции из $C^0[-1, 1]$ ее первообразную $F(x)$, удовлетворяющую условию $F(0)=0$.

5) Рассмотрим n-мерное арифметическое пространство $\mathscr{R}_n$ (пространство столбцов высоты n) и прямоугольную матрицу A размеров $m \times n$. Сопоставим каждому столбцу ξ из $\mathscr{R}_n$ столбец $A\xi$. Он имеет высоту m. Таким образом, будет определено отображение $\mathscr{R}_n$ в $\mathscr{R}_m$. В силу свойств умножения матриц это отображение — линейно.

6) Отображение, сопоставляющее каждому вектору нулевой, является линейным. Оно называется *нулевым отображением*.

В дальнейшем в этом параграфе буквы n и m будут обозначать размерности пространств $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$ соответственно.

Докажем следующее общее свойство линейных отображений.

Предложение 1. *При линейном отображении* A: $\mathscr{L}_n \to \tilde{\mathscr{L}}_m$ *линейное подпространство* $\mathscr{L}'$ *из* $\mathscr{L}_n$ *переходит в линейное подпространство* $\mathsf{A}(\mathscr{L}')$ *из* $\tilde{\mathscr{L}}_m$, *причем размерность* $\mathsf{A}(\mathscr{L}')$ *не превосходит размерности* $\mathscr{L}'$.

В самом деле, пусть $e_1, \ldots, e_k$ — базис в $\mathscr{L}'$. Для любого вектора x из $\mathscr{L}'$ имеем $x = \xi^1 e_1 + \ldots + \xi^k e_k$, и, следовательно,

$$\mathsf{A}(x) = \mathsf{A}(\xi^1 e_1 + \ldots + \xi^k e_k) = \xi^1 \mathsf{A}(e_1) + \ldots + \xi^k \mathsf{A}(e_k). \tag{2}$$

Это означает, что произвольный элемент множества $\mathsf{A}(\mathscr{L}')$ образов всех векторов из $\mathscr{L}'$ есть линейная комбинация векторов $\mathsf{A}(e_1), \ldots, \mathsf{A}(e_k)$. Наоборот, каждая такая линейная комбинация, очевидно, является образом вектора из $\mathscr{L}'$. Итак, множество $\mathsf{A}(\mathscr{L}')$ совпадает с линейной оболочкой векторов $\mathsf{A}(e_1), \ldots, \mathsf{A}(e_k)$ и, следовательно, есть подпространство. Размерность этого подпространства не превосходит k в силу предложения 1 § 2.

Необходимо отметить частный случай доказанного предложения: множество образов всевозможных векторов из $\mathscr{L}_n$ является подпространством в $\tilde{\mathscr{L}}_m$.

Мы обозначим это подпространство $\mathsf{A}(\mathscr{L}_n)$ и будем называть *множеством значений* отображения.

Определение. Размерность множества значений отображения A называется *рангом* этого отображения.

Если ранг A равен m, т. е. $\mathsf{A}(\mathscr{L}_n)$ совпадает с $\tilde{\mathscr{L}}_m$, то каждый вектор из $\tilde{\mathscr{L}}_m$ является образом некоторого вектора из $\mathscr{L}_n$. Отображение, обладающее этим свойством, называется *наложением* или *сюръективным* отображением.

Предложение 2. *Множество векторов из $\mathscr{L}_n$, переходящих в нулевой вектор при отображении* A, *является линейным подпространством в $\mathscr{L}_n$.*

Это очевидно: если два вектора переходят в нулевой вектор, то и их сумма переходит в нулевой вектор. Если $\mathsf{A}(x) = o$, то $\mathsf{A}(\alpha x) = \alpha o = o$.

Определение. Подпространство векторов, отображающихся в нулевой вектор, называется *ядром* отображения A.

Ядро отображения не может быть пустым множеством: оно во всяком случае содержит нулевой вектор. Действительно, $\mathsf{A}(o) = \mathsf{A}(0x) = 0\mathsf{A}(x) = o$. Если размерность ядра отлична от нуля и ядро содержит хоть один ненулевой вектор, то в $\tilde{\mathscr{L}}_m$ существуют векторы, имеющие не один прообраз, а по меньшей мере два (таким является, например, нулевой вектор из $\tilde{\mathscr{L}}_m$). Верно и обратное утверждение: если существует вектор $\tilde{x}$, который имеет два различных прообраза, т. е. $\mathsf{A}(x) = \mathsf{A}(y) = \tilde{x}$, то ядро A содержит ненулевой вектор. Действительно, в этом случае $x - y \neq o$ и $\mathsf{A}(x - y) = o$.

Отображение, при котором разные векторы имеют различные образы, называется *вложением* или *инъективным* отображением. Итак, мы получили

П р е д л о ж е н и е 3. *Отображение является вложением тогда и только тогда, когда его ядро — нулевое подпространство.*

2. Координатная запись линейных отображений. Рассмотрим линейные пространства $\mathscr{L}_n$ и $\tilde{\mathscr{L}}_m$ размерностей n и m и отображение A: $\mathscr{L}_n \to \tilde{\mathscr{L}}_m$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в пространстве $\mathscr{L}_n$. Тогда образ произвольного вектора $x = \xi^1 e_1 + \ldots + \xi^n e_n$ может быть представлен в виде

$$\mathsf{A}(x) = \xi^1 \mathsf{A}(e_1) + \ldots + \xi^n \mathsf{A}(e_n). \tag{3}$$

Значит, $\mathsf{A}(x)$ может быть найден по компонентам x, если известны n векторов $\mathsf{A}(e_1), \ldots, \mathsf{A}(e_n)$ в $\tilde{\mathscr{L}}_m$.

Выберем базис также и в пространстве $\tilde{\mathscr{L}}_m$. Пусть это $f_1, \ldots, f_m$. Каждый из векторов $\mathsf{A}(e_i)$ мы можем разложить по этому базису:

$$\mathsf{A}(e_i) = \sum_{p=1}^{m} \alpha_i^p f_p \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Если компоненты $\mathsf{A}(x)$ по базису f мы обозначим $\eta^1, \ldots, \eta^m$, то равенство (3) может быть переписано так:

$$\sum_{p=1}^{m} \eta^p f_p = \sum_{i,\, p} \xi^i \alpha_i^p f_p.$$

Отсюда, в силу единственности разложения по базису,

$$\eta^p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p \xi^i \tag{4}$$

для любых $p = 1, \ldots, m$.

Если мы составим матрицу A из чисел α_i^p, то равенства (4) могут быть записаны в матричной форме:

$$\eta = A\xi \tag{5}$$

или, подробнее,

$$\left\| \begin{matrix} \eta^1 \\ \ldots \\ \eta^m \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \alpha_1^m & \ldots & \alpha_n^m \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \end{matrix} \right\|.$$

Здесь координатный столбец образа (в базисе f) выражен как произведение матрицы размеров $m \times n$ на координатный столбец прообраза (в базисе e). Это полезно сравнить с примером 5) предыдущего пункта.

О п р е д е л е н и е. *Матрицей линейного отображения* A: $\mathscr{L}_n \to \tilde{\mathscr{L}}_m$ в паре базисов e и f называется матрица, столбцы которой (в их естественном порядке) — координатные столбцы векторов $\mathbf{A}(e_1), \ldots, \mathbf{A}(e_n)$ по базису f.

Матрица A, которую мы построили выше из элементов α_i^p, как раз является матрицей отображения $\mathbf{A}$ в рассматриваемой паре базисов.

Матрица линейного отображения в следующем смысле однозначно определена: если для любого вектора $x=e\xi$ координатный столбец образа $\mathbf{A}(x)$ в базисе f есть $\eta=B\xi$, то столбцы матрицы B — координатные столбцы векторов $\mathbf{A}(e_i)$ и матрица B совпадает с матрицей A.

Это утверждение нетрудно проверить. Умножим матрицу B на координатный столбец вектора e_i, т. е. на i-й столбец единичной матрицы порядка n. Очевидно, что произведение равно i-му столбцу B, и это есть координатный столбец $\mathbf{A}(e_i)$.

Пример 5) показывает, что при выбранных базисах e и f каждая матрица размеров $m \times n$ служит матрицей некоторого линейного отображения $\mathscr{L}_n \to \tilde{\mathscr{L}}_m$.

Итак мы видим, что выбор базисов в пространствах $\mathscr{L}_n$ и $\tilde{\mathscr{L}}_m$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями $\mathscr{L}_n$ в $\tilde{\mathscr{L}}_m$ и матрицами размеров $m \times n$.

Предложение 4. *Ранг матрицы линейного отображения равен рангу этого отображения.*

Доказательство. Пусть $j_1, \ldots, j_r$ — номера столбцов, в которых расположен базисный минор матрицы A линейного отображения $\mathbf{A}$ Это значит, что векторы $\mathbf{A}(e_{j_1}), \ldots, \mathbf{A}(e_{j_r})$ линейно независимы и каждый вектор $\mathbf{A}(e_i)$ $(i=1, \ldots, n)$ есть их линейная комбинация. Следовательно, мы можем выразить образ любого вектора $\mathbf{A}(x)$ только через $\mathbf{A}(e_{j_1}), \ldots, \mathbf{A}(e_{j_r})$ Таким образом, эти векторы образуют базис в множестве значений отображения $\mathbf{A}$ и их число равно размерности $\mathbf{A}(\mathscr{L}_n)$, т. е. рангу отображения. Предложение доказано.

Из предложения 4 следует, что ранг матрицы линейного отображения один и тот же, какую бы пару базисов мы ни выбрали.

Воспользуемся координатной записью линейного отображения для доказательства следующего предложения.

Предложение 5 *Сумма ранга отображения и размерности его ядра равна размерности отображаемого пространства.*

Доказательство. Согласно формуле (5) ядро отображения определяется однородной системой линейных уравнений $A\xi=o$ с n неизвестными. Как видно из предложения 4, ранг матрицы этой системы равен рангу отображения r. Пусть размерность ядра равна d. Из свойства множества решений однородной системы уравнений тогда вытекает, что $d=n-r$. Предложение доказано.

В частности, равенство $r=n$ необходимо и достаточно для того, чтобы отображение имело нулевое ядро, т. е. было вложением.

Напомним, что отображение называется *взаимно однозначным*, если каждый вектор $\tilde{x}$ из $\tilde{\mathscr{L}}_m$ является образом одного и только одного вектора x из $\mathscr{L}_n$. Это означает, что взаимно однозначное отображение является одновременно и вложением и наложением. Для вложения $r=n$, а для наложения $r=m$. Итак, имеет место

Предложение 6. *Отображение* $\mathbf{A}$: $\mathscr{L}_n \to \tilde{\mathscr{L}}_m$ *взаимно однозначно тогда и только тогда, когда размерности пространств совпадают и равны рангу отображения.*

Это предложение легко получить и из исследования системы линейных уравнений (4): взаимная однозначность отображения означает, что эта система имеет единственное решение ξ при любом столбце свободных членов η.

3. Изоморфизм линейных пространств. Дадим следующее

Определение. Взаимно однозначные линейные отображения линейных пространств называются *изоморфизмами*. Если существует изоморфизм $\mathscr{L}$ на $\tilde{\mathscr{L}}$, то пространства $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$ называются *изоморфными*.

Из предложения 6 следует, что для того чтобы два пространства были изоморфны, необходимо, чтобы их размерности совпадали. Оказывается, что условие является и достаточным, т е. имеет место следующая теорема об изоморфизме.

Теорема 1. *Два вещественных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны. То же верно и для комплексных пространств.*

Нам остается доказать только достаточность условия. Пусть $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$ — два n-мерных линейных пространства. Если в каждом из них выбран базис, то любая квадратная матрица порядка n определяет некоторое отображение $\mathscr{L}$ в $\tilde{\mathscr{L}}$ по формуле (5). Это отображение будет изоморфизмом, если ранг матрицы равен n. Итак, чтобы задать изоморфизм $\mathscr{L}$ на $\tilde{\mathscr{L}}$, достаточно выбрать в этих пространствах базисы и задать матрицу ранга n (т. е. с детерминантом, отличным от нуля).

Значение теоремы об изоморфизме состоит в следующем. Линейные пространства могут состоять из чего угодно—столбцов, многочленов, чисел, направленных отрезков, функций, матриц,—природа их элементов роли не играет, когда изучаются только их свойства, связанные с операциями сложения и умножения на число Все эти свойства у двух изоморфных пространств совершенно одинаковы. С алгебраической точки зрения изоморфные пространства тождественны. Если мы условимся не различать между собой изоморфные пространства, то в силу теоремы об изоморфизме для каждой размерности найдется только одно линейное пространство

4. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Рассмотрим линейное отображение A: $\mathscr{L}_n \to \bar{\mathscr{L}}_m$. Если $\mathscr{L}_n$ и $\bar{\mathscr{L}}_m$ выбраны соответственно базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$, то A определяется матрицей A. Пусть другая пара базисов $\boldsymbol{e}'$ и $\boldsymbol{f}'$ связана с $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ матрицами перехода S и P. В базисах $\boldsymbol{e}'$ и $\boldsymbol{f}'$ отображение A имеет матрицу A'. Наша задача—найти связь между матрицами A и A'.

Рассмотрим произвольный вектор x из пространства $\mathscr{L}_n$ и его образ $y = \mathsf{A}(x)$ Обозначим координатные столбцы x в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ соответственно через ξ и ξ', а координатные столбцы вектора y в базисах $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{f}'$ через η и η'. Согласно формуле (3) § 1 мы имеем следующую связь старых и новых координатных столбцов рассматриваемых векторов:

$$\xi = S\xi', \quad \eta = P\eta'.$$

Подставив эти выражения в формулу (5), мы получим $P\eta' = AS\xi'$. Поскольку матрица перехода всегда имеет обратную, мы можем найти η' из этого равенства: $\eta' = P^{-1}AS\xi'$. Но, с другой стороны, $\eta' = A'\xi'$ по определению A'. Так как матрица линейного отображения для данной пары базисов однозначно определена, мы получаем

$$A' = P^{-1}AS. \tag{6}$$

Это и есть искомая связь между матрицами A и A'.

Если обозначить элементы матриц A и A' через α_j^i и $\alpha_j'^i$, а элементы P^{-1} и S соответственно через ρ_k^i и σ_j^i, то матричное равенство (6) можно переписать в виде mn

числовых равенств:

$$\alpha_i'^{l} = \sum_{k,\, l} \rho_k^i \alpha_l^k \sigma_j^l. \tag{7}$$

Здесь индексы принимают следующие значения: $i, k = 1, \ldots, m$; $j, l = 1, \ldots, n$.

5. Канонический вид матрицы линейного отображения. Как видно из формулы (6), матрица линейного отображения $\mathsf{A}: \mathscr{L}_n \to \tilde{\mathscr{L}}_m$ может существенно изменяться при замене базисов в $\mathscr{L}_n$ и $\tilde{\mathscr{L}}_m$. Естественно возникает вопрос, как выбрать базисы в $\mathscr{L}_n$ и $\tilde{\mathscr{L}}_m$ с тем, чтобы матрица линейного отображения A имела наиболее простой вид.

Теорема 2. *Для любого линейного отображения* $\mathsf{A}: \mathscr{L}_n \to \tilde{\mathscr{L}}_m$ *можно так выбрать базисы* $\boldsymbol{e}$ *и* $\boldsymbol{f}$ *в пространствах* $\mathscr{L}_n$ *и* $\tilde{\mathscr{L}}_m$, *что матрица отображения будет иметь вид*[1])

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right\|, \tag{8}$$

где E_r *— единичная матрица порядка* r.

Доказательство. Пусть ранг отображения A равен r. Базис $\boldsymbol{e}$ в пространстве $\mathscr{L}_n$, мы выберем следующим образом: векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ мы поместим в ядре отображения A (его размерность как раз равна $n-r$), а векторы $e_1, \ldots, e_r$ можем выбрать произвольно. В силу такого выбора, каков бы ни был базис $\boldsymbol{f}$ в пространстве $\tilde{\mathscr{L}}_m$, последние $n-r$ столбцов матрицы будут нулевыми. Так как ее ранг равен r, первые r столбцов должны быть линейно независимыми. Это означает, что линейно независимыми будут векторы $\mathsf{A}(e_1), \ldots, \mathsf{A}(e_r)$. Примем их за первые r базисных векторов в пространстве $\tilde{\mathscr{L}}_m$: $f_1 = \mathsf{A}(e_1), \ldots, f_r = \mathsf{A}(e_r)$, а остальные векторы $f_{r+1}, \ldots, f_m$ можем выбрать произвольно. При таком выборе базиса первые r столбцов матрицы будут первыми r столбцами единичной матрицы порядка m. Это и есть вид (8) для матрицы отображения.

6. Сумма и произведение отображений. Рассмотрим два линейных отображения $\mathsf{A}: \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ и $\mathsf{B}: \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$. Назовем *суммой* отображений A и B и обозначим через

---

[1]) Если $r=m$ или $r=n$, в матрице (8) нет нулевых строк или соответственно столбцов.

$\mathsf{A}+\mathsf{B}$ отображение $\mathsf{C}: \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$, определяемое равенством $\mathsf{C}(x)=\mathsf{A}(x)+\mathsf{B}(x)$. Не представляет труда проверить, что C — линейное отображение. Действительно, если в $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$ выбраны базисы, то координатные столбцы векторов $\mathsf{A}(x)$ и $\mathsf{B}(x)$ запишутся через матрицы отображений как $A\xi$ и $B\xi$. Следовательно, $\mathsf{C}(x)$ будет иметь координатный столбец $A\xi+B\xi=(A+B)\xi$. Итак, $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ — линейное отображение и его матрица равна сумме матриц отображений A и B.

Произведение линейного отображения $\mathsf{A}: \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ на число α определяется как отображение $\mathsf{B}: \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$, сопоставляющее вектору x вектор $\alpha\mathsf{A}(x)$. Нетрудно проверить, что оно линейное и имеет матрицу αA, если A — матрица A.

Результат последовательного выполнения двух линейных отображений $\mathsf{A}: \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$ и $\mathsf{B}: \tilde{\mathscr{L}} \to \overline{\mathscr{L}}$ называется их *произведением* и обозначается $\mathsf{B} \circ \mathsf{A}$ (отображение, которое делается первым, пишется справа). Разумеется $\mathsf{B} \circ \mathsf{A}$ отображает $\mathscr{L}$ в $\overline{\mathscr{L}}$ и является линейным отображением.

Пусть в пространствах $\mathscr{L}$, $\tilde{\mathscr{L}}$ и $\overline{\mathscr{L}}$ выбраны базисы соответственно $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$. Обозначим через A матрицу отображения A в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$, а через B матрицу B в базисах $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$

Предложение 7. *Отображение* $\mathsf{B} \circ \mathsf{A}$ *имеет матрицу* BA *в базисах* $\boldsymbol{e}$ *и* $\boldsymbol{g}$.

Для доказательства рассмотрим координатный столбец ξ произвольного вектора x из $\mathscr{L}$. Координатные столбцы векторов $\mathsf{A}(x)$ и $\mathsf{B}(\mathsf{A}(x))$ обозначим соответственно через η и ζ. Тогда по формуле (5) $\eta=A\xi$ и $\zeta=B\eta=BA\xi$, как нам и требовалось.

Поскольку ранг отображения совпадает с рангом его матрицы, отсюда и из оценки ранга произведения матриц (предложение 5 § 6 гл. V) следует

Предложение 8. *Ранг произведения отображений не превосходит рангов сомножителей.*

Произведение отображения A на число можно рассматривать как его произведение на линейное преобразование, состоящее в умножении всех векторов на это число (см. пример 1) на с. 202).

Свойства сложения и умножения отображений легко вытекают из соответствующих свойств умножения матриц, и мы не будем на них останавливаться. Предоставим читателю сформулировать и доказать, например, свойство ассоциативности умножения отображений.

Пусть дано линейное отображение $\mathsf{A}: \mathscr{L}_n \to \tilde{\mathscr{L}}_m$. Линейное отображение $\mathsf{B}: \tilde{\mathscr{L}}_m \to \mathscr{L}_n$ мы назовем *обратным* для A и будем обозначать A^{-1}, если $\mathsf{B} \circ \mathsf{A} = \mathsf{E}$ и $\mathsf{A} \circ \mathsf{B} = \tilde{\mathsf{E}}$, где E и $\tilde{\mathsf{E}}$ — тождественные преобразования пространств $\mathscr{L}_n$ и $\tilde{\mathscr{L}}_m$. Иначе говоря, для каждого x из $\mathscr{L}_n$ должно быть $\mathsf{B}(\mathsf{A}(x)) = x$ и $\mathsf{A}(\mathsf{B}(y)) = y$ — для каждого y из $\tilde{\mathscr{L}}_m$.

Предложение 9. *Линейное отображение* A *имеет обратное тогда и только тогда, когда оно — изоморфизм.*

Доказательство. Пусть A — изоморфизм. Тогда его ранг удовлетворяет условию $r = m = n$ и к системе уравнений $A\xi = \eta$, связывающей координаты образа и прообраза в некоторой паре базисов, применимо правило Крамера. Она имеет единственное решение при любом столбце свободных членов. Рассмотрим отображение $\mathsf{B}: \tilde{\mathscr{L}}_m \to \mathscr{L}_n$, сопоставляющее вектору y с координатным столбцом η вектор x с координатным столбцом ξ, равным решению этой системы $A^{-1}\eta$. Поскольку столбец $\xi = A^{-1}\eta$ получается из η умножением на матрицу, отображение B является линейным. Очевидно также, что всегда $\mathsf{B}(\mathsf{A}(x)) = x$ и $\mathsf{A}(\mathsf{B}(y)) = y$. Итак, отображение B — обратное для A.

Пусть теперь A — не изоморфизм. Тогда либо $r < m$, либо $r < n$. В первом случае в $\tilde{\mathscr{L}}_m$ существует вектор u, не принадлежащий $\mathsf{A}(\mathscr{L}_n)$. Если бы существовало обратное отображение, мы имели бы $u = \mathsf{A}(\mathsf{A}^{-1}(u)) \in \mathsf{A}(\mathscr{L}_n)$, что противоречит выбору u. Во втором случае существует вектор $z \neq o$, принадлежащий ядру A. Если бы существовало обратное отображение, мы получили бы противоречащее выбору z равенство $z = \mathsf{A}^{-1}(\mathsf{A}(z)) = o$. Предложение доказано.

При доказательстве первой части предложения мы нашли матрицу отображения A^{-1}. Именно, если отображение A в базисах e и f имеет матрицу A, то отображение A^{-1} в базисах f и e имеет матрицу A^{-1}.

§ 4. Задача о собственных векторах

1. Линейные преобразования. В предыдущем параграфе мы назвали линейным преобразованием линейное отображение, которое отображает пространство само в себя. Все результаты об отображениях, полученные в § 3, верны и для преобразований, но здесь должны быть сделаны существенные оговорки, касающиеся координатной записи преобразования.

Именно, записывая в координатах линейное отображение $\mathsf{A}\colon \mathscr{L} \to \tilde{\mathscr{L}}$, мы выбираем базисы в обоих пространствах $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$. Если пространства $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}$ совпадают, естественно пользоваться одним и тем же базисом для образов и для прообразов. Поэтому дается следующее

Определение. *Матрицей линейного преобразования* $\mathsf{A}\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ в базисе $\boldsymbol{e} = \|e_1 \ldots e_n\|$ называется матрица, столбцы которой — координатные столбцы векторов $\mathsf{A}(e_1), \ldots, \mathsf{A}(e_n)$ по базису $\boldsymbol{e}$.

В соответствии с этим определением формула (6) § 3 для матрицы преобразования принимает вид

$$A' = S^{-1}AS. \tag{1}$$

Множество матриц A', получаемых из данной матрицы A по формуле (1) при различных S, уже, чем множество матриц, получаемых из той же A по формуле (6) § 3 при не связанных между собой матрицах перехода S и P. Отсюда вытекают особенности координатной записи преобразований. Главнейшая из них состоит в том, что в более узком множестве, вообще говоря, не найдется матрицы канонического вида (8) § 3 и теорема 2 § 3 неверна для преобразований.

Не следует думать, что это — случайное обстоятельство, связанное с «неудачным» определением матрицы преобразования. Матрица отображения определяет это отображение, и потому все свойства отображения содержатся среди свойств его матрицы. Свойствами отображения являются те свойства матрицы, которые инвариантны, т. е. не меняются при переходе к другой паре базисов. Остальные свойства матрицы определяются не только отображением, но и парой базисов. Теорема 2 § 3, по существу, означает, что при фиксированных пространствах $\mathscr{L}$ и $\tilde{\mathscr{L}}$ единственным инвариантным свойством отображения является его ранг, поскольку все отображения одного ранга в подходящих парах базисов записываются одной и той же матрицей.

Линейные преобразования имеют больше инвариантных свойств, чем линейные отображения. Это связано с тем, что образ и прообраз лежат в одном пространстве, и мы получаем возможность говорить об их взаимном расположении. Например, приобретает смысл вопрос о том, коллинеарен ли образ прообразу. Для отображения пространства $\mathscr{L}$ в $\bar{\mathscr{L}}$, отличное от $\mathscr{L}$, этот вопрос лишен смысла.

В этом параграфе мы будем заниматься исключительно линейными преобразованиями и теми их свойствами, которыми не обладают линейные отображения в общем случае.

2. Инвариантные подпространства. Рассмотрим линейное пространство $\mathscr{L}$ и линейное преобразование A этого пространства.

Определение. Подпространство $\mathscr{L}'$ пространства $\mathscr{L}$ называется *инвариантным* относительно A, если для каждого вектора x из $\mathscr{L}'$ образ $\mathsf{A}(x)$ лежит в $\mathscr{L}'$.

Можно сформулировать это определение иначе, сказав, что $\mathscr{L}'$ инвариантно, если $\mathsf{A}(\mathscr{L}')$ есть подпространство в $\mathscr{L}'$.

Пример 1. Рассмотрим обычное геометрическое пространство и поворот A этого пространства вокруг заданной оси p на угол α. При повороте вектор переходит в вектор, и, следовательно, поворот порождает преобразование в трехмерном векторном пространстве. Очевидно, что это преобразование линейное. Векторы, лежащие на оси p, образуют двумерное инвариантное подпространство, так как для них $\mathsf{A}(x)=x$. Векторы, перпендикулярные оси p, образуют одномерное инвариантное подпространство, так как вектор, перпендикулярный оси, после поворота останется ей перпендикулярным.

Пример 2. Нулевое подпространство всегда переходит само в себя и, следовательно, инвариантно относительно любого преобразования.

Пример 3. Пространство $\mathscr{L}$, рассматриваемое как подпространство, является инвариантным подпространством.

Пример 4. Каждое подпространство является инвариантным относительно тождественного и нулевого преобразований

Пример 5. Ядро преобразования и множество его значений являются инвариантными подпространствами.

Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathscr{L}$ задано линейное преобразование A, и пусть k-мерное подпространство $\mathscr{L}'$ инвариантно относительно A. Выберем в $\mathscr{L}$ базис $e_1, \ldots, e_n$ так, чтобы векторы $e_1, \ldots, e_k$ лежали в $\mathscr{L}'$. Матрица A преобразования A может быть разделена на четыре клетки:

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right\|.$$

Клетки A_1, A_2, A_3 и A_4 являются матрицами размеров $k\times k$, $k\times(n-k)$, $(n-k)\times k$ и $(n-k)\times(n-k)$ соответственно. Докажем, что клетка A_3 нулевая, т. е. элементы α_j^i матрицы A равны нулю для значений индексов $j=1, \ldots, k$ и $i=k+1, \ldots, n$. Действительно, первые k столбцов матрицы A—координатные столбцы векторов $\mathsf{A}(e_1), \ldots, \mathsf{A}(e_k)$. Так как $\mathscr{L}'$—инвариантное подпространство, эти векторы лежат в $\mathscr{L}'$ и согласно предложению 3 § 2 их компоненты α_j^i по базисным векторам $e_{k+1}, \ldots, e_n$ равны нулю.

Легко видеть, что, и обратно, если в каком-нибудь базисе матрица линейного преобразования A имеет вид

$$\left\|\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O & A_4 \end{array}\right\|, \tag{2}$$

то линейная оболочка векторов $e_1, \ldots, e_k$ есть инвариантное подпространство. В самом деле, из вида матрицы следует, что для всех $j=1, \ldots, k$

$$\mathsf{A}(e_j)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_j^i e_i,$$

и потому образ линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_k$ является линейной комбинацией тех же векторов. Резюмируем сказанное.

П р е д л о ж е н и е 1. *Матрица A преобразования* A *имеет вид* (2) *тогда и только тогда, когда линейная оболочка векторов $e_1, \ldots, e_k$—инвариантное подпространство.*

Преобразование A каждому вектору из инвариантного подпространства $\mathscr{L}'$ сопоставляет вектор из $\mathscr{L}'$. Этим определено преобразование пространства $\mathscr{L}'$, которое мы назовем *ограничением* преобразования A на подпространстве $\mathscr{L}'$ и обозначим A'. Для векторов из $\mathscr{L}'$ имеем $\mathsf{A}'(x)=\mathsf{A}(x)$, а для векторов, не лежащих в $\mathscr{L}'$, преобразование A' не определено. Преобразование A' отличается от A только множеством векторов, для которых оно определено.

Ограничение линейного преобразования, очевидно, будет линейным преобразованием.

Сохраним обозначения, введенные при доказательстве предыдущего предложения. Нетрудно доказать, что в базисе $e_1, \ldots, e_k$ пространства $\mathscr{L}'$ матрицей преобразования A' будет клетка A_1 матрицы (2).

3. Собственные векторы. Рассмотрим одномерное подпространство $\mathscr{L}_1$ линейного пространства $\mathscr{L}$. Базис в $\mathscr{L}_1$ состоит из одного вектора x, не равного нулю, и каждый вектор y из $\mathscr{L}_1$ имеет вид αx, где α — подходящее число. Если $\mathscr{L}_1$ инвариантно относительно заданного в $\mathscr{L}$ линейного преобразования A, то $\mathsf{A}(x)$ лежит в $\mathscr{L}_1$. Следовательно, существует такое число λ, что

$$\mathsf{A}(x)=\lambda x. \tag{3}$$

Обратно, если для некоторого ненулевого вектора из $\mathscr{L}_1$ выполнено условие (3), то оно выполнено и для любого вектора из $\mathscr{L}_1$ (это легко проверить, умножив обе части равенства (3) на произвольное число). Поэтому $\mathscr{L}_1$ будет инвариантным подпространством.

Определение. Ненулевой вектор x, удовлетворяющий условию (3), называется *собственным вектором* преобразования A. Число λ в равенстве (3) называется *собственным значением*. Говорят, что собственный вектор x *принадлежит* собственному значению λ.

Мы видели, что каждое одномерное инвариантное подпространство определяется собственным вектором и, наоборот, каждый собственный вектор определяет одномерное инвариантное подпространство.

Поставим себе задачу найти все собственные векторы заданного линейного преобразования A. Эта задача имеет большое значение как в случае пространств конечной размерности, так и в случае бесконечномерных пространств. Мы рассмотрим ее для пространств конечного числа измерений n.

Если в пространстве $\mathscr{L}$ выбран базис, то равенство (3) записывается как соотношение $A\xi=\lambda\xi$, связывающее матрицу A преобразования A и координатный столбец ξ вектора x. Обозначив через E единичную матрицу порядка n, мы можем переписать это соотношение в виде

$$(A-\lambda E)\xi=o \tag{4}$$

или, подробнее,

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha_1^1-\lambda)\xi^1+\alpha_2^1\xi^2+\ldots+\alpha_n^1\xi^n=0,\\ \alpha_1^2\xi^1+(\alpha_2^2-\lambda)\xi^2+\ldots+\alpha_n^2\xi^n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_1^n\xi^1+\alpha_2^n\xi^2+\ldots+(\alpha_n^n-\lambda)\xi^n=0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Равенства (5) мы будем рассматривать как систему уравнений для нахождения компонент $\xi^1, \ldots, \xi^n$ собственного вектора x. Это система из n линейных однородных уравнений с n неизвестными. Так как вектор x должен быть отличен от нуля, нас интересуют только нетривиальные решения, т. е. такие, что хоть одна из компонент ξ^i не равна нулю. Система имеет нетривиальное решение только тогда, когда ее ранг меньше числа неизвестных. В нашем случае это означает, что должен равняться нулю детерминант матрицы системы:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}(\alpha_1^1-\lambda)\ \alpha_2^1\dots\alpha_n^1\\ \dots\dots\dots\\ \alpha_1^n\qquad \alpha_2^n\dots(\alpha_n^n-\lambda)\end{vmatrix}=0. \tag{6}$$

Равенство (6) называется *характеристическим уравнением*. Это условие на параметр λ, которому должны удовлетворять все собственные значения преобразования **A**. Разумеется, в вещественном пространстве комплексные корни характеристического уравнения не могут быть собственными значениями, так как для них не имеет смысла равенство (3).

Если учитывать последнее замечание, условие, которое мы получили, является и достаточным. В самом деле, для каждого значения λ, удовлетворяющего условию (6), ранг системы (5) понижается, и она имеет нетривиальное решение. Это решение является координатным столбцом собственного вектора x, соответствующего данному λ. Мы получили следующую теорему.

