

# Дипломна работа

Диана Генева <dageneva@qtrp.org>

2019

# Съдържание

1	Нулева зона	3
2	Сигнал от реч	4
2.1	Физика на тъгата	4
2.2	Приближаване с тръби	7
2.2.1	Преминаване от една тръба в друга	9
2.2.2	Ограничения при устните	12
2.2.3	Ограничения при глотиса	13
2.2.4	Общ вид на $\mathcal{V}$	15
2.2.5	Общ вид на $\mathcal{X}$	17
2.2.6	Общ вид на $\mathcal{G}$	17
2.2.7	Общ вид на $\mathcal{Y}$	18
2.3	Представяне със системи	19
2.4	Характеристики	21
2.4.1	Избор	21
2.4.2	Извличане	23
2.5	Класификация	27
2.6	Данни и резултати	29
3	Сигнал от EEG	32
3.1	Емоции в мозъка	32
3.2	Характеристики	35
3.2.1	Избор	35
3.2.2	Извличане	35
3.3	Класификация	35
3.4	Данни и резултати	36
4	Двойната звезда	42
4.1	Съчетаване чрез конкатенация на характеристичните вектори	42
4.1.1	Описание	42
4.1.2	Резултати	42
4.2	Съчетаване чрез AdaBoost	43
4.2.1	Описание	43
4.2.2	Резултати	44
5	Големият портрет	46
A	Фурие приложение	47
A.1	Дефиниция	47

A.2	Свойства .....	49
A.3	Конволюция .....	50
Б	Приложение за полюси и нули .....	52
Б.1	Дефиниция .....	52
Б.2	Характеризация на филтри .....	53
В	Приложение към Сигнал от реч .....	58
Г	Приложение към Класификация .....	60
	Библиография .....	66

# Глава 1

## Нулева зона

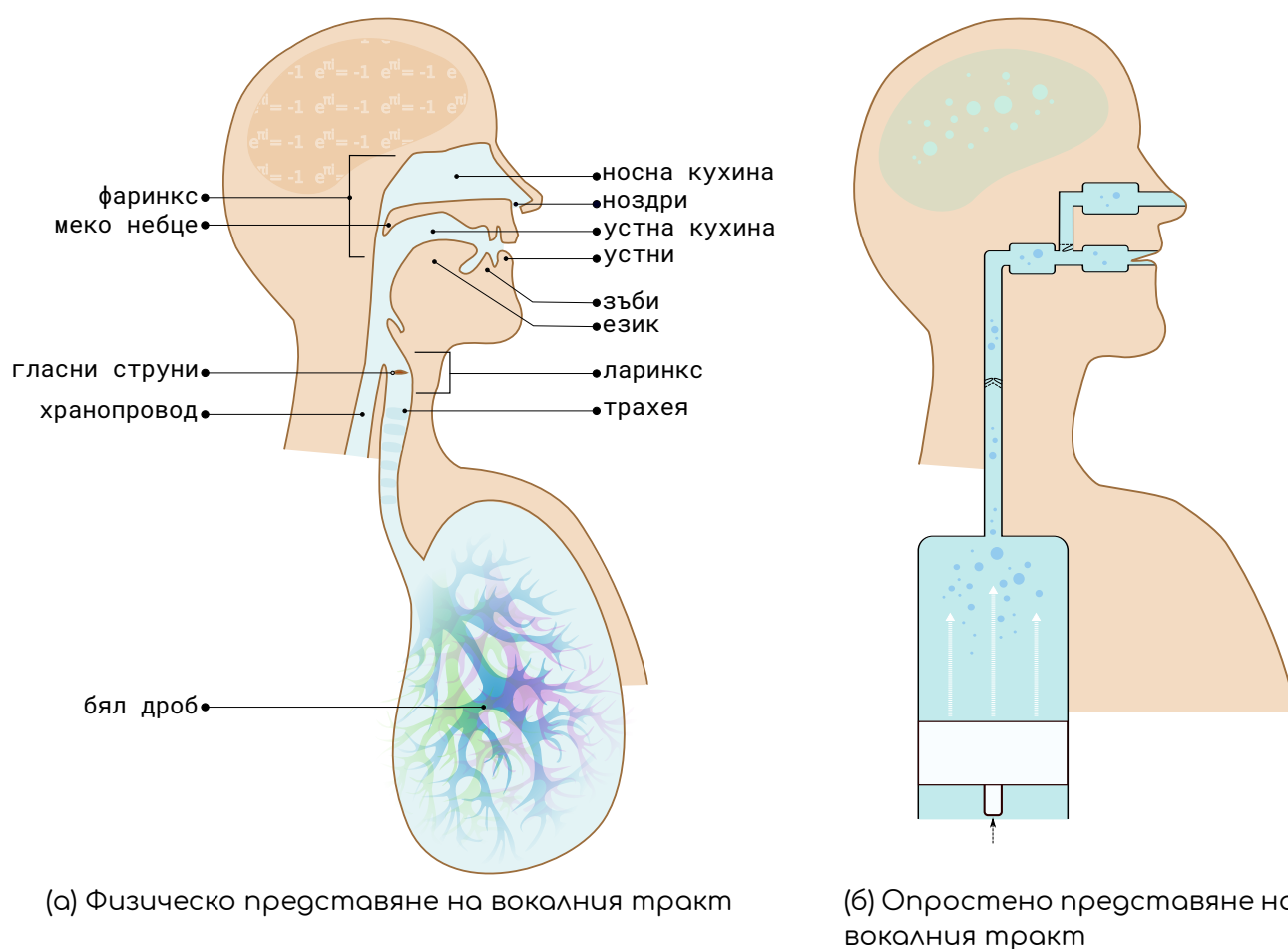
Бла, бла, бла, аз съм толкова емоционална. Не знам



# Глава 2

## Сигнал от реч

### 2.1 Физика на тъгата



Фигура 2.1.1: Система за производство на реч

Вокален тракт е общото название на кухините над ларинкса (гръкляна), през които минава въздухът при произвеждане на реч. При хората той се състои от ларингеална кухина (съдържаща ларинкса и гласните струни), фаринкс, устна кухина и носна кухина, както може да се види на Фигура 2.1.1а. Вокалният тракт е отговорен за генериране на различни звуци, като текущата конфигурация на отделните му компоненти определя какъв ще бъде самият

звук. Според [KNS09], освен от вида на този звук, конфигурацията на вокалния тракт зависи и от емоцията, която изпитва говорещият. Смята се, че емоционалното състояние е пряко свързано с определени промени в организма, например ускорено дишане или мускулно напрежение, а тези промени се отразяват върху произведената реч. Често дори ефектите от тези промени са станали нарицателно за самата емоция. Из българската литература се срещат изречения като „страхът стискаше гърлото, задушаваше гласа“ [Тал66], а изрази като „буца в гърлото“ или „пресъхнало гърло“ са навлезли в разговорната реч като асоциации на „тъга“. Тъй като изпитваната емоция влияе пряко на конфигурацията на вокалния тракт, бихме искали да извлечем характеристики, които описват тази конфигурация.

Да разгледаме по-подробно Фигура 2.1.16, която описва цялостна система за производство на реч в по-опростен вариант. Речта, всъщност, представлява просто акустичната вълна, получена на края на системата - устни и ноздри - в следствие на изтласквания от белия дроб въздух.

Белият дроб работи като енергиен източник за тази системата - въздушният поток, получен при свиването му от междуребрните мускули и диафрагмата, се пропъгва нагоре по трахеята и през глотиса (отвора между гласните струни).

Действието на глотиса може да се види най-ясно при произнасяне на гласна. Гласните струни пропускат пропъгвания въздух. Тъй като глотисът е стеснение, налягането в него в този момент е по-малко от това в който и да е от двата му края. Съгласно закона на Бернули в някакъв момент то става толкова ниско, че позволява на гласните струни да се затворят. В следствие се натрупва налягане зад гласните струни заради тласкания от белия дроб въздух, което в някакъв момент ги принуждава да се отворят, и цикълът се повтаря отначало. В резултат се получава осцилиране на гласните струни. Честотата на отварянето и затварянето зависи от анатомични особености като еластичността и големината на гласните струни, налягането в белия дроб и други.

При мъжете тази честота е средно 125 Hz, а при жените - 210 Hz.

Акустичната вълна, която се получава в следствие на осцилацията, преминава през вокалния тракт, където се завихря при срещане на прегради като устни и зъби и в крайна сметка напуска системата през някой от отворите.

При този процес се губи част от енергията поради различни фактори като съпротивлението на въздуха и поглъщането на вълната от меките и еластични стени на вокалния тракт.

В зависимост от начина, по който вълната напуска системата, можем да класифицираме произведените звуци по следния начин:

1. Озвучени

При тези звуци гласните струни осцилират квази-периодично.

2. Проходни (фрикативни)

При образуването на проходни звуци, вълната среща преграда по пътя

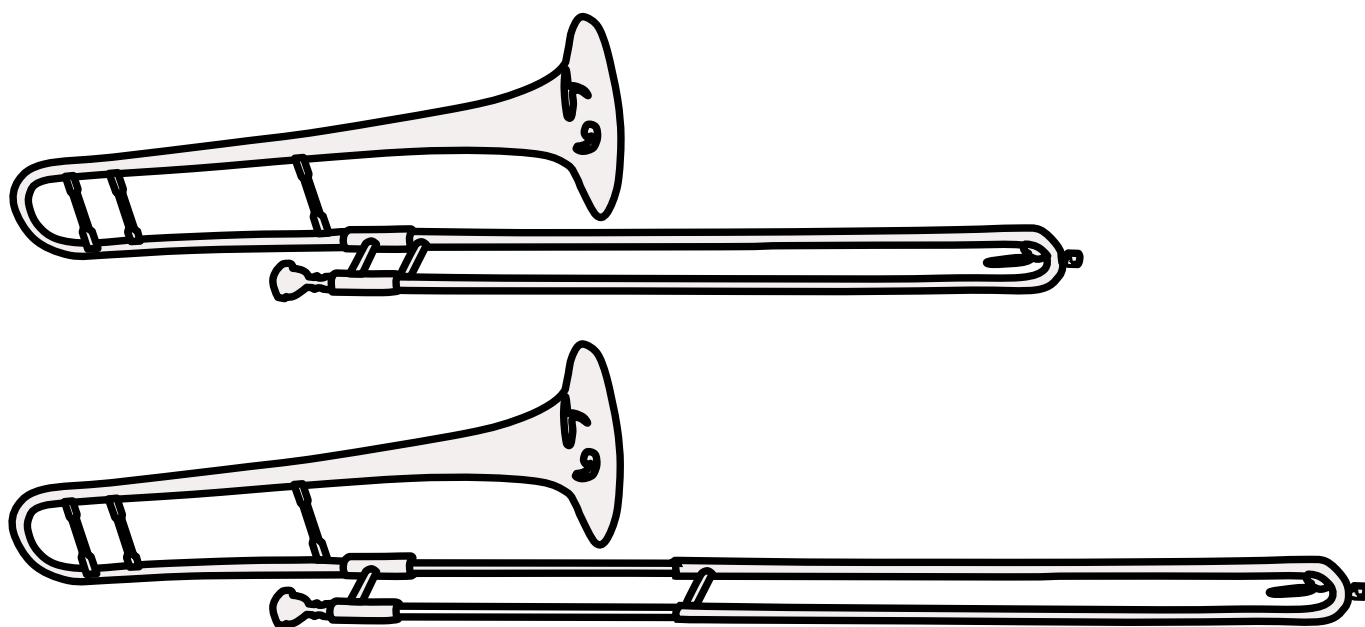
си (като например зъби, устни) и се получава турбуленция, при опита да бъде избутан въздухът през презградата.

### 3. Презградни (експлозивни)

Те се получават при напълно затворена презградата, за която се натрупа налягане, което се освобождава рязко чрез отваряне на презградата.

Обикновено речта, която произнасяме, е разделена на думи, като отделните звукови единици в тях се наричат фонemi. За да се произнесе определена дума, вокалният тракт трябва да застане в правилната конфигурация за следващата фонема в думата. Когато вокалният тракт се наглася за дадена фонема, настъпват промени, като например стените на устната кухина се приближават или мекото небце, служещо като клапа към носната кухина, се затваря. Може да се усети, че при изговаряне на „а“ отворът е много по-голям, отколкото при произнасяне на „у“. Тази промяна влияе върху спектралните свойства на вокалният тракт.

Нека за улеснение си представим, че сме моделирали вокалният тракт с последователност от тръби, за да се абстрахираме от сложната му физическа структура. Тогава при смяна на фонемата, се променят дължината и диаметърът на тръбите. Това влияе на времето, за което акустичната вълна ще стигне до края на тръбата и съответно на честотата, на която ще се получи резонанс. Тоест в зависимост от конфигурацията, ще се усилят или затихнат различни честоти, спрямо резонанса. Това свойство се нарича честотна пропускливост. Идеята лесно се вижда при свиренето на духови инструменти.



Фигура 2.1.2: Тромбон

При тях по някакъв начин се променя изходът на вълната, например отпушване и запушване на дупки, и съответно честотата, на която се получава резонанс, тъй като пътят на вълната е скъсен или удължен. Както може да се види на [Фигура 2.1.2](#), при тромбона буквално се сменя дължината на тръбата, което означава, че на вълната ѝ трябва повече време, за да се отрази,

тоест резонансът е на по-малка честота и съответно изходящият звук е по-нисък.

Това значи, че ако знаем как се пропазира вълната по отделните тръби на вокалния тракт и какви са спектралните свойства накрая, можем да съдим за текущата му конфигурация. В такъв случай, за да изследваме подлежащата емоция при реч е нужно да изследваме тези свойства в достатъчно кратък отрязък от време, в който конфигурацията е статична. Обикновено се приема, че този период е между 10 и 20 милисекунди ([RS78, стр. 98]).

В следващия раздел ще разгледаме как можем да моделираме вокалния тракт с модела на тръбите, за да можем да извлечем спектралните му свойства.

## 2.2 Приближаване с тръби

В тази глава ще разгледаме в неголяма дълбочина построяване на модел с тръби. За повече подробности, може да се проследи подробното изложение в [RS78] или по-сбитото в [Tay09].

За да извлечем спектралните свойства на вокалния тракт<sup>1</sup>, трябва да моделираме системата за производство на реч. Освен това искаме да можем да отделим характеристиките на вокалния тракт от тези на останалите части на системата. Един такъв модел се получава с модела на тръбите, който ще бъде описан в този раздел.

За улеснение, нека разгледаме конкретна конфигурация. Например тази, при произнасянето на фонемата „ъ“, тъй като е възможно най-проста. В този случай глотисът трепти, устата е отворена, а клапата към носната кухина е затворена.

Тъй като „ъ“ е гласна, което е озвучен тип звук, глотисът  $g$  трепти псевдопериодично, после вълната преминава и се променя от вокалния тракт  $v$  и накрая излиза и се пречупва през устните  $r$ . Това означава, че ако глотисът има даден спектър, то вокалният тракт го променя (филтрира го), като усилва дадени честоти и заглушава други, до получаване на нов спектър. Устните допълнително филтрират спектъра. В крайна сметка получаваме нов сигнал, чийто спектър е резултат от умножението на спектрите на  $g$ ,  $v$  и  $r$ .

Тоест, ако  $g \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} G(z)$ ,  $v \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} V(z)$ ,  $r \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} R(z)$ , а новият сигнал е  $y$  с  $y \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} Y(z)$ , е изпълнено, че

$$Y(z) = G(z)V(z)R(z),$$

където  $z = e^{i\omega_k}$  е прост сигнал с ъглова честота  $\omega_k$ , а  $\xleftrightarrow{\mathcal{FS}}$  обозначава Фурие преобразуване, което е въведено в [Приложение А](#).

---

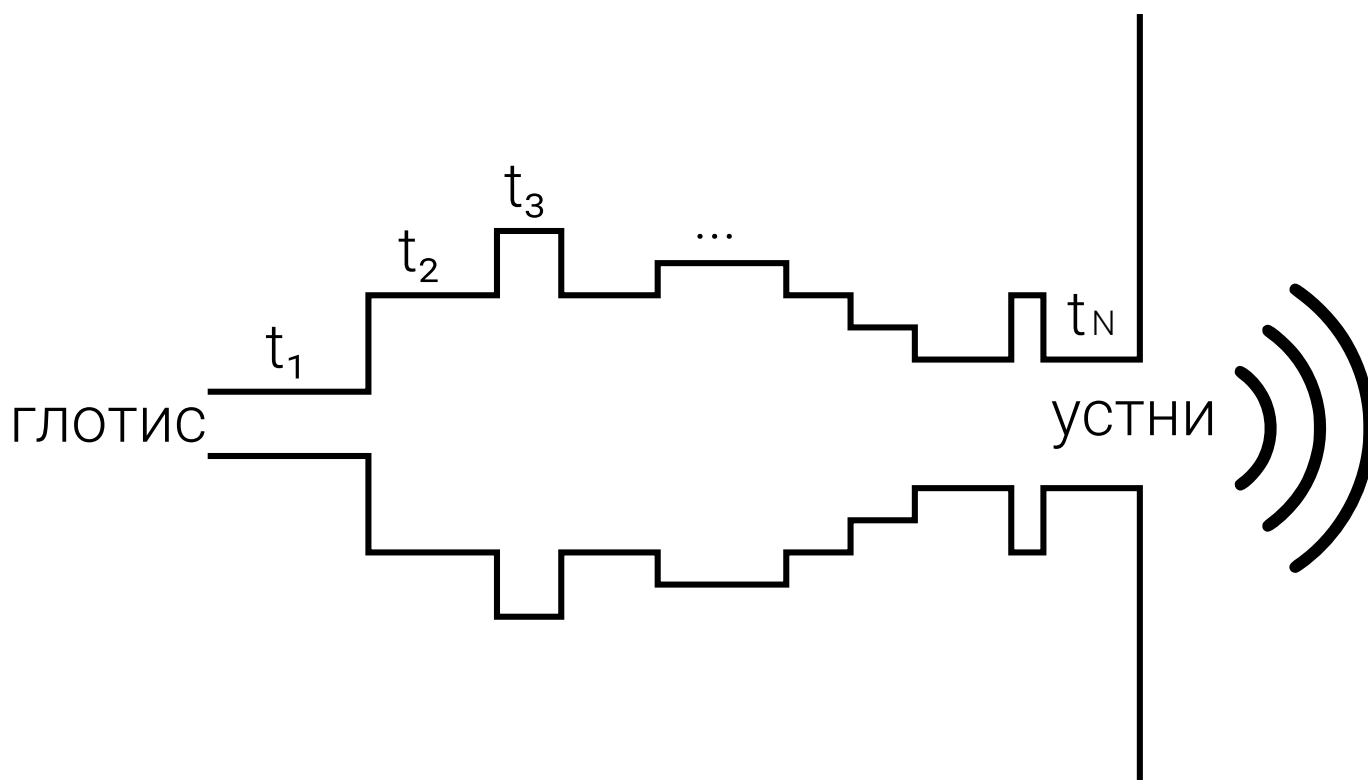
<sup>1</sup>както се зарекохме в предния раздел



Във времевия домейн уравнението има вида  $y(t) = g(t) * v(t) * r(t)$ , както следва от [Теорема за конволюцията за периодични дискретни сигнали](#) също в [Приложение А](#).

Тъй като в крайна сметка получаваме нов сигнал при усните, това, от което се интересуваме, са спектралните особености на  $\mathcal{V}(z)\mathcal{R}(z)$ , за които можем да си мислим като един общ филтър, описващ вокалния тракт. За да говорим за крайния сигнал  $y$ , трябва да знаем какво е действието на входния сигнал  $g$ , който ще бъде променен от филтъра на вокалния тракт.

