

Messtechnik SS 2019

Prof. Dr. L. M. Reindl
Lehrstuhl für Elektrische Mess- und Prüfverfahren
Institut für Mikrosystemtechnik – IMTEK
Universität Freiburg

Prof. Dr. Leonhard Reindl

- 1985 Dipl.-Phys. an der TU München
- 1985 Zentralbereich Forschung und Entwicklung (Siemens AG)
- 1997 Promotion an der TU Wien
- 1999 Hochschuldozent an der TU Clausthal
- seit 2003 Univ.-Prof. und Lehrstuhlinhaber (EMP) an der Universität Freiburg, IMTEK



Kontakt:

Lehrstuhl für Elektrische Mess- und Prüfverfahren

Email: reindl@imtek.de, Tel: 0761/203-7220

Ansprechpartner: Dr. Gunnar Gidion



Wo Sie mich finden: Gebäude 106

4. OG Raum 04-005

Tel. 0761-203-7188

Email: gunnar.gidion@imtek.uni-freiburg.de

Vereinbaren Sie bitte einen Termin über email.

Ansprechpartner Praktikum:

Herr Christoph Bohnert, bohnert@imtek.de

Ansprechpartner Übung u. Klausur:

Herr Dr. Gidion, gunnar.gidion@imtek.uni-freiburg.de



ORGANISATORISCHES

Allgemeine Anmerkung

Lerninhalte und Umfang der Vorlesung

Die Vorlesung, das Skript, das *Praktikum* (und die Übung) sind nur ein Anriss der Inhalte der elektrischen Messtechnik und Signaldatenverarbeitung! Es ist nicht möglich diese Inhalte vollständig in voller Tiefe in einem Semester zu behandeln. Deshalb wird dringend empfohlen die entsprechenden Themen bei unzureichendem Verständnis mit einem Buch nachzuarbeiten.

Es ist außerdem ein wichtiger Prozess, während eines Studiums zu lernen, Vorlesungsinhalte auf Ihre Relevanz zu filtern und selbstständig zu erarbeiten.

Was sollen Sie lernen?

Skript

- Stoffsammlung zur elektrischen Messtechnik (nicht vollständig!!!)
- **Nicht das Skript, sondern die Themen sind Klausurrelevant!**

Praktikum Messtechnik

- Vorlesungsbegleitend; erste Termine: KW 19 (8./9. Mai)
- Behandelt Themen der Messtechnik und ist eine praktische Übung der elektrischen Messtechnik
- Viele Themen des Praktikums finden Sie auch in der Vorlesung

Übung/Übungsaufgaben

- Freiwillige Ergänzung zur Vorlesung und zum Praktikum
- Behandelt Themen der Messtechnik auf mathematischer Ebene und vertieft diese in Übungsaufgabe und Rechnungen
- Hilfe für das Praktikum Messtechnik

KW	Termine	Inhalt
19	8./9. Mai	Einführung 1
20	15./16. Mai	Einführung 2
21	22./23. Mai	Versuch 1
23	5./6. Juni	Versuch 2
26	26./27. Juni	Versuch 3
27	3./4. Juli	Versuch 4
28	10./11. Juli	Versuch 5
29	17./18. Juli	Versuch 6

Lehrbücher:

- E. Schrüfer, L. M. Reindl, B. Zagar „*Elektrische Messdatenerfassung und –verarbeitung*“, Hanser, 2018 (EUR 32)
- J. Hoffmann, „*Handbuch der Messtechnik*“, Hanser 2012 (EUR 149,00)
- R. Lerch, „*Elektrische Meßtechnik*“, Springer, 2016 (EUR 49,99)
- K.-D. Kammeyer, K. Kroschel, „*Digitale Signalverarbeitung*“, Vieweg+Teubner, 2012 (EUR 44,95)
- R. Scheithauer, „*Signale und Systeme*“, Vieweg+Teubner, 2005 (EUR 49,95)
- D. Ch. v. Grünigen, „*Digitale Signalverarbeitung*“, Fachbuchverlag Leipzig 2004 (EUR 29,90)
- S. M. Kay, Fundamentals of Statistical Signal Processing & Modern Spectral Estimation

Nachschlagewerke:

- H.-R. Tränkler, L. M. Reindl (Hrsg.), „*Sensortechnik*“, Springer, 2018
- U. Tietze, C. Schenk, E. Gamm „*Halbleiter-Schaltungstechnik*“, Springer, 2016 (EUR 129,99)

Zugelassene Hilfsmittel?

- 2 handgeschriebene DIN A4 Blätter (= 4 Seiten)
- Nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Was ist Klausurrelevant?

Klausurrelevant sind grundsätzlich **ALLE** behandelten **Themen** der Vorlesung Messtechnik im aktuellen Sommersemester!

Art und Umfang der Klausur?

Die sprachliche Aufgabenstellung und der Umfang einzelner Aufgaben entspricht in etwa den Übungsaufgaben.

Ca. 9 – 11 Aufgaben bei 120 min Bearbeitungszeit.

1. Grundlagen

WAS IST MESSEN?

Definition: Messen

Messen nach DIN 1319

“Messen ist das Ausführen von geplanten Tätigkeiten zum quantitativen Vergleich einer Messgröße zu einer Einheit.”

→ Messen heißt vergleichen!

Eine „Umweltgröße“ X wird durch eine Maßzahl (Quantität) x als Vielfaches der Einheitsgröße N (Qualität) zugeordnet. N wird durch eine Messnormal definiert.

$$X = x \cdot N$$

Beispiel: $l = 3 \text{ m}$

hier sind:

- Einheit: 1 m (in Worten: ein Meter)
- Maßzahl: $x = 3$
- Dimension: l

Fundamentalvoraussetzung

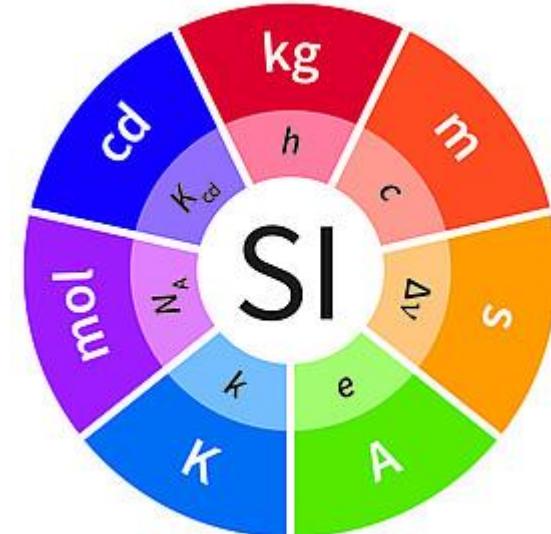
Erste Fundamentalvoraussetzung

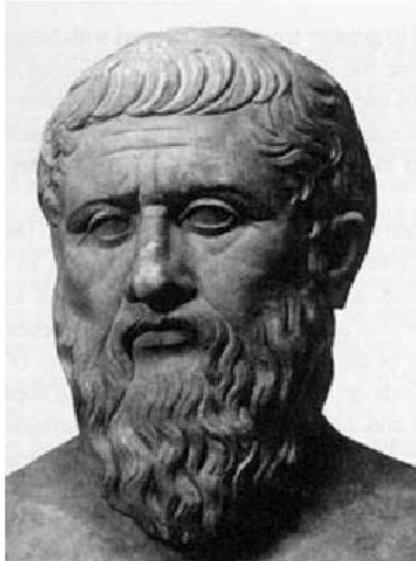
Die zu messende Größe muss **qualitativ eindeutig definiert** und **quantitativ bestimmbar** sein.



Zweite Fundamentalvoraussetzung

Das Messnormal muss durch **Konvention** festgelegt sein.





Plato (427-347 v. Chr.):

Das beste Mittel gegen Sinnestäuschungen ist das

Messen, Zählen und Wägen.

Dadurch wird die Herrschaft der Sinne über uns beseitigt. Wir richten uns nicht mehr nach dem sinnlichen Eindruck der Größe, der Zahl, des Gewichts der Gegenstände, sondern

berechnen, messen und wägen sie.

Und das ist Sache der Denkkraft, Sache des Geistes in uns.



Cheopspyramide mit Sphinx

Anfänge der Messtechnik

Ägypten (ca. 2500 v. Chr.)

Messaufgaben beim Pyramidenbau:
(Ausrichtung an Sternen)

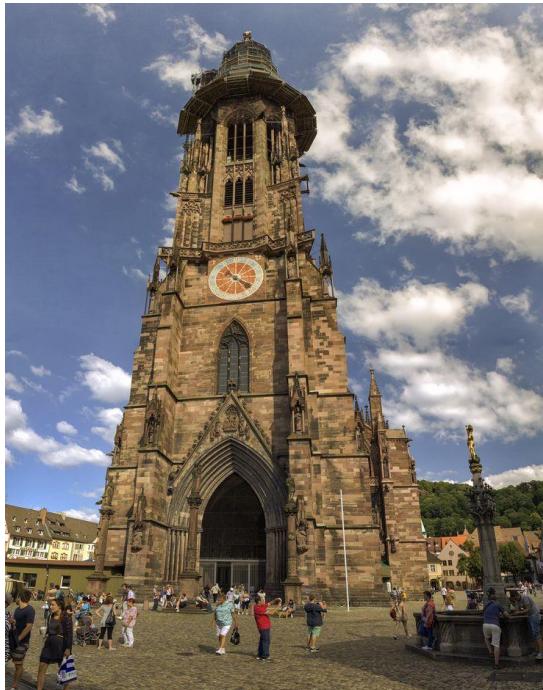
Winkelmessung

- exakte 90° Winkel
- 52° Steigung
- Höhe/Umfang = 2π

Längenmessung

- Alle Basiskanten exakt gleich $230 \text{ m} \pm 0,1\%$
- Höhe 146,6 m

Freiburger Münster



Maße der Brote: oben von 1320,
unten links von 1270,
daneben rechts von 1317.



Sphärenschöpfer,
frühes 13. Jh.

Elle

Warum sollten Sie sich mit Messtechnik befassen?



Sie wollen einen neuartigen mikrosystemtechnischen Sensor entwickeln? Super!

Leider ist meist das Sensorsignal sehr klein und von einer Vielzahl von Störsignalen begleitet. Sie müssen Ihr Sensorsignal geeignet verstärken und von den Störsignalen trennen.

Sie wollen ein bestehenden mikrosystemtechnischen Sensor verbessern? Super!

Leider reicht es nicht, das Sensorelement alleine zu optimieren, sondern Sie müssen auch die Signalextraktion, das Signal-zu-Rauschverhältnis und den Störsignalabstand optimieren.

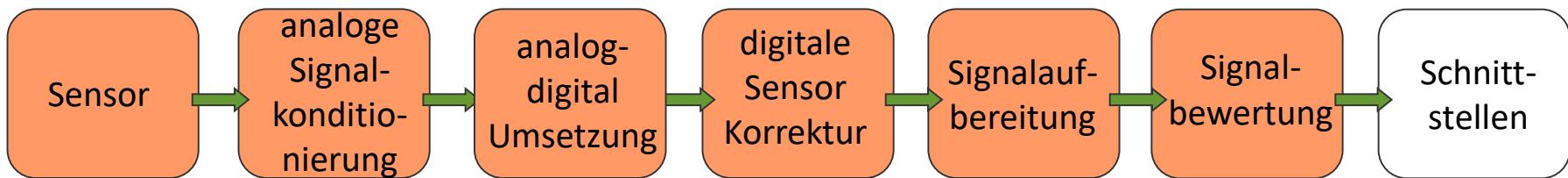
Sie wollen alles selbst neu erfinden? Nicht super! Leider kostet das viel zu viel Zeit und die Konkurrenz schläft auch nicht!

Die "einfachen" Probleme sind leider immer schon gelöst. Sie müssen daher das Optimum aus Ihrem Sensor herausholen und wie Sie das machen können, erfahren Sie hier.

Messtechnik

WAS ERWARTET SIE...