Теорема 1. *В комплексном пространстве все корни характеристического уравнения и только они являются собственными значениями преобразования. В вещественном пространстве то же утверждение имеет место для вещественных корней характеристического уравнения.*

Левая часть характеристического уравнения представляет собой многочлен степени n. Действительно, согласно формуле (6) § 2 гл. V детерминант равен алгебраической сумме произведений, в каждое из которых входит по n элементов матрицы. Содержат λ только элементы, стоящие на главной диагонали. Существует одно произведение

$$(\alpha_1^1-\lambda)(\alpha_2^2-\lambda)\dots(\alpha_n^n-\lambda), \tag{7}$$

в котором все сомножители содержат λ. Если в какое-нибудь другое произведение вошел сомножитель α_j^i $(i\neq j)$, то в него не могут войти сомножители $(\alpha_i^i-\lambda)$ и $(\alpha_j^j-\lambda)$. Поэтому каждый член суммы, кроме (7), содержит λ в степени не выше $n-2$. Раскрывая скобки в выражении (7), выпишем два члена со старшими степенями λ: $(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(\alpha_1^1+\dots+\alpha_n^n)\lambda^{n-1}$. Эти же члены будут старшими и во всем многочлене. Свободный член многочлена равен его значению при $\lambda=0$, а это значение равно $\det(A-0E)=\det A$. Таким образом, многочлен в левой части равенства (6) имеет вид

$$(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\alpha+\ldots+\det A.$$

Этот многочлен называется *характеристическим многочленом матрицы A*. Не представило бы труда выписать и остальные его коэффициенты, но это нам не понадобится. Многочлен степени n, как известно, не может иметь больше чем n различных корней и всегда имеет хотя бы один комплексный корень. Если мы рассматриваем вещественное пространство, то может случиться (при четном n), что характеристическое уравнение не имеет ни одного вещественного корня и, следовательно, линейное преобразование не имеет собственных значений и собственных векторов. Примером может служить поворот плоскости.

В комплексном пространстве каждое линейное преобразование имеет хоть одно собственное значение и, следовательно, хоть один собственный вектор.

4. Свойства собственных векторов и собственных значений.

Предложение 2. *Все собственные векторы, принадлежащие одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образуют линейное подпространство.*

Утверждение немедленно следует из того, что координатные столбцы этих векторов составляют множество всех решений однородной системы линейных уравнений.

Теорема 2. *Если собственные векторы $x_1, \ldots, x_k$ принадлежат попарно различным собственным значениям, то они линейно независимы.*

Теорема доказывается по индукции. Проверим утверждение для двух собственных векторов x_1 и x_2, принадлежащих различным собственным значениям λ_1 и λ_2. Пусть они линейно зависимы. Так как векторы ненулевые, в этом случае найдется число α такое, что $x_1=\alpha x_2$. Применяя преобразование $\mathbf{A}$, мы получим $\mathbf{A}(x_1)=\lambda_1 x_1$ и

$$\mathbf{A}(x_1)=\alpha\mathbf{A}(x_2)=\alpha\lambda_2 x_2=\lambda_2 x_1.$$

Это означает, что $\lambda_1 x_1=\lambda_2 x_1$, что невозможно при $\lambda_1\neq\lambda_2$. Итак, векторы линейно независимы.

Допустим теперь, что любая система из $k-1$ собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям, линейно независима, и докажем это утверждение для системы из k векторов.

Пусть система векторов $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяет условию теоремы. Рассмотрим их равную нулю линейную комбинацию

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = o. \qquad (8)$$

Отсюда действием преобразования **A** и умножением на λ_k мы получаем соответственно

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k x_k = o$$

и

$$\alpha_1 \lambda_k x_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k x_k = o.$$

Почленное вычитание этих равенств дает нам

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \ldots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} = o. \qquad (9)$$

По предложению индукции эта линейная комбинация — тривиальная, и, следовательно,

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0.$$

Поскольку собственные значения попарно различны, имеем $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$. Учитывая это в равенстве (8), находим $\alpha_k = 0$. Итак, линейная комбинация (8) — тривиальная. Теорема доказана.

Предложение 3. *Если A и A' — матрицы преобразования* **A** *в разных базисах, то характеристические многочлены этих матриц совпадают.*

Действительно, согласно формуле $A' = S^{-1}AS$ мы имеем

$$\det (A' - \lambda E) = \det (S^{-1}AS - \lambda E) = \det S^{-1} (A - \lambda E) S =$$
$$= \det (A - \lambda E) \det S \det S^{-1} = \det (A - \lambda E).$$

Из этого предложения следует, что мы можем называть характеристический многочлен матрицы A *характеристическим многочленом преобразования* **A**.

Коэффициенты характеристического многочлена являются инвариантами, связанными с преобразованием. В частности, детерминант матрицы преобразования не зависит от выбора базиса. Другим важным инвариантом является коэффициент при $(-\lambda)^{n-1}$, называемый *следом* матрицы: $\alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^n$.

Рассмотрим теперь произвольный многочлен $P(\lambda) = \gamma_n \lambda^n + \ldots + \gamma_1 \lambda + \gamma_0$. Если λ_0 — корень этого многочлена, то $P(\lambda)$ делится на двучлен $\lambda - \lambda_0$, т. е. представляет собой произведение $\lambda-\lambda_0$ на многочлен $P_1(\lambda)$[1]). Может случиться, что $P(\lambda)$ делится не только на $\lambda-\lambda_0$, но и на $(\lambda-\lambda_0)^s$ при некотором целом $s>1$, иначе говоря, $P(\lambda)$ имеет вид $(\lambda-\lambda_0)^s P_2(\lambda)$, где P_2 — многочлен. Самое большое число s, обладающее этим свойством, называется *кратностью* корня λ_0. Корни кратности 1 называются *простыми*.

Теорема 3. *Пусть собственное значение λ_0 преобразования* **A** *является корнем характеристического уравнения кратности s. Тогда ему принадлежит не более s линейно независимых собственных векторов.*

Доказательство. Пусть существуют k линейно независимых собственных векторов, принадлежащих λ_0. Обозначим их $e_1, \ldots, e_k$ и дополним векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$ до базиса в пространстве $\mathscr{L}$. В этом базисе матрица A преобразования **A** имеет вид

$$A=\left\|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_0 \end{matrix} & \\ \hline O & \end{array} B\right\|,$$

где B — некоторая матрица размеров $n\times(n-k)$. Действительно, для каждого $i\leqslant k$ столбец с номером i — координатный столбец вектора $\mathbf{A}(e_i)=\lambda_0 e_i$ — состоит из нулей, за исключением i-го элемента, равного λ_0. Составим матрицу $A-\lambda E$. Раскладывая ее детерминант последовательно по каждому из первых k столбцов, мы имеем $\det(A-\lambda E)=$ $=(\lambda_0-\lambda)^k P(\lambda)$. По определению кратности мы видим теперь, что $k\leqslant s$.

Собственному значению кратности s может принадлежать и меньше чем s линейно независимых собственных векторов. Например, читатель проверит, что линейное преобразование двумерного пространства, задаваемое мат-

---

[1]) Для читателя, не знакомого с этим фактом, приведем следующее доказательство. Заменим в многочлене $P(\lambda)=\gamma_n\lambda^n+\ldots+\gamma_1\lambda+\gamma_0$ аргумент λ на двучлен $\lambda^*+\lambda_0$, где λ^* — новый аргумент: $P^*(\lambda^*)=$ $=\gamma_n(\lambda^*+\lambda_0)^n+\ldots+\gamma_1(\lambda^*+\lambda_0)+\gamma_0$. Этот многочлен может быть записан по степеням λ^*: $P^*(\lambda^*)=\gamma_n^*\lambda^{*n}+\ldots+\gamma_1^*\lambda^*+\gamma_0^*$. Свободный член γ_0^* многочлена P^* равен его значению при $\lambda^*=0$, т. е. $P(\lambda_0)$. Следовательно, если λ_0 — корень многочлена P, имеем $\gamma_0^*=0$. Теперь, подставляя $\lambda^*=\lambda-\lambda_0$, мы получим $P(\lambda)=\gamma_n^*(\lambda-\lambda_0)^n+\ldots+\gamma_1^*(\lambda-\lambda_0)$, или $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)[\gamma_n^*(\lambda-\lambda_0)^{n-1}+\ldots+\gamma_1^*]$. Многочлен в квадратных скобках мы и обозначим через $P_1(\lambda)$.

рицей $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, имеет собственное значение кратности 2 и всего один независимый собственный вектор.

Предложение 4. *Линейное преобразование имеет собственное значение, равное нулю, тогда и только тогда, когда оно не является взаимно однозначным.*

Действительно, из предложения 6 § 3 следует, что преобразование взаимно однозначно в том и только в том случае, когда его ранг равен n, т. е. детерминант его матрицы отличен от нуля. Но детерминант — свободный член характеристического многочлена и равен нулю тогда и только тогда, когда нуль — корень характеристического уравнения.

Заметим, что для собственного вектора, принадлежащего нулевому собственному значению, $\mathbf{A}(x)=o$. Это означает, что ядро $\mathbf{A}$ содержит ненулевой вектор x.

Предложение 5. *Пусть $\mathbf{A}$ — линейное преобразование вещественного линейного пространства. Комплексному корню характеристического многочлена преобразования $\mathbf{A}$ соответствует двумерное инвариантное подпространство.*

Если число $\alpha+i\beta$ удовлетворяет уравнению $\det(A-\lambda E)=0$, то система линейных уравнений $\{A-(\alpha+i\beta)E\}\xi=o$ имеет нетривиальное решение. Оно будет комплексным столбцом высоты n, и мы можем записать его в виде $\eta+i\zeta$, где η и ζ — вещественные столбцы. Равенство двух комплексных столбцов $A\xi=\lambda\xi$ равносильно двум равенствам между вещественными столбцами, именно:

$$A\eta=\alpha\eta-\beta\zeta, \qquad A\zeta=\beta\eta+\alpha\zeta. \tag{10}$$

Столбцы η и ζ вещественные, и им соответствуют векторы, которые мы обозначим y и z. Равенства (10) означают, что $\mathbf{A}(y)=\alpha y-\beta z$ и $\mathbf{A}(z)=\beta y+\alpha z$. Отсюда следует, что линейная оболочка векторов y и z — инвариантное подпространство. В самом деле,

$$\mathbf{A}(\mu y+\nu z)=\mu\mathbf{A}(y)+\nu\mathbf{A}(z)=(\mu\alpha+\nu\beta)y+(\nu\alpha-\mu\beta)z. \tag{11}$$

Осталось доказать, что векторы y и z линейно независимы. Допустим противное: при каких-то μ и ν ($\mu^2+\nu^2\neq 0$) имеем $\mu y+\nu z=o$. Тогда, в силу (11), $(\mu\alpha+\nu\beta)y+(\nu\alpha-\mu\beta)z=o$. Предположим для определенности, что $y\neq 0$. Умножив два предыдущих равенства соответственно на $\nu\alpha-\mu\beta$ и на ν вычтем одно из другого. Мы получим

$$[\nu(\mu\alpha+\nu\beta)-\mu(\nu\alpha-\mu\beta)]\,y=o,$$

откуда $(\nu^2+\mu^2)\beta=0$, т. е. $\beta=0$, хотя мы предполагали, что $\alpha+i\beta$ — комплексный корень.

Замечание. Как известно (см. § 7 гл. V), если $\alpha+i\beta$ удовлетворяет алгебраическому уравнению с вещественными коэффициентами, то комплексное сопряженное число $\alpha-i\beta$ удовлетворяет тому же уравнению. В нашем случае двум комплексно сопряженным корням соответствует одно и то же инвариантное подпространство. Предоставим читателю это показать.

5. О приведении матрицы преобразования к диагональному виду. Мы будем говорить, что квадратная матрица A с элементами α_j^i имеет *диагональный вид* или *диагональная*, если $\alpha_j^i = 0$ при $i \neq j$, т. е. могут быть отличны от нуля только элементы α_i^i, расположенные на главной диагонали.

Предложение 6. *Матрица линейного преобразования* A *в базисе* $e_1, \ldots, e_n$ *имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все векторы базиса — собственные векторы преобразования.*

Действительно, если вектор e_i собственный, то $\mathsf{A}(e_i) = \lambda_i e_i$ и, следовательно, i-й элемент координатного столбца вектора $\mathsf{A}(e_i)$ равен λ_i, а остальные элементы равны нулю. Остается вспомнить, что i-й столбец матрицы преобразования — координатный столбец $\mathsf{A}(e_i)$.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

Из теоремы 2 следует простое, но важное условие, достаточное для того, чтобы существовал базис из собственных векторов преобразования.

Предложение 7. *Если преобразование имеет n попарно различных собственных значений, то существует базис из собственных векторов этого преобразования.*

Если характеристический многочлен преобразования имеет кратные корни, то его матрица может не иметь диагонального вида ни в каком базисе. Пример такого преобразования, не имеющего базиса из собственных векторов, был приведен на с. 219—220.

Однако вполне может случиться, что линейное преобразование имеет меньше чем n собственных значений, но все же имеет базис из собственных векторов. В самом деле, мы можем задать базис и рассмотреть преобразование, определяемое какой-нибудь диагональной матрицей с равными элементами на главной диагонали. Для нулевого и тождественного преобразования каждый ненулевой вектор собственный, и в каждом базисе их матрицы имеют диагональный вид.

Предложению 7 можно придать и следующую форму.

Предложение 8. *Если все корни характеристического многочлена матрицы A различны, то существует такая матрица S с детерминантом, не равным нулю, что матрица $S^{-1}AS$ диагональная. Если матрица A вещественна и мы хотим, чтобы вещественной была и S, то нужно, чтобы корни характеристического многочлена были вещественны.*

Г Л А В А VII

ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Евклидовы пространства

1. Скалярное произведение. Линейное пространство, введенное в предыдущей главе, существенно отличается от множества векторов обычного геометрического пространства тем, что в линейном пространстве не определены понятия длины вектора и угла между векторами. В настоящей главе мы дадим эти определения.

В гл. I, исходя из длины и угла, мы определили скалярное произведение. Здесь удобнее поступить наоборот. Мы аксиоматически определим операцию скалярного умножения векторов, а длину и угол введем при помощи скалярного произведения.

Полученные до сих пор результаты, как правило, относились как к вещественным, так и к комплексным пространствам. Определение скалярного умножения в этих двух случаях формулируется различно. Этот параграф посвящен вещественным пространствам.

Определение. Вещественное линейное пространство называется *евклидовым*, если в нем определена операция *скалярного умножения*: любым двум векторам x и y сопоставлено вещественное число (обозначаемое (x, y)), и это соответствие удовлетворяет следующим условиям, каковы бы ни были векторы x, y и z и число α:

1°. $(x, y)=(y, x)$.
2°. $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$.
3°. $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$.
4°. $(x, x)>0$, если $x\neq o$.

Укажем простейшие следствия из аксиом 1° —4°:

1. $(x, \alpha y)=(\alpha y, x)=\alpha(y, x)$, и потому всегда

$$(x, \alpha y)=\alpha(x, y). \tag{1}$$

2. Аналогично доказывается тождество

$$(x, y+z)=(x, y)+(x, z). \tag{2}$$

3. Последовательно применяя аксиомы 2° и 3° и два предыдущих следствия, легко доказать, что для любых векторов и чисел

$$\left.\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{s}\alpha_i x_i,\ y\right)=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(x_i,\ y),\\ \left(x,\ \sum_{k=1}^{p}\beta_k y_k\right)=\sum_{k=1}^{p}\beta_k(x,\ y_k).\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

4. Каков бы ни был вектор x, имеем

$$(x,\ o)=0.\tag{4}$$

Действительно, положим $o=0x$. Тогда $(x,\ o)=0(x,\ x)=0$.

Пример 1. Для векторов — направленных отрезков — было определено скалярное произведение как произведение их длин на косинус угла между ними. Так определенное скалярное произведение обладает свойствами 1°—4° и зависит от выбора единицы измерения длин. Поэтому, если единица измерения длин выбрана, векторы обычного геометрического пространства образуют трехмерное евклидово пространство в определенном здесь смысле.

Пример 2. В линейном пространстве столбцов высоты n мы можем ввести скалярное произведение, сопоставив столбцам ξ и η число

$$\xi^1\eta^1+\xi^2\eta^2+\ldots+\xi^n\eta^n,\tag{5}$$

где через ξ^i и η^i обозначены элементы столбцов. Число (5) — матричное произведение строки ξ^T на столбец η. Читатель легко проверит, что аксиомы 1°—4° выполнены. При таком определении скалярного произведения пространство столбцов высоты n становится n-мерным евклидовым пространством.

Пример 3. В пространстве функций, непрерывных на отрезке $[0,\ 1]$, можно ввести скалярное произведение по формуле

$$(f,\ g)=\int_0^1 f(\xi)\,g(\xi)\,d\xi.$$

Аксиомы 1°—4° вытекают из известных свойств определенных интегралов.

2. Длина и угол. В гл. I мы получили формулы, выражающие длину вектора и угол между векторами через скалярное произведение. В соответствии с ними введем следующее определение.

Определение. Назовем *длиной* вектора x и обозначим $|x|$ число $\sqrt{(x, x)}$. *Углом* между векторами x и y назовем каждое число φ, удовлетворяющее условию

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}. \tag{6}$$

В силу аксиомы 4° длина вектора — вещественное неотрицательное число (мы рассматриваем арифметическое значение корня). Длина вектора равна нулю тогда и только тогда, когда вектор нулевой.

С определением угла дело обстоит несколько сложнее. Нам предстоит доказать, что выражение в правой части равенства (6) по абсолютной величине не превосходит единицы. Это следует из неравенства

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y), \tag{7}$$

связываемого с именами Шварца, Коши и Буняковского. Докажем это неравенство.

Пусть x и y — произвольные векторы в евклидовом пространстве. При любых α и β имеет место соотношение

$$(\alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y) = \alpha^2(x, x) + 2\alpha\beta(x, y) + \beta^2(y, y) \geqslant 0, \tag{8}$$

причем равенство нулю достигается тогда и только тогда, когда $\alpha x+\beta y = o$. Положив здесь $\alpha = (y, y)$ и $\beta = -(x, y)$, мы получим

$$(y, y)[(x, x)(y, y) - (x, y)^2] \geqslant 0,$$

откуда и вытекает требуемое неравенство, если $y \neq o$. В случае $y = o$ соотношение (7) очевидно.

Равенство в формуле (7) имеет место тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы. Действительно, если они независимы, то в (8) выполнено строгое неравенство при $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. Следовательно, строгое неравенство выполнено и в (7). Обратно, пусть существует нетривиальная линейная комбинация $\alpha x+\beta y$, равная нулю. Умножая ее последовательно на x и на y, получим равенства

$$\alpha(x, x)+\beta(y, x) = 0 \quad \text{и} \quad \alpha(x, y)+\beta(y, y) = 0.$$

Детерминант однородной системы, имеющей нетривиальное решение, равен нулю. Отсюда следует нужное равенство.

Из неравенства (7) следует еще одно простое и полезное неравенство, а именно:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \tag{9}$$

Оно вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$(x+y,\ x+y)=|x|^2+2(x,\ y)+|y|^2\leqslant$$
$$\leqslant|x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2.$$

Знак равенства имеет место, если $(x, y)=|x||y|$, т. е. если угол между x и y равен нулю, и только в этом случае. Неравенство (9) называется *неравенством треугольника*, так как, если векторы являются направленными отрезками, оно означает, что сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Рекомендуем читателю выписать неравенства (7) и (9) для евклидовых пространств, рассмотренных в примерах 2 и 3.

Векторы x и y называются *перпендикулярными* или *ортогональными*, если $(x, y)=0$. Если хоть один из векторов x или y равен нулю, правая часть выражения (6) не имеет смысла. Нулевой вектор мы по определению будем считать ортогональным любому вектору

Предложение 1. *Только нулевой вектор ортогонален каждому вектору.*

Действительно, если $(x, y)=0$ для всех y, то, положив $y=x$, имеем $(x, x)=0$, что возможно только для нулевого вектора.

3. Ортонормированный базис. Систему векторов $f_1\ \ldots,\ f_m$ в евклидовом пространстве мы назовем *ортонормированной*, если $(f_i,\ f_j)=0$ при $i\neq j$ и $(f_i,\ f_i)=1$, каковы бы ни были номера i и j.

Предложение 2. *Ортонормированная система векторов линейно независима.*

Доказательство Пусть $f_1,\ \ldots,\ f_m$ — ортонормированная система векторов. Рассмотрим равенство $\alpha_1 f_1+\ldots$ $\ldots+\alpha_m f_m=o$. Из него вытекает, что $\alpha_i=0$ при произвольном i. В самом деле, умножим скалярно на f_i обе части равенства. Все слагаемые, кроме i-го, обратятся в нуль, и мы получим $\alpha_i(f_i,\ f_i)=\alpha_i=0$. Таким образом, каждая равная нулю линейная комбинация векторов $f_1,\ \ldots,\ f_m$ необходимо тривиальная Предложение доказано

Теорема 1. *В n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированная система из n векторов.*

Заметим, что в силу предложения 2 такая система векторов является базисом. Мы будем называть этот базис *ортонормированным*.

Доказательство проведем методом полной индукции.

1) При $n=1$ утверждение очевидно. Если f — ненулевой вектор, то вектор $e=|f|^{-1}f$ — ортонормированная система из одного вектора.

2) Предположим, что в каждом $(n-1)$-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, и докажем то же утверждение для произвольного n-мерного евклидова пространства $\mathscr{E}_n$. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — произвольный базис в $\mathscr{E}_n$. Линейная оболочка векторов $f_1, \ldots, f_{n-1}$ представляет собой $(n-1)$-мерное евклидово пространство, и, по предположению индукции, там существует ортонормированная система из $n-1$ векторов $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Рассмотрим вектор $\tilde{f}_n = f_n - \alpha_1 e_1 - \ldots - \alpha_{n-1}e_{n-1}$. Коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ выберем так, чтобы вектор $\tilde{f}_n$ был ортогонален ко всем векторам $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Так как система $e_1, \ldots, e_{n-1}$ ортонормирована, имеем $(\tilde{f}_n, e_i) = (f_n, e_i) - \alpha_i$, откуда $\alpha_i = (f_n, e_i)$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$. Теперь рассмотрим вектор $e_n = |\tilde{f}_n|^{-1}\tilde{f}_n$. Длина его равна единице, и он перпендикулярен векторам $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Легко видеть, что система $e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n$ ортонормированная.

Метод, которым доказана эта теорема, называется *методом ортогонализации*. Для его практического применения сначала нормируют вектор f_1, т. е. строят вектор $e_1 = |f_1|^{-1}f_1$. Затем находят ортонормированный базис e_1, e_2 в линейной оболочке векторов f_1, f_2. Это делают так же, как во втором пункте доказательства. Потом точно так же строят ортонормированный базис в линейной оболочке векторов f_1, f_2, f_3 и т. д.

4. Выражение скалярного произведения через компоненты сомножителей. Пусть в евклидовом пространстве $\mathscr{E}_n$ задан базис $e_1, \ldots, e_n$. Это позволяет нам записать любые векторы x и y в виде $x = \sum_i \xi^i e_i$ и $y = \sum_j \eta^j e_j$. Здесь и далее, если не оговорено противное, индекс суммирования принимает значения от единицы до размерности пространства n. Итак, мы имеем

$$(x, y) = \left(\sum_i \xi^i e_i, \ \sum_j \eta^j e_j\right).$$

Пользуясь формулами (3), мы можем переписать скалярное произведение в виде

$$(x, y) = \sum_{i, j} \xi^i \eta^j (e_i, e_j). \tag{10}$$

Если базис ортонормированный, то $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ и в сумме остаются только те слагаемые, для которых $i = j$. Поскольку $(e_i, e_i) = 1$, то в ортонормированном

базисе
$$(x, y)=\sum_i \xi^i\eta^i. \tag{11}$$

Каков бы ни был базис, рассмотрим числа (e_i, e_j) $(i, j=1, \ldots, n)$ — всевозможные попарно скалярные произведения базисных векторов. Их принято обозначать через g_{ij} и записывать в виде квадратной матрицы:
$$\Gamma=\left\|\begin{matrix} g_{11} \ldots g_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_{n1} \ldots g_{nn}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} (e_1, e_1) \ldots (e_1, e_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (e_n, e_1) \ldots (e_n, e_n)\end{matrix}\right\|. \tag{12}$$
Матрица (12) называется *матрицей Грама* базиса $e_1, \ldots, e_n$. В силу коммутативности скалярного умножения $g_{ij}=g_{ji}$, и, следовательно, матрица удовлетворяет условию $\Gamma^T=\Gamma$, т. е. не меняется при транспонировании. Такие матрицы называются *симметрическими.*

Мы обозначим через ξ и η координатные столбцы векторов x и y. Тогда, как легко проверить, перемножая матрицы, равенство (10) можно записать в матричной форме так:
$$(x, y)=\xi^T\Gamma\eta. \tag{13}$$

Базис ортонормирован тогда и только тогда, когда его матрица Грама Γ — единичная матрица. Поэтому мы имеем для ортонормированного базиса
$$(x, y)=\xi^T\eta. \tag{14}$$
Это совпадает с (11).

5. Связь матриц Грама разных базисов. Пусть нам даны два базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$, связанных при помощи матрицы перехода S по формулам $e'_i=\sum\limits_k \sigma_i^k e_k$, где через σ_i^k обозначены элементы S. При произвольных i и j мы имеем теперь, в силу формулы (10),
$$g'_{ij}=(e'_i, e'_j)=\left(\sum_k \sigma_i^k e_k, \sum_l \sigma_j^l e_l\right)=\sum_{k, l}\sigma_i^k\sigma_j^l g_{kl}.$$

Полученное равенство выражает элемент матрицы Грама Γ' базиса e' через элементы матрицы Грама базиса e. Совокупность таких равенств для всех i и j равносильна матричному соотношению
$$\Gamma'=S^T\Gamma S. \tag{15}$$
Это легко проверить, выписывая подробно правую часть (15).

Рассмотрим формулу (15) в том частном случае, когда базис e ортонормированный. Тогда $\Gamma = E$ и $\Gamma' = S^T S$. Вычисляя детерминант обеих частей равенства, получим $\det \Gamma' = \det S^T \det S = (\det S)^2$. Поскольку базис e' произвольный, отсюда следует такое

Предложение 3. *Детерминант матрицы Грама любого базиса положителен.*

Последнее предложение может быть усилено следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — произвольные (не обязательно линейно независимые) векторы в евклидовом пространстве. Тогда детерминант матрицы*

$$\begin{Vmatrix} (x_1, x_1) & \ldots & (x_1, x_k) \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ (x_k, x_1) & \ldots & (x_k, x_k) \end{Vmatrix},$$

составленной из их попарных скалярных произведений, положителен, если векторы линейно независимы, и равен нулю, если они линейно зависимы.

Первое утверждение теоремы прямо следует из предложения 3, так как, если $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы, они образуют базис в своей линейной оболочке.

Докажем второе утверждение. Если векторы линейно зависимы, то выполнено равенство $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = o$, в котором среди коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ есть отличные от нуля. Умножая это равенство скалярно на каждый из векторов $x_1, \ldots, x_k$, мы придем к системе линейных уравнений

$$\begin{gathered} \alpha_1 (x_1, x_1) + \ldots + \alpha_k (x_1, x_k) = 0, \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \alpha_1 (x_k, x_1) + \ldots + \alpha_k (x_k, x_k) = 0, \end{gathered}$$

которой удовлетворяют коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Так как система имеет нетривиальное решение, детерминант ее матрицы должен равняться нулю, что и требовалось.

Заметим, что доказанное выше неравенство Коши — Буняковского является частным случаем этой теоремы для $k = 2$.

6. Ортогональные матрицы. Пусть в формуле (15) $\Gamma = \Gamma' = E$, т. е. оба базиса ортонормированные. Тогда формула принимает вид

$$S^T S = E. \tag{16}$$

Определение. Матрица, удовлетворяющая условию (16), называется *ортогональной*.

Мы видим, что ортогональные матрицы и только они могут служить матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Равенство (16) равносильно следующему

$$S^T = S^{-1}. \tag{17}$$

В силу свойств обратной матрицы отсюда вытекает, что

$$SS^T = E. \tag{18}$$

Это означает, что матрица S^T будет также ортогональной.

Обозначив элементы матрицы S через σ_k^i, мы можем переписать равенства (16) и (18) соответственно так:

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_i^k \sigma_j^k = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \tag{19}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^i \sigma_k^j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{20}$$

Впрочем, соотношения (19) можно получить и непосредственно по формуле (11), если вспомнить, что столбцы матрицы перехода—это координатные столбцы новых базисных векторов по старому базису.

Вычисляя детерминант каждой части равенства (16), мы получим $(\det S)^2 = 1$. Поэтому детерминант ортогональной матрицы равен $+1$ или -1

Рекомендуем читателю проверить все соотношения этого пункта для матрицы

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

7. Ортогональное дополнение подпространства. Рассмотрим k-мерное подпространство $\mathscr{E}_k$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{E}_n$.

Определение. *Ортогональным дополнением* подпространства $\mathscr{E}_k$ называется множество всех векторов, перпендикулярных каждому вектору из $\mathscr{E}_k$.

Ортогональное дополнение подпространства $\mathscr{E}_k$ обозначим через $\mathscr{E}_k^{\perp}$.

Предложение 4. *Ортогональное дополнение k-мерного подпространства $\mathscr{E}_k$ есть подпространство $n-k$ измерений.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$—базис в $\mathscr{E}_k$. Вектор x лежит в $\mathscr{E}_k^{\perp}$ тогда и только тогда, когда

$$(x, a_1) = 0, \ \ldots, \ (x, a_k) = 0. \tag{21}$$

Действительно, если x лежит в $\mathscr{E}_k^\perp$, то условия (21), очевидно, выполнены. Обратно, при выполнении этих условий x ортогонален к любому вектору a из $\mathscr{E}_k$, поскольку

$$(x, a) = \left(x, \sum_{p=1}^{k} \lambda^p a_p\right) = \sum_{p=1}^{k} \lambda^p (x, a_p) = 0.$$

Выберем в $\mathscr{E}_n$ ортонормированный базис и обозначим через $\alpha_p^1, \ldots, \alpha_p^n$ компоненты вектора a_p (при любом $p = 1, \ldots, k$), а через $\xi^1, \ldots, \xi^n$ компоненты вектора x. Условия (21) запишутся тогда в виде однородной системы из k линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{gathered} \alpha_1^1\xi^1 + \ldots + \alpha_1^n\xi^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_k^1\xi^1 + \ldots + \alpha_k^n\xi^n = 0. \end{gathered}$$

Ранг матрицы системы равен k, поскольку ее строки — строки из компонент векторов $a_1, \ldots, a_k$ — линейно независимы. Совокупность всех решений системы, как мы показали, определяет $\mathscr{E}_k^\perp$, а с другой стороны, как известно, совокупность всех решений такой системы определяет $(n-k)$-мерное подпространство. Предложение доказано.

Рассмотрим $(\mathscr{E}_k^\perp)^\perp$ — ортогональное дополнение ортогонального дополнения подпространства $\mathscr{E}_k$. Из определения видно, что $\mathscr{E}_k \subseteq (\mathscr{E}_k^\perp)^\perp$. Но размерность $(\mathscr{E}_k^\perp)^\perp$ равна $n-(n-k)=k$. Итак, согласно предложению 2 § 2 гл. VI $(\mathscr{E}_k^\perp)^\perp = \mathscr{E}_k$.

Очевидно, что $\mathscr{E}_k$ и $\mathscr{E}_k^\perp$ не имеют общих ненулевых векторов. Отсюда следует

Предложение 5. *Евклидово пространство $\mathscr{E}_n$ есть прямая сумма любого своего подпространства $\mathscr{E}_k$ и его ортогонального дополнения.*

Таким образом, согласно предложению 5 § 2 гл. VI каждый вектор x из $\mathscr{E}_n$ однозначно раскладывается в сумму векторов x' из $\mathscr{E}_k$ и x'' из $\mathscr{E}_k^\perp$. Вектор x' называется *ортогональной проекцией* x на $\mathscr{E}_k$. Легко видеть, что вектор x'' — ортогональная проекция x на $\mathscr{E}_k^\perp$.

Длина x'' — ортогональной проекции x на $\mathscr{E}_k^\perp$ — называется *расстоянием от вектора x до подпространства $\mathscr{E}_k$*. Она обладает следующим свойством минимальности.

Предложение 6. *Если вектор x представлен как сумма векторов x' из $\mathscr{E}_k$ и x'' из $\mathscr{E}_k^\perp$, то для любого век-*

тора y из $\mathscr{E}_k$, отличного от x', выполнено

$$|x''|=|x-x'|<|x-y|.$$

Доказательство. Обозначив $x'-y$ через z, имеем $|x-y|^2=|x'-y+x''|^2=|z+x''|^2=(z+x'',\ z+x'')=$ $=|z|^2+2(z,\ x'')+|x''|^2$. Но $(z,\ x'')=0$, так как z лежит в $\mathscr{E}_k$, и, следовательно, $|x-y|^2=|x''|^2+|z|^2$. Отсюда непосредственно вытекает доказываемое утверждение.

§ 2. Линейные преобразования в евклидовом пространстве

1. Преобразование, сопряженное данному. Все, сказанное в предыдущей главе о линейных преобразованиях в линейных пространствах, остается, конечно, в силе и для евклидовых пространств. В евклидовом пространстве наличие скалярного произведения позволяет определить некоторые важные классы преобразований. Их изучением мы и займемся в настоящем параграфе. Все дальнейшее относится только к вещественным евклидовым пространствам.

