

Дипломна работа

Диана Генева <dageneva@qtrp.org>

2019

Съдържание

1	Нулева зона	3
2	Сигнал от реч	4
2.1	Физика на тъгата	4
2.2	Приближаване с тръби	7
2.2.1	Преминаване от една тръба в друга	9
2.2.2	Ограничения при устните	12
2.2.3	Ограничения при глотиса	13
2.2.4	Общ вид на \mathcal{V}	15
2.2.5	Общ вид на \mathcal{X}	17
2.2.6	Общ вид на \mathcal{G}	17
2.2.7	Общ вид на \mathcal{Y}	18
2.3	Представяне със системи	19
2.4	Характеристики	21
2.4.1	Избор	21
2.4.2	Извличане	23
2.5	Класификация	26
2.6	Резултати	28
3	Сигнал от EEG	29
3.1	Емоции в мозъка	29
3.2	Характеристики	32
3.2.1	Избор	32
3.2.2	Извличане	32
3.3	Класификация	33
3.4	Резултати	33
4	Двойната звезда	34
4.1	Резултати	34
5	Големият портрет	35
A	Фурие приложение	36
A.1	Дефиниция	36
A.2	Свойства	38
A.3	Конволюция	39
B	Приложение за полюси и нули	41
B.1	Дефиниция	41

Б.2 Характеризация на филтри	42
В Приложение към Сигнал от реч	47
Г Приложение към Класификация	49
Библиография	54

Глава 1

Нулева зона

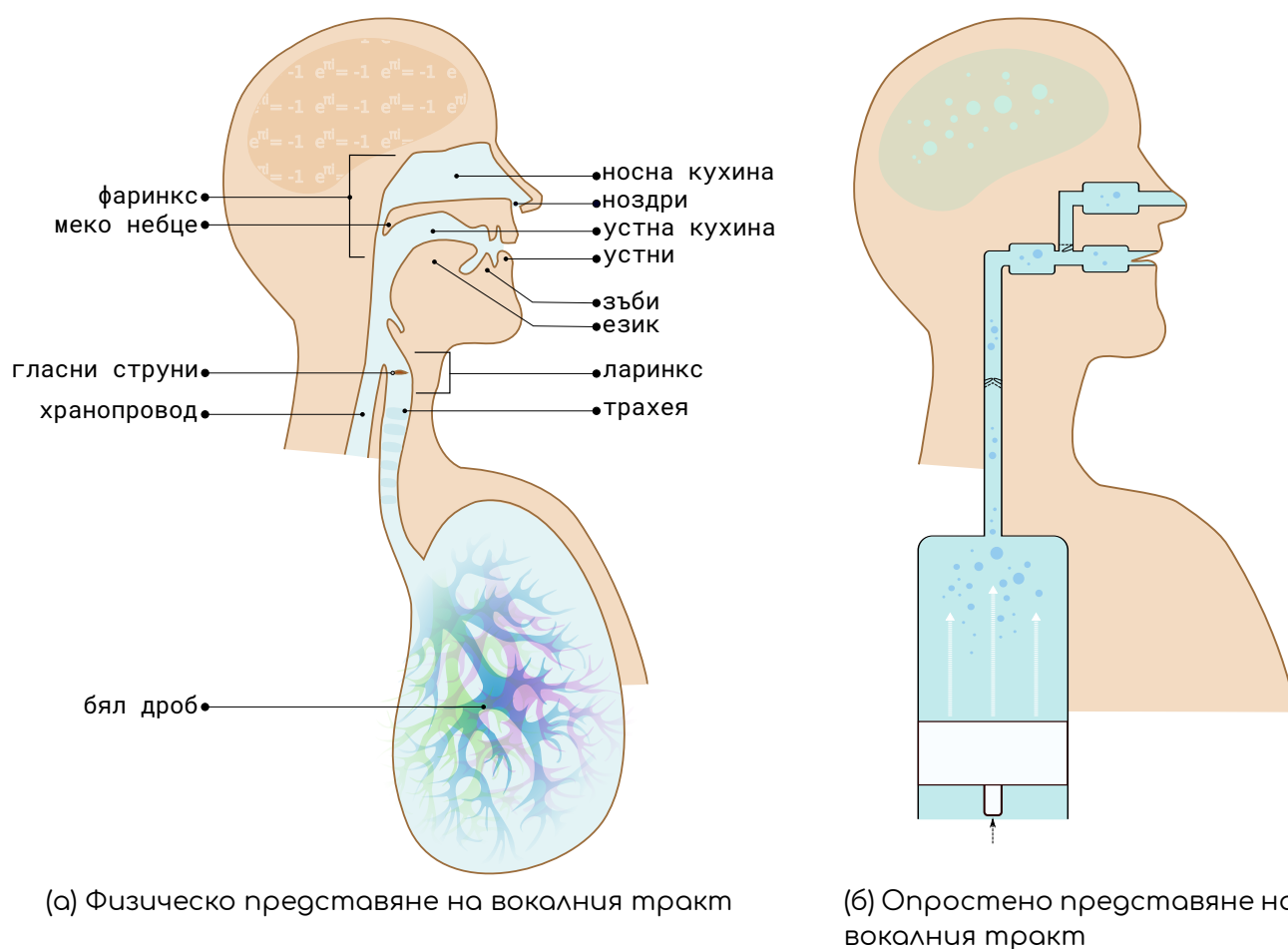
Бла, бла, бла, аз съм толкова емоционална. Не знам



Глава 2

Сигнал от реч

2.1 Физика на тъгата



Фигура 2.1.1: Система за производство на реч

Вокален тракт е общото название на кухините над ларинкса (гръкляна), през които минава въздухът при произвеждане на реч. При хората той се състои от ларингеална кухина (съдържаща ларинкса и гласните струни), фаринкс, устна кухина и носна кухина, както може да се види на Фигура 2.1.1а. Вокалният тракт е отговорен за генериране на различни звуци, като текущата конфигурация на отделните му компоненти определя какъв ще бъде самият

звук. Според [KNS09], освен от вида на този звук, конфигурацията на вокалния тракт зависи и от емоцията, която изпитва говорещият. Смята се, че емоционалното състояние е пряко свързано с определени промени в организма, например ускорено дишане или мускулно напрежение, а тези промени се отразяват върху произведената реч. Често дори ефектите от тези промени са станали нарицателно за самата емоция. Из българската литература се срещат изречения като „страхът стискаше гърлото, задушаваше гласа“ [Тал66], а изрази като „буца в гърлото“ или „пресъхнало гърло“ са навлезли в разговорната реч като асоциации на „тъга“. Тъй като изпитваната емоция влияе пряко на конфигурацията на вокалния тракт, бихме искали да извлечем характеристики, които описват тази конфигурация.

Да разгледаме по-подробно Фигура 2.1.16, която описва цялостна система за производство на реч в по-опростен вариант. Речта, всъщност, представлява просто акустичната вълна, получена на края на системата - устни и ноздри - в следствие на изтласквания от белия дроб въздух.

Белият дроб работи като енергиен източник за тази системата - въздушният поток, получен при свиването му от междуребрните мускули и диафрагмата, се пропъгва нагоре по трахеята и през глотиса (отвора между гласните струни).

Действието на глотиса може да се види най-ясно при произнасяне на гласна. Гласните струни пропускат пропъгвания въздух. Тъй като глотисът е стеснение, налягането в него в този момент е по-малко от това в който и да е от двата му края. Съгласно закона на Бернули в някакъв момент то става толкова ниско, че позволява на гласните струни да се затворят. В следствие се натрупва налягане зад гласните струни заради тласкания от белия дроб въздух, което в някакъв момент ги принуждава да се отворят, и цикълът се повтаря отначало. В резултат се получава осцилиране на гласните струни. Честотата на отварянето и затварянето зависи от анатомични особености като еластичността и големината на гласните струни, налягането в белия дроб и други.

При мъжете тази честота е средно 125 Hz, а при жените - 210 Hz.

Акустичната вълна, която се получава в следствие на осцилацията, преминава през вокалния тракт, където се завихря при срещане на прегради като устни и зъби и в крайна сметка напуска системата през някой от отворите.

При този процес се губи част от енергията поради различни фактори като съпротивлението на въздуха и поглъщането на вълната от меките и еластични стени на вокалния тракт.

В зависимост от начина, по който вълната напуска системата, можем да класифицираме произведените звуци по следния начин:

1. Озвучени

При тези звуци гласните струни осцилират квази-периодично.

2. Проходни (фрикативни)

При образуването на проходни звуци, вълната среща преграда по пътя

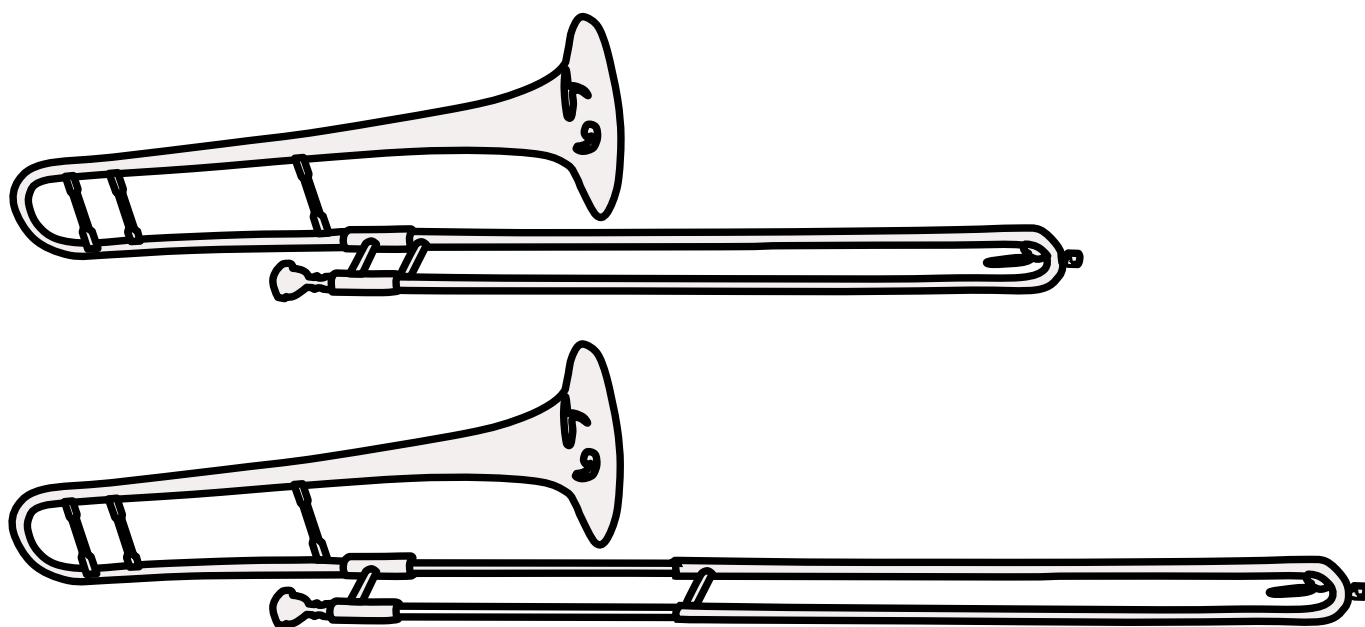
си (като например зъби, устни) и се получава турбуленция, при опита да бъде избутан въздухът през преградата.

3. Преградни (експлозивни)

Те се получават при напълно затворена преградата, за която се натрупа налягане, което се освобождава рязко чрез отваряне на преградата.

Обикновено речта, която произнасяме, е разделена на думи, като отделните звукови единици в тях се наричат фонemi. За да се произнесе определена дума, вокалният тракт трябва да застане в правилната конфигурация за следващата фонема в думата. Когато вокалният тракт се наглася за дадена фонема, настъпват промени, като например стените на устната кухина се приближават или мекото небце, служещо като клапа към носната кухина, се затваря. Може да се усети, че при изговаряне на „а“ отворът е много по-голям, отколкото при произнасяне на „у“. Тази промяна влияе върху спектралните свойства на вокалния тракт.

Нека за улеснение си представим, че сме моделирали вокалния тракт с последователност от тръби, за да се абстрахираме от сложната му физическа структура. Тогава при смяна на фонемата, се променят дължината и диаметърът на тръбите. Това влияе на времето, за което акустичната вълна ще стигне до края на тръбата и съответно на честотата, на която ще се получи резонанс. Тоест в зависимост от конфигурацията, ще се усилят или затихнат различни честоти, спрямо резонанса. Това свойство се нарича честотна пропускливост. Идеята лесно се вижда при свиренето на духовни инструменти.



Фигура 2.1.2: Тромбон

При тях по някакъв начин се променя изходът на вълната, например отпушване и запушване на дупки, и съответно честотата, на която се получава резонанс, тъй като пътят на вълната е скъсен или удължен. Както може да се видим на [Фигура 2.1.2](#), при тромбона буквално се сменя дължината на тръбата, което означава, че на вълната ѝ трябва повече време, за да се отрази,

тоест резонансът е на по-малка честота и съответно изходящият звук е по-нисък.

Това значи, че ако знаем как се пропагира вълната по отделните тръби на вокалния тракт и какви са спектралните свойства накрая, можем да съдим за текущата му конфигурация. В такъв случай, за да изследваме подлежащата емоция при реч е нужно да изследваме тези свойства в достатъчно кратък отрязък от време, в който конфигурацията е статична. Обикновено се приема, че този период е между 10 и 20 милисекунди ([RS78, стр. 98]).

В следващия раздел ще разгледаме как можем да моделираме вокалния тракт с модела на тръбите, за да можем да извлечем спектралните му свойства.

2.2 Приближаване с тръби

В тази глава ще разгледаме в неголяма дълбочина построяване на модел с тръби. За повече подробности, може да се проследи подробното изложение в [RS78] или по-сбитото в [Tay09].

За да извлечем спектралните свойства на вокалния тракт¹, трябва да моделираме системата за производство на реч. Освен това искаме да можем да отделим характеристиките на вокалния тракт от тези на останалите части на системата. Един такъв модел се получава с модела на тръбите, който ще бъде описан в този раздел.

За улеснение, нека разгледаме конкретна конфигурация. Например тази, при произнасянето на фонемата „ъ“, тъй като е възможно най-проста. В този случай глотисът трепти, устата е отворена, а клапата към носната кухина е затворена.

Тъй като „ъ“ е гласна, което е озвучен тип звук, глотисът g трепти псевдопериодично, после вълната преминава и се променя от вокалния тракт v и накрая излиза и се пречупва през устните r . Това означава, че ако глотисът има даден спектър, то вокалният тракт го променя (филтрира го), като усилва дадени честоти и заглушава други, до получаване на нов спектър. Устните допълнително филтрират спектъра. В крайна сметка получаваме нов сигнал, чийто спектър е резултат от умножението на спектрите на g , v и r .