Funktionsblöcke der Messtechnik



- | | | | | |
|---|--------------------------------------|--|---------------------------------|-----------------------------------|
| ■ Signal-anpassung
(R, L, C → U) | ■ Anti-Aliasing
Filterung | ■ Linearisierung | ■ Berechnung | ■ Muster-erkennung |
| ■ Brücken-schaltung | ■ Pegel-anpassung | ■ Kalibrierung | ■ trigonometrische Umrechnung | ■ Ereignis-vorhersage |
| | ■ A/D-Umsetzung | ■ Offset & Verstärkungs-korrekturen | ■ digitale Filterung | ■ Korrelation |
| | | ■ Drift-kompensation | ■ Auto-korrelation | ■ Sensor Fusion |
| | | ■ Diagnose | ■ Spektral-Analyse (FFT) | ■ modellbasierte Signal-bewertung |

Teil 1: Messdatenerfassung

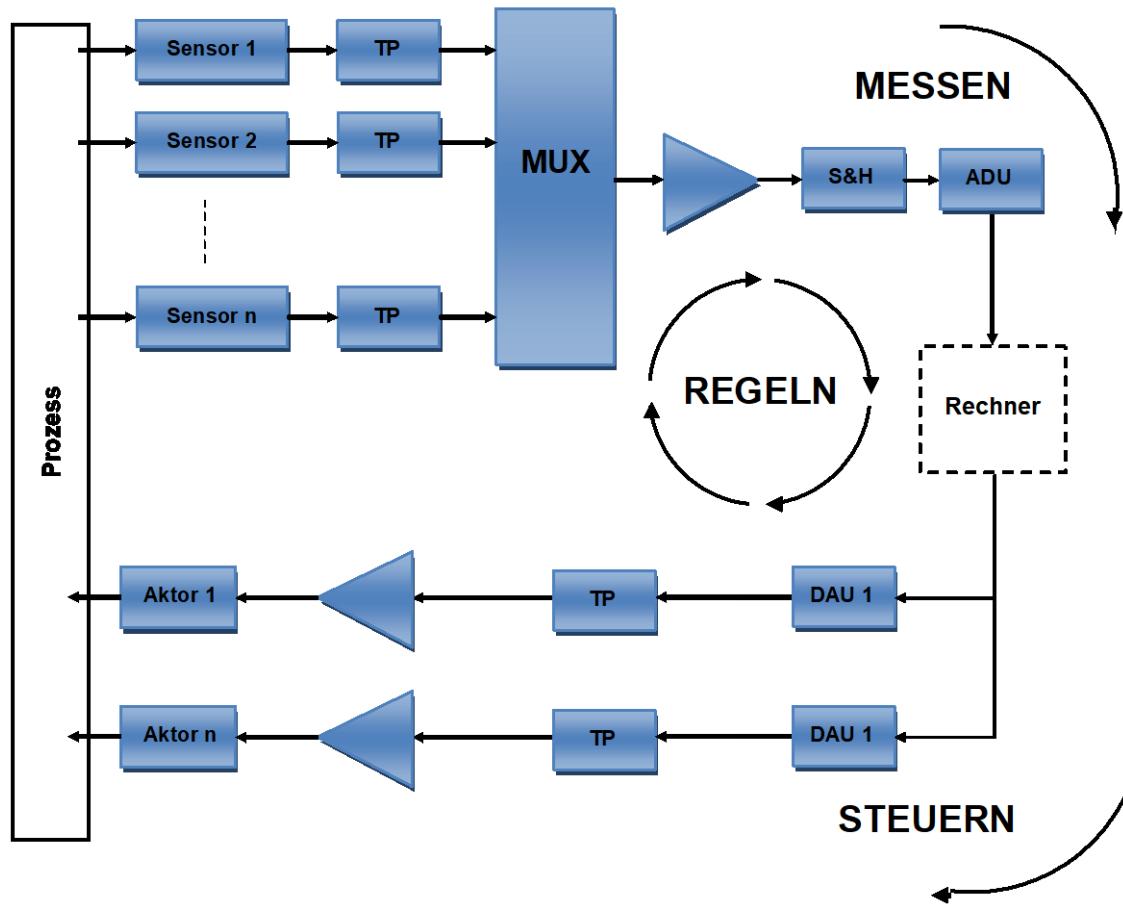
1. Grundlagen: SI-Einheiten, Wiederholung Elektrotechnik
2. „Messfehler“: statistische, systematische und unbekannte systematische Messabweichungen
3. Sensoren und Messwertumformer
4. Spannung- und stromgebende Sensoren: analoge Messung, Verstärkerschaltungen, Beispiele, ladungsgebende Sensoren
5. Widerstandssensoren: Wheatstone'sche Brücke, Beispiele
6. Kapazitive und induktive Sensoren: Messschaltungen, Beispiele
7. Schwingende und zählende Sensoren: Messschaltungen, Beispiele
8. A/D und D/A-Umsetzung: analoge Signalaufbereitung, Signale, Abtastung, Quantisierung, Wandlertypen

Teil 2: Signal- und Messdatenverarbeitung

9. Signalverarbeitung: Fourier Transformation, DFT, Fensterfunktionen, Hilbert Transformation
10. Digitale Filter: FIR Filter
11. Kalman Filter, Beispiele

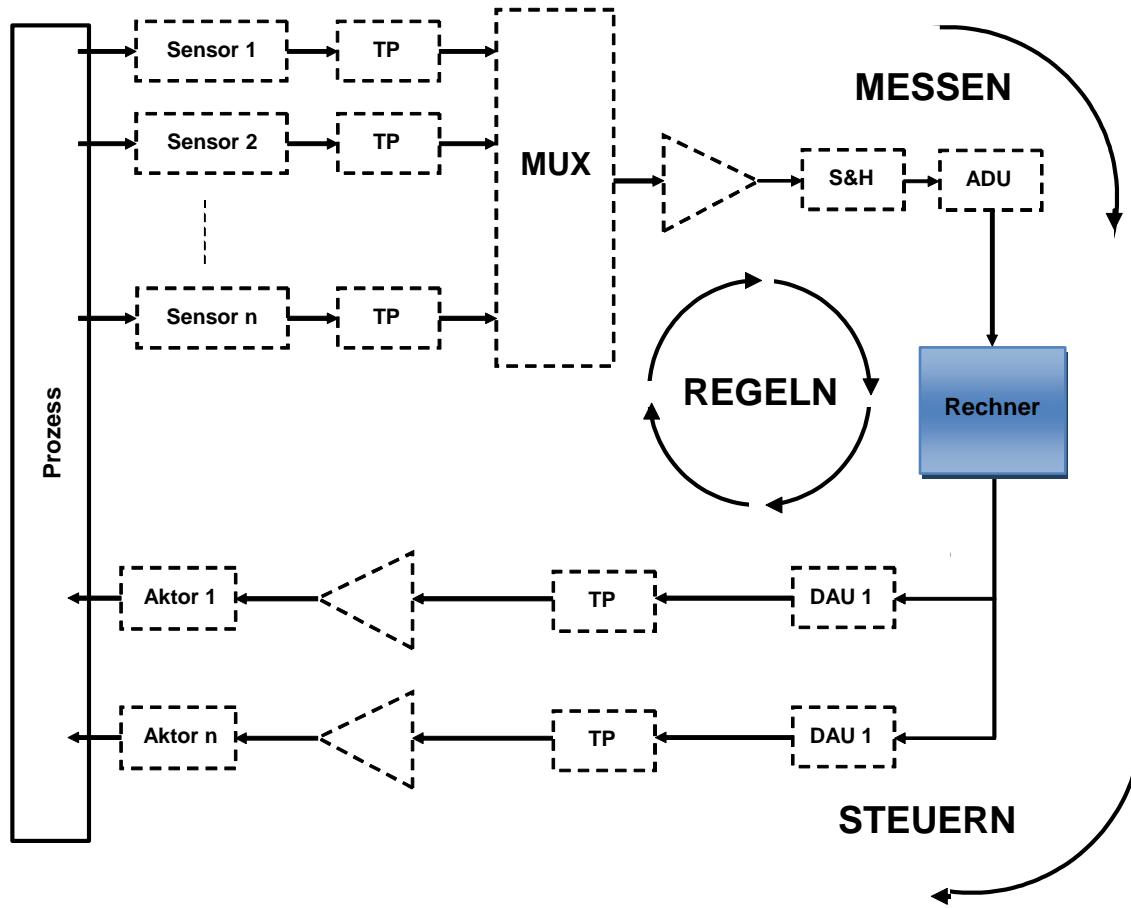
Struktur der Vorlesung

Teil 1: Messdatenerfassung



Struktur der Vorlesung

Teil 2: Messdatenverarbeitung



1. Grundlagen

DAS SI-EINHEITENSYSTEM

Das SI-Einheitensystem

Das Gesetz über Einheiten im Messwesen seit Juli 1970 in Kraft :

- Metrisches, dezimales, kohärentes Einheitensystem
- Nur noch die sieben Basiseinheiten des SI-Systems dürfen verwendet werden.
- Zusätzlich erlaubt:
 - Genormte dezimale Teile und Vielfache (wie Kilo oder Milli), sowie
 - kohärent abgeleitete Einheiten.

Kohärent (zusammenhängend)

heißt ein Einheitensystem, wenn die Einheiten dieses Systems **ausschließlich durch Einheitengleichungen** verbunden sind, in denen kein von eins abweichender Zahlenfaktor enthalten ist. (Nicht kohärent: $1 \text{ PS} = 75 \text{ kg m/s}$)

Abgeleitete Einheiten

müssen sich als mit einem festen Zahlenfaktor multiplizierte Produkte von Basiseinheiten ableiten lassen. z.B.:

Induktivität: $1 \text{ Henry} = 1 \text{ Vs/A}$; **el. Kapazität:** $1 \text{ Farad} = 1 \text{ As/V}$; **Leistung:** $1 \text{ Watt} = 1 \text{ Nm/s}$

Die sieben alten SI-Grundeinheiten

Größe	Formelzeichen	Einheit	Einheit-Kurzzeichen
Länge	l	Meter	m
Massa	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Elekt. Stromstärke	I	Ampère	A
Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffmenge	N	Mol	mol
Lichtstärke	I_L	Candela	cd

Sieben Naturkonstanten erhalten im neuen SI festgelegte Werte die Zahlenwerte entstammen den Ausgleichsrechnungen von CODATA im Sommer 2017 (CODATA 2017 special adjustment).

- Frequenz des **Hyperfeinstrukturübergangs** des Grundzustands im ^{133}Cs -Atom
 $\Delta\nu = 9\,192\,631\,770\text{ s}^{-1}$
- **Lichtgeschwindigkeit** im Vakuum
 $c = 299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$
- **Planck-Konstante**
 $\hbar = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\text{ J s}$ ($\text{J s} = \text{kg m}^2\text{ s}^{-1}$)
- **Elementarladung**
 $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ ($\text{C} = \text{A s}$)
- **Boltzmann-Konstante**
 $k = 1,380\,649 \cdot 10^{-23}\text{ J K}^{-1}$ ($\text{J K}^{-1} = \text{kg m}^2\text{ s}^{-2}\text{ K}^{-1}$)
- **Avogadro-Konstante**
 $N_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$
- Das **Photometrische Strahlungsäquivalent** K_{cd} einer monochromatischen Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}\text{ Hz}$ ist genau gleich 683 Lumen durch Watt.