Бележка: Дефиницията за Фурие преобразуване изисква сингалът да е периодичен. В случая сме взели  $g$  да е такъв. Нека засега приемем, че сигналите  $v$  и  $r$  също са периодични. Това, а също и че периодът им съвпада с този на  $g$ , е показано в [Свойство 1](#).



Фигура 2.2.1: Приближение на вокалния тракт с  $N$  тръби

По принцип стените на вокалния тракт са гладки и меки, но това се моделира трудно. Допълнително, формата му е сложна и специфична за всеки човек. Така че нека опростим ситуацията, като използваме приближение с  $N$  на брой тръби, номерирани  $1 \dots N$ , с постоянно напречно сечение, както е показано на [Фигура 2.2.1](#). За още по-голямо опростяване, нека няма и загуба на енергия, каквата би се получила по принцип.

Нека въведем следните стандартни означения:

1.  $c$  - скорост на звука в еластична среда
2.  $\rho$  - плътност на въздуха в тръбите
3.  $A$  - лицето на напречното сечение в тръба (константа)
4.  $u = u(x, t)$  - е промяната в обемната скорост на позиция  $x$  в момента  $t$
5.  $p = p(x, t)$  - е промяната в звуковото налягане

Звуковите вълни, преминаващи през течна среда в тръба, изпълняват уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\rho}{A} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.2.1a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.2.1b)$$

и може да се покаже, че решенията на Уравнения 2.2.1 имат вида

$$u(x, t) = \left[ u^+ \left( t - \frac{x}{c} \right) - u^- \left( t + \frac{x}{c} \right) \right] \quad (2.2.2a)$$

$$p(x, t) = \frac{\rho c}{A} \left[ p^+ \left( t - \frac{x}{c} \right) + p^- \left( t + \frac{x}{c} \right) \right] \quad (2.2.2b)$$

Първо нека да разгледаме връзката между две съседни тръби.

## 2.2.1 Преминане от една тръба в друга

Да разгледаме по-внимателно значението на (2.2.2a).

При преминане от една тръба в друга, част от вълните ще преминат към следващата тръба, а част от тях ще се отразят наобратно. В такъв случай във всеки момент от време  $t$  и във всяка точка  $x$  на  $k$ -тата тръба, обемната скорост  $u_k$  ще зависи от обемната скорост на вълните, които вървят „напред“ и тази на вълните, които вървят „назад“. За специфична тръба  $k$ , Уравнения (2.2.2) ще имат вида:

$$u_k(x, t) = \left[ u_k^+ \left( t - \frac{x}{c} \right) - u_k^- \left( t + \frac{x}{c} \right) \right] \quad (2.2.3a)$$

$$p_k(x, t) = \frac{\rho c}{A_k} \left[ u_k^+ \left( t - \frac{x}{c} \right) + u_k^- \left( t + \frac{x}{c} \right) \right], \quad (2.2.3b)$$

където  $l_k$  е дължината, а  $A_k$  е лицето на напречното сечение на  $k$ -тата тръба,  $x$  е разстояние в нея ( $0 \leq x \leq l_k$ ),  $t$  е момент от време.

Вълните, които вървят „напред“ и „назад“, ще означаваме съответно с  $u^+$  и  $u^-$ .

Тъй като енергията трябва да се запази, въвеждаме допълнително условие за границата между две тръби:

$$u_k(l_k, t) = u_{k+1}(0, t) \quad (2.2.4a)$$

$$p_k(l_k, t) = p_{k+1}(0, t) \quad (2.2.4b)$$

Когато заместим Уравнения (2.2.4) в (2.2.3), получаваме:

$$u_k^+ \left( t - \frac{l_k}{c} \right) - u_k^- \left( t + \frac{l_k}{c} \right) = u_{k+1}^+(t) - u_{k+1}^-(t)$$

и

$$\frac{\rho c}{A_k} \left[ u_k^+ \left( t - \frac{l_k}{c} \right) + u_k^- \left( t + \frac{l_k}{c} \right) \right] = \frac{\rho c}{A_{k+1}} [u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t)]$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} \left[ u_k^+ \left( t - \frac{l_k}{c} \right) + u_k^- \left( t + \frac{l_k}{c} \right) \right] = u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t)$$

Нека означим с  $\tau_k$  времето, за което вълна пропътува дължината на  $k$ -тата тръба, тоест  $\tau_k = \frac{l_k}{c}$ . Тогава имаме:

$$u_k^+(t - \tau_k) - u_k^-(t + \tau_k) = u_{k+1}^+(t) - u_{k+1}^-(t) \quad (2.2.5)$$

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} [u_k^+(t - \tau_k) + u_k^-(t + \tau_k)] = u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t) \quad (2.2.6)$$

Първо, нека да изразим скоростта на вълните, които вървят "напред" в  $(k + 1)$ -та тръба ( $u_{k+1}^+$ ), чрез тези, които са преминали от предната тръба ( $u_k^+$ ) и тези, които се отразяват от текущата ( $u_{k+1}^-$ ).

От (2.2.5) получаваме

$$u_k^-(t + \tau_k) = u_k^+(t - \tau_k) - u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t) \quad (2.2.7)$$

Заместваме (2.2.7) в (2.2.6)

$$\begin{aligned} u_{k+1}^+(t) &= \frac{A_{k+1}}{A_k} u_k^+(t - \tau_k) + \frac{A_{k+1}}{A_k} [u_k^+(t - \tau_k) - u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t)] - u_{k+1}^-(t) \\ u_{k+1}^+(t) \left[ 1 + \frac{A_{k+1}}{A_k} \right] &= u_k^+(t - \tau_k) \frac{2A_{k+1}}{A_k} + u_{k+1}^-(t) \left[ \frac{A_{k+1}}{A_k} - 1 \right] \\ u_{k+1}^+(t) \left[ \frac{A_k + A_{k+1}}{A_k} \right] &= u_k^+(t - \tau_k) \frac{2A_{k+1}}{A_k} + u_{k+1}^-(t) \left[ \frac{A_{k+1} - A_k}{A_k} \right] \\ u_{k+1}^+(t) &= u_k^+(t - \tau_k) \left[ \frac{2A_{k+1}}{A_k + A_{k+1}} \right] + u_{k+1}^-(t) \left[ \frac{A_{k+1} - A_k}{A_k + A_{k+1}} \right] \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Коефициентът, който стои пред  $u_k^+(t - \tau_k)$  в уравнение (2.2.8), представлява количеството енергия, която преминава от тръба  $k$  в тръба  $k + 1$ , идваща от вълните, които се движат "напред" в  $k$ -тата тръба. Затова

$$t_k = \frac{2A_{k+1}}{A_k + A_{k+1}} \quad (2.2.9)$$

се нарича **коэффициент на преминаване** за  $k$ -тия преход (преходът между тръби  $k$  и  $k + 1$ ).

Коефициентът пред  $u_{k+1}^-(t)$  представлява количеството енергия, получена от вълните, които вървят "назад" в тръба  $k + 1$ . Затова

$$r_k = \frac{A_{k+1} - A_k}{A_k + A_{k+1}} \quad (2.2.10)$$

се нарича **коефициент на отразяване** за  $k$ -тия преход.

Можем да забележим, че в специалния случай, в който напречните сечения на две съседни тръби са равни ( $A_k = A_{k+1}$ ), би следвало всички вълни да преминават свободно. Наистина, ако заместим в уравнение (2.2.10),  $r_k = 0$ , а от (2.2.9) се вижда, че  $t_k = 1$

Нека изразим скоростта на вълните в тръба  $k$  чрез скоростта на вълните в  $(k + 1)$ -вата тръба.

Първо разместваме уравнение (2.2.8)

$$u_k^+(t - \tau_k) = u_{k+1}^+(t) \left[ \frac{A_k + A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] + u_{k+1}^-(t) \left[ \frac{A_k - A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] \quad (2.2.11a)$$

Заместваме (2.2.11a) в (2.2.5)

$$\begin{aligned} u_k^-(t + \tau_k) &= u_k^+(t - \tau_k) - u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t) \\ u_k^-(t + \tau_k) &= u_{k+1}^+(t) \left[ \frac{A_k + A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] + u_{k+1}^-(t) \left[ \frac{A_k - A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] - u_{k+1}^+(t) + u_{k+1}^-(t) \\ u_k^-(t + \tau_k) &= u_{k+1}^+(t) \left[ \frac{A_k + A_{k+1} - 2A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] + u_{k+1}^-(t) \left[ \frac{A_k - A_{k+1} + 2A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] \\ u_k^-(t + \tau_k) &= u_{k+1}^+(t) \left[ \frac{A_k - A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] + u_{k+1}^-(t) \left[ \frac{A_k + A_{k+1}}{2A_{k+1}} \right] \end{aligned} \quad (2.2.11b)$$

Използвайки, че

$$\frac{1}{1 + r_k} = \frac{A_k + A_{k+1}}{A_{k+1} - A_k + A_{k+1} + A_k} = \frac{A_k + A_{k+1}}{2A_{k+1}}$$

$$\frac{r_k}{1 + r_k} = \frac{(A_{k+1} - A_k)(A_k + A_{k+1})}{(A_k + A_{k+1}) 2A_{k+1}} = \frac{A_{k+1} - A_k}{2A_{k+1}},$$

можем да запишем Уравнения (2.2.11) във вида:

$$u_k^+(t - \tau_k) = \frac{1}{1 + r_k} u_{k+1}^+(t) - \frac{r_k}{1 + r_k} u_{k+1}^-(t) \quad (2.2.12a)$$

$$u_k^-(t + \tau_k) = -\frac{r_k}{1 + r_k} u_{k+1}^-(t) + u_{k+1}^+(t) + \frac{1}{1 + r_k} u_{k+1}^-(t) \quad (2.2.12b)$$

Сега да разгледаме Уравнения (2.2.12) в честотния домейн. Избираме  $z = e^{i\omega_k}$  и използваме свойствата, описани в Приложение А. Тоест, че  $u_k[t - \tau_k] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} z^{-\tau_k} U_k(z)$

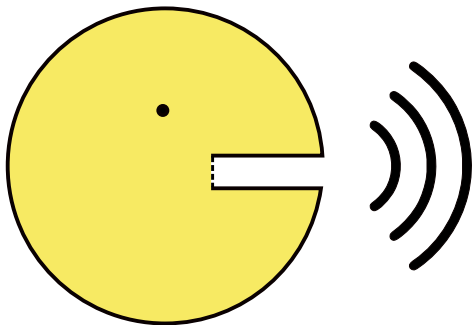
$$\begin{aligned} z^{-\tau_k} U_k^+(z) &= \frac{1}{1+r_k} U_{k+1}^+(z) - \frac{r_k}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) \\ z^{\tau_k} U_k^-(z) &= -\frac{r_k}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) + U_{k+1}^+(z) + \frac{1}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) \\ &\iff \end{aligned} \quad (2.2.13a)$$

$$U_k^+(z) = \frac{z^{\tau_k}}{1+r_k} U_{k+1}^+(z) - \frac{r_k z^{\tau_k}}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) \quad (2.2.13b)$$

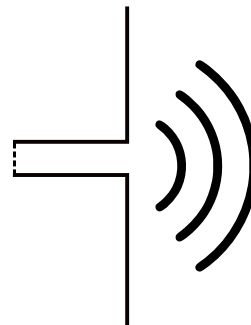
$$U_k^-(z) = -\frac{r_k z^{-\tau_k}}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) + U_{k+1}^+(z) + \frac{z^{-\tau_k}}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) \quad (2.2.13b)$$

По този начин получихме връзката между две съседни тръби. За да получим общия модел, трябва да отчетем двете специални ситуации - при първата и при последната тръба.

## 2.2.2 Ограничения при устните



(а) Представяне на устните като отвор в сферична преграда



(б) Представяне на устните като отвор в безкрайна равнина

Фигура 2.2.2: Представяне на устните като отвор в преграда

Един разумен начин да представим изхода при устните е показан на Фигура 2.2.2а. На фигурата се вижда как звуковите вълни, които напускат системата, претърпяват дифракция при отвора в сферичната повърхност, моделираща главата. Представянето на тази дифракция е сложно, затова ще се опитаме да го опростим.

Ако отворът на устните е много малък спрямо размера на сферата, то можем да си мислим за преградата като за безкрайна равнина, както е показано на Фигура 2.2.2б

В такъв случай може да се покаже, че съществува следната връзка между налягането и обемната скорост:

$$\mathcal{P}_N(l_N, z) = Z_L(z) \mathcal{U}_N(l_N, z), \quad (2.2.14)$$

където  $Z_L(z)$  се нарича радиационен импеданс (пълно съпротивление), описва загубите, които се получават на изхода, и има вида:

$$Z_L(z) = \frac{izL_r R_r}{R_r + izL_r}, \quad (2.2.15)$$

Където  $z = e^{i\omega_k}$  описва сигнал с ъглова честота  $\omega_k$ ,  $L_r$  и  $R_r$  са константи, определени от размера на отвората на устата. За практически цели се избират:

$$R_r = \frac{128}{9\pi^2} > 1 \quad L_r = \frac{8a}{3\pi c}$$

$a$  - радиус на отвората,  $c$  - скоростта на звука.

При много ниски честоти  $Z_L(z) \approx 0$ , което значи, че съпротивлението на устните е почти нулево. При средни честоти ( $zL_r \ll R_r$ ),  $Z_L(z) \approx izL_r$ , а високи честоти, ( $zL_r \gg R_r$ )  $Z_L(z) \approx R_r$ . Това значи, че загубите при устните са най-големи при големи честоти, тъй като тогава импедансът е най-голям.

В случая, в който честотата  $z$  е висока,  $Z_L \approx R_r$  е реално число и не зависи от  $z$ , тоест  $Z_L(z) = Z_L$ .

Тогаво, ако  $p_N(l_N, t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} P_N(l_N, z)$ ,  $u_N(l_N, t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} U_N(l_N, z)$  и съответно  $Z_L \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} Z_L$ , можем да разгледаме уравнението (2.2.14) във времевия домейн:

$$p_N(l_N, t) = Z_L u_N(l_N, t),$$

Ако използваме Уравнения (2.2.3) и заместим с  $\tau_N = \frac{l_N}{c}$ , получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{\rho c}{A_N} [u_N^+(t - \tau_N) + u_N^-(t + \tau_N)] &= Z_L [u_N^+(t - \tau_N) - u_N^-(t + \tau_N)] \\ u_N^-(t + \tau_N) \frac{(\rho c + A_N Z_L)}{A_N} &= u_N^+(t - \tau_N) \frac{(A_N Z_L - \rho c)}{A_N} \\ u_N^-(t + \tau_N) &= -r_L u_N^+(t - \tau_N), \quad \text{където} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

$$r_L = \left( \frac{\frac{\rho c}{Z_L} - A_N}{\frac{\rho c}{Z_L} + A_N} \right)$$

В случая, в който  $Z_L \approx izL_r$  е комплексно, може да се покаже, че уравнение (2.2.16) остава в сила, но в този случай и  $r_L$  също ще бъде комплексно.

### 2.2.3 Ограничения при глотиса

Както при устните, така и при глотиса, трябва да се отчете импедансът. Например когато глотисът е затворен, импедансът е безкраен, а обемната скорост нулева.

Връзката  $U_1(0, z) = U_G(z)$  е твърде наивна и може да се покаже, че по-добро приближение би било:

$$U_1(0, z) = U_G(z) - \frac{P_1(0, z)}{Z_G(z)}, \quad (2.2.17)$$

където  $z = e^{i\omega_k}$ ,  $Z_G$  описва импеданса на глотиса и  $Z_G(z) = R_G + izL_G$ ,

$L_G, R_G$  - константи. Отново предполагайки, че  $Z_G$  е реално, тоест честотата  $\omega_k$  е много ниска, можем да разгледаме уравнение (2.2.17) във времевия домейн.

Нека  $u_1(0, t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} U_1(0, z), p_1(0, t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} P_1(0, z)$  за фиксиран първи аргумент и съответно  $Z_G \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} Z_G$ :

$$u_1(0, t) = u_G(t) - \frac{p_1(0, t)}{Z_G}$$

Ако използваме Уравнения (2.2.3), получаваме

$$\begin{aligned} u_1^+(t) - u_1^-(t) &= u_G(t) - \frac{\rho c}{A_1} \left[ \frac{u_1^+(t) + u_1^-(t)}{Z_G} \right] \\ u_1^+(t) \left[ 1 + \frac{\rho c}{A_1 Z_G} \right] &= u_G(t) + u_1^-(t) \left[ 1 - \frac{\rho c}{A_1 Z_G} \right] \\ u_1^+(t) &= u_G(t) \left[ \frac{A_1 Z_G}{A_1 Z_G + \rho c} \right] + u_1^-(t) \left[ \frac{A_1 Z_G - \rho c}{A_1 Z_G + \rho c} \right] \end{aligned}$$

$$u_1^+(t) = u_G(t) \left[ \frac{1 + r_G}{2} \right] + r_G u_1^-(t) \quad (2.2.18)$$

където  $r_G = \left( \frac{A_1 Z_G - \rho c}{A_1 Z_G + \rho c} \right)$  и е изпълнено

$$\frac{1 + r_G}{2} = \frac{A_1 Z_G + \rho c + A_1 Z_G - \rho c}{2(A_1 Z_G + \rho c)} = \frac{A_1 Z_G}{A_1 Z_G + \rho c}$$

Ако се върнем в честотния домейн:

$$U_G(z) = \left[ \frac{2}{1 + r_G} \right] U_1^+(z) - \left[ \frac{2r_G}{1 + r_G} \right] U_1^-(z), \quad (2.2.19)$$

Отново може да се покаже, че ако  $Z_G$  е комплексно, уравнението (2.2.18) е в сила и в този случай  $r_G$  също е комплексно. За улеснение обикновено  $Z_L$  и  $Z_G$  се взимат реални.