Тоест, ако $g \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} G(z)$, $v \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} V(z)$, $r \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} R(z)$, а новият сигнал е y с $y \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} Y(z)$, е изпълнено, че

$$Y(z) = G(z)V(z)R(z),$$

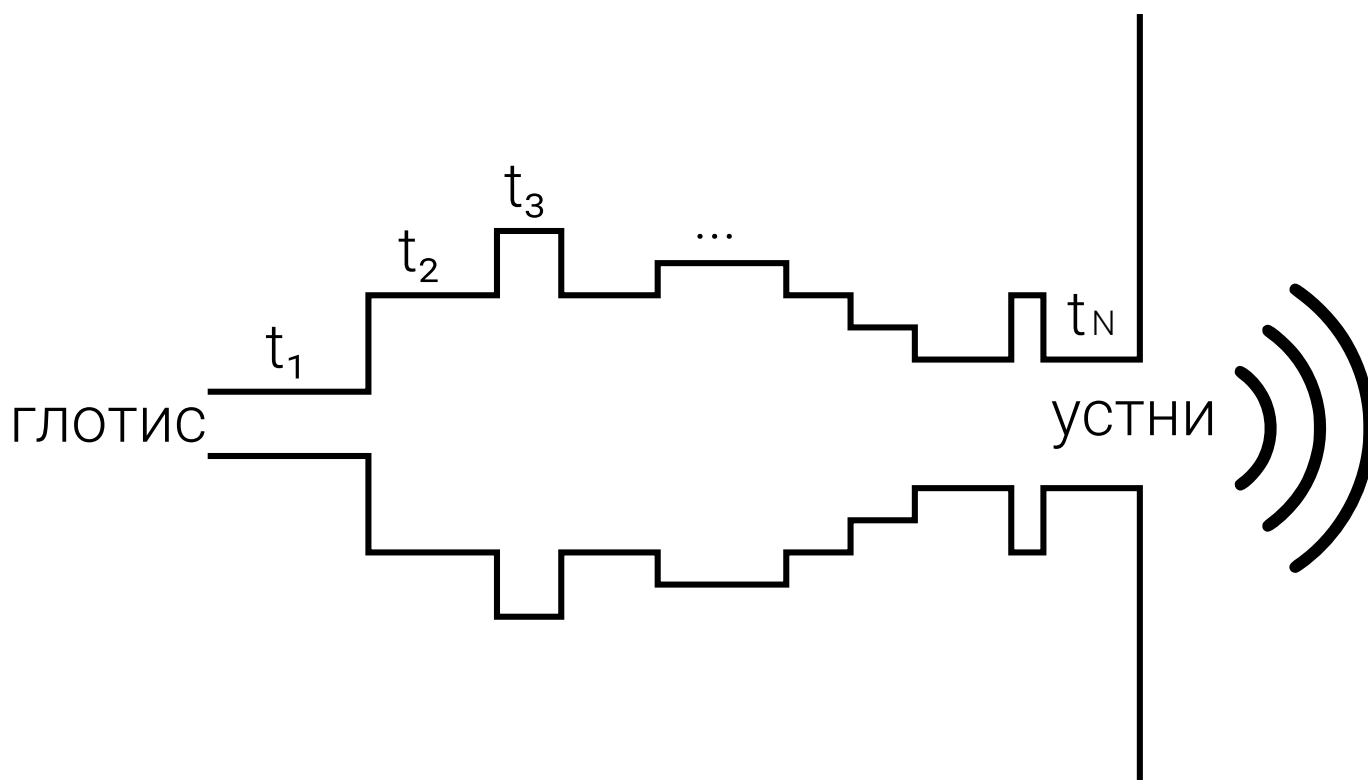
където $z = e^{i\omega_k}$ е прост сигнал с ъглова честота ω_k , а $\xleftrightarrow{\mathcal{FS}}$ обозначава Фурие преобразуване, което е въведено в [Приложение А](#).

¹както се зарекохме в предния раздел

Във времевия домейн уравнението има вида $y(t) = g(t) * v(t) * r(t)$, както следва от [Теорема за конволюцията за периодични дискретни сигнали](#) също в [Приложение А](#).

Тъй като в крайна сметка получаваме нов сигнал при усните, това, от което се интересуваме, са спектралните особености на $\mathcal{V}(z)\mathcal{R}(z)$, за които можем да си мислим като един общ филтър, описващ вокалния тракт. За да говорим за крайния сигнал y , трябва да знаем какво е действието на входния сигнал g , който ще бъде променен от филтъра на вокалния тракт.

Бележка: Дефиницията за Фурие преобразуване изисква сингалът да е периодичен. В случая сме взели g да е такъв. Нека засега приемем, че сигналите v и r също са периодични. Това, а също и че периодът им съвпада с този на g , е показано в [Свойство 1](#).



Фигура 2.2.1: Приближение на вокалния тракт с N тръби

По принцип стените на вокалния тракт са гладки и меки, но това се моделира трудно. Допълнително, формата му е сложна и специфична за всеки човек. Така че нека опростим ситуацията, като използваме приближение с N на брой тръби, номерирани $1 \dots N$, с постоянно напречно сечение, както е показано на [Фигура 2.2.1](#). За още по-голямо опростяване, нека няма и загуба на енергия, каквата би се получила по принцип.

Нека въведем следните стандартни означения:

1. c - скорост на звука в еластична среда
2. ρ - плътност на въздуха в тръбите
3. A - лицето на напречното сечение в тръба (константа)
4. $u = u(x, t)$ - е промяната в обемната скорост на позиция x в момента t
5. $p = p(x, t)$ - е промяната в звуковото налягане

Звуковите вълни, преминаващи през течна среда в тръба, изпълняват уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\rho}{A} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.2.1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.2.16)$$

и може да се покаже, че решенията на Уравнения 2.2.1 имат вида

$$u(x, t) = \left[u^+ \left(t - \frac{x}{c} \right) - u^- \left(t + \frac{x}{c} \right) \right] \quad (2.2.2a)$$

$$p(x, t) = \frac{\rho c}{A} \left[p^+ \left(t - \frac{x}{c} \right) + p^- \left(t + \frac{x}{c} \right) \right] \quad (2.2.26)$$

Първо нека да разгледаме връзката между две съседни тръби.

2.2.1 Преминане от една тръба в друга

Да разгледаме по-внимателно значението на (2.2.2a).

При преминане от една тръба в друга, част от вълните ще преминат към следващата тръба, а част от тях ще се отразят наобратно. В такъв случай във всеки момент от време t и във всяка точка x на k -тата тръба, обемната скорост u_k ще зависи от обемната скорост на вълните, които вървят „напред“ и тази на вълните, които вървят „назад“. За специфична тръба k , Уравнения (2.2.2) ще имат вида:

$$u_k(x, t) = \left[u_k^+ \left(t - \frac{x}{c} \right) - u_k^- \left(t + \frac{x}{c} \right) \right] \quad (2.2.3a)$$

$$p_k(x, t) = \frac{\rho c}{A_k} \left[u_k^+ \left(t - \frac{x}{c} \right) + u_k^- \left(t + \frac{x}{c} \right) \right], \quad (2.2.36)$$

където l_k е дължината, а A_k е лицето на напречното сечение на k -тата тръба, x е разстояние в нея ($0 \leq x \leq l_k$), t е момент от време.

Вълните, които вървят „напред“ и „назад“, ще означаваме съответно с u^+ и u^- .

Тъй като енергията трябва да се запази, въвеждаме допълнително условие за границата между две тръби:

$$u_k(l_k, t) = u_{k+1}(0, t) \quad (2.2.4a)$$

$$p_k(l_k, t) = p_{k+1}(0, t) \quad (2.2.46)$$

Когато заместим Уравнения (2.2.4) в (2.2.3), получаваме:

$$u_k^+ \left(t - \frac{l_k}{c} \right) - u_k^- \left(t + \frac{l_k}{c} \right) = u_{k+1}^+(t) - u_{k+1}^-(t)$$

и

$$\frac{\rho c}{A_k} \left[u_k^+ \left(t - \frac{l_k}{c} \right) + u_k^- \left(t + \frac{l_k}{c} \right) \right] = \frac{\rho c}{A_{k+1}} [u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t)]$$

\Leftrightarrow

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} \left[u_k^+ \left(t - \frac{l_k}{c} \right) + u_k^- \left(t + \frac{l_k}{c} \right) \right] = u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t)$$

Нека означим с τ_k времето, за което вълна пропътува дължината на k -тата тръба, тоест $\tau_k = \frac{l_k}{c}$. Тогава имаме:

$$u_k^+(t - \tau_k) - u_k^-(t + \tau_k) = u_{k+1}^+(t) - u_{k+1}^-(t) \quad (2.2.5)$$

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} [u_k^+(t - \tau_k) + u_k^-(t + \tau_k)] = u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t) \quad (2.2.6)$$

Първо, нека да изразим скоростта на вълните, които вървят "напред" в $(k + 1)$ -та тръба (u_{k+1}^+), чрез тези, които са преминали от предната тръба (u_k^+) и тези, които се отразяват от текущата (u_{k+1}^-).

От (2.2.5) получаваме

$$u_k^-(t + \tau_k) = u_k^+(t - \tau_k) - u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t) \quad (2.2.7)$$

Заместваме (2.2.7) в (2.2.6)

$$\begin{aligned} u_{k+1}^+(t) &= \frac{A_{k+1}}{A_k} u_k^+(t - \tau_k) + \frac{A_{k+1}}{A_k} [u_k^+(t - \tau_k) - u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t)] - u_{k+1}^-(t) \\ u_{k+1}^+(t) \left[1 + \frac{A_{k+1}}{A_k} \right] &= u_k^+(t - \tau_k) \frac{2A_{k+1}}{A_k} + u_{k+1}^-(t) \left[\frac{A_{k+1}}{A_k} - 1 \right] \\ u_{k+1}^+(t) \left[\frac{A_k + A_{k+1}}{A_k} \right] &= u_k^+(t - \tau_k) \frac{2A_{k+1}}{A_k} + u_{k+1}^-(t) \left[\frac{A_{k+1} - A_k}{A_k} \right] \\ u_{k+1}^+(t) &= u_k^+(t - \tau_k) \left[\frac{2A_{k+1}}{A_k + A_{k+1}} \right] + u_{k+1}^-(t) \left[\frac{A_{k+1} - A_k}{A_k + A_{k+1}} \right] \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Коефициентът, който стои пред $u_k^+(t - \tau_k)$ в уравнение (2.2.8), представлява количеството енергия, която преминава от тръба k в тръба $k + 1$, идваща от вълните, които се движат "напред" в k -тата тръба. Затова

$$t_k = \frac{2A_{k+1}}{A_k + A_{k+1}} \quad (2.2.9)$$

се нарича **коефициент на преминаване** за k -тия преход (преходът между тръби k и $k + 1$).

Коефициентът пред $u_{k+1}^-(t)$ представлява количеството енергия, получена от вълните, които вървят "назад" в тръба $k + 1$. Затова

$$r_k = \frac{A_{k+1} - A_k}{A_k + A_{k+1}} \quad (2.2.10)$$

се нарича **коефициент на отразяване** за k -тия преход.

Можем да забележим, че в специалния случай, в който напречните сечения на две съседни тръби са равни ($A_k = A_{k+1}$), би следвало всички вълни да преминават свободно. Наистина, ако заместим в уравнение (2.2.10), $r_k = 0$, а от (2.2.9) се вижда, че $t_k = 1$

Нека изразим скоростта на вълните в тръба k чрез скоростта на вълните в $(k + 1)$ -вата тръба.

Първо разместваме уравнение (2.2.8)

$$u_k^+(t - \tau_k) = u_{k+1}^+(t) \left[\frac{A_k + A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] + u_{k+1}^-(t) \left[\frac{A_k - A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] \quad (2.2.11a)$$

Заместваме (2.2.11a) в (2.2.5)

$$\begin{aligned} u_k^-(t + \tau_k) &= u_k^+(t - \tau_k) - u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t) \\ u_k^-(t + \tau_k) &= u_{k+1}^+(t) \left[\frac{A_k + A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] + u_{k+1}^-(t) \left[\frac{A_k - A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] - u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t) \\ u_k^-(t + \tau_k) &= u_{k+1}^+(t) \left[\frac{A_k + A_{k+1} - 2A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] + u_{k+1}^-(t) \left[\frac{A_k - A_{k+1} + 2A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] \\ u_k^-(t + \tau_k) &= u_{k+1}^+(t) \left[\frac{A_k - A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] + u_{k+1}^-(t) \left[\frac{A_k + A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] \end{aligned} \quad (2.2.11b)$$

Използвайки, че

$$\frac{1}{1 + r_k} = \frac{A_k + A_{k+1}}{A_{k+1} - A_k + A_{k+1} + A_k} = \frac{A_k + A_{k+1}}{2A_{k+1}}$$

$$\frac{r_k}{1 + r_k} = \frac{(A_{k+1} - A_k)(A_k + A_{k+1})}{(A_k + A_{k+1})2A_{k+1}} = \frac{A_{k+1} - A_k}{2A_{k+1}},$$

можем да запишем Уравнения (2.2.11) във вида:

$$u_k^+(t - \tau_k) = \frac{1}{1 + r_k} u_{k+1}^+(t) - \frac{r_k}{1 + r_k} u_{k+1}^-(t) \quad (2.2.12a)$$

$$u_k^-(t + \tau_k) = -\frac{r_k}{1 + r_k} u_{k+1}^-(t) + u_{k+1}^+(t) + \frac{1}{1 + r_k} u_{k+1}^-(t) \quad (2.2.12b)$$

Сега да разгледаме Уравнения (2.2.12) в честотния домейн. Избираме $z = e^{i\omega_k}$ и използваме свойствата, описани в Приложение А. Тоест, че $u_k[t - \tau_k] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} z^{-\tau_k} U_k(z)$

$$z^{-\tau_k} U_k^+(z) = \frac{1}{1 + r_k} U_{k+1}^+(z) - \frac{r_k}{1 + r_k} U_{k+1}^-(z)$$

$$z^{\tau_k} U_k^-(z) = -\frac{r_k}{1 + r_k} U_{k+1}^-(z) + U_{k+1}^+(z) + \frac{1}{1 + r_k} U_{k+1}^-(z)$$

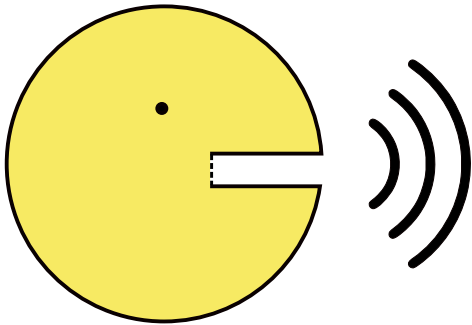
$$\iff \quad (2.2.13a)$$

$$U_k^+(z) = \frac{z^{\tau_k}}{1 + r_k} U_{k+1}^+(z) - \frac{r_k z^{\tau_k}}{1 + r_k} U_{k+1}^-(z) \quad (2.2.13b)$$

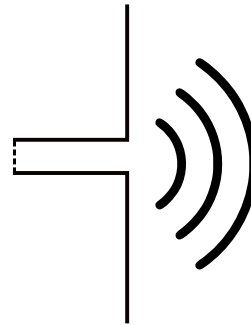
$$U_k^-(z) = -\frac{r_k z^{-\tau_k}}{1 + r_k} U_{k+1}^-(z) + U_{k+1}^+(z) + \frac{z^{-\tau_k}}{1 + r_k} U_{k+1}^-(z) \quad (2.2.13v)$$

По този начин получихме връзката между две съседни тръби. За да получим общия модел, трябва да отчетем двете специални ситуации - при първата и при последната тръба.

2.2.2 Ограничения при устните



(а) Представяне на устните като отвор в сферична преграда



(б) Представяне на устните като отвор в безкрайна равнина

Фигура 2.2.2: Представяне на устните като отвор в преграда

Един разумен начин да представим изхода при устните е показан на Фигура 2.2.2a. На фигурата се вижда как звуковите вълни, които напускат системата, претърпяват дифракция при отвора в сферичната повърхност, моделираща главата. Представянето на тази дифракция е сложно, затова ще се опитаме да го опростим.