Определение. Линейное преобразование $\mathbf{A}^*$ евклидова пространства называется *сопряженным* данному преобразованию $\mathbf{A}$, если для любых векторов x и y имеет место равенство

$$(\mathbf{A}(x),\ y)=(x,\ \mathbf{A}^*(y)). \tag{1}$$

Допустим, что данное преобразование $\mathbf{A}$ имеет сопряженное $\mathbf{A}^*$. Выясним, как связаны матрицы преобразований $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ в некотором базисе e. Обозначим матрицы этих преобразований соответственно A и A^*, а координатные столбцы векторов x и y — через ξ и η. Тогда равенство (1) можно переписать в виде

$$(A\xi)^T\,\Gamma\eta=\xi^T\Gamma A^*\eta,$$

где Γ — матрица Грама базиса e. После очевидных преобразований имеем

$$\xi^T\,(A^T\Gamma-\Gamma A^*)\,\eta=0. \tag{2}$$

Так как ξ и η — произвольные столбцы, отсюда можно заключить, что

$$A^T\Gamma-\Gamma A^*=O, \tag{3}$$

где O — нулевая матрица. Чтобы сделать это заключение, вспомним пример 4 на стр. 176. Мы видели, что для любой матрицы P и столбцов единичной матрицы e_i и e_j произведение $e_i^T P e_j$ равно элементу p_{ij} матрицы P. Подставляя вместо ξ и η столбцы единичной матрицы, мы можем показать, что любой элемент матрицы $A^T\Gamma - \Gamma A^*$ равен нулю.

Итак, матрицы преобразований **A** и **A*** связаны соотношением (3). В частности, если базис ортонормированный и $\Gamma = E$, мы имеем

$$A^* = A^T. \qquad (4)$$

Предложение 1. *Каждое линейное преобразование в евклидовом пространстве имеет сопряженное преобразование, и притом только одно.*

Для доказательства выберем ортонормированный базис и рассмотрим преобразование **B** с матрицей A^T, если A — матрица заданного преобразования **A**. Условие (1) для преобразования **B** равносильно очевидному равенству $(A\xi)^T\eta = \xi^T(A^T\eta)$. Следовательно, **B** — преобразование, сопряженное для **A**. Если бы имелось два преобразования, сопряженных одному и тому же **A**, то в силу (4) их матрицы совпадали бы Предложение доказано.

Поскольку $(A^T)^T = A$, из формулы (4) вытекает, что

$$(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}. \qquad (5)$$

В качестве приложения введенного в этом пункте понятия дадим «геометрическое» истолкование теоремы Фредгольма для важного частного случая систем из n уравнений с n неизвестными. Для этого рассмотрим n-мерное евклидово пространство $\mathscr{E}_n$ и ортонормированный базис в нем. Каждый столбец будем считать координатным столбцом некоторого вектора, матрицу системы A — матрицей линейного преобразования **A**.

Теорему Фредгольма можно сформулировать так: хотя бы один вектор x, для которого $\mathbf{A}(x) = b$, существует тогда и только тогда, когда вектор b ортогонален каждому y, удовлетворяющему условию $\mathbf{A}^*(y) = o$. Существование вектора x означает, что b принадлежит подпространству $\mathbf{A}(\mathscr{E}_n)$. Множество векторов y — ядро преобразования **A***. Мы пришли к следующей формулировке теоремы:

Множество значений преобразования **A** *совпадает с ортогональным дополнением ядра его сопряженного преобразования* **A***.

В гл. V мы доказали теорему Фредгольма, но и эта ее формулировка легко непосредственно проверяется.

Действительно,

$$(\mathsf{A}(x),\ y)=(x,\ \mathsf{A}^*(y))=(x,\ o)=0.$$

Следовательно, $\mathsf{A}(\mathscr{E}_n)$ принадлежит ортогональному дополнению ядра A^*. Сравнение размерностей показывает, что пространства совпадают.

2. Самосопряженные преобразования. Определение. Линейное преобразование A евклидова пространства называется *самосопряженным* (или *симметрическим*), если $\mathsf{A}=\mathsf{A}^*$.

Из формулы (4) непосредственно следует такое

Предложение 2. *Преобразование является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе симметрическая (т. е. удовлетворяет условию $A=A^T$).*

Собственные значения и собственные векторы самосопряженных преобразований обладают рядом важных и интересных свойств, к изложению которых мы и переходим.

Теорема 1. *Все корни характеристического многочлена самосопряженного преобразования вещественные.*

Доказательство. Обозначим через A матрицу рассматриваемого самосопряженного преобразования в каком-нибудь ортонормированном базисе. Допустим, что характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ имеет комплексный корень λ_0. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$(A-\lambda_0 E)\,\xi=o \tag{6}$$

с n неизвестными $\xi^1, \ldots, \xi^r$ (n — размерность пространства). Матрица системы комплексная, и потому решение ξ, вообще говоря, — комплексный столбец. Нетривиальное решение обязательно существует, поскольку $\det(A-\lambda_0 E)=0$. Пусть ξ_0 — некоторое нетривиальное решение. Подставим ξ_0 в систему и умножим обе части полученного равенства слева на строку $\bar{\xi}_0^T$:

$$\bar{\xi}_0^T A\xi_0=\lambda_0\bar{\xi}_0^T\xi_0. \tag{7}$$

Так как $\bar{\xi}_0^T\xi_0=\xi_0^1\bar{\xi}_0^1+\ldots+\xi_0^n\bar{\xi}_0^n$ — вещественное число, то для получения противоречия достаточно показать, что вещественным является число $\bar{\xi}_0^T A\xi_0$. С этой целью обозначим $\omega=\bar{\xi}_0^T A\xi_0$. При транспонировании квадратная матрица порядка 1 не меняется, и мы имеем

$$\omega=\omega^T=(\bar{\xi}_0^T A\xi_0)^T=\xi_0^T A^T\bar{\xi}_0;$$

с другой стороны,

$$\overline{\omega} = \overline{\xi}_0^T \overline{A} \xi_0.$$

Но A — вещественная симметрическая матрица, и, следовательно $A = \overline{A} = A^T$. Поэтому мы имеем $\omega = \overline{\omega}$, и, значит, ω вещественно. Разделив обе части равенства (7) на отличное от нуля число $\overline{\xi}_0^T \xi_0$, мы видим, что λ_0 обязательно вещественное.

Доказанное утверждение допускает матричную формулировку.

Предложение 3. *Если A — вещественная симметрическая матрица, то все корни уравнения* $\det(A - \lambda E) = 0$ *вещественные.*

Теорема 2. *Собственные векторы самосопряженного преобразования* A, *принадлежащие разным собственным значениям, ортогональны.*

Действительно, пусть $\lambda \neq \mu$ и $\mathsf{A}(x) = \lambda x$, $\mathsf{A}(y) = \mu y$. Тогда

$$(\mathsf{A}(x),\ y) = \lambda(x,\ y).$$

Но иначе можно получить

$$(\mathsf{A}(x),\ y) = (x,\ \mathsf{A}(y)) = \mu(x,\ y).$$

Из этих двух равенств следует $(\lambda - \mu)(x,\ y) = 0$, откуда $(x,\ y) = 0$, как и требовалось.

Теорема 3. *Если подпространство* $\mathscr{E}'$ *инвариантно относительно самосопряженного преобразования* A, *то ортогональное дополнение* $\mathscr{E}'^{\perp}$ *этого подпространства — также инвариантное подпространство.*

Доказательство. Нам дано, что для каждого x из $\mathscr{E}'$ образ $\mathsf{A}(x)$ также лежит в $\mathscr{E}'$. Это значит, что $(\mathsf{A}(x),\ y) = 0$ для любого y из $\mathscr{E}'^{\perp}$. Но так как преобразование A самосопряженное, мы имеем отсюда $(x, \mathsf{A}(y)) = 0$, и, следовательно, $\mathsf{A}(y)$ лежит в $\mathscr{E}'^{\perp}$, как и требовалось.

Теперь мы можем доказать теорему, которая позволяет описать все возможные самосопряженные преобразования. Мы будем называть ее *основной теоремой о самосопряженных преобразованиях.*

Теорема 4. *Пусть* A — *самосопряженное линейное преобразование n-мерного евклидова пространства* $\mathscr{E}_n$. *Тогда в* $\mathscr{E}_n$ *существует ортонормированный базис из собственных векторов преобразования* A.

Доказательство проведем индукцией по числу измерений пространства. Для одномерного пространства $\mathscr{E}_1$ теорема очевидна, так как в таком пространстве каждый вектор — собственный для А и в качестве искомого базиса достаточно взять любой вектор длины 1.

Предположим теперь, что теорема доказана для пространств размерности $k-1$, и докажем ее для k-мерных пространств. Согласно теореме 1 самосопряженное преобразование А в $\mathscr{E}_k$ имеет по крайней мере одно собственное значение[1]) и, следовательно, хотя бы одно одномерное инвариантное подпространство. Обозначим такое подпространство $\mathscr{E}_1$, а единичный вектор в нем — через e. В силу теоремы 3 ортогональное дополнение $\mathscr{E}_{k-1}$ подпространства $\mathscr{E}_1$ является $(k-1)$-мерным подпространством, также инвариантным относительно А.

Рассмотрим ограничение А$'$ преобразования А на подпространстве $\mathscr{E}_{k-1}$ (см. с. 214). Легко видеть, что это — самосопряженное преобразование в $\mathscr{E}_{k-1}$. Действительно, равенство $(\mathrm{A}(x), y) = (x, \mathrm{A}(y))$ выполнено для всех векторов из $\mathscr{E}_k$, а значит, и для всех векторов из $\mathscr{E}_{k-1}$, а для вектора x из $\mathscr{E}_{k-1}$ по определению $\mathrm{A}'(x) = \mathrm{A}(x)$. Если x — собственный вектор преобразования А$'$, то $\mathrm{A}'(x) = \mathrm{A}(x) = \lambda x$, и он является собственным для А.

По предположению индукции в $\mathscr{E}_{k-1}$ существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{k-1}$ из собственных векторов преобразования А$'$. Рассмотрим систему векторов $e_1, \ldots, e_{k-1}, e$. Все векторы попарно ортогональны: $e_1, \ldots, e_{k-1}$ — по построению, а e ортогонален каждому из них, так как $\mathscr{E}_{k-1}$ — ортогональное дополнение $\mathscr{E}_1$. Длина каждого из рассматриваемых векторов равна 1. Каждый из них является собственным для преобразования А. Таким образом, система векторов $e_1, \ldots, e_{k-1}, e$ и есть тот базис, который нам нужно было построить.

Доказанная нами теорема допускает матричную формулировку.

Предложение 4. *Если A — симметрическая матрица, то существует ортогональная матрица S такая, что $S^{-1}AS$ — диагональная матрица.*

Действительно, матрица A задает самосопряженное преобразование в ортонормированном базисе. В качестве S можно взять матрицу перехода от этого базиса к базису, построенному в теореме. Напомним, что в базисе из

---

[1]) В самом «худшем» случае все корни характеристического многочлена совпадают, и тогда А имеет только одно собственное значение.

собственных векторов матрица преобразования диагональная (предложение 6 § 4 гл. VI).

В теореме 1 § 3 гл. IV мы рассматривали, в частности, аффинное преобразование плоскости, состоящее в сжатии (растяжении) по двум взаимно перпендикулярным направлениям. В n-мерном евклидовом векторном пространстве обобщением такого преобразования будет сжатие (растяжение) по n попарно перпендикулярным направлениям. Выберем ортонормированный базис так, чтобы его векторы имели данные направления. Тогда каждый базисный вектор e_i перейдет в ему пропорциональный вектор $\lambda_i e_i$, где λ_i—коэффициент сжатия. (Собственно, это свойство является аккуратным определением сжатия по попарно перпендикулярным направлениям.) В таком базисе матрица преобразования будет диагональной, причем по главной диагонали будут стоять коэффициенты сжатия. Поскольку диагональная матрица симметрична, а базис ортонормирован, сжатие по n попарно перпендикулярным направлениям будет самосопряженным преобразованием.

Обратно, в силу нашей теоремы каждое самосопряженное преобразование с положительными собственными значениями будет сжатием по n попарно перпендикулярным направлениям. Нулевому собственному значению соответствует уже не сжатие, а ортогональное проектирование, а отрицательному собственному значению—произведение сжатия и симметрии.

Если λ^*—собственное значение кратности s, то ему соответствует s-мерное инвариантное подпространство $\mathscr{E}_s$. Действительно, иначе не мог бы существовать базис из собственных векторов: сумма всех кратностей равна n, а число линейно независимых векторов, принадлежащих каждому значению, не может превосходить его кратность.

При $\lambda^* > 0$ ограничение преобразования **A** *на таком* инвариантном пространстве $\mathscr{E}_s$ представляет собой гомотетию, т. е. равномерное сжатие по всем направлениям в λ^* раз.

Рассмотрим теперь способ практического нахождения базиса, существование которого доказано в теореме. Выбрав некоторый (удобнее, если ортонормированный) базис, составляем матрицу данного преобразования. Находим корни ее характеристического многочлена $\det(A-\lambda E)=0$ и для каждого корня находим собственные векторы, решая систему уравнений $(A-\lambda E)\xi=o$. Для простых корней нетривиальное решение системы остается пронормировать.

Для корня кратности s мы получаем фундаментальную систему из s решений. Это — линейно независимые собственные векторы, но они, вообще говоря, не ортогональны. Их следует ортогонализовать и нормировать.

3. Изоморфизм евклидовых пространств. Дадим следующее

Определение. Евклидовы пространства $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное линейное отображение A: $\mathscr{E} \rightarrow \mathscr{E}'$, при котором

$$(\mathsf{A}(x),\ \mathsf{A}(y)) = (x,\ y) \tag{8}$$

для любых x и y из $\mathscr{E}$. Отображение A называется *изоморфизмом* евклидовых пространств.

Таким образом, термин «изоморфизм» имеет различные значения в зависимости от контекста. Если речь идет об евклидовых пространствах, то при изоморфизме, помимо сохранения результатов линейных операций, требуется и сохранение скалярного произведения.

Для того чтобы два евклидовых пространства были изоморфны, разумеется, необходимо, чтобы были равны их размерности. Действительно, в противном случае они не изоморфны даже как линейные пространства. Оказывается, что это условие и достаточно.

Теорема 5. *Любые два евклидовых пространства одной размерности изоморфны. Евклидовы пространства разных размерностей не изоморфны.*

Для доказательства первого утверждения выберем в каждом из рассматриваемых пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ по ортонормированному базису. Отображение A: $\mathscr{E} \rightarrow \mathscr{E}'$ зададим, сопоставив друг другу векторы, имеющие одинаковые координатные столбцы в выбранных базисах. Матрица этого отображения единичная, поэтому отображение будет изоморфизмом пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$, рассматриваемых как линейные пространства. Из формулы (11) § 1 следует, что при таком отображении сохраняется скалярное произведение.

Интересно отметить, что условие (8) очень сильное. Из него следует, что A — линейное отображение и, более того, вложение. Действительно, рассмотрим произвольный вектор x из $\mathscr{E}$ и произвольное число α. Скалярный квадрат вектора $\mathsf{A}(\alpha x) - \alpha\mathsf{A}(x)$ из $\mathscr{E}'$ можно записать в виде $(\mathsf{A}(\alpha x),\ \mathsf{A}(\alpha x)) - 2\alpha(\mathsf{A}(\alpha x),\ \mathsf{A}(x)) + \alpha^2(\mathsf{A}(x),\ \mathsf{A}(x))$. Учитывая (8), видим, что это равно $(\alpha x,\ \alpha x) - 2\alpha(\alpha x,\ x) + \alpha^2(x,\ x)$, т. е. нулю. Таким образом, $\mathsf{A}(\alpha x) = \alpha\mathsf{A}(x)$. Аналогично доказывается, что $\mathsf{A}(x+y) = \mathsf{A}(x) + \mathsf{A}(y)$.

Далее, пусть вектор x принадлежит ядру отображения A, т. е. $\mathsf{A}(x)=o$. Это означает, что $(\mathsf{A}(x), \mathsf{A}(x))=0$ и, в силу (8), что $(x, x)=0$. Таким образом, ядро A — нулевое подпространство и A — вложение.

В общем случае отображение A, удовлетворяющее условию (8), не взаимно однозначно: оно может быть изоморфизмом $\mathscr{E}$ на подпространство в $\mathscr{E}'$.

Пусть размерность m пространства $\mathscr{E}'$ равна размерности n пространства $\mathscr{E}$. Поскольку A — вложение, его ранг r равен n, и тем самым $m=n=r$. Согласно предложению 6 § 3 гл. VI A является изоморфизмом. Мы доказали

Предложение 5. *Произвольное отображение евклидова пространства $\mathscr{E}_n$ в евклидово пространство $\mathscr{E}'_n$ той же размерности является изоморфизмом, если оно сохраняет скалярное произведение.*

4. Ортогональные преобразования. Преобразование A евклидова пространства $\mathscr{E}_n$ называется *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение, т. е. если условие (8) выполнено для любых векторов из $\mathscr{E}$.

Из предложения 5 следует, что ортогональное преобразование является изоморфизмом $\mathscr{E}$ на себя.

Предложение 6. *Для ортогонального преобразования сопряженное преобразование равно обратному преобразованию:* $\mathsf{A}^*=\mathsf{A}^{-1}$.

Действительно, по формуле (8) имеем $(x, \mathsf{A}^*\circ\mathsf{A}(y))= =(x, y)$, или $(x, \mathsf{A}^*\circ\mathsf{A}(y)-y)=0$. Это означает, что вектор $\mathsf{A}^*\circ\mathsf{A}(y)-y$ ортогонален любому вектору пространства и, следовательно, является нулевым. Поскольку равенство $\mathsf{A}^*\circ\mathsf{A}(y)=y$ выполнено для всех векторов, преобразование $\mathsf{A}^*\circ\mathsf{A}$ является тождественным. Отсюда прямо следует доказываемое предложение.

Следствие. *В ортонормированном базисе ортогональное преобразование имеет ортогональную матрицу:* $A^TA=E$.

Предложение 7. *Корни характеристического многочлена ортогонального преобразования A (в том числе и комплексные корни) по абсолютной величине равны единице.*

Пусть A — матрица A в ортонормированном базисе и λ — корень уравнения $\det(A-\lambda E)=0$ (возможно, комплексный). Система уравнений $(A-\lambda E)\xi=o$ имеет, вообще говоря, комплексное нетривиальное решение. Из равенства $A\xi=\lambda\xi$ следует $\overline{\xi}^T\overline{A}^T=\overline{\lambda}\overline{\xi}^T$. Помножим каждую часть первого равенства слева на соответствующую часть второго: $\overline{\xi}^TA^TA\xi=\lambda\overline{\lambda}\,\overline{\xi}^T\xi$. Так как $A^TA=E$ и $\overline{\xi}^T\xi\neq 0$, имеем отсюда $\lambda\overline{\lambda}=1$, как и требовалось.

Предложение 8. *Если $\mathscr{E}'$ — подпространство, инвариантное относительно ортогонального преобразования* A, *то ортогональное дополнение $\mathscr{E}'^{\perp}$ подпространства $\mathscr{E}'$ также инвариантно.*

Для доказательства заметим, что ограничение A′ преобразования A на $\mathscr{E}'$ — ортогональное преобразование и, следовательно, взаимно однозначно. В частности, оно является наложением. Итак, если x лежит в $\mathscr{E}'$, то вектор $A^{-1}(x)$ также лежит в $\mathscr{E}'$.

Рассмотрим произвольный вектор y из $\mathscr{E}'^{\perp}$. Нам надо доказать, что его образ A (y) ортогонален каждому x из $\mathscr{E}'$. Мы имеем

$$(x, \mathrm{A}(y)) = (\mathrm{A}^{-1}(x), y) = 0,$$

поскольку y ортогонален каждому вектору из $\mathscr{E}'$. Предложение доказано.

Теорема 6. *Пусть* A — *ортогональное преобразование n-мерного евклидова пространства $\mathscr{E}_n$. Тогда $\mathscr{E}_n$ является прямой суммой одномерных и двумерных подпространств, инвариантных относительно* A.

Доказательство. Любое ортогональное преобразование в каждом евклидовом пространстве имеет хотя бы одно одномерное или двумерное инвариантное подпространство, так как его характеристический многочлен имеет хотя бы один вещественный или комплексный корень.

Используя это соображение, докажем нашу теорему по индукции. Для пространств размерностей 1 и 2 утверждение не вызывает сомнений Предположим, что мы уже доказали теорему для пространств размерностей $k-1$ и $k-2$, и докажем ее для k-мерного пространства. В $\mathscr{E}_k$ существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство $\mathscr{E}'$, а его ортогональное дополнение $\mathscr{E}'^{\perp}$ представляет собой соответственно $(k-1)$-мерное или $(k-2)$-мерное инвариантное подпространство. К ограничению A′ преобразования A на $\mathscr{E}'^{\perp}$ мы применим предположение индукции. Подпространства $\mathscr{E}''$, $\mathscr{E}'''$, ..., на которые распадается $\mathscr{E}'^{\perp}$, будут инвариантными также относительно A. Поскольку $\mathscr{E}_k$ есть прямая сумма $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}'^{\perp}$ и $\mathscr{E}'^{\perp}$ — прямая сумма $\mathscr{E}''$, $\mathscr{E}'''$, ..., пространство $\mathscr{E}_k$ является прямой суммой $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}''$, $\mathscr{E}'''$, ... Теорема доказана.

Можно предполагать, что двумерные инвариантные подпространства не содержат внутри себя одномерных инвариантных подпространств. Действительно, если в двумерном инвариантном подпространстве $\mathscr{E}_2$ содержится одномерное $\mathscr{E}_1$, то содержится и второе одномерное инвариантное подпространство $\mathscr{E}_1^{\perp}$ — ортогональное дополнение первого до $\mathscr{E}_2$. Таким образом, $\mathscr{E}_2$ есть прямая сумма $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_1^{\perp}$, и в разложении $\mathscr{E}_n$ мы можем заменить слагаемое $\mathscr{E}_2$ на два слагаемых $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_1^{\perp}$.

Выберем в каждом из двумерных и одномерных инвариантных подпространств, на которые распадается $\mathscr{E}_n$, по ортонормированному базису и объединим все эти базисы. Мы получим ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathscr{E}_n$. Построим матрицу A преобразования A в этом базисе.

Пусть базисный вектор e_i соответствует одномерному инвариантному пространству, т. е. является собственным. В силу предложения 5 соответствующее собственное значение равно 1 или -1. Поэтому все элементы i-го столбца матрицы равны нулю, кроме элемента α_i^i на главной диагонали, равного 1 или -1.

Рассмотрим базисные векторы e_k и e_{k+1}, лежащие в двумерном инвариантном подпространстве $\mathscr{E}'$. Векторы $\mathsf{A}(e_k)$ и $\mathsf{A}(e_{k+1})$ раскладываются только по векторам e_k и e_{k+1}, и потому в k-м и $(k+1)$ м столбцах матрицы A равны нулю все элементы, за исключением клетки второго порядка

$$\begin{Vmatrix} \alpha_k^k & \alpha_{k+1}^k \\ \alpha_k^{k+1} & \alpha_{k+1}^{k+1} \end{Vmatrix}$$

на главной диагонали. Эта клетка является матрицей ограничения A' преобразования A на подпространстве $\mathscr{E}'$. Согласно предложению 6 § 2 гл. IV и формуле (4) § 3 гл IV матрица ортогонального преобразования в двумерном пространстве в ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & \mp\sin\varphi \\ \sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{Vmatrix}$$

где верхние знаки берутся для ортогональных преобразований первого рода, а нижние—для преобразований второго рода. С нижними знаками матрица является симметрической. Поэтому ортогональное преобразование второго рода самосопряженное и, следовательно, имеет два одномерных инвариантных подпространства. Это противоречит сделанному выше предположению Таким образом, существует такое число φ_k, что

$$\begin{Vmatrix} \alpha_k^k & \alpha_{k+1}^k \\ \alpha_k^{k+1} & \alpha_{k+1}^{k+1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{Vmatrix}.$$

Предоставим читателю самостоятельно выписать общий вид матрицы A.

§ 3. Понятие об унитарных пространствах

1. Определение. В этом параграфе мы покажем, как определяется скалярное произведение в комплексных линейных пространствах. При этом мы не будем приводить доказательств, поскольку их можно получить незначительным видоизменением доказательств соответствующих предложений из § 1. Здесь все числа, вообще говоря, комплексные.

Рассмотрим комплексное линейное пространство $\mathscr{L}$ и предположим, что мы каким-то образом сопоставили каждой паре векторов x и y число (x, y). Оказывается, что естественные аксиомы, приведенные в определении евклидова пространства, выполнены быть не могут. Действительно, пусть x—ненулевой вектор. В нашем пространстве определено умножение вектора на комплексное число, и мы можем взять вектор ix, где i—мнимая единица Если выполнены аксиомы 1° и 2°, то имеет место равенство

$$(ix,\ ix) = -(x,\ x).$$

При положительном произведении справа произведение слева отрицательно Это противоречит аксиоме 4°.

В силу этого обстоятельства в комплексных пространствах вводятся другие определения скалярного произведения. В одном из них заменяют аксиому 4° более слабым требованием· чтобы из того, что $(x, y)=0$ при всех x, вытекало $y=0$ Комплексное линейное пространство, в котором так определено скалярное произведение, называется *комплексным евклидовым пространством* Комплексные евклидовы пространства используются сравнительно редко. Гораздо чаще в приложениях встречаются так называемые унитарные пространства.

Определение Комплексное линейное пространство $\mathscr{L}$ называется *унитарным* (или *эрмитовым*), если задан закон, сопоставляющий каждым двум векторам x и y из $\mathscr{L}$ комплексное число (x, y), и закон этот удовлетворяет следующим аксиомам, каковы бы ни были векторы x, y и z и число α.

1°. $(x, y)=\overline{(y, x)}$, т е. **при перестановке сомножителей** скалярное произведение **заменяется на комплексно сопряженное** число

2°. $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$

3°. $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$.

4° $(x, x)>0$, если $x \neq o$.

Число (x, y) называется *скалярным произведением* векторов x и y.

Заметим, что для любого вектора $(x, x)=\overline{(x, x)}$, и потому скалярный квадрат вектора—всегда вещественное число В аксиоме 4° требуется, чтобы это число было положительно для $x \neq o$.

Из аксиом 1° и 2° вытекает такое правило вынесения числового множителя от второго сомножителя в скалярном произведении·

$$(x, \alpha y)=\overline{(\alpha y, x)}=\overline{\alpha(y, x)}=\bar{\alpha}\,\overline{(y, x)}$$

(ср. (4) § 7 гл. V). Окончательно

$$(x, \alpha y)=\bar{\alpha}(x, y). \tag{1}$$

Длина вектора и угол между векторами определяются теми же формулами, что и в вещественном случае. Длина вектора всегда вещественна и неотрицательна. Угол, вообще говоря, комплексный

Векторы называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Нулевой вектор и только он ортогонален каждому вектору.

Отметим, что имеет место неравенство

$$(x, x)(y, y) \geqslant |(x, y)|^2 = (x, y)(y, x).$$

Оно доказывается так же, как и неравенство (7) § 1, с учетом того, что

$$(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha\overline{\alpha}(x, x) + \alpha\overline{\beta}(x, y) + \beta\overline{\alpha}(y, x) + \beta\overline{\beta}(y, y).$$

Пример 1. Комплексное линейное пространство столбцов высоты n становится n-мерным унитарным пространством, если определить скалярное произведение столбцов ξ и η по формуле

$$(\xi, \eta) = \xi^1\overline{\eta^1} + \ldots + \xi^n\overline{\eta^n}. \qquad (2)$$

Действительно, по этой формуле имеем также

$$(\eta, \xi) = \eta^1\overline{\xi^1} + \ldots + \eta^n\overline{\xi^n}.$$

Из формул (3) и (4) § 7 гл. V следует, что $(\xi, \eta) = \overline{(\eta, \xi)}$.

Аксиомы 2° и 3° следуют из свойств умножения матриц, если заметить, что правая часть (2) представляет собой произведение $\xi^T\overline{\eta}$, где $\overline{\eta}$ — столбец из элементов $\overline{\eta^1}, \ldots, \overline{\eta^n}$. Наконец,

$$(\xi, \xi) = \xi^1\overline{\xi^1} + \ldots + \xi^n\overline{\xi^n} = |\xi^1|^2 + \ldots + |\xi^n|^2, \qquad (3)$$

а следовательно, скалярный квадрат столбца неотрицателен и равен нулю только для нулевого столбца.

Пример 2. Одномерное унитарное пространство можно построить следующим образом. Рассмотрим в качестве множества векторов все векторы обычной плоскости. Операцию сложения определим, как обычно, по правилу параллелограмма.

Для того чтобы определить операцию умножения на комплексное число, выберем некоторый ортонормированный (в обычном смысле) базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Произведением вектора $\mathbf{x}$ с компонентами ξ^1, ξ^2 на число $\alpha + i\beta$ мы назовем вектор с компонентами $\alpha\xi^1 - \beta\xi^2$ и $\alpha\xi^2 + \beta\xi^1$. Смысл этого определения такой. Каждому вектору мы можем сопоставить комплексное число $\xi^1 + i\xi^2$; при этом соответствие между числами и векторами взаимно однозначно: вектору соответствует только одно число, и каждому числу соответствует единственный вектор. Произведение $(\alpha + i\beta)\mathbf{x}$ соответствует числу $(\alpha + i\beta)(\xi^1 + i\xi^2)$. Заметим, что сумме векторов соответствует сумма чисел, соответствующих слагаемым.

Проверим, выполнены ли аксиомы линейного пространства. Первые четыре аксиомы, относящиеся к сложению векторов, разумеется, выполнены. Далее, равенства $(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$ и $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$ следуют из дистрибутивности умножения комплексных чисел. Равенство $\lambda(\mu\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}$ вытекает из ассоциативности умножения. Очевидно также, что $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$. Таким образом, мы имеем комплексное линейное пространство. Размерность его равна 1, так как каждый вектор $\mathbf{x}$ равен $(\xi^1+i\xi^2)\mathbf{e}_1$, где $\xi^1+i\xi^2$ — комплексное число, определяемое вектором $\mathbf{x}$. Базисом является вектор $\mathbf{e}_1$.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{y}=\mu\mathbf{e}_1$ определим по формуле $(x, y)=\lambda\bar{\mu}$. Не представляет труда проверить аксиомы скалярного умножения в унитарном пространстве.

Унитарная длина вектора $(1+i)\mathbf{e}_1$ равна $\sqrt{2}$. Скалярное произведение $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)=(\mathbf{e}_1, i\mathbf{e}_1)=-i$, хотя по отношению к скалярному произведению на вещественной плоскости векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ перпендикулярны.

2. Свойства унитарных пространств. Все рассмотренные выше свойства евклидовых пространств, иногда с незначительными изменениями, переносятся на унитарные пространства.

В конечномерном унитарном пространстве существует ортонормированный базис, т. е. базис из попарно ортогональных векторов единичной длины. Такой базис можно получить из произвольного базиса методом ортогонализации.

Скалярное произведение выражается через компоненты сомножителей в ортонормированном базисе по формуле

$$(x, y)=\xi^1\bar{\eta}^1+\ldots+\xi^n\bar{\eta}^n.$$

Для произвольного базиса вводится матрица Грама — матрица Γ, составленная из попарных скалярных произведений базисных векторов. Скалярное произведение векторов x и y с координатными столбцами ξ и η находится по формуле

$$(x, y)=\xi^T\Gamma\bar{\eta}.$$

Поскольку $(e_i, e_j)=\overline{(e_j, e_i)}$, матрица Грама в унитарном пространстве удовлетворяет условию

$$\Gamma^T=\bar{\Gamma}. \tag{4}$$

(Здесь и далее черта над матрицей означает замену всех ее элементов на комплексно сопряженные.)

Определение. Каждая матрица, удовлетворяющая условию (4), называется *эрмитовой*.

Матрица перехода S от одного ортонормированного базиса в унитарном пространстве к другому такому же базису должна удовлетворять равенству

$$S^T\overline{S}=E. \tag{5}$$

Это означает, что $S^{-1}=\overline{S}^T$, а отсюда следует

$$\overline{S}S^T=E.$$

Определение. Матрицы, удовлетворяющие равенству (5), называются *унитарными*.

Отметим, что из равенства (5) и формулы (7) § 7 гл. V следует

$$\det(S^T\overline{S})=\det S^T\det\overline{S}=(\det S)\overline{(\det S)}=|\det S|^2=1,$$

и, таким образом, детерминант унитарной матрицы — комплексное число, по модулю равное единице.

Ортогональное дополнение подпространства определяется так же, как в евклидовом пространстве. Точно так же можно доказать, что ортогональное дополнение будет подпространством дополнительной размерности.

3. Самосопряженные и унитарные преобразования. Преобразование унитарного пространства называется *самосопряженным*, если для любых векторов x и y выполнено равенство

$$(\mathbf{A}(x),\ y)=(x,\ \mathbf{A}(y)).$$

Из этого определения вытекает, что преобразование унитарного пространства является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе эрмитова. На самосопряженные преобразования унитарных пространств без изменений переносятся теоремы 1—4 § 2.

Преобразование унитарного пространства, удовлетворяющее условию

$$(\mathbf{A}(x),\ \mathbf{A}(y))=(x,\ y)$$

для любых векторов x и y, называется *унитарным* преобразованием. Нетрудно проверить, что преобразование унитарно тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе унитарная.

ГЛАВА VIII

ФУНКЦИИ НА ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Линейные функции

1. Определение функции. Как и в гл. VI, мы будем рассматривать произвольное линейное пространство. В тех случаях, когда различие между вещественными и комплексными пространствами окажется существенным, будут сделаны дополнительные предположения. Если слово «число» употребляется без уточнения, следует иметь в виду комплексное число для комплексного пространства и вещественное число для вещественного. Как правило, мы не вводим скалярного произведения, но значительная часть результатов относится к евклидовым пространствам

Определение. Будем говорить, что на линейном пространстве $\mathscr{L}$ задана *функция* (от одного вектора), если каждому вектору x из $\mathscr{L}$ сопоставлено число; задана *функция от двух векторов*, если каждой упорядоченной паре x, y векторов из $\mathscr{L}$ сопоставлено число.