## 2.2.4 Общ вид на $\mathcal{V}$

За да видим общия вид на  $\mathcal{V}$ , нека засега всички тръби имат равна дължина и тя е  $\tau_i = \frac{1}{2}, i \in [1...N]$  Тогава уравнения (2.2.13) имат вида:

$$U_k^+(z) = \frac{z^{1/2}}{1+r_k} U_{k+1}^+(z) - \frac{r_k z^{1/2}}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) \quad (2.2.20a)$$

$$U_k^-(z) = -\frac{r_k z^{-1/2}}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) + U_{k+1}^+(z) + \frac{z^{-1/2}}{1+r_k} U_{k+1}^-(z) \quad (2.2.20b)$$

За да опишем граничните условия при устните, дефинираме  $U_{N+1}(z)$  да е Фурие трансформацията на входа на несъществуваща  $(N+1)$  тръба. Този тръба е безкрайно дълга и заради това скоростта на вървящите „назад“ вълни трябва да бъде 0

Тоест дефинираме:

$$\begin{aligned} U_{N+1}^+(z) &= U_L(z) \\ U_{N+1}^-(z) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Също така искаме коефициентът на отражение на последната истинска тръба да е равен на коефициент на отражение при устните, а именно  $r_N = r_L$

$$\left( \frac{A_{N+1} - A_N}{A_{N+1} + A_N} \right) = \left( \frac{\frac{\rho c}{Z_L} - A_N}{\frac{\rho c}{Z_L} + A_N} \right)$$

Това ни дава, че  $A_{N+1} = \frac{\rho c}{Z_L}$

Ако представим Уравнения (2.2.20) в матричен вид, получаваме:

$$U_k = Q_k U_{k+1} \text{ за}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} U_k^+(z) \\ U_k^-(z) \end{bmatrix} \quad Q_k = \begin{bmatrix} \frac{z^{1/2}}{1+r_k} & -\frac{r_k z^{1/2}}{1+r_k} \\ -\frac{r_k z^{-1/2}}{1+r_k} & \frac{z^{-1/2}}{1+r_k} \end{bmatrix}$$

$$U_1 = Q_1 U_2 = Q_1 Q_2 U_3 = \dots = Q_1 \dots Q_N U_{N+1} = \left[ \prod_{i=1}^N Q_i \right] U_{N+1}$$

За специалното ограничение глотиса, разгледаме матричния вид на [Уравнение 2.2.19](#)

$$U_G(z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+r_G} & -\frac{2r_G}{1+r_G} \end{bmatrix} U_1$$



Ограниченията (2.2.21) за  $U_L$  ни дават, че

$$U_{N+1} = \begin{bmatrix} U_{N+1}^+(z) \\ U_{N+1}^-(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_L(z) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U_L(z)$$

Тогава, ако заместим, получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{V}(z)} = \frac{U_G(z)}{U_L(z)} &= \frac{\left[ \frac{2}{1+r_G}, -\frac{2r_G}{1+r_G} \right] \prod_{i=1}^N Q_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U_L(z)}{U_L(z)} = \\ &= \left[ \frac{2}{1+r_G}, -\frac{2r_G}{1+r_G} \right] \prod_{i=1}^N Q_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Нека изразим  $Q_k$  по следния начин:

$$Q_k = \begin{bmatrix} \frac{z^{1/2}}{1+r_k} & \frac{-r_k z^{1/2}}{1+r_k} \\ \frac{-r_k z^{-1/2}}{1+r_k} & \frac{z^{-1/2}}{1+r_k} \end{bmatrix} = z^{1/2} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r_k} & \frac{-r_k}{1+r_k} \\ \frac{-r_k z^{-1}}{1+r_k} & \frac{z^{-1}}{1+r_k} \end{bmatrix} = z^{1/2} \hat{Q}_k$$

Тогава уравнение (2.2.22) има вида

$$\frac{1}{\mathcal{V}(z)} = \frac{U_G(z)}{U_L(z)} = z^{N/2} \left[ \frac{2}{1+r_G}, -\frac{2r_G}{1+r_G} \right] \prod_{i=1}^N \hat{Q}_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.23)$$

Нека изразим общия вид на  $\mathcal{V}(z)$ . За  $N = 2$ , например, има вида:

$$\mathcal{V}(z) = \frac{0.5(1+r_G) \prod_{i=1}^2 (1+r_i) z^{-1}}{1 + (r_G r_1 + r_1 r_2) z^{-1} + (r_G r_2) z^{-2}}, \quad (2.2.24)$$

както е показано в [Пример 3](#)

Може да се покаже, че в общия случай за произволно  $N$ , [Уравнение 2.2.23](#) може да се развие итеративно до:

$$\mathcal{V}(z) = \frac{0.5(1+r_G) \prod_{i=1}^N (1+r_i) z^{-N/2}}{1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i z^{-i}} \quad (2.2.25)$$

Както се вижда от [Пример 2](#), предположението, че  $\tau_i = \frac{1}{2}$  е разумно, тъй като при тази стойност се получава най-голяма изразителна сила, както е отбелязано и в [Бележката](#).

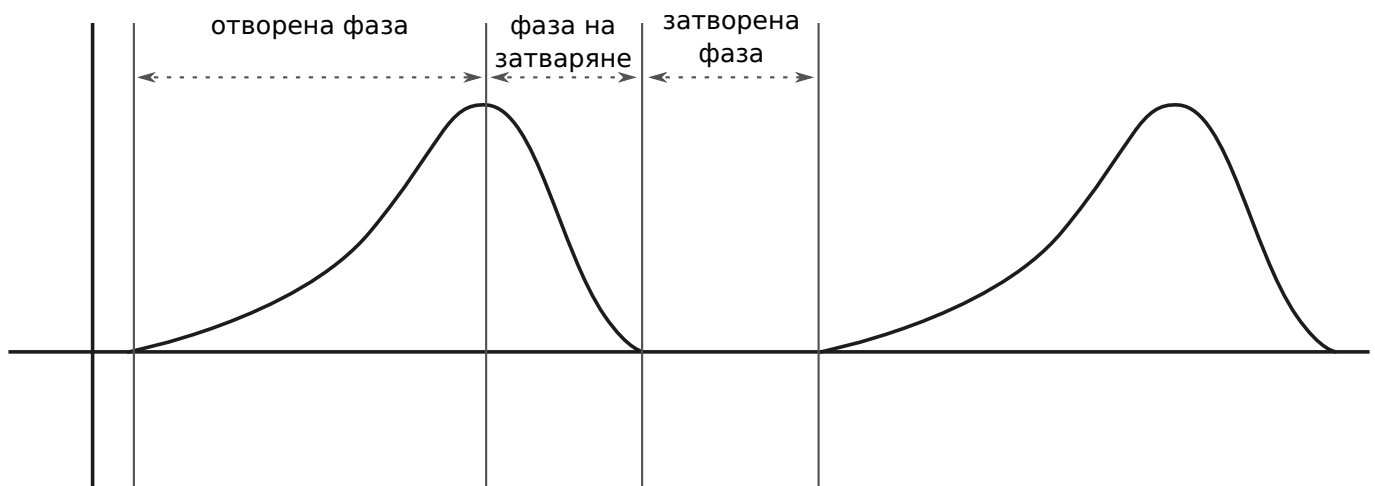
## 2.2.5 Общ вид на $\mathcal{R}$

Моделът, описан в [Подраздел 2.2.2](#) се моделира прекалено трудно. Може да се покаже ([\[Тay09\]](#), [\[Quo01\]](#)), че ефектът от радиацията се приближава достатъчно добре с една нула в единичната окръжност, тоест:

$$\mathcal{R}(z) = (1 - \gamma z^{-1}) \quad (2.2.26)$$

## 2.2.6 Общ вид на $\mathcal{G}$

За да се симулира действието на глотиса, трябва да отчетем как се държи той при изговаряне на различни видове звуци.



Фигура 2.2.3: Пример за импулс от глотиса

В случая на гласна, както бяхме приели за улеснение, той трепти периодично и видът му може да се види на [Фигура 2.2.3](#). Можем да разделим този сигнал на три фази:

1. Отворена фаза с край  $F_1$
2. Фаза на затваряне с начало  $F_1$  и край  $F_2$
3. Затворена фаза с начало  $F_2$

Това може да се опише като функция на времето по следния начин.

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi n/F_1)), & 0 \leq t \leq F_1 \\ \cos(\pi(n - N_1)/2N_2), & F_1 \leq t \leq F_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Поведението като това на  $\mathcal{G}$  може да се приближава с два полюса, както е показано в [Приложение за полюси и нули](#), тоест

$$\tilde{\mathcal{G}}(z) = \frac{1}{(1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \beta z^{-1})}$$

но по този начин не се отчита правилно самата форма на сигнала.

В [\[Qua01\]](#) е показано, че по-добро приближение се получава при  $\alpha = \beta$  и  $\mathcal{G}(z) = \tilde{\mathcal{G}}(-z)$ , тоест

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{(1 - \beta z)^2}$$

Сигналът, показан на [Фигура 2.2.3](#), е почти идеален. В действителност е почти невъзможно да се поддържа тон, който има еднакви разстояния между пиковете и еднаква амплитуда. Отклонението от истинския период се нарича джитер<sup>2</sup>. Другият ефект, който е важен за истинския човешки глас, е трептенето<sup>3</sup>, тоест разликата в амплитудите. Освен за естествеността на гласа, тези характеристики могат да носят информация и за емоционалното състояние. Висок джитер може да означава грезгав глас, но също може да се предизвика при чувство на стрес или страх. Включването им в модела се постига с допълнителни нули, което ни дава и крайния вид на  $\mathcal{G}$  в случая на озвучен звук:

$$\mathcal{G}(z) = \frac{\prod_{i=0}^K (1 - \beta_i z^{-1})}{(1 - \beta z)^2} \quad (2.2.27)$$

Да разгледаме случая с беззвучен звук. При съгласните, например, сигналът от глотиса е случайна редица с плосък спектър (тоест има почти еднаква мощност в целия спектър). Добър начин да се моделира е чрез генератор на бял шум.

## 2.2.7 Общ вид на $\mathcal{Y}$

От уравнения [2.2.25](#), [2.2.26](#), [2.2.27](#) следва, че видът на  $\mathcal{H}$  е

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{G}(z)\mathcal{V}(z)\mathcal{R}(z) = \left[ \frac{\prod_{i=0}^K (1 - \beta_i z^{-1})}{(1 - \beta z)^2} \right] \left[ \frac{0.5(1 + r_G) \prod_{i=1}^N (1 + r_i) z^{-N/2}}{1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i z^{-i}} \right] [(1 - \gamma z^{-1})]$$

При определени стойности на коефициентите, видът на  $\mathcal{Y}$  може да се запише като:

<sup>2</sup>На английски jitter, думата е заемка, тъй като няма друг възприет български термин. Руският термин е джиттер

<sup>3</sup>На английски shimmer. Тук също не мога да намеря подходящ български термин, но в случая и единственият руски, който открих, е шиммер

$$y(z) = \mathcal{G}(z) \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^K a_k z^{-k}}, \quad (2.2.28)$$

от което ще се възползваме в следващия раздел.

## 2.3 Представяне със системи

Нека имаме чистия сигнал от глотиса  $g[t]$ . При преминаването му през вокалния тракт и устните, той се променя, в следствие на различни фактори като турбуленция, поглъщане, отрязване, в следствие на което на изхода (устните), получаваме сигнала  $y[n]$ .

### Дефиниция. (Система)

Механизъм, който манипулира един или повече сигнали с някаква цел до получаване на нов сигнал, се нарича система.

Обикновено в практическия свят се използват системи, чието действие е предварително известно (и желано). Такива системи наричаме **филтри**. Филтрите обикновено изпълняват някаква точно определена манипулация върху сигнала, например да премахват всички честоти под или над определена честота.

С  $g[n] \mapsto y[n]$  ще бележим, че  $y$  е отговорът на системата за вход  $g$ . В такъв случай, системата, която ще разгледаме, е тази на вокалния тракт. Ще ни интересуват няколко класа системи.

### Дефиниция. (Линейна система)

Ако  $x_1[n] \mapsto y_1[n]$  и  $x_2[n] \mapsto y_2[n]$ , то системата е линейна  $\leftrightarrow$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \mapsto ay_1[n] + by_2[n]$$

### Дефиниция. (Времево-независима система)

Нека  $x[n] \mapsto y[n]$ . Тогава, ако за всяко  $n_0$  :  $x[n - n_0] \mapsto y[n - n_0]$ , то системата е времево-независима.

**Свойство 1.** Ако системата е времево-независима и сигналът  $x$  е перидичен с период  $N$ , то и изходът на системата  $y$  е перидичен с период  $N$ :

$x[n] \mapsto y[n]$  и  $x[n] = x[n + N] \implies x[n + N] \mapsto y[n]$ . Но от времевата независимост знаем, че  $x[n + N] \mapsto y[n + N] \implies y[n] = y[n + N]$

Специален подклас на линейните, времево-независими системи, е класът на системите, удовлетворяващи диференчното уравнение от ред  $N$  с константни коефициенти:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n - m] \quad (2.3.1)$$

Вокалният тракт е времето независима система, защото изходът  $y[n]$  не зависи от момента от време, а само от специфичната му конфигурация в текущия момент, т.е. положението на езика, устните, зъбите. Нека предположим, че вокалният тракт е линейна, времево-независима система, която удовлетворява уравнение [Уравнение 2.3.1](#), и да разгледаме свойствата.

Искаме да опишем как работи тази система. За момента знаем как ще реагира тя, ако ѝ подадем входен сигнал  $g[n]$ . Но вместо да разглеждаме отговора на системата за широк спектър от входни функции, ще е полезно да имаме характеристикация, която не зависи от входа.

Първо да разгледаме входа по различен начин. Ако за всеки момент от време  $n_0$  имаме импулси със сила  $g[n_0]$ , то можем да мислим за входния сигнал  $g[n]$  като за сума от тези импулси. Тоест, нека имаме дискретния единичен импулс:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогаво можем да представим входния сигнал  $g[n]$  като

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\delta[n-k]$$

Нека  $\delta[n-k] \mapsto h_k[n]$ . Тъй като системата е линейна, е изпълнено че:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\delta[n-k] \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h_k[n] = y[n] \quad (2.3.2)$$

Времевата инвариантност ни казва, че ако  $\delta[n] \mapsto h[n]$ , то  $\delta[n-k] \mapsto h[n-k]$ , следователно в случая на вокалният тракт [Уравнение 2.3.2](#) има вида:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]h[n-k] \quad , \quad (2.3.3)$$

или записано като **конволюция**  $y[n] = (g * h)[n]$ .

Ако разгледаме Фурие преобразуванията на  $y, g, h$ , които са съответно  $\mathcal{Y}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ , в  $z = e^{i\omega_k}$ , получаваме

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) &= \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z) \\ \mathcal{H}(z) &= \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{G}(z)} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$\mathcal{H}$  се нарича предавателна функция за системата.

Да разгледаме фурие преобразуването на [Уравнение 2.3.1](#) за входен сигнал  $g$ .

$$\left[ \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right] y(z) = \left[ \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \right] \mathcal{G}(z)$$

$$\frac{y(z)}{\mathcal{G}(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.3.5)$$

Когато заместим [Уравнение 2.3.5](#) в [Уравнение 2.3.4](#), получаваме

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.3.6)$$

В [Раздел 2.2](#) видяхме, че резултатния сигнал  $y$ , който се получава при изходите на системата, има следния вид:

$$y(z) = \mathcal{G}(z)\mathcal{V}(z)\mathcal{R}(z) = \mathcal{G}(z) \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^K a_k z^{-k}} \quad (2.2.28)$$

Това означава, че  $\mathcal{V}(z)\mathcal{R}(z)$ , всъщност описват трансферната функция на системата  $g[n] \mapsto y[n]$ , тоест  $\mathcal{H}(z) = \mathcal{V}(z)\mathcal{R}(z)$ .

Следователно, производството на реч се описва от системата  $y(z) = \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z)$ , а  $\mathcal{H}$  съдържа информацията за вокалния тракт. Характеристиките, които ще изберем, трябва да носят тази информация за вокалния тракт, тоест трябва да отделят входния сигнал  $\mathcal{G}$  от филтъра  $\mathcal{H}$ , извличайки информацията за подлежащата емоция, която се надяваме, че е кодирана в  $\mathcal{H}$ .

Изборът на характеристики е описан по-подробно в следващия раздел.

## 2.4 Характеристики

### 2.4.1 Избор

На дневен ред е избирането на характеристики, които отразяват идеята за разделяне на информацията за вокалния тракт  $\mathcal{H}$  от входния сигнал  $\mathcal{G}$ . Имаме  $y(z) = \mathcal{G}(z)\mathcal{H}(z)$ .

Нека вземем логаритъм от модула:

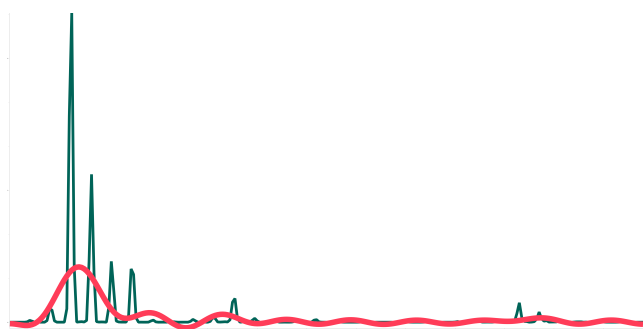
$$\log(|y(z)|) = \log(|\mathcal{G}(z)|) + \log(|\mathcal{H}(z)|)$$

Обратното Фурие преобразуване ни дава вид във времевия домейн:

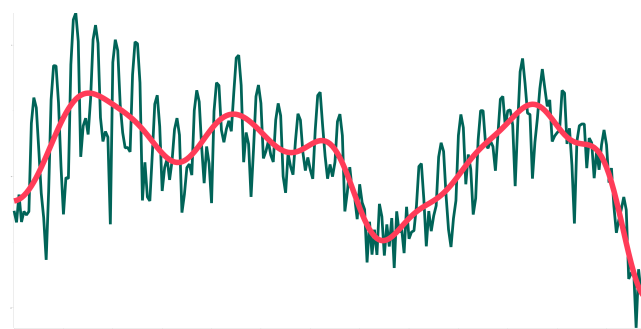
$$c_y[n] = c_g[n] + c_h[n]$$

Сега вече имаме сбор на входния сигнал и този на филтъра, вместо конволюция във времевия домейн.

Да видим каква е идеята зад тези преобразувания. Имаме, че  $\mathcal{G}(z)$  и  $\mathcal{H}(z)$  са комплексни числа и вземайки модула им, губим информация за фазата. Това не е проблем, тъй като човешкото ухо не е особено чувствително към нея, затова обикновено ни трябва само амплитудата (и следователно модула).



(а) Логаритмична скала



(б) Логаритмична скала и логаритъм от модула

Фигура 2.4.1: Графика на спектъра на сигнал, получен при произнасяне на "а-а-а-а"

Взимането на логаритъм, подчертава периодичността на сигнала, идващ от глотиса. На Фигура 2.4.1а се виждат пикове, породени от фундаменталната честота, на която трепти глотиса, и хармоничните и честоти. Поради загубата на енергията в системата за производство на реч, не всички хармонични честоти имат същата амплитуда. На Фигура 2.4.1б се вижда, че взимането на логаритъм помага за изравняването на хармоничните амплитудати и кара графиката да изглежда "по-периодична". Сега нека разгледаме логаритмувания спектър като сигнал и му направим Фурие преобразуване до получаване на така нареченият кепстър. Тъй като разглеждаме спектъра сигнал, наличието на периодични амплитуди ще се преведе до пик в получения кепструм на честотата, отговаряща (горе-долу, имайки предвид джитера) на основната честота на глотиса. Информацията, която описва вокалния тракт е с много по-малко изразена периодичност в спектъра, затова ще се запази в ниските честоти на кепстъра. Тоест  $c_g[n]$  ще са коефициентите в кепстъра на високите честоти, а  $c_h[n]$  в ниските. За практически цели обикновено се избират първите 13 коефициента на кепстъра. Тези коефициенти се наричат Mel Frequency Cepstral Coefficients (MFCC), където Mel скалата е логаритмична скала. Повече детайли за извличането им са описани в следващия подраздел.

## 2.4.2 Извличане

Ще извличаме характеристики от подаден аудио файл в wav формат. Първо, съдържанието на файла се прочита в масив от 64-битови float числа. Елементите на този масив се наричат дискрети (samples). Броят им зависи от честотата на дискретизация (тоест колко измервания са направени за една секунда), която обикновено е 16kHz, 44100Hz или 48kHz. Броят на дискретите определя броя на коефициентите на Фурие преобразуването. Тъй като сигналът е реален, от [свойствата](#) следва, че максималната честота, която можем да измерим е честотата на Найкуист, равна на броя дискрети върху две, тоест половината на честотата на дискретизация. Колкото е по-голяма Найкуист честотата, толкова по-добра честотна резолюция получаваме.