Ако отворът на устните е много малък спрямо размера на сферата, то можем да си мислим за преградата като за безкрайна равнина, както е показано на Фигура 2.2.2b

В такъв случай може да се покаже, че съществува следната връзка между налягането и обемната скорост:

$$\mathcal{P}_N(l_N, z) = Z_L(z) \mathcal{U}_N(l_N, z), \quad (2.2.14)$$

където $Z_L(z)$ се нарича радиационен импеданс (пълно съпротивление), описва загубите, които се получават на изхода, и има вида:

$$Z_L(z) = \frac{izL_r R_r}{R_r + izL_r}, \quad (2.2.15)$$

Където $z = e^{i\omega_k}$ описва сигнал с ъглова честота ω_k , L_r и R_r са константи, определени от размера на отвората на устата. За практически цели се избират:

$$R_r = \frac{128}{9\pi^2} > 1 \quad L_r = \frac{8a}{3\pi c}$$

a - радиус на отвората, c - скоростта на звука.

При много ниски честоти $Z_L(z) \approx 0$, което значи, че съпротивлението на устните е почти нулево. При средни честоти ($zL_r \ll R_r$), $Z_L(z) \approx izL_r$, а високи честоти, ($zL_r \gg R_r$) $Z_L(z) \approx R_r$. Това значи, че загубите при устните са най-големи при големи честоти, тъй като тогава импедансът е най-голям.

В случая, в който честотата z е висока, $Z_L \approx R_r$ е реално число и не зависи от z , тоест $Z_L(z) = Z_L$.

Тогава, ако $p_N(l_N, t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} P_N(l_N, z)$, $u_N(l_N, t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} U_N(l_N, z)$ и съответно $Z_L \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} Z_L$, можем да разгледаме уравнението (2.2.14) във времевия домейн:

$$p_N(l_N, t) = Z_L u_N(l_N, t),$$

Ако използваме Уравнения (2.2.3) и заместим с $\tau_N = \frac{l_N}{c}$, получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{\rho c}{A_N} [u_N^+(t - \tau_N) + u_N^-(t + \tau_N)] &= Z_L [u_N^+(t - \tau_N) - u_N^-(t + \tau_N)] \\ u_N^-(t + \tau_N) \frac{(\rho c + A_N Z_L)}{A_N} &= u_N^+(t - \tau_N) \frac{(A_N Z_L - \rho c)}{A_N} \\ u_N^-(t + \tau_N) &= -r_L u_N^+(t - \tau_N), \quad \text{където} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$r_L = \left(\frac{\frac{\rho c}{Z_L} - A_N}{\frac{\rho c}{Z_L} + A_N} \right)$$

В случая, в който $Z_L \approx izL_r$ е комплексно, може да се покаже, че уравнение (2.2.16) остава в сила, но в този случай и r_L също ще бъде комплексно.

2.2.3 Ограничения при глотиса

Както при устните, така и при глотиса, трябва да се отчете импедансът. Например когато глотисът е затворен, импедансът е безкраен, а обемната скорост нулева.

Връзката $U_1(0, z) = U_G(z)$ е твърде наивна и може да се покаже, че по-добро приближение би било:

$$U_1(0, z) = U_G(z) - \frac{P_1(0, z)}{Z_G(z)}, \quad (2.2.17)$$

където $z = e^{i\omega_k}$, Z_G описва импеданса на глотиса и $Z_G(z) = R_G + izL_G$,

L_G, R_G - константи. Отново предполагайки, че Z_G е реално, тоест честотата ω_k е много ниска, можем да разгледаме уравнение (2.2.17) във времевия домейн.

Нека $u_1(0, t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} U_1(0, z), p_1(0, t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} P_1(0, z)$ за фиксиран първи аргумент и съответно $Z_G \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} Z_G$:

$$u_1(0, t) = u_G(t) - \frac{p_1(0, t)}{Z_G}$$

Ако използваме Уравнения (2.2.3), получаваме

$$\begin{aligned} u_1^+(t) - u_1^-(t) &= u_G(t) - \frac{\rho c}{A_1} \left[\frac{u_1^+(t) + u_1^-(t)}{Z_G} \right] \\ u_1^+(t) \left[1 + \frac{\rho c}{A_1 Z_G} \right] &= u_G(t) + u_1^-(t) \left[1 - \frac{\rho c}{A_1 Z_G} \right] \\ u_1^+(t) &= u_G(t) \left[\frac{A_1 Z_G}{A_1 Z_G + \rho c} \right] + u_1^-(t) \left[\frac{A_1 Z_G - \rho c}{A_1 Z_G + \rho c} \right] \end{aligned}$$

$$u_1^+(t) = u_G(t) \left[\frac{1 + r_G}{2} \right] + r_G u_1^-(t) \quad (2.2.18)$$

където $r_G = \left(\frac{A_1 Z_G - \rho c}{A_1 Z_G + \rho c} \right)$ и е изпълнено

$$\frac{1 + r_G}{2} = \frac{A_1 Z_G + \rho c + A_1 Z_G - \rho c}{2(A_1 Z_G + \rho c)} = \frac{A_1 Z_G}{A_1 Z_G + \rho c}$$

Ако се върнем в честотния домейн:

$$U_G(z) = \left[\frac{2}{1 + r_G} \right] U_1^+(z) - \left[\frac{2r_G}{1 + r_G} \right] U_1^-(z), \quad (2.2.19)$$

Отново може да се покаже, че ако Z_G е комплексно, уравнението (2.2.18) е в сила и в този случай r_G също е комплексно. За улеснение обикновено Z_L и Z_G се взимат реални.

2.2.4 Общ вид на \mathcal{V}

За да видим общия вид на \mathcal{V} , нека засега всички тръби имат равна дължина и тя е $\tau_i = \frac{1}{2}, i \in [1...N]$ Тогава уравнения (2.2.13) имат вида:

$$U_k^+(z) = \frac{z^{1/2}}{1+r_k} U_{k+1}^+(z) - \frac{r_k z^{1/2}}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) \quad (2.2.20a)$$

$$U_k^-(z) = -\frac{r_k z^{-1/2}}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) + U_{k+1}^+(z) + \frac{z^{-1/2}}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) \quad (2.2.20b)$$

За да опишем граничните условия при устните, дефинираме $U_{N+1}(z)$ да е Фурие трансформацията на входа на несъществуваща $(N+1)$ тръба. Тази тръба е безкрайно дълга и заради това скоростта на вървящите „назад“ вълни трябва да бъде 0

Тоест дефинираме:

$$\begin{aligned} U_{N+1}^+(z) &= U_L(z) \\ U_{N+1}^-(z) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Също така искаме коефициентът на отражение на последната истинска тръба да е равен на коефициент на отражение при устните, а именно $r_N = r_L$

$$\left(\frac{A_{N+1} - A_N}{A_{N+1} + A_N} \right) = \left(\frac{\frac{\rho c}{Z_L} - A_N}{\frac{\rho c}{Z_L} + A_N} \right)$$

Това ни дава, че $A_{N+1} = \frac{\rho c}{Z_L}$

Ако представим Уравнения (2.2.20) в матричен вид, получаваме:

$$U_k = Q_k U_{k+1} \text{ за}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} U_k^+(z) \\ U_k^-(z) \end{bmatrix} \quad Q_k = \begin{bmatrix} \frac{z^{1/2}}{1+r_k} & -\frac{r_k z^{1/2}}{1+r_k} \\ -\frac{r_k z^{-1/2}}{1+r_k} & \frac{z^{-1/2}}{1+r_k} \end{bmatrix}$$

$$U_1 = Q_1 U_2 = Q_1 Q_2 U_3 = \dots = Q_1 \dots Q_N U_{N+1} = \left[\prod_{i=1}^N Q_i \right] U_{N+1}$$

За специалното ограничение глотиса, разгледаме матричния вид на [Уравнение 2.2.19](#)

$$U_G(z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+r_G} & -\frac{2r_G}{1+r_G} \end{bmatrix} U_1$$

Ограниченията (2.2.21) за U_L ни дават, че

$$U_{N+1} = \begin{bmatrix} U_{N+1}^+(z) \\ U_{N+1}^-(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_L(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U_L(z)$$

Тогава, ако заместим, получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{V}(z)} = \frac{U_G(z)}{U_L(z)} &= \frac{\left[\frac{2}{1+r_G}, -\frac{2r_G}{1+r_G} \right] \prod_{i=1}^N Q_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U_L(z)}{U_L(z)} = \\ &= \left[\frac{2}{1+r_G}, -\frac{2r_G}{1+r_G} \right] \prod_{i=1}^N Q_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Нека изразим Q_k по следния начин:

$$Q_k = \begin{bmatrix} \frac{z^{1/2}}{1+r_k} & \frac{-r_k z^{1/2}}{1+r_k} \\ \frac{-r_k z^{-1/2}}{1+r_k} & \frac{z^{-1/2}}{1+r_k} \end{bmatrix} = z^{1/2} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r_k} & \frac{-r_k}{1+r_k} \\ \frac{-r_k z^{-1}}{1+r_k} & \frac{z^{-1}}{1+r_k} \end{bmatrix} = z^{1/2} \hat{Q}_k$$

Тогава уравнение (2.2.22) има вида

$$\frac{1}{\mathcal{V}(z)} = \frac{U_G(z)}{U_L(z)} = z^{N/2} \left[\frac{2}{1+r_G}, -\frac{2r_G}{1+r_G} \right] \prod_{i=1}^N \hat{Q}_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.23)$$

Нека изразим общия вид на $\mathcal{V}(z)$. За $N = 2$, например, има вида:

$$\mathcal{V}(z) = \frac{0.5(1+r_G) \prod_{i=1}^2 (1+r_i) z^{-1}}{1 + (r_G r_1 + r_1 r_2) z^{-1} + (r_G r_2) z^{-2}}, \quad (2.2.24)$$

както е показано в [Пример 3](#)

Може да се покаже, че в общия случай за произволно N , [Уравнение 2.2.23](#) може да се развие итеративно до:

$$\mathcal{V}(z) = \frac{0.5(1+r_G) \prod_{i=1}^N (1+r_i) z^{-N/2}}{1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i z^{-i}} \quad (2.2.25)$$

Както се вижда от [Пример 2](#), предположението, че $\tau_i = \frac{1}{2}$ е разумно, тъй като при тази стойност се получава най-голяма изразителна сила, както е отбелязано и в [Бележката](#).

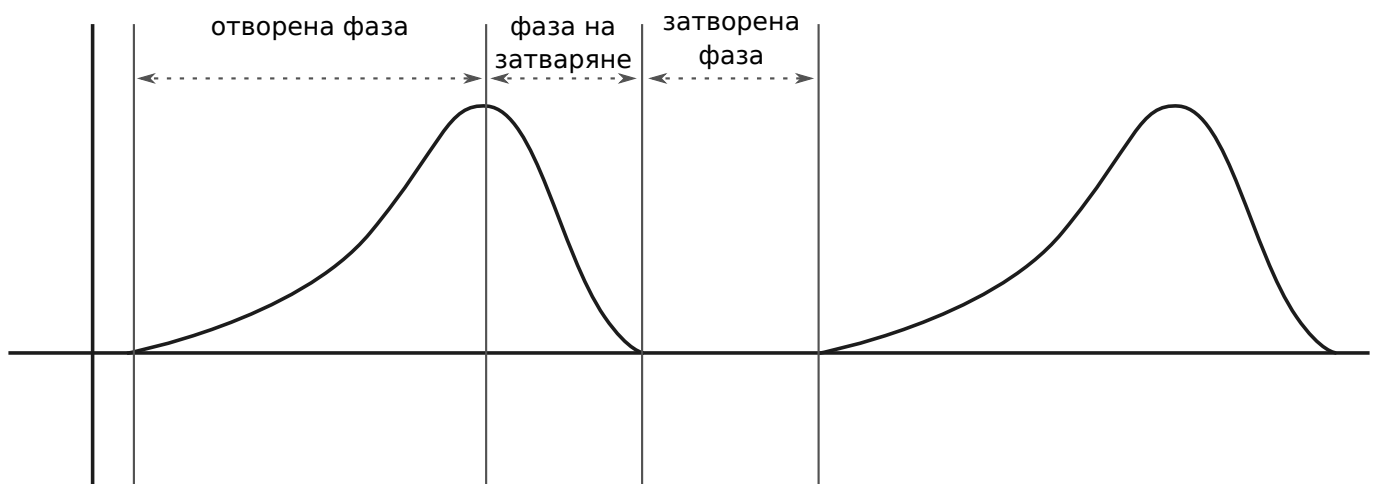
2.2.5 Общ вид на \mathcal{R}

Моделът, описан в [Подраздел 2.2.2](#) се моделира прекалено трудно. Може да се покаже ([\[Тay09\]](#), [\[Qua01\]](#)), че ефектът от радиацията се приближава достатъчно добре с една нула в единичната окръжност, тоест:

$$\mathcal{R}(z) = (1 - \gamma z^{-1}) \quad (2.2.26)$$

2.2.6 Общ вид на \mathcal{G}

За да се симулира действието на глотиса, трябва да отчетем как се държи той при изговаряне на различни видове звуци.



Фигура 2.2.3: Пример за импулс от глотиса

В случая на гласна, както бяхме приели за улеснение, той трепти периодически и видът му може да се види на [Фигура 2.2.3](#). Можем да разделим този сигнал на три фази:

1. Отворена фаза с край F_1
2. Фаза на затваряне с начало F_1 и край F_2
3. Затворена фаза с начало F_2

Това може да се опише като функция на времето по следния начин.

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi n/F_1)), & 0 \leq t \leq F_1 \\ \cos(\pi(n - N_1)/2N_2), & F_1 \leq t \leq F_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Поведението като това на \mathcal{G} може да се приближава с два полюса, както е показано в [Приложение за полюси и нули](#), тоест

$$\tilde{\mathcal{G}}(z) = \frac{1}{(1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \beta z^{-1})}$$

но по този начин не се отчита правилно самата форма на сигнала.

В [\[Quo01\]](#) е показано, че по-добро приближение се получава при $\alpha = \beta$ и $\mathcal{G}(z) = \tilde{\mathcal{G}}(-z)$, тоест

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{(1 - \beta z)^2}$$

Сигналът, показан на [Фигура 2.2.3](#), е почти идеален. В действителност е почти невъзможно да се поддържа тон, който има еднакви разстояния между пиковите и еднаква амплитуда. Отклонението от истинския период се нарича джитер². Другият ефект, който е важен за истинския човешки глас, е трептенето³, тоест разликата в амплитудите. Освен за естествеността на гласа, тези характеристики могат да носят информация и за емоционалното състояние. Висок джитер може да означава дрезгав глас, но също може да се предизвика при чувство на стрес или страх. Включването им в модела се постига с допълнителни нули, което ни дава и крайния вид на \mathcal{G} в случая на озвучен звук:

$$\mathcal{G}(z) = \frac{\prod_{i=0}^K (1 - \beta_i z^{-1})}{(1 - \beta z)^2} \quad (2.2.27)$$

Да разгледаме случая с беззвучен звук. При съгласните, например, сигналът от глотиса е случайна редица с плосък спектър (тоест има почти еднаква мощност в целия спектър). Добър начин да се моделира е чрез генератор на бял шум.