Die neuen Einheiten und ihre Konstanten

■ Sekunde (s)

$$1 \text{ s} = 9\,192\,631\,770/\Delta\nu$$

■ Meter (m)

$$1 \text{ m} = (\mathbf{c}/299\,792\,458) \text{ s} = 30,663\,318\dots \mathbf{c}/\Delta\nu$$

■ Kilogramm (kg)

$$1 \text{ kg} = (\mathbf{h}/6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}) \text{ m}^{-2} \text{ s} = 1,475\,521\dots \cdot 10^{40} \mathbf{h} \Delta\nu/\mathbf{c}^2$$

■ Ampere (A)

$$1 \text{ A} = e/(1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}) \text{ s}^{-1} = 6,789\,686\dots \cdot 10^8 \Delta\nu \mathbf{e}$$

■ Kelvin (K)

$$1 \text{ K} = (1,380\,649 \cdot 10^{-23}/k) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 2,266\,665\dots \Delta\nu \mathbf{h}/\mathbf{k}$$

■ Mol (mol)

$$1 \text{ mol} = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}/N_A$$

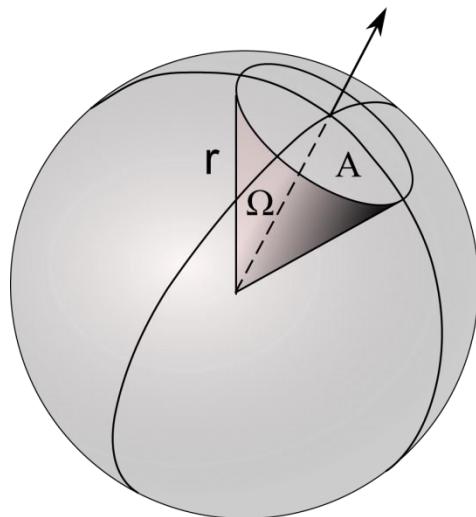
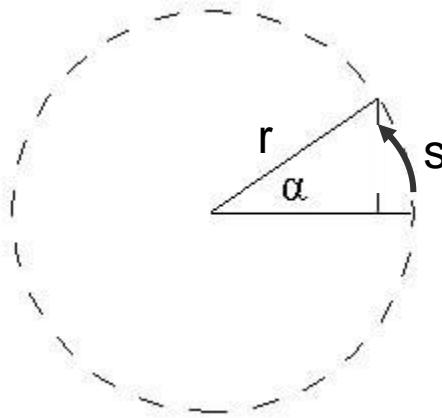
■ Candela (cd)

$$1 \text{ cd} = (\mathbf{K}_{cd}/683) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ sr}^{-1} = 2,614\,830\dots \cdot 10^{10} (\Delta\nu)^2 \mathbf{h} \mathbf{K}_{cd}$$

„normaler“ Winkel α (in rad):

Einheitskreis mit Radius $r = 1 \text{ m}$,
Kreisbogen s

$$\alpha = s/r$$

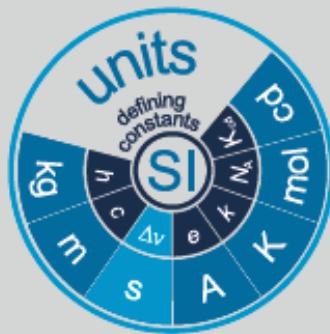


Der Raumwindel Ω in sr ist gleich der Kalottenfläche A dividiert durch r^2 .

1 Steradian $\Omega_0 = 1 \text{ sr}$ ist jener Raumwinkel, der aus einer Kugel mit dem Radius r eine Kugelkalotte mit einer Fläche r^2 ausschneidet.

Die neuen Einheiten und ihre Konstanten

Sekunde



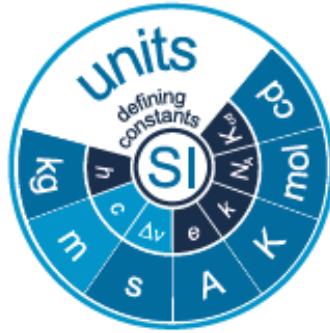
Die Sekunde (Symbol s) ist die SI-Einheit der Zeit. Sie wird definiert durch die Konstante der Cäsiumfrequenz $\Delta\nu$, der Frequenz des ungestörten Hyperfeinübergangs des Grundzustands des Cäsium-Isotops ^{133}Cs . Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 9 192 631 770 festgelegt, wenn sie in der Einheit Hz bzw. s^{-1} angegeben wird.

Diese Definition legt $\Delta\nu$ fest zu $9\,192\,631\,770 \text{ s}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit s auf, so ergibt sich:

$$1 \text{ s} = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta\nu} \quad \text{oder} \quad 1 \text{ Hz} = \frac{\Delta\nu}{9\,192\,631\,770}$$

Das heißt, eine Sekunde ist gleich der Dauer von 9 192 631 770 Schwingungen der Strahlung, die der Energie des Übergangs zwischen den zwei Hyperfeinstruktur niveaus des ungestörten Grundzustands im ^{133}Cs -Atom entspricht.

Meter



Der Meter (Symbol m) ist die SI-Einheit der Länge. Er wird definiert durch die Konstante der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c . Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 299 792 458 festgelegt, wenn sie in der Einheit m s^{-1} angegeben wird und die Sekunde durch $\Delta\nu$ definiert ist.

Diese Definition gibt c den Wert $299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit m auf, so ergibt sich:

$$1 \text{ m} = \left(\frac{c}{299\,792\,458} \right) \text{ s} = \frac{9\,192\,631\,770}{299\,792\,458} \frac{c}{\Delta\nu} \approx 30,663\,319 \frac{c}{\Delta\nu}$$

Das heißt, ein Meter ist gleich der Strecke, die Licht im Vakuum innerhalb des Bruchteils von $1/299\,792\,458$ einer Sekunde zurücklegt.

Die neuen Einheiten und ihre Konstanten

Kilogramm



Das Kilogramm (Symbol kg) ist die SI-Einheit der Masse. Es wird definiert durch die Konstante des Planck'schen Wirkungsquantums h . Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ festgelegt, wenn sie in der Einheit J s bzw. $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ angegeben wird und die Sekunde und der Meter durch $\Delta\nu$ und c definiert sind.

Diese Definition gibt h den Wert $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit kg auf, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kg} &= \left(\frac{h}{6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}} \right) \text{ m}^{-2} \text{ s} \\ &= \frac{(299\,792\,458)^2}{(6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34})(9\,192\,631\,770)} \frac{h \Delta\nu}{c^2} \approx 1,475\,5214 \cdot 10^{40} \frac{h \Delta\nu}{c^2} \end{aligned}$$

Das heißt, die Einheit kg wird mit der Wirkung (Einheit: $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$) verknüpft, einer physikalischen Größe in der theoretischen Physik. Zusammen mit der Definition für die Sekunde und den Meter ergibt sich die Definition für das Kilogramm als Funktion des Planck'schen Wirkungsquantums h .

Ampere



Das Ampere (Symbol A) ist die SI-Einheit der Stromstärke. Es wird definiert durch die Konstante der Elementarladung e . Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ festgelegt, wenn sie in der Einheit C bzw. A s angegeben wird und die Sekunde durch $\Delta\nu$ definiert ist.

Diese Definition gibt e den Wert $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ A s}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit A auf, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 1 \text{ A} &= \left(\frac{e}{1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}} \right) \text{ s}^{-1} \\ &= \frac{1}{(9\,192\,631\,770)(1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19})} e \Delta\nu = 6,789\,687 \cdot 10^8 e \Delta\nu \end{aligned}$$

Das heißt, ein Ampere entspricht dem Stromfluss von $1 / (1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19})$ Elementarladungen (Elektronen) pro Sekunde.

Die neuen Einheiten und ihre Konstanten

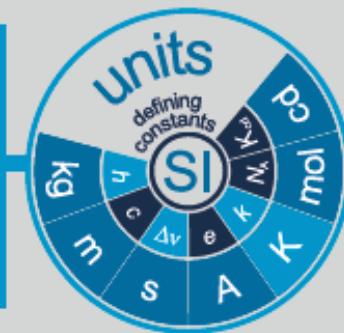
Das Kelvin (Symbol K) ist die SI-Einheit der thermodynamischen Temperatur. Es wird definiert durch die Boltzmann-Konstante k . Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf $1,380\,649 \cdot 10^{-23}$ festgelegt, wenn sie in der Einheit J K^{-1} bzw. $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$ angegeben wird und das Kilogramm, der Meter und die Sekunde durch h , c und $\Delta\nu$ definiert sind.

Diese Definition gibt k den Wert $1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit K auf, so ergibt sich:

$$1 \text{ K} = \left(\frac{1,380\,649}{k} \right) \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2}$$

$$= \frac{1,380\,649 \cdot 10^{-23}}{(6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34})(9\,192\,631\,770)} \frac{\Delta\nu h}{k} \approx 2,266\,6653 \frac{\Delta\nu h}{k}$$

Kelvin



Das heißt, ein Kelvin entspricht einer Änderung der thermodynamischen Temperatur, die mit einer Änderung der thermischen Energie (kT) um $1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J}$ einhergeht.

Das Mol, Symbol mol, ist die SI-Einheit der Stoffmenge. Ein Mol enthält genau $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ Einzelteilchen. Diese Zahl ist der festgelegte numerische Wert der Avogadrokonstante N_A , ausgedrückt in der Einheit mol^{-1} , und wird als Avogadrozahl bezeichnet.

Mol

Die Stoffmenge, Symbol n , eines Systems ist ein Maß für eine Anzahl spezifizierter Einzelteilchen. Dies kann ein Atom, Molekül, Ion, Elektron sowie ein anderes Teilchen oder eine Gruppe solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.

Diese Definition gibt N_A den Wert $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Löst man diese Beziehung nach der Einheit mol auf, so ergibt sich:

$$1 \text{ mol} = \frac{6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}}{N_A}$$

Das heißt, ein Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ eines bestimmten Einzelteilchens enthält.

Die neuen Einheiten und ihre Konstanten

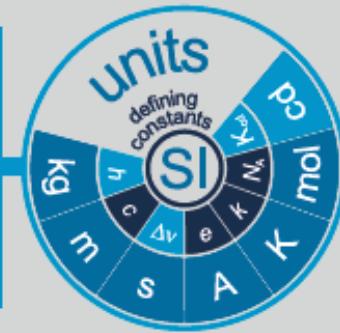
Die Candela (Symbol cd) ist die SI-Einheit der Lichtstärke in einer bestimmten Raumrichtung. Sie wird definiert durch die Konstante K_{cd} , das photometrische Strahlungsäquivalent einer monochromatischen Strahlung von $540 \cdot 10^{12}$ Hz. Der Zahlenwert dieser Konstante ist auf 683 festgelegt, wenn sie in der Einheit lm W⁻¹ bzw. cd sr W⁻¹ oder cd sr kg⁻¹ m⁻² s³ angegeben wird und das Kilogramm, der Meter und die Sekunde durch h , c und $\Delta\nu$ definiert sind.

Diese Definition gibt K_{cd} den Wert 683 cd sr kg⁻¹ m⁻² s³. Löst man diese Beziehung nach der Einheit cd auf, so ergibt sich:

$$1 \text{ cd} = \left(\frac{K_{cd}}{683} \right) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ sr}^{-1}$$

$$= \frac{1}{(6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34})(9\,192\,631\,770)^2 683} (\Delta\nu)^2 h K_{cd} = 2,614\,830 \cdot 10^{10} (\Delta\nu)^2 h K_{cd}$$

Candela



Das heißt, eine Candela ist die Lichtstärke (in eine bestimmte Raumrichtung) einer Strahlquelle, die mit einer Frequenz von $540 \cdot 10^{12}$ Hz emittiert und die eine Strahlungsintensität in dieser Richtung von $1/683$ W sr⁻¹ hat.

Häufig benutzte abgeleitete Einheiten

Größe (Formelzeichen)	Einheit (Kurzzeichen)	Dimension (techn. Enheiten)	Dimension (Si-Einheiten)
Frequenz f	Hertz [Hz]	1/s	1/s
Kraft F	Newton [N]	kg m/s ²	kg m/s ²
Druck p	Pascal [Pa]	Nm ⁻²	kg/(ms ²)
Energie E	Joule [J]	Nm, Ws	kg m ² s ⁻²
Leistung P	Watt [W]	J/s	kg m ² s ⁻³
Elektr. Ladung e^-	Coulomb [C]	As	As
Elektr. Spannung U	Volt [V]	W/A	(kg m ²)/(s ³ A)
Elektr. Kapazität C	Farad [F]	As/V	(s ⁴ A ²)/(kg m ²)
Elektr. Widerstand R	Ohm [Ω]	V/A	(kg m ²)/(s ³ A ²)
Elektr. Leitwert G	Siemens [S]	1/ Ω , A/V	(s ³ A ²)/(kg m ²)
Magn. Fluss F	Weber [Wb]	Vs	(kg m ²)/(s ² A)
Magn. Induktion B	Tesla [T]	Vs/m ² , Wb/m ²	kg/(s ² A)

Vorsilbe	Kurz-zeichen	Faktor	Vorsilbe	Kurz-zeichen	Faktor
Yocto	y	10^{-24}	Kilo	k	10^3
Zepto	z	10^{-21}	Mega	M	10^6
Atto	a	10^{-18}	Giga	G	10^9
Femto	f	10^{-15}	Tera	T	10^{12}
Piko	p	10^{-12}	Peta	P	10^{15}
Nano	n	10^{-9}	Exa	E	10^{18}
Mikro	μ	10^{-6}	Zetta	Z	10^{21}
Milli	m	10^{-3}	Yotta	Y	10^{24}

Weitere Definitionen, Einheiten und gute Übersicht + Umrechnungsregeln
in: Profos, Pfeifer, „Grundlagen der Messtechnik“

1. Grundlagen

ELEKTROTECHNIK (WIEDERHOLUNG)

Jede gerichtete Bewegung von elektrischer Ladung stellt einen elektrischen Strom dar.