Базирайки се на идеята, че вокалният тракт е статичен за кратък период от време, нахвърляме масива на отделни застъпващи се парчета - фреймове - в рамките на които сигналът е статичен. За да се определи дължината на фрейма, трябва да се вземат предвид две неща: от една страна колкото повече дискрети имаме, толкова по-добра честотна резолюция получаваме. От друга, колкото повече дискрети взимаме, толкова по-голям е шансът да се смени конфигурацията на вокалният тракт. За да се справим с този дуализъм, компромисните стойности, които са избрани в описваната имплементация, са 25 милисекунди за дължина на фрейм и 10 милисекунди за разстояние между два последователни фрейма. Един фрейм описва една конфигурация на вокалният тракт. Целим да извлечем MFCC коефициенти за всеки фрейм. Това означава, че трябва да се направи Фурие преобразуване, което изисква сигналът да е периодичен, а данните във фреймовете не са. За този цел, всеки фрейм се умножава по специално избрана функция, наречена прозорец<sup>4</sup>. Тази функция е нула навсякъде, освен в избран интервал и обикновено симетрична около средата на този интервал. Когато фреймът се умножи по прозорец със същата дължина, стойностите в краищата се нулират. Това прави полученият сигнал периодичен с период дължината на фрейма, тъй като започва в нула и завършва отново в нула.

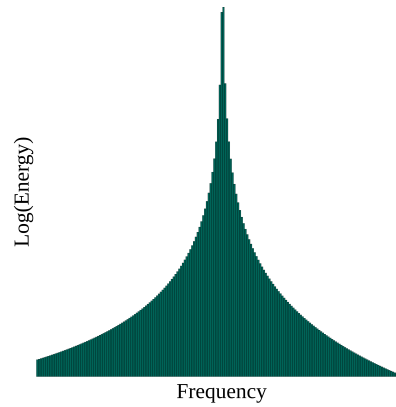
---

<sup>4</sup>Прозорецът е моята врата и аз вървя към тях и ги разпитвам.





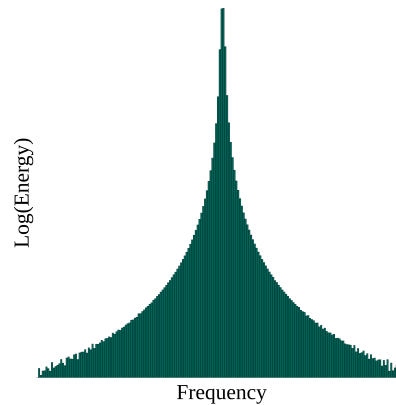
(а) Действие на правоъгълен прозорец върху синусоида



(б) Спектър на синусоида с правоъгълен прозорец



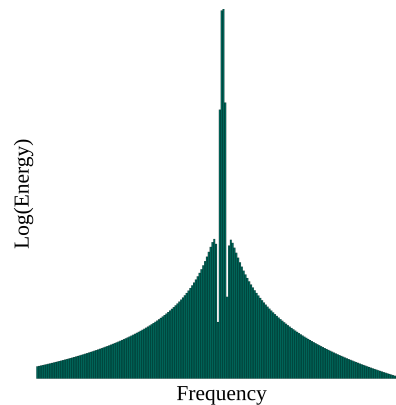
(в) Действие на прозорец на Хан върху синусоида



(г) Спектър на синусоида с прозорец на Хан



(д) Действие на прозорец на Хеминг върху синусоида



(е) Спектър на синусоида с прозорец на Хеминг

Фигура 2.4.2: Действие на често срещани прозоречни функции

Най-лесният прозорец, който постига желаният ефект, е правоъгълният прозорец с интервал  $[0, N]$  така:

$$w_{rec}[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ако умножим проста синусоида по правоъгълен прозорец, се вижда на [Фигура 2.4.2](#), че честотното представяне се отдалечава много от "истинската", която би трябвало да представлява единична делта функция в

основната честота на синусоида. За тази цел се въвеждат по-сложни прозоречни функции като тази на Хан и тази на Хеминг, представени съответно с

$$w_{hanning}[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N}, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad w_{hamming}[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N}, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

с интервал  $[0, N]$  са най-често ползвани. Поведението им в честотния домейн може също да се види на

След като фреймовете вече са периодични, на всеки от тях се прави Фурие преобразуване. За да се възползваме от факта, че сигналът е реален, се използва Бързо Фурие преобразуване<sup>5</sup>.

За да се моделира по-реалистично възприятието на звука, трябва да се отчете феноменът, че хората възприемат гразнителите чрез сетивата си логаритмично, в частност и звука. Този факт е отбелязан в закона на Вебер-Фехнер, а именно, че големината на усещането за определено гразнение е пропорционално на логаритъма на самото гразнение. Има различни опити да се направи скала, която по-точно да отразява човешките възприятия. Една такава е Мел скалата, която е изкуствено (емпрично) създадена. Единиците, мелове, са така избрани, че разликата между всеки два съседни да се възприема като еднаква. Връзката между мелове и честотите се задава със следната формулата:

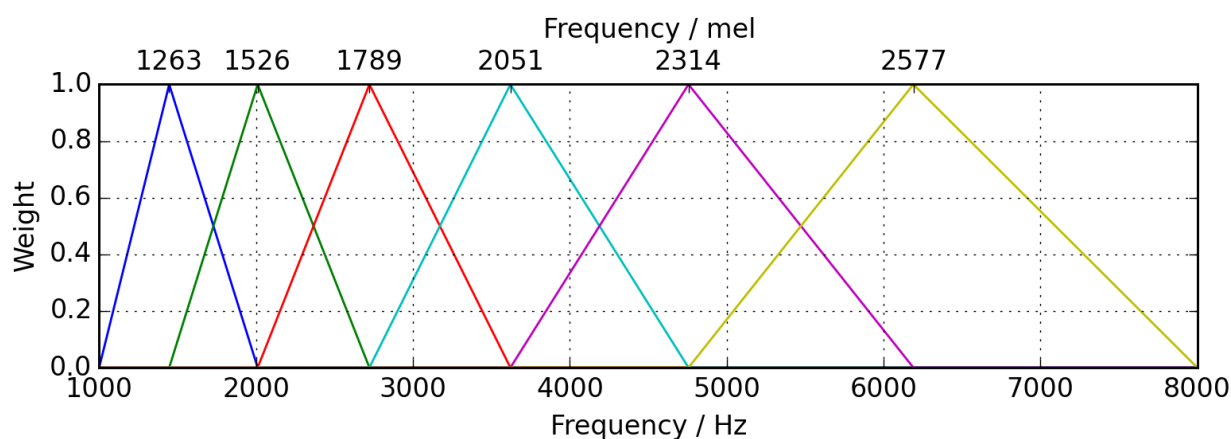
$$m = 2595 \log_{10} \left( 1 + \frac{f}{100} \right)$$

Втората особеност, която трябва да моделираме, е свързана с устройството на слуховия орган, тъй като целим да наподобим човешкото чуване. Главно участие има охлювчето (спирален орган), което е част от вътрешното ухо. Охлювчето е изпълнено с течност и звуковата вълна преминава през нея. По вътрешната част на охлювчето се намира така наречената базилярна мембрана, чиято дължина е покрита с рецепторни клетки - косъмчета. При преминаване на вълната през течната среда, косъмчетата се движат и предизвикват електрически сигнал, който се предава на съответните слухови неврони. Различните части на охлювчето отговарят за различни честоти (по-навътре по спиралата му са по-високите честоти). По принцип, когато два тона с различна честота стигнат до охлювчето едновременно, то ги разграничава като отделни и подава сигнал на два различни неврона. Ако тези честоти са много близки и съответно се обработват от много близки области по повърхността на охлювчето, се получава така нареченото "слухово маскиране", при което двата тона не могат да се различат като отделни и се подават на един и същи неврон. Такива области по повърхността на охлювчето се наричат критични области. При така получените Фурие коефициенти резолюцията е твърде голяма спрямо човешките възприятия и съответно отделните честоти не могат да се разграничават от охлювчето. Тъй като честотите от една критична област се възприемат като една, то можем да разделим скалата на критични

<sup>5</sup>на английски FFT - fast Fourier transform

области и да акумулираме информацията в тях. Това допълнително намаля пространството, в което работим, и е удобно от изчислителна гледна точка. За практически цели често се взима броят на тези области да е 23, като обикновено се взимат застъпващи и амплитудата се умножава по триъгълен прозорец. По този начин честоти, намиращи се между две съседни критични области, допринасят към акумулираните стойности и на двете области.

Като съчетаем тези две особености, получаваме застъпващи се триъгълници в Мел скалата, както е показано на [Фигура 2.4.3](#), по които умножаваме сигнала. Взимаме логаритъм от Енергията на сигнала, за да се подчертае периодичността на сигнала от глотиса, както обяснихме в предния раздел. В крайна сметка, получаваме за всеки фрейм по 23 коефициента, всеки от които стои пред акумулираните логаритми от енергии на честоти в дадена критична област.



Фигура 2.4.3: Мел скала за 16kHz и 6 критични области

Следващата стъпка е теорията за MFCC коефициенти, която представихме в предния раздел, да влезе в сила. За тази цел, разглеждаме новополучените 23 числа като сигнал. Правим Фурие трансформация, като запазваме информация само за реалната част (тоест косинуса), тъй като имагинерната част носи информация за фазата, която не е нужна, до получаването на кепстър. Фундаменталната честота на глотиса и хармоничните ѝ ще образуват сигнал, чиято периодичност е засилена от логаритъма. Този „сигнал“ е с голяма честота в сравнение със „сигнала“, идващ от коефициентите, съответстващи на конфигурацията на вокалния тракт. Затова MFCC коефициентите, отговарящи за него, ще са в по-високите „честоти“ на кепстъра. Това означава, че не са ни нужни всички MFCC коефициенти, а само тези пред ниските „честоти“ на кепстъра. Обикновено в практиката се използват първите 13 MFCC коефициента.

Изменението на MFCC коефициентите във времето може да донесе допълнителна информация за вокалния тракт и подлежащата емоция. Затова в допълнение на 13-те коефициента, се добавят и първите, и вторите им производни по времето. Крайният ефект е, че от входния сигнал получаваме за всеки фрейм 39 коефициента, които ще целим да класифицираме.

## 2.5 Класификация

След като сме избрали характеристичните вектори, които ще извличаме по подаден wav файл, трябва да можем да ги класифицираме по някакъв начин. В проучването [EKK] са разгледани и сравнени различни методи за класификация. Макар че невронните мрежи са по-често използвани в последните публикации в областта, тук ще се подходи по „старомодния“ начин с Гаусови смеси. Показаното за тях съотношение между „прецизност на разпознаване“ и „време за трениране“ е най-добро, според проучването.

Целим да намерим разпределение за всяка от търсените емоции. Всяко непрекъснато разпределение може да се приближи с произволна точност с линейна комбинация на достатъчно на брой гаусиани, където теглата се сумират до 1. Такава сума ще наричаме Гаусова смеска.

Нека за всяка емоция  $e$  сме приближили разпределението на векторите  $\mathbf{x}$  със смеска от  $K$  на брой гаусиани. Нека означим тази смеска с  $(\pi^e, \mu^e, \Sigma^e)$ , където:

$$\pi^e = \{\pi_k^e\}_{k=1}^K, \text{ тегла}$$

$$\mu^e = \{\mu_k^e\}_{k=1}^K$$

$$\Sigma^e = \{\Sigma_k^e\}_{k=1}^K$$

Товага при подаден нов характеристичен вектор  $x$ , ще търсим смеската на коя емоция ще доведе до най-голямо правдоподобие - тоест параметрите на кой модел е най-вероятно да са генерирали наблюдението. При подадени  $(\pi^e, \mu^e, \Sigma^e)$  за дадена емоция  $e$  и характеристичен вектор  $x$ , правдоподобие то се пресмята с формулата:

$$p(x) = \sum_{k=1}^K \pi_k^e \mathcal{N}(x; \mu_k^e, \Sigma_k^e),$$

където  $\mathcal{N}(\bullet, \mu, \Sigma)$  е плътност на нормално разпределение със средно  $\mu$  и ковариационна матрица  $\Sigma$ ,  $\mu_i^e \in \mathbb{R}^m$ , а  $\sum_{k=1}^K \pi_k^e = 1$ ;  $0 \leq \pi_i^e \leq 1$  и в случая на избраните характеристични вектори,  $m = 39$ .

По принцип ковариационната матрица  $\Sigma_i^e \in (\mathbb{R}^{m \times m})$ , но ако приемем, че отделните MFCC коефициенти са независими, то  $\Sigma_i^e$  ще бъде диагонална. За да се намалят параметрите на модела, ще приемем, че това е така.

Алгоритъмът за получаване на въпросните  $\pi^e, \mu^e, \Sigma^e$  е следният:

Нека  $X = (x_1, \dots, x_n)$  са всички характеристични вектори с етикет  $e$ . Искаме правдоподобие то на тези вектори, спрямо  $(\pi^e, \mu^e, \Sigma^e)$  да е възможно най-голямо. Тоест искаме да оптимизираме:

$$p(X | (\pi^e, \mu^e, \Sigma^e)) = \prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \pi_k^e \mathcal{N}(x_i; \mu_k^e, \Sigma_k^e).$$

Тъй като логаритъмът е монотонно растяща функция, то няма значение дали ще оптимизираме функцията със или без логаритъм. За по-голямо удоб-

ство, нека разглеждаме  $\log(p(X|(\pi^e, \mu^e, \Sigma^e)))$ . Тоест имаме:

$$\log(p(X|(\pi^e, \mu^e, \Sigma^e))) = \log\left(\prod_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \pi_k^e \mathcal{N}(x_i; \mu_k^e, \Sigma_k^e)\right) = \sum_{i=1}^n \log\left(\sum_{k=1}^K \pi_k^e \mathcal{N}(x_i; \mu_k^e, \Sigma_k^e)\right)$$

Нека сме фиксирали някаква емоция. За удобство ще означаваме Гаусовата ѝ смеска с  $(\pi, \mu, \Sigma)$ . Оптимизационната задача трябва да отчита ограниченията за  $\pi$ , затова след добавяне на множител на Лагранж има вида:

$$L(\pi, \mu, \Sigma) = \sum_{i=1}^n \log\left(\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i; \mu_k, \Sigma_k)\right) + \lambda\left(\sum_{k=1}^K \pi_k - 1\right)$$

За да максимизираме правдоподобие, търсим решения на

$\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \mu_j}$ ,  $\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \Sigma_j}$  и  $\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \pi_j}$ , нека ги кръстим съответно  $\mu_j^{new}$ ,  $\Sigma_j^{new}$ ,  $\pi_j^{new}$ . В

Приложение Г е показано, че

$$\begin{aligned} \mu_j^{new} &= \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}} \\ \Sigma_j^{new} &= \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{js})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}, & t = s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \\ \pi_j^{new} &= \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}{N}, \end{aligned} \quad \text{където } \gamma_{ij} = \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)}$$

Правдоподобие на Гаусова смеска може да се максимизира с „Алгоритъмът за максимизиране на очакването“<sup>6</sup> [Bis06] по следния начин:

---

<sup>6</sup>Expectation Maximisation

1. Разбиваме  $X = (x_1, \dots, x_n)$  на  $K$  части и взимаме за първоначални стойности на  $\mu_j, \Sigma_j$  съответно средното и вариацията на  $j$ -тата част, а  $\pi_j := \frac{\#_j}{|X|}$ , където  $\#_j$  е броят на векторите в  $j$ -тия клъстер.

2. Пресмятаме  $\gamma_{ij} = \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)}$  с текущите стойности на модела.  $\gamma_{ij}$  казва каква „тежест“ пада върху  $j$ -тата Гаусиана.

3. Пресмятаме

$$\mu_j^{new} = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}$$

$$\Sigma_j^{new} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{js}^{new})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}, & t = s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\pi_j^{new} = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}{N}$$

4. Пресмятаме правдоподобие  $\log(p(X | (\pi^e, \mu^e, \Sigma^e)))$

5. Ако условието за терминиране е изпълнено, то приключваме изпълнението с изход  $(\pi, \mu, \Sigma)$ , иначе се връщаме на 2.

Въпреки че алгоритъмът е сходящ, на практика са използвани следните две условия за терминиране: трябва или разликата между предишното и новото правдоподобие да е по-малко от  $1 \cdot 10^{-5}$ , или цикълът да се е изпълнил 200 пъти.

Друг важен момент е избирането на първоначалните  $K$  клъстера. Емпирично е установено, че избирането на произволно разбиване може да забави намирането на оптимален модел. Затова често като първа стъпка се прави клъстеризация с  $K - means$  и по-точно модификацията K-means++[AV07]. Разликата е в инициализацията на първоначалните центрове на клъстерите, които в  $K - means$  се избират на произволен принцип. В модификацията произволно се избира само първият център, а всеки от останалите  $K - 1$  центъра се избира вероятно, като колкото по-отдалечена е една точка от вече избраните центрове, толкова по-вероятно е да бъде избрана. Първият център се избира на произволен принцип. Намереното по този начин решение е най-много с фактор логаритъм по-лошо от оптималното.

## 2.6 Данни и резултати

Изборът на (свободни) емоционални бази данни за реч всъщност е доста богат. Проблемът произтича от това, че в областта рядко се прави опит за повтаряне на резултати и дори сравняване с чужди такива. Това прави

поставянето на резултатите в перспектива изключително трудно.

Един от най-често използваните източници е берлинската емоционална база данни Емо-DB [Bur+05]. Изборът на специфично тази база данни е по-скоро за да може да се сравни резултатът, постигнат с гореописаните методи, отколкото заради някакво нейно преимущество (освен лесното сдобиване с нея). Емо-DB се състои от 800 записа, в които 10 актьора (5 мъже и 5 жени) изиграват 7 емоции, всяка от които представена с 10 изречения (и няколко допълнителни втори опита). От изразените емоции, избираме тези за гняв, тъга, щастие и неутрално състояние. Броят и дължините на наличните файлове са описани в Таблица 2.1

Емоция	Брой файлове	Обща дължина
Гняв	127	5 мин. 35 сек.
Щастие	71	3 мин. 00 сек.
Неутрално състояние	79	3 мин. 06 сек.
Тъга	61	4 мин. 05 сек.

Таблица 2.1: Дължина и брой файлове в емо-DB за гняв, тъга, щастие и неутрално състояние

В таблица Таблица 2.2 са показани резултати върху берлинската база данни. Изследванията използват подобни характеристики.

Източник	Тип характеристични вектори	Тип класификатор	Резултат
Текущ [SCC11] [VA06] [Gha+17]	GMM	MFCC	82.20%
	SVM	LPCMFCC	82.50%
	Naïve Bayes classifier	MFCC	82.76%
	Random forest	MFCC	79.02%

Таблица 2.2: Резултати върху емо-DB

При разглеждане на матрицата на грешките, показана в Таблица 2.3, се вижда, че класификаторът бърка емоции със сходна енергия, макар те да имат различна валентност. Това е добре известен проблем при разпознаване на емоции от реч. Точно поради тази причина речевите данни често се съчетават с допълнителен източник като видео записи, например.

	Гняв	Щастие	Неутрално	Тъга
Гняв	<b>91.67%</b>	7.50%	0.00%	0.01%
Щастие	37.14%	<b>54.29%</b>	7.14%	1.43%
Неутрално	0.00%	1.43%	<b>82.86%</b>	15.71%
Тъга	0.00%	0.00%	0.00%	<b>100.00%</b>
Общо	<b>82.20%</b>			

Таблица 2.3: Матрица на грешките за база данни емо-DB

Втората база данни, която ще разглеждаме, е за български. Тя е компилирана (мъчително) за целите на тази дипломна работа. Състои се от записи от



предаването “Тази сутрин” [BTV], които са ръчно класифицирани в четирите емоционални категории. Използвани са записи от Януари 2019 година назад до първото налично видео на сайта. Размерите и броя файлове са изложени в Таблица 2.4

Емоция	Брой файлове	Обща дължина
Гняв	51	4 мин. 15 сек.
Щастие	33	2 мин. 45 сек.
Неутрално състояние	18	1 мин. 30 сек.
Тъга	22	1 мин. 59 сек.