2.2.7 Общ вид на \mathcal{Y}

От уравнения [2.2.25](#), [2.2.26](#), [2.2.27](#) следва, че видът на \mathcal{H} е

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{G}(z)\mathcal{V}(z)\mathcal{R}(z) = \left[\frac{\prod_{i=0}^K (1 - \beta_i z^{-1})}{(1 - \beta z)^2} \right] \left[\frac{0.5(1 + r_G) \prod_{i=1}^N (1 + r_i) z^{-N/2}}{1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i z^{-i}} \right] [(1 - \gamma z^{-1})]$$

При определени стойности на коефициентите, видът на \mathcal{Y} може да се запише като:

²На английски jitter, думата е заемка, тъй като няма друг възприет български термин. Руският термин е джиттер

³На английски shimmer. Тук също не мога да намеря подходящ български термин, но в случая и единственият руски, който открих, е шиммер

$$y(z) = \mathcal{G}(z) \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^K a_k z^{-k}}, \quad (2.2.28)$$

от което ще се възползваме в следващия раздел.

2.3 Представяне със системи

Нека имаме чистия сигнал от глотиса $g[t]$. При преминаването му през вокалния тракт и устните, той се променя, в следствие на различни фактори като турбуленция, поглъщане, отрязване, в следствие на което на изхода (устните), получаваме сигнала $y[n]$.

Дефиниция. (Система)

Механизъм, който манипулира един или повече сигнали с някаква цел до получаване на нов сигнал, се нарича система.

Обикновено в практическия свят се използват системи, чието действие е предварително известно (и желано). Такива системи наричаме **филтри**. Филтрите обикновено изпълняват някаква точно определена манипулация върху сигнала, например да премахват всички честоти под или над определена честота.

С $g[n] \mapsto y[n]$ ще бележим, че y е отговорът на системата за вход g . В такъв случай, системата, която ще разгледаме, е тази на вокалния тракт. Ще ни интересуват няколко класа системи.

Дефиниция. (Линейна система)

Ако $x_1[n] \mapsto y_1[n]$ и $x_2[n] \mapsto y_2[n]$, то системата е линейна \leftrightarrow

$$ax_1[n] + bx_2[n] \mapsto ay_1[n] + by_2[n]$$

Дефиниция. (Времево-независима система)

Нека $x[n] \mapsto y[n]$. Тогава, ако за всяко n_0 : $x[n - n_0] \mapsto y[n - n_0]$, то системата е времево-независима.

Свойство 1. Ако системата е времево-независима и сигналът x е перидичен с период N , то и изходът на системата y е перидичен с период N :

$$x[n] \mapsto y[n] \text{ и } x[n] = x[n + N] \implies x[n + N] \mapsto y[n]. \text{ Но от времевата независимост знаем, че } x[n + N] \mapsto y[n + N] \implies y[n] = y[n + N]$$

Специален подклас на линейните, времево-независими системи, е класът на системите, удовлетворяващи диференчното уравнение от ред N с константни коефициенти:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n - m] \quad (2.3.1)$$

Вокалният тракт е времето независима система, защото изходът $y[n]$ не зависи от момента от време, а само от специфичната му конфигурация в

текущия момент, т.е. положението на езика, устните, зъбите. Нека предположим, че вокалния тракт е линейна, времево-независима система, която удовлетворява уравнение [Уравнение 2.3.1](#), и да разгледаме свойствата.

Искаме да опишем как работи тази система. За момента знаем как ще реагира тя, ако ѝ подадем входен сигнал $g[n]$. Но вместо да разглеждаме отговора на системата за широк спектър от входни функции, ще е полезно да имаме характеристика, която не зависи от входа.

Първо да разгледаме входа по различен начин. Ако за всеки момент от време n_0 имаме импулси със сила $g[n_0]$, то можем да мислим за входния сигнал $g[n]$ като за сума от тези импулси. Тоест, нека имаме дискретния единичен импулс:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогаво можем да представим входния сигнал $g[n]$ като

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\delta[n-k]$$

Нека $\delta[n-k] \mapsto h_k[n]$. Тъй като системата е линейна, е изпълнено че:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\delta[n-k] \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h_k[n] = y[n] \quad (2.3.2)$$

Времевата инвариантност ни казва, че ако $\delta[n] \mapsto h[n]$, то $\delta[n-k] \mapsto h[n-k]$, следователно в случая на вокалния тракт [Уравнение 2.3.2](#) има вида:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k] \quad , \quad (2.3.3)$$

или записано като [конволюция](#) $y[n] = (g * h)[n]$.

Ако разгледаме Фурие преобразуванията на y, g, h , които са съответно $\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$, в $z = e^{i\omega_k}$, получаваме

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z)$$

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{G}(z)} \quad (2.3.4)$$

\mathcal{H} се нарича предавателна функция за системата.

Да разгледаме фурие преобразуването на [Уравнение 2.3.1](#) за входен сигнал g .

$$\left[\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right] \mathcal{Y}(z) = \left[\sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \right] \mathcal{G}(z)$$

$$\frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{G}(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.3.5)$$

Когато заместим [Уравнение 2.3.5](#) в [Уравнение 2.3.4](#), получаваме

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.3.6)$$

В [Раздел 2.2](#) видяхме, че резултатния сигнал y , който се получава при изходите на системата, има следния вид:

$$y(z) = \mathcal{G}(z)\mathcal{V}(z)\mathcal{R}(z) = \mathcal{G}(z) \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^K a_k z^{-k}} \quad (2.2.28)$$

Това означава, че $\mathcal{V}(z)\mathcal{R}(z)$, всъщност описват трансферната функция на системата $g[n] \mapsto y[n]$, тоест $\mathcal{H}(z) = \mathcal{V}(z)\mathcal{R}(z)$.

Следователно, производството на реч се описва от системата $\mathcal{Y}(z) = \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z)$, а \mathcal{H} съдържа информацията за вокалния тракт. Характеристиките, които ще изберем, трябва да носят тази информация за вокалния тракт, тоест трябва да отделят входния сигнал \mathcal{G} от филтъра \mathcal{H} , извличайки информацията за подлежащата емоция, която се надяваме, че е кодирана в \mathcal{H} .

Изборът на характеристики е описан по-подробно в следващия раздел.

2.4 Характеристики

2.4.1 Избор

На дневен ред е избирането на характеристики, които отразяват идеята за разделяне на информацията за вокалния тракт \mathcal{H} от входния сигнал \mathcal{G} . Имаме $\mathcal{Y}(z) = \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z)$.

Нека вземем логаритъм от модула:

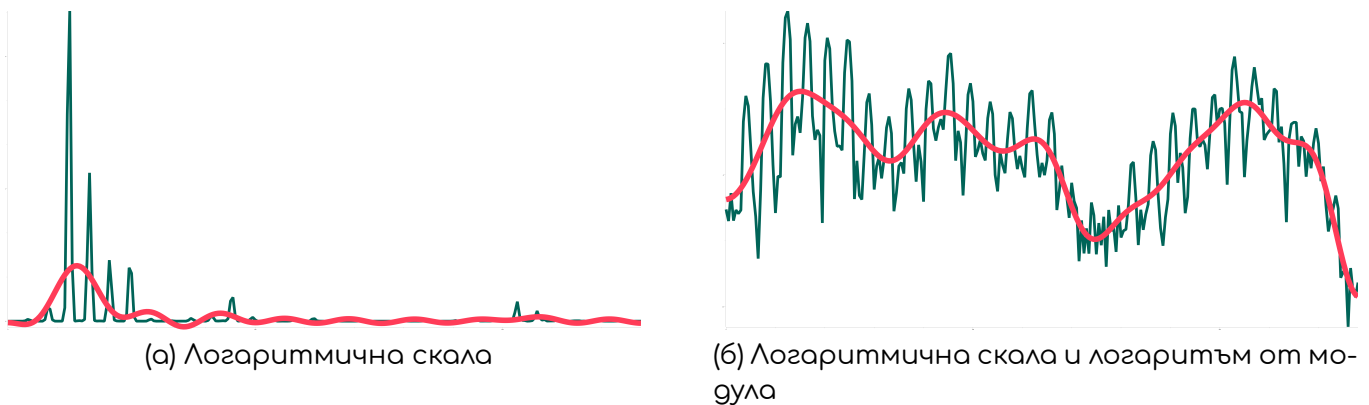
$$\log(|Y(z)|) = \log(|G(z)|) + \log(|H(z)|)$$

Обратното Фурие преобразуване ни дава вид във времевия домейн:

$$c_y[n] = c_g[n] + c_h[n]$$

Сега вече имаме сбор на входния сигнал и този на филтъра, вместо конволюция във времевия домейн.

Да видим каква е идеята зад тези преобразувания. Имаме, че $G(z)$ и $H(z)$ са комплексни числа и вземайки модула им, губим информация за фазата. Това не е проблем, тъй като човешкото ухо не е особено чувствително към нея, затова обикновено ни трябва само амплитудата (и следователно модула).



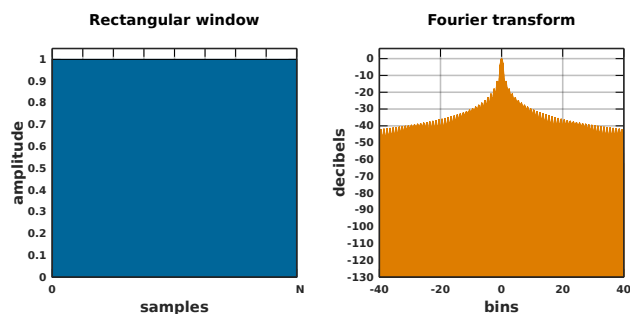
Фигура 2.4.1: Графика на спектъра на сигнал, получен при произнасяне на "а-а-а-а"

Взимането на логаритъм, подчертава периодичността на сигнала, идващ от глотиса. На Фигура 2.4.1а се виждат пиковите, породени от фундаменталната честота, на която трепти глотиса, и хармоничните и честоти. Поради загубата на енергията в системата за производство на реч, не всички хармонични честоти имат същата амплитуда. На Фигура 2.4.1б се вижда, че взимането на логаритъм помага за изравняването на хармоничните амплитудати и кара графиката да изглежда "по-периодична". Сега нека разгледаме логаритмувания спектъра като сигнал и му направим Фурие преобразуване до получаване на така нареченият кепстър. Тъй като разгледаме спектъра сигнал, наличието на периодични амплитудати ще се преведе до пик в получения кепструм на честотата, отговаряща (горе-долу, имайки предвид джитера) на основната честота на глотиса. Информацията, която описва вокалния тракт е с много по-малко изразена периодичност в спектъра, затова ще се запази в ниските честоти на кепстъра. Тоест $c_g[n]$ ще са коефициентите в кепстъра на високите честоти, а $c_h[n]$ в ниските. За практически цели обикновено се избират първите 13 коефициента на кепстъра. Тези коефициенти се наричат Mel Frequency Cepstral Coefficients (MFCC), където Mel скалата е логаритмична скала. Повече детайли за извличането им са описани в следващия подраздел.

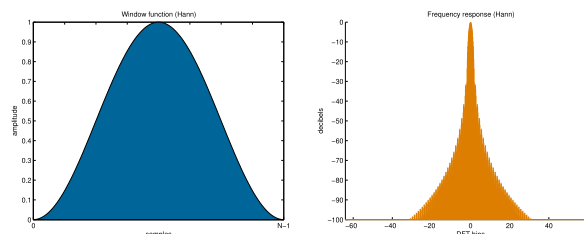
2.4.2 Извличане

Ще извличаме характеристики от подаден аудио файл в wave формат. Първо, съдържанието на файла се прочита в масив от 64-битови float числа. Елементите на този масив се наричат дискрети (samples). Броят им зависи от честотата на дискретизация (тоест колко измервания са направени за една секунда), която обикновено е 16kHz, 44100Hz или 48Hz. Броят на дискретите определя броя на коефициентите на Фурие преобразуването. Тъй като сигналът е реален, от [свойствата](#) следва, че максималната честота, която можем да измерим е честотата на Найкуист, равна на броя дискрети върху две, тоест половината на честотата на дискретизация. Колкото е по-голяма Найкуист честотата, толкова по-добра честотна резолюция получаваме.

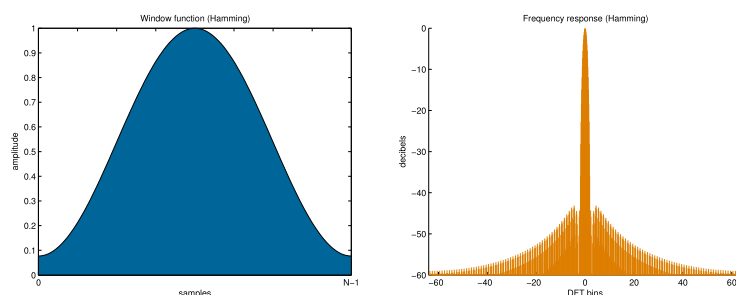
Базирайки се на идеята, че вокалният тракт е статичен за кратък период от време, нахъсваме масива отделни застъпващи се парчета - фреймове - в рамките на които сигналът е статичен. За да се определи дължината на фрейма, трябва да се вземат предвид две неща: от една страна колкото повече дискрети имаме, толкова по-добра честотна резолюция получаваме. От друга, колкото повече данни взимаме, толкова по-голям е шансът да се смени конфигурация на вокалния тракт. За да се справим с този дуализъм, компромисните стойности, които са избрани в описваната имплементация, са 25 милисекунди за дължина на фрейм и 10 милисекунди за разстояние между два последователни фрейма. Един фрейм описва една конфигурация на вокалния тракт. Целим да извлечем MFCC коефициенти за всеки фрейм. Това означава, че трябва да се направи Фурие преобразуване, което изисква сигналът да е периодичен, а данните във фреймовете не са. За тази цел, всеки фрейм се умножава по специално избрана функция, наречена прозорец. Тази функция е нула навсякъде, освен в избран интервал и обикновено симетрична около средата на този интервал. Когато фреймът се умножи по прозорец със същата дължина, стойностите в краищата се нулират. Това прави полученият сигнал периодичен с период дължината на фрейма, тъй като започва в нула и завършва отново в нула.



(а) Правоъгълен прозорец



(б) Прозорец на Хан



(в) Прозорец на Хеминг

Фигура 2.4.2: Често срещани прозоречни функции

TODO: тука още приказки за прозорци. Прозорецът е моята врата и аз вървя към тях и ги разпитвам.