- Erfolgt die Bewegung mit zeitlich konstanter Geschwindigkeit, ist das Strömungsfeld stationär
→ Der Strom wird Gleichstrom genannt.
- Beschleunigte Bewegung von Ladungen erzeugen ein transientes oder instationäres Strömungsfeld.
- Transiente Vorgänge die durch mathematische Umformungen wie stationäre Vorgänge behandelt werden können nennt man quasistationär
 - Wechselstromtechnik.

Definition elektrische Stromstärke /

Die Stärke der Strömung ist definiert durch die Ladungsmenge Q , die durch eine vorgegebene Fläche A in der Zeit t fließt.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Big|_A \quad \text{bzw.} \quad i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Big|_A = \frac{dQ}{dt} \Big|_A$$

Die elektrische Spannung

Das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ ist definiert als das Wegintegral über die elektrische Feldstärke und hängt mit der potentiellen Energie über die Probeladung q zusammen:

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - E_{pot}(\vec{r})/q.$$

Falls das elektrische Feld von einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ erzeugt wird, ergibt sich das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV.$$

Definition elektrische Spannung U

Die elektrische Spannung ist als Potentialdifferenz definiert:

$$U_{AB} = \varphi(\vec{r}_A) - \varphi(\vec{r}_B).$$

Um eine Probeladung q im Feld von \vec{r}_A nach \vec{r}_B zu bewegen, muss die Arbeit $W_{AB} = -qU_{AB}$ aufgewendet werden.

Das Ohm'sche Gesetz I

Die elektrische Stromdichte j ist der auf eine Flächeneinheit A bezogene elektrische Strom I

$$j = \frac{I}{A}$$

bzw. das Produkt der Geschwindigkeit \vec{v} der Teilchendichte N und der Teilchenladung q_T

$$\vec{j} = q_T \cdot N \cdot \vec{v}$$

Das Ohm'sche Gesetz besagt, dass die mittlere Teilchengeschwindigkeit \vec{v} (Driftgeschwindigkeit) proportional zu der elektr. Feldstärke \vec{E} ist.

$$\vec{v} \sim \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \mu \cdot \vec{E}$$

μ ist die Beweglichkeit der Ladungsträger. Das Ohm'sche Gesetz beschreibt somit eine (durch Stoßprozesse) gestörte Bewegung und steht im Gegensatz zum Newton'schen Gesetz, bei dem eine ungestörte freie Bewegung vorausgesetzt wird.

Das Ohm'sche Gesetz II

Es ergibt sich ein linearer Zusammengang zwischen Stromdichte und elektr. Feldstärke

$$\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E} = \rho \cdot \mathbf{j} \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{1}{\rho} = q_T \cdot N \cdot \mu$$

Durch Integration kann die an den beiden Enden eines Leiters mit der Länge d und der Fläche A abfallende Potentialdifferenz ermittelt werden

$$U = E \cdot d = \rho \cdot j \cdot d = \left(\rho \frac{d}{A} \right) I$$

Definition elektrischer Widerstand R

Fließt ein Strom durch einen Leiter fällt an ihm die Spannung U ab. Die Spannung ist proportional zum Strom und kann angegeben werden mit

$$U = R \cdot I \quad \text{mit} \quad R = \rho \cdot \frac{d}{A}$$

Das Ohm'sche Gesetz III

Das Ohm'sche Gesetz besagt also , dass...

- die Driftgeschwindigkeit proportional zur elektrische Feldstärke ist.
- die elektrische Stromdichte proportional zur elektrische Feldstärke ist.
- der elektrische Strom und die elektrische Spannung zueinander proportional sind.
- die Beweglichkeit μ konstant ist, d. h. unabhängig ist von der Feldstärke E und von der Geschwindigkeit v :

$$\mu \neq f(E) \text{ bzw. } \mu \neq f(v)$$

- die Leitfähigkeit σ sowie der spezifische Widerstand ρ konstant sind, d. h. unabhängig sind von der elektrischen Feldstärke E und von der Stromdichte j :

$$\sigma, \rho \neq f(E) \text{ bzw. } \sigma, \rho \neq f(j)$$

- der Widerstand R und der Leitwert G konstant sind, d. h. unabhängig sind von der Spannung U und vom Strom I :

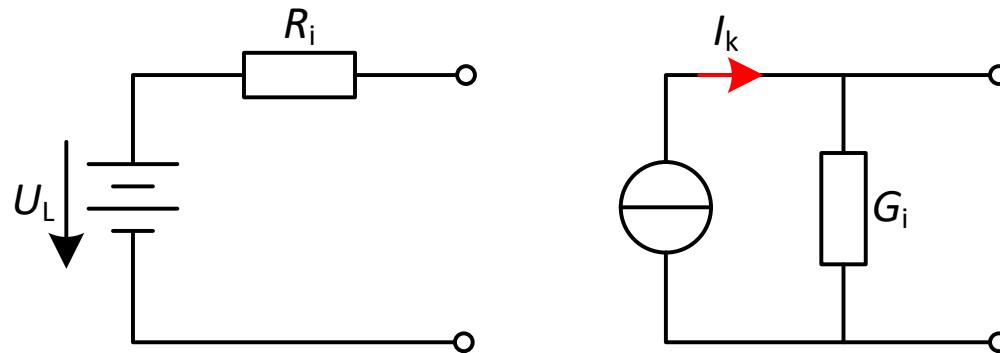
$$R, G \neq f(U) \text{ bzw. } R, G \neq f(I)$$

Zweipole

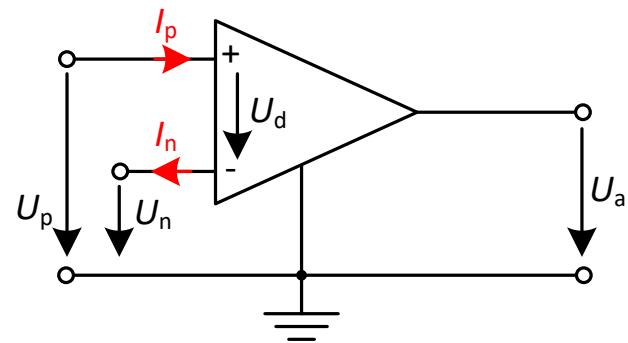
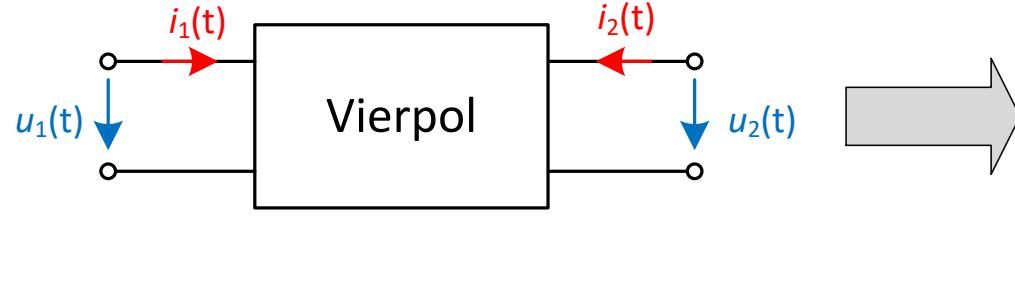
Zweipole sind elektrische Komponenten, die zwei Anschlüsse haben. Aufgrund der Ladungserhaltung ist die algebraische Summe der Ströme durch die beiden Klemmen gleich Null.

Passive Zweipole können elektrische Energie nur in Wärme umwandeln. Der ohmsche Widerstand ist z. B. ein passiver Zweipol.

Aktive Zweipole können elektrische Energie durch Umwandlung aus anderen Energieformen zur Verfügung stellen. Strom- und Spannungsquellen sind z. B. aktive Zweipole.



Ein **Vierpol** oder **Zweitor** ist eine zeitinvariante elektrische bzw. elektronische Schaltung, die zwei paarweise angeordnete Anschlussklemmen hat. Jedes Klemmenpaar wird **Tor** genannt.



Regel:

Die Summe der Ströme durch eine Anschlussklemme eines Tores muss verschwinden. Damit können Vierpole mit Zweipolen oder weiteren Vierpolen zusammengeschaltet werden.

Analyse von Vierpolen I

Das elektrische Verhalten eines Vierpols wird durch die Vorgabe der folgenden vier Zeitfunktionen vollständig beschrieben:

Eingangsstrom

$i_1(t)$

Eingangsspannung

$u_1(t)$

Ausgangsstrom

$i_2(t)$

Ausgangsspannung

$u_2(t)$



Es ergeben sich genau sechs **Aufteilungsmöglichkeiten** $\left(\frac{4!}{2! 2!}\right)$, die benutzt werden um Vierpole zu beschreiben.

Analyse von Vierpolen II



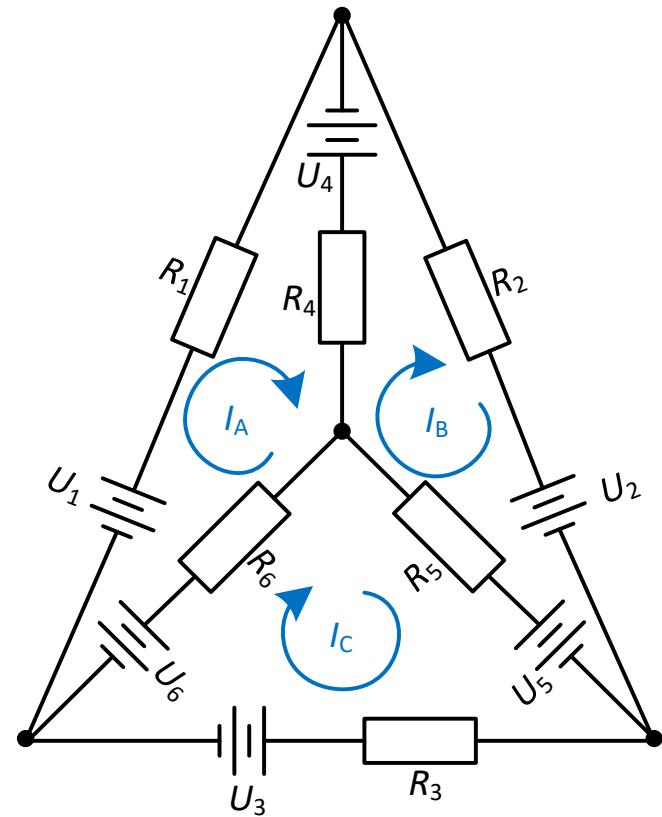
Vierpol Beschreibung	unabhängige Vierpolgrößen	abhängige Vierpolgrößen
Kettenform	$u_2(t), i_2(t)$	$u_1(t) = u_{1a}(u_2, i_2)$ $i_1(t) = i_{1a}(u_2, i_2)$
1. Hybridform	$i_1(t), u_2(t)$	$u_1(t) = u_{1h}(i_1, u_2)$ $i_2(t) = i_{2h}(i_1, u_2)$
2. Hybridform	$u_1(t), i_2(t)$	$i_1(t) = i_{1c}(u_1, i_2)$ $u_2(t) = u_{2c}(u_1, i_2)$
Widerstandsform	$i_1(t), i_2(t)$	$u_1(t) = u_{1z}(i_1, i_2)$ $u_2(t) = u_{2z}(i_1, i_2)$
Leitwertform	$u_1(t), u_2(t)$	$i_1(t) = i_{1y}(u_1, u_2)$ $i_2(t) = i_{2y}(u_1, u_2)$
Inverse Kettenform	$u_1(t), i_1(t)$	$u_2(t) = u_{2r}(i_1, u_1)$ $i_2(t) = i_{2r}(i_1, u_1)$

Die angegebenen Funktionen $u_{1a} \dots i_{2r}$ sind beliebige Funktionen zweier Variablen, die nicht direkt von der Zeit abhängen dürfen.

