数学

比克曼

September 23, 2015

Contents

1 代数

1.1 概念

- 自然数:natural number,{0,1,2,3···等全体非负整数组成的数的集合称为自然数;
- 正整数:positive integer,{1,2,3···等向前扩充的数称为正整数;
- 负整数:{1,2,3···等向后扩充的数称为妇整数;
- 中性数:0 被称为中性数;
- 整数:integer,把正整数、负整数、中性数 (0) 合在一起叫整数,对+、−、× 运算组成一个封闭的数域集合;
- 有理数:rational number,整数对 ÷ 不封闭,有理数则在整数基础上对 ÷ 封闭的数域,或者可以表示成两个整数之比;
- 无理数:irrational number,不能表示成 2 个整数之比的数,比如$\sqrt{2}$ 和圆周率;
- 实数:real number,有理数和无理数合到一起称为实数;
- 虚数:imaginary number,符号用 i 表示,$i = \sqrt{-1}$;
- 复数:complex number,由实数和虚数构造出的数叫复数;
- 向量:vector;
- 矩阵:matrix;
- 张量:tensor;
- 群:group;
- 环:loop;
- 域:field;
- 线性代数:研究未知数更多的一次方程组,引进矩阵、向量、空间等概念形成的方向;
- 多项式代数:研究未知数次数更高的高次方程,形成的方向;

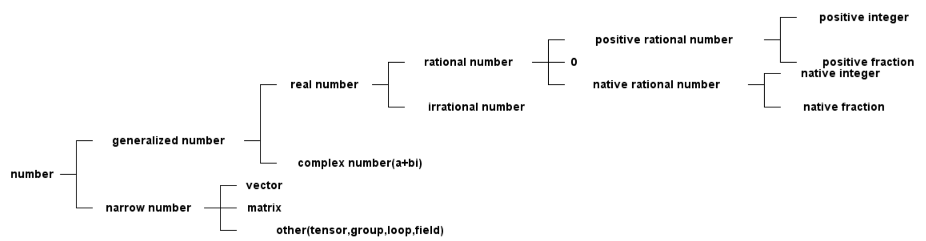

Figure 1: 数的归纳

1.2 多项式

1.2.1 概念

- 最大公因式:设 f(x), g(x) 是 P[x] 中两个多项式。P[x] 中多项式 d(x) 称为 f(x), g(x) 的一个最大公因式,如果它满足
  1. d(x) 是 f(x),g(x) 的公因式;
  2. f(x),g(x) 的公因式全是 d(x) 的因式;
- 多项式互素:P[x] 中两个多项式 f(x),g(x) 称为互素 (互质),如果 (f(x), g(x))=1; ((f(x), g(x)) 表示首项系数是 1 的最大公因式);

- 重因式:不可约多项式 p(x) 称为多项式 f(x) 的 k 重因式,如果$p^k x|f(x)$,而$p^{k+1}x!f(x)$; (g(x)|f(x) 表示 g(x) 能整除 f(x)) ;
- 多项式微商: 对多项式求导;
- 本原多项式:如果一个非零的整系数多项式$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + + b_0$ 的系数b_n, b_{n-1}, b_0 没有异于 ±1 的公因子,也就说它们是互素的,这个多项式被称为本原多项式;
- 本原多项式定理 (高斯引理):两个本原多项式的乘积还是本原多项式;
- 对称多项式:设$f(x_1, x_2, , x_n)$ 是数环 R 上一个 n 元多项式,如果对于这 n 个文字$x_1, x_2, , x_n$ 的指标集 {1, 2, ……, n} 施行任意置换后,$f(x_1, x_2, , x_n)$ 都不改变,那么就称$f(x_1, x_2, , x_n)$ 是 R 上一个 n 元对称多项式;

1.2.2 满足定律

- 加法交换律, f(x)+g(x)=g(x)+f(x);
- 加法结合律, (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x));
- 乘法交换律, f(x)g(x)=g(x)f(x);
- 乘法结合律, (f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x));
- 乘法对加法的分配律, f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x);
- 乘法消去律, f(x)g(x)=f(x)h(x) 且 f(x) $\neq$ 0, 那么 g(x)=h(x);
- 任何 n(n>0) 次多项式在复数域中有 n 个根 (重根按重数计算)

1.2.3 公式

- 多项式乘法,f(x)g(x) = $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{s=0}^{m+n} (\sum_{i+j} a_i b_j) x^s$
- 多项式微商:
  1. (f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x);
  2. (cf(x))' = cf'(x);
  3. (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);
  4. $(f^m(x))' = mf^{m-1}(x)f'(x)$