Таблица 2.4: Дължина и брой файлове в базата данни от “Тази сутрин” за гняв, тъга, щастие и неутрално състояние

Матрицата на грешките е показана на Таблица 2.5. За съжаление е трудно да се сравнят берлинската и местната база данни. Първо, езикът и етническата принадлежност може би изграят голяма роля в изразяването на емоцията. Второ, ето-DB е записана в контролирана среда от професионални актьори, докато записите от “Тази сутрин” са хаотично записани, а професионалните говорители са умишлено избягвани. При трениране върху берлинската база данни и тестване с “Тази сутрин” се получава разпознаване от 39.69%, а резултат от 34.64% се наблюдава при обратната конфигурация.

	Гняв	Щастие	Неутрално	Тъга
Гняв	<b>72.00%</b>	4.00%	12.00%	12.00%
Щастие	10.00%	<b>73.33%</b>	0.00%	16.67%
Неутрално	6.67%	6.67%	<b>67.67%</b>	20.00%
Тъга	0.00%	0.00%	0.00%	<b>100.00%</b>
Общо	<b>78.00%</b>			

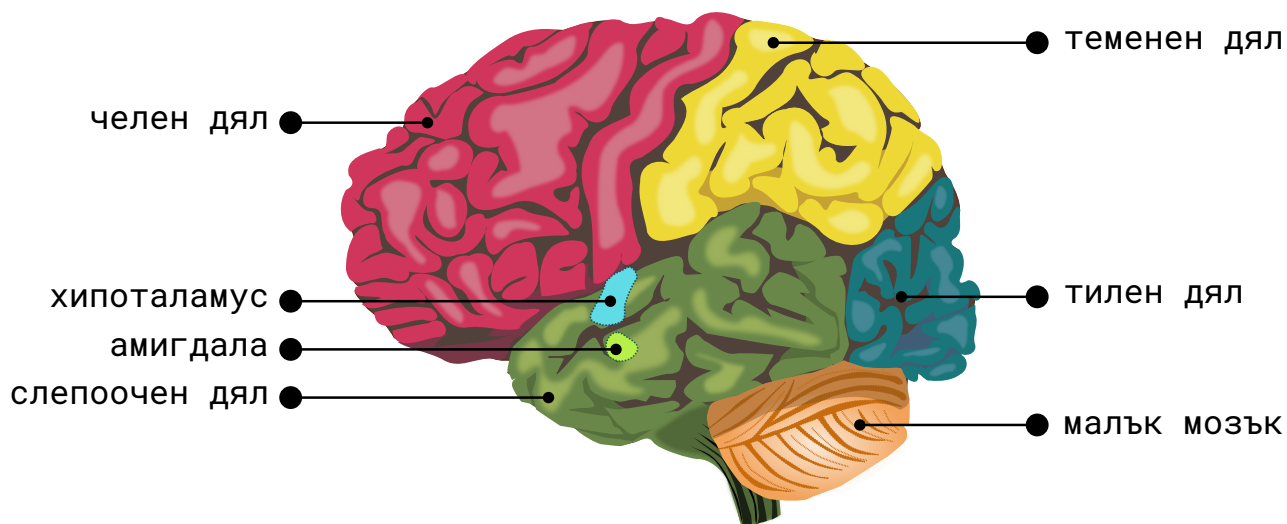
Таблица 2.5: Матрица на грешките за база данни от “Тази сутрин”



# Глава 3

## Сигнал от EEG

### 3.1 Емоции в мозъка



Фигура 3.1.1: Дялове на мозъка

Нервната система се разделя на централна, състояща се от главен и гръбначен мозък, и периферна. Главната функция на нервната система е да контролира работата на тялото. Информацията от околната среда се събира чрез периферната система, предава се към централната, която взема решение за съответна реакция и изпраща обратно съобщение към периферната нервна система.

Невроните (нервни клетки) са базовата функционална единица на нервната система. Те са електрически възбудими и си предават информация посредством електрически сигнали, които се предават през специални връзки между тях - синапси. Електроенцефалографът измерва колебания в напрежението върху повърхността на скалпа чрез множество метални пластинки, наречени електроди, долепени до него от едната страна и свързани с кабел към уреда от другата. Сигналите, получени от Електроенцефалографа, се групират по (полезни) честотни ленти по следния начин:

- $(1 - 4Hz)\delta$  вълни

Асоциират се с така наречения бавновълнов сън<sup>1</sup>, тоест най-дълбоката фаза на съня.

- $(4 - 8\text{Hz})\theta$  вълни

Има два вида  $\theta$  вълни. Едните се засичат в хипокампа (частта от мозъка, свързана с формирането на спомени) и произходът им не е съвсем ясен, има разнообразни изследвания с плъхове, които изследват този вид  $\theta$ -ритъм. Другите се наричат корови и са свързани с фазата на оживено сънуване<sup>2</sup>.

- $(8 - 12\text{Hz})\alpha$  вълни

Това е най-добре изучената честотна лента. Асоциират се със спокойно будно състояние със затворени очи.

- $(13 - 30\text{Hz})\beta$  вълни

$\beta$  вълните се асоциират с нормално будно състояние.

- $(30 - 50\text{Hz})\gamma$  вълни (ниски)

Според проучвания, те се свързват с изострено внимание, работеща краткосрочна и дългосрочна памет.

Главното действие на централната нервна система се осъществява в мозъчната кора, която обхваща 40% процента от обема на главния мозък. Мозъчната кора се дели на няколко дяла:

- Челен дял

Този дял се свързва с всякакви когнитивни умения. Отговорен и за моторните функции - тоест с умението да движим мускулите си доброволно.

- Теменен дял

Той е отговорен за приемането и съчетаването на сетивна информация. Главната му функция се описва с действието „диференциране на две точки“ - това е възможността на мозъка да различи, че два отделни предмета, докосващи кожата, са наистина различни, а не един.

По този начин теменният дял участва в съставни действия като разпознаване на лица и сцени.

- Тулен дял

Тилният дял е отговорен за зрението - разпознава заобикалящата среда, детайли и цветове него. В тилния дял се определя „какво“, „къде“ и „как“ вижда човек.

- Слепоочен дял

Слепоочният дял се състои от структури, които са важни за дългосрочната памет. В него се намира хипокампа, който е главният дял отгова-

---

<sup>1</sup>NREM - non-rapid eye movement sleep

<sup>2</sup>REM - rapid eye movement sleep. Също така чудесна музикална група

рящ за спомените. Амигдалата също е част от слепоочния дял, макар че се намира навътре. Смята се, че тя е отговорна за формиране на емоционален отговор, като е особено обвързана с негативните емоции.

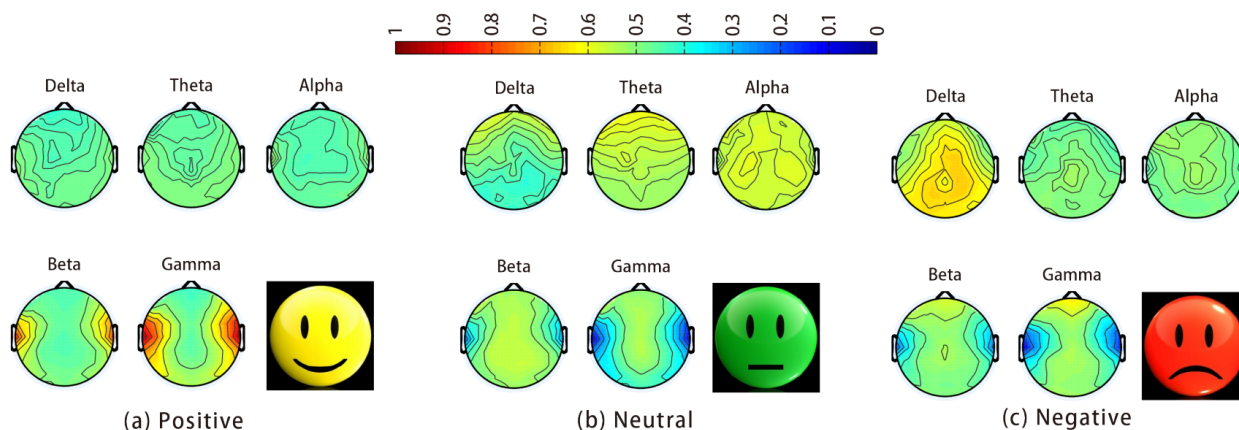
Освен на дялове, разгледаме деленето на мозъчната кора на ляво и дясно полукълбо.

При измерването на напрежението е енцефалограф, се откриват различни модели на емоциите, в зависимост от енергията на  $\theta, \beta, \alpha, \beta, \gamma$  вълните в определени дялове на мозъка.

Например по-голяма активация на  $\alpha$ -вълни в дясната част на челния дял се свързва със стимули, които карат човек да „бяга“ (виж „бий се или бягай“), тоест отговаря за негативните емоции като „познуса“ и „страх“. По-голяма активност на  $\alpha$ -вълни вляво в челния дял се асоциира със позитивни стимули и емоции. Това означава, че асиметрията на челния дял говори за разлика във валентността. Смята се, че бета и гама вълните също носят информация за валентността на емоцията. Например, при позитивни емоции, гама вълните в слепоочния дял почти отсъстват, докато са с висока мощност при негативни емоции.

Активирането на амигдалата, както споменахме, е свързано с негативни емоции. Често я наричат „зона на страха“<sup>3</sup>.

Подобни закономерности могат да се видят на [Фигура 3.1.2](#). Топлограмата е част от изследване([ZZL16]), което цели да намери стабилни шаблони на емоции в ЕЕГ. Опитът се провежда върху едни и същи субекти в различен момент от време, като се разпознават четирите квадранта на активация-валентност пространството.



Фигура 3.1.2: Топлограма на емоциите

Следователно, бихме искали да изследваме енергията на  $\theta, \delta, \alpha, \beta, \gamma$  вълните в различните дялове на мозъка.

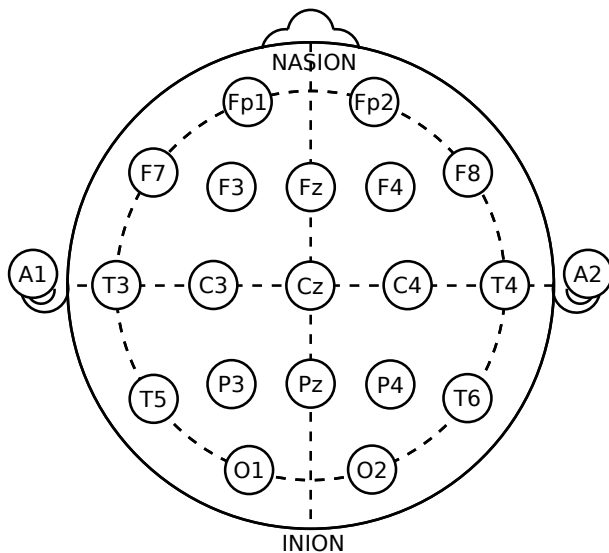
<sup>3</sup>поетично

## 3.2 Характеристики

### 3.2.1 Избор

Тук или трябва да отбележа, че се мерят енергиите в съответните банду-  
итове, или ако ги правя противоположни да опиша това.

### 3.2.2 Извличане



Фигура 3.2.1: Система за разпреде-  
ляне на електроди 10-20

Данните от енцефалографа се прочитат, като обработката на сигнала от всеки електрод е следната:

1. Целият сигнал за даден електрод се прочита
2. Сигналът се разбива на фреймове с дължина  $200ms$  и стъпка  $150ms$ . На всеки фрейм се прави Хаминг прозорец и се намира Фурие преобразува-  
нието
3. Енергията на Фурие коефициентите се сумират в съответните чес-  
тотните ленти, отговарящи на дадена вълна. Тъй като се асоциират  
със състояние на дълбок сън,  $\theta$  вълните не се взимат предвид. В та-  
къв случай имаме четири честотни ленти:  $4-8Hz(\delta)$ ,  $8-12Hz(\alpha)$ ,  $12-30Hz(\beta)$ ,  
 $30-50Hz(\gamma)$

В крайна сметка за всеки от подадените файлове, съответстващи на елек-  
троенцефалограма, получаваме за всеки електрод натрупаните стойности  
в четирите честотни ленти за всеки фрейм. Ако броят на фреймовете е  $F$ ,  
то имаме  $F \times (19 \times 4)$  числа.

## 3.3 Класификация

За класификацията се използва моделът, използващ Гаусови смеси, описан в  
[Раздел 2.5](#).

### 3.4 Данни и резултати

Наличните бази данни за ЕЕГ са много по-малко от тези за реч. Това вероятно се дължи на факта, че съставянето им е доста по-трудно. Освен че изискват специална апаратура (тоест електроенцефалограф), изискванията към постановката са много по-строги. Тъй като се цели при записа да има възможно най-малко дразнителни, освен представените от експеримента, трябва да се подсигури, че субектът е седнал удобно, на определено разстояние от монитора, не е болен, не му е студено или топло, не мига (или е със затворени очи), не говори и като цяло се движи възможно най-малко. Ако нещо в постановката се наруши, например човекът е мигнал, се трие целият запис. Често се подсигури, че не е бил консумиран кофеин (поне от страна на субекта, но вероятно е препоръчително и от страна на учения) в последните 24 часа и човекът да е имал нормален цикъл на съня. Допълнителна информация от типа дали субектът пуши, дали е левичар или десничар и какъв е по професия, се съобщава, тъй като не се знае дали не влияе на експеримента по някакъв начин.

Целта на тази дипломна работа обаче е да се изследва комбинирането на сигнали от реч и ЕЕГ сигнали. Това изисква да имаме такава постановка, при която човекът говори, докато е свързан към електроенцефалограф, за да имаме данни от двата сигнала в един същи момент от време. Ако мигането е неприемливо, то комплексна дейност като говоренето е направо еретична за наличните бази данни. Разликата между ЕЕГ данни, извлечени докато субектът говори, и такива, при които субектът не говори, е много голяма, тъй като данните с намесена реч са много "по-шумни". Поради тази причина, и поради липсата<sup>4</sup> на подходяща база, такава трябваше да бъде създадена за конкретните цели.

Идеята е да се съчетаят най-често използваните похвати за създаване на емоционална речева база от една страна и емоционална ЕЕГ база от друга.

За реч най-често се използва една от следните две постановки: субектите (най-често актьори) четат предварително избрани емоционални изречения; субектите разказват емоционална случка по свой избор, например нещо преживяно или прочетено.

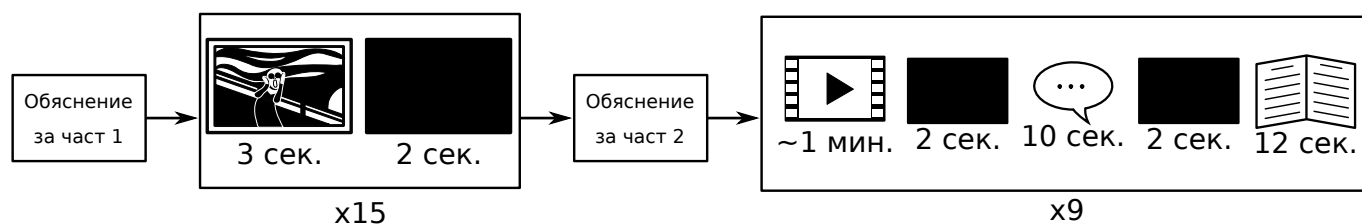
За ЕЕГ най-често се използва един от следните стимули: гледане на специално подбрани емоционални картинки<sup>5</sup>; слушане на специално подбрана емоционална музика; гледане на специално избрани емоционални клипчета.

Проблемът тук е, че за разлика от речевите бази данни, където не е нужно актьорите да изпитват емоцията, която изразяват, за да се отрази емоцията в ЕЕГ сигнала, емоцията трябва да е искрена. Тази задача е малко по-различна от задачата в стандартните ЕЕГ бази данни, защото тук изразяването на емоцията трябва да е по-продължително от времетраенето на картинка или клипче - трябва да бъде запазена докато субектът гово-

<sup>4</sup>до колкото ни (или поне "ми") е известно

<sup>5</sup>Например <https://web.archive.org/save/https://csea.php.ufl.edu/media/iapsmessage.html>

ри.



Първият опит за емоционална база данни цели резултатът да е възможно най-близък до съществуващите вече ЕЕГ бази, но все пак да се съобразява с конкретните ни изискванията. Експериментът се състои от две части. В първата част се гледат 15 специално избрани картинки (5 положителни, 5 отрицателни, 5 неутрални), като между картинките има пауза с черен екран. След това започва втората фаза, като първо на екрана се показва обяснение за протичането ѝ. Избира се едно от предварително подбраните емоционални клипчета (със средна дължина от една минута), субектът описва какво е видял на клипчето в продължение на десет секунди и след това чете показан на екрана текст за 12 секунди. Клипчетата са 3 за щастие, 4 за тъга и 3 за гняв, като са подбрани от произволни източници (YouTube, сайтове за новини и телевизионни предавания) съгласно обратната връзка на въпроса "Какво те прави тъжен/ядосан/щастлив", зададен на около пет произволни човека. Текстовете, които субектът чете, са подбрани от прогнозата за времето, като се счита, че това ще произведе неутрални данни. Субектът предварително знае постановката на опита и е помолен да ограничи движенията си максимално. Постановката е показана схематично на [Фигура ??](#), а информация за получените данни може да се види на [Таблица 3.1](#).

Емоция	Брой файлове	Обща дължина
Гняв	3	0 мин. 30 сек.
Щастие	3	0 мин. 30 сек.
Неутрално състояние	10	2 мин. 00 сек.
Тъга	4	0 мин. 40 сек.

Таблица 3.1: Дължина и брой файлове от първия опит

След експеримента първият и единствен субект сподели, че видеата не са успели да предизвикат искрена емоция. Това означава, че информацията за емоцията ще отсъства от ЕЕГ сигнала. Оказва се, че периодът от 1-2 минути, през който се гледа видео, е твърде кратък, за да може да се събуди непринудена емоционална реакция, ако видеата не са специално избрани с предварително знание за конкретния субект. Вероятно може да се постигне желаният ефект, ако гледаните видеа са достатъчно дълги, за да може субектът да развие емоционална привързаност, например с дължината на филм. За съжаление обаче, използването на мокри електроди позволява максимална продължителност на целия експеримент около 10-15 минути, след което време соленият разтвор по електродите изсъхва и съпротивлението им става твърде голямо, за да може да ги отчете уредът. Използването на картинки е безсмислено в конкретния случай, тъй като (се предполага че)



събуждат емоция за части от секундата. Използването на музикални видеа изисква субектът да е чувствителен към музика.

Всъщност съществува проблемът, че емоциите имат твърде различен характер и заради това се предизвикват и изразяват по различен начин. Щастие то се предизвиква по-лесно от гнева чрез визуални стимули. Гневът обикновено изисква субектът да има лично отношение към темата, която му се представя, независимо от стимула. Щастие то има много по-момента изява от тъгата, която се изразява продължително, дори понякога в продължение на дни. Като цяло емоциите с ниска енергия се изразяват много по-трудно вербално от тези с висока. Но най-големият проблем идва, когато добавим и факта, че изглежда хората възприемат и изразяват емоцията по коренно различен начин един от друг.