- Wenn Eingangs- und Ausgangstor vertauscht werden, gehen die 1. und 2. Hybridform sowie die Ketten- und inverse Kettenform ineinander über.
 - Die Widerstands- und Leitwertform bleiben erhalten.
- Wenn die Ströme und Spannungen vertauscht werden (z. B. durch Dualität), gehen die Widerstandsform und die Leitwertform sowie die 1. und 2. Hybridform ineinander über.
 - Die Kettenform und inverse Kettenform bleiben erhalten
- Eine detailliertere Betrachtung und eine Herleitung der Vierpolparameter findet in den Übungen statt...

Ein elektrisches/elektronisches Netzwerk bzw. eine elektrische/elektronische Schaltung ist eine Anordnung von elektrischen/elektronischen Komponenten, die leitend miteinander gekoppelt sind. Dabei können Knoten und Maschen in beliebiger Anzahl und Größe gebildet werden.

Mit Hilfe der sogenannten **Kirchhoff'schen Sätze** können beliebige Netzwerke berechnet werden. Zur Reduzierung des Rechenaufwands und zur Systematisierung der Lösungsabläufe können die Kirchhoff'schen Sätze auch in andere Verfahren aufgehen.



Bsp.: Maschenstromverfahren

1. Kirchhoff'scher Satz

1. Kirchhoff'scher Satz

Der 1. Kirchhoff'sche Satz (Knoten- oder Hüllensatz) bilanziert den Austausch von elektrischer Ladung durch eine Hülle und besagt, in einem vorgegebenen Volumen können keine Anreicherung und keine Verarmung an elektrischer Ladung stattfinden.

Damit ist die algebraische Summe aller Ströme in jedem Knotenpunkt gleich Null. Dabei müssen alle hineinfließenden Ströme einheitlich das gleiche Vorzeichen bekommen. Alle herausfließenden Ströme müssen dann einheitlich das umgekehrte Vorzeichen bekommen.

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

2. Kirchhoff'scher Satz

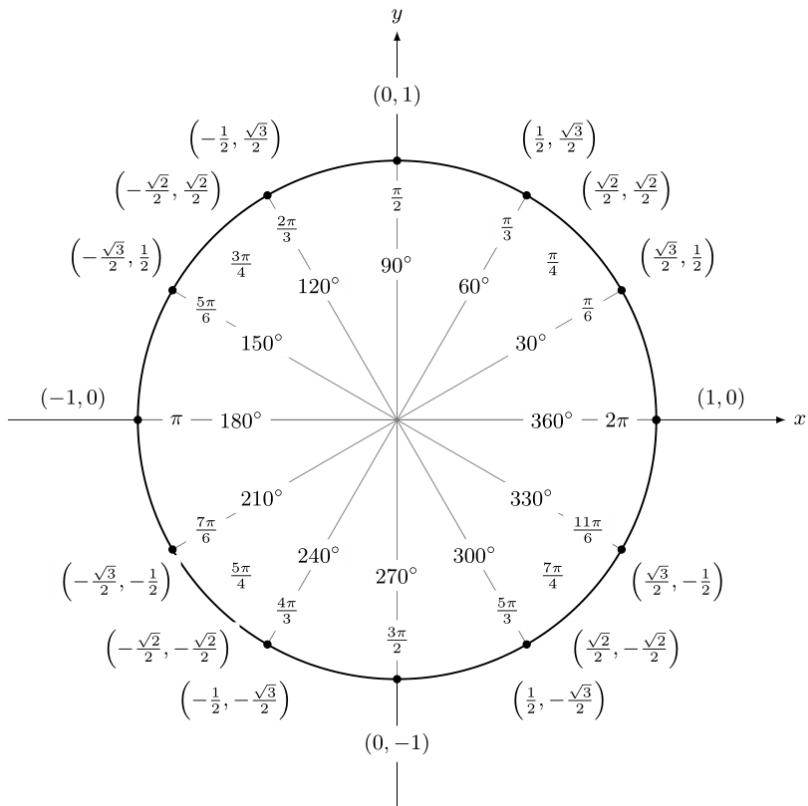
2. Kirchhoff'scher Satz

Der 2. Kirchhoff'sche Satz (Maschensatz) besagt, in einer (geschlossenen) Masche ist die algebraische Summe aller Spannungen gleich Null. Dieser Satz ist damit gleich bedeutend, dass das elektrische Strömungsfeld konservativ (energieerhaltend) ist.

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$

Eine Funktion $f(t)$ wird ganz allgemein als **periodisch** mit der **Periode T** bezeichnet, wenn folgende Bedingung gilt:

$$f(t + n \cdot T) = f(t) \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Eingeschwungener Zustand:

$$u(t) = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U \cdot e^{j\omega t}$$

$$i(t) = \hat{I} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I \cdot e^{j\omega t}$$

Euler-Beziehung:

- $e^{jx} = \cos x + j \sin x$
- $j = \sqrt{-1}$

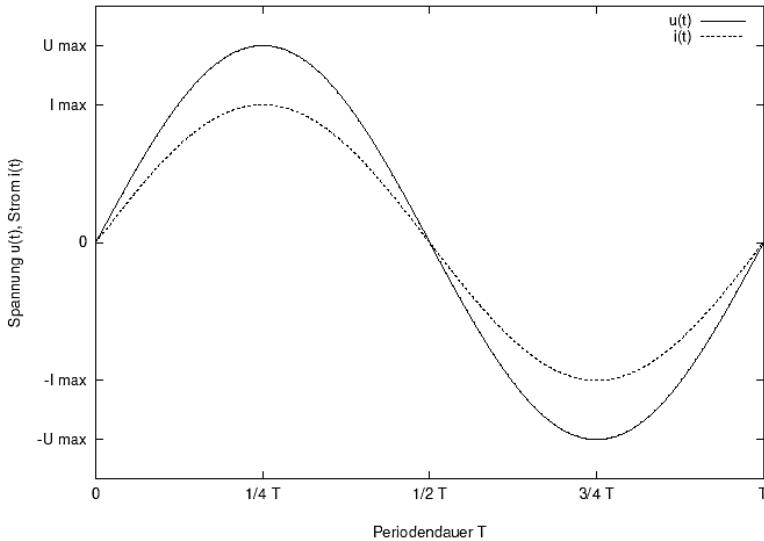
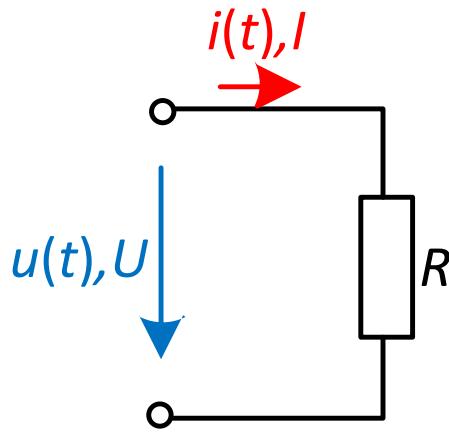
Lineare Bauteile der Elektrotechnik sind Schaltungselemente, deren elektrisches Verhalten durch lineare Gleichungen bzw. Differenzialgleichungen beschrieben werden.

Konzentrierte Bauteile

Konzentrierte Bauteile sind Schaltungselemente, deren Abmessungen viel kleiner sind als die Wellenlänge der betrachteten sinusförmigen Ströme und Spannungen. In der Wechselstromtechnik gibt es genau 3 lineare, passive konzentrierte Grundbauteile. Es sind der **ohmsche Widerstand** R , der **Kondensator** mit der Kapazität C und die **Spule** mit der Induktivität L . Zusätzlich sind die beiden aktiven linearen Zweipole (Strom- und Spannungsquelle) zu berücksichtigen.

Bei genügend kleiner Wechselamplitude kann jede elektrische/elektronische Schaltung durch lineare Bauteile wechselstrommäßig dargestellt werden. Dies stellt die Grundlage aller analytischen und numerischen Verfahren der Wechselstromanalyse dar (z. B. Frequenzanalyse oder Schaltungssimulation mit SPICE).

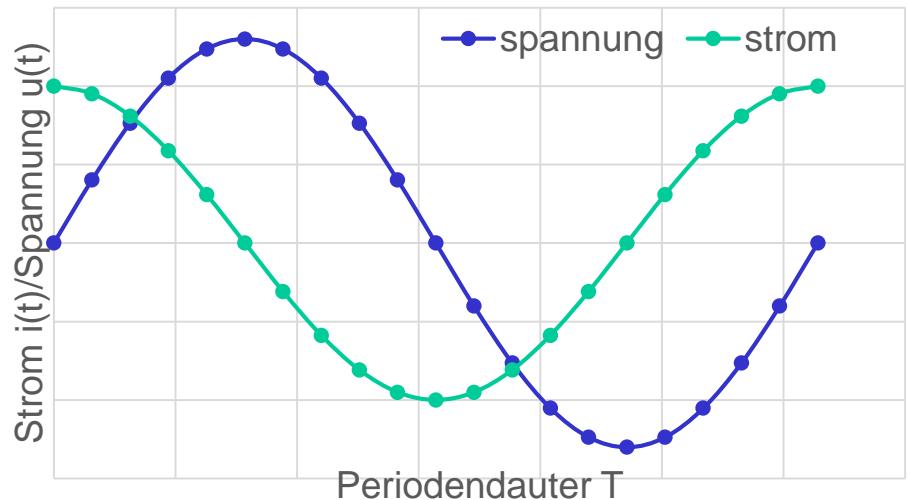
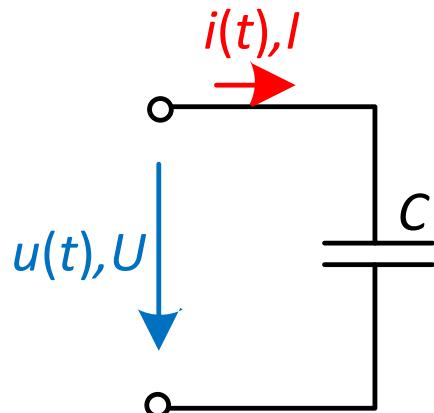
Der Ohmsche Widerstand



- Strom und Spannung befinden sich immer in Phase
 - Reiner Wirkwiderstand
- Momentanwerte von Strom und Spannung sind proportional

$$R = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{U}{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = [\Omega]$$

Der Kondensator



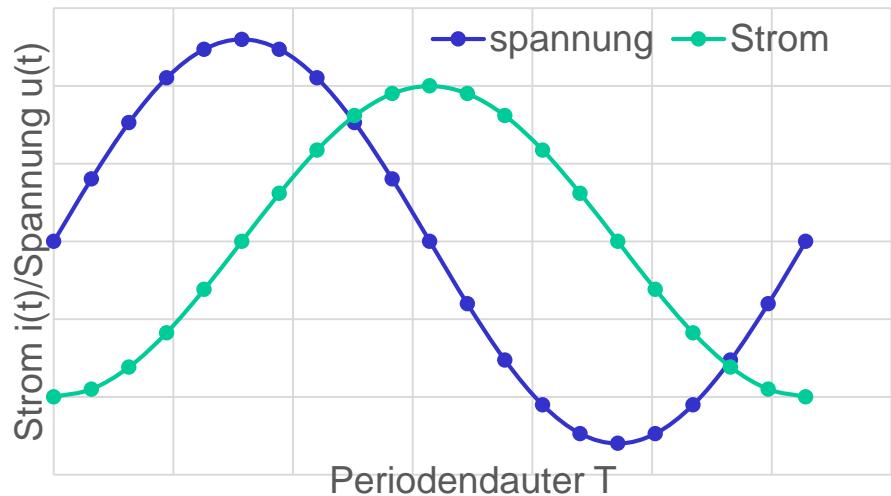
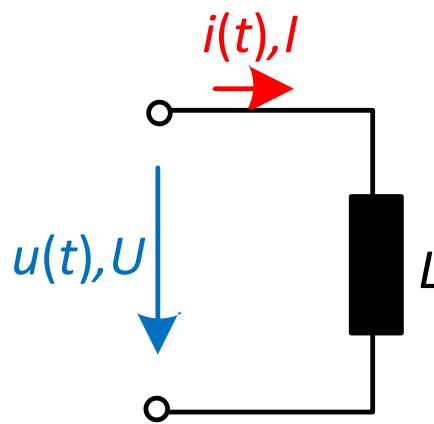
- Kondensator speichert Ladung
- Ladungsmenge $Q \sim$ angelegten Spannung U

$$Q = C \cdot U$$

- Einheit der Kapazität C ist Farad F

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d(C(t) \cdot u(t))}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Spannungsänderung proportional zum Strom, der durch den Kondensator fließt