След като фреймовете вече са периодични, на всеки от тях се прави фурье преобразуване. Може би тука за FFT.(TODO)

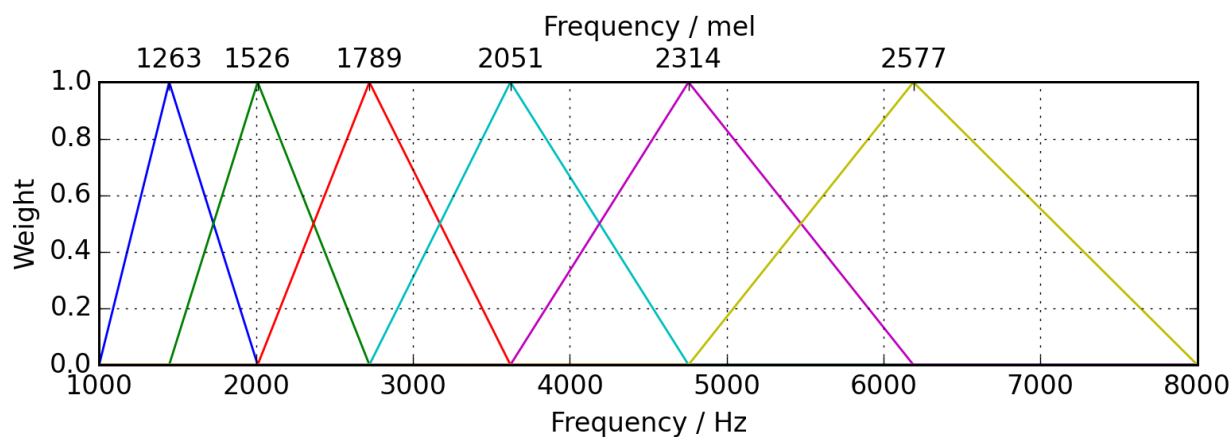
За да се моделира по-реалистично, трябва да се отчете феноменът, че хората възприемат гразнителите чрез сетивата си логаритмично, в частност и звука. Този факт е отбелязан в закона на Вебер-Фехнер, а именно, че големината на усещането за определено гразнение е пропорционално на логаритъма на самото гразнение. Има различни опити да се направи скала, която по-точно да отразява човешките възприятия. Една такава е Мел скалата, която е изкуствено (емпрично) създадена. Единиците, мелове, са така избрани, че разликата между всеки два съседни да се възприема като еднаква. Връзката между мелове и честотите се задава със следната формулата:

$$m = 2595 \log_{10} \left(1 + \frac{f}{100} \right)$$

Втората особеност, която трябва да моделираме, е свързана с устройството на слуховия орган. Главно участие има охлювчето (спирален орган), което е част от вътрешното ухо. Охлювчето е изпълнено с течност и звуковата вълна преминава през нея. По вътрешната част на охлювчето се намира така наречената базиларна мембрана, чиято дължина е покрита с рецепторни клетки - косъмчета. При преминаване на вълната през течната среда, косъмчетата се движат и предизвикват електрически сигнал, който се предава на съответните слухови неврони. Различните части на

охлювчето отговарят за различни честоти (по-навътре по спиралата му са по-високите честоти). По принцип, когато два тона с различна честота стигнат до охлювчето едновременно, то ги разграничава като отделни и подава сигнал на два различни неврона. Ако тези честоти са много близки и съответно се обработват от много близки области по повърхността на охлювчето, се получава така нареченото "слухово маскиране", при което двата тона не могат да се различат като отделни и се подават на един и същи неврон. Такива области по повърхността на охлювчето се наричат критични области. При получените Фурие коефициенти резолюцията е твърде голяма, за да могат отделните честоти да се разграничават от охлювчето. Тъй като честотите от една критична област се възприемат като една, то можем да разделим скалата на критични области и да акумулираме информацията в тях. Това допълнително намаля пространството, в което работим, и е удобно от изчислителна гледна точка. За практически цели често се взема броят на тези области да е 23, като обикновено се взимат застъпващи и амплитудата се умножават по триъгълен прозорец.

Като съчетаем тези две особености, получаваме застъпващи се триъгълници в Мел скалата, както е показано на [Фигура 2.4.3](#), по които умножаваме сигнала. Взимаме логаритъм от Енергията на сигнала, за да се подчертае периодичността на сигнала от глотиса, както обяснихме в предния раздел. В крайна сметка, получаваме за всеки фрейм по 23 коефициента, всеки от които стои пред акумулираните логаритми от енергии на честоти в дадена критична област.



Фигура 2.4.3: Мел скала за 16kHz и 6 критични области

Следващата стъпка е да вкараме в сила теорията за MFCC коефициенти, която представихме в предния раздел. За тази цел, разглеждаме новополучените 23 числа като сигнал. Правим Фурие трансформация, като запазваме информация само за реалната, част (тоест косинуса), тъй като имагинерната част носи информация за фазата, която не е нужна, до получаването на кепстър. Фундаменталната честота на глотиса и хармоничните ѝ ще образуват сигнал, чиято периодичност е засилена от логаритъма. Този „сигнал“ е с голяма честота в сравнение със „сигнала“, идващ от коефициентите отговарящи за конфигурацията на вокалния тракт. Затова MFCC

коэффициентите, отговарящи за него, ще са в по-високите „честоти“ на кепстъра. Това означава, че не са ни нужни всички MFCC коефициенти, а само тези пред ниските „честоти“ на кепстъра. Обикновено в практиката се използват първите 13 MFCC коефициента.

Изменението на MFCC коефициентите във времето може да донесе допълнително информация за вокалния тракт и подлежащата емоция. Затова в допълнение на 13-те коефициента, се добавят и първите и вторите им производни по време. Крайният ефект е, че от входния сигнал получаваме за всеки фрейм 39 коефициента, които ще целим да класифицираме.

2.5 Класификация

След като сме избрали характеристичните вектори, които ще извличаме по подаден файл, трябва да можем да ги класифицираме по някакъв начин. В [EKK] са разгледани и сравнени различни методи за класификация. Макар че невронните мрежи са по-често използвани в последните публикации в областта, тук ще се подходи по „старомодния“ начин с Гаусови смеси. Показаното за тях съотношение между „прецизност на разпознаване“ и „време за трениране“ е най-добро според проучването.

Целим да намерим разпределение за всяка от търсените емоции. Всяко непрекъснато разпределение може да се приближи с произволна точност с линейна комбинация на достатъчно на брой гаусиани, където теглата се сумират до 1. Такава сума ще наричаме Гаусова смеска.

Нека за всяка емоция e сме приближили разпределението на векторите ѝ със смеска от K на брой гаусиани. Нека означим тази смеска с (π^e, μ^e, Σ^e) , където:

$$\pi^e = \{\pi_k^e\}_{k=1}^K, \text{ тегла}$$

$$\mu^e = \{\mu_k^e\}_{k=1}^K$$

$$\Sigma^e = \{\Sigma_k^e\}_{k=1}^K$$

Тогава при подаден нов характеристичен вектор x , ще търсим смеската на коя емоция ще доведе до най-голямо правдоподобие - тоест параметрите на кой модел е най-вероятно да генерират наблюдението. При подадени (π^e, μ^e, Σ^e) за дадена емоция e и характеристичен вектор x , правдоподобие то се пресмята с формулата:

$$p(x) = \sum_{k=1}^K \pi_k^e \mathcal{N}(x; \mu_k^e; \Sigma_k^e),$$

където $\mathcal{N}(\bullet, \mu, \Sigma)$ е плътност на нормално разпределение със средно μ и ковариационна матрица Σ , $\mu_i^e \in \mathbb{R}^m$, а $\sum_{k=1}^K \pi_k^e = 1$; $0 \leq \pi_i^e \leq 1$ и в случая на избраните характеристични вектори, $m = 39$.

По принцип ковариационната матрица $\Sigma_i^e \in (\mathbb{R}^{m \times m})$, но тъй като приемаме, че отделните MFCC коефициенти са независими, то ще считаме, че Σ_i^e е диагонална.

Алгоритъмът за получаване на въпросните π^e, μ^e, Σ^e е следният:

Нека $X = (x_1, \dots, x_n)$ са всички характеристични вектори с етикет e . Искаме правдоподобие на тези вектори, спрямо (π^e, μ^e, Σ^e) да е възможно най-голямо. Тоест искаме да оптимизираме:

$$p(X | (\pi^e, \mu^e, \Sigma^e)) = \prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \pi_k^e \mathcal{N}(x_i | \mu_k^e, \Sigma_k^e),$$

Тъй като логаритъмът е монотонно растяща функция, то няма значение дали ще оптимизираме функцията със или без логаритъм. За по-голямо удобство, нека разглеждаме $\log(p(X | (\pi^e, \mu^e, \Sigma^e)))$. Тоест имаме:

$$\log(p(X | (\pi^e, \mu^e, \Sigma^e))) = \log\left(\prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \pi_k^e \mathcal{N}(x_i | \mu_k^e, \Sigma_k^e)\right) = \sum_{i=1}^n \log\left(\sum_{k=1}^K \pi_k^e \mathcal{N}(x_i | \mu_k^e, \Sigma_k^e)\right)$$

Нека сме фиксирали някаква емоция. За удобство ще означаваме Гаусовата ѝ смеска с (π, μ, Σ) . Оптимизационната задача трябва да отчита ограниченията за π , затова след добавяне на множител на Лагранж има вида:

$$L(\pi, \mu, \Sigma) = \sum_{i=1}^n \log\left(\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i | \mu_k, \Sigma_k)\right) + \lambda \left(\sum_{k=1}^K \pi_k - 1\right)$$

За да максимизираме правдоподобие, търсим решения на

$\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \mu_j}$, $\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \Sigma_j}$ и $\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \pi_j}$, нека ги кръстим съответно $\mu_j^{new}, \Sigma_j^{new}, \pi_j^{new}$. В

Приложение Г е показано, че

$$\begin{aligned} \mu_j^{new} &= \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}} \\ \Sigma_j^{new} &= \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{js})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}, & t == s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \\ \pi_j^{new} &= \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}{N}, \end{aligned}$$

$$\text{където } \gamma_{ij} = \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)}$$

Правдоподобие се максимизира с „Алгоритъмът за максимизиране на очакването“⁴ [Bis06] по следния начин:

⁴Expectation Maximisation

1. Разбиваме $X = (x_1, \dots, x_n)$ на K части и взимаме за първоначални стойности на μ_j, Σ_j съответно средното и вариацията на j -тата част, $\pi_j := \frac{\#_j}{|X|}$, където $\#_j$ е броят на векторите в j -тия клъстер
2. Пресмятаме $\gamma_{ij} = \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)}$ с текущите стойности на модела.
 γ_{ij} се казва каква „тежест“ пада върху j -тата Гаусиана
3. Пресмятаме
$$\mu_j^{new} = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}$$

$$\Sigma_j^{new} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{js}^{new})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}, & t = s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\pi_j^{new} = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}{N}$$
4. Пресмятаме правдоподобие $\log(p(X | (\pi^e, \mu^e, \Sigma^e)))$
5. Ако условието за терминиране е изпълнено, то приключваме изпълнението с изход (π, μ, Σ) , иначе се връщаме на 2.

Условията за терминиране в реализацията са две: трябва или разликата между предишното и новото правдоподобие да е по-малко от $1 \cdot 10^{-5}$ или цикълът да се е изпълнил 200 пъти.

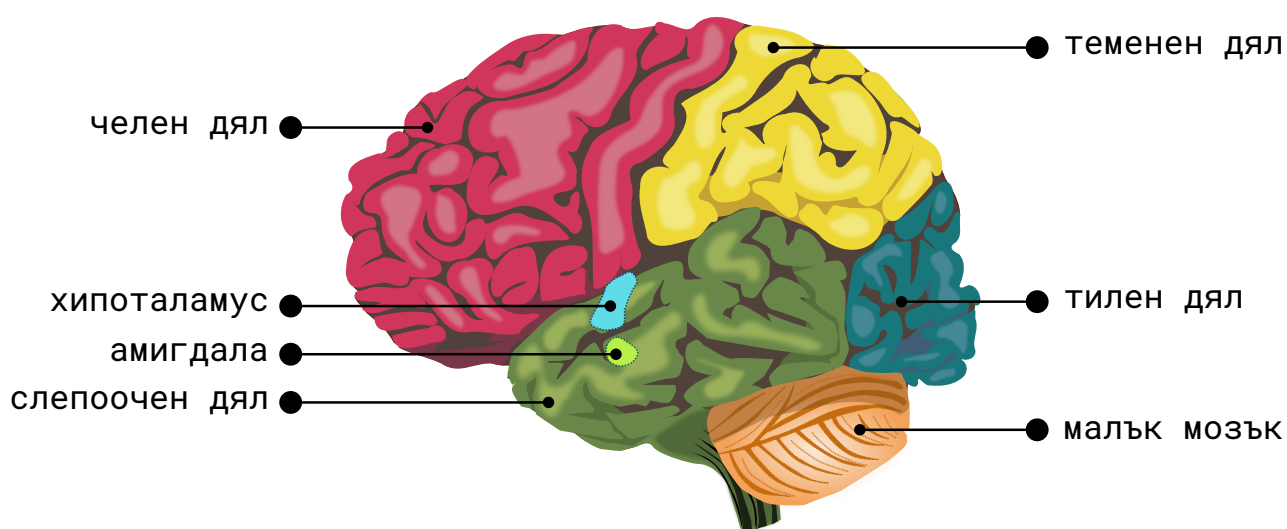
Друг важен момент е избирането на първоначалните K клъстера. Идеята зад това е векторите с най-сходни характеристики да се струпат на едно място, за да може по-лесно да се опишат от съответната Гаусиана. Поради тази причина, избирането на произволно разбиване може да забави намирането на оптимален модел. Затова като първа стъпка се прави клъстеризация с K-means. За начални центрове на клъстерите се избират K -те най-отдалечени една от друга точки (като първата се избира на произволен принцип). Намереното по този начин решение е най-много с фактор логаритъм по-лошо от оптималното [AV07].

2.6 Резултати

Глава 3

Сигнал от EEG

3.1 Емоции в мозъка



Фигура 3.1.1: Дялове на мозъка

Нервната система се разделя на централна, състояща се от главен и гръбначен мозък, и периферна. Главната функция на нервната система е да контролира работата на тялото. Информацията от околната среда се събира чрез периферната система, предава се към централната, която взема решение за съответна реакция и изпраща обратно съобщение към периферната нервна система.

Невроните (нервни клетки) са базовата функционална единица на нервната система. Те са електрически възбудими и си предават информация посредством електрически сигнали, които се предават през специални връзки между тях - синапси. Електроенцефалографът измерва колебания в напрежението върху повърхността на скалпа чрез множество метални пластинки, наречени електроди, долепени до него от едната страна и свързани с кабел към уреда от другата. Сигналите, получени от Електроенцефалографа, се групират по (полезни) честотни ленти по следния начин:

- $(1 - 4\text{Hz})\delta$ вълни

Асоциират се с така наречения бавновълнов сън¹, тоест най-дълбоката фаза на съня.

- $(4 - 8\text{Hz})\theta$ вълни

Има два вида θ вълни. Едните се засичат в хипокампа (частта от мозъка, свързана с формирането на спомени) и произходът им не е съвсем ясен, има разнообразни изследвания с плъхове, които изследват този вид θ -ритъм. Другите се наричат корови и са свързани с фазата на оживено сънуване².

- $(8 - 12\text{Hz})\alpha$ вълни

Това е най-добре изучената честотна лента. Асоциират се със спокойно будно състояние със затворени очи.

- $(13 - 30\text{Hz})\beta$ вълни

β вълните се асоциират с нормално будно състояние.

- $(30 - 50\text{Hz})\gamma$ вълни (ниски)

Според проучвания, те се свързват с изострено внимание, работеща краткосрочна и дългосрочна памет.

Главното действие на централната нервна система се осъществява в мозъчната кора, която обхваща 40% процента от обема на главния мозък. Мозъчната кора се дели на няколко дяла:

- Челен дял

Този дял се свързва с всякакви когнитивни умения. Отговорен и за моторните функции - тоест с умението да движим мускулите си доброволно.

- Теменен дял

Той е отговорен за приемането и съчетаването на сетивна информация. Главната му функция се описва с действието „диференциране на две точки“ - това е възможността на мозъка да различи, че два отделни предмета, докосващи кожата, са наистина различни, а не един.

По този начин теменният дял участва в съставни действия като разпознаване на лица и сцени.

- Тулен дял

Тилният дял е отговорен за зрението - разпознава заобикалящата среда, детайли и цветове него. В тилния дял се определя „какво“, „къде“ и „как“ вижда човек.

- Слепоочен дял

Слепоочният дял се състои от структури, които са важни за дългосрочната памет. В него се намира хипокампа, който е главният дял отгова-

¹NREM - non-rapid eye movement sleep

²REM - rapid eye movement sleep. Също така чудесна музикална група

рящ за спомените. Амигдалата също е част от слепоочния дял, макар че се намира навътре. Смята се, че тя е отговорна за формиране на емоционален отговор, като е особено обвързана с негативните емоции.