Подобен тип проблеми често се разрешава със стратегия "разделяй и владей", затова естествено възниква въпросът дали може вместо да се намерят универсални за всички хора стимули, може да се намери разбиране на хората, спрямо начинът, по който се предизвиква емоция у тях (тяхната емоционална интелигентност). Подходяща е може би класификацията на Юнг, която цели да определи типа на характера. При нея всеки човек попада в една от 16 категории, в зависимост от това къде стои по четирите оси: интровертен-екстровертен, наблюдаващ-интуитивен, чувстващ-мислещ, съдещ-приемащ<sup>6</sup>. Тоест дали ако двама човека попадат в една и съща категория, емоциите се предизвикват (и евентуално изразяват) по сходен начин. Класификацията на Юнг е избрана, тъй като има лесно-достъпни тестове, които "определят" класа. За целта петима участници са помолени да направят тест за класифициране на характери и след това да попълнят специално съставена съставена анкета. Тя цели да провери какъв тип стимул е нужен за предизвикването на всяка една от емоциите у участниците и да покаже евентуалната връзката с класификацията на Юнг. Първо, за всяка една от изследваните емоции се търси най-подходящият стимул, като възможностите са:

1. Текст
2. Видео
3. Разговор
4. Картинка
5. Медията няма значение, само контекстът

Участниците имат право да избират повече от един отговор.

Отговорите показват, че докато тъгата може да бъде предизвикана чрез пасивни методи като текст, щастие то и гневът се предизвикват по-лесно в социална обстановка - чрез разговор. За съжаление се вижда, че няма пряка връзка между класификацията на Юнг и отговорите на анкетата. Това не означава, че по принцип този метод е неприложим, а само, че е нужен подходящ тест. Повечето признати в психологията тестове, обаче, изискват и

---

<sup>6</sup>16 Personalities: Extraverted-Introverted, Sensing-Intuition, Thinking-Feeling, Judging-Perceiving

професионално знание.

Във втората част от анкетата резултатите стават още по-объркани. В нея участниците са помолени да изберат видео, картинка, текст или да опишат нещо, което ги предразполага емоционално за всяка една от емоциите. Оказва се, че предизвикването на емоция е твърде лично и няма за сичащи се теми измежду всички отговори.

Последната част на анкетата не донесе допълнителен успех. В нея на участниците са представени стимули (видео и картинки), за които трябва да бъде определена емоцията измежду неутрално състояние, щастие, тъга и гняв. Дори тук отговорите на участниците не съвпадат за повечето емоции.

От наличните данни не само се вижда, че хората, попадащи в един клас на Юнг, не споделят сходна чувствителност към стимулите, а че отговорите на всички участници генерално се различават. От една страна, ограничаването на възможните отговори за участниците би довело до по-голямо съвпадение на отговорите им, от друга, колкото повече трябва да променят отговорите си участниците, за да се вметят във формата, толкова по-принудена ще е и записаната емоция. Всъщност не е особено учудващо, че емоциите са толкова индивидуални. Според някои психолози ([Bar17]), емоциите изобщо не са универсални, а напротив - те са изцяло социална конструкция. Това означава, че ако участниците са от различен социален кръг (различна възраст, условия на живот, интереси), има малък шанс да имат сходен начин за изразяването на емоциите си. Ако обстановката и опитът формират емоцията у човек, то тогава комбинациите обстановка-човек-опит са почти уникални и съответно възприемането на емоция - индивидуално. В случая нито класическата, нито алтернативната теория дават обяснение как да се предизвика непринудена емоция в повече от един участник чрез честен експеримент.

Затова можем да направим по-малко честен опит, такъв, при който условията на експеримента зависят от самия субект, с цел да получим по-непринудена емоцията. С този замисъл е проведен вторият експеримент, при който емоцията се предизвиква от лични преживявания. От една страна, тъй като стимулът е избран от самия участник, не можем да гарантираме равни условия - тоест субектите могат да изберат емоционално изживяване с различна интензивност. От друга, дори постановката на опита да е еднаква за всички, това не важи и за предизвиканата емоция. В някакъв смисъл, идеята е субектите да осигурят честността на експеримента, а не самата постановка на опита.

Вторият опит се отдалечава повече от стандартните постановки за ЕЕГ бази данни, тъй като използва множество различни дразнителни, целящи да предразположи максимално участниците, според собствените им нужди. Дава се възможност на субектите сами да изберат видео, които им действат емоционално, както и аудио запис, който да слушат по време на експеримента. Останалата част протича просто: субектът си избира емоция по свое желание и сам контролира включването на стимули. При



натискане на бутон "Enter" се показва видео от предварително избраните, натискане на бутон "Space" означава съответно начало и край на аудио запис, по време на който субектът е свободен да говори каквото си избере. В експеримента няма минимален брой записи, които субектът трябва да направи, нито определена тема. След първите петнайсет минути, експериментът се прекъсва (ако е продължил толкова дълго), тъй като електродите изсъхват. Информация за получените данни е показана на [Таблица 3.2](#)

Емоция	Брой файлове	Обща дължина
Гняв	18	6 мин. 53 сек.
Щастие	0	0 мин. 00 сек.
Неутрално състояние	31	8 мин. 12 сек.
Тъга	45	15 мин. 13 сек.

Таблица 3.2: Дължина и брой файлове от втория опит

При втората постановката е намесено много движение от страна на субекта, тъй като от него се изисква да натиска бутони. Начинът, по който протича експериментът за различните субекти, може да е напълно различен. Въпреки това, резултатите върху ЕЕГ данните значително се подобряват при данните от втория експеримент, което може да се обясни с липсата на искрена емоция при данните от първия експеримент. Тоест, независимо, че новите данни съдържат много повече шум, те съдържат и много полезна информация. Тъй като втората постановка не съдържа положителни данни, използваме тези от първия опит, за да можем да ги сравним. Резултатите са показани съответно на [Таблица 3.3](#) и [Таблица 3.4](#). За пълнота, при класификацията само на речта от първия и втория експеримент се наблюдава средна класификационна точност от съответно 50.00% и 75.56%. Това показва, че данните от първия опит съдържат по-малко полезна информация и в сигнала от реч, което вероятно се дължи на факта, че субектът нито е изпитал, нито е успял да изиграе емоцията добре.

	Гняв	Щастие	Неутрално	Тъга
Гняв	<b>33.33%</b>	0.00%	33.33%	33.33%
Щастие	00.00%	<b>100.00%</b>	0.00%	0.00%
Неутрално	11.11%	0.00%	<b>88.89%</b>	0.00%
Тъга	0.00%	0.00%	100.00%	<b>0.00%</b>
Общо	<b>55.56%</b>			

Таблица 3.3: Матрица на грешките от първия опит

Тъй като данните са малко, в следващия раздел ще обединим резултата от първия и втория експеримент. Матрицата на грешките при класификацията на ЕЕГ сигнала за обединените данни може да се види на [Таблица 3.5](#)

	Гняв	Щастие	Неутрално	Тъга
Гняв	<b>100.00%</b>	0.00%	0.00%	0.00%
Щастие	00.00%	<b>100.00%</b>	0.00%	0.00%
Неутрално	0.00%	0.00%	<b>100.0%</b>	0.00%
Тъга	0.00%	0.00%	4.44%	<b>95.56%</b>
Общо	<b>98.89%</b>			

Таблица 3.4: Матрица на грешките от втория опит

	Гняв	Щастие	Неутрално	Тъга
Гняв	<b>80.33%</b>	5.00%	15.33%	0.00%
Щастие	25.00%	<b>75.00%</b>	0.00%	0.00%
Неутрално	0.00%	2.50%	<b>97.50%</b>	0.00%
Тъга	0.00%	2.08%	10.42%	<b>87.50%</b>
Общо	<b>85.00%</b>			

Таблица 3.5: Матрица на грешките при комбиниране на данните от първия и втория опит

## Глава 4

# Двойната звезда

В предните раздели описахме получаването на класификатори за сигнали от реч и ЕЕГ поотделно. Сега въпросът е дали можем да съчетаем по някакъв начин данните или класификаторите с цел да получим по-добра класификационна точност. Разгледаните подходи са два. Първият е наивен и съчетава самите характеристични вектори, а вторият - вече получените класификатори.

## 4.1 Съчетаване чрез конкатенация на характеристичните вектори

### 4.1.1 Описание

Тук идеята е възможно най-проста - конкатенираме характеристичните вектори от речта и тези от ЕЕГ сигнала до получаване на нов вектор и тренираме класификатора, описан в [Раздел 2.5](#). Единствената трудност е, че векторите за реч се взимат много по-често. За да има еднакъв брой вектори за двата сигнала, тези за речта се осредняват на всеки 200 ms.

### 4.1.2 Резултати

На таблица [Таблица 4.1](#) е показана средната класификационна точност за всяка една от емоциите за двата класификатора поотделно и накрая за този, получен при конкатенацията на векторите. Всяка от Гаусовите смеси на класификатора на реч има 8 гаусиани, докато този за ЕЕГ и полученият при конкатенация имат по 3 гаусиани. От таблицата се вижда, че този метод не довежда до подобрение. Това вероятно се дължи на малкото количество данни, тъй като векторите, с които работим, са  $39 + 76 = 115$  мерни. Това означава, че за да видим повече проявления на характеристиките, ще са нужни много повече данни. Освен набавянето на допълнително данни, може да се намали пространството чрез факторен анализ, за да се подобри обучението на класификатора.

Емоция	Само реч	Само ЕЕГ	Конкатенация
Гняв	85.00%	80.00%	85.00%
Щастие	75.00%	75.00%	50.00%
Неутрално	7.50%	97.50%	97.50%
Тъга	85.42%	87.50%	87.50%
Общо	<b>63.23%</b>	<b>85.00%</b>	<b>80.00%</b>

Таблица 4.1: Класификационна точност на класификатор за реч, класификатор за ЕЕГ и класификатор, получен при конкатенация на характеристичните вектори

## 4.2 Съчетаване чрез AdaBoost

### 4.2.1 Описание

Това, което имаме са два “слаби” класификатора, които искаме да комбинираме. Полученият класификатор е линейна комбинация на двата слаби, а теглата се намират чрез AdaBoost алгоритъма. В оригиналния си вариант, описан в сдфсдф, се говори за бинарни класификатори, но тъй като в случая имаме повече от два класа, използваме модификацията от [Zhu+06]. Нека имаме тренировъчни примери  $(x_1, c_1) \dots (x_n, c_n)$ , където  $x_i \in \mathbb{R}^p, c_i \in \mathbb{N}, 1 \leq c_i \leq K$ , а  $K$  е броят класове. Множеството на слабите класификатори ще означаваме с  $\mathcal{H}$ , като всяко  $h_i \in \mathcal{H}$  по вход  $x$  определя класа му  $c$ . Нека  $T$  е константа, която означава броят итерации на алгоритъма. Тогава търсеният класификатор е:

$$H(x) = \sum_{i=1}^T \alpha_i h_i(x)$$

Алгоритъмът AdaBoost избира на всяка стъпка класификатор измежду наличните  $|\mathcal{H}|$  и намира съответното му теглото  $\alpha$ . Данните се взимат с тегла, които отразяват доколко текущо-взетите класификатори са сбъркали върху тях. Следващият класификатор, който се избира, е такъв, който се представя добре върху примерите, които останалите класификатори бъркат. Тъй като се избира класификатор, който минимизира грешката върху претеглените данни (претеглена грешка), то и полученият класификатор  $H$  ще има минимална грешка върху тренировъчното множество (както също може да се види в сдфсдф). Модифицираният AdaBoost алгоритъм е следният:

1. Инициализираме първоначалните тегла

$$w_i = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$$

2. За всяко  $t$  от 1 до  $T$  се прави следното:

(а) Избираме 
$$h_t = \underset{h \in \mathcal{H}}{\operatorname{argmin}} \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbb{1}(h(x_i) \neq c_i)}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

(б) Пресмятаме грешката

$$\varepsilon_t = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbb{1}(h(x_i) \neq c_i)}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

(в) Пресмятаме теглото

$$\alpha_t = \log \frac{1 - \varepsilon_t}{\varepsilon_t}$$

(г) Обновяваме теглата

$$w_i' = \frac{w_i \exp(\alpha_t \mathbb{1}(h_t(x_i) \neq c_i))}{\sum_{j=1}^n w_j \exp(\alpha_t \mathbb{1}(h_t(x_j) \neq c_j))}$$

$$w_i = w_i', i = 1 \dots n$$

3. Изход  $H(x) = \underset{c}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^T \alpha_t \mathbb{1}(h_t(x) = c)$

$n$  е броят на тренировъчните примери

Избираме това  $h$ , което минимизира грешката на така претеглените данни

или ако  $h_t(x, c)$  връща вероятността  $x$  да е от клас  $c$ , то  $H(x) = \underset{c}{\operatorname{argmax}} \sum_{t=1}^T \alpha_t h_t(x, c)$

В случая, имаме само два класификатора. Въпреки това, се извършват повече от две итерации, като на всяка стъпка се избира някой от двата класификатора и тежестта му  $\alpha$  се обновява.

## 4.2.2 Резултати

Първият опит е да се провери дали AdaBoost допринася за класификационната точност на ниво файл. Резултатите са показани на [Таблица 4.2](#)

От тях се вижда, че полученият класификатор има същата класификационна точност като този за ЕЕГ. При анализ на резултатите се вижда, че макар че в наличните данни има файл, на който класификаторът на реч бърка, но този за ЕЕГ познава, няма свидетел за обратното. AdaBoost се научава да вярва много повече на класификатора за ЕЕГ, което се отразява в разликата на  $\alpha$ -те - теглото на класификатора за ЕЕГ е тройно по-голямо от това на класификатора за реч.

Оказва се, че ако разглеждаме класификацията на всеки вектор поотделно, то в данните има такъв вектор, за който класификаторът на реч познава,

Емоция	Само реч	Само ЕЕГ	AdaBoost
Гняв	85.00%	80.00%	80.00%
Щастие	75.00%	75.00%	75.00%
Неутрално	7.50%	97.50%	97.50%
Тъга	85.42%	87.50%	87.50%
Общо	<b>63.23%</b>	<b>85.00%</b>	<b>85.00%</b>

Таблица 4.2: Класификационна точност на ниво файл на класификатор за реч, класификатор за ЕЕГ и класификатор, получен чрез AdaBoost от двата класификатора

но този за ЕЕГ - не. Можем да видим ефекта на AdaBoost, ако разглеждаме класификацията на ниво вектор. Резултатите са показани в [Таблица 4.3](#).

Емоция	Само реч	Само ЕЕГ	AdaBoost
Гняв	41.53%	53.05%	53.37%
Щастие	37.35%	44.44%	43.73%
Неутрално	32.91%	66.72%	66.67%
Тъга	39.66 %	70.38%	70.87%
Общо	<b>37.86%</b>	<b>58.65%</b>	<b>58.66%</b>

Таблица 4.3: Класификационна точност на ниво вектор на класификатор за реч, класификатор за ЕЕГ и класификатор, получен чрез AdaBoost от двата класификатора

От тях се вижда минимално подобрение от 0.01%, което е недостатъчно да промени резултата на ниво файл. За да можем да научим комбиниран класификатор от двата налични с класификационна точност по-голяма от тази на по-добрия от двата, ни трябва свидетели за ситуации, в които единият класификатор бърка, а другият познава, и обратното. В наличните данни няма достатъчно пример за посоката, в която класификаторът за реч познава, а този за ЕЕГ бърка, затова и полученият комбиниран класификатор не донася подобрение.

## Глава 5

### Големият портрет

# Приложение А

## Фурие приложение

### А.1 Дефиниция

Понякога е по-лесно да се моделира поведението на система, ако можем да кажем как ще се държи системата за всяка честота поотделно. Например, по този начин можем да нулираме всички честоти под или над дадена или да усилим определена честоти. За тази цел ни трябва еквивалентно представяне на даден сигнал във времето като съвкупност от синусоиди с различни честоти. Нека имаме дискретен във времето сигнал  $x$ , който е периодичен с фундаментален период  $T$ , измерен в секунди. Тоест,

$$x(t) = x(t + T)$$

Честотата, изразена в херци (периоди в секунда), се означава с  $f_0 = \frac{1}{T}$  и означава "брой периоди в секунда". Нарича се фундаментална честота.

Честотата, изразена в радиани в секунда, се означава с  $\omega_0 = f_0 2\pi$  и се нарича фундаментална ъглова честота.

Товава представянето, което търсим има вида:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{2k\pi it}{T}}, \quad (\text{A.1.1})$$

където  $e^{2k\pi it/T}$  е сигнал с честота  $\frac{k}{T}$ .

Представянето от [Уравнение A.1.1](#) се нарича развиване в ред на Фурие за сигнала  $x(t)$ . Нека намерим вида на коефициентите  $a_k$ .

Умножаваме [Уравнение A.1.1](#) с  $e^{-2n\pi it/T}$ , тоест:

$$x(t)e^{-\frac{2n\pi it}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{2k\pi it}{T}} e^{-\frac{2n\pi it}{T}}$$

Ако интегрираме двете страни от 0 до фундаменталния период  $T$ , получаваме



$$\int_0^T x(t) e^{-\frac{2n\pi it}{T}} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\frac{2k\pi it}{T}} e^{-\frac{2n\pi it}{T}} dt$$

$$\int_0^T x(t) e^{-\frac{2n\pi it}{T}} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[ \int_0^T e^{\frac{2(k-n)\pi it}{T}} dt \right]$$

Да разгледаме  $\int_0^T e^{\frac{2(k-n)\pi it}{T}} dt$

$$\int_0^T e^{\frac{2(k-n)\pi it}{T}} dt = \int_0^T \cos\left(\frac{2(k-n)\pi t}{T}\right) dt + i \int_0^T \sin\left(\frac{2(k-n)\pi t}{T}\right) dt =$$

$$= \begin{cases} 1 \Big|_0^T + 0, & n = k \\ 0 + 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} T, & n = k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Което означава, че

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-\frac{2n\pi it}{T}} dt$$

Това е вярно и за всеки друг интервал с дължина  $T$ :

$$a_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-\frac{2n\pi it}{T}} dt \quad (\text{A.1.2})$$

Може да се покаже [OWN96], че редът на Фурие за сигнал  $x(t)$  е сходящ и съответно коефициентите от [Уравнение A.1.2](#) са крайни, ако е изпълнено че:

$$\int_T |x(t)|^2 < \infty,$$

Още повече, ако сигналът  $x$  е дискретен и периодичен (какъвто е случаят, когато семплираме речев сигнал) и периодичен  $x[n] = x[n + N]$ , имаме само  $N$  различни стойности:

$$e^{\frac{2(k+N)\pi in}{N}} = e^{\frac{2k\pi in}{N}} e^{\frac{2N\pi in}{N}} = e^{\frac{2k\pi in}{N}}, \text{ тъй като } e^{2\pi in} = \cos(2\pi n) + i\sin(2\pi n) = 1$$

следователно са ни достатъчни само кои да е  $N$  последователни стойности:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{a}_k e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \\ x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Уравнение A.1.3 се нарича ред на Фурие за дискретен във времето сигнал.