- Strom I durch die Spule erzeugt einen magnetischen Fluss

$$\Phi = L \cdot I$$

- Einheit der Induktivität L ist Henry H

$$u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d(L(t) \cdot i(t))}{dt} = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Stromänderung proportional zur angelegten Spannung

- Der **komplexe Widerstand Z** , auch **Impedanz** oder **Scheinwiderstand** genannt, ist durch das Verhältnis des Spannungszeigers zum Stromzeiger gegeben und kann durch Realteil und Imaginärteil dargestellt werden.

$$Z = R + j \cdot X$$

R : Wirkwiderstand oder Resistanz

X : Blindwiderstand oder Reaktanz

- Der **komplexe Leitwert Y , Admittanz** oder **Scheinleitwert** genannt, ist durch das Verhältnis des Stromzeigers zum Spannungszeiger gegeben und kann Real- und Imaginärteil dargestellt werden.

$$Y = G + j \cdot B$$

G : Wirkleitwert oder Konduktanz

B : Blindleitwert oder Suszeptanz

Für die grundlegenden Schaltungselemente gelten folgenden Angaben:

	Zeitbereich	Frequenzbereich	Komplexer Widerstand	Komplexer Leitwert
Ohmscher Widerstand R	$u(t) = R \cdot i(t)$	$U(f) = R \cdot I(f)$	$Z = R$	$Y = \frac{1}{R}$
Kapazität C	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$	$I(f) = j\omega C \cdot U(f)$	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$Y = j\omega C$
Induktivität L	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$U(f) = j\omega L \cdot I(f)$	$Z = j\omega L$	$Y = \frac{1}{j\omega L}$

- Die Impedanz und Admittanz eines ohmschen Widerstands sind **frequenzunabhängig**.
- Im Gegensatz dazu sind Impedanz und Admittanz einer Kapazität bzw. einer Induktivität **frequenzabhängig**

Beispiel

Kirchhoff'sche Regeln

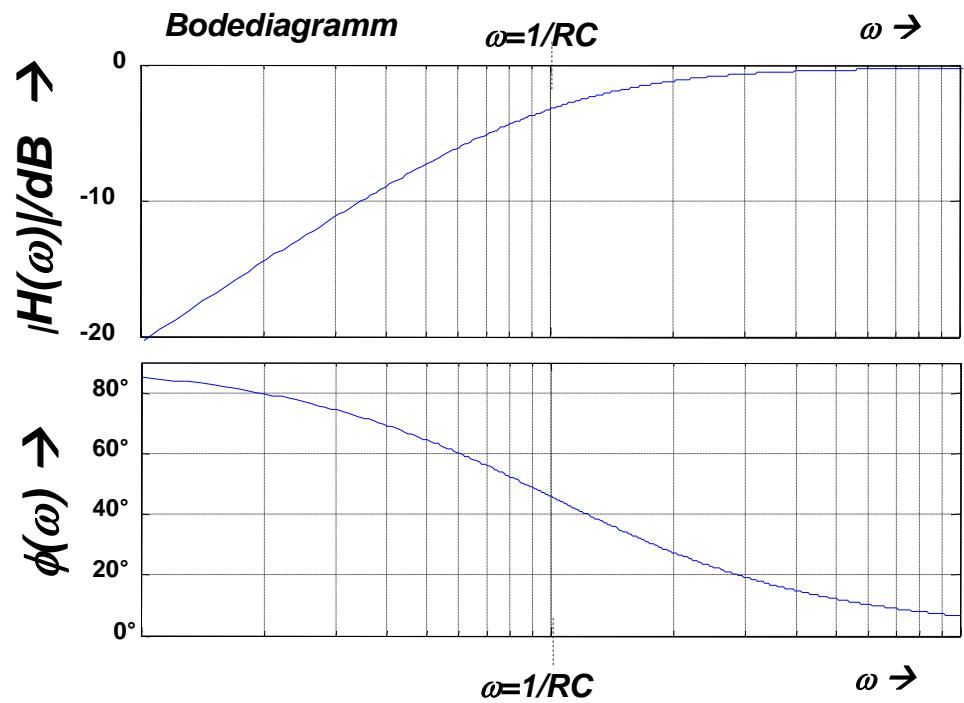
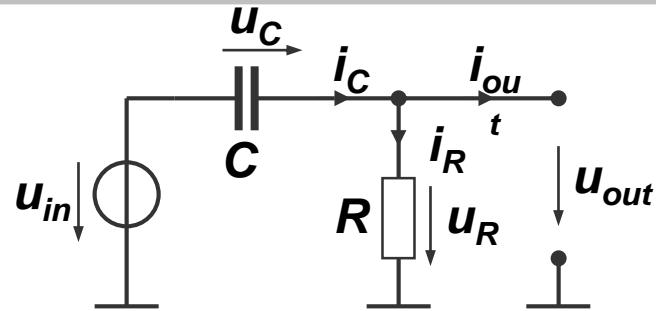
- $i_C = i_R$ bei $i_{out} = 0$
- $u_{in} = u_C + u_R$ mit $u_R = u_{out}$

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{u_{out}}{R}$$

$$u_c = i_c \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \frac{u_{out}}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$

$$\Rightarrow u_{in} = u_{out} \cdot \left[1 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \right]$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C + 1}$$

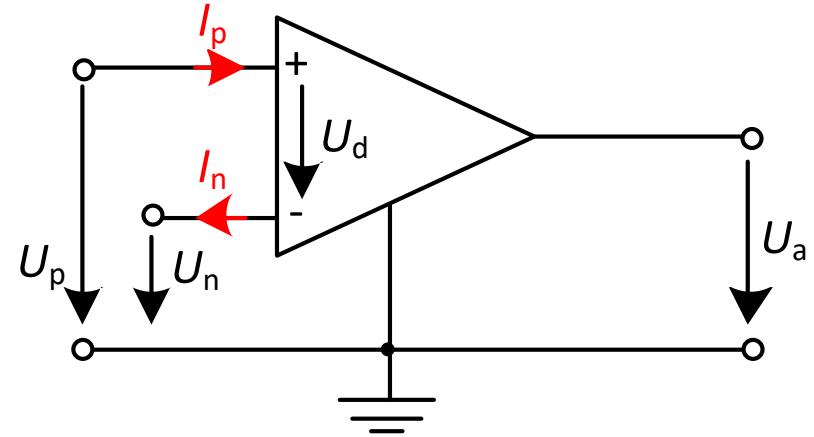


Operationsverstärker I

Der Operationsverstärker (kurz *OP* oder *OPV*) ist eine integrierte Schaltung, die im wesentlichen **zwei Eingangsklemmen, eine Ausgangsklemme** und einen Anschluss für **Bezugspotential** hat.

Er werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

- Eingangsströme I_p, I_n
- Eingangsspannungen U_p, U_n
- Ausgangsspannung U_a
- Betriebsspannung $\pm U_B$



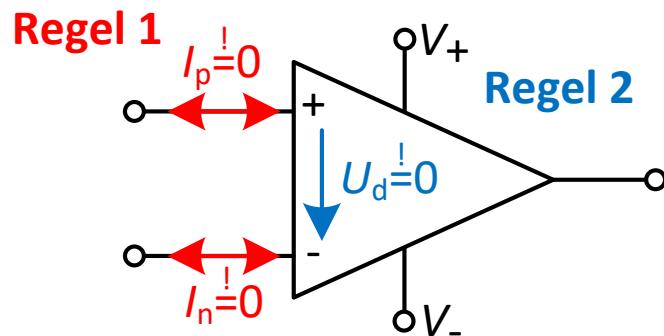
Um Operationsverstärker und die Schaltungen mit OPVs zu verstehen **muss** man nur zwei Regel beachten!

Regel 1

KEINE Ströme fließen **IN** oder **AUS** den Eingängen eines Operationsverstärkers

Regel 2

Ein Operationsverstärker versucht die Eingänge immer **GLEICH** zu halten!



Grundlegende Eigenschaften eines OPV

In seiner grundlegenden Eigenschaft liefert der ideale OPV eine Ausgangsspannung U_a , die der **Eingangsspannungsdifferenz** U_d proportional ist. Die Proportionalitätskonstante V ist die **Leerlaufspannungsverstärkung**.

$$U_a = V \cdot U_d = V \cdot (U_p - U_n)$$

Damit ergibt der ideale OPV eine Spannungsquelle, deren Ausgangsspannung linear durch die anliegende Eingangsspannungsdifferenz gesteuert wird.

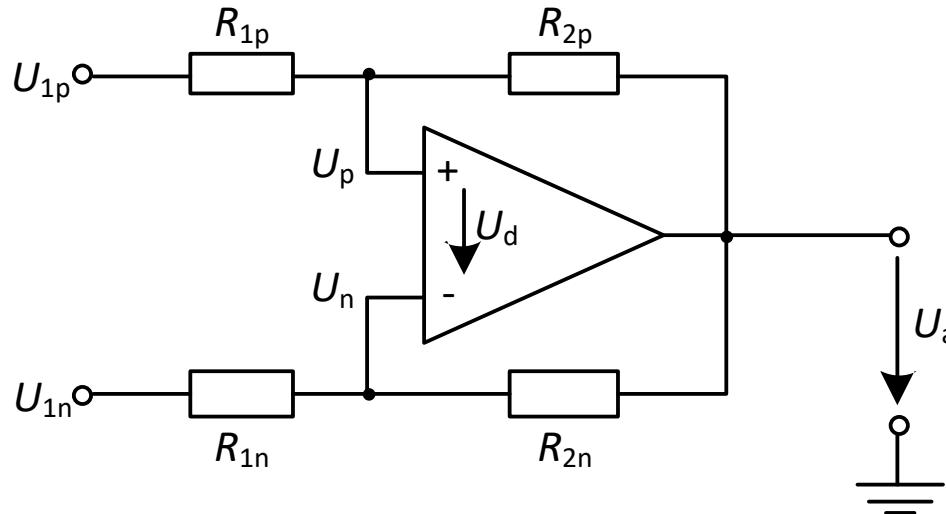
- Der Operationsverstärker ist wegen seiner einfachen Handhabung die wichtigste integrierte Schaltung der Analogelektronik.
- Durch Beschaltung des OPV mit rein ohmschen Widerständen kann die Spannungsverstärkung V auf jeden beliebig kleineren Wert eingestellt werden.

Beispiel zur Berechnung von OPV-Schaltungen I

Zur Berechnung von Schaltungen mit OPV's müssen...

- die Knotengleichungen für den positiven und negativen Eingang,
- die Funktionsgleichung des OPV,
- die Strom-Spannungsabhängigkeiten der Komponenten mit denen der OPV beschaltet, sowie
- die Kirchhoff'schen Knoten- und Maschenregeln zur Beschreibung der Schaltung

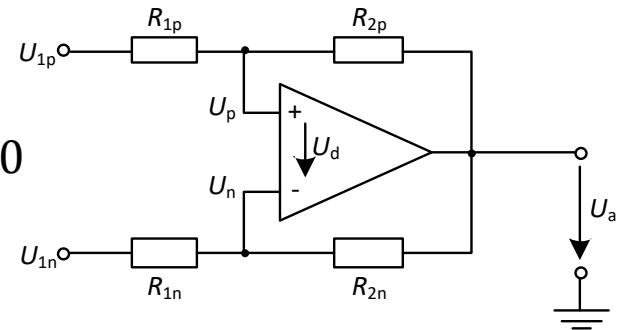
berücksichtigt werden.