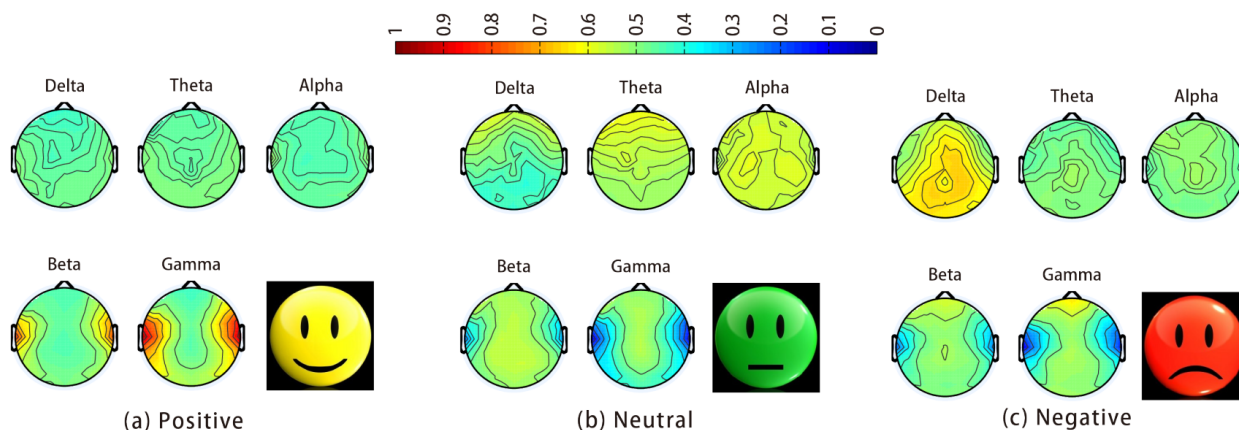
Освен на дялове, разгледаме деленето на мозъчната кора на ляво и дясно полукълбо.

При измерването на напрежението е енцефалограф, се откриват различни модели на емоциите, в зависимост от енергията на θ , β , α , β , γ вълните в определени дялове на мозъка.

Например по-голяма активация на α -вълни в дясната част на челния дял се свързва със стимули, които карат човек да „бяга“ (виж „бий се или бягай“), тоест отговаря за негативните емоции като „познуса“ и „страх“. По-голяма активност на α -вълни в ляво в челния дял се асоциира със позитивни стимули и емоции. Това означава, че асиметрията на челния дял говори за разлика във валентността. Смята се, че бета и гама вълните също носят информация за валентността на емоцията. Например, при позитивни емоции, гама вълните в слепоочния дял почти отсъстват, докато са с висока мощност при негативни емоции.

Активирането на амигдалата, както споменахме, е свързано с негативни емоции. Често я наричат „зона на страха“³.

Подобни закономерности могат да се видят на [Фигура 3.1.2](#). Топлограмата е част от изследване([ZZL16]), което цели да намери стабилни шаблони на емоции в ЕЕГ. Опитът се провежда върху едни и същи субекти в различен момент от време, като се разпознават четирите квадранта на активация-валентност пространството.



Фигура 3.1.2: Топлограма на емоциите

Следователно, бихме искали да изследваме енергията на θ , δ , α , β , γ вълните в различните дялове на мозъка.

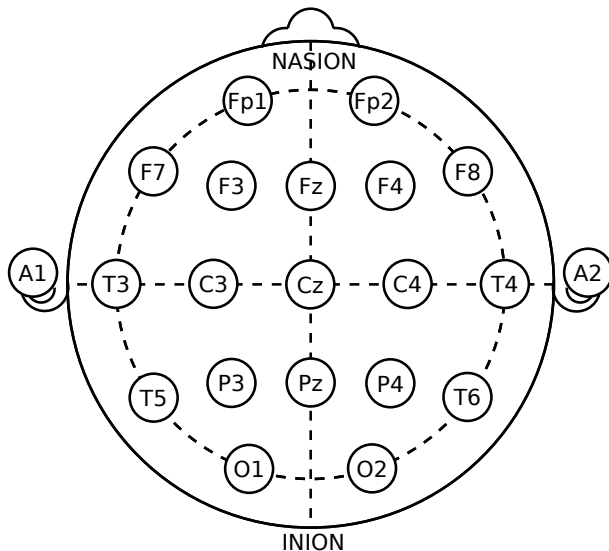
³поетично

3.2 Характеристики

3.2.1 Избор

Тук или трябва да отбележа, че се мерят енергиите в съответните банду-
тове, или ако ги правя противоположни да опиша това.

3.2.2 Извличане



Фигура 3.2.1: Система за разпреде-
ляне на електроди 10-20

Данните от енцефалографа се прочитат, като обработката на сигнала от
всеки електрод е следната:

1. Целият сигнал за даден електрод се прочита
2. Сигналът се разбира на фреймове с дължина $200ms$ и стъпка $150ms$. На
всеки фрейм се прави Хаминг прозорец и се намира Фурие преобразува-
нието
3. Модулум(TODO) на Фурие коефициентите се сумират в съответните
честотните ленти, отговарящи на дадена вълна. Тъй като се асоци-
ират със състояние на дълбок сън, θ вълните не се взимат предвид. В
такъв случай имаме четири честотни ленти: $4-8Hz(\delta)$, $8-12Hz(\alpha)$, $12-30Hz(\beta)$,
 $30-50Hz(\gamma)$

В крайна сметка за всеки от подадените файлове, съответстващи на елек-
троенцефалограма, получаваме за всеки електрод натрупаните стойнос-
ти в четирите честотни ленти. Ако броят на фреймовете е F , то имаме
 $F \times (19 \times 4)$ числа.

Електродите се нагласяят по
стандартната схема 10-20. Раз-
пределението им е показано на
Фигура 3.2.1. Електроди A1 и A2 се
наричат референтни. Те не са
разположени по скалпа и целта им
е да филтрират шума, като на-
рая осреднената им стойност
се изважда от стойностите на
останалите електроди автома-
тично. Електроенцефалографът
записва информация за всеки от
19-те електрода с честота 500Hz,
тоест за всяка секунда получа-
ваме 500 деветнадесет-мерни
вектора.

3.3 Класификация

3.4 Резултати

Глава 4

Двойната звезда

4.1 Резултати

Глава 5

Големият портрет

Приложение А

Фурие приложение

А.1 Дефиниция

Понякога е по-лесно да се моделира поведението на система, ако можем да кажем как ще се държи системата за всяка честота поотделно. Например, по този начин можем да нулираме всички честоти под или над дадена или да усилим определена честоти. За тази цел ни трябва еквивалентно представяне на даден сигнал във времето като съвкупност от синусоиди с различни честоти. Нека имаме дискретен във времето сигнал x , който е периодичен с фундаментален период T , измерен в секунди. Тоест,

$$x(t) = x(t + T)$$

Честотата, изразена в херци (периоди в секунда), се означава с $f_0 = \frac{1}{T}$ и означава "брой периоди в секунда". Нарича се фундаментална честота.

Честотата, изразена в радиани в секунда, се означава с $\omega_0 = f_0 2\pi$ и се нарича фундаментална ъглова честота.

Товава представянето, което търсим има вида:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{2k\pi it}{T}}, \quad (\text{A.1.1})$$

където $e^{2k\pi it/T}$ е сигнал с честота $\frac{k}{T}$.

Представянето от [Уравнение A.1.1](#) се нарича развиване в ред на Фурие за сигнала $x(t)$. Нека намерим вида на коефициентите a_k .

Умножаваме [Уравнение A.1.1](#) с $e^{-2n\pi it/T}$, тоест:

$$x(t)e^{-\frac{2n\pi it}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{2k\pi it}{T}} e^{-\frac{2n\pi it}{T}}$$

Ако интегрираме двете страни от 0 до фундаменталния период T , получаваме

$$\int_0^T x(t) e^{-\frac{2n\pi i t}{T}} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{2k\pi i t}{T}} e^{-\frac{2n\pi i t}{T}} dt$$

$$\int_0^T x(t) e^{-\frac{2n\pi i t}{T}} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T e^{\frac{2(k-n)\pi i t}{T}} dt \right]$$

Да разгледаме $\int_0^T e^{\frac{2(k-n)\pi i t}{T}} dt$

$$\int_0^T e^{\frac{2(k-n)\pi i t}{T}} dt = \int_0^T \cos\left(\frac{2(k-n)\pi t}{T}\right) dt + i \int_0^T \sin\left(\frac{2(k-n)\pi t}{T}\right) dt =$$

$$= \begin{cases} 1 \Big|_0^T + 0, & n = k \\ 0 + 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T, & n = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Което означава, че

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-\frac{2n\pi i t}{T}} dt$$

Това е вярно и за всеки друг интервал с дължина T :

$$a_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-\frac{2n\pi i t}{T}} dt \quad (\text{A.1.2})$$

Може да се покаже [OWN96], че редът на Фурие за сигнал $x(t)$ е сходящ и съответно коефициентите от [Уравнение A.1.2](#) са крайни, ако е изпълнено че:

$$\int_T |x(t)|^2 < \infty,$$

Още повече, ако сигналът x е дискретен и периодичен (какъвто е случаят, когато семплираме речев сигнал) и периодичен $x[n] = x[n + N]$, имаме само N различни стойности:

$$e^{\frac{2(k+N)\pi i n}{N}} = e^{\frac{2k\pi i n}{N}} e^{\frac{2N\pi i n}{N}} = e^{\frac{2k\pi i n}{N}}, \text{ тъй като } e^{2\pi i n} = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1$$

следователно са ни достатъчни само кои да е N последователни стойности:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{a}_k e^{\frac{2k\pi i n}{N}} \\ x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{\frac{2k\pi i n}{N}} \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Уравнение A.1.3 се нарича ред на Фурие за дискретен във времето сигнал.

Коефициентите можем да намерим по същия начин като в непрекъснатия случай, но използвайки сума, вместо интеграл:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i r n}{N}} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{\frac{2\pi i k n}{N}} e^{-\frac{2\pi i r n}{N}} = \\ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i r n}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i (k-r)n}{N}} \end{aligned}$$

и отново използваме, че

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i (k-r)n}{N}} &= \begin{cases} N, & k-r \equiv 0 \pmod{N} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \\ \Rightarrow a_r &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i r n}{N}} \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

което е изпълнено и за всеки друг интервал с дължина N . Ще използваме означенията $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ или $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} X(e^{i\omega_k})$,

където $a_k = X(e^{\frac{2\pi i k}{N}}) = X(e^{i\omega_k})$ за $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$

A.2 Свойства

- Изместване във времето

Ако $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$, то $x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k = a_k e^{-\frac{2\pi i n_0 k}{N}}$

Тъй като Уравнение A.1.4 е изпълнено за всеки интервал, то можем да изберем интервала $[n_0, T - 1 + n_0]$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{N-1+n_0} x[n - n_0] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=n_0}^{N-1+n_0} x[n - n_0] e^{-\frac{2\pi i k (n-n_0)}{N}} e^{-\frac{2\pi i k n_0}{N}} = \\ e^{-\frac{2\pi i k n_0}{N}} \sum_{\tau=0}^{T-1} x[\tau] e^{-\frac{2\pi i k \tau}{N}} &= e^{-\frac{2\pi i k n_0}{N}} a_k \end{aligned}$$

- Симетричност на комплексно спрегнатите за реален сигнал

Ако $x[n] = \bar{x}[n]$ е реален сигнал, за който $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$, то $\bar{a}_k = a_{-k}$

От уравнение [Уравнение A.1.4](#) следва, че:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

$$\bar{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{x[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{x[n]} e^{\frac{2\pi i k n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

$$\Rightarrow \bar{a}_k = a_{-k} = a_{N-k}$$

Това означава, че за реални сигнали са достатъчни първите $\frac{N}{2} + 1$ коефициенти, тъй като останалите са им комплексно спрегнати. Честотата, която отговаря на $a_{\frac{N}{2}}$ се нарича Найкуист честота.

A.3 Конволюция

Често ще се налага да използваме връзката между умножение, Фурие трансформация и операцията конволюция.

Дефиниция. (Дискретна конволюция)

Ако $f, g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$, дискретна конволюция (конволюционна сума) на f и g , наричаме $(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$

Ако f и g са периодични с период N , то $(f * g)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]g[n-k]$

Пример 1 (Теорема за конволюцията за периодични дискретни сигнали). Ако $f[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} F(e^{i\omega_k})$ и $g[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} G(e^{i\omega_k})$ и f, g са периодични с период N

$(f * g)[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} F(e^{i\omega_k}) \cdot G(e^{i\omega_k})$ Дуалното твърдение също е вярно за непрекъснатия вариант на конволюция.

$$F(e^{i\omega_k}) = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

$$G(e^{i\omega_k}) = b_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

Нека $h[n] = (f * g)[n]$ и $(f * g)[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} H(e^{i\omega_k})$.

Тогава:

$$\begin{aligned}
 H(e^{i\omega_k}) &= c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (f * g)[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] g[n-r] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] \sum_{n=0}^{N-1} g[n-r] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] \left[\sum_{n=0}^{N-1} g[n-r] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \right]
 \end{aligned}$$

Нека положим $y=n-r$

$$= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] \left[\sum_{y=-r}^{N-1-r} g[y] e^{-\frac{2\pi i k (y+r)}{N}} \right] = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] \left[\sum_{y=-r}^{N-1-r} g[y] e^{-\frac{2\pi i k y}{N}} \right] e^{-\frac{2\pi i k r}{N}}$$

Понеже $[-r, N-1-r]$ е интервал с дължина N е изпълнено:

$$= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] e^{-\frac{2\pi i k r}{N}} N G(e^{i\omega_k}) = N F(e^{i\omega_k}) \cdot G(e^{i\omega_k})$$

Приложение Б

Приложение за полюси и нули

Б.1 Дефиниция

Нека $z \in \mathbb{C}$. Видяхме, че предавателната функция \mathcal{H} на определени системи (и в частност филтри) има вида:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(z) &= \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \\ &= \frac{N(z)}{D(z)} = G \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_M)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_N)},\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

където $G = b_0/a_0$ и се нарича усилващ коефициент.

С β_i означаваме корените на уравнението $N(z) = 0$. Те се наричат нули на системата и $\lim_{z \rightarrow \beta_i} \mathcal{H}(z) = 0$

С α_i означаваме корените на уравнението $D(z) = 0$. Те се наричат полюси на системата и $\lim_{z \rightarrow \alpha_i} \mathcal{H}(z) = \infty$

Тъй като коефициентите на $N(z)$ и $D(z)$ са реални, нулите (и съответно полюсите) ще са са или реални, или са част от двойка комплексно спрегнати. Тоест, няма нула (или полюс), която да е комплексна, но да няма комплексно спрегнато из останалите нули (полюси).