Коефициентите можем да намерим по същия начин като в непрекъснатия случай, но използвайки сума, вместо интеграл:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i r n}{N}} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{\frac{2\pi i k n}{N}} e^{-\frac{2\pi i r n}{N}} = \\ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i r n}{N}} &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i (k-r)n}{N}} \end{aligned}$$

и отново използваме, че

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i (k-r)n}{N}} &= \begin{cases} N, & k-r \equiv 0 \pmod{N} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \\ \Rightarrow a_r &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i r n}{N}} \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

което е изпълнено и за всеки друг интервал с дължина  $N$ . Ще използваме означенията  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$  или  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} X(e^{i\omega_k})$ ,

където  $a_k = X(e^{\frac{2\pi i k}{N}}) = X(e^{i\omega_k})$  за  $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$

## A.2 Свойства

- Изместване във времето

Ако  $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ , то  $x[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k = a_k e^{-\frac{2\pi i n_0 k}{N}}$

Тъй като Уравнение A.1.4 е изпълнено за всеки интервал, то можем да изберем интервала  $[n_0, T - 1 + n_0]$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{N-1+n_0} x[n - n_0] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \sum_{n=n_0}^{N-1+n_0} x[n - n_0] e^{-\frac{2\pi i k (n-n_0)}{N}} e^{-\frac{2\pi i k n_0}{N}} = \\ e^{-\frac{2\pi i k n_0}{N}} \sum_{\tau=0}^{T-1} x[\tau] e^{-\frac{2\pi i k \tau}{N}} &= e^{-\frac{2\pi i k n_0}{N}} a_k \end{aligned}$$

- Симетричност на комплексно спрегнатите за реален сигнал

Ако  $x[n] = \bar{x}[n]$  е реален сигнал, за който  $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} a_k$ , то  $\bar{a}_k = a_{-k}$

От уравнение [Уравнение A.1.4](#) следва, че:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

$$\bar{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{x[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{x[n]} e^{\frac{2\pi i k n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

$$\Rightarrow \bar{a}_k = a_{-k} = a_{N-k}$$

Това означава, че за реални сигнали са достатъчни първите  $\frac{N}{2} + 1$  коефициенти, тъй като останалите са им комплексно спрегнати. Честотата, която отговаря на  $a_{\frac{N}{2}}$  се нарича Найкуист честота.

## A.3 Конволюция

Често ще се налага да използваме връзката между умножение, Фурие трансформация и операцията конволюция.

**Дефиниция.** (Дискретна конволюция)

Ако  $f, g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ , дискретна конволюция (конволюционна сума) на  $f$  и  $g$ , наричаме  $(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$

Ако  $f$  и  $g$  са периодични с период  $N$ , то  $(f * g)[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k]g[n-k]$

**Пример 1** (Теорема за конволюцията за периодични дискретни сигнали). Ако  $f[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} F(e^{i\omega_k})$  и  $g[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} G(e^{i\omega_k})$  и  $f, g$  са периодици с период  $N$

$(f * g)[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} F(e^{i\omega_k}) \cdot G(e^{i\omega_k})$  Дуалното твърдение също е вярно за непрекъснатия вариант на конволюция.

$$F(e^{i\omega_k}) = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

$$G(e^{i\omega_k}) = b_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

Нека  $h[n] = (f * g)[n]$  и  $(f * g)[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} H(e^{i\omega_k})$ .

Тогава:

$$\begin{aligned}
 H(e^{i\omega_k}) &= c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (f * g)[n] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] g[n-r] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] \sum_{n=0}^{N-1} g[n-r] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] \left[ \sum_{n=0}^{N-1} g[n-r] e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} \right]
 \end{aligned}$$

Нека положим  $y=n-r$

$$= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] \left[ \sum_{y=-r}^{N-1-r} g[y] e^{-\frac{2\pi i k (y+r)}{N}} \right] = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] \left[ \sum_{y=-r}^{N-1-r} g[y] e^{-\frac{2\pi i k y}{N}} \right] e^{-\frac{2\pi i k r}{N}}$$

Понеже  $[-r, N-1-r]$  е интервал с дължина  $N$  е изпълнено:

$$= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f[r] e^{-\frac{2\pi i k r}{N}} N G(e^{i\omega_k}) = N F(e^{i\omega_k}) \cdot G(e^{i\omega_k})$$

# Приложение Б

## Приложение за полюси и нули

### Б.1 Дефиниция

Нека  $z \in \mathbb{C}$ . Видяхме, че предавателната функция  $\mathcal{H}$  на определени системи (и в частност филтри) има вида:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(z) &= \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \\ &= \frac{N(z)}{D(z)} = G \frac{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_M)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_N)},\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

където  $G = b_0/a_0$  и се нарича усилващ коефициент.

С  $\beta_i$  означаваме корените на уравнението  $N(z) = 0$ . Те се наричат нули на системата и  $\lim_{z \rightarrow \beta_i} \mathcal{H}(z) = 0$

С  $\alpha_i$  означаваме корените на уравнението  $D(z) = 0$ . Те се наричат полюси на системата и  $\lim_{z \rightarrow \alpha_i} \mathcal{H}(z) = \infty$

Тъй като коефициентите на  $N(z)$  и  $D(z)$  са реални, нулите (и съответно полюсите) ще са са или реални, или са част от двойка комплексно спрегнати. Тоест, няма нула (или полюс), която да е комплексна, но да няма комплексно спрегнато из останалите нули (полюси).

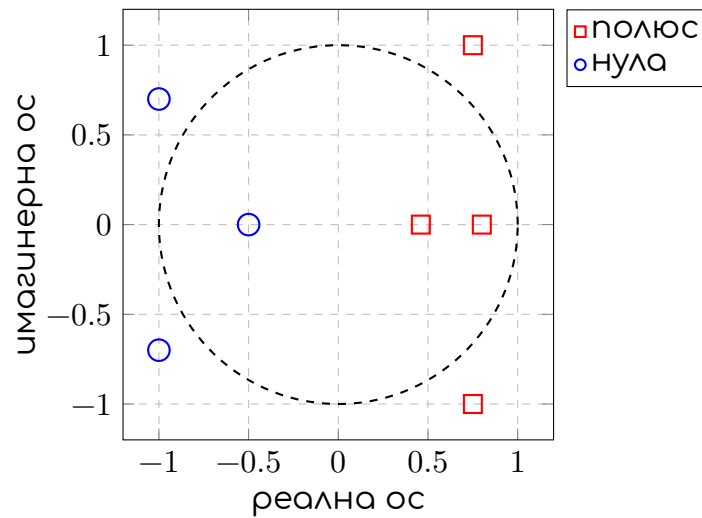
Това представяне е удобно, защото ни позволява да разбием  $\mathcal{H}$  на произведение от по-прости предавателни функции:

$$\mathcal{H} = G \underbrace{\frac{(z - \beta_1)}{(z - \alpha_1)}} \underbrace{\frac{(z - \beta_2)}{(z - \alpha_2)}} \dots \underbrace{\frac{(z - \beta_M)}{(z - \alpha_N)}}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1(z) \mathcal{H}_2(z) \dots \mathcal{H}_K(z),$$

където  $\mathcal{H}_i$  е произведение на няколко полюса и нули.

Тоест, достатъчно е да видим какви филтри се описват от трансферни функции, съдържащи една или две нули и полюси, за да можем направим извод за целия филтър  $\mathcal{H}$



Фигура Б.1.1: Полус-нула графика

Фигура Б.1.1 изобразява трансферна функция с три нули и четири полюса, от които една реална нула и два реални полюса. Нулите и полюсите, които не са реални, са комплексно спрегнати.

## Б.2 Характеризация на филтри

Една система се описва изцяло от трансферната си функция, а всяка трансферна функция може да се представи като произведение на нули полюси. Следователно, анализирайки тези нули и полюси, можем да направим извод за действието на филтъра.

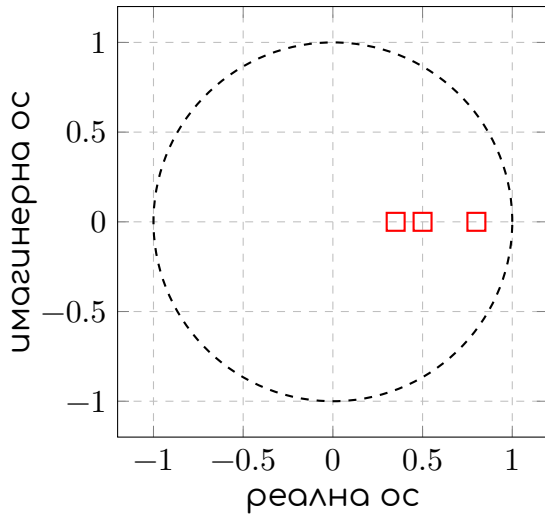
Нека имаме следния филтър от първи ред:

$$y[n] = b_0 x[n] + a_1 y[n-1]$$

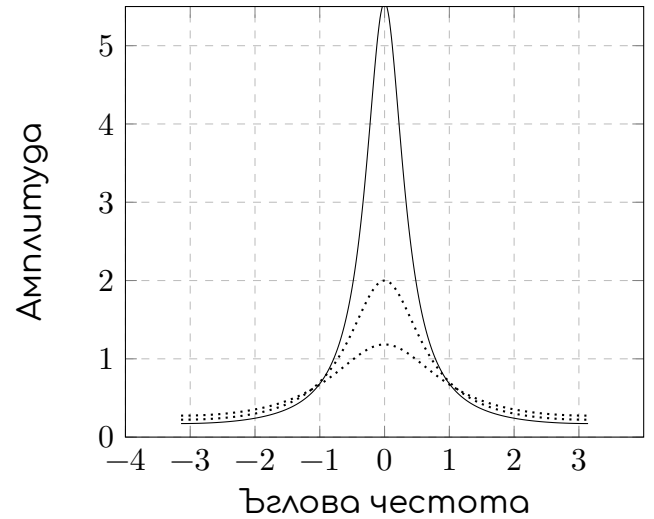
$$\mathcal{H} = G \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}},$$

$$G = b_0$$

Тъй като имаме само един полюс, то следва, че  $a_1$  е реално число, тъй като няма как да е част от комплексно спрегната двойка. Това означава, че  $a_1$  напълно описва вида на  $\mathcal{H}$ , а  $b_0$  играе ролята на усилващ коефициент.

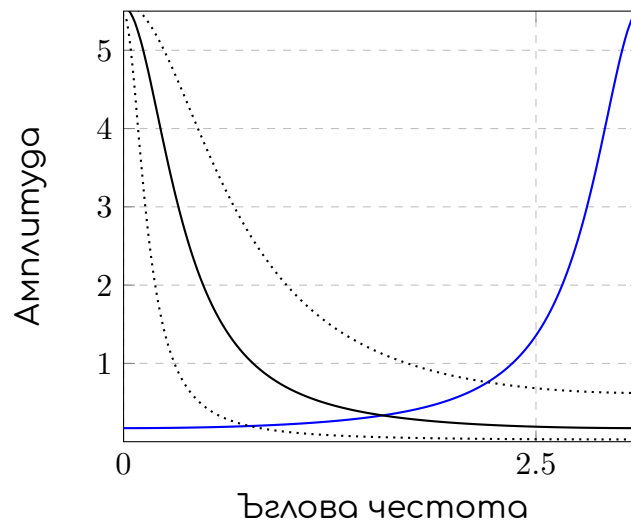


(а) Полус-нула графика за  $\mathcal{H}$



(б) Графика на  $g(\omega)$  за  $a = 0.7, a = 0.5, a = 0.35$

Фигура Б.2.1: Действие на филтър от първи ред за  $a = 0.35, a = 0.5, a = 0.7$



Фигура Б.2.2: Действие на филтър от първи ред за различни стойности на  $a$  и  $b$

Понеже  $a_1$  е реално число, винаги ще лежи на реалната ос, както е показано на полюс-нула графиката на [Фигура Б.2.2](#)

Нека разгледаме  $\mathcal{H}$  в честотния домейн:  $\mathcal{H}(e^{i\omega}) = \frac{b_0}{1 - a_1 e^{-i\omega}}$ , където  $\omega$  е ъглова честота, измерена в радиани. Можем изразим  $\mathcal{H}$  като функция на  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(e^{i\omega}) &= \frac{b_0}{1 - a_1 e^{-i\omega}} = \frac{b_0}{1 - a_1 \cos \omega + i a_1 \sin \omega} = \frac{b_0(1 - a_1 \cos \omega - i a_1 \sin \omega)}{1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2} \\ &= \frac{b_0(1 - a_1 \cos \omega)}{1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2} + i \frac{-b_0 a_1 \sin \omega}{1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2} \end{aligned}$$

Нека с  $g(\omega)$  означим модула на  $\mathcal{H}$

$$g(\omega) = \frac{b_0^2(1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2)}{(1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2)^2} = \frac{b_0^2}{1 - 2a_1 \cos \omega + a_1^2}$$

На [Фигура Б.2.2](#) се вижда графиката на  $g(\omega)$  за различни стойности на  $a_1$  и  $b_0$ . Този вид филтри се наричат **резонатори**, тъй като честотите във върха на графиката ще се усилят. Резонаторите се описват главно чрез своята **амплитуда** - височината на максимума, **честота** - къде е върхът върху честотната ос, **честотна лента** - колко е широка графиката, което определя колко честоти ще се усилят.

В случая на филтър от първи ред, амплитудата и честотната лента се определят от  $a_1$  и  $b_0$ , а върха на графиката винаги ще е в 0. Тоест, този вид филтри могат да усилят само честотите около 0.

При  $a_1 > 0$ , филтрите се наричат **нискочестотни**, защото пропускат ниските честоти и задържат високите (с черно на [Фигура Б.2.2](#)).

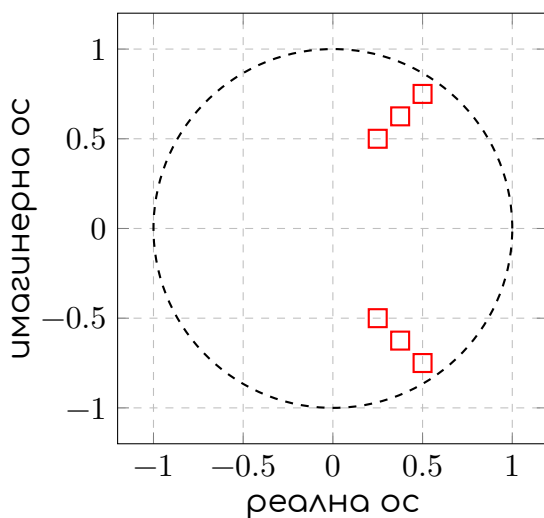
При  $a_1 < 0$ , филтрите се наричат **високочестотни** (в синьо на [Фигура Б.2.2](#))

За да се премести пикът на функцията нанякъде по честотната ос извън нулата, трябва  $a_1$  да е комплексно. Ако трансферната функция има само един полюс,  $a_1$  винаги е реално, затова ни трябва поне една комплексно спряната двойка. Нека разгледаме филтър от втори ред.

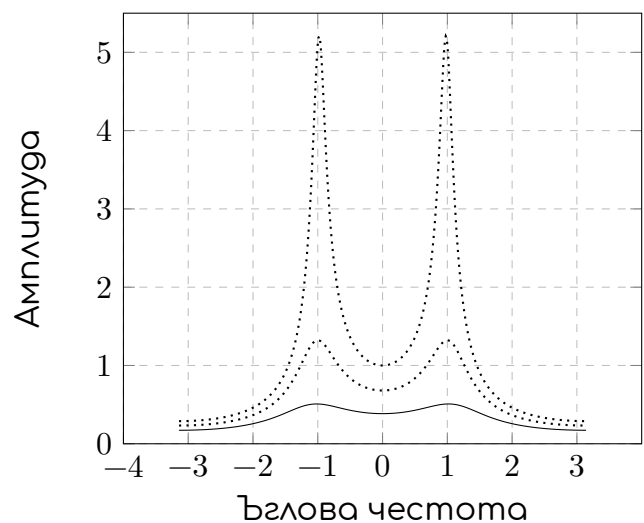
$$y[n] = b_0 x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2]$$

$$\mathcal{H}(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

$$\mathcal{H}(z) = G \frac{1}{(1 - \alpha_1 z^{-1})(1 - \alpha_2 z^{-1})}$$



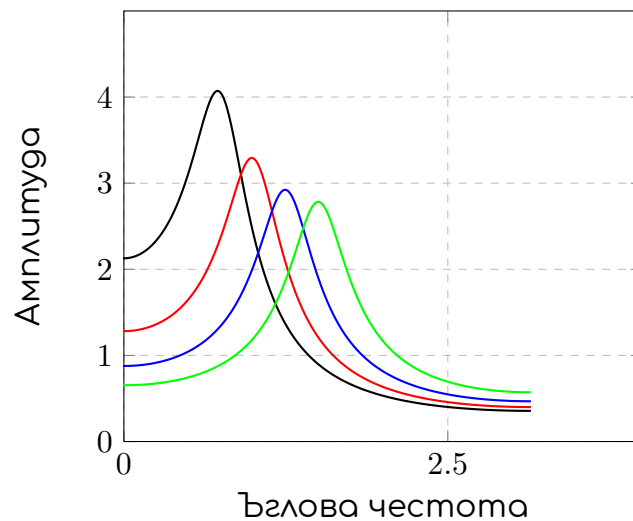
(а) Полус-нула графика за  $\mathcal{H}$



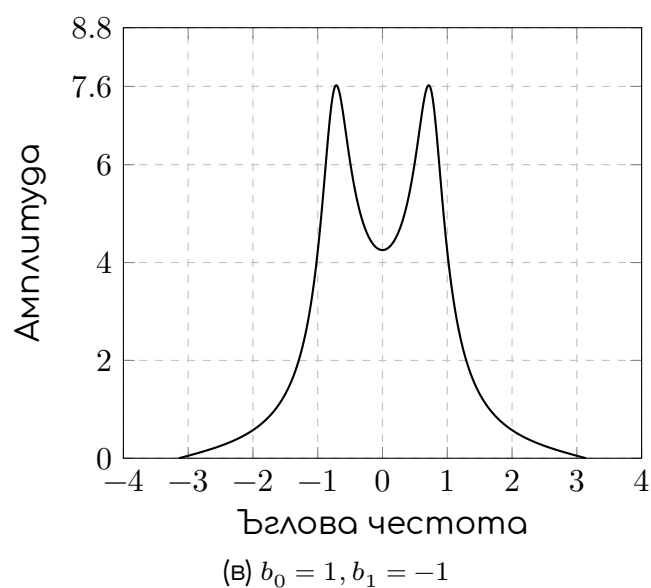
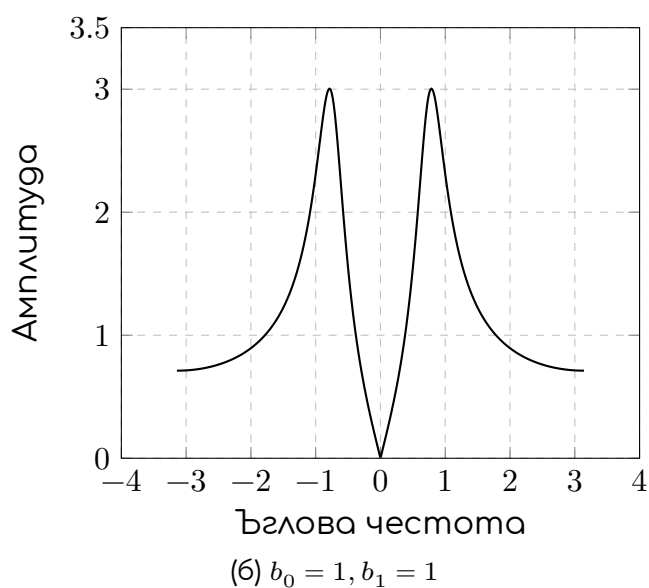
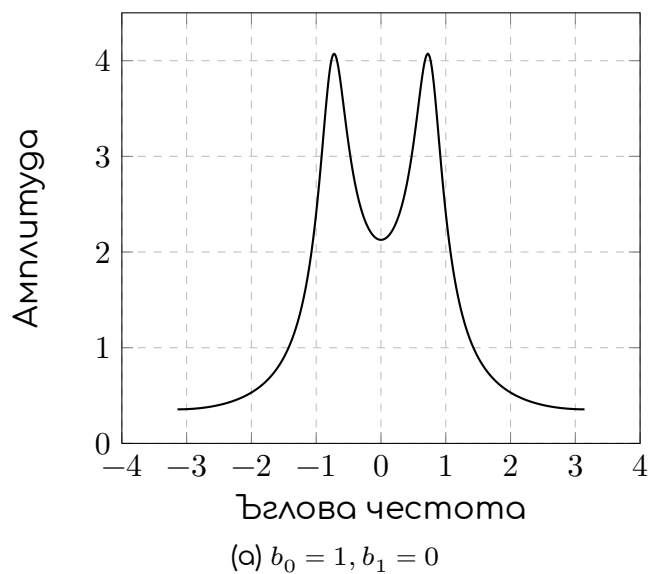
(б) Графика на  $g(\omega)$  в  $-\pi, \pi$