Число, которое функция $\mathfrak{f}$ сопоставляет вектору x, мы будем называть значением функции $\mathfrak{f}$ на векторе x и обозначать $\mathfrak{f}(x)$. Аналогично определяется значение $\mathfrak{g}(x, y)$ функции $\mathfrak{g}$ от двух векторов.

Функции на бесконечномерных пространствах принято называть *функционалами*.

Пусть пространство $\mathscr{L}_n$ имеет размерность n. Если мы выберем некоторый базис, то каждому вектору x из $\mathscr{L}_n$ будут сопоставлены n его компонент $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Напомним, что в математическом анализе называют *функцией от n переменных* закон, который ставит в соответствие некоторое число каждому упорядоченному набору из n чисел $\xi^1, \ldots, \xi^n$, входящему в определенную совокупность таких наборов. Таким образом, при выбранном базисе функция $\mathfrak{f}$ на линейном пространстве $\mathscr{L}_n$ задается функцией от n переменных, определенной для всевозможных наборов $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Если базис изменится, тому же вектору x будут соответствовать новые компоненты $\xi'^1, \ldots$ $\ldots, \xi'^n$ и, следовательно, прежняя функция $\mathfrak{f}$ будет задаваться новой функцией от n переменных.

2. Линейные функции. Введем

Определение. Функция $\mathfrak{f}$ на линейном пространстве $\mathscr{L}$ называется *линейной*, если для любых векторов x и y из $\mathscr{L}$ и любого числа α выполнены равенства

$$\mathfrak{f}(x+y)=\mathfrak{f}(x)+\mathfrak{f}(y), \quad \mathfrak{f}(\alpha x)=\alpha\mathfrak{f}(x). \tag{1}$$

Читатель может заметить, что линейная функция на линейном пространстве не является новым для него объектом. Это в точности то же самое, что линейное отображение данного линейного пространства в одномерное арифметическое пространство (ср. пример 3) § 3 гл. VI).

Пример 1. Функция, сопоставляющая каждому вектору число нуль, является линейной. Функция, сопоставляющая всем векторам одно и то же число, не равное нулю, линейной быть не может, так как для каждой линейной функции $\mathfrak{f}(o)=0$. Рекомендуем читателю самостоятельно проверить эти утверждения.

Пример 2. Пусть $\mathscr{E}_n$—n-мерное евклидово пространство. Выберем в нем некоторый фиксированный вектор a. Тогда каждому вектору x из $\mathscr{E}_n$ мы можем сопоставить число $\zeta=(a, x)$. Очевидно, что равенства (1) выполнены, и мы имеем линейную функцию на $\mathscr{E}_n$.

Пример 3. Пусть в линейном пространстве $\mathscr{L}_n$ выбран базис $e_1, \ldots, e_n$. Сопоставим каждому вектору x его i-ю компоненту ξ^i в данном базисе. Очевидно, что это соответствие—линейная функция на $\mathscr{L}_n$. Мы обозначим ее $\mathfrak{p}^i$. Так может быть построено n функций $\mathfrak{p}^1, \ldots, \mathfrak{p}^n$. Конечно, они зависят от того, какой базис мы выбрали.

Пример 4. Рассмотрим бесконечномерное линейное пространство $\mathscr{L}$, состоящее из функций от одной независимой переменной ξ, определенных и непрерывных для $0\leqslant\xi\leqslant 1$. Пусть $v(\xi)$—фиксированная функция из $\mathscr{L}$, например $v(\xi)=\sin\xi$. Тогда каждой функции $u(\xi)$ из $\mathscr{L}$ можно сопоставить число

$$\zeta=\int_0^1 v(\xi)\,u(\xi)\,d\xi.$$

Очевидно, что это соответствие—линейный функционал. Впрочем, если вспомнить пример 3 § 1 гл. VII, станет ясно, что этот функционал построен по образцу линейной функции из примера 2.

Еще один линейный функционал на том же пространстве $\mathscr{L}$ мы получим, если сопоставим каждой функции $u(\xi)$ из $\mathscr{L}$ ее значение $u(0)$ при $\xi=0$.

Рассмотрим произвольное n-мерное линейное пространство $\mathscr{L}_n$ и выберем в нем некоторый базис $e_1, \ldots, e_n$. Значение линейной функции $\mathfrak{f}$ на векторе x из $\mathscr{L}_n$ может быть записано через компоненты этого вектора $\xi^1, \ldots, \xi^n$:

$$\mathfrak{f}(x)=\mathfrak{f}(\xi^1 e_1+\ldots+\xi^n e_n)=\xi^1\mathfrak{f}(e_1)+\ldots+\xi^n\mathfrak{f}(e_n).$$

Числа $\mathfrak{f}(e_1), \ldots, \mathfrak{f}(e_n)$ не зависят от вектора x, а определяются только по функции $\mathfrak{f}$ и базису $e_1, \ldots, e_n$. Мы доказали следующее

Предложение 1. *Каждая линейная функция на n-мерном линейном пространстве в произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ задается линейным однородным многочленом*

$$\mathfrak{f}(x)=\varkappa_1\xi^1+\ldots+\varkappa_n\xi^n \tag{2}$$

от компонент вектора по этому базису. Коэффициенты многочлена $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ равны значениям функции на базисных векторах.

Значения функции $\mathfrak{f}$ на векторах базиса $\boldsymbol{e}$ удобно называть *компонентами* (или *коэффициентами*) функции $\mathfrak{f}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Матрица линейного отображения n-мерного пространства в одномерное имеет размеры $1\times n$, т. е. представляет собой строку длины n. В нашем случае это — строка $\|\varkappa_1\ldots\varkappa_n\|$. Предоставим читателю проверить это. Формула (2) в матричном виде записывается так:

$$\mathfrak{f}(x)=\|\varkappa_1\ldots\varkappa_n\|\left\|\begin{matrix}\xi^1\\ \ldots\\ \xi^n\end{matrix}\right\|=\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\xi}. \tag{3}$$

Легко видеть, что каждая строка $\boldsymbol{\varkappa}$ по формуле (3) определяет линейную функцию. В самом деле, $\boldsymbol{\varkappa}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\varkappa}(\alpha\boldsymbol{\xi})=\alpha(\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\xi})$.

Формула (6) § 3 гл. VI выражает матрицу отображения в новых базисах через старую матрицу отображения и матрицы перехода к новым базисам. Так как в одномерном арифметическом пространстве базис фиксирован раз навсегда, для линейной функции эта формула принимает вид

$$\boldsymbol{\varkappa}'=\boldsymbol{\varkappa}S. \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{\varkappa}$ — строка коэффициентов функции в базисе $\boldsymbol{e}$, а $\boldsymbol{\varkappa}'$ — строка ее коэффициентов в базисе $\boldsymbol{e}'=\boldsymbol{e}S$. Разумеется, формулу (4) легко получить и непосредственно. Действительно, запишем $\mathfrak{f}(x)$ в каждом из двух базисов: $\mathfrak{f}(x) = \varkappa\xi = \varkappa'\xi'$. Отсюда согласно (3) § 1 гл. VI $\varkappa S\xi' = \varkappa'\xi'$ или $(\varkappa S - \varkappa')\xi' = o$. Здесь ξ' — произвольный столбец. Подставляя на его место последовательно каждый столбец единичной матрицы, мы увидим, что каждый элемент строки $\varkappa S - \varkappa'$ равен нулю.

3. Сопряженное пространство. В гл. VI мы ввели определения суммы линейных отображений и произведения линейного отображения на число. В применении к линейным функциям эти определения формулируются так:

Определение. *Суммой линейных функций* $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ называется функция $\mathfrak{h}$, значение которой на каждом векторе x определено равенством $\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{f}(x) + \mathfrak{g}(x)$. *Произведением линейной функции* $\mathfrak{f}(x)$ *на число* α называется функция $\mathfrak{g}(x)$, значение которой на каждом векторе x определяется равенством $\mathfrak{g}(x) = \alpha\mathfrak{f}(x)$.

Предложение 2. *Пусть* $\mathfrak{f}$ *и* $\mathfrak{g}$ — *линейные функции на линейном пространстве* $\mathscr{L}$ *и* $\varkappa$ *и* λ — *их строки коэффициентов в некотором базисе* $\boldsymbol{e}$. *Тогда сумма* $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$ — *линейная функция, имеющая строку коэффициентов* $\varkappa + \lambda$ *в базисе* $\boldsymbol{e}$, *и для произвольного числа* α *произведение* $\alpha\mathfrak{f}$ — *линейная функция, строка коэффициентов которой в базисе* $\boldsymbol{e}$ *есть* $\alpha\varkappa$.

Для произвольных линейных отображений это было доказано в п. 6 § 3 гл. VI. Воспроизведем, однако, это доказательство для случая суммы линейных функций. Для произвольного вектора x значения $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ записываются в базисе $\boldsymbol{e}$ как $\varkappa\xi$ и $\lambda\xi$. Тогда значение суммы $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$ на том же векторе равно $\varkappa\xi + \lambda\xi = (\varkappa + \lambda)\xi$. Отсюда видно, что $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$ — линейная функция со строкой коэффициентов $\varkappa + \lambda$.

Предложение 3. *Множество* $\mathscr{L}^*$ *всех линейных функций на* n*-мерном линейном пространстве* $\mathscr{L}_n$ *по отношению к введенным выше операциям сложения и умножения на число представляет собой* n*-мерное линейное пространство.*

Действительно, существует взаимно однозначное отображение множества $\mathscr{L}^*$ в множество строк длины n. Согласно предложению 2 при этом отображении сумме функций соответствует сумма строк и произведению функции на число соответствует произведение строки на это число. Поскольку аксиомы линейного пространства выполнены для операций со строками, они будут выполнены и для операций в $\mathscr{L}^*$. Следовательно, $\mathscr{L}^*$ — линейное пространство, изоморфное пространству строк длины n.

Определение. Линейное пространство $\mathscr{L}^*$ всех линейных функций на линейном пространстве $\mathscr{L}$ называется *сопряженным* пространству $\mathscr{L}$.

Выберем в пространстве $\mathscr{L}_n$ базис e и рассмотрим линейные функции p^i $(i=1, \ldots, n)$, определяемые равенствами $\mathsf{p}^i(x)=\xi^i$, где ξ^i — i-я компонента вектора x (ср. пример 3). Это означает, что

$$\mathsf{p}^i(e_j)=\begin{cases} 0, & i\neq j, \\ 1, & i=j, \end{cases} \tag{5}$$

или, иначе, координатная строка функции p^i есть i-я строка единичной матрицы. Отсюда легко следует, что функции $\mathsf{p}^1, \ldots, \mathsf{p}^n$ линейно независимы.

Строка $\varkappa=\|\varkappa_1\ldots\varkappa_n\|$ раскладывается по строкам единичной матрицы с коэффициентами $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$. Это значит, что элемент f пространства $\mathscr{L}^*$ со строкой коэффициентов $\|\varkappa_1\ldots\varkappa_n\|$ имеет разложение

$$\mathsf{f}=\varkappa_1\mathsf{p}^1+\ldots+\varkappa_n\mathsf{p}^n. \tag{6}$$

Таким образом $\mathsf{p}^1, \ldots, \mathsf{p}^n$ — базис в пространстве $\mathscr{L}_n^*$.

Определение. Базис $\mathsf{p}^1, \ldots, \mathsf{p}^n$ пространства $\mathscr{L}_n^*$, определяемый формулой (5), называется *взаимным* (или *биортогональным*) базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{L}_n$.

Введем столбец p, составленный из функций p^i. Теперь разложение (6) можно переписать в матричной форме:

$$\mathsf{f}=\|\varkappa_1\ldots\varkappa_n\|\begin{Vmatrix} \mathsf{p}^1 \\ \ldots \\ \mathsf{p}^n \end{Vmatrix}=\varkappa p. \tag{7}$$

Если для пространства $\mathscr{L}_n^*$ придерживаться соглашения писать компоненты вектора в столбец, то формулу (7) следовало бы написать $\mathsf{f}=p^T\varkappa^T$.

Пусть в пространстве $\mathscr{L}_n$ базисы e и e' связаны равенством $e'=eS$. Найдем матрицу перехода между их взаимными базисами p и p'. Для этого напишем формулу (4) в виде (3) § 1 гл. VI, решив ее относительно старых компонент и записав компоненты в столбец. Мы получим

$$\varkappa^T=(S^{-1})^T\varkappa'^T.$$

Отсюда видно, что матрицей перехода от базиса p к базису p' в пространстве $\mathscr{L}_n^*$ будет матрица $(S^{-1})^T$, т. е. имеет место равенство $p'^T=p^T(S^{-1})^T$. Если вернуться для пространства $\mathscr{L}_n^*$ к записи элементов базиса в столбец, зависимость между базисами примет вид

$$p = Sp'. \tag{8}$$

Пространство $\mathscr{L}_n^*$ — такое же линейное пространство, как и любое другое, и, следовательно, имеет сопряженное пространство $\mathscr{L}_n^{**}$, элементы которого — линейные функции на $\mathscr{L}_n^*$.

Предложение 4. *Пространство $\mathscr{L}_n^{**}$ может быть отождествлено с $\mathscr{L}_n$.*

Доказательство. Фиксируем определенный вектор x из $\mathscr{L}_n$ и сопоставим каждому элементу $\mathfrak{f}$ из $\mathscr{L}_n^*$ число $\mathfrak{f}(x)$. Таким образом, x можно рассматривать как функцию на $\mathscr{L}_n^*$. Эта функция линейная. Действительно, $(\mathfrak{f}+\mathfrak{g})(x) = \mathfrak{f}(x)+\mathfrak{g}(x)$, и, следовательно, функция x сумме элементов из $\mathscr{L}_n^*$ сопоставляет сумму чисел, сопоставляемых слагаемым. Аналогично, равенство $(\alpha\mathfrak{f})(x) = \alpha\mathfrak{f}(x)$ означает, что произведению элемента $\mathfrak{f}$ на α функция x сопоставляет произведение α на число, сопоставляемое $\mathfrak{f}$. Итак, x можно рассматривать как элемент из $\mathscr{L}_n^{**}$.

Докажем, что все пространство $\mathscr{L}_n$ совпадает с подпространством в $\mathscr{L}_n^{**}$. Для этого достаточно доказать, что сумма и произведение на число для векторов из $\mathscr{L}_n$ совпадают с их суммой и произведением на число, если их понимать как линейные функции на $\mathscr{L}_n^*$. Но это очевидно. Например, для суммы это равносильно условию $\mathfrak{f}(x+y) = \mathfrak{f}(x)+\mathfrak{f}(y)$, верному для любых x и y из $\mathscr{L}_n$ и любого $\mathfrak{f}$ из $\mathscr{L}_n^*$.

Теперь совпадение $\mathscr{L}_n$ и $\mathscr{L}_n^{**}$ вытекает из равенства их размерностей в силу предложения 2 § 2 гл. VI.

4. Линейные функции на евклидовых пространствах. Выбор базиса в линейном пространстве $\mathscr{L}$ устанавливает изоморфизм между $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^*$. Если пространство евклидово, то изоморфизм между ним и его сопряженным можно установить независимо от базиса. Именно, в примере 2 было показано, что по формуле $\mathfrak{f}(x) = (a, x)$ каждому вектору a евклидова пространства можно сопоставить линейную функцию на этом пространстве.

Назовем вектор a присоединенным функции $\mathfrak{f}(x) = (a, x)$ и запишем связь между строкой $\varkappa$ коэффициентов этой функции и координатным столбцом вектора a в некотором базисе $\boldsymbol{e}$. Мы имеем $\mathfrak{f}(x) = \varkappa\xi = \alpha^T\Gamma\xi$, где α и ξ — координатные столбцы векторов a и x, а Γ — матрица Грама базиса $\boldsymbol{e}$. Так как коэффициенты линейной функции определены однозначно (это ее значения на векторах бависа), из последнего равенства следует, что

$$\varkappa = \alpha^T\Gamma, \quad \text{или} \quad \varkappa^T = \Gamma\alpha.$$

Последнюю формулу можно рассматривать как координатную запись линейного отображения Γ: $\mathscr{E}_n \to \mathscr{E}_n^*$ в паре базисов e и p, причем базис p — взаимный базису e. Поскольку $\det \Gamma \neq 0$, отображение Γ является изоморфизмом $\mathscr{E}_n$ на $\mathscr{E}_n^*$, рассматриваемых как линейные пространства.

Отсюда, в частности, следует, что для любой линейной функции f на $\mathscr{E}_n$ найдется присоединенный вектор f такой, что $\mathrm{f}(x) = (f, x)$.

В пространстве $\mathscr{E}_n^*$ пока не введено скалярное умножение. Но мы можем ввести его по формуле $(\Gamma(a), \Gamma(b)) = (a, b)$. Если это сделано, то отображение Γ будет изоморфизмом евклидовых пространств.

Итак, между евклидовым пространством $\mathscr{E}_n$ и его сопряженным существует вполне определенный, связанный со скалярным произведением изоморфизм, который позволяет отождествить эти пространства. Такое отождествление является общепринятым.

Рассмотрим векторы $p^i = \Gamma^{-1}(\mathrm{p}^i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, отождествляемые с элементами базиса p. Из формулы (б) следует, что они удовлетворяют условию

$$(p^i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Отсюда нетрудно вывести, что при $n = 3$ взаимный базис, определенный нами в § 3 гл. I, совпадает с взаимным базисом в смысле определения на с. 249.

§ 2. Квадратичные формы

1. Билинейные формы. Введем следующее

Определение. *Билинейной функцией* или *билинейной формой* на линейном пространстве $\mathscr{L}_n$ называется функция b от двух векторов на $\mathscr{L}_n$, удовлетворяющая (для любых векторов x, y и z и любого числа α) равенствам

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{b}(x+y, z) = \mathrm{b}(x, z) + \mathrm{b}(y, z), \quad \mathrm{b}(\alpha x, y) = \alpha\mathrm{b}(x, y), \\ &\mathrm{b}(x, y+z) = \mathrm{b}(x, y) + \mathrm{b}(x, z), \quad \mathrm{b}(x, \alpha y) = \alpha\mathrm{b}(x, y). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Выберем в пространстве $\mathscr{L}_n$ базис $e_1, \ldots, e_n$. Если $x = \sum \xi^i e_i$ и $y = \sum \eta^j e_j$, то значение билинейной формы b на векторах x и y может быть вычислено следующим образом:

$$\mathrm{b}(x, y) = \mathrm{b}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i, \ \sum_{j=1}^{n} \eta^j e_j\right) = \sum_{i, j} \xi^i \eta^j \mathrm{b}(e_i, e_j),$$

или окончательно

$$\mathrm{b}(x, y) = \sum_{i, j} \beta_{ij} \xi^i \eta^j. \tag{2}$$

n^2 чисел β_{ij} — значения билинейной формы на всевозможных парах базисных векторов — называются *коэффициентами билинейной формы* в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Их принято записывать в виде квадратной матрицы порядка n:

$$B = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей билинейной формы* в данном базисе. В матричном виде, как легко проверить умножением матриц, равенство (2) записывается в виде

$$\mathrm{b}(x, y) = \xi^T B \eta. \tag{3}$$

При замене базиса матрица билинейной формы, разумеется, изменяется. Получим закон ее изменения. Пусть векторы нового базиса $e'_1, \ldots, e'_n$ выражаются через векторы старого базиса $e_1, \ldots, e_n$ равенствами $e'_i = \sum \sigma_i^k e_k$, где через σ_i^k обозначены элементы матрицы перехода S. Для коэффициентов билинейной формы b в базисе e' мы имеем при любых $i, j = 1, \ldots, n$

$$\mathrm{b}(e'_i, e'_j) = \mathrm{b}\left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_i^k e_k, \ \sum_{l=1}^{n} \sigma_j^l e_l\right) = \sum_{k, l} \sigma_i^k \sigma_j^l \mathrm{b}(e_k, e_l),$$

или

$$\beta'_{ij} = \sum_{k, l} \sigma_i^k \sigma_j^l \beta_{kl}. \tag{4}$$

Как легко проверить, равенства (3) равносильны матричному равенству

$$B' = S^T B S, \tag{5}$$

в котором B' — матрица билинейной формы в базисе e'

Билинейная форма b называется *симметричной*, если при любых x и y имеет место равенство $\mathrm{b}(x, y) = \mathrm{b}(y, x)$

Если билинейная форма b симметрична, то $\mathrm{b}(e_i, e_j) = \mathrm{b}(e_j, e_i)$ при всех i и j, и, следовательно, матрица билинейной формы симметрическая. Обратно, пусть матрица билинейной формы симметрическая, т. е. $B=B^T$. Тогда, поскольку матрица размеров 1×1 не меняется при транспонировании,

$$\mathrm{b}(x, y)=(\xi^T B\eta)^T=\eta^T B^T\xi=\eta^T B\xi=\mathrm{b}(y, x),$$

и, следовательно, билинейная форма b симметричная. Мы доказали

Предложение 1. *Билинейная форма симметрична тогда и только тогда, когда ее матрица симметрическая (каков бы ни был базис).*

2. Другая точка зрения на билинейные формы. Рассмотрим билинейную форму $\mathrm{b}(x, y)$ на линейном пространстве $\mathscr{L}_n$ и фиксируем произвольный вектор y из $\mathscr{L}_n$ Тогда $\mathrm{b}(x, y)$ — линейная функция от x. Чтобы подчеркнуть это, мы можем обозначить $\mathrm{b}(x, y)$ как $\mathrm{b}_y(x)$. Таким образом, каждому вектору y из $\mathscr{L}_n$ сопоставлена линейная функция на $\mathscr{L}_n$, т. е. мы имеем отображение B. $\mathscr{L}_n\to\mathscr{L}_n^*$. Легко видеть, что отображение B линейное. Действительно рассмотрим образ $\mathrm{B}(x+y)$ суммы двух векторов x и y. Это — линейная функция b_{x+y}, сопоставляющая произвольному вектору z число $\mathrm{b}(z, x+y)$. Но в силу линейности b по второму аргументу $\mathrm{b}(z, x+y)=\mathrm{b}(z, x)+$ $+\mathrm{b}(z, y)$. Отсюда $\mathrm{b}_{x+y}=\mathrm{b}_x+\mathrm{b}_y$. Итак, $\mathrm{B}(x+y)=\mathrm{B}(x)+\mathrm{B}(y)$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{B}(\alpha x)=\alpha\mathrm{B}(x)$.

Наоборот, пусть дано линейное отображение B: $\mathscr{L}_n\to\mathscr{L}_n^*$. Вектору x из $\mathscr{L}_n$ оно сопоставляет линейную функцию b_x на $\mathscr{L}_n^*$. Следовательно, двум векторам x и y из $\mathscr{L}_n$ можно сопоставить число $\mathrm{b}_x(y)$, которое мы имеем право обозначить $\mathrm{b}(x, y)$. Функция $\mathrm{b}(x, y)$ линейна по первому аргументу, так как B — линейное отображение, и линейна по второму аргументу, так как b_x — линейная функция.

Итак, билинейную форму на $\mathscr{L}_n$ можно определить как линейное отображение $\mathscr{L}_n$ в $\mathscr{L}_n^*$.

Пусть e — базис в $\mathscr{L}_n$, а p — взаимный ему базис в $\mathscr{L}^*$. Найдем матрицу линейного отображения B соответствующего билинейной форме b Образ $\mathrm{B}(e_i)$ базисного вектора e_i — линейная функция $\mathrm{b}_{e_i}(y)$. Она имеет строку коэффициентов $\mathrm{b}(e_1, e_i), \ldots, \mathrm{b}(e_n, e_i)$. Эти же числа образуют i-й столбец искомой матрицы, так как они — координаты $\mathrm{B}(e_i)$ по базису p. Мы видим что матрица отображения B в базисах e и p совпадает с матрицей B билинейной формы b в базисе e.

Из сказанного видно, что закон изменения матрицы билинейной формы (5) есть простое следствие формулы преобразования матрицы линейного отображения (6) § 3 гл. VI и равенства (8) § 1.

Теорема 2 § 3 гл. VI не относится к билинейным формам, так как базисы e и p не произвольны, а p — взаимный для e.

Если билинейная форма не симметричная, то, фиксируя первый аргумент, а не второй, мы получим другое отображение B^T: $\mathscr{L}\to\mathscr{L}^*$. Его матрица в паре взаимных базисов e и p равна транспонированной матрице билинейной формы B^T. Проверить это — полезное упражнение.

3. Квадратичные формы. Сейчас мы переходим к изучению важного класса функций на линейных пространствах, тесно связанного с билинейными формами.

Определение. *Квадратичной формой* называется функция k на линейном пространстве $\mathscr{L}_n$, значение которой на любом векторе x определяется равенством $\mathsf{k}(x) = \mathsf{b}(x, x)$, где b—симметричная билинейная форма на $\mathscr{L}_n$.

По заданной квадратичной форме k однозначно определяется соответствующая симметричная билинейная форма b. Действительно, пусть x и y—произвольные векторы. Рассмотрим значение квадратичной формы на векторе $x+y$

$$\mathsf{k}(x+y) = \mathsf{b}(x+y,\ x+y) = \\ = \mathsf{b}(x, x) + \mathsf{b}(x, y) + \mathsf{b}(y, x) + \mathsf{b}(y, y).$$

Отсюда, используя симметричность билинейной формы, получаем

$$\mathsf{b}(x, y) = \frac{1}{2}[\mathsf{k}(x+y) - \mathsf{k}(x) - \mathsf{k}(y)],$$

и, следовательно, значение b на любых векторах выражается через значения k.

Матрица симметричной билинейной формы b называется *матрицей* соответствующей *квадратичной формы* k.

Согласно (2) значение $\mathsf{k}(x)$ квадратичной формы k записывается через координаты вектора x в каком-либо базисе формулой

$$\mathsf{k}(x) = \sum_{i,\,j} \beta_{ij}\xi^i\xi^j \tag{6}$$

или в матричном виде

$$\mathsf{k}(x) = \xi^T B \xi. \tag{7}$$

Правая часть (6)—однородный многочлен второй степени относительно $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Приведенная его запись содержит подобные члены. Именно, при $i \neq j$ члены $\beta_{ij}\xi^i\xi^j$ и $\beta_{ji}\xi^j\xi^i$ совпадают. Поэтому после приведения подобных членов (6) принимает вид

$$\mathsf{k}(x) = \beta_{11}(\xi^1)^2 + 2\beta_{12}\xi^1\xi^2 + \beta_{22}(\xi^2)^2 + 2\beta_{13}\xi^1\xi^3 + \ldots \tag{8}$$

Теорема 1. *Для каждой квадратичной формы* k *существует базис, в котором*

$$\mathsf{k}(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\xi^i)^2, \tag{9}$$

т. е. матрица квадратичной формы является диагональной.

Вид (9) называется *диагональным видом* квадратичной формы.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму **k** и обозначим ее матрицу в некотором исходном базисе через B. Мы применим к матрице B последовательность элементарных преобразований, которую для удобства описания разобьем на ряд шагов. На первом шагу возможны два случая:

1) Общий случай: $\beta_{11} \neq 0$. Если это условие выполнено, вычитаем первую строку, умноженную на подходящие множители (β_{1i}/β_{11} для i-й строки), из всех нижележащих строк и вычитаем первый столбец, умноженный на те же множители, из всех столбцов, расположенных правее него. Множители выбираются так, чтобы матрица B перешла в матрицу B_1 вида

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 \ \dots \ 0 \\ 0 & \\ \dots & C_1 \\ 0 & \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

где C_1 — симметрическая квадратная матрица порядка $n-1$.

2) Особый случай: $\beta_{11} = 0$. Здесь имеются две возможности: а) $\beta_{1i} = 0$ для всех $i = 2, \ \dots, \ n$. При этом матрица уже имеет вид (10). б) Найдется i, для которого $\beta_{1i} \neq 0$. При этом делается вспомогательное преобразование: если $\beta_{ii} \neq 0$, то i-я строка переставляется с первой и i-й столбец переставляется с первым; если же $\beta_{ii} = 0$, то i-я строка прибавляется к первой и i-й столбец прибавляется к первому. В преобразованной матрице оказывается $\beta'_{11} \neq 0$. После вспомогательного преобразования матрица приводится к виду (10) так же, как и в общем случае.

Пусть в результате k шагов мы получили матрицу

$$B_k = \left\Vert \begin{array}{cccc|c} \varepsilon_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & O \\ & & & \cdot & \\ & & & \varepsilon_k & \\ \hline & & O & & C_k \end{array} \right\Vert. \tag{11}$$

Здесь C_k — симметрическая матрица порядка $n-k$, а через $\varepsilon_1, \ \dots, \ \varepsilon_k$ обозначены левые верхние элементы матриц C_i, полученных на предыдущих шагах.

Следующий $k+1$-й шаг состоит в применении к матрице B_k такой последовательности элементарных преобразований, которая равносильна применению преобразований первого шага к матрице C_k и не затрагивает первых k строк и первых k столбцов матрицы B_k. В результате мы получаем матрицу B_{k+1}, имеющую тот же вид с большим на единицу значением k.

После $n-1$-го шага матрица C_{n-1} имеет порядок 1 и не нуждается в преобразовании. В результате матрица B будет превращена в диагональную матрицу

$$B' = \begin{Vmatrix} e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & e_n \end{Vmatrix}.$$

Разумеется, если исходная матрица нулевая или нулевой окажется какая-либо из матриц C_k, то в дальнейших преобразованиях нет необходимости, так как матрица уже диагональная. Это равносильно тому, что на всех последующих шагах осуществлется особый случай а).

Важно заметить, что после каждого элементарного преобразования со строками осуществлялось такое же преобразование со столбцами. Если осуществляемое элементарное преобразование со столбцами равносильно умножению преобразуемой матрицы справа на матрицу S_α (ср. п. 4 § 6 гл. V), то та же операция со строками равносильна умножению преобразуемой матрицы слева на S_α^T.

В результате всей последовательности элементарных преобразований мы получим матрицу $B' = S^T BS$, где $S = S_1 \ldots S_N$ — произведение всех матриц, соответствующих проделанным преобразованиям со столбцами.

Мы доказали, таким образом, что матрица B' является матрицей квадратичной формы k в базисе e', который связан с исходным базисом e матрицей перехода S. Теорема доказана.

Для приведения квадратичной формы к диагональному виду можно воспользоваться *методом выделения квадратов*. Покажем его на примере. Пусть квадратичная форма задана формулой вида (8)

$$\mathrm{k}(x) = 2(\xi^1)^2 + 4\xi^1\xi^2 + 3(\xi^2)^2 + 4\xi^2\xi^3 + 5(\xi^3)^2.$$

Заметив, что коэффициент при $(\xi^1)^2$ отличен от нуля, соберем вместе все члены, содержащие ξ^1:

$$2[(\xi^1)^2 + 2\xi^1\xi^2] + 3(\xi^2)^2 + 4\xi^2\xi^3 + 5(\xi^3)^2.$$

Теперь дополним выражение в квадратных скобках до квадрата суммы, прибавив и вычтя $2(\xi^2)^2$:

$$2[(\xi^1)^2 + 2\xi^1\xi^2 + (\xi^2)^2] - 2(\xi^2)^2 + 3(\xi^2)^2 + 4\xi^2\xi^3 + 5(\xi^3)^2.$$

Теперь квадратичную форму можно переписать в виде $\mathrm{k}(x)=2(\xi^1+\xi^2)^2+\mathrm{k}'(x)$, где $\mathrm{k}'(x)$ — квадратичная форма, значение которой зависит только от ξ^2 и ξ^3:

$$\mathrm{k}'(x)=(\xi^2)^2+4\xi^2\xi^3+5(\xi^3)^2.$$

К ней можно применить тот же прием:

$$\mathrm{k}'(x)=(\xi^2+2\xi^3)^2+(\xi^3)^2.$$

Теперь $\mathrm{k}(x)$ принимает вид

$$2(\tilde{\xi}^1)^2+(\tilde{\xi}^2)^2+(\tilde{\xi}^3)^2,$$

где

$$\tilde{\xi}^1=\xi^1+\xi^2,\quad \tilde{\xi}^2=\xi^2+2\xi^3,\quad \tilde{\xi}^3=\xi^3.$$

Последние формулы задают преобразование координат вектора при переходе к базису, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид.

При доказательстве теоремы 1 для приведения к сумме квадратов была предложена определенная последовательность элементарных преобразований Метод выделения квадратов только формой записи отличается от приведения с помощью этой последовательности преобразований. Но полезно иметь в виду, что можно использовать любую последовательность элементарных преобразований, приводящую матрицу к диагональному виду, при единственном существенном условии: после каждого элементарного преобразования со строками должно выполняться то же элементарное преобразование со столбцами.

Диагональный вид квадратичной формы в вещественном пространстве мы будем называть *каноническим видом*, если числа ε_k могут быть равны только 1, —1 и 0. В комплексном пространстве диагональный вид квадратичной формы — канонический, если ε_k могут равняться только 1 или 0.

Теорема 2. *Для каждой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет канонический вид*

Для доказательства приведем сначала квадратичную форму к произвольному диагональному виду, а затем сделаем следующее преобразование. Если какой-либо из диагональных элементов ε_k отличен от нуля, то умножим k-й базисный вектор на $(\varepsilon_k)^{-1/2}$ в случае комплексного пространства или на $|\varepsilon_k|^{-1/2}$ в случае вещественного пространства. Легко видеть, что это соответствует умножению k-й строки и k-го столбца матрицы квадратичной формы на тот же множитель. Сделав это для всех k, таких что

$\varepsilon_k \neq 0$, мы приведем квадратичную форму к каноническому виду.