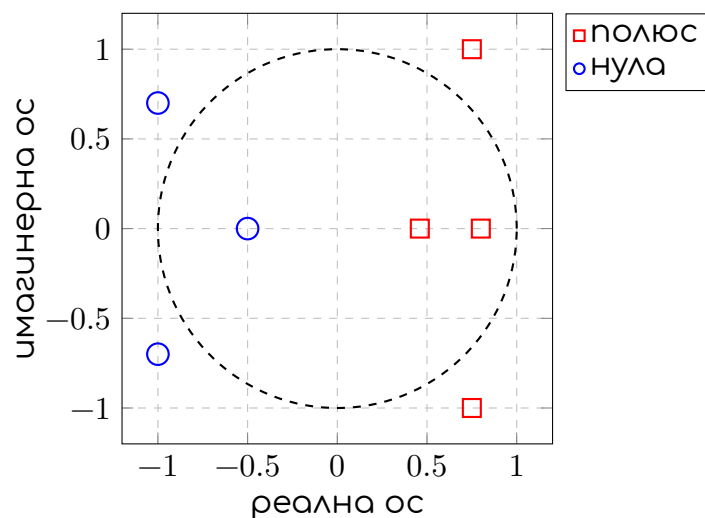
Това представяне е удобно, защото ни позволява да разбием \mathcal{H} на произведение от по-прости предавателни функции:

$$\mathcal{H} = G \underbrace{\frac{(z - \beta_1)}{(z - \alpha_1)}}_{\mathcal{H}_1(z)} \underbrace{\frac{(z - \beta_2)}{(z - \alpha_2)}}_{\mathcal{H}_2(z)} \dots \underbrace{\frac{(z - \beta_M)}{(z - \alpha_N)}}_{\mathcal{H}_K(z)}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1(z) \mathcal{H}_2(z) \dots \mathcal{H}_K(z),$$

където \mathcal{H}_i е произведение на няколко полюса и нули.

Тоест, достатъчно е да видим какви филтри се описват от трансферни функции, съдържащи една или две нули и полюси, за да можем направим извод за целия филтър \mathcal{H}



Фигура Б.1.1: Полюс-нула графика

Фигура Б.1.1 изобразява трансферна функция с три нули и четири полюса, от които една реална нула и два реални полюса. Нулите и полюсите, които не са реални, са комплексно спрегнати.

Б.2 Характеризация на филтри

Една система се описва изцяло от трансферната си функция, а всяка трансферна функция може да се представи като произведение на нули полюси. Следователно, анализирайки тези нули и полюси, можем да направим извод за действието на филтъра.

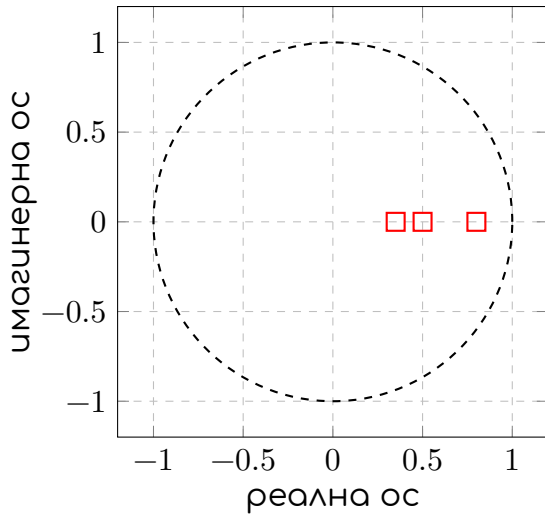
Нека имаме следния филтър от първи ред:

$$y[n] = b_0 x[n] + a_1 y[n-1]$$

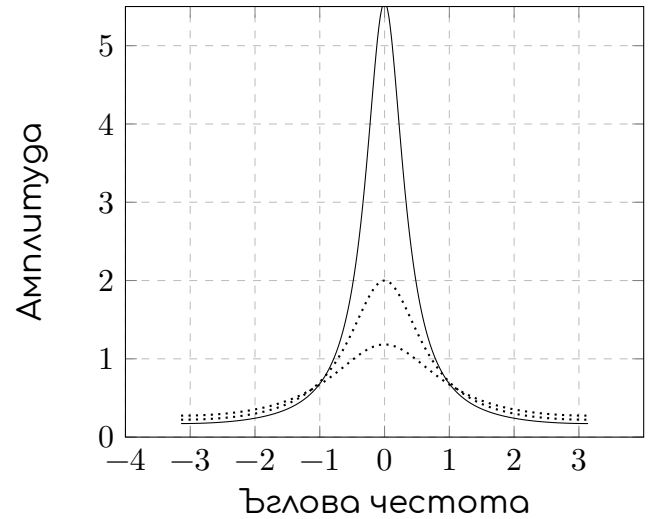
$$\mathcal{H} = G \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}},$$

$$G = b_0$$

Тъй като имаме само един полюс, то следва, че a_1 е реално число, тъй като няма как да е част от комплексно спрегната двойка. Това означава, че a_1 напълно описва вида на \mathcal{H} , а b_0 играе ролята на усилващ коефициент.

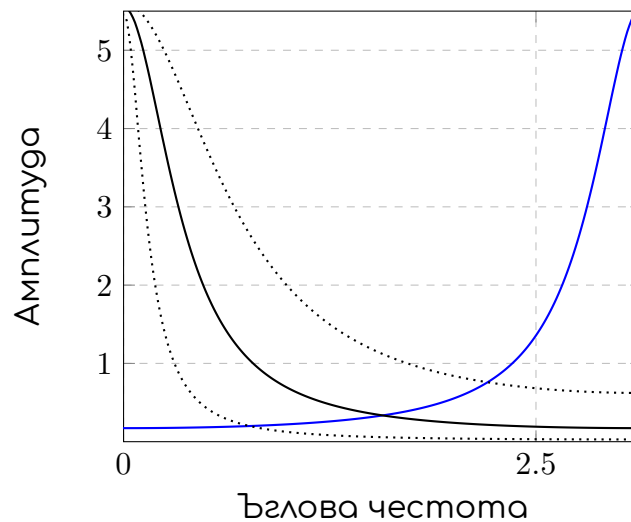


(а) Полус-нула графика за \mathcal{H}



(б) Графика на $g(\omega)$ за $a = 0.7, a = 0.5, a = 0.35$

Фигура Б.2.1: Действие на филтър от първи ред за $a = 0.35, a = 0.5, a = 0.7$



Фигура Б.2.2: Действие на филтър от първи ред за различни стойности на a и b

Понеже a_1 е реално число, винаги ще лежи на реалната ос, както е показано на полюс-нула графиката на [Фигура Б.2.2](#)

Нека разгледаме \mathcal{H} в честотния домейн: $\mathcal{H}(e^{i\omega}) = \frac{b_0}{1 - a_1 e^{-i\omega}}$, където ω е ъглова честота, измерена в радиани. Можем изразим \mathcal{H} като функция на ω :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(e^{i\omega}) &= \frac{b_0}{1 - a_1 e^{-i\omega}} = \frac{b_0}{1 - a_1 \cos \omega + ia_1 \sin \omega} = \frac{b_0(1 - a_1 \cos \omega - ia_1 \sin \omega)}{1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2} \\ &= \frac{b_0(1 - a_1 \cos \omega)}{1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2} + i \frac{-b_0 a_1 \sin \omega}{1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2} \end{aligned}$$

Нека с $g(\omega)$ означим модула на \mathcal{H}

$$g(\omega) = \frac{b_0^2(1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2)}{(1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2)^2} = \frac{b_0^2}{1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2}$$

На [Фигура Б.2.2](#) се вижда графиката на $g(\omega)$ за различни стойности на a_1 и b_0 . Този вид филтри се наричат **резонатори**, тъй като честотите във върха на графиката ще се усилят. Резонаторите се описват главно чрез своята **амплитуда** - височината на максимума, **честота** - къде е върхът върху честотната ос, **честотна лента** - колко е широка графиката, което определя колко честоти ще се усилят.

В случая на филтър от първи ред, амплитудата и честотната лента се определят от a_1 и b_0 , а върха на графиката винаги ще е в 0. Тоест, този вид филтри могат да усилят само честотите около 0.

При $a_1 > 0$, филтрите се наричат **нисочестотни**, защото пропускат ниските честоти и задържат високите (с черно на [Фигура Б.2.2](#)).

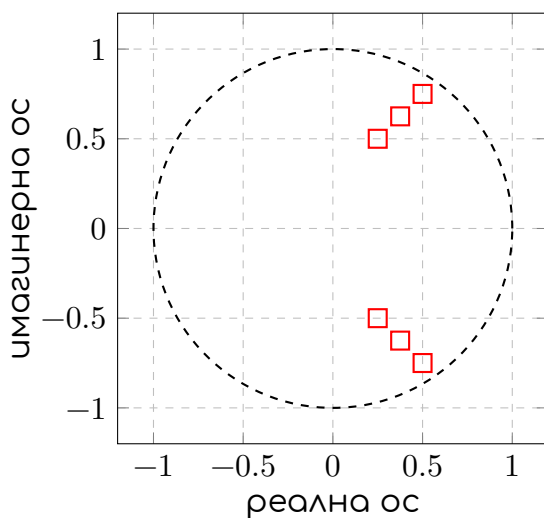
При $a_1 < 0$, филтрите се наричат **височестотни** (в синьо на [Фигура Б.2.2](#))

За да се премести пикът на функцията нанякъде по честотната ос извън нулата, трябва a_1 да е комплексно. Ако трансферната функция има само един полюс, a_1 винаги е реално, затова ни трябва поне една комплексно спрегната двойка. Нека разгледаме филтър от втори ред.

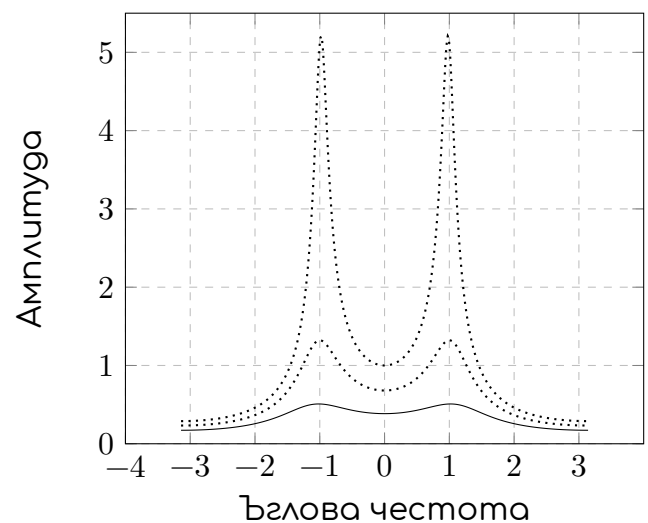
$$y[n] = b_0 x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$$

$$\mathcal{H}(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

$$\mathcal{H}(z) = G \frac{1}{(1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-1})}$$

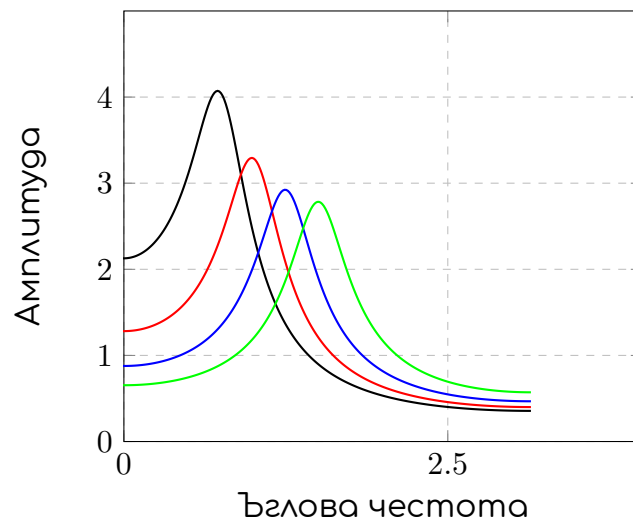


(а) Полус-нула графика за \mathcal{H}

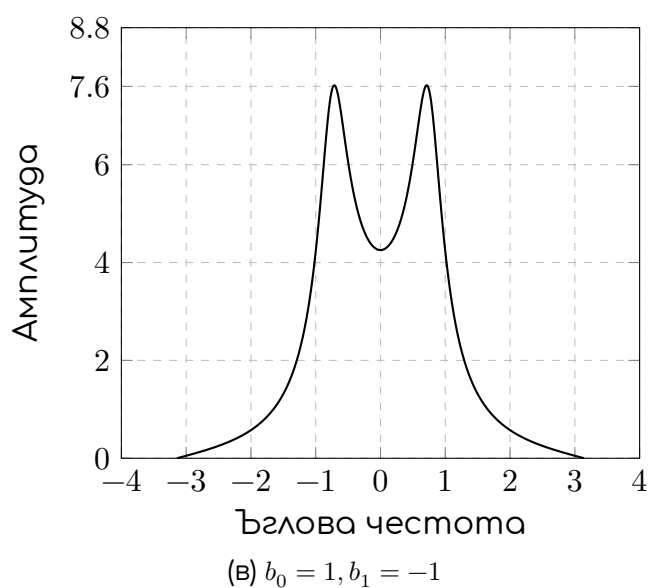
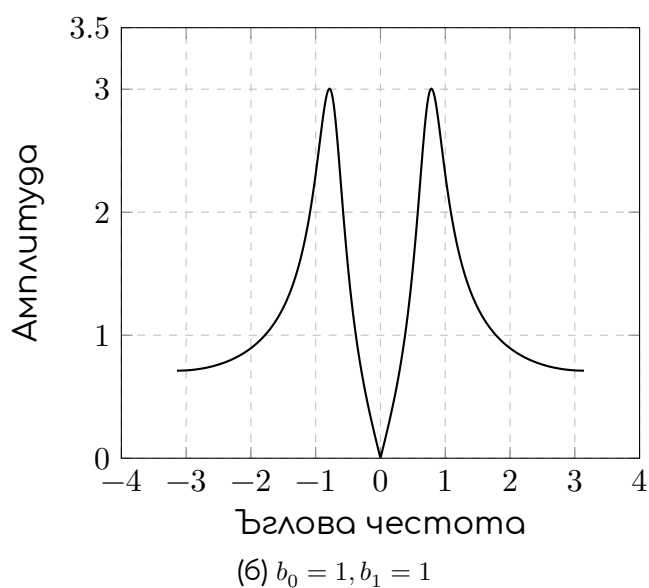
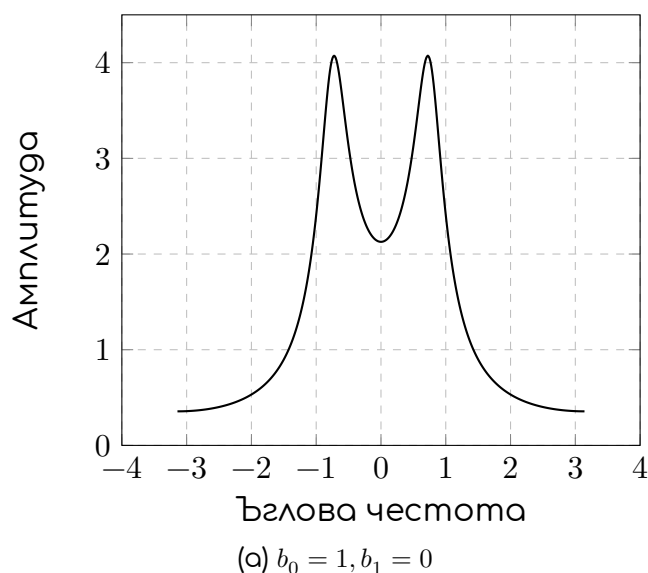


(б) Графика на $g(\omega)$ в $-\pi, \pi$

Фигура Б.2.3: Действие на филтър от втори ред за $\alpha_1 = (0.25 + 0.5i), (0.5 + 0.75i), (0.375 + 0.625i)$



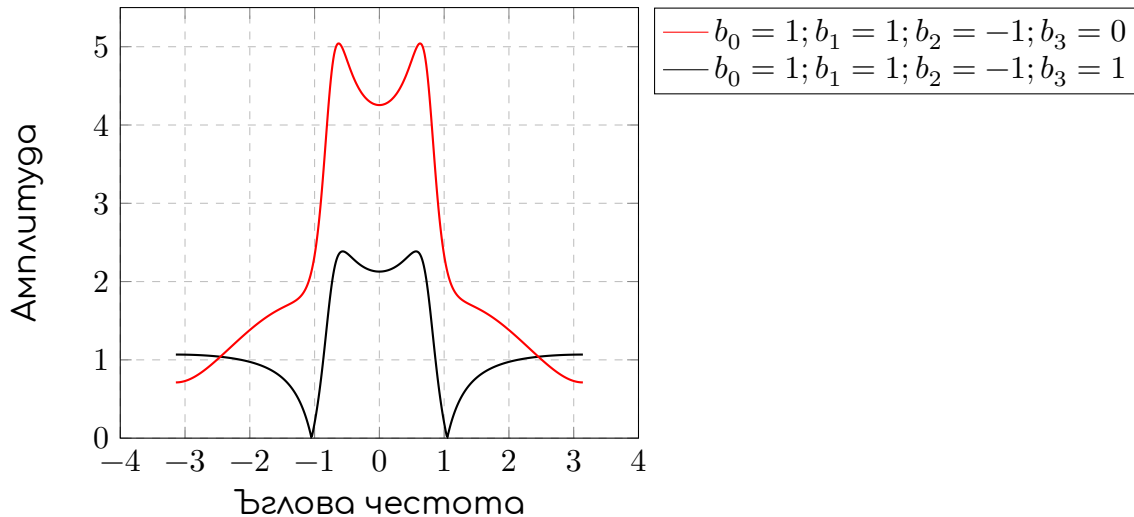
Фигура Б.2.4: Графика на g с отдалечаващи се от реалната ос полюси



Фигура Б.2.5: Действие на филтър от втори ред за различни стойности на b и $a_1 = 1.17, a_2 = -0.64$

Местенето на полюсите по-далеч от реалната ос, раздалечава върховете по честотната лента, както се вижда на [Фигура Б.2.4](#)

Видът на резонатора (тоест честотна лента, честота и амплитуда), се определят главно от полюсите. Добавянето на нули също влияе на вида на филтъра, както може да се види от [Фигура Б.2.5](#). В единият случай се добавя нула в нулата, в другия - в края на спектъра.