Фигура Б.2.3: Действие на филтър от втори ред за  $\alpha_1 = (0.25 + 0.5i), (0.5 + 0.75i), (0.375 + 0.625i)$





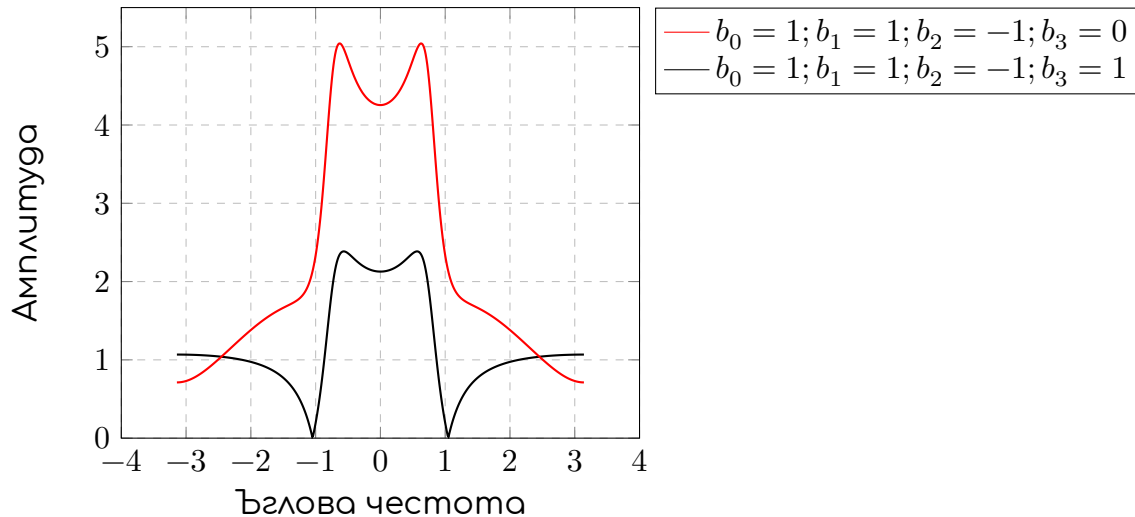
Фигура Б.2.4: Графика на  $g$  с отдалечаващи се от реалната ос полюси



Фигура Б.2.5: Действие на филтър от втори ред за различни стойности на  $b$  и  $a_1 = 1.17, a_2 = -0.64$

Местенето на полюсите по-далеч от реалната ос, раздалечава върховете по честотната лента, както се вижда на [Фигура Б.2.4](#)

Видът на резонатора (тоест честотна лента, честота и амплитуда), се определят главно от полюсите. Добавянето на нули също влияе на вида на филтъра, както може да се види от [Фигура Б.2.5](#). В единият случай се добавя нула в нулата, в другия - в края на спектъра.



Фигура Б.2.6: Действие на филтър от вида  $\mathcal{H}(e^{i\omega}) = \frac{b_0 - b_1 e^{-i\omega} - b_2 e^{-2i\omega} - b_3 e^{-3i\omega}}{1 - a_1 e^{-i\omega} - a_2 e^{-2i\omega}}$  за  $a_1 = 1.17, a_2 = -0.64$

Добавянето на допълнителни нули може да се види на [Фигура Б.2.6](#). Тези нули се наричат **антирезонанси**.

Използвайки вида на филтрите от първи и втори ред, можем да разложим даден сложен филтър  $\mathcal{H}$  на произведение от по-прости филтри от първи и втори ред, чиито вид може по-лесно да се моделира чрез промяна на коефициентите. След това съчетаването им е просто произведение в честотния домейн, а свойствата на Фурие преобразуванията ни дават вида и във времевия домейн.

# Приложение В

## Приложение към Сигнал от реч

Пример 2.  $\mathcal{V}(z)$  за  $N = 2$  и произволно  $\tau_i$

Имаме:

$$U_k = Q_k U_{k+1} \text{ за}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} U_k^+(z) \\ U_k^-(z) \end{bmatrix}$$
$$Q_k = \begin{bmatrix} \frac{z^{\tau_k}}{1+r_k} & \frac{-r_k z^{\tau_k}}{1+r_k} \\ \frac{-r_k z^{-\tau_k}}{1+r_k} & \frac{z^{-\tau_k}}{1+r_k} \end{bmatrix} = z^{\tau_k} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r_k} & \frac{-r_k}{1+r_k} \\ \frac{-r_k z^{-2\tau_k}}{1+r_k} & \frac{z^{-2\tau_k}}{1+r_k} \end{bmatrix} = z^{\tau_k} \hat{Q}_k$$

Търсим:  $V(z)$

Доказателство:

$$\frac{1}{\mathcal{V}(z)} = \frac{U_G(z)}{U_L(z)} = \left[ \frac{2}{1+r_G}, -\frac{2r_G}{1+r_G} \right] \prod_{i=1}^N Q_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \quad (2.2.23)$$

$$\begin{aligned}
&= z^{(\tau_1+\tau_2)} \begin{bmatrix} \frac{2}{1+r_G}, & -\frac{2r_G}{1+r_G} \end{bmatrix} \hat{Q}_1 \hat{Q}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= z^{(\tau_1+\tau_2)} \begin{bmatrix} \frac{2}{1+r_G}, & -\frac{2r_G}{1+r_G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r_1} & \frac{-r_1}{1+r_1} \\ \frac{-r_1 z^{-2\tau_1}}{1+r_1} & \frac{z^{-2\tau_1}}{1+r_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r_2} & \frac{-r_2}{1+r_2} \\ \frac{-r_2 z^{-2\tau_2}}{1+r_2} & \frac{z^{-2\tau_2}}{1+r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= 2z^{(\tau_1+\tau_2)} \begin{bmatrix} \frac{1+r_G r_1 z^{-2\tau_1}}{(1+r_G)(1+r_1)}, & -\frac{r_1+r_G z^{-2\tau_1}}{(1+r_G)(1+r_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r_2} & \frac{-r_2}{1+r_2} \\ \frac{-r_2 z^{-2\tau_2}}{1+r_2} & \frac{z^{-2\tau_2}}{1+r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= 2z^{(\tau_1+\tau_2)} \begin{bmatrix} \frac{1+r_G r_1 z^{-2\tau_1} + r_1 r_2 z^{-2\tau_2} + r_G r_2 z^{-2(\tau_1+\tau_2)}}{(1+r_G)(1+r_1)(1+r_2)}, & -\frac{r_2+r_G r_1 r_2 z^{-2\tau_1} + r_1 z^{-2\tau_2} + r_G z^{-2(\tau_1+\tau_2)}}{(1+r_G)(1+r_1)(1+r_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{V}(z) = \frac{0.5z^{-(\tau_1+\tau_2)}(1+r_G) \prod_{i=1}^2 (1+r_i)}{1+r_G r_1 z^{-2\tau_1} + r_1 r_2 z^{-2\tau_2} + r_G r_2 z^{-2(\tau_1+\tau_2)}}$$

---

**Бележка:** Тък като  $r_G, r_1, r_2$  са ненулеви, то за да получим максимална степен, без да имаме нулеви коефициенти, трябва:

$$\begin{cases} 2\tau_1 = 1 \\ 2\tau_2 = 1 \\ 2(\tau_1 + \tau_2) = 2 \end{cases} \quad (\text{B.0.1})$$

Тоест  $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2}$

---

**Пример 3.**  $\mathcal{V}(z)$  за  $N = 2$  и произволно  $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2}$

Доказателство:

Заместваме  $\tau_i = \frac{1}{2}$  в [Пример 2](#)

$$\mathcal{V}(z) = \frac{0.5z^{-1}(1+r_G) \prod_{i=1}^2 (1+r_i)}{1+(r_G r_1 + r_1 r_2)z^{-1} + r_G r_2 z^{-2}}$$

# Приложение Г

## Приложение към Класификация

Пример 4.  $\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = 2Ax$ , ако  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , а  $A$  е диагонална.

Да разгледаме производната по някоя от координатите -  $x_k$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^T A x}{\partial x_k} &= \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial (x_1 a_{11}, x_2 a_{22}, \dots, x_m a_{mm}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial (x_1^2 a_{11} + x_2^2 a_{22} + \dots + x_m^2 a_{mm})}{\partial x_k} = 2x_k a_{kk}\end{aligned}$$

Това означава, че:

$$\frac{\partial x^T A x}{\partial x} = (2x_1 a_{11}, 2x_2 a_{22} \dots 2x_m a_{mm}) = 2Ax$$

Пример 5. Ако  $A$  е диагонална матрица,  $A = (a_{ii})_{i=1}^m$ ,  $\frac{\partial |A|}{\partial a_{ii}} = \frac{|A|}{a_{ii}}$

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ii}} = \frac{\partial \left( \prod_{i=1}^m a_{ii} \right)}{\partial a_{ii}} = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_{mm} = \frac{\prod_{i=1}^m a_{ii}}{a_{ii}} = \frac{|A|}{a_{ii}}$$

Нека  $L(\pi, \mu, \Sigma) = \sum_{i=1}^n \log \left( \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i \mid \mu_k, \Sigma_k) \right) + \lambda \left( \sum_{k=1}^K \pi_k - 1 \right)$  и

$$\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) = \frac{\exp \left( -\frac{1}{2} (x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j) \right)}{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}},$$

Твърдение 1. Решението на  $\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \mu_j} = 0$  има вида  $\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}$

Доказателство:

$$0 = \frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \mu_j} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\pi_j \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \mu_j}}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

Използвайки [Пример 4](#), можем да намерим производната на  $\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)$  по  $\mu_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \mu_j} &= \partial \left[ \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)\right)}{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}} \right] / \partial \mu_j \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)\right)}{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}} \left( -\frac{1}{2} 2 \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j) (-1) \right) \\ &= \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j) \end{aligned}$$

Следователно:

$$0 = \frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \mu_j} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\pi_j \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \mu_j}}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

$\leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) \cancel{\Sigma_j^{-1}} x_i}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) \cancel{\Sigma_j^{-1}} \mu_j}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

Нека означим  $\gamma_{ij} = \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)}$ . Тогава имаме:

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} x_i = \mu_j \sum_{i=1}^N \gamma_{ij}$$

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} x_i}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}$$

Твърдение 2. Решението на  $\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \Sigma_j} = 0$  има вида  $\Sigma_j = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}(x_{it} - \mu_{js})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}, & t == s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Доказателство:

$$0 = \frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \Sigma_j} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\pi_j \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \Sigma_j}}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

$\Sigma_j = (\sigma_{ij})_{m \times m}$  и  $\sigma_{ij} = 0$ , ако  $i \neq j$ . Първо смятаме:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial [(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1} (x_i - \mu_j)]}{\partial \sigma_{ts}} = \\ & \frac{\partial \left( ((x_{i1} - \mu_{j1}), (x_{i2} - \mu_{j2}), \dots, (x_{im} - \mu_{jm})) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{mm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_{i1} - \mu_{j1}) \\ (x_{i2} - \mu_{j2}) \\ \vdots \\ (x_{im} - \mu_{jm}) \end{pmatrix} \right)}{\partial \sigma_{ts}} = \\ & \frac{\partial \left( \frac{(x_{i1} - \mu_{j1})^2}{\sigma_{11}} + \frac{(x_{i2} - \mu_{j2})^2}{\sigma_{22}} + \dots + \frac{(x_{im} - \mu_{jm})^2}{\sigma_{mm}} \right)}{\partial \sigma_{ts}} = \\ & = \begin{cases} 0, & t \neq s \\ -\frac{(x_{it} - \mu_{jt})^2}{\sigma_{tt}^2}, & t = s \end{cases} \end{aligned}$$

Да разгледаме производната по произволен елемент  $\sigma_{ts}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \sigma_{ts}} &= \frac{\partial \left[ \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x_i - \mu_t)\right)}{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}} \right]}{\partial \sigma_{ts}} \\
&= \frac{\frac{\delta \left[ \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x_i - \mu_t)\right) \right]}{\partial \sigma_{ts}} \sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} - \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x_i - \mu_t)\right) \frac{\delta \left[ \sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} \right]}{\partial \sigma_{ts}}}{\left( \sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} \right)^2} \\
&= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x_i - \mu_t)\right) \frac{1}{2} \frac{(x_{it} - \mu_{jt})^2}{\sigma_{tt}^2} \sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}}{\left( \sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} \right)^2} \\
&\quad - \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x_i - \mu_t)\right) \frac{1}{2} \frac{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|}{\sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} \sigma_{ts}}}{\left( \sqrt{(2\pi)^{39} |\Sigma_j|} \right)^2} = \\
&= \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) (x_{it} - \mu_{jt})^2}{2\sigma_{tt}^2} - \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{2\sigma_{tt}} = \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{2\sigma_{tt}^2} [(x_{it} - \mu_{jt})^2 - \sigma_{tt}]
\end{aligned}$$



$$0 = \frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \sigma_{tt}^j} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\pi_j \frac{\partial \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\partial \sigma_{tt}^j}}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) [(x_{it} - \mu_{jt})^2 - \sigma_{tt}]}{2\sigma_{tt}^2 \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)}$$

$\longleftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) (x_{it} - \mu_{jt})^2}{2\cancel{\sigma_{tt}^2} \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} = \sum_{i=1}^N \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j) \sigma_{tt}}{2\cancel{\sigma_{tt}^2} \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)}$$

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{jt})^2 = \sigma_{tt} \sum_{i=1}^N \gamma_{ij}$$

$$\sigma_{tt} = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{jt})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}$$

$$\Sigma_j = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{i1} - \mu_{j1})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{i2} - \mu_{j2})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{im} - \mu_{jm})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij} (x_{it} - \mu_{js})^2}{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}, & t == s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

---

**Твърдение 3.** Решението на  $\frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \pi_j} = 0$  има вида  $\pi_j = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}{N}$

Доказателство:

$$0 = \frac{\partial L(\pi, \mu, \Sigma)}{\partial \pi_j} = \frac{\partial \left[ \sum_{i=1}^n \log \left( \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i | \mu_k, \Sigma_k) \right) + \lambda \left( \sum_{k=1}^K \pi_k - 1 \right) \right]}{\partial \pi_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] + \lambda = \pi_j \left( \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] + \lambda \right)$$

$\leftrightarrow$

$$- \lambda \pi_j = \pi_j \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

$$- \lambda \sum_{j=1}^K \pi_j = \sum_{j=1}^K \pi_j \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

Използваме, че  $\sum_{j=1}^K \pi_j = 1$  и разменяме местата на сумите вдясно:

$$- \lambda = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\sum_{j=1}^K \pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right] = \sum_{i=1}^N 1$$

$$\lambda = -N$$

Заместваме  $\lambda = -N$  в

$$- \lambda \pi_j = \pi_j \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

$$N \pi_j = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\pi_j \mathcal{N}(x_i, \mu_j, \Sigma_j)}{\sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(x_i, \mu_k, \Sigma_k)} \right]$$

$$N \pi_j = \sum_{i=1}^N \gamma_{ij} \leftrightarrow \pi_j = \frac{\sum_{i=1}^N \gamma_{ij}}{N}$$

# Библиография

- [AV07] David Arthur u Sergei Vassilvitskii. "K-means++: the advantages of careful seeding". B: In Proceedings of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. 2007.
- [Bar17] Lisa Feldman Barrett. How Emotions Are Made: The Secret Life of the Brain. 2017.
- [Bis06] Christopher M. Bishop. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006.
- [BTV] BTV. URL: <https://web.archive.org/web/20190714122441/https://btvnovinite.bg/predavanja/tazi-sutrin> (гана на носец. 14.07.2019).
- [Bur+05] Felix Burkhardt u gp. "A database of German emotional speech". B: m. 5. Ян. 2005, с. 1517—1520.
- [EKK] Moataz El Ayadi, Mohamed S. Kamel u Fakhri Karray. "Survey on Speech Emotion Recognition: Features, Classification Schemes, and Databases". B: Pattern Recogn. (). DOI: [10.1016/j.patcog.2010.09.020](https://doi.org/10.1016/j.patcog.2010.09.020).
- [Gha+17] M. Ghai u gp. "Emotion recognition on speech signals using machine learning". B: 2017 International Conference on Big Data Analytics and Computational Intelligence (ICBDAC). 2017. DOI: [10.1109/ICBDACI.2017.8070805](https://doi.org/10.1109/ICBDACI.2017.8070805).
- [KNS09] Shashidhar Koolagudi, Sourav Nandy u K Sreenivasa Rao. "Spectral Features for Emotion Classification". B: anp. 2009, с. 1292—1296. DOI: [10.1109/IADCC.2009.4809202](https://doi.org/10.1109/IADCC.2009.4809202).
- [OWN96] Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky u S. Hamid Nawab. Signals & Systems (2Nd Ed.) Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN: 0-13-814757-4.
- [Quo01] Thomas Quatieri -. Discrete-time Speech Signal Processing: Principles and Practice. First. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall Press, 2001. ISBN: 9780132442138.
- [RS78] L. Rabiner u R. Schafer. Digital Processing of Speech Signals. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1978.
- [SCC11] P. Shen, Z. Changjun u X. Chen. "Automatic Speech Emotion Recognition using Support Vector Machine". B: Proceedings of 2011 International Conference on Electronic Mechanical Engineering and Information Technology. T. 2. 2011. DOI: [10.1109/EMEIT.2011.6023178](https://doi.org/10.1109/EMEIT.2011.6023178).
- [Tay09] Paul Taylor. Text-to-Speech Synthesis. 1st. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2009. ISBN: 0521899273, 9780521899277.
- [VA06] Thurid Vogt u Elisabeth André. "Improving Automatic Emotion Recognition from Speech via Gender Differentiation". B: Proc. Language Resources and Evaluation Conference (LREC 2006). Genoa, 2006.

- [Zhu+06] Ji Zhu и гр. "Multi-class AdaBoost". В: Statistics and its interface 2 (февр. 2006). DOI: [10.4310/SII.2009.v2.n3.a8](https://doi.org/10.4310/SII.2009.v2.n3.a8).
- [ZZL16] Wei-Long Zheng, Jia-Yi Zhu и Bao-Liang Lu. "Identifying Stable Patterns over Time for Emotion Recognition from EEG". В: IEEE Transactions on Affective Computing (ян. 2016). DOI: [10.1109/TAFFC.2017.2712143](https://doi.org/10.1109/TAFFC.2017.2712143).
- [Тал66] Димитър Талев. Гласовете ви чувам. 1966.