Beispiel zur Berechnung von OPV-Schaltungen II

Knotengleichung am positiven OPV-Eingang:

$$I_p = 0 \rightarrow \frac{U_{1p} - U_p}{R_{1p}} + \frac{U_a - U_p}{R_{2p}} = 0$$



Knotengleichung am negativen OPV-Eingang:

$$I_n = 0 \rightarrow \frac{U_{1n} - U_n}{R_{1n}} + \frac{U_a - U_n}{R_{2n}} = 0$$

Funktionsgleichung eines OPV (bei endlichem V):

$$U_a = V \cdot (U_p - U_n)$$

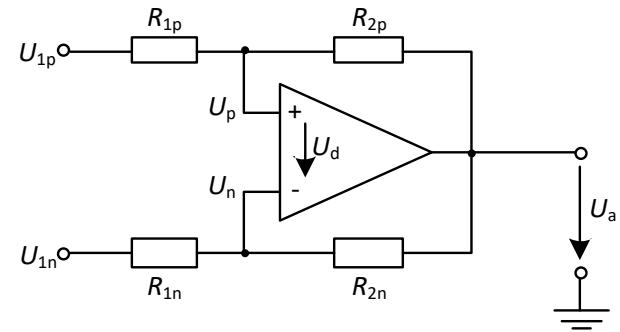
Diese Gleichungen gehen in das folgende System über:

$$\begin{aligned} U_a G_{2p} - U_p (G_{1p} + G_{2p}) &= -G_{1p} U_{1p} \\ U_a G_{2n} - U_n (G_{1n} + G_{2n}) &= -G_{1n} U_{1n} \\ U_a - U_p V &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel zur Berechnung von OPV-Schaltungen III

Für die Ausgangsspannung ergibt sich:

$$U_a = V \cdot \frac{U_{1p} \left(\frac{R_{2p}}{R_{1p} + R_{2p}} \right) - U_{1n} \left(\frac{R_{2n}}{R_{1n} + R_{2n}} \right)}{1 + V \cdot \left(\frac{R_{1n}}{R_{1n} + R_{2n}} - \frac{R_{1p}}{R_{1p} + R_{2p}} \right)}$$



Wenn eine unendliche Leerlaufspannungsverstärkung vorliegt ($V \rightarrow \infty$), können die nachfolgenden Spezialfälle analysiert werden.

Fall 1: $U_{1p} = 0$, $\frac{R_{1p}}{R_{2p}} = 0$, $U_a = -U_{1n} \cdot \frac{R_{2n}}{R_{1n}}$

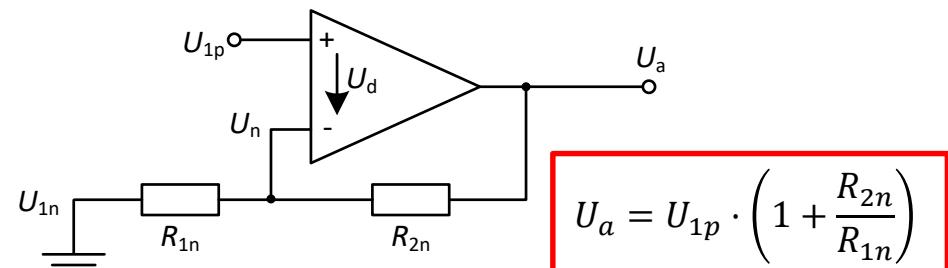
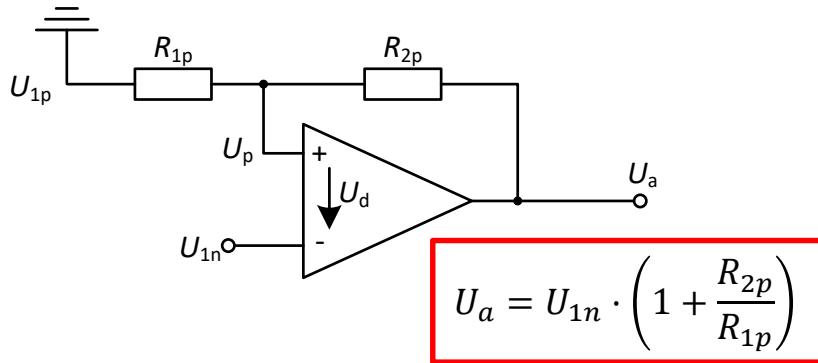
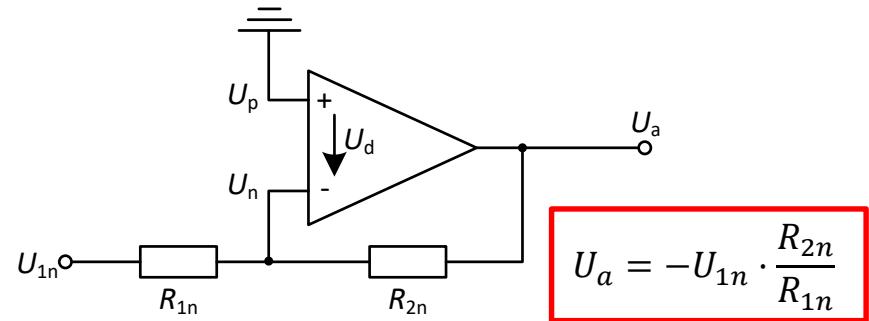
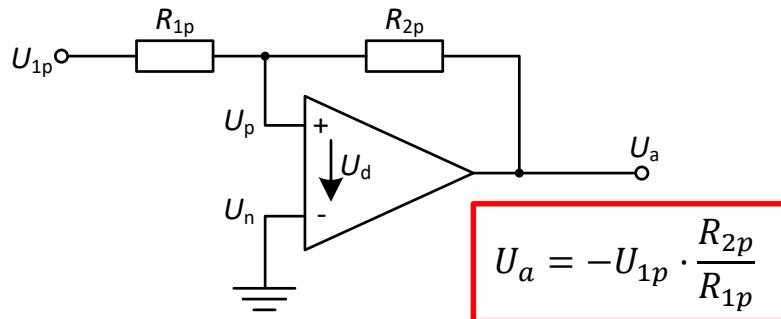
Fall 2: $U_{1n} = 0$, $\frac{R_{1n}}{R_{2n}} = 0$, $U_a = -U_{1p} \cdot \frac{R_{2p}}{R_{1p}}$

Fall 3: $U_{1p} = 0$, $\frac{R_{1n}}{R_{2n}} = 0$, $U_a = U_{1n} \cdot \left(1 + \frac{R_{2p}}{R_{1p}} \right)$

Fall 4: $U_{1n} = 0$, $\frac{R_{1p}}{R_{2p}} = 0$, $U_a = U_{1p} \cdot \left(1 + \frac{R_{2n}}{R_{1n}} \right)$

Beispiel zur Berechnung von OPV-Schaltungen IV

Die Spezialfälle 1 und 2 beschreiben **invertierende Verstärker**, während die Spezialfälle 3 und 4 **nichtinvertierende Verstärker** ergeben.



Wichtiger Hinweis:

Das Beispiel zur Berechnung von OPV-Schaltungen gilt für den Spezialfall $V \rightarrow \infty$!
Bei **realen** Operationsverstärkern kann die praktische Realisierung der einen oder anderen Schaltung auf den vorangegangenen Folien mit erheblichen **Stabilitätsproblemen** verbunden sein! Diese sind insbesondere auf thermische und elektrische Rückkopplungsmechanismen zurückzuführen.

In späteren Kapiteln werden **oft eingesetzte** Operationsverstärkerschaltungen für die Messtechnik vorgestellt und besprochen!

Die nichtidealen Abweichungen eines OPV können in drei Gruppen unterteilt werden:

- **Lineares statisches Verhalten**

- Rauschen, endliche Verstärkung V , nichtverschwindender Eingangsstrom $I_p \neq 0$ bzw. $I_n \neq 0$, nichtverschwindender Ausgangswiderstand $R_a \neq 0$, endliche Gleichtaktunterdrückung $CMRR < \infty$, Temperaturdrift

- **Nichtlineares statisches Verhalten**

- Abhängigkeit der Parameter vom Arbeitspunkt
 - Grenzen der Signalaussteuerung

- **Frequenz und Zeitverhalten**

- endliche Grenzfrequenz, Einschwingverhalten, Erholzeit

OPVs verfügen teilweise zusätzliche Anschlussklemmen zur Frequenzkompenstation, Nullpunkt-korrektur und/oder Betriebsstromeinstellung.

Nichtideales Verhalten des OPVs

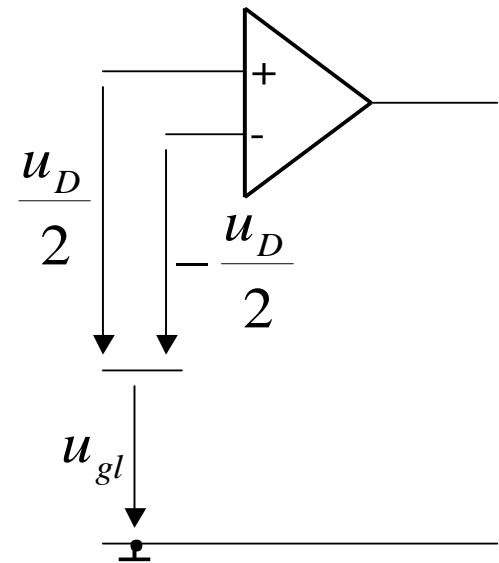
Gleichtaktspannungsverstärkung

(common mode voltage gain)

$$u_A = V_0 \Big|_{(u_{gl} = \text{const.})} \cdot u_D + V_{gl} \Big|_{(u_D = \text{const.})} \cdot u_{gl}$$

mit $u_{gl} = \frac{u_P + u_N}{2}$

$$V_{gl} \approx 10^0 \text{ to } 10^1 \quad (\text{ideal } 0)$$



Gleichtakunterdrückung

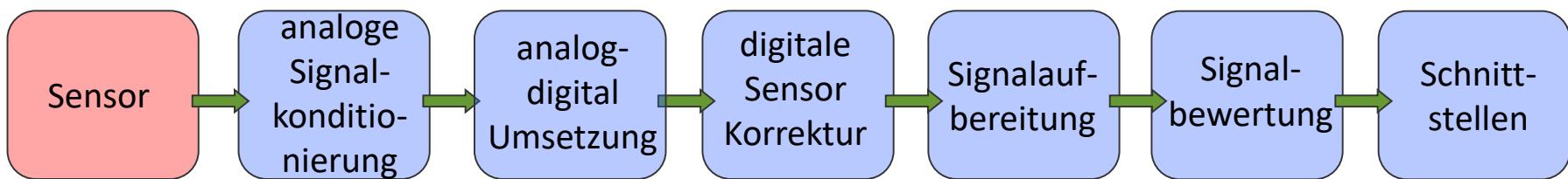
(common mode rejection rate CMRR)

$$CMRR = \left| \frac{V_0}{V_{gl}} \right| \quad CMRR \approx 100 \text{ dB} \quad (\text{ideal } \infty)$$

3. Sensoren und Messwertumformer

SENSOREN

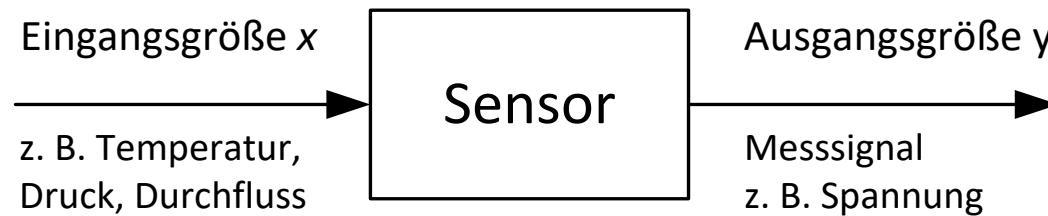
Funktionsblöcke der Messtechnik



- | | | | | |
|--------------------------------------|------------------------------|--|---------------------------------------|--|
| ■ Signal-anpassung
(R, L, C -> U) | ■ Anti-Aliasing
Filterung | ■ Linearisierung | ■ Berechnung | ■ Muster-
erkennung |
| ■ Brücken-
schaltung | ■ Pegel-
anpassung | ■ Kalibrierung | ■ trigonomet-
rische
Umrechnung | ■ Ereignis-
vorhersage |
| | ■ A/D-
Umsetzung | ■ Offset &
Verstärkungs-
korrekturen | ■ digitale
Filterung | ■ Korrelation |
| | | ■ Drift-
kompensation | ■ Auto-
korrelation | ■ Sensor Fusion |
| | | ■ Diagnose | ■ Spektral-
Analyse (FFT) | ■ modellbasierte
Signal-
bewertung |

Was ist ein Sensor

Ein Sensor ist das primäre Element in einer Messkette, das eine variable Eingangsgröße in ein geeignetes Messsignal umsetzt!