4. Ранг и индекс квадратичной формы. Существует много базисов, в которых данная квадратичная форма имеет канонический вид. Коэффициенты ε_i должны были бы быть, вообще говоря, свои для каждого из таких базисов. Однако оказывается, что они одни и те же (с точностью до порядка), как бы мы ни приводили квадратичную форму к каноническому виду.

Начнем со следующего вспомогательного предложения, имеющего и самостоятельное значение.

Предложение 2. *Если* $\det A \neq 0$ *и определены произведения* AB *и* CA, *то* $\operatorname{Rg} AB = \operatorname{Rg} B$ *и* $\operatorname{Rg} CA = \operatorname{Rg} C$.

Действительно, согласно предложению 5 § 6 гл. V мы имеем одновременно $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A^{-1}(AB) \leqslant \operatorname{Rg} AB$ и $\operatorname{Rg} AB \leqslant \operatorname{Rg} B$. Отсюда следует, что $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} AB$. Аналогично предложение доказывается, если множитель A стоит справа.

Теорема 3. *Ранг матрицы квадратичной формы не зависит от базиса.*

Действительно, согласно формуле (5) матрицы K и K' квадратичной формы k в базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ связаны равенством $K' = S^T K S$, где $\det S \neq 0$. Отсюда, в силу предложения 2 $\operatorname{Rg} K' = \operatorname{Rg} KS = \operatorname{Rg} K$. Если квадратичная форма имеет канонический вид, то ранг ее матрицы равен числу коэффициентов ε_i, отличных от нуля. Таким образом, это число не зависит от базиса.

Определение. Число не равных нулю коэффициентов ε_i в каноническом виде квадратичной формы k называется *рангом* k.

Мы видели, что ранг k равен рангу ее матрицы в произвольном базисе.

Заметим, что «геометрическую» интерпретацию ранга квадратичной формы можно получить, рассматривая соответствующую симметричную билинейную форму как отображение $\mathscr{L}_n \to \mathscr{L}_n^*$.

В комплексном пространстве все квадратичные формы одного и того же ранга r приводятся (каждая в своем базисе) к одному и тому же каноническому виду $(\xi^1)^2 + \ldots$ $\ldots + (\xi^r)^2$.

Рассмотрим теперь квадратичную форму k в вещественном пространстве $\mathscr{L}_n$.

Определение. Мы будем говорить, что k *положительно определена на подпространстве* $\mathscr{L}'$ пространства $\mathscr{L}_n$, если $\mathsf{k}(x) > 0$ для любого ненулевого вектора x из $\mathscr{L}'$.

Аналогично, k *отрицательно определена на* $\mathscr{L}'$, если $k(x) < 0$ для любого ненулевого x из $\mathscr{L}'$.

Если $k(x) > 0$ или $k(x) < 0$ для любого $x \neq 0$ из $\mathscr{L}'_n$, то про k говорят, что она *положительно определенная* или соответственно *отрицательно определенная* квадратичная форма.

Квадратичные формы, для которых при любом x выполнены неравенства $k(x) \geqslant 0$ или $k(x) \leqslant 0$, называются положительно или отрицательно *полуопределенными*.

Удобно считать, что на нулевом подпространстве каждая квадратичная форма и отрицательно определенная и положительно определенная одновременно. В силу этого соглашения всегда существует (хотя бы нулевое) подпространство, на котором квадратичная форма отрицательно определена, и мы можем выбрать среди всех этих подпространств подпространство максимальной размерности.

Определение. Пусть $\mathscr{L}^{(-)}$—подпространство максимальной размерности из всех, на которых квадратичная форма k отрицательно определена. Размерность $\mathscr{L}^{(-)}$ назовем *индексом* квадратичной формы k.

Теорема 4 (закон инерции квадратичных форм). *Число отрицательных и число положительных коэффициентов* ε_i *в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора базиса, в котором она приведена к каноническому виду.*

Мы докажем равносильную формулировку: если в каком-либо базисе квадратичная форма k приведена к каноническому виду, то число отрицательных коэффициентов совпадает с индексом k. Так как общее число положительных и отрицательных коэффициентов равно рангу, из последней формулировки вытекает, что и число положительных коэффициентов не зависит от базиса.

Действительно, пусть в базисе $e_1, \ldots, e_n$ квадратичная форма с индексом s имеет канонический вид

$$-(\xi^1)^2 - \ldots - (\xi^j)^2 + (\xi^{j+1})^2 + \ldots + (\xi^r)^2.$$

Обозначим через $\mathscr{L}_1$ линейную оболочку векторов $e_1, \ldots, e_j$, а через $\mathscr{L}_2$ линейную оболочку $e_{j+1}, \ldots, e_n$. Для вектора x из $\mathscr{L}_1$ имеем $\xi^{j+1} = \ldots = \xi^n = 0$ и $k(x) = -(\xi^1)^2 - \ldots - (\xi^j)^2 < 0$, если только $x \neq 0$. Следовательно, на j-мерном подпространстве $\mathscr{L}_1$ форма k отрицательно определена и $s \geqslant j$.

Допустим теперь, что $s > j$ и существует s-мерное подпространство $\mathscr{L}^{(-)}$, на котором k отрицательно определена. Компоненты любого вектора x из $\mathscr{L}_2$ удовлетворяют равенствам $\xi^1 = \ldots = \xi^j = 0$, и, следовательно, $k(x) \geqslant 0$ для всех x из $\mathscr{L}_2$. Размерность $\mathscr{L}_2$ равна $n-j$, и сумма размерностей $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L}^{(-)}$ превосходит n. По теореме 1 § 2 гл VI $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L}^{(-)}$ имеют ненулевое пересечение. Для ненулевого вектора z из $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}^{(-)}$ мы должны были бы иметь одновременно $k(z) < 0$ и $k(z) \geqslant 0$. Из полученного противоречия видно, что $s = j$. Теорема доказана.

Положительно определенные квадратичные формы имеют ранг n и индекс 0 и приводятся к каноническому виду

$$(\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^n)^2. \tag{12}$$

Отрицательно определенные квадратичные формы имеют ранг n и индекс n. Они приводятся к виду

$$-(\xi^1)^2 - \ldots - (\xi^n)^2.$$

Положительно и отрицательно полуопределенные формы ранга r приводятся соответственно к каноническим видам

$$(\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^r)^2, \quad -(\xi^1)^2 - \ldots - (\xi^r)^2.$$

Мы видели, что в вещественном пространстве квадратичной форме сопоставляются два числа — ее ранг и индекс. Она характеризуется этими числами в том смысле, что все квадратичные формы, имеющие одинаковые ранги и индексы, приводятся (каждая в своем базисе) к одному и тому же каноническому виду. Вместо ранга и индекса можно характеризовать квадратичную форму любыми двумя величинами, по которым можно найти ранг и индекс. Например, часто вместо ранга задают число положительных коэффициентов в каноническом виде Оно вместе с индексом — числом отрицательных коэффициентов — характеризует квадратичную форму. В § 2 гл. IX нам будет удобно характеризовать квадратичную форму рангом и разностью числа положительных и числа отрицательных коэффициентов в каноническом виде. Эта разность называется *сигнатурой* квадратичной формы.

Полезно уметь определять, является ли данная квадратичная форма положительно определенной, не приводя ее к каноническому виду. Это можно сделать при помощи следующей теоремы, называемой *критерием Сильвестра.*

Теорема 5. *Для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы* *миноры ее матрицы удовлетворяли неравенствам*

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{k1} & \dots & \beta_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (13)$$

для всех $k = 1, \dots, n$.

Миноры вида (13) называются *главными минорами* матрицы.

Для доказательства вспомним преобразования матрицы квадратичной формы, примененные при доказательстве теоремы 1.

1°. Необходимость Если квадратичная форма $\mathrm{k}(x)$ положительно определенная, то диагональные элементы ее матрицы в любом базисе удовлетворяют условию

$$\beta_{ii} = \mathrm{k}(e_i) > 0,$$

и, следовательно, при приведении матрицы к диагональному виду особый случай не встретится. В общем случае к любой строке может быть прибавлена только вышележащая, а к любому столбцу—только расположенный левее. При таких преобразованиях главные миноры матрицы не изменяются. Но у диагональной матрицы в случае положительно определенной квадратичной формы главные миноры положительны. Поэтому они должны быть положительны и у исходной матрицы.

2°. Достаточность. Пусть все главные миноры матрицы B положительны. В частности, $M_1 = \beta_{11} > 0$, и первый шаг преобразования приводит матрицу к виду (10) с $\varepsilon_1 > 0$. Допустим, что после k шагов мы получили матрицу B_k с положительными $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, причем не возникало особого случая. Тогда для левого верхнего элемента матрицы C_k имеем $\varepsilon_{k+1} = M_{k+1}/M_k$, так как главные миноры не менялись. Отсюда следует $\varepsilon_{k+1} > 0$. На очередном шаге преобразования имеет место основной случай, и полученная матрица B_{k+1} имеет положительные элементы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}$. Проводя такое рассуждение для всех k от 2 до n, придем к доказываемому утверждению.

§ 3. Квадратичные формы и скалярное произведение

Если в вещественном линейном пространстве задано скалярное произведение (т. е. пространство евклидово), то каждой билинейной форме независимым от выбора базиса образом может быть сопоставлено линейное преобразование.

Определение. Линейное преобразование A евклидова пространства $\mathscr{E}_n$ называется *присоединенным* билинейной форме b, если для любых векторов x и y из $\mathscr{E}_n$ выполнено равенство

$$\mathsf{b}(x, y) = (x, \mathsf{A}(y)). \tag{1}$$

Предложение 1. *Каждая билинейная форма имеет одно-единственное присоединенное преобразование.*

Для доказательства допустим сначала, что присоединенное преобразование для b существует. Обозначим через B и A матрицы b и A в некотором базисе e и запишем равенство (1) в координатной форме

$$\xi^T B \eta = \xi^T \Gamma A \eta.$$

Здесь Γ — матрица Грама базиса e. Последнему равенству можно придать вид $\xi^T (B - \Gamma A)\eta = 0$. Выберем произвольные векторы x и y равными базисным векторам e_i и e_j. Тогда их координатные столбцы ξ и η будут соответственно равны i-му и j-му столбцам единичной матрицы. Этим будет показано, что равен нулю элемент в i-й строке и j-м столбце матрицы $B - \Gamma A$ (ср. пример 4, с. 176). Так как i и j могут быть взяты любыми, мы видим, что $B - \Gamma A = O$. Отсюда мы можем выразить матрицу A через матрицу B:

$$A = \Gamma^{-1} B. \tag{2}$$

Это означает, что билинейная форма не может иметь больше одного присоединенного преобразования — если оно существует, его матрица равна $\Gamma^{-1}B$.

Теперь легко доказать и существование присоединенного преобразования. Для этого достаточно проверить, что преобразование с матрицей (2) является присоединенным. Но из (2) следует $B = \Gamma A$, а, значит, при любых столбцах ξ и η выполнено $\xi^T B \eta = \xi^T \Gamma A \eta$. Следовательно, равенство (1) имеет место для любых векторов x и y из $\mathscr{E}_n$. Предложение доказано.

Заметим, что в случае ортонормированного базиса связь между матрицами билинейной формы и ее присоединенного преобразования особенно проста — эти матрицы совпадают:

$$B = A.$$

Отсюда и из предложения 2 § 2 гл. VI мы получаем

Предложение 2. *Для симметричных билинейных форм и только для них присоединенное преобразование является самосопряженным.*

Если линейное преобразование присоединено симметричной билинейной форме b, то его называют также присоединенным той квадратичной форме, которую определяет b. Таким образом, каждой квадратичной форме присоединено самосопряженное преобразование.

Тесная связь между квадратичными формами и самосопряженными преобразованиями позволяет доказать следующую важную теорему.

Теорема 1. *В евклидовом пространстве для каждой квадратичной формы существует ортонормированный базис, в котором она имеет диагональный вид.*

Теорема почти очевидна: базисом, существование которого утверждается, будет ортонормированный базис из собственных векторов линейного преобразования, присоединенного квадратичной форме. В нем $B = A$ и A — диагональная матрица.

Теорема 2. *Евклидово пространство можно определить как такое вещественное линейное пространство, в котором задана положительно определенная квадратичная форма.*

Действительно, сопоставив каждому вектору евклидова пространства $\mathscr{E}_n$ его скалярный квадрат, мы получим функцию $\mathsf{k}(x) = (x, x)$. Если Γ — матрица Грама некоторого базиса, а ξ — координатный столбец вектора x в этом базисе, то функция k запишется формулой $\mathsf{k}(x) = \xi^T \Gamma \xi$ Значит, это — квадратичная форма. В силу аксиомы 4° определения евклидова пространства, $\mathsf{k}(x) > 0$ для $x \neq 0$, и наша форма положительно определена.

Обратно, пусть в вещественном линейном пространстве $\mathscr{L}_n$ задана положительно определенная квадратичная форма k. По ней однозначно восстанавливается соответствующая симметричная билинейная форма b. Введем в $\mathscr{L}_n$ скалярное произведение, положив $(x, y) = \mathsf{b}(x, y)$. Аксиомы 2° и 3° выполнены, так как b — билинейная форма. Аксиома 1° удовлетворена, поскольку b симметрична. Положительная определенность k равносильна аксиоме 4°. Теорема доказана. Отметим только, что (x, y) в базисе e записывается через координатные столбцы векторов и матрицу квадратичной формы равенством $(x, y) = \xi^T K \eta$, и, следовательно, K является матрицей Грама базиса e.

Из доказательства теоремы 2 видно, что положительная определенность квадратичной формы нужна только для выполнения аксиомы 4°. Рассматриваются пространства, в которых скалярное произведение определяется произвольной квадратичной формой. В таких пространствах существуют векторы с отрицательным скалярным квадратом и геометрия значительно отличается от евклидовой. Если скалярное произведение определено квадратичной формой ранга, равного размерности пространства, то пространство называется *псевдоевклидовым*. Из псевдоевклидовых пространств в математической физике существенную роль играет четырехмерное пространство, в котором задана квадратичная форма $-(\xi^1)^2-(\xi^2)^2-(\xi^3)^2+(\xi^4)^2$. Это так называемое *пространство Минковского.*

Используем теорему 2, чтобы доказать следующую теорему

Теорема 3. *Пусть в линейном пространстве $\mathscr{L}_n$ заданы две квадратичные формы* k *и* h, *причем* h—*положительно определенная. Тогда в $\mathscr{L}_n$ существует базис, в котором обе формы имеют диагональный вид (а форма* h *имеет даже канонический вид).*

Для доказательства введем в $\mathscr{L}_n$ скалярное произведение при помощи положительно определенной формы h. По отношению к этому скалярному произведению ортонормированными будут те базисы, в которых h имеет канонический вид (12) § 2, так как их матрица Грама единичная По теореме 1 для формы k существует ортонормированный базис, в котором она имеет диагональный вид. Это и есть базис, существование которого мы доказываем.

Замечание Если $\mathscr{L}_n$ евклидово, то теорема 3 остается, конечно, справедливой Уже существующее скалярное произведение оставляется без внимания, а вводится новое скалярное произведение при помощи формы h.

Базис, в котором k и h имеют диагональный вид, вообще говоря, не будет ортонормированным по отношению к старому скалярному произведению.

Чтобы практически привести две квадратичные формы одновременно к диагональному виду, сначала строят базис, в котором h имеет канонический вид, и находят матрицу K' формы k в этом базисе. Это осуществляет переход к базису, который ортонормирован по отношению к вспомогательному скалярному произведению, введенному при доказательстве теоремы. Линейное преобразование, имеющее в найденном базисе ту же матрицу K', будет присоединенным к форме k. Следует найти собственные векторы этого преобразования, ортогонализовать их и нормировать, находя скалярное произведение по формуле (11) § 1 гл. VII. Так будет получен базис из собственных векторов, ортонормированный по отношению к вспомогательному скалярному произведению. Он и является искомым базисом. В нем матрица формы $\mathbf{h}$ единичная, а матрица K'' формы $\mathbf{k}$ диагональная, причем ее диагональные элементы равны корням характеристического многочлена матрицы K'.

Одновременное приведение двух квадратичных форм к диагональному виду может быть осуществлено и иначе. Пусть K и H — матрицы квадратичных форм в исходном базисе $\boldsymbol{e}$. Как отмечалось при доказательстве теоремы 2, H будет матрицей Грама базиса $\boldsymbol{e}$ для вспомогательного скалярного произведения. Матрица $A=H^{-1}K$ является матрицей линейного преобразования, присоединенного к форме $\mathbf{k}$. Характеристическое уравнение преобразования имеет вид $\det(H^{-1}K-\lambda E)=0$ Так как $H^{-1}K-\lambda E = H^{-1}(K-\lambda H)$ и $\det H^{-1}\neq 0$, характеристическое уравнение имеет те же корни, что и уравнение

$$\det(K-\lambda H)=0. \tag{3}$$

Для каждого из этих корней система линейных уравнений $(H^{-1}K-\lambda E)\xi=\boldsymbol{o}$ для нахождения собственных векторов эквивалентна системе

$$(K-\lambda H)\xi=\boldsymbol{o}.$$

При каждом λ фундаментальную систему решений такой системы следует ортогонализовать и нормировать, находя скалярное произведение по формуле (13) § 1 гл. VII с матрицей Грама H. Так будет построен базис $\tilde{\boldsymbol{e}}$. Так как он ортонормирован относительно вспомогательного скалярного произведения, матрица формы $\mathbf{h}$ в нем будет единичной. Так как он состоит из собственных векторов преобразования, присоединенного к форме $\mathbf{k}$, матрица формы $\mathbf{k}$ в нем будет диагональной с корнями уравнения (3) на диагонали.

§ 4. Эрмитовы формы

Для квадратичных форм в унитарных пространствах теоремы § 3 не имеют места Они справедливы для других функций, называемых *эрмитовыми формами.* Приведем только формулировки. Доказательства почти не отличаются от доказательств соответствующих теорем в § 3.

Функция $\mathbf{b}$ от двух векторов в комплексном линейном пространстве $\mathscr{L}_n$ называется *эрмитовой билинейной формой*, если для любых векторов x, y и z и любого комплексного числа α выполнены равенства

$$\mathsf{b}(x+y,\ z)=\mathsf{b}(x,\ y)+\mathsf{b}(y,\ z),\ \mathsf{b}(\alpha x,\ y)=\alpha\mathsf{b}(x,\ y),$$
$$\mathsf{b}(x,\ y+z)=\mathsf{b}(x,\ y)+\mathsf{b}(x,\ z),\ \mathsf{b}(x,\ \alpha y)=\bar{\alpha}\mathsf{b}(x,\ y).$$

Отличие этого определения от определения билинейной формы в том, что при умножении второго аргумента на число α значение эрмитовой билинейной формы умножается на комплексно сопряженное число $\bar{\alpha}$.

Если в $\mathscr{L}_n$ выбран базис, то значение b на паре векторов x, y может быть записано в виде

$$\mathsf{b}(x,\ y)=\sum_{i,j}\beta_{ij}\xi^i\overline{\eta^j}\ \text{ или }\ \mathsf{b}(x,\ y)=\xi^T B\bar{\eta},$$

где ξ и η — координатные столбцы векторов x и y. Матрица $B=\|\beta_{ij}\|$ называется *матрицей эрмитовой билинейной формы*. При замене базиса она преобразуется по закону $S^T B\bar{S}$.

Эрмитова билинейная форма называется *симметричной*, если $\mathsf{b}(x,\ y)=\overline{\mathsf{b}(y,\ x)}$. Это условие равносильно тому, что ее матрица эрмитова.

Функция $\mathsf{k}(x)$ на $\mathscr{L}_n$ называется *эрмитовой квадратичной формой* или просто *эрмитовой формой*, если $\mathsf{k}(x)=\mathsf{b}(x,\ x)$ для некоторой симметричной эрмитовой формы b. Форма b однозначно определяется по k.

Рассмотрим эрмитову форму k в унитарном пространстве $\mathscr{U}_n$. Линейное преобразование A в $\mathscr{U}_n$ называется *присоединенным* форме k, если оно самосопряженное и $\mathsf{k}(x)=(x,\ \mathsf{A}(x))$ для всех x. В ортонормированном базисе матрица присоединенного преобразования совпадает с матрицей, комплексно сопряженной матрице формы k. Отсюда следует, что для каждой эрмитовой формы k существует ортонормированный базис, в котором ее матрица диагональная с вещественными элементами на диагонали. Растягивая базисные векторы, мы можем привести эрмитову форму к каноническому виду, в котором на диагонали стоят числа 1, -1 или 0. Для эрмитовых форм справедлив закон инерции.

Унитарное пространство можно определить как такое комплексное линейное пространство, в котором задана положительно определенная эрмитова форма.

Для пары эрмитовых форм, из которых одна положительно определенная, можно найти базис, в котором они обе имеют диагональный вид.

ГЛАВА IX

АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Плоскости

1. Аффинное пространство. В гл. I мы считали известным из школьного курса понятие обычного геометрического пространства и ввели определение вектора как упорядоченной пары точек. В гл. VI—VIII была построена теория многомерных векторных пространств. Теперь, исходя из нее, мы можем дать аксиоматическое определение точечного пространства любой размерности.

Рассмотрим n-мерное вещественное линейное пространство $\mathscr{L}_n$ и дадим следующее

Определение. Множество $\mathscr{S}_n$ называется *n-мерным аффинным пространством*, а его элементы — *точками*, если задан закон, сопоставляющий каждой упорядоченной паре его элементов A, B единственный вектор из $\mathscr{L}_n$ (который мы обозначим $\overrightarrow{AB}$) таким образом, что:

1°. Для любой точки A из $\mathscr{S}_n$ и любого вектора x из $\mathscr{L}_n$ существует единственная точка B такая, что $\overrightarrow{AB}=x$. Эта точка будет обозначаться $P(A, x)$.

2°. Для любых трех точек A, B и C выполнено равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Мы назовем $\mathscr{L}_n$ *пространством векторов* пространства $\mathscr{S}_n$, а его элементы — векторами в $\mathscr{S}_n$.

Чтобы установить соответствие с определениями из § 1 гл. I, заметим, что первая аксиома соответствует возможности отложить любой вектор из произвольной точки, а вторая аксиома соответствует определению сложения векторов.

Приведем простейшие следствия из определения аффинного пространства.

а) Для любых двух точек $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$. Поэтому вектор, соответствующий паре совпавших точек, является нулевым вектором. Для любой точки A имеем $P(A, o)=A$, поскольку $P(A, o)=P(A, \overrightarrow{AA})=A$.

б) Аксиома 2° для точек A, B, A дает $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$, откуда $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

в) Предоставим читателю доказать, что для четырех точек A, B, A' и B' равенство $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$. Это свойство соответствует определению равенства векторов из § 1 гл. I.

Исходя из линейного пространства $\mathscr{L}_n$, можно построить аффинное пространство. С этой целью возьмем в качестве множества $\mathscr{S}_n$ множество векторов пространства $\mathscr{L}_n$ и сопоставим каждой паре векторов x и y вектор $\overrightarrow{xy}=y-x$. Легко проверить, что аксиомы 1° и 2° в этом случае выполнены. Интуитивно это построение означает следующее. Представим себе векторы из $\mathscr{L}_n$ как направленные отрезки, исходящие из одной точки. Тогда точками пространства $\mathscr{S}_n$ мы будем считать концы наших векторов

Определение. Аффинные пространства $\mathscr{S}_n$ и $\mathscr{S}'_n$ называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное отображение: $\mathsf{f}.\ \mathscr{S}_n \to \mathscr{S}'_n$ и такой изоморфизм их пространств векторов F: $\mathscr{L}_n \to \mathscr{L}'_n$, что для любых точек A и B из $\mathscr{S}_n$ выполнено равенство $\overrightarrow{\mathsf{f}(A)\,\mathsf{f}(B)}=\mathsf{F}(\overrightarrow{AB})$.

Из определения сразу видно, что изоморфны могут быть только пространства одной размерности.

Если для некоторой точки A известен ее образ $\mathsf{f}(A)$ при изоморфизме f и задан изоморфизм F, то отображение f однозначно определено. Действительно, образ любой другой точки B может быть найден по формуле $\mathsf{f}(B)=P(\mathsf{f}(A), \mathsf{F}(\overrightarrow{AB}))$ С другой стороны, как бы мы ни задали $\mathsf{f}(A)$ и F, мы обязательно получим изоморфизм f: $\mathscr{S}_n \to \mathscr{S}'_n$ Действительно, легко проверить, что из $\overrightarrow{\mathsf{f}(A)\,\mathsf{f}(B)}=\mathsf{F}(\overrightarrow{AB})$ и $\overrightarrow{\mathsf{f}(A)\,\mathsf{f}(C)}=\mathsf{F}(\overrightarrow{AC})$ следует $\overrightarrow{\mathsf{f}(B)\,\mathsf{f}(C)}=\mathsf{F}(\overrightarrow{BC})$ для любых точек B и C. Отсюда вытекает

Предложение 1. *Любые два аффинных пространства одной размерности изоморфны. Изоморфизм однозначно определяется заданием образа одной из точек и изоморфизма* F. $\mathscr{L}_n \to \mathscr{L}'_n$.

В изучении каждого класса пространств особую роль играют те преобразования пространств, которые являются их изоморфизмами на себя (ср § 4 гл. IV) Для линейных пространств это произвольные невырожденные линейные преобразования, для евклидовых пространств — ортогональные преобразования. Изучим изоморфные преобразования аффинного пространства

С этой целью предположим сначала, что в качестве изоморфизма F: $\mathscr{L}_n \to \mathscr{L}_n$ выбрано тождественное преобразование. Зада димое образом $f(A)$ некоторой точки A и рассмотрим преобразование, определяемое равенством $f(B)=P(f(A), \overrightarrow{AB})$ для любой точки B. Обозначим для краткости $f(A)=A^*$, $f(B)=B^*$. Предыдущее равенство означает что $\overrightarrow{A^*B^*}=\overrightarrow{AB}$. А это в свою очередь, в силу в), эквивалентно равенству $\overrightarrow{BB^*}=\overrightarrow{AA^*}$. Итак, образ каждой точки получается сдвигом этой точки на один и тот же вектор $\overrightarrow{AA^*}$ Такое преобразование естественно назвать *параллельным переносом.*

Если мы предположим, что $f(A)=A$, а $\mathbf{F}$—невырожденное линейное преобразование то мы получим преобразование аффинного пространства, задаваемое формулой $f(B)=P(A, \mathbf{F}(\overrightarrow{AB}))$. Эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между невырожденными линейными преобразованиями и изоморфными преобразованиями аффинного пространства, оставляющими неподвижной точку A.

Мы видим, что существенное отличие аффинных пространств от линейных состоит в том, что множество их изоморфных преобразований шире: оно содержит параллельные переносы.

Определение. Аффинное пространство называется *точечным евклидовым* пространством, если его пространство векторов евклидово.

В точечном евклидовом пространстве *расстоянием между точками A и B* называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$.

Трехмерное точечное евклидово пространство совпадает с пространством, изучаемым в элементарной геометрии, если в последнем фиксировать единицу масштаба.

Декартовой системой координат в аффинном пространстве $\mathscr{S}_n$ называется совокупность точки O и базиса $\boldsymbol{e}$ в пространстве векторов $\mathscr{L}_n$. Если задана система координат O, $\boldsymbol{e}$, то каждой точке A пространства $\mathscr{S}_n$ однозначно сопоставляется упорядоченная система из n чисел, а именно компоненты вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисе $\boldsymbol{e}$. Эти числа называются *декартовыми координатами* точки A в системе O, $\boldsymbol{e}$, а столбец, из них составленный, —ее *координатным столбцом.* Точка однозначно определяется своими координатами при заданной системе координат. Если даны координатные столбцы ξ_1 и ξ_2 точек A и B, то координатный столбец вектора $\overrightarrow{AB}$ равен $\xi_2-\xi_1$. Это доказывается рассуждением, уже примененным в § 2 гл. I.

Закон преобразования координат точки при замене декартовой системы координат выводится так же, как это делалось для трехмерного пространства в § 4 гл. I.

2. Плоскости в аффинном пространстве. Пусть задана точка A_0 в аффинном пространстве $\mathscr{S}_n$ и k-мерное подпространство $\mathscr{L}_k$ в его пространстве векторов $\mathscr{S}_n$. Множество всех точек вида $P(A_0, x)$, где x принадлежит $\mathscr{L}_k$, называется *k-мерной плоскостью в $\mathscr{S}_n$*. Точка A_0 сама, разумеется, лежит в плоскости Мы назовем ее *начальной точкой*, а подпространство $\mathscr{L}_k$—*направляющим подпространством*.

Любая точка плоскости $\mathscr{S}_k$ может быть принята за ее начальную точку. Действительно, пусть $A=P(A_0, x)$ лежит в $\mathscr{S}_k$ Тогда любая точка $B=P(A_0, y)$ из $\mathscr{S}_k$ представима в виде $B=P(A, y-x)$, поскольку $\overrightarrow{A_0B}-\overrightarrow{A_0A}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_0B}=y$ и $\overrightarrow{A_0A}=x$, причем $y-x$ принадлежат $\mathscr{L}_k$. Аналогично, для каждого z из $\mathscr{L}_k$ имеем $P(A, z)=P(A_0, z+x)$, и, следовательно, $P(A, z)$ принадлежит плоскости.

Не представляет труда доказать, что k-мерная плоскость является k-мерным аффинным пространством с пространством векторов $\mathscr{L}_k$.

Предложение 2. *Если в $\mathscr{S}_n$ выбрана декартова система координат, то координаты точек любой k-мерной плоскости удовлетворяют системе линейных уравнений ранга $n-k$. Обратно, множество точек, координаты которых удовлетворяют совместной системе линейных уравнений ранга r, является $(n-r)$-мерной плоскостью.*

Для доказательства обозначим через ξ_0 и ξ столбцы из координат, соответственно, начальной точки A_0 и переменной точки A в плоскости $\mathscr{S}_k$. Тогда, поскольку вектор $\overrightarrow{A_0A}$ лежит в $\mathscr{L}_k$, его координатный столбец $\xi-\xi_0$ удовлетворяет однородной системе уравнений ранга $n-k$ (предложение 4 § 2 гл. VI). Пусть U—матрица этой системы. Тогда $U(\xi-\xi_0)=0$ и ξ удовлетворяет системе линейных уравнений $U\xi+\beta=0$, где $\beta=-U\xi_0$.

Вторая часть предложения следует из теоремы 2 § 5 гл. V.

Общее решение системы линейных уравнений (формула (14) § 5 гл. V) дает нам параметрические уравнения $(n-r)$-мерной плоскости, в которых параметрами являются коэффициенты в линейной комбинации фундаментальной системы решений, а сама фундаментальная система—базисом в направляющем подпространстве. Начальная точка плоскости—частное решение неоднородной системы.

$(n-1)$-мерная плоскость называется *гиперплоскостью.* Она задается уравнением $\alpha_1\xi^1+\ldots+\alpha_n\xi^n+\beta=0$.

Одномерная плоскость называется *прямой линией.* Она определяется системой уравнений ранга $n-1$ или же параметрическим уравнением $\xi=\xi_0+t\eta$, в котором ξ_0 — координатный столбец начальной точки, а η — координатный столбец ненулевого вектора из направляющего подпространства $\mathscr{L}_1$.

Множество точек прямой, соответствующих значениям $t\geqslant t_0$ при некотором выборе вектора η, называется *лучом*, а множество точек, соответствующее $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, называется *отрезком*.

3. Линейные функции на аффинном пространстве. *Функция* на аффинном пространстве — это закон, сопоставляющий каждой его точке некоторое вещественное число. Функция называется *линейной*, если ее значение в каждой точке A пространства $\mathscr{S}_n$ удовлетворяет условию $f(A)=f(A_0)+\varphi(\overrightarrow{A_0A})$, где A_0 — фиксированная точка, а φ — линейная функция на пространстве векторов $\mathscr{L}_n$.

В этом определении точка A_0 играет особую роль. Докажем, что на ее месте можно использовать любую другую точку. Действительно, скажем, для точки A_1 мы имеем $f(A_1)=f(A_0)+\varphi(\overrightarrow{A_0A_1})$, и потому $f(A)=f(A_0)+$ $+\varphi(\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A})=f(A_1)+\varphi(\overrightarrow{A_1A})$.

Если в $\mathscr{S}_n$ выбрана декартова система координат O, $\boldsymbol{e}$, то точке A соответствует ее координатный столбец ξ, функции φ — ее строка коэффициентов $\varkappa$ и функция f записывается в виде $f(A)=f(O)+\varkappa\xi$, так как ξ одновременно является координатным столбцом вектора $\overrightarrow{OA}$. Значение линейной функции мы будем обозначать также через $f(\xi)$.

Нетрудно доказать, что уравнение гиперплоскости можно записать в виде $f(A)=0$, где f — линейная функция на $\mathscr{S}_n$. В самом деле, пусть выбрана система координат O, $\boldsymbol{e}$ и гиперплоскость задана уравнением $\alpha_1\xi^1+\ldots$ $\ldots+\alpha_n\xi^n+\beta=0$. Обозначим левую часть уравнения через $f(A)$, где под A понимается точка с координатами $\xi^1, \ldots, \xi^n$. Простая подстановка показывает, что $f(O)=$ $=\beta$. Кроме того, ясно, что $\alpha_1\xi^1+\ldots+\alpha_n\xi^n$ — линейная функция φ от вектора $\overrightarrow{OA}$.

