

The public key is $P = (e, n) = (7, 143)$. Decode 10, 7, 58.
 $p = 11, q = 13$.
 $n = p \cdot q = 11 \cdot 13 = 143$.
 $\phi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1) = 10 \cdot 12 = 120$.
 $e^{-1}(\text{mod } \phi(n)) = 7^{-1}(\text{mod } \phi(n)) = 7^{-1}(\text{mod } 120) = 103(\text{mod } 120)$.
 Use Extended Euclid's Alg.
 $7 \cdot \alpha + 120 \cdot \beta = 1$.
 $120 = 7 \cdot 17 + 1$, so $1 = 120 - 7 \cdot 17$. $-17 \equiv 103(\text{mod } 120)$.
 $d = 103$.

The decode process:

$$\begin{aligned} D(10) &= 10^{103}(\text{mod } 143) = 10 \cdot 10^{102}(\text{mod } 143) = 10(\text{mod } 143) \cdot (10^3)^{34}(\text{mod } 143) = \\ &= 10(\text{mod } 143) \cdot 142^{34}(\text{mod } 143) = 10(\text{mod } 143) \cdot (142^2)^{17}(\text{mod } 143) = 10(\text{mod } 143) \cdot \\ &= 1^{17}(\text{mod } 143) = 10(\text{mod } 143). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(7) &= 7^{103}(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot 7^{102}(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot (7^6)^{17}(\text{mod } 143) = \\ &= 7(\text{mod } 143) \cdot 103^{17}(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot 103(\text{mod } 143) \cdot 103^{16}(\text{mod } 143) = \\ &= 7(\text{mod } 143) \cdot 103(\text{mod } 143) \cdot 103^{16}(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot 103(\text{mod } 143) \cdot \\ &= (103^2)^8(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot 103(\text{mod } 143) \cdot 27^8(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot \\ &= 103(\text{mod } 143) \cdot (27^2)^4(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot 103(\text{mod } 143) \cdot (27^2)^4(\text{mod } 143) = \\ &= 7(\text{mod } 143) \cdot 103(\text{mod } 143) \cdot 14^4(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot 103(\text{mod } 143) \cdot \\ &= 53^2(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot 103(\text{mod } 143) \cdot 53^2(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot \\ &= 103(\text{mod } 143) \cdot 92(\text{mod } 143) = 7(\text{mod } 143) \cdot 38(\text{mod } 143) = 123(\text{mod } 143) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(58) &= 58^{103}(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot 58^{102}(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot \\ &= (58^2)^{51}(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot (75)^{51}(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot (75^3)^{17}(\text{mod } 143) = \\ &= 58(\text{mod } 143) \cdot (25)^{17}(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot 25(\text{mod } 143) \cdot (25)^{16}(\text{mod } 143) = \\ &= 58(\text{mod } 143) \cdot 25(\text{mod } 143) \cdot (25^2)^8(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot 25(\text{mod } 143) \cdot \\ &= (53)^8(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot 25(\text{mod } 143) \cdot (53^2)^4(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot \\ &= 25(\text{mod } 143) \cdot (92)^4(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot 25(\text{mod } 143) \cdot (92^2)^2(\text{mod } 143) = \\ &= 58(\text{mod } 143) \cdot 25(\text{mod } 143) \cdot (92^2)^2(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot 25(\text{mod } 143) \cdot \\ &= (27)^2(\text{mod } 143) = 58(\text{mod } 143) \cdot 25(\text{mod } 143) \cdot 14(\text{mod } 143) = 137(\text{mod } 143) \end{aligned}$$