1.2.4 应用

2 概率

2.1 概念

- 样本空间:随机试验的所有可能结果组成的集合;
- 随机变量:打靶打入 XY 坐标系,打入的位置是个二维随机变量 (x, y), 随机变量不是一个概率; 随机变量分为:
  1. 离散随机变量:只能取有限个值,虽然可以是无穷多的,但是是离散化的;
  2. 连续型随机变量:可以取无穷多的连续值;
- 概率函数:对于随机变量 X 的概率叫概率函数:

$$p_i = P(X = a_i), i = 1, ..., n$$

- 概率分布:概率函数给出了全部概率 1 是如何在其可能值之间分配的, 其实可以将概率分布和概率函数等同认识 ;
- 分布函数:可以认为是概率函数在区间段的求和 , 设 X 为一随机变量,则分布函数为

$$P(X \leq x) = F(x), -\infty < x < \infty$$

- 概率密度函数:如果对于随机变量 X 的分布函数 F(x), 存在非负可积函数 f(x),使对于任意实数 x 有

$$F(x)=\int_{\infty}^{x}f(t)dt$$

, 则 f(x) 称为 X 的概率密度函数,简称概率密度;

- 等可能概型中事件 A 的计算公式:

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(e_{i_j})=\frac{k}{n}=\frac{A}{S}$$

- 条件概率:事件 A 已经发生的条件下,事件 B 发生的概率,表示为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

- 互斥时间和的概率:等于各事件概率的和:$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$
- 对立事件 A 的概率:$P(\overline{A})=1-P(A)$
- 独立事件的概率:若干个独立事件 $A_1,...,A_n$ 之积的概率,等于各事件概率的乘积:$P(A_1...A_n)=P(A_1)...P(A_n)$
- 全概率:其意义在于在校复杂的情况下直接计算 A 事件概率 P(A) 不容易,但是 A 事件总是随某个 B_i 发生,则适当去构造这组 B_i 可以简化计算。其公式如下,其中用到了条件概率公式,此公式还能从另一个角度去理解,把 B_i 看做导致事件 A 发生的一种可能途径,对不同途径,A 发生的概率即条件概率 P(A|B) 各不同,而采取哪个途径却是随机的。

$$P(A)=P(AB_1)+...+P(AB_n)=P(B_1)P(A|B_1)+...+P(B_n)P(A|B_n)$$

- 贝叶斯公式:刻画了一些事件 B_i 其原有发生概率在事件 A 引入的条件下 B_i 的概率发生了改变;如果把事件 A 看成结果,把诸事件 B_i 看成导致结果 A 的可能原因,则全概率公式可以看做为“由原因推结果”,而贝叶斯公式则相反为“由结果推原因”,现在有结果 A 已经发生了,在众多原因 B_i 中到底由哪个导致,贝叶斯公式可以给出度量,类似于发生了某个案件 A,在不了解案情前,嫌疑人 B_i 根据以往的记录其作案的概率为 $P(B_i)$,但是如果了解了 A 案情,则 $P(B_i)$ 就会变动了;贝叶斯公式如下:在全概率假定下有

$$P(B|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}$$

-

2.2 排列组合

- 排列:n 个相异事物取 r 个 (1<=r<=n) 的不同排列总数,为 $P_r^n=n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$, 如果 r=n,则 $P_r^r=r!$
- 组合:n 个相异物件取 r 个 (1<=r<=n) 的不同组合总数,为 $C_r^n=\frac{P_r^n}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$
- 0!=1;

3 概率分布

3.1 离散分布

3.1.1 01 分布

随机变量 X 只能取 0 和 1 两个值,取 0 和 1 的概率分布是 p,q,p+q=1

3.1.2 二项分布

- 定义:服从二项分布的随机变量 X 表示在 n 个独立的是/非试验中成功的次数 i,其中每次试验的成功概率为 p

$$p_i = C_n^i p^i (1-p)^{n-i}, i = 0, 1, ..., n$$

- python 实现

```
from scipy import stats      #倒入工具包
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# ...........................
n = 20                       #定义试验次数
p = 0.3                      #定义每次事件的概率
k = np.arange(21)            #模拟多次试验,事件发生的所有次数
binomial = stats.binom.pmf(k, n, p) #计算每个次数的概率
# ...........................
plt.plot(k, binomial, 'o-') #将每个次数的概率通过图形表示出来
plt.title('binomial:n=%i, p=%.2f' %(n,p)) #设置标题
plt.xlabel('k times')        #轴是次数x
plt.ylabel('probability of k') #轴是次的概率yk
plt.show()                   #显示出来
```

3.1.3 伯努利分布

3.1.4 泊松分布

3.1.5 几何分布

3.2 连续分布

3.2.1 正太分布

3.2.2 指数分布

3.2.3 β 分布