Линейные функции $f_1, \ldots, f_k$ на аффинном пространстве называются *линейно независимыми*, если линейно независимы соответствующие линейные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ на $\mathscr{L}_n$.

k-мерная плоскость определяется системой линейных уравнений. Это означает, что каждая ее точка лежит в любой из гиперплоскостей, задаваемых уравнениями системы. Отсюда следует

Предложение 3. *Каждая k-мерная плоскость является пересечением $n-k$ гиперплоскостей, независимых в том смысле, что линейно независимы задающие их функции.*

4. Выпуклые многогранники. Назовем *полупространством* множество точек аффинного пространства, для которых некоторая линейная функция f принимает неотрицательные значения: $f(A) \geqslant 0$. Очевидно, что неравенство $f(A) \leqslant 0$ также определяет полупространство, так как оно равносильно неравенству $-f(A) \geqslant 0$. Гиперплоскость $f(A)=0$ является пересечением, т. е. общей частью, этих полупространств.

Предложение 4. *Отрезок прямой пересекает гиперплоскость тогда и только тогда, когда его концы принадлежат разным полупространствам относительно данной гиперплоскости.*

Доказательство. Оставим без рассмотрения очевидный случай, когда хоть один из концов отрезка лежит в гиперплоскости. Пусть выбрана система координат O, $\boldsymbol{e}$ и отрезок задан уравнением $\xi = \xi_0 + t(\xi_1 - \xi_0)$ где ξ_0 и ξ_1 — координатные столбцы его концов и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Напишем $f(\xi) = f(0) + \varphi(\xi_0) + t\varphi(\xi_1 - \xi_0)$. Если мы прибавим и вычтем $tf(0)$, то заметим, что $f(\xi) = (1-t) f(\xi_0) + tf(\xi_1)$. Следовательно, значение параметра t, при котором отрезок пересекает гиперплоскость, должно удовлетворять равенству $(1-t) f(\xi_0) + tf(\xi_1) = 0$. Так как t и $(1-t)$ положительны, $f(\xi_0)$ и $f(\xi_1)$ должны быть разных знаков.

Докажем достаточность. Из написанного выше равенства следует, что $1/t = 1 - f(\xi_1)/f(\xi_0)$. Если $f(\xi_0)$ и $f(\xi_1)$ имеют разные знаки, то решение существует и $1/t > 1$, т. е. $0 < t < 1$.

Определение. Пересечение конечного числа полупространств называется *выпуклым многогранником*.

Из определения вытекает, что выпуклый многогранник есть множество точек, удовлетворяющих системе линейных неравенств $f_i(A) \geqslant 0$, где f_i — линейные функции на $\mathscr{S}_n$ и $i = 1, \ldots, r$.

Пример 1 $\xi^1+1\geqslant 0$, $\xi^1-1\leqslant 0$ гиперплоскости с общим направляющим подпространством не имеют общих точек (параллельны) Многогранник — часть пространства, ограниченная этими гиперплоскостями.

Пример 2 $\xi^1+1\leqslant 0$, $\xi^1-1\geqslant 0$; гиперплоскости параллельны, многогранник не содержит ни одной точки.

Пример 3. $\xi^i\geqslant 0$, $\xi^i\leqslant 1$ $(i=1, \ldots, n)$; параллелепипед, построенный на базисных векторах и с вершиной в начале координат.

Пример 4. $\xi^1\geqslant 0$, $\xi^1\leqslant 0$; гиперплоскость

Пример 5. $\xi^i\geqslant 0$, $\xi^i\leqslant 0$ $(i=1, \ldots, n-1)$, $\xi^n\geqslant 0$, $\xi^n\leqslant 1$; отрезок прямой.

Пример 6. $\xi^i\geqslant 0$ $(i=1, \ldots, n)$; первый координатный угол.

Из этих примеров видно, что многогранник может лежать в некоторой плоскости — несколько из определяющих его неравенств могут выполняться только как равенства. Мы назовем *размерностью* выпуклого многогранника минимальную из размерностей плоскостей, его содержащих В этом смысле размерность отрезка равна 1, а размерность треугольника — 2.

Рассмотрим выпуклый многогранник. Пусть некоторое из определяющих его неравенств, скажем $f_1(A)\geqslant 0$, может выполняться как строгое неравенство, т. е. существует точка A, для которой $f_1(A)>0$. Точки многогранника, в которых это неравенство выполнено как равенство, по определению являются его граничными точками. Вообще, *граничными* называются те точки многогранника, в которых обращаются в равенства одно или несколько неравенств, выполненных как строгие неравенства для каких-либо точек многогранника.

Из этого определения вытекает, что множество граничных точек выпуклого многогранника есть объединение выпуклых многогранников (меньших размерностей), называемых *гранями*. Грани каждой из граней состоят из граничных точек исходного многогранника.

Последовательно рассматривая грани граничных многогранников все убывающих размерностей, мы либо придем к грани, являющейся плоскостью размерности $k\geqslant 1$, либо к грани, являющейся одномерным многогранником, т. е. отрезком или лучом. Такие грани называются *ребрами*. Их границы — точки — называются *вершинами*. Вершины можно рассматривать как 0-мерные грани.

Теперь разъясним, что означает слово «выпуклый», которое мы уже много раз употребляли. *Выпуклым множеством* в аффинном пространстве называется множество, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит и весь отрезок, их соединяющий. Из предложения 4 следует, что полупространство — выпуклое множество. Из определения можно заключить, что пересечение конечного числа выпуклых множеств есть выпуклое множество. Поэтому наши выпуклые многогранники являются выпуклыми в этом смысле.

Во многих прикладных вопросах, особенно в экономике, встречается задача об отыскании максимального значения линейной функции на выпуклом многограннике. Эта задача называется *задачей линейного программирования*. Из математического анализа известно, что функция, дифференцируемая в области, может достигать максимального значения только в тех точках области, где все ее частные производные равны нулю.

Если функция линейна, то частные производные равны ее коэффициентам и одновременно равны нулю только для тождественно постоянной функции. Поэтому максимум линейной функции на выпуклом многограннике, если вообще достигается, то достигается в граничной точке. Последовательно применяя эти соображения к граням все меньших размерностей, мы увидим, что максимальное значение может достигаться либо в вершине, либо на такой грани положительной размерности, на которой функция — тождественная постоянная.

Поэтому вопрос кажется простым: его решение сводится к сравнению значений функции в вершинах многогранника. Однако на практике встречаются многогранники, задаваемые десятками и сотнями неравенств. Число вершин у них таково, что и с помощью ЭВМ не может быть просмотрено за приемлемый срок. Это обстоятельство вызвало создание ряда методов, позволяющих решать такого рода задачи. Эти методы объединены общим названием *теории линейного программирования*.

§ 2. Общая теория линий и поверхностей второго порядка

В этом параграфе мы возвращаемся к геометрии трехмерного точечного пространства, которой были посвящены первые главы книги. Поэтому настоящий параграф может изучаться независимо от § 1. Он содержит применение результатов, полученных для квадратичных форм в евклидовых векторных пространствах, к исследованию произвольной линии или поверхности второго порядка.

1. Закон преобразования коэффициентов. Мы начнем с рассуждений, одинаково пригодных для линий второго порядка на плоскости и для поверхностей второго порядка в пространстве, и потому не будем фиксировать размерность n — она равна двум или трем в зависимости от того, какой случай иметь в виду. И линии и поверхности мы будем называть *поверхностями*, чтобы не делать большого числа оговорок.

Мы рассмотрим произвольное уравнение второго порядка

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\xi^i\xi^j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i0}\xi^i + a_{00} = 0, \qquad (1)$$

связывающее координаты точки на плоскости или в пространстве, причем о точках, которые ему удовлетворяют, не будем предполагать ничего, даже того, что такие точки вообще существуют. Если мы изменим систему координат и подставим в (1) выражение старых координат текущей точки через новые, то мы получим новое уравнение (также второго порядка согласно теоремам 1 и 2 § 1 гл. II). Мы будем говорить, что уравнение (1) при замене координат перешло в новое уравнение или же что преобразовались его коэффициенты.

Сейчас мы получим закон, по которому преобразуются коэффициенты уравнения второго порядка при изменении системы координат. Напомним, что декартова система координат состоит из точки (начала) и векторного базиса. Замена системы координат распадается на перенос начала и изменение базиса (см. § 4 гл. I).

Если мы изменим базис при неизменном начале координат, то старые координаты выразятся через новые по формуле

$$\xi^i = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^i \xi'^k,$$

где σ_k^i — элементы матрицы перехода от старого базиса к новому. Подставив это в уравнение (1), мы получим уравнение второго порядка

$$\sum_{i,\,j,\,k,\,l} a_{ij}\sigma_k^i\sigma_l^j\xi'^k\xi'^l + 2\sum_{i,\,k} a_{i0}\sigma_k^i\xi'^k + a_{00} = 0$$

с коэффициентами

$$a'_{kl} = \sum_{i,\,j} a_{ij}\sigma_k^i\sigma_l^j, \quad a'_{k0} = \sum_{i} a_{i0}\sigma_k^i, \quad a'_{00} = a_{00}. \qquad (2)$$

Если мы перенесем начало координат в точку с координатами p^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, оставив базис без изменения, то старые координаты выразятся через новые по формуле

$$\xi^i = \tilde{\xi}^i + p^i.$$

Подстановка в уравнение (1) дает

$$\sum_{i,\,j} a_{ij}(\tilde{\xi}^i + p^i)(\tilde{\xi}^j + p^j) + 2\sum_{i} a_{i0}(\tilde{\xi}^i + p^i) + a_{00} = 0,$$

или

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij}\xi^i\xi^j + \sum_{i,j} \alpha_{ij}(\xi^i p^j + \xi^j p^i) + 2\sum_i \alpha_{i0}\xi^i + \tilde{\alpha}_{00} = 0.$$

Отсюда

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij}, \quad \tilde{\alpha}_{i0} = \sum_k \alpha_{ik}p^k + \alpha_{i0}, \tag{3}$$

так как суммы $\sum \alpha_{ij}\xi^i p^j$ и $\sum \alpha_{ij}\xi^j p^i$ отличаются только обозначением индексов суммирования.

Формулы (2) и (3) выражают закон преобразования коэффициентов уравнения (1) при замене системы координат. Выражение для свободного члена $\tilde{\alpha}_{00}$ нам не потребуется.

Члены второй степени в уравнении (1) образуют однородный многочлен второго порядка. Мы видим, что его коэффициенты α_{ij} не меняются при переносе начала координат, а при замене базиса преобразуются как коэффициенты квадратичной формы. Поэтому многочлен

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi^i\xi^j \tag{4}$$

можно рассматривать как квадратичную форму. Назовем ее *малой* квадратичной формой. Из сказанного вытекает

Предложение 1. *Ранг и сигнатура малой квадратичной формы* (4) *не меняются при изменении декартовой системы координат.*

Сейчас мы получим закон преобразования коэффициентов уравнения (1) в другой форме, позволяющей доказать инвариантность еще двух чисел.

Рассмотрим однородный многочлен второй степени от $n+1$ переменных

$$\sum_{p,q=0}^{n} \alpha_{pq}\xi^p\xi^q = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi^i\xi^j + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i0}\xi^i\xi^0 + \alpha_{00}(\xi^0)^2. \tag{5}$$

Левая часть (1) получается из (5) при $\xi^0 = 1$.

Если мы произведем какую-либо невырожденную линейную замену переменных, коэффициенты многочлена (5) будут преобразовываться как элементы матрицы квадратичной формы. Эту квадратичную форму мы назовем *большой* квадратичной формой. Нам понадобятся не произвольные замены, а только имеющие следующий вид (напишем его для $n=2$):

$$\left\|\begin{matrix}\xi^0\\ \xi^1\\ \xi^2\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ \sigma_0^1 & \sigma_1^1 & \sigma_2^1\\ \sigma_0^2 & \sigma_1^2 & \sigma_2^2\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\xi'^0\\ \xi'^1\\ \xi'^2\end{matrix}\right\|, \quad \begin{vmatrix}\sigma_1^1 & \sigma_2^1\\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2\end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

Тут переменная ξ^0 не меняется, а остальные преобразуются по формулам

$$\xi^i = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^i \xi'^k + \sigma_0^i \xi^0.$$

Если здесь положить $\xi^0 = 1$, то мы получим наиболее общее преобразование декартовой системы координат. Итак, мы доказали

Предложение 2. *Ранг и сигнатура большой квадратичной формы* (5) *не меняются при замене декартовой системы координат.*

Поверхность, определяемая уравнением (1), не изменится, если мы умножим уравнение на какой-нибудь отличный от нуля множитель. При этом ранги квадратичных форм (4) и (5) не меняются, а сигнатуры могут изменить только знак (если множитель отрицательный). Отсюда следует

Теорема 1. *Четыре числа — ранги и модули сигнатур большой и малой квадратичных форм — являются инвариантами поверхности второго порядка.*

Мы обозначим ранг и модуль сигнатуры квадратичной формы (4) соответственно через r и σ, а ранг и модуль сигнатуры формы (5) — через R и Σ.

2. Линии второго порядка на плоскости. В гл. III (теорема 1 § 1) мы показали, что самое общее уравнение второго порядка на плоскости за счет выбора декартовой прямоугольной системы координат может быть приведено к одному из девяти канонических видов. В соответствии с этим существует семь классов линий второго порядка на плоскости (уравнениям двух классов не удовлетворяют координаты никаких точек).

Составляя матрицы большой и малой квадратичных форм для канонических уравнений, мы можем непосредственно усмотреть значения r, σ, R и Σ, соответствующие каждому из классов уравнений. Единственное затруднение возникает в случае параболы. Матрица ее большой квадратичной формы не диагональная, а имеет вид

$$A = \left\|\begin{matrix}0 & 0 & -p\\ 0 & 1 & 0\\ -p & 0 & 0\end{matrix}\right\|.$$

Чтобы найти ранг R и модуль сигнатуры Σ, преобразуем эту матрицу по формуле S^TAS при помощи матрицы

$$S=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Мы получим

$$S^TAS=\begin{Vmatrix} 2p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2p \end{Vmatrix}$$

и обнаружим, что $R=3$ и $\Sigma=1$. Матрица S не имеет вида (6), но R и Σ не меняются при преобразовании при помощи произвольной невырожденной матрицы.

Выпишем канонические виды уравнений второго порядка на плоскости вместе с соответствующими значениями рангов и модулей сигнатур в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что всем уравнениям одного класса соответствует одни и тот же набор инвариантов, а инварианты, соответствующие уравнениям разных классов, различны. Согласно предложению 8 § 3 гл. IV любые две линии одного класса можно совместить подходящим аффинным преобразованием, а ни одна линия не может быть

Таблица 1

Название	Каноническое уравнение	R	Σ	r	σ
Эллипс	$\frac{(\xi^1)^2}{a^2}+\frac{(\xi^2)^2}{b^2}=1$	3	1	2	2
«Мнимый эллипс»	$\frac{(\xi^1)^2}{a^2}+\frac{(\xi^2)^2}{b^2}=-1$	3	3	2	2
«Пара мнимых пересекающихся прямых»	$a^2(\xi^1)^2+b^2(\xi^2)^2=0$	2	2	2	2
Гипербола	$\frac{(\xi^1)^2}{a^2}-\frac{(\xi^2)^2}{b^2}=1$	3	1	2	0
Пара пересекающихся прямых	$a^2(\xi^1)^2-b^2(\xi^2)^2=0$	2	0	2	0
Парабола	$(\xi^2)^2=2p\xi^1$	3	1	1	1
Пара параллельных прямых	$(\xi^2)^2=a^2$	2	0	1	1
«Пара мнимых параллельных прямых»	$(\xi^2)^2=-a^2$	2	2	1	1
Две совпавшие прямые	$(\xi^2)^2=0$	1	1	1	1

переведена аффинным преобразованием в линию другого класса. Отсюда мы получаем такое

Предложение 3. *Числа R, Σ, r и σ для двух линий второго порядка совпадают тогда и только тогда, когда эти линии можно совместить некоторым аффинным преобразованием.*

Если мы, как и в гл. III, будем пользоваться только декартовыми прямоугольными системами координат, то малую квадратичную форму мы сможем привести лишь к диагональному виду, но не к каноническому. Например, в случае эллипса в каноническом уравнении остаются коэффициенты при квадратах $1/a^2$ и $1/b^2$. Это обстоятельство связано с тем, что в ортонормированном базисе матрица квадратичной формы должна совпадать с матрицей присоединенного преобразования (ср. с. 262). Поэтому, если мы приведем матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

квадратичной формы (4) к диагональному виду в ортонормированном базисе, то на диагонали должны стоять собственные значения присоединенного преобразования.

Поскольку при замене одного ортонормированного базиса другим матрица A остается матрицей одного и того же линейного преобразования, корни ее характеристического многочлена не меняются при переходе от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой такой же системе.

Определение. Величины, не меняющиеся при замене одной декартовой прямоугольной системы координат на другую декартову прямоугольную систему координат, называются *ортогональными* (или евклидовыми) *инвариантами*.

Более удобно вместо корней характеристического уравнения матрицы (7) использовать равносильную систему ортогональных инвариантов — коэффициенты характеристического уравнения этой матрицы:

$$I_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22}, \qquad I_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Преобразование переменных (6) имеет специальный вид. Поэтому большая квадратичная форма не может быть, вообще говоря, приведена даже к диагональному виду (именно в случае $R=3$, $r=1$, т. е. параболы). Однако если прямоугольная система координат меняется на прямоугольную, матрица

$$\begin{Vmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \end{Vmatrix} \tag{8}$$

будет ортогональной, и ее детерминант равен 1 или -1. В этом случае детерминант матрицы перехода в формуле (6) также равен ± 1 и при преобразовании (6) детерминант матрицы

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \alpha_{20} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{Vmatrix} \tag{9}$$

квадратичной формы (5) остается неизменным. Мы получили еще один ортогональный инвариант уравнения второго порядка:

$$I_3 = \det \tilde{A}.$$

Легко видеть, что матрица перехода в формуле (6) ортогональна тогда и только тогда, когда ортогональна матрица (8) и $\sigma_0^1 = \sigma_0^2 = 0$, т. е. ортонормированный базис заменяется на ортонормированный, а перенос начала координат не производится. Коэффициенты характеристического многочлена матрицы $\tilde{A}$ останутся неизменными, если матрица перехода ортогональная, поскольку в этом случае $\tilde{A}$ остается равной матрице присоединенного к форме (5) преобразования. Поэтому величины[1])

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{00} \tag{10}$$

и

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{20} \\ \alpha_{20} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \tag{11}$$

не меняются при ортогональной замене базиса и, возможно, меняются при переносе начала координат. Величины такого типа называют *семиинвариантами* (т. е. *полуинвариантами*). Вычитая из (10) и (11) соответственно инварианты I_1 и I_2, мы получим семиинварианты α_{00} и

$$K_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{20} \\ \alpha_{20} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Впрочем, то, что α_{00} — семиинвариант, видно и из формул (2).

Значения полученных здесь ортогональных инвариантов и семиинвариантов позволяют найти коэффициенты a, b и p в канонических уравнениях и потому определяют линию второго порядка с точностью до положения на плоскости (см. предложение 9 § 3 гл. IV). Подсчет коэффициентов канонических уравнений по ортогональным инвариантам производится во всех подробных курсах аналитической геометрии.

Следует помнить, что величины I_1, I_2, I_3 и K_1 связаны с многочленом второго порядка, а не с линией. Они меняются очевидным образом, если уравнение умножить на отличное от нуля число.

Здесь уместно напомнить, что для читателя, ознакомившегося с § 3 гл. III, ортогональные инварианты I_2 и I_3 не являются совсем новыми. В гл. III они были обозначены δ и Δ и инвариантность их обращения или необращения в нуль была доказана из геометрических соображений. Нетрудно заметить, что условие $I_2 = 0$ равносильно $r = 1$, а условия $I_2 > 0$ или $I_2 < 0$ равносильны $r = 2$ и соответственно $\sigma = 2$ или $\sigma = 0$. Обращение в нуль I_3 означает, что $R < 3$. Теперь, глядя в табл. 1, мы можем снова установить геометрический смысл этих условий.

3. Поверхности второго порядка. Пусть уравнение (1) связывает координаты точки в трехмерном пространстве. Мы покажем, что существует такая декартова прямоугольная система координат, при переходе к которой уравнение принимает один из 17 канонических видов.

---

[1]) Соответственно равные коэффициентам при λ^2 и $-\lambda$ в характеристическом уравнении.

В качестве базиса искомой системы координат мы выберем тот ортонормированный базис, в котором малая квадратичная форма имеет диагональный вид. Таким образом, мы будем исходить из уравнения

$$\lambda_1 (\xi^1)^2 + \lambda_2 (\xi^2)^2 + \lambda_3 (\xi^3)^2 + 2\alpha_{10}\xi^1 + 2\alpha_{20}\xi^2 + 2\alpha_{30}\xi^3 + \alpha_{00} = 0 \tag{12}$$

и запомним, что уже выбран определенный ортонормированный базис. На коэффициенты уравнения не накладывается никаких ограничений, за исключением того, что λ_1, λ_2 и λ_3 не обращаются в нуль одновременно. Дальнейшие упрощения определяются следующим вспомогательным предложением.

Предложение 4. *Если в уравнение* (12) *входит (с ненулевым коэффициентом) квадрат одной из координат, то при помощи переноса начала координат вдоль соответствующей оси можно обратить в нуль член с первой степенью этой координаты.*

Это предложение доказывается так же, как и предложение 1 § 1 гл. III.

Нам удобно будет рассмотреть отдельно несколько случаев, соответствующих различным значениям инвариантов R, Σ, r и σ.

1. *Пусть* $r=3$. Тогда в силу предложения 4 начало координат может быть перенесено в такую точку, что уравнение (12) примет вид

$$\lambda_1 (\xi^1)^2 + \lambda_2 (\xi^2)^2 + \lambda_3 (\xi^3)^2 + \mu = 0. \tag{13}$$

Здесь λ_1, λ_2 и λ_3 не равны нулю.

1А. Условие $R=4$ равносильно тому, что свободный член μ в (13) отличен от нуля. Разделив на него, получим

$$-\frac{\lambda_1}{\mu} (\xi^1)^2 - \frac{\lambda_2}{\mu} (\xi^2)^2 - \frac{\lambda_3}{\mu} (\xi^3)^2 = 1. \tag{14}$$

1Аа. Пусть $\Sigma=4$. Это означает, что λ_1, λ_2, λ_3 и μ одного знака, коэффициенты в (14) отрицательны. Уравнение приводится к каноническому виду

$$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2} + \frac{(\xi^2)^2}{\beta^2} + \frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2} = -1.$$

Ему не удовлетворяет ни одна точка. Уравнение называется уравнением *мнимого эллипсоида.*

1Аб. Если $\Sigma=2$, а $\sigma=3$, то общий знак λ_1, λ_2 и λ_3 противоположен знаку μ. Коэффициенты в (14) положительны. Уравнение приводится к каноническому виду

$$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}+\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=1.$$

Поверхность — *эллипсоид.*

1Ав. При $\Sigma=0$ и $\sigma=1$ знак одного из собственных значений — не уменьшая общности, можно считать, что это λ_3, — противоположен общему знаку двух других (λ_1 и λ_2) и совпадает со знаком μ. В уравнении (14) два положительных и один отрицательный коэффициент. Канонический вид уравнения:

$$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}-\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=1.$$

Поверхность — *однополостный гиперболоид.*

1Аг. Пусть теперь $\Sigma=2$, $\sigma=1$. Знак одного из собственных значений (например, λ_1) противоположен общему знаку двух других (λ_2 и λ_3) и противоположен знаку μ. В уравнении (14) два отрицательных и один положительный коэффициент. Оно приводится к виду

$$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}-\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}-\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=1$$

и определяет *двуполостный гиперболоид.*

1Б. Пусть $R=3$. В рассматриваемом случае $r=3$, и это условие равносильно $\mu=0$; уравнение (13) при $R=3$ однородно. Заметим, что обязательно $\Sigma=\sigma$

1Ба. При $\sigma=3$ в уравнении (13) все собственные значения λ_1, λ_2 и λ_3 имеют один знак, и уравнение может быть записано в виде

$$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}+\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=0.$$

Оно называется уравнением *мнимого конуса.* Поверхность состоит из одной точки.

1Бб. Если $\sigma=1$, то одно из собственных значений отличается знаком от двух других. Уравнение приводится к каноническому виду

$$\frac{(\xi^1)^2}{\sigma^2}+\frac{(\xi^2)^3}{\beta^2}-\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=0.$$

Поверхность является *конусом второго порядка.*

2. *Пусть теперь* $r=2$. В уравнении (12) одно из собственных значений равно нулю. Не уменьшая общности, мы можем считать, что это λ_3 Используя предложение 4,

приведем уравнение к виду

$$\lambda_1 (\xi'^1)^2 + \lambda_2 (\xi'^2)^2 + 2a_{30}\xi'^3 + a'_{00} = 0. \tag{15}$$

При этом мы перенссим начало координат вдоль осей ξ^1 и ξ^2. Выпишем детерминант матрицы квадратичной формы (5) для уравнения (15):

$$\begin{vmatrix} a'_{00} & 0 & 0 & a_{30} \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_{30} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{30}^2\lambda_1\lambda_2. \tag{16}$$

2А. Условие $R=4$ в силу равенства (16) равносильно $a_{30} \neq 0$. Уравнение (15) можно переписать в виде

$$\lambda_1 (\xi'^1)^2 + \lambda_2 (\xi'^2)^2 + 2a_{30} (\xi'^3 + a'_{00}/2a_{30}) = 0.$$

Это показывает, что переносом начала координат вдоль оси ξ'^3:

$$\tilde{\xi}^1 = \xi'^1, \ \tilde{\xi}^2 = \xi'^2, \ \tilde{\xi}^3 = \xi'^3 + a'_{00}/2a_{30},$$

уравнение можно преобразовать в

$$\lambda_1 (\tilde{\xi}^1)^2 + \lambda_2 (\tilde{\xi}^2)^2 + 2a_{30}\tilde{\xi}^3 = 0. \tag{17}$$

Далее могут представиться две возможности в соответствии со значением инварианта σ.

2Аа. $\sigma = 2$. В этом случае λ_1 и λ_2 одного знака и при необходимости, заменяя базисный вектор $\mathbf{e}_3$ на $-\mathbf{e}_3$, мы приведем уравнение к виду

$$\frac{(\tilde{\xi}^1)^2}{a^2} + \frac{(\tilde{\xi}^2)^2}{\beta^2} = 2\tilde{\xi}^3.$$

Это — каноническое уравнение *эллиптического параболоида.*

2Аб. $\sigma = 0$. В этом случае λ_1 и λ_2 разных знаков и уравнение приводится к каноническому виду

$$\frac{(\tilde{\xi}^1)^2}{a^2} - \frac{(\tilde{\xi}^2)^2}{\beta^2} = 2\tilde{\xi}^3$$

(тут также может потребоваться изменение направления $\mathbf{e}_3$). Это уравнение определяет *гиперболический параболоид.*

2Б. Допустим теперь, что $R=3$ Как видно из (16), для таких уравнений $a_{30}=0$ и левая часть уравнения не содержит переменной ξ^3. В соответствии со сказанным в п. 5 § 1 гл. II это означает, что уравнение определяет *цилиндр*, образующие которого параллельны базисному вектору $\mathbf{e}_3$, а направляющая определяется в плоскости векторов e_1 и e_2 уравнением

$$\lambda_1 (\xi'^1)^2 + \lambda_2 (\xi'^2)^2 + \alpha'_{00} = 0, \tag{18}$$

которое является уравнением (15) при $\alpha_{30} = 0$.

Уравнение (18) на плоскости может определять одну из пяти центральных линий второго порядка. Им соответствуют пять цилиндров, которые оно может определять в пространстве: *эллиптический цилиндр*, *гиперболический цилиндр*, *пара пересекающихся плоскостей* (здесь направляющая—пара пересекающихся прямых), *пара мнимых пересекающихся плоскостей* (поверхность состоит из одной прямой линии, направляющая—точка, т. е. «пара мнимых пересекающихся прямых») и, наконец, «*мнимый эллиптический цилиндр* (поверхность не содержит ни одной точки, «направляющая»—мнимый эллипс). Сами канонические уравнения приведены в табл. 2.

3. *Теперь рассмотрим случай* $r = 1$. Выберем ортонормированный базис так, чтобы квадратичная форма (4) имела диагональный вид. Мы придем к уравнению

$$\lambda_1 (\xi^1)^2 + 2\alpha_{10}\xi^1 + 2\alpha_{20}\xi^2 + 2\alpha_{30}\xi^3 + \alpha_{00} = 0, \tag{19}$$

где λ_1 отлично от нуля.

3А. Допустим, что $\alpha_{20}^2 + \alpha_{30}^2 \neq 0$. Тогда мы можем сделать поворот базиса вокруг e_1:

$$\xi'^1 = \xi^1, \quad \xi'^2 = (\alpha_{20}\xi^2 + \alpha_{30}\xi^3)/v, \quad \xi'^3 = (-\alpha_{30}\xi^2 + \alpha_{20}\xi^3)/v.$$

Здесь $v = \sqrt{\alpha_{20}^2 + \alpha_{30}^2}$. Теперь (19) примет вид

$$\lambda_1 (\xi'^1)^2 + 2\alpha_{10}\xi'^1 + 2v\xi'^2 + \alpha_{00} = 0,$$

который в силу предложения 4 преобразуется в

$$\lambda_1 (\xi''^1)^2 + 2v\xi'^2 + \alpha'_{00} = 0.$$

Далее, переносом начала вдоль оси ξ^2:

$$\tilde{\xi}^1 = \xi''^1, \quad \tilde{\xi}^2 = \xi'^2 + \alpha'_{00}/2v, \quad \tilde{\xi}^3 = \xi^3$$

мы преобразуем уравнение к виду

$$\lambda_1 (\tilde{\xi}^1)^2 + 2v\tilde{\xi}^2 = 0. \tag{20}$$

Уравнение (20) приводится к каноническому виду $(\tilde{\xi}^1)^2 = 2\alpha\tilde{\xi}^2$, где $\alpha > 0$. (При необходимости можно изменить направление e'_2.) Это—уравнение *параболического цилиндра*.

3Б. Если $\alpha_{20} = \alpha_{30} = 0$, то уравнение (19) содержит только ξ^1 и выделением квадрата приводится к одному из трех последних канонических видов в табл. 2.

На этом классификация заканчивается. Ее результаты собраны в табл. 2.

Таблица 2

Название	Каноническое уравнение	R	Σ	r	σ
«Мнимый эллипсоид»	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}+\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=-1$	4	4	3	3
Эллипсоид	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}+\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=1$	4	2	3	3
Однополостный гиперболоид	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}-\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=1$	4	0	3	1
Двуполостный гиперболоид	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}-\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}-\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=1$	4	2	3	1
«Мнимый конус»	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}+\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=0$	3	3	3	3
Конус	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}-\frac{(\xi^3)^2}{\gamma^2}=0$	3	1	3	1
Эллиптический параболоид	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}=2\xi^3$	4	2	2	2
Гиперболический параболоид	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}-\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}=2\xi^3$	4	0	2	0
Эллиптический цилиндр	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}=1$	3	1	2	2
«Мнимый эллиптический цилиндр»	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}=-1$	3	3	2	2
Гиперболический цилиндр	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}-\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}=1$	3	1	2	0
Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}-\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}=0$	2	0	2	0
«Пара мнимых пересекающихся плоскостей»	$\frac{(\xi^1)^2}{\alpha^2}+\frac{(\xi^2)^2}{\beta^2}=0$	2	2	2	2
Параболический цилиндр	$(\xi^1)^2=2\alpha\xi^2$	3	1	1	1
Пара параллельных плоскостей	$(\xi^1)^2-\alpha^2=0$	2	0	1	1
«Пара мнимых параллельных плоскостей»	$(\xi^1)^2+\alpha^2=0$	2	2	1	1
Пара совпавших плоскостей	$(\xi^1)^2=0$	1	1	1	1

ГЛАВА X

ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Тензоры в линейном пространстве

1. Геометрические объекты. В главах VI—VIII мы рассматривали линейное пространство и в нем разного рода объекты: линейные преобразования, квадратичные формы и т. д. Изучение каждого объекта основывалось на определении, которое формулировалось независимо от базиса. Например, линейное преобразование определялось как отображение пространства в себя, удовлетворяющее двум условиям (ср. (1) § 3 гл. VI). Таким образом, наши объекты существуют и в принципе могут быть изучены без введения базиса, как объекты, изучаемые в геометрии. Для обозначения таких объектов мы будем пользоваться словами *геометрический объект.*

Хотя геометрический объект и существует независимо от базиса, нам удобнее, выбрав некоторый базис, задать объект относительно этого базиса при помощи упорядоченной системы чисел—*компонент* объекта. Например, выбор базиса задает взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями и квадратными матрицами. Линейное преобразование n-мерного пространства имеет n^2 компонент. Неизменность объекта при замене базиса приводит к изменению компонент. Во всех встречавшихся нам случаях мы могли вычислить компоненты объекта в одном базисе через его компоненты в другом базисе и через элементы матрицы перехода от первого базиса ко второму.

Помимо изученных нами, существуют и другие геометрические объекты. Не для каждого из них удобно давать инвариантное, не зависящее от базиса, определение. Иногда геометрический объект определяют при помощи компонент. Компоненты геометрического объекта отличаются от произвольного набора чисел следующим признаком, который принимается за строгое определение.

Определение. Мы будем говорить, что в линейном пространстве задан *геометрический объект*, если каждому базису однозначно соответствует упорядоченная система чисел (компонент) и компоненты в одном базисе могут быть выражены через компоненты в другом базисе и элементы матрицы перехода. Это выражение называют *законом преобразования компонент* геометрического объекта

Например, если каждому базису соответствует одно и то же число, то задан геометрический объект, называемый *инвариантом*, с одной компонентой. Закон преобразования состоит в том, что эта компонента не меняется при изменении базиса.