Фигура Б.2.6: Действие на филтър от вида $\mathcal{H}(e^{i\omega}) = \frac{b_0 - b_1 e^{-i\omega} - b_2 e^{-2i\omega} - b_3 e^{-3i\omega}}{1 - a_1 e^{-i\omega} - a_2 e^{-2i\omega}}$ за $a_1 = 1.17, a_2 = -0.64$

Добавянето на допълнителни нули може да се види на [Фигура Б.2.6](#). Тези нули се наричат **антирезонанси**.

Използвайки вида на филтрите от първи и втори ред, можем да разложим даден сложен филтър \mathcal{H} на произведение от по-прости филтри от първи и втори ред, чиито вид може по-лесно да се моделира чрез промяна на коефициентите. След това съчетаването им е просто произведение в честотния домейн, а свойствата на Фурие преобразуванията ни дават вида и във времевия домейн.

Приложение В

Приложение към Сигнал от реч

Пример 2. $\mathcal{V}(z)$ за $N = 2$ и произволно τ_i

Имаме:

$$U_k = Q_k U_{k+1} \text{ за}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} U_k^+(z) \\ U_k^-(z) \end{bmatrix}$$
$$Q_k = \begin{bmatrix} \frac{z^{\tau_k}}{1+r_k} & \frac{-r_k z^{\tau_k}}{1+r_k} \\ \frac{-r_k z^{-\tau_k}}{1+r_k} & \frac{z^{-\tau_k}}{1+r_k} \end{bmatrix} = z^{\tau_k} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r_k} & \frac{-r_k}{1+r_k} \\ \frac{-r_k z^{-2\tau_k}}{1+r_k} & \frac{z^{-2\tau_k}}{1+r_k} \end{bmatrix} = z^{\tau_k} \hat{Q}_k$$

Търсим: $V(z)$

Доказателство:

$$\frac{1}{\mathcal{V}(z)} = \frac{U_G(z)}{U_L(z)} = \left[\frac{2}{1+r_G}, -\frac{2r_G}{1+r_G} \right] \prod_{i=1}^N Q_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \quad (2.2.23)$$

$$\begin{aligned}
&= z^{(\tau_1+\tau_2)} \begin{bmatrix} \frac{2}{1+r_G}, & -\frac{2r_G}{1+r_G} \end{bmatrix} \hat{Q}_1 \hat{Q}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= z^{(\tau_1+\tau_2)} \begin{bmatrix} \frac{2}{1+r_G}, & -\frac{2r_G}{1+r_G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r_1} & \frac{-r_1}{1+r_1} \\ \frac{-r_1 z^{-2\tau_1}}{1+r_1} & \frac{z^{-2\tau_1}}{1+r_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r_2} & \frac{-r_2}{1+r_2} \\ \frac{-r_2 z^{-2\tau_2}}{1+r_2} & \frac{z^{-2\tau_2}}{1+r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= 2z^{(\tau_1+\tau_2)} \begin{bmatrix} \frac{1+r_G r_1 z^{-2\tau_1}}{(1+r_G)(1+r_1)}, & -\frac{r_1+r_G z^{-2\tau_1}}{(1+r_G)(1+r_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r_2} & \frac{-r_2}{1+r_2} \\ \frac{-r_2 z^{-2\tau_2}}{1+r_2} & \frac{z^{-2\tau_2}}{1+r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= 2z^{(\tau_1+\tau_2)} \begin{bmatrix} \frac{1+r_G r_1 z^{-2\tau_1} + r_1 r_2 z^{-2\tau_2} + r_G r_2 z^{-2(\tau_1+\tau_2)}}{(1+r_G)(1+r_1)(1+r_2)}, & -\frac{r_2+r_G r_1 r_2 z^{-2\tau_1} + r_1 z^{-2\tau_2} + r_G z^{-2(\tau_1+\tau_2)}}{(1+r_G)(1+r_1)(1+r_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \\
&\mathcal{V}(z) = \frac{0.5z^{-(\tau_1+\tau_2)}(1+r_G) \prod_{i=1}^2 (1+r_i)}{1+r_G r_1 z^{-2\tau_1} + r_1 r_2 z^{-2\tau_2} + r_G r_2 z^{-2(\tau_1+\tau_2)}}
\end{aligned}$$

Бележка: Тък като r_G, r_1, r_2 са ненулеви, то за да получим максимална степен, без да имаме нулеви коефициенти, трябва:

$$\begin{cases} 2\tau_1 = 1 \\ 2\tau_2 = 1 \\ 2(\tau_1 + \tau_2) = 2 \end{cases} \quad (\text{B.0.1})$$

Тоест $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2}$

Пример 3. $\mathcal{V}(z)$ за $N = 2$ и произволно $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2}$

Доказателство:

Заместваме $\tau_i = \frac{1}{2}$ в [Пример 2](#)

$$\mathcal{V}(z) = \frac{0.5z^{-1}(1+r_G) \prod_{i=1}^2 (1+r_i)}{1+(r_G r_1 + r_1 r_2)z^{-1} + r_G r_2 z^{-2}}$$

Приложение Г

Приложение към Класификация

Пример 4. $\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = 2Ax$, ако $x \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, а A е диагонална.

Да разгледаме производната по някоя от координатите - x_k

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^T A x}{\partial x_k} &= \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial (x_1 a_{11}, x_2 a_{22}, \dots, x_m a_{mm}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial (x_1^2 a_{11} + x_2^2 a_{22} + \dots + x_m^2 a_{mm})}{\partial x_k} = 2x_k a_{kk} \end{aligned}$$

Това означава, че:

$$\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = (2x_1 a_{11}, 2x_2 a_{22} \dots 2x_m a_{mm}) = 2Ax$$

Пример 5. Ако A е диагонална матрица, $A = (a_{ii})_{i=1}^m$, $\frac{\partial |A|}{\partial a_{ii}} = \frac{|A|}{a_{ii}}$

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ii}} = \frac{\partial \left(\prod_{i=1}^m a_{ii} \right)}{\partial a_{ii}} = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_{mm} = \frac{\prod_{i=1}^m a_{ii}}{a_{ii}} = \frac{|A|}{a_{ii}}$$

Нека $L(\pi, \mu, \Sigma) = \sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i | \mu_k, \Sigma_k) \right) + \lambda \left(\sum_{k=1}^K \pi_k - 1 \right)$ и

$$\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) = \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} (x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j) \right)}{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}},$$

Твърдение 1. Решението на $\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \mu_j} = 0$ има вида $\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}$

Доказателство:

$$0 = \frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \mu_j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\pi_j \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \mu_j}}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

Използвайки [Пример 4](#), можем да намерим производната на $\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)$ по μ_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \mu_j} &= \partial \left[\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)\right)}{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}} \right] / \partial \mu_j \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)\right)}{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}} \left(-\frac{1}{2} 2 \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j) (-1) \right) \\ &= \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j) \end{aligned}$$

Следователно:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \mu_j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\pi_j \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \mu_j}}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] \\ &\leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) \cancel{\Sigma_j^{-1}} x_i}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) \cancel{\Sigma_j^{-1}} \mu_j}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] \end{aligned}$$

Нека означим $\gamma_{ij} = \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)}$. Тогава имаме:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \gamma_{ij} x_i &= \mu_j \sum_{i=1}^N \gamma_{ij} \\ \mu_j &= \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}} \end{aligned}$$

Твърдение 2. Решението на $\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \Sigma_j} = 0$ има вида $\Sigma_j = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{js})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}, & t == s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Доказателство:

$$0 = \frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \Sigma_j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\pi_j \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \Sigma_j}}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

$\Sigma_j = (\sigma_{ij})_{m \times m}$ и $\sigma_{ij} = 0$, ако $i \neq j$. Първо смятаме:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial [(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)]}{\partial \sigma_{ts}} = \\ & \frac{\partial \left((x_{i1} - \mu_{j1}), (x_{i2} - \mu_{j2}), \dots, (x_{im} - \mu_{jm}) \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{mm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_{i1} - \mu_{j1}) \\ (x_{i2} - \mu_{j2}) \\ \vdots \\ (x_{im} - \mu_{jm}) \end{pmatrix} \right)}{\partial \sigma_{ts}} = \\ & \frac{\partial \left(\frac{(x_{i1} - \mu_{j1})^2}{\sigma_{11}} + \frac{(x_{i2} - \mu_{j2})^2}{\sigma_{22}} + \dots + \frac{(x_{im} - \mu_{jm})^2}{\sigma_{mm}} \right)}{\partial \sigma_{ts}} = \\ & = \begin{cases} 0, & t \neq s \\ -\frac{(x_{it} - \mu_{jt})^2}{\sigma_{tt}^2}, & t = s \end{cases} \end{aligned}$$

Да разгледаме производната по произволен елемент σ_{ts} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \sigma_{ts}} &= \frac{\partial \left[\frac{\exp(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j))}{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}} \right]}{\partial \sigma_{ts}} \\ &= \frac{\delta \left[\exp(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)) \right]}{\partial \sigma_{ts}} \frac{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} - \exp(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j))}{\partial \sigma_{ts}} \frac{\delta \left[\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} \right]}{\partial \sigma_{ts}} \\ &= \frac{\exp(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)) \frac{1}{2} \frac{(x_{it} - \mu_{jt})^2}{\sigma_{tt}^2} \sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}}{\left(\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} \right)^2} \\ &\quad - \frac{\exp(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)) \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} \sigma_{ts}}}{\left(\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} \right)^2} = \\ &= \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) (x_{it} - \mu_{jt})^2}{2\sigma_{tt}^2} - \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{2\sigma_{tt}} = \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{2\sigma_{tt}^2} [(x_{it} - \mu_{jt})^2 - \sigma_{tt}] \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \sigma_{tt}^j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\pi_j \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \sigma_{tt}^j}}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) [(x_{it} - \mu_{jt})^2 - \sigma_{tt}]}{2\sigma_{tt}^2 \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)}$$

\longleftrightarrow

$$\sum_{i=1}^N \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) (x_{it} - \mu_{jt})^2}{2\cancel{\sigma_{tt}^2} \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} = \sum_{i=1}^N \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) \sigma_{tt}}{2\cancel{\sigma_{tt}^2} \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)}$$

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{jt})^2 = \sigma_{tt} \sum_{i=1}^N \gamma_{ij}$$

$$\sigma_{tt} = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{jt})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}$$

$$\Sigma_j = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{i1} - \mu_{j1})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{i2} - \mu_{j2})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{im} - \mu_{jm})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{js})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}, & t == s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Твърдение 3. Решението на $\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \pi_j} = 0$ има вида $\pi_j = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}{N}$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \pi_j} = \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^n \log \left(\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i | \mu_k, \Sigma_k) \right) + \lambda \left(\sum_{k=1}^K \pi_k - 1 \right) \right]}{\partial \pi_j} = \\
 &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] + \lambda = \pi_j \left(\sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] + \lambda \right) \\
 &\leftrightarrow \\
 -\lambda \pi_j &= \pi_j \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] \\
 -\lambda \sum_{j=1}^K \pi_j &= \sum_{j=1}^K \pi_j \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]
 \end{aligned}$$

Използваме, че $\sum_{j=1}^K \pi_j = 1$ и разменяме местата на сумите вдясно:

$$-\lambda = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sum_{j=1}^K \pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] = \sum_{i=1}^N 1$$

$$\lambda = -N$$

Заместваме $\lambda = -N$ в

$$\begin{aligned}
 -\lambda \pi_j &= \pi_j \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] \\
 N \pi_j &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] \\
 N \pi_j &= \sum_{i=1}^N \gamma_{ij} \leftrightarrow \pi_j = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}{N}
 \end{aligned}$$

Библиография

- [AV07] David Arthur u Sergei Vassilvitskii. "K-means++: the advantages of careful seeding". B: In Proceedings of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. 2007.
- [Bis06] Christopher M. Bishop. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006.
- [EKK] Moataz El Ayadi, Mohamed S. Kamel u Fakhri Karray. "Survey on Speech Emotion Recognition: Features, Classification Schemes, and Databases". B: Pattern Recogn. (). DOI: [10.1016/j.patcog.2010.09.020](https://doi.org/10.1016/j.patcog.2010.09.020).
- [KNS09] Shashidhar Koolagudi, Sourav Nandy u K Sreenivasa Rao. "Spectral Features for Emotion Classification". B: anp. 2009, c. 1292—1296. DOI: [10.1109/IADCC.2009.4809202](https://doi.org/10.1109/IADCC.2009.4809202).
- [OWN96] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky u S. Hamid Nawab. Signals & Systems (2Nd Ed.) Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN: 0-13-814757-4.
- [Qua01] Thomas Quatieri -. Discrete-time Speech Signal Processing: Principles and Practice. First. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press, 2001. ISBN: 9780132442138.
- [RS78] L. Rabiner u R. Schafer. Digital Processing of Speech Signals. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1978.
- [Tay09] Paul Taylor. Text-to-Speech Synthesis. 1st. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2009. ISBN: 0521899273, 9780521899277.
- [ZZL16] Wei-Long Zheng, Jia-Yi Zhu u Bao-Liang Lu. "Identifying Stable Patterns over Time for Emotion Recognition from EEG". B: IEEE Transactions on Affective Computing (ян. 2016). DOI: [10.1109/TAFFC.2017.2712143](https://doi.org/10.1109/TAFFC.2017.2712143).
- [Тал66] Димитър Талев. Гласовете ви чувам. 1966.