В качестве еще одного примера рассмотрим квадратичную форму $\mathbf{k}$ и сопоставим каждому базису $\boldsymbol{e}$ детерминант δ ее матрицы K в этом базисе. Мы получим геометрический объект с одной компонентой $\delta = \det K$. Поскольку в базисе $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$ мы имеем $K' = S^{\mathrm{T}}KS$, закон преобразования компоненты этого объекта имеет вид $\delta' = (\det S)^2\,\delta$.

Пусть задан вектор x. Сопоставим базису $\boldsymbol{e}$ сумму компонент ξ^i этого вектора в данном базисе. Каждому базису будет сопоставлено вполне определенное число $\gamma = \sum\limits_i \xi^i$. Однако это соответствие не будет геометрическим объектом. Действительно, число γ', соответствующее базису $\boldsymbol{e}'$, выражается не через γ, а через все компоненты вектора по отдельности:

$$\gamma' = \sum_i \xi'^i = \sum_{i,\,j} \tau_j^i \xi^j.$$

(Здесь τ_j^i — элементы матрицы перехода от $\boldsymbol{e}'$ к $\boldsymbol{e}$.)

В этой главе мы будем рассматривать вещественное n-мерное линейное пространство $\mathscr{L}_n$. Мы сохраним все обозначения, принятые ранее. Если имеются два базиса $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$, то всегда матрицу перехода будем обозначать S, а ее элементы σ_j^i, так что $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}S$ или $e_j' = \sum\limits_i \sigma_j^i e_i$. Элементы матрицы обратного перехода S^{-1} будем обозначать через τ_j^i.

Рассмотрим произвольный геометрический объект. Обозначим его компоненты в базисе $\boldsymbol{e}$ через $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$, а компоненты в базисе $\boldsymbol{e}'$ через $\alpha_1', \ldots, \alpha_N'$. Закон преобразования компонент объекта определяется N функциями $F_1, \ldots, F_N$, каждая из которых зависит от $N + n^2$ независимых переменных:

$$\alpha_K' = F_K(\alpha_1, \ldots, \alpha_N, \sigma_1^1, \ldots, \sigma_n^n) \qquad (K = 1, \ldots, N);$$

или, короче,

$$\alpha_K' = F_K(\alpha, S). \tag{1}$$

Рассмотрим третий базис $e''=e'R=eSR$. Пусть $\alpha_1'', \ldots, \alpha_N''$ — компоненты объекта в этом базисе От e к e'' можно перейти непосредственно, причем матрицей перехода будет произведение SR. Мы получим

$$\alpha_K''=F_K(\alpha, SR).$$

С другой стороны, можно от e перейти к e', а от e' — к e'' Тогда

$$\alpha_K''=F_K(\alpha', R)=F_K(F_1(\alpha, S), \ldots, F_N(\alpha, S), R).$$

Поскольку компоненты объекта однозначно определяются базисом, функции F_K для всех $K=1, \ldots, N$ должны удовлетворять условию

$$F_k(\alpha, SR)=F_k(F_1(\alpha, S), \ldots, F_N(\alpha, S), R), \qquad (2)$$

каковы бы ни были α, S и R. Мы получили

Предложение 1. *Если функции вида* (1) *задают закон преобразования какого-нибудь геометрического объекта, то они необходимо удовлетворяют условию* (2)

Справедливо и обратное утверждение

Предложение 2. *Каждый набор функций вида* (1), *удовлетворяющий условию* (2), *определяет закон преобразования некоторого геометрического объекта*

Для доказательства мы построим этот геометрический объект следующим образом. В некотором базисе e зададим компоненты произвольно (предполагается, что рассматриваемые функции определены для любых значений независимых переменных) Компоненты объекта в остальных базисах мы найдем, пользуясь заданным набором функций как законом преобразования. При этом компоненты в произвольном базисе e'' определяются этими же функциями от компонент в любом базисе e' и элементов матрицы перехода от e' к e''. В самом деле, при введенных выше обозначениях мы имеем $\alpha_K''=F_K(\alpha, SR)$ и $\alpha_K'=F_K(\alpha, S)$. Отсюда, в силу (2), $\alpha_K''=F_K(\alpha', R)$, как и требовалось

Осталось показать, что наше построение сопоставляет каждому базису единственную систему чисел. Единственность может нарушаться только потому, что к одному и тому же базису можно прийти разными путями: если $e', e'', \ldots, e^{(k)}$ — какие-то базисы, то можно переходить от e к e', от e' к e'' и т. д. и, наконец, от $e^{(k)}$ к f Многократно применяя условие (2), можно убедиться, что переход по каждому из путей дает те же компоненты в базисе f, что и непосредственный переход от e к f.

Мы будем изучать простейшие геометрические объекты, называемые *тензорами*. Закон преобразования их компонент таков, что новые компоненты являются линейными однородными многочленами от старых компонент. Подробно он будет описан ниже. Компоненты тензоров принято упорядочивать, нумеруя их несколькими индексами. Следующий пункт мы посвятим обозначениям.

2. Пространственные матрицы. Напомним, что на с. 136 было дано второе определение матрицы, как функции, сопоставляющей некоторое число каждой упорядоченной паре (i, j), где $i\in\{1, \ldots, m\}$, $j\in\{1, \ldots, n\}$. Мы обобщим это определение. Поскольку нам потребуются только матрицы, аналогичные квадратным матрицам, все индексы будут принадлежать одному и тому же множеству $\{1, \ldots, n\}$.

Определение. *s-мерной матрицей порядка n* называется функция на множестве всевозможных наборов вида $(i_1, \ldots, i_s)$, где $i_1, \ldots, i_s$ принимают значения $1, \ldots, n$.

Подчеркнем, что порядок матрицы совпадает с размерностью рассматриваемого линейного пространства. Для того чтобы разъяснить происхождение термина «s-мерная матрица», рассмотрим трехмерную матрицу с элементами a_{ijk}. При любом фиксированном значении индекса $k=k_0$ элементы матрицы вида a_{ijk_0} составляют квадратную матрицу порядка n. Таким образом, все элементы a_{ijk} составляют упорядоченный набор из n квадратных матриц порядка n. $\|a_{ij1}\|, \ldots, \|a_{ijn}\|$. Можно представлять себе эти матрицы расположенными одна под другой в виде слоев, так что образуется куб, разделенный на n^3 ячеек, в каждой из которых записано число. Аналогично, четырехмерная матрица может рассматриваться как упорядоченный набор из n трехмерных матриц и т. д.

Строку и столбец удобно считать одномерными матрицами Их элементы нумеруют одним индексом.

Выбирая обозначение для s-мерной матрицы, мы для удобства можем условиться писать некоторые из индексов сверху, а остальные снизу. Но, как только обозначение выбрано, мы будем строго придерживаться принятого нами расположения индексов. Если порядок индексов не установлен иначе, мы будем считать, что нижние индексы следуют за верхними так, как если бы они были написаны правее верхних.

Многомерные матрицы полностью выписывать сложно. Принято следующее соглашение: буквенный индекс рассматривают как переменную величину, принимающую значения $1, \ldots, n$, и *если написано выражение, содержащее буквенный индекс*[1]*), не являющийся индексом, суммирования, то предполагается, что выписаны n таких выражений для каждого значения этого индекса.* Когда имеется несколько индексов, сказанное относится к каждому из них. В соответствии с этим, например, $\alpha^{i_1 \ldots i_s}$ обозначает всю совокупность элементов s-мерной матрицы, а запись

---

[1]) У нас в качестве буквенных индексов будут, как правило, употребляться буквы i, j, k, l, возможно, снабженные своими индексами. Буква n всегда обозначает фиксированное число — размерность пространства.

$\alpha^i_{jk}=\beta^i_{jk}$ означает, что равны друг другу стоящие на одинаковых местах элементы двух трехмерных матриц, т. е. матрицы равны.

Введем следующее новое обозначение суммирования. *Пусть написано выражение, состоящее из одной буквы или произведения нескольких букв с индексами, причем какой-нибудь индекс встречается дважды — один раз вверху, а другой раз снизу. Под этим выражением мы будем понимать сумму членов такого вида, написанных для всех значений повторяющегося индекса, а знак суммы писать не будем.* Если описанным образом повторяются несколько индексов, то имеется в виду многократная сумма. В гл. V—VIII мы постоянно сталкивались с суммами такого типа, но писали знак суммы. Теперь мы этого делать не будем. Например, формулы

$$\mathfrak{f}(x)=\sum_{i=1}^{n}\varkappa_i\xi^i,\qquad \alpha'_{kl}=\sum_{i,\,j}\alpha_{ij}\sigma^i_k\sigma^j_l$$

будем писать в виде

$$\mathfrak{f}(x)=\varkappa_i\xi^i,\qquad \alpha'_{kl}=\alpha_{ij}\sigma^i_k\sigma^j_l. \tag{3}$$

3. Определение и примеры. Мы рассматриваем вещественное n-мерное линейное пространство $\mathscr{L}_n$.

Определение. В $\mathscr{L}_n$ задан *тензор типа* $(p,\,q)$, если каждому базису сопоставлена $(p+q)$-мерная матрица порядка n. При этом, каковы бы ни были базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$, элементы $\alpha^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ и $\alpha'^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ соответствующих им матриц должны быть связаны соотношениями

$$\alpha'^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=\tau^{i_1}_{k_1}\ldots\tau^{i_p}_{k_p}\sigma^{l_1}_{j_1}\ldots\sigma^{l_q}_{j_q}\alpha^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}, \tag{4}$$

где σ^i_j — элементы матрицы перехода от $\boldsymbol{e}$ к $\boldsymbol{e}'$, а τ^i_k — элементы обратной ей матрицы.

В правой части (4) суммирование осуществляется по всем индексам k и l, т. е. мы имеем $(p+q)$-кратную сумму. Мы условливаемся писать сверху те индексы, которым в каждом из n^{p+q} слагаемых соответствуют множители τ^i_k. Эти индексы называются *контравариантными*. Внизу же мы пишем те индексы, которым в каждом слагаемом соответствуют множители σ^i_j. Это — *ковариантные* индексы.

Элементы матрицы, соответствующей некоторому базису, называются *компонентами* тензора в этом базисе.

Число $p+q$ называют *валентностью* тензора, а q и p—соответственно *ко-* и *контравариантной валентностью.*

Подчеркнем, что, несмотря на сложиость суммы в правой части формулы (4), в каждое слагаемое входит в качестве множителя одна-единственная старая компонента тензора. Это означает, что новые компоненты выражаются как линейные однородные многочлены от старых компонент. Сложность формулы (4) связана с выражением коэффициентов этих многочленов через элементы матрицы перехода.

Два тензора *равны*, если они одного типа и имеют равные компоненты в некотором базисе. Тогда из закона преобразования вытекает, что равны их компоненты и в любом базисе.

Пример 1. Вектор является тензором типа (1,0). Действительно, если задан вектор, то каждому базису соответствует одномерная матрица—столбец. При этом элементы столбцов, соответствующих равным базисам, связаны формулой (4) § 1 гл. VI:

$$\xi^i=\sigma^i_k\xi'^k.$$

Найдем отсюда выражение ξ'^k через ξ^i:

$$\xi'^k=\tau^k_i\xi^i,$$

это закон преобразования компонент тензора типа (1, 0).

Пример 2. Линейная функция на пространстве $\mathscr{L}_n$ является тензором типа (0, 1). Действительно, если задана линейная функция, то каждому базису соответствует одномерная матрица—строка коэффициентов этой функции. При изменении базиса коэффициенты линейной функции преобразуются по формуле (4) § 1 гл. VIII:

$$\varkappa'_i=\sigma^k_i\varkappa_k.$$

Это и есть закон преобразования компонент тензора типа (0, 1). Тензоры типа (0, 1) называют *ковекторами.*

Пример 3. Линейное преобразование пространства $\mathscr{L}_n$ является тензором типа (1, 1). Действительно, если задано линейное преобразование, то каждому базису соответствует двумерная матрица порядка n. Если базис меняется, то элементы матрицы преобразуются по формуле (1) § 4 гл. VI: $A'=S^{-1}AS$, или

$$\alpha'^i_j=\tau^i_k\sigma^l_j\alpha^k_l.$$

Пример 4. Билинейная форма на пространстве $\mathscr{L}_n$ является тензором типа (0, 2). В самом деле, если задана билинейная форма, то каждому базису соответствует двумерная матрица порядка n. Элементы матриц, соответствующих двум базисам, связаны формулой:

$$\beta'_{ij} = \sigma_i^k \sigma_j^l \beta_{kl}.$$

Следует заметить, что симметричная билинейная форма и соответствующая ей квадратичная форма — один и тот же тензор, поскольку их матрицы в любом базисе совпадают.

Пример 5. Инвариант можно считать тензором типа (0, 0).

Пример 6. Важным тензором типа (1, 1) является так называемый *символ Кронекера*, компоненты которого в некотором базисе составляют единичную матрицу:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{5}$$

Согласно закону преобразования

$$\delta_j'^i = \tau_k^i \sigma_j^l \delta_l^k. \tag{6}$$

Если δ_l^k определяются формулой (5), то из n^2 слагаемых в правой части (6) равны нулю все, кроме тех, для которых $k = l$. Поэтому $\delta_j'^i = \tau_k^i \sigma_j^k$, а $\tau_k^i \sigma_j^k$ — элемент произведения $S^{-1}S$. Значит, $\delta_j'^i = \delta_j^i$. Мы видим, что тензор типа (1, 1), имеющий в одном базисе единичную матрицу, имеет единичную матрицу и в любом другом базисе.

Пример 7. Рассмотрим обобщение билинейной формы — функцию $\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_q)$ от q векторов, линейную по каждому из них, если остальные фиксированы. Разложим каждый из векторов по произвольному базису e. Тогда, в силу линейности по каждому вектору

$$\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_q) = \mathrm{F}(\xi_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, \xi_q^{i_q} e_{i_q}) =$$
$$= \xi_1^{i_1} \ldots \xi_q^{i_q} \mathrm{F}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}) = \alpha_{i_1 \ldots i_q} \xi_1^{i_1} \ldots \xi_q^{i_q},$$

где коэффициенты $\alpha_{i_1 \ldots i_q} = \mathrm{F}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q})$ играют ту же роль, что и коэффициенты билинейной формы. Докажем, что при замене базиса они преобразуются как компоненты тензора типа $(0, q)$. Для этого рассмотрим базис $e'_i = \sigma_i^k e_k$ и снова воспользуемся линейностью функции

$$\mathrm{F}(e'_{i_1}, \ldots, e'_{i_q}) = \mathrm{F}(\sigma_{i_1}^{k_1} e_{k_1}, \ldots, \sigma_{i_q}^{k_q} e_{k_q}) =$$
$$= \sigma_{i_1}^{k_1} \ldots \sigma_{i_q}^{k_q} \mathrm{F}(e_{k_1}, \ldots, e_{k_q}).$$

Полученное равенство доказывает наше утверждение.

Таким же способом можно построить пример тензора любого типа (p, q). При этом функция F должна зависеть от q векторов и p ковекторов и быть линейной по каждому из них. Значение такой функции на векторах $x_1, \ldots, x_q$ и ковекторах $l^1, \ldots, l^p$ можно вычислить, разложив векторы по произвольному базису $e_1, \ldots, e_n$, а ковекторы — по базису $\mathsf{p}^1, \ldots, \mathsf{p}^n$ в пространстве ковекторов $\mathscr{L}_n^*$, который мы выберем биортогональным базису $e_1, \ldots, e_n$. Напомним (ср. с. 249), что базис $\mathsf{p}^1, \ldots, \mathsf{p}^n$ в пространстве $\mathscr{L}_n^*$ всех ковекторов называется *биортогональным* базису $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathscr{L}_n$, если

$$\mathsf{p}(e_k) = \delta_k^i.$$

В силу линейности функции F мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}(x_1, \ldots, x_q, l^1, \ldots, l^p) &= \\
&= \mathsf{F}(\xi_1^{j_1} e_{j_1}, \ldots, \xi_q^{j_q} e_{j_q}, \lambda_{i_1}^1 \mathsf{p}^{i_1}, \ldots, \lambda_{i_p}^p \mathsf{p}^{i_p}) = \\
&= \xi_1^{j_1} \ldots \xi_q^{j_q} \lambda_{i_1}^1 \ldots \lambda_{i_p}^p \mathsf{F}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}, \mathsf{p}^{i_1}, \ldots, \mathsf{p}^{i_p}) = \\
&= \alpha_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \xi_1^{j_1} \ldots \xi_q^{j_q} \lambda_{i_1}^1 \ldots \lambda_{i_p}^p .
\end{aligned}$$

Базис $\mathsf{p}'^1, \ldots, \mathsf{p}'^n$, биортогональный базису $e'_1, \ldots, e'_n$, состоит из ковекторов $\mathsf{p}'^j = \tau_i^j \mathsf{p}^i$. Действительно,

$$\mathsf{p}'^j(e'_l) = \tau_i^j \mathsf{p}^i(\sigma_l^k e_k) = \tau_i^j \sigma_l^k \delta_k^i = \delta_l^j.$$

Отсюда, так же как и выше, вытекает, что $\alpha_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ преобразуются как компоненты тензора типа (p, q).

Функции, рассмотренные в этом примере, называются *полилинейными функциями*.

Из последнего примера видно, что существуют тензоры любого типа (p, q). Тензор типа (p, q) будет определен, если мы построим полилинейную функцию от p ковекторов и q векторов. Ее можно построить, задав базис и какую-нибудь матрицу коэффициентов $\alpha_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$. После этого каждому набору из p ковекторов и q векторов мы можем сопоставить число

$$\alpha_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \xi_1^{j_1} \ldots \xi_q^{j_q} \lambda_{i_1}^1 \ldots \lambda_{i_p}^p ,$$

что и определяет полилинейную функцию.

4. Сложение и умножение на число. Для тензоров одного и того же типа определена операция сложения. Именно, пусть $\alpha_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ и $\beta_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ — компоненты двух тензоров A и B типа (p, q) в одном и том же базисе e. Сопоставим этому базису $(p+q)$-мерную матрицу, сложив компоненты тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, имеющие одинаковые наборы индексов:

$$\gamma^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \beta^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}. \tag{7}$$

Предложение 3. *Если мы сопоставим каждому базису числа* $\gamma^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, *определяемые по компонентам тензоров* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *в этом базисе формулой* (7), *то этим будет определен тензор типа* (p, q).

Для доказательства достаточно выяснить, как преобразуются числа $\gamma^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ при замене базиса. Мы имеем

$$\alpha'^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \tau^{i_1}_{k_1} \dots \tau^{i_p}_{k_p} \sigma^{l_1}_{j_1} \dots \sigma^{l_q}_{j_q} \alpha^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}$$

и

$$\beta'^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \tau^{i_1}_{k_1} \dots \tau^{i_p}_{k_p} \sigma^{l_1}_{j_1} \dots \sigma^{l_q}_{j_q} \beta^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}.$$

Складывая почленно эти равенства, получаем

$$\alpha'^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \beta'^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \tau^{i_1}_{k_1} \dots \tau^{i_p}_{k_p} \sigma^{l_1}_{j_1} \dots \sigma^{l_q}_{j_q} (\alpha^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} + \beta^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}),$$

т. е. тензорный закон преобразования для $\gamma^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$.

Определение. Тензор $\mathbf{C}$ с компонентами $\gamma^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, определенными по формуле (7), называется *суммой* тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и обозначается $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Таким образом, при сложении тензоров складываются их соответствующие компоненты. Это значит, что обычная сумма векторов будет их суммой, если их складывать как тензоры. То же относится к сумме линейных преобразований, которую мы определили в гл. VI. (Определение суммы там было дано для произвольных отображений.)

Предложение 4. *Поставим в соответствие каждому базису числа* $\lambda\alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, *где* $\alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ — *компоненты тензора* $\mathbf{A}$ *в этом базисе. Такое соответствие определяет тензор.*

Доказательство этого предложения мы не приводим — оно проводится по образцу доказательства предложения 3 и, как и оно, по существу, вытекает из того, что правые части уравнений (4) — линейные однородные многочлены от старых компонент.

Определение. Тензор, построенный в предложении 4, мы назовем *произведением тензора* $\mathbf{A}$ *на число* λ *и обозначим* $\lambda\mathbf{A}$.

Свойства введенных операций списываются следующим предложением.

Предложение 5. *По отношению к операциям сложения и умножения на число множество всех тензоров одного и того же типа* (p, q) *является линейным пространством размерности* n^{p+q}.

Предоставим читателю проверить все аксиомы в определении линейного пространства.

Выберем какой-нибудь базис в $\mathscr{L}_n$ и рассмотрим тензоры, у которых одна из компонент в данном базисе равна единице, а остальные компоненты равны нулю. Существует ровно n^{p+q} таких тензоров, так как произвольный тензор типа (p, q) имеет n^{p+q} компонент. Эти тензоры линейно независимы, и каждый тензор является их линейной комбинацией (коэффициенты которой — компоненты данного тензора). Таким образом, размерность пространства тензоров типа (p, q) равна n^{p+q}.

5. Умножение тензоров. Пусть **А** — тензор типа (p, q), а **В** — тензор типа (r, s) Произвольному базису $\boldsymbol{e}$ мы можем сопоставить $(p+q+r+s)$-мерную матрицу, составленную из произведений каждой компоненты **А** на каждую компоненту **В**. Эти произведения упорядочим, записав сначала индексы, относящиеся к **А**, а затем индексы, относящиеся к **В**, так, как показывает формула

$$\gamma^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r}_{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_s} = \alpha^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \beta^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}. \tag{8}$$

Предложение 6. *Если каждому базису мы сопоставим числа* $\gamma^{i_1 \dots k_r}_{j_1 \dots l_s}$, *определяемые по компонентам тензоров* **А** *и* **В** *в этом базисе формулой* (8), *то этим будет определен тензор типа* $(p+r, q+s)$.

Доказательство мы проведем для случая тензоров типов (1, 1) и (0, 1). В общем случае доказательство отличается только более громоздкой записью. Выразим компоненты тензоров **А** и **В** в базисе $\boldsymbol{e}'$ через их компоненты в базисе $\boldsymbol{e}$:

$$\alpha'^{i}_{j} = \tau^{i}_{k}\sigma^{l}_{j}\alpha^{k}_{l}, \quad \beta'_{m} = \sigma^{h}_{m}\beta_{h}.$$

Отсюда

$$\gamma'^{i}_{jm} = \alpha'^{i}_{j}\beta'_{m} = \tau^{i}_{k}\sigma^{l}_{j}\sigma^{h}_{m}\alpha^{k}_{l}\beta_{h} = \tau^{i}_{k}\sigma^{l}_{j}\sigma^{h}_{m}\gamma^{k}_{lh},$$

т. е. величины γ^{k}_{lh} преобразуются при замене базиса как компоненты тензора типа (1, 2).

Это доказательство, в отличие от предыдущих, использует выражение через σ^{i}_{j} и τ^{i}_{j} коэффициентов при старых компонентах в формулах (4).

Определение. Тензор, построенный в предложении 6, называется *произведением тензора* **А** *на тензор* **В** и обозначается $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.

Пример. Рассмотрим две линейные функции f и h на $\mathscr{L}_n$ и сопоставим каждой паре векторов x и y число $\mathsf{f}(x)\,\mathsf{h}(y)$. Пусть в некотором базисе значения f и h записываются $\mathsf{f}(x)=\varkappa_i\xi^i$ и $\mathsf{h}(x)=\mu_k\eta^k$, где ξ^i и η^k—компоненты векторов x и y. Тогда

$$\mathsf{b}(x,\ y)=\mathsf{f}(x)\cdot\mathsf{h}(y)=(\varkappa_i\xi^i)(\mu_k\eta^k)=(\varkappa_i\mu_k)\,\xi^i\eta^k,$$

поскольку при перемножении многочленов каждый член одного сомножителя умножается на каждый член другого. Итак, построенная нами функция b—билинейная форма, т. е. тензор типа (0, 2). Этот тензор является тензорным произведением тензоров, соответствующих f и h. Мы можем записать $\mathsf{b}=\mathsf{f}\otimes\mathsf{h}$ или, в компонентах, $\beta_{ik}=\varkappa_i\mu_k$.

Тензорное умножение не коммутативно. Покажем это на следующем примере. Тензорное произведение двух векторов x и y есть тензор $x\otimes y$ типа (2, 0). n^2 его компонент составляют квадратную матрицу (первый индекс—номер строки). Если ξ^i и η^k—компоненты x и y в некотором базисе, то матрица из компонент $x\otimes y$ в этом базисе имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \xi^1\eta^1 & \xi^1\eta^2 & \dots & \xi^1\eta^n \\ \xi^2\eta^1 & \xi^2\eta^2 & \dots & \xi^2\eta^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^n\eta^1 & \xi^n\eta^2 & \dots & \xi^n\eta^n \end{Vmatrix}.$$

Составив таким же способом матрицу из компонент тензора $y\otimes x$, мы получим транспонированную матрицу. Каждая компонента $\xi^i\eta^k$—произведение чисел, и, следовательно, $\xi^i\eta^k=\eta^k\xi^i$. Но упорядочиваются компоненты тензоров $x\otimes y$ и $y\otimes x$ разными способами. То же относится и к произведению произвольных тензоров.

Предоставим читателю самостоятельно убедиться в том, что тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению. Легко заметить также, что введенное ранее умножение тензора на число совпадает с умножением на тензор типа (0, 0), имеющий это число в качестве компоненты.

Предложение 7. *Любой тензор типа $(p,\ q)$ есть линейная комбинация произведений, в каждое из которых входит p векторов и q ковекторов.*

Для доказательства достаточно показать, что произведениями требуемого вида являются тензоры, из которых в предложении 5 был построен базис в пространстве тензоров типа (p, q). Мы сделаем это для тензоров типа (2, 1), поскольку в общем случае рассуждение аналогично.

Пусть тензор Ω таков, что в базисе $e_1, \ldots, e_n$ его компонента $\theta_1^{23}=1$, а остальные компоненты равны нулю. Рассмотрим базисные векторы e_2, e_3 и ковектор $\mathbf{f}$, который в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет компоненты $(1, 0, \ldots, 0)$. Так как e_2 и e_3 имеют компоненты $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ и $(0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, произведение $e_2 \otimes e_3 \otimes \mathbf{f}$ имеет только одну компоненту (с номерами 2, 3 и 1), равную единице, а остальные компоненты этого произведения равны нулю. Таким образом, $\Omega = e_2 \otimes e_3 \otimes \mathbf{f}$, как и требовалось. Точно так же утверждение доказывается и для остальных тензоров, составляющих базис в пространстве тензоров рассматриваемого типа.

6. Свертывание. Пусть $\alpha_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ — компоненты тензора типа (p, q) в базисе e, причем $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$. Выберем какой-нибудь верхний индекс, например первый, и какой-нибудь нижний индекс, например последний. При каждом фиксированном наборе значений остальных индексов составим сумму тех компонент тензора $\mathbf{A}$, у которых равны значения выбранных индексов:

$$\beta_{j_1 \ldots j_{q-1}}^{i_2 \ldots i_p} = \alpha_{j_1 \ldots j_{q-1} 1}^{1 i_2 \ldots i_p} + \alpha_{j_1 \ldots j_{q-1} 2}^{2 i_2 \ldots i_p} + \ldots + \alpha_{j_1 \ldots j_{q-1} n}^{n i_2 \ldots i_p}. \qquad (9)$$

Предложение 8. *Сопоставим каждому базису систему чисел, получаемую из компонент $\alpha_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}$ тензора типа (p, q) по формуле* (9). *Такое соответствие определяет тензор типа $(p-1, q-1)$.*

Для доказательства выясним, как преобразуется указанная система чисел при изменении базиса. Мы имеем

$$\beta'^{i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1}} = \alpha'^{k i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1} k} = \tau_{m_1}^{k} \tau_{m_2}^{i_2} \ldots \tau_{m_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \ldots \sigma_{j_{q-1}}^{l_{q-1}} \sigma_k^{l_q} \alpha_{l_1 \ldots l_q}^{m_1 \ldots m_p}.$$

Но так как $\tau_{m_1}^k \sigma_k^{l_q} = \delta_{m_1}^{l_q}$, то это выражение равно

$$\delta_{m_1}^{l_q} \tau_{m_2}^{i_2} \ldots \tau_{m_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \ldots \sigma_{j_{q-1}}^{l_{q-1}} \alpha_{l_1 \ldots l_q}^{m_1 \ldots m_p}.$$

При суммировании по индексам l_q и m_1 равны нулю все слагаемые, за исключением тех, для которых $l_q = m_1$. Обозначив $l_q = m_1 = k$, мы можем написать

$$\beta'^{i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1}} = \tau_{m_2}^{i_2} \ldots \tau_{m_p}^{i_p} \sigma_{j_1}^{l_1} \ldots \sigma_{j_{q-1}}^{l_{q-1}} \alpha_{l_1 \ldots l_{q-1} k}^{k m_2 \ldots m_p}.$$

Это означает, что числа $\beta_{j_1 \ldots j_{q-1}}^{i_2 \ldots i_p}$ преобразуются как компоненты тензора типа $(p-1, q-1)$.

Определение. Тензор, получаемый из тензора **A** по формулам (9), называется его *сверткой* по первому верхнему и последнему нижнему индексам. Аналогично определяется свертка по любому верхнему и любому нижнему индексу.

Сверткой двух тензоров называется какая-либо свертка их произведения по верхнему индексу одного сомножителя и нижнему индексу другого. Например, образ вектора x с компонентами ξ^i при линейном преобразовании **A** с матрицей α_j^i есть свертка соответствующих тензоров: $\eta^i=\alpha_j^i\xi^j=\alpha_1^i\xi^1+\ldots+\alpha_n^i\xi^n$.

Значение линейной функции **f** с коэффициентами $\varkappa_i$ на векторе x с компонентами ξ^i есть свертка $\zeta=\varkappa_i\xi^i$.

Важным примером является свертывание тензора типа (1, 1). При этом получается тензор типа (0, 0), т. е. инвариант. Если мы обозначим компоненты тензора **A** типа (1, 1), через α_j^i, то его свертка имеет вид $\alpha_i^i=\alpha_1^1+\ldots+\alpha_n^n$. Это—сумма диагональных элементов матрицы A из компонент **A**. Сумма диагональных элементов матрицы A называется ее *следом* и обозначается $\operatorname{tr} A$. На с. 216 мы видели, что $\operatorname{tr} A$—инвариант, если A—матрица линейного преобразования. Теперь мы получили это с более общей точки зрения.

Напротив, для тензоров типа (0, 2) свертка не определена. В соответствии с этим след матрицы квадратичной формы не будет инвариантом—он может быть изменен при изменении базиса. Предоставим читателю проверить это.

7. Транспонирование. Рассмотрим множество элементов s-мерной матрицы, для которого все индексы, кроме некоторых двух, имеют фиксированные значения. Это множество образует двумерный слой—квадратную матрицу. Таким образом, вся матрица распадается на двумерные слои, соответствующие различным сочетаниям значений всех индексов, кроме выбранных двух.

Транспонированием s-мерной матрицы по каким-нибудь двум индексам называется такая перестановка ее элементов, при которой транспонируется каждый слой, получаемый фиксированием всех индексов, кроме данных двух. Например, при транспонировании матрицы $\alpha_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$ по первым двум верхним индексам она переходит в матрицу $\beta_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}$, которая связана с исходной матрицей равенством

$$\beta_{j_1\ldots j_q}^{i_1 i_2 i_3\ldots i_p}=\alpha_{j_1\ldots j_q}^{i_2 i_1 i_3\ldots i_p}. \qquad (10)$$

Вообще, под транспонированием по некоторому множеству индексов понимают результат последовательного выполнения транспонирований по различным парам индексов из этого множества.

Операцию транспонирования иногда называют операцией *перестановки индексов.*

Пусть для примера $n=2$. Рассмотрим трехмерную матрицу α_{ijk}. Значениям 1 и 2 первого индекса соответствуют два слоя. Мы выпишем их один рядом с другим:

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{112} & \alpha_{211} & \alpha_{212} \\ \alpha_{121} & \alpha_{122} & \alpha_{221} & \alpha_{222} \end{array} \right\|.$$

Транспонирование по двум последним индексам переводит эту матрицу в матрицу $\beta_{ijk}=\alpha_{ikj}$, или, в развернутом виде,

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \beta_{111} & \beta_{112} & \beta_{211} & \beta_{212} \\ \beta_{121} & \beta_{122} & \beta_{221} & \beta_{222} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{121} & \alpha_{211} & \alpha_{221} \\ \alpha_{112} & \alpha_{122} & \alpha_{212} & \alpha_{222} \end{array} \right\|.$$

Если при более сложном транспонировании $\gamma_{ijk}=\alpha_{kij}$, то γ_{ijk} имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \gamma_{111} & \gamma_{112} & \gamma_{211} & \gamma_{212} \\ \gamma_{121} & \gamma_{122} & \gamma_{221} & \gamma_{222} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha_{111} & \alpha_{211} & \alpha_{121} & \alpha_{221} \\ \alpha_{112} & \alpha_{212} & \alpha_{122} & \alpha_{222} \end{array} \right\|.$$

Предложение 9. *Пусть каждому базису сопоставлена $(p+q)$-мерная матрица $\beta^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, получаемая из матрицы $\alpha^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ компонент тензора* **A** *транспонированием, при котором переставляются только верхние или только нижние индексы. Это соответствие определяет тензор* **B** *того же типа, что и* **A**.

Нам достаточно доказать это для транспонирований, меняющих порядок только двух индексов, поскольку любое транспонирование — результат последовательного выполнения таких транспонирований. Кроме того, для любой пары верхних или нижних индексов доказательство одинаково. Поэтому мы докажем предположение для транспонирования по первой паре верхних индексов, записанного в формуле (10). Имеем

$$\beta'^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=\alpha'^{i_2 i_1 i_3\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=\tau^{i_2}_{k_1}\tau^{i_1}_{k_2}\tau^{i_3}_{k_3}\ldots\tau^{i_p}_{k_p}\sigma^{l_1}_{j_1}\ldots\sigma^{l_q}_{j_q}\alpha^{k_1k_2k_3\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}.$$

Мы имеем право изменить обозначение индексов суммирования k_1 на k_2, а k_2 на k_1 и в каждом слагаемом переставить сомножители. Тогда мы получаем формулу

$$\beta'^{i_1i_2i_3\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}=\tau^{i_1}_{k_1}\tau^{i_2}_{k_2}\tau^{i_3}_{k_3}\ldots\tau^{i_p}_{k_p}\sigma^{l_1}_{j_1}\ldots\sigma^{l_q}_{j_q}\alpha^{k_2k_1k_3\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}=$$
$$=\tau^{i_1}_{k_1}\tau^{i_2}_{k_2}\tau^{i_3}_{k_3}\ldots\tau^{i_p}_{k_p}\sigma^{l_1}_{j_1}\ldots\sigma^{l_q}_{j_q}\beta^{k_1k_2k_3\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q},$$

которая выражает тензорный закон преобразования для $\beta^{i_1\ \ldots\ i_p}_{j_1\ \ldots\ j_q}$.

Определение. Тензор $\mathbf{B}$, построенный в предложении 9, называется результатом *транспонирования* тензора $\mathbf{A}$.

Заметим, что доказательство предложения 9 не прошло бы, если бы мы захотели переставить какой-нибудь верхний индекс с каким-нибудь нижним Например, этим объясняется следующий факт. Если мы возьмем две матрицы A и $S^{-1}AS$, определяющие одно и то же линейное преобразование в разных базисах, и транспонируем их, то полученные матрицы A^T и $S^T A^T (S^{-1})^T$ определят разные линейные преобразования

Если же мы транспонируем матрицы B и $S^T BS$, определяющие в разных базисах билинейную форму $\mathbf{b}$, то получим матрицы B^T и $S^T B^T S$, также определяющие одну и ту же (но, вообще говоря, новую) билинейную форму $\mathbf{b}^T$ Эти билинейные формы инвариантно связаны между собой Легко проверить, что $\mathbf{b}^T(x, y) = \mathbf{b}(y, x)$

Тензоры, являющиеся произведениями двух данных тензоров в разном порядке, получаются один из другого транспонированием

8. Симметрирование и альтернирование. Рассмотрим тензор $\mathbf{A}$, контравариантная валентность которого p не меньше заданного числа $s \geqslant 2$. Выберем какие-нибудь s верхних индексов и подсчитаем, сколько тензоров можно получить из $\mathbf{A}$ транспонированием по выбранным индексам. Переставляя индексы попарно, можно расположить их в произвольном порядке Поэтому вопрос сводится к подсчету того, сколькими способами можно расположить в ряд s индексов. Это можно сделать $s!$ способами [1]). Итак, транспонируя исходный тензор по s индексам, можно получить $s!$ тензоров Сложим все эти тензоры и разделим сумму на $s!$. Полученный тензор называется результатом *симметрирования* исходного тензора $\mathbf{A}$ по выбранной

[1]) Число всех перестановок s индексов равно произведению всех натуральных чисел, не превосходящих s, т. е. $1\ 2\ldots(s-1)s$ Это число обозначают $s!$ (читается «эс-факториал») Докажем это по индукции. Очевидно, что при $s=2$ утверждение справедливо Допустим, что для $s-1$ индексов существует $(s-1)!$ перестановок В каждом из них мы можем поместить s-ю букву на одно из s мест слева, справа и в $s-2$ промежутках между уже стоящими буквами. Итак, всего мы получаем $(s-1)!s=s!$ перестановок для s индексов. Разумеется, результат этот имеет место не только для индексов, но и для перестановок элементов любого множества, содержащего s элементов.

группе индексов. Его компоненты обозначаются заключением в круглые скобки этой группы индексов у компонент тензора **A**. Индексы, не участвующие в симметрировании, могут быть выделены вертикальными черточками.

Аналогично определяется симметрирование по нижним индексам. Приведем следующие примеры:

$$a^{(i\,|\,j\,|\,k)} = \frac{1}{2}(a^{ijk} + a^{kji}),$$

$$a^{i}_{(jkl)} = \frac{1}{6}(a^{i}_{jkl} + a^{i}_{jlk} + a^{i}_{klj} + a^{i}_{kjl} + a^{i}_{ljk} + a^{i}_{lkj}).$$

Рассмотрим снова тензор **A** типа (p, q), $p \geqslant s$, и выберем группу из s верхних индексов. Если мы перенумеруем индексы этой группы числами $1, \ldots, s$, то каждому тензору, получаемому из **A** транспонированием, будет сопоставлена некоторая перестановка $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ номеров $1, \ldots$ $\ldots, s$ (это значит, что при транспонировании на первое место в рассматриваемой группе индексов поставлен индекс с номером σ_1, на второе место — индекс с номером σ_2 и т. д.). Обозначим через $N(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ число нарушений порядка в перестановке $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$, т. е. число таких пар σ_α, σ_β, что $\alpha < \beta$, а $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$ (ср. с. 152).

Транспонируя тензор **A** по выбранным s индексам, мы получим $s!$ тензоров. Сложим все эти тензоры, умножив каждый из них предварительно на $(-1)^{N(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)}$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ — перестановка, ему соответствующая. Сумму разделим на $s!$. Так построенный тензор называется результатом *альтернирования* исходного тензора по выбранной группе индексов. Его компоненты обозначаются заключением в квадратные скобки тех индексов, по которым производится альтернирование, например:

$$a^{[i\,|\,j\,|\,k]} = \frac{1}{2}(a^{ijk} - a^{kji}).$$

Аналогично определяется альтернирование по нижним индексам, например:

$$a^{i}_{[jkl]} = \frac{1}{6}(a^{i}_{jkl} + a^{i}_{ljk} + a^{i}_{klj} - a^{i}_{kjl} - a^{i}_{lkj} - a^{i}_{jlk}).$$

Приведем еще один пример. Рассмотрим детерминант матрицы линейного преобразования. В § 4 гл. VI мы отмечали, что это инвариант. Теперь мы выразим этот инвариант при помощи тензорных операций. Пусть a^{i}_{j} — элементы матрицы линейного преобразования **A** в некотором базисе $\boldsymbol{e}$. Тогда n-кратное тензорное произведение преобразования A на самого себя $A \otimes A \otimes \ldots \otimes A$ имеет компоненты $a^{i_1}_{j_1} a^{i_2}_{j_2} \ldots a^{i_n}_{j_n}$. Альтернируем это произведение по всем нижним индексам, а затем свернем по всем индексам. Мы получим инвариант

$$\Delta = a^{i_1}_{[i_1} a^{i_2}_{i_2} \ldots a^{i_n}_{i_n]}.$$

Здесь n индексов суммирования, каждый из которых принимает по n значений. Следовательно, правая часть распадается на n^n слагаемых. Каждое из этих слагаемых представляет собой алгебраическую сумму $n!$ членов, возникающих при альтернировании. Если в наборе индексов, определяющем какое-нибудь слагаемое, есть два равных индекса, то такое слагаемое равно нулю. Действительно, для каждого члена в нем, взятого со знаком плюс, найдется неотличающийся член, взятый со знаком минус. Если же в наборе индексов, определяющем слагаемое, все индексы различны, то, переставляя сомножители в каждом члене этого слагаемого, мы можем привести его к виду $a^1_{[1} \ldots a^n_{n]}$. Всего слагаемых второго типа $n!$. Следовательно,

$$\Delta = n! a^1_{[1} \ldots a^n_{n]}.$$

Расписав подробно альтернирование, мы получим

$$\Delta = n! \frac{1}{n!} \sum_{(k_1 \ldots k_n)} (-1)^{N(k_1 \ldots k_n)} a^1_{k_1} \ldots a^n_{k_n} = \det |a^j_i|.$$

Определение. Тензор называется *симметричным по паре индексов*, если результат его альтернирования по этой паре равен нулю.

Симметричный по паре индексов тензор не меняется при транспонировании по этой паре индексов. В самом деле, если, например, $a_{[ij]} = 0$, то $a_{ij} = a_{ji}$.

Тензор *симметричен по группе индексов*, если он симметричен по любым двум индексам из этой группы. В этом случае он не меняется при любом транспонировании по индексам из этой группы.

Не представляет труда убедиться, что результат симметрирования тензора по нескольким индексам будет тензором, симметричным по этим индексам.

Определение. Тензор называется *антисимметричным по паре индексов*, если равен нулю результат его симметрирования по этим индексам.

Антисимметричный по паре индексов тензор меняет знак при транспонировании по этой паре индексов.

Тензор *антисимметричен по группе индексов*, если он антисимметричен по любой паре индексов из этой группы. В этом случае он не меняется при транспонировании, которому соответствует перестановка с четным числом нарушений порядка, и меняет знак, если транспонированию соответствует перестановка с нечетным числом нарушений порядка. Действительно, такие транспонирования сводятся соответственно к четному и нечетному числу транспонирований, переставляющих пары индексов.

Можно доказать, что результат альтернирования тензора по нескольким индексам антисимметричен по этим индексам.

Если тензор антисимметричен по двум индексам, то равны нулю все те его компоненты, у которых совпадают значения этих индексов. Действительно, пусть, например, $\alpha_{j_1j_2j_3}^{i_1i_2} = -\alpha_{j_1j_2j_3}^{i_2i_1}$. Тогда для тех компонент, у которых $i_1 = i_2 = k$, мы имеем $\alpha_{j_1j_2j_3}^{kk} = -\alpha_{j_1j_2j_3}^{kk}$ и, следовательно, $\alpha_{j_1j_2j_3}^{kk} = 0$.

В качестве примера докажем следующее

Предложение 10. *Каждый тензор типа* (0, 2) *однозначно представляется в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.*

Действительно, пусть такое представление имеет место, т. е. $\alpha_{ij} = \beta_{ij} + \gamma_{ij}$, где $\beta_{[ij]} = 0$ и $\gamma_{(ij)} = 0$. Тогда, альтернируя и симметрируя обе части равенства, мы получаем соответственно

$$\alpha_{[ij]} = \gamma_{[ij]} = \gamma_{ij} \quad \text{и} \quad \alpha_{(ij)} = \beta_{(ij)} = \beta_{ij}.$$

С другой стороны, всегда

$$\alpha_{(ij)} + \alpha_{[ij]} = \frac{1}{2}\alpha_{ij} + \frac{1}{2}\alpha_{ji} + \frac{1}{2}\alpha_{ij} - \frac{1}{2}\alpha_{ji},$$

т. е.

$$\beta_{ij} + \gamma_{ij} = \alpha_{ij},$$

и предложение доказано.

9. Замечание. Пусть имеется какое-нибудь соотношение между тензорами, написанное при помощи введенных нами тензорных операций. Если выбран базис, ему соответствуют такие же соотношения между компонентами рассматриваемых тензоров. Тензорные операции инвариантны в том смысле, что соотношения между компонентами выглядят одинаково, каков бы ни был базис. Скажем, соотношение $\mathrm{A} = x \otimes y + z \otimes z$, где x, y и z — векторы, равносильно равенству $\alpha^{ij}=\xi^i\eta^j+\zeta^i\zeta^j$ между компонентами, причем безразлично, в каком базисе, так как во всех базисах оно выглядит одинаково

В силу этого обстоятельства часто, говоря о тензорах, имеют в виду их компоненты или, наоборот, говоря о компонентах, имеют в виду тензоры Говорят, например, «тензор α_{ijk}» вместо «тензор, компоненты которого в таком-то базисе равны α_{ijk}» Это не может вызвать недоразумения и сильно упрощает речь В дальнейшем мы будем пользоваться подобными сокращениями

§ 2. Тензоры в евклидовом пространстве

1. Метрический тензор. Все сказанное о тензорах в линейном пространстве, разумеется, справедливо и в случае евклидова пространства. Однако в евклидовом пространстве тензоры обладают многими свойствами, которых они не имели в линейном.

Теорему 2 § 3 гл. VIII мы можем, пользуясь тензорной терминологией, сформулировать следующим образом: n-мерное евклидово пространство можно определить как такое n-мерное линейное пространство, в котором задан симметричный тензор G с компонентами g_{ij}, причем $g_{ij}\xi^i\xi^j>0$ для каждого ненулевого вектора ξ^i. Компоненты тензора G в базисе e — это элементы матрицы Грама этого базиса.

Определение. Сопоставим каждому базису евклидова пространства матрицу Грама этого базиса. Определяемый этим соответствием тензор типа (0, 2) называется *метрическим тензором* пространства.

Предложение 1. *Сопоставим каждому базису евклидова пространства матрицу, обратную матрице Грама этого базиса. Это соответствие определяет тензор типа* (2, 0).

Доказательство. Пусть Γ и Γ' — матрицы Грама базисов e и $e'=eS$. Нам нужно выяснить, как связаны матрицы Γ^{-1} и Γ'^{-1}. Мы будем исходить из формулы (15) § 1 гл. VII: $\Gamma'=S^T\Gamma S$. Найдем матрицы, обратные обеим частям равенства, пользуясь формулой (10) § 6 гл V:

$$\Gamma'^{-1}=S^{-1}(S^T\Gamma)^{-1}=S^{-1}\Gamma^{-1}(S^T)^{-1}.$$

Как мы видели в § 6 гл. V, для любой невырожденной матрицы $(S^T)^{-1}=(S^{-1})^T$. Следовательно,

$$\Gamma'^{-1}=S^{-1}\Gamma^{-1}(S^{-1})^T. \qquad (1)$$

Перепишем формулу (1), обозначив через g^{ij}, g'^{ij} и τ_j^i элементы матриц Γ^{-1}, Γ'^{-1} и S^{-1} Мы получим

$$g'^{ij} = \tau_k^i \tau_l^j g^{kl},$$

т. е. закон преобразования ко понент тензора типа (2, 0).

Определение. Тензор, построенный в предложении 1, называется *контравариантным метрическим тензором.*

Равенства $\Gamma\Gamma^{-1} = E$ и $\Gamma^{-1}\Gamma = E$ могут быть переписаны через компоненты g_{ij} и g^{ij} так

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k, \qquad g_{ji}g^{kj} = \delta_i^k.$$

Кроме того, поскольку $(\Gamma^{-1})^T = (\Gamma^T)^{-1} = \Gamma^{-1}$, контравариантный метрический тензор симметричен:

$$g^{ij} = g^{ji}.$$

2. Поднятие и опускание индексов. Наличие метрического тензора позволяет ввести в евклидовом пространстве еще две операции над тензорами — поднятие и опускание индексов

При *опускании индекса* тензору типа (p, q), $p \geqslant 1$, сопоставляется тензор типа $(p-1,\ q+1)$, получаемый свертыванием данного тензора с метрическим тензором по тому индексу, который мы хотим опустить. При этом порядок индексов сохраняется в следующем смысле. Мы отказываемся от соглашения, по которому каждый нижний индекс следует за каждым верхним. Для того чтобы отметить порядок индексов, над каждым нижним индексом и под каждым верхним индексом ставится точка. Например, при опускании первого индекса у тензора $\alpha^{ij}{}_k$ мы получаем тензор $g_{il}\alpha^{lj}{}_k = \alpha_i{}^j{}_k$.

При *поднятии индекса* данный тензор сворачивается с контравариантным метрическим тензором по тому индексу, который следует поднять. Результат будет тензором типа $(p+1,\ q-1)$. Разумеется, для этого нужно, чтобы исходный тензор имел хотя бы один нижний индекс, т е. $q \geqslant 1$ Например, поднятие первого индекса у $\alpha_l{}^j{}_k$ дает $\alpha^{ij}{}_k = g^{il}\alpha_l{}^j{}_k$, а поднятие третьего дает $\alpha_i{}^{jk} = g^{kl}\alpha_i{}^j{}_l$.

Перед этим мы уже встречались с опусканием индекса.

В § 2 гл VII было введено понятие линейного преобразования $\mathbf{A}^*$, сопряженного данному линейному преобразованию евклидова пространства. В произвольном базисе матрицы A и A^* преобразований $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ связаны равенством (3) § 2 гл. VII, которое можно переписать в виде $\Gamma A^* = (\Gamma A)^T$. Обозначив через α^i_j и α^{*i}_j элементы матриц A и A^*, мы запишем это равенство в тензорных обозначениях:

$$g_{ik}\alpha^k_j = g_{jk}\alpha^{*k}_i.$$

Как легко заметить, оно означает следующее: после опускания индексов у тензоров **A** и **A*** один из них получается из другого транспонированием. Для самосопряженного преобразования **A** тензор $g_{ik}\alpha^k_j$ симметричен.

В § 3 гл. VIII мы ввели понятие линейного преобразования **A**, присоединенного билинейной форме **b**. В произвольном базисе матрица A присоединенного преобразования выражается через матрицу B билинейной формы равенством $A = \Gamma^{-1}B$. В тензорных обозначениях это может быть переписано как

$$\alpha^i_j = g^{ik}\beta_{kj}.$$

Мы видим, что тензор **A** получается из тензора **b** поднятием первого индекса.

В § 1 гл. VIII был введен вектор, присоединенный линейной функции на евклидовом пространстве. Строка коэффициентов $\varkappa$ этой функции выражалась через координатный столбец вектора α формулой $\varkappa = \alpha^T\Gamma$. Переходя от матричной записи к записи через компоненты, мы получим $\varkappa_l = \alpha^k g_{kl}$. Отсюда вытекает $\alpha^j = g^{lj}\varkappa_l$ (гл. VIII).

3. **Евклидовы тензоры.** При изучении евклидова пространства часто можно ограничиться только ортонормированными базисами. При этом все формулы, связанные со скалярным произведением, значительно упрощаются, так как метрический тензор имеет единичную матрицу

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad (2)$$

При замене одного ортонормированного базиса на другой ортонормированный матрица перехода ортогональна, т. е. удовлетворяет соотношению $S^{-1} = S^T$. Это значит, что элементы S и ее обратной связаны равенствами

$$\sigma^i_k = \tau^k_i. \qquad (3)$$

Если мы внесем соотношения (3) в закон преобразования компонент тензора (4) § 1, мы получим

$$\alpha'^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \sum_{\substack{k_1,\ \ldots,\ k_p \\ l_1,\ \ldots,\ l_q}} \sigma^{k_1}_{i_1}\ldots\sigma^{k_p}_{i_p}\sigma^{l_1}_{j_1}\ldots\sigma^{l_q}_{j_q}\alpha^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}. \qquad (4)$$

Здесь индексы суммирования $k_1, \ldots, k_p$ расположены сверху, поэтому мы пишем знак суммы. Формула (4) показывает, что, ограничиваясь ортонормированными базисами, мы уничтожаем различие между верхними и нижними индексами: верхним индексам в законе преобразования (4) соответствуют такие же множители, как и нижним.

Заметим еще, что в силу (2) в ортонормированном базисе совпадают компоненты всех тензоров, которые отличаются друг от друга поднятием или опусканием индекса. Действительно, мы имеем, например, $\alpha_{ilj}=g_{ik}\alpha_{i\cdot j}^{\cdot k\cdot}=\alpha_{i\cdot j}^{\cdot l\cdot}$, так как из n слагаемых в сумме по k отлично от нуля только то, у которого $l=k$, а в нем $g_{ll}=1$.

Из сказанного следует, что, ограничиваясь рассмотрением ортонормированных базисов, мы можем отождествлять все тензоры, которые можно получить один из другого поднятием или опусканием индекса. Точнее говоря, все тензоры, имеющие в ортонормированных базисах одинаковые компоненты, мы объединяем в один класс и рассматриваем этот класс как некоторый новый объект. Объект этот является евклидовым тензором.

Определение. В евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ задан *евклидов тензор валентности s*, если каждому ортонормированному базису сопоставлена s-мерная матрица порядка n. При этом, каковы бы ни были ортонормированные базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$, элементы $\alpha_{i_1\dots i_s}$ и $\alpha'_{i_1\dots i_s}$ соответствующих матриц связаны соотношением

$$\alpha'_{i_1\dots i_s}=\sigma_{i_1}^{k_1}\dots\sigma_{i_s}^{k_s}\alpha_{k_1\dots k_s}. \tag{5}$$

Все индексы у евклидовых тензоров равноправны, и мы будем писать их внизу.

Из формулы (3) ясно, что каждый тензор типа (p, q) определяет евклидов тензор валентности $(p+q)$. При этом все тензоры, отличающиеся друг от друга поднятием или опусканием индекса, определяют один и тот же евклидов тензор.

Если задан евклидов тензор, то его компоненты в неортонормированных базисах не определены. Однако для каждого евклидова тензора валентности s можно определить эти компоненты так, чтобы получился тензор любого типа (p, q), где $p+q=s$. Для этого их нужно найти, пользуясь законом преобразования компонент тензора соответствующего типа. Таким образом, каждый евклидов тензор порождается любым тензором из некоторого класса тензоров. Легко видеть, что все тензоры этого класса отличаются один от другого поднятием или опусканием индекса.

Числовые величины, не меняющиеся при переходе от одного ортонормированного базиса к другому, на с. 279 мы назвали *ортогональными* (или *евклидовыми*) инвариантами. Теперь мы видим, что это евклидовы тензоры валентности 0.

Для евклидовых тензоров можно определить операции, введенные для тензоров в § 1. Определения, а также формулировки и доказательства соответствующих предложений были бы почти дословным повторением сказанного, и мы не приводим их. Заметим только, что для евклидовых тензоров свертывание возможно по любой паре индексов и транспонировать их можно тоже по любому множеству индексов. Например, если, ограничиваясь ортонормированными базисами, мы отождествим квадратичную форму с присоединенным к ней преобразованием, то полученный новый объект—евклидов тензор валентности 2—будет иметь инвариантную свертку (как линейное преобразование) и инвариантно будет удовлетворять равенству $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$ (как квадратичная форма). Инвариантность здесь, разумеется, имеет место только относительно замены ортонормированного базиса другим.

§ 3. Поливекторы. Относительные инварианты

1. p-векторы. Мы начнем этот параграф с изучения одного специального класса тензоров.

Определение. Антисимметричный по всем индексам тензор типа $(p, 0)$ мы будем называть *p-вектором* или *поливектором*, если тип не уточняется.

Антисимметричный по всем индексам тензор типа $(0, q)$ называется *q-ковектором* или *q-формой*.

Теория q-ковекторов аналогична теории поливекторов. Мы будем заниматься в основном p-векторами.

Заметим прежде всего, что при $p > n$ существует только нулевой p-вектор. Действительно, из $p > n$ индексов, принимающих значения $1, \ldots, n$, хотя бы два должны принимать равные значения. Это значит, что в каждой компоненте есть два одинаковых индекса. При транспонировании тензора, переставляющем эти индексы, компонента должна изменить знак. Но, так как индексы равны, она не меняется и потому равна нулю. Так можно рассуждать для каждой компоненты.

При $p = n$ могут быть отличны от нуля только те компоненты, у которых значения индексов представляют собой перестановку чисел $1, \ldots, n$ (иначе снова окажутся два равных индекса). Все такие компоненты выражаются через одну из них по формуле

$$\alpha^{i_1 \ldots i_n} = (-1)^{N(i_1, \ldots, i_n)} \alpha^{1 \ldots n}, \tag{1}$$

в которой $N(i_1, \ldots, i_n)$ — число нарушений порядка в перестановке $i_1, \ldots, i_n$ (ср. с. 152).

Действительно, мы покажем сейчас, что значения индексов $i_1, \ldots, i_n$ можно расположить в порядке возрастания при помощи $N(i_1, \ldots, i_n)$ транспонирований, переставляющих два индекса, а каждое такое транспонирование меняет знак у компоненты. Расположить значения индексов в порядке возрастания можно так. Среди $i_1, \ldots, i_n$ одно из чисел равно n. Переставим его на последнее место, последовательно меняя его местами со всеми числами, стоящими правее него; со всеми этими числами n образовывало нарушение порядка. Таким образом, мы сделаем столько перестановок, в скольких нарушениях порядка виновно число n, и не изменим порядка остальных чисел. Теперь возьмем число $n-1$ и переставим его таким же образом на предпоследнее место. При этом мы сделаем столько попарных перестановок, в скольких нарушениях порядка виновно число $n-1$, и не изменим взаимного расположения остальных чисел. Поступим далее таким же образом с числами $n-2, \ldots, 2$. После этого все числа, включая 1, которая автоматически окажется на первом месте, будут расположены в порядке возрастания. Чтобы этого достичь, мы сделали $N(i_1, \ldots, i_n)$ попарных перестановок.

p-вектор $\alpha^{i_1 \ldots i_p}$ называется *простым*, если он представляется как альтернированное произведение векторов, т. е.

$$\alpha^{i_1 \ldots i_p} = \xi_1^{[i_1} \ldots \xi_p^{i_p]}, \tag{2}$$

где, например, $\xi_p^{i_p}$ — компоненты вектора x_p.

Предложение 1. *Каждый n-вектор является простым.*

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь ненулевой простой n-вектор $\beta^{i_1 \ldots i_n} = \xi_1^{[i_1} \ldots \xi_n^{i_n]}$. Отношение компоненты $\alpha^{1 \ldots n}$ данного нам n-вектора к $\beta^{1 \ldots n}$ мы обозначим через λ. Из формулы (1) следует, что тогда и для всех компонент $\alpha^{i_1 \ldots i_n} = \lambda\beta^{i_1 \ldots i_n}$. Положив $\eta^i = \lambda\xi_1^i$, имеем $\alpha^{i_1 \ldots i_n} = \eta^{[i_1}\xi_2^{i_2} \ldots \xi_n^{i_n]}$, как и требовалось.

Пусть даны p векторов $x_1, \ldots, x_p$ с компонентами $\xi_1^{i_1}, \ldots, \xi_p^{i_p}$.

Составим матрицу, столбцами которой будут координатные столбцы векторов $x_1, \ldots, x_p$:

$$\begin{Vmatrix} \xi_1^1 & \ldots & \xi_p^1 \\ \xi_1^2 & \ldots & \xi_p^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^n & \ldots & \xi_p^n \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Выберем p строк этой матрицы с номерами $i_1 < i_2 < \ldots$ $\ldots < i_p$ и рассмотрим минор, расположенный в этих строках:

$$M^{i_1 \ldots i_p} = \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p} (-1)^{N(i_{\sigma_1}, \ldots, i_{\sigma_p})} \xi_1^{i_{\sigma_1}} \ldots \xi_p^{i_{\sigma_p}}.$$

Здесь $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ различны и принимают значения $1, \ldots, p$. Сравнивая это выражение с (2), мы находим те компоненты простого p-вектора, у которых значения всех индексов попарно различны и расположены в порядке возрастания:

$$\alpha^{i_1 \ldots i_p} = \xi_1^{[i_1} \ldots \xi_p^{i_p]} = \frac{1}{p!} M^{i_1 \ldots i_p}. \tag{4}$$

Остальные компоненты либо равны нулю (если среди индексов есть равные), либо отличаются от уже найденных множителем $(-1)^N$, где N — число нарушений порядка среди значений индексов.

В частности, для n-вектора имеем

$$\alpha^{1\ldots n}=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix}\xi_1^1 & \ldots & \xi_n^1\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \xi_1^n & \ldots & \xi_n^n\end{vmatrix}. \tag{5}$$

Из формулы (4) следует, что простой p-вектор является нулевым тогда и только тогда, когда составляющие его векторы линейно зависимы, т. е. ранг матрицы (3) меньше p.

2. Относительные инварианты. n-вектор вполне характеризуется в каждом базисе одним числом — его компонентой $\alpha^{1\ldots n}$. Попробуем выписать закон преобразования этого числа при замене базиса без участия других компонент n-вектора. Мы получим $\alpha'^{1\ldots n}=\tau_{i_1}^1\ldots\tau_{i_n}^n\alpha^{i_1\ldots i_n}=$

$$=\sum_{(i_1,\ldots,i_n)}(-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)}\tau_{i_1}^1\ldots\tau_{i_n}^n\alpha^{1\ldots n},$$ или

$$\alpha'^{1\ldots n}=(\det S^{-1})\,\alpha^{1\ldots n}=(\det S)^{-1}\alpha^{1\ldots n}. \tag{6}$$

Мы видим, что соответствие, относящее каждому базису независимую компоненту n-вектора, определяет геометрический объект с одной компонентой и законом преобразования (6). В самом деле, каждому базису сопоставлено единственное число, и число, соответствующее одному базису, выражается через число, соответствующее другому базису, и матрицу перехода. Этот объект — не тензор, так как тензор с одной компонентой необходимо имеет тип (0, 0) и, следовательно, является инвариантом.

Другой пример геометрического объекта такого рода мы видели в начале § 1: детерминант матрицы из компонент тензора типа (0, 2) преобразуется по закону

$$\delta'=(\det S)^2\,\delta. \tag{7}$$

Определение. В линейном пространстве задан *относительный инвариант веса* r, если каждому базису сопоставлено число так, что числа, соответствущие базисам e и $e'=eS$, связаны равенством

$$\alpha'=(\det S)^r\,\alpha. \tag{8}$$

Инвариант, или, как говорят, чтобы подчеркнуть отличие от относительного инварианта, *абсолютный инвариант*, является относительным инвариантом веса 0.

Аналогично формуле (6) можно показать, что единственная независимая компонента n-ковектора является относительным инвариантом веса 1.

Отметим следующие свойства алгебраических операций с относительными инвариантами.

Предложение 2. 1) *Пусть даны два относительных инварианта a и b одного и того же веса r. Сопоставляя каждому базису сумму компонент a и b в этом базисе, мы получим относительный инвариант веса r.*

2) *Пусть даны относительные инварианты a и b весов соответственно r_1 и r_2. Сопоставляя каждому базису произведение компонент a и b в этом базисе, мы получим относительный инвариант веса r_1+r_2.*

3) *Пусть дан относительный инвариант a веса r Сопоставляя каждому базису p-ю степень компоненты a в этом базисе, мы получим относительный инвариант веса pr.*

Все три утверждения доказываются одинаково. Докажем для примера второе из них. Перемножая равенства вида (8), написанные для a и для b, мы получаем соотношение

$$a'b' = (\det S)^{r_1+r_2} ab,$$

связывающее произведения компонент a и b в двух любых базисах $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$, т. е. нужный закон преобразования

Теперь мы можем убедиться, что существуют относительные инварианты любого веса r. Чтобы построить относительный инвариант веса r, достаточно возвести в степень r какой-нибудь относительный инвариант веса 1.

3. Объем n-мерного параллелепипеда. Рассмотрим в обычном трехмерном пространстве параллелепипед, натянутый на векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_3$, исходящие из начала координат. Его можно определить как множество всех тех векторов, которые имеют вид $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \lambda_3\mathbf{x}_3$, причем $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1$ и $0 \leqslant \lambda_3 \leqslant 1$. Из формулы (10) § 3 гл. I видно, что объем параллелепипеда равен абсолютной величине детерминанта

$$\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \xi_3^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 \end{vmatrix},$$

составленного из компонент векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_3$ в ортонормированном базисе. Детерминант равен произведению $3!$ на ту компоненту порожденного этими векторами 3-вектора, которая имеет индексы 1, 2 и 3.

Введем следующие определения.

Определение. В n-мерном линейном пространстве мы назовем *p-мерным параллелепипедом* [1]) множество всех векторов вида $a = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p$, где $x_1, \ldots, x_p$ — фиксированные линейно независимые векторы и при каждом $\sigma = 1, \ldots, p$ выполнено неравенство $0 \leqslant \lambda_\sigma \leqslant 1$.

Определение. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве n-мерный параллелепипед P построен на векторах $x_1, \ldots, x_n$. Если $\xi_1^{i_1}, \ldots, \xi_n^{i_n}$ — компоненты этих векторов в ортонормированном базисе, то мы назовем *объемом* n-мерного параллелепипеда число

$$V(P) = n! \, |\xi_1^{[1} \ldots \xi_n^{n]}|, \tag{9}$$

т. е. произведение $n!$ на модуль той компоненты n-вектора, порожденного векторами $x_1, \ldots, x_n$, которая имеет индексы $1, \ldots, n$.

В определении не уточняется, о каком ортонормированном базисе идет речь. Поэтому мы должны доказать, что $V(P)$ не зависит от выбора ортонормированного базиса. Согласно формуле (6) при переходе от ортонормированного базиса e к базису $e' = eS$ мы имеем $V'(P) = |\det S^{-1}| V(P)$. Если базис e' ортонормированный, то матрица S^{-1} ортогональная и $|\det S^{-1}| = 1$, что доказывает наше утверждение.

Мы видим, что $V(P)$ — ортогональный инвариант, т. е. евклидов тензор валентности 0 (см. с. 279).

Сейчас мы получим выражение для объема n-мерного параллелепипеда в произвольном базисе. Для этого заметим, что по формуле (7) детерминант матрицы метрического тензора $\det \Gamma$ есть относительный инвариант веса 2. Кроме того, всегда $\det \Gamma > 0$ (предложение 3 § 1 гл. VII). Поэтому мы вправе рассмотреть величину $\sqrt{\det \Gamma}$, которая, очевидно, при изменении базиса умножается на $|\det S|$. Произведение $n! \sqrt{\det \Gamma} \, |\xi_1^{[1} \ldots \xi_n^{n]}|$ является абсолютным инвариантом. Но в ортонормированном базисе $\det \Gamma = 1$, и потому в ортонормированном базисе

$$V(P) = n! \sqrt{\det \Gamma} \, |\xi_1^{[1} \ldots \xi_n^{n]}|. \tag{10}$$

Левая часть равенства — инвариант, и, следовательно, равенство (10) имеет место в любом базисе.

---

[1]) Употребляется также слово «параллелотоп».