Was ist ein Sensor...

Ein Sensor ist ein **Spezialfall eines Transducers**, der eine Energieform (mechanisch, thermisch ...) in eine andere Energieform (elektrisch, mechanisch...) umformt.

(Quasi-) Statische Eigenschaften

Messbereich	Bereich in dem Messgrößen sinnvoll sind
Empfindlichkeit	Sensitivität
Querempfindlichkeit	Selektivität und Spezifität
Auflösung	Kleinste (messbare) Änderung der Eingangsgröße
Messabweichung	Systematische- / dynamische- / zufällige Messfehler

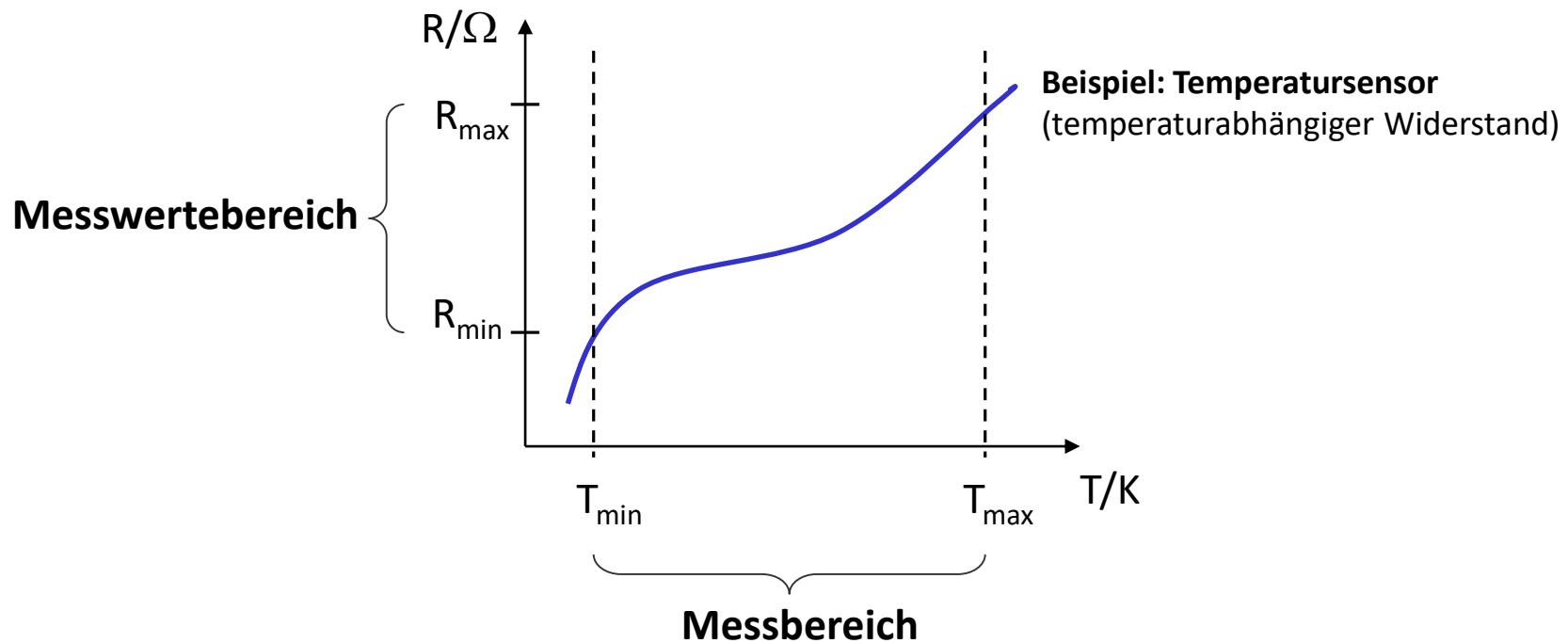
Dynamische Eigenschaften

- Übertragungsfunktion
- Frequenzgang
- Impulsantwort
- Sprungantwort

Sonstige Eigenschaften

Messdauer	Dauer einer Messung
Zuverlässigkeit	Lebensdauer
Platzbedarf	Größe
Kosten	

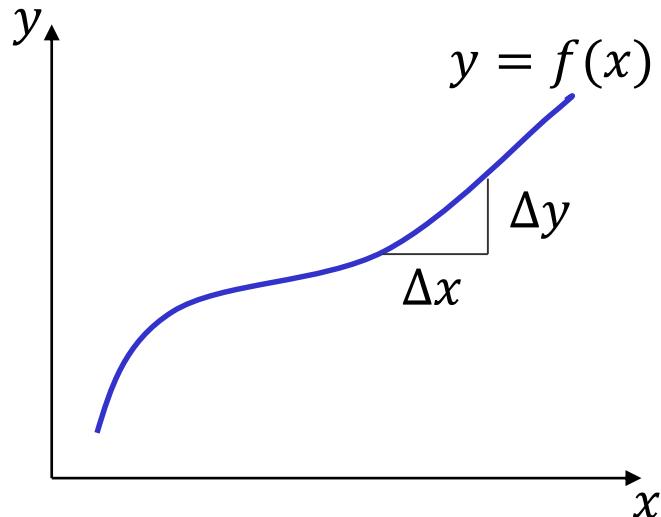
- Jedes reale Messsystem hat einen begrenzten Messbereich in dem es Messgrößen sinnvoll (d. h. innerhalb festgelegter Fehlergrenzen) umsetzen kann
- Der Messbereich eines Messsystems muss angegeben werden
- Messung muss im Messbereich durchgeführt werden



Empfindlichkeit = Sensitivität

Aus der Kennlinie eines Messgeräts wird die Empfindlichkeit S (Sensitivität) gewonnen, indem am Arbeitspunkt die beobachtete Änderung des Ausgangssignals Δy durch die sie verursachende Änderung des Eingangssignals Δx dividiert wird.

Bei Messgeräten, bei denen Ein- und Ausgangssignal gleichartige Größen sind (z. B. Ein- und Ausgangsspannung eines Verstärkers), kürzen sich die Einheiten heraus, und die Empfindlichkeit ist eine dimensionslose Zahl. Ist dies nicht der Fall, so sind die Einheiten stets mit anzugeben.



(Partielle) Empfindlichkeit S

$$S = \frac{\partial y}{\partial x} \text{ in } \frac{\text{Einheit des Ausgangssignals}}{\text{Einheit des Eingangssignals}}$$

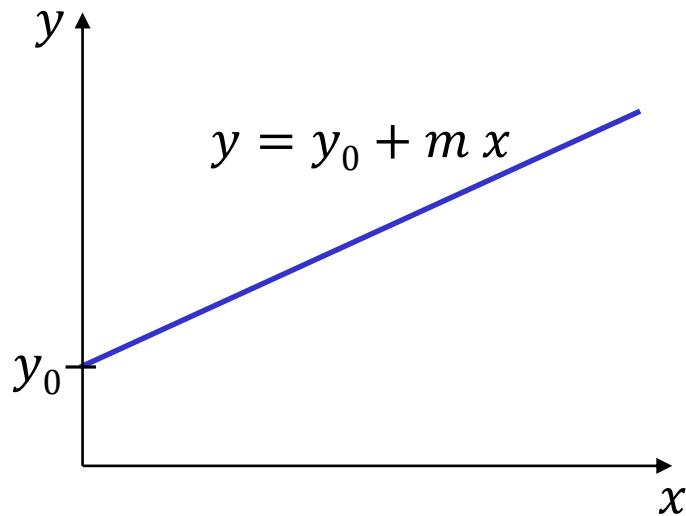
relative Empfindlichkeit

$$S_{rel} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

Lineare Messcharakteristik

Ein Messgerät hat eine lineare Messcharakteristik, wenn die Empfindlichkeit über dem gesamten Messbereich konstant ist

Ein Messgerät wird **linear** genannt, wenn gilt: $S = \frac{\partial y}{\partial x} = \text{const.}$



Gerade:

$$f(x) = y_0 + m x$$

$$S = \frac{df(x)}{dx} = m$$

Lineare Messcharakteristik - Beispiel

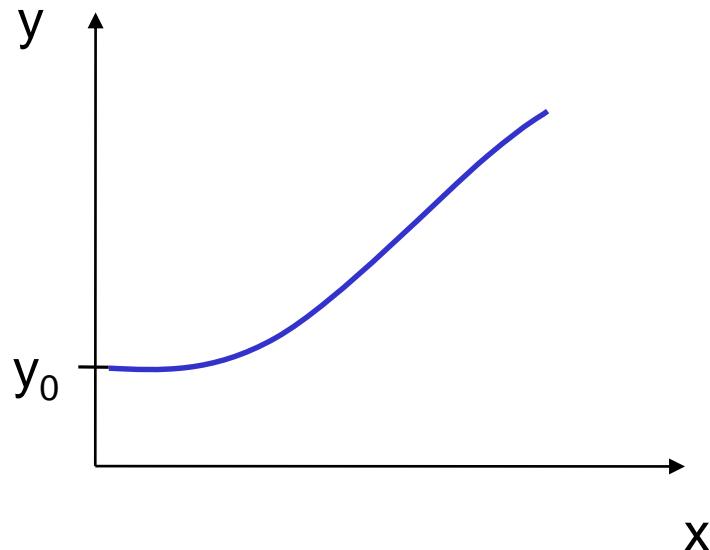
Pt100 Temperaturwiderstand in einem Messbereich von 0 bis 100°C

Lineare Näherung: $R(T) = R_0 \cdot (1 + \alpha T)$

Hier $R(T) = R_0 \cdot \left(1 + 3,908 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^{\circ}C} \cdot T\right)$ mit $R_0 = 100 \Omega$

$$S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta R}{\Delta T} = \frac{100 \Omega \cdot 3,908 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^{\circ}C} \cdot 1 ^{\circ}C}{1 ^{\circ}C} = 0,3908 \Omega/^{\circ}C$$

Die Sensitivität beträgt $0,3908 \Omega/^{\circ}C$



Quadratische-Funktion:

$$f(x) = y_0 + a \cdot x + b \cdot x^2$$

$$S = d f(x) / dx = a + 2 \cdot b \cdot x$$

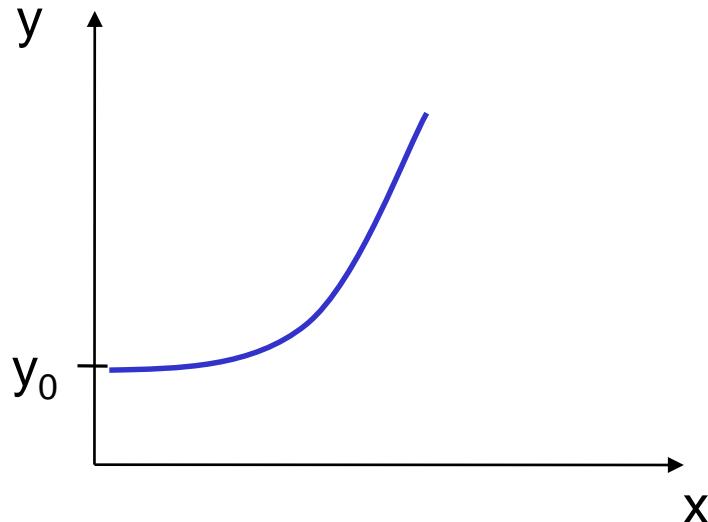
Empfindlichkeit S linear abhängig
vom Messwert

Beispiel 2:

Bsp. 2: PT100 mit quadratischer Näherung für $0^\circ\text{C} < T < 850^\circ\text{C}$

$$R(T) = R_0 \cdot \left(1 + 3.908 \cdot 10^{-3} \cdot T \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}} - 5.8 \cdot 10^{-7} T^2 \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}^2} \right).$$

$$\text{Sensitivität} = S(T) = R_0 \cdot (3.908 \cdot 10^{-3} / ^\circ\text{C} - 2 \cdot 5.8 \cdot 10^{-7} \cdot T / ^\circ\text{C}^2)$$



Exponential-Funktion:

$$f(x) = y_0 \cdot e^{\alpha \cdot x}$$

$$S = \frac{d f(x)}{dx} = \alpha \cdot f(x)$$

Empfindlichkeit S ist nicht-linear
abhängig vom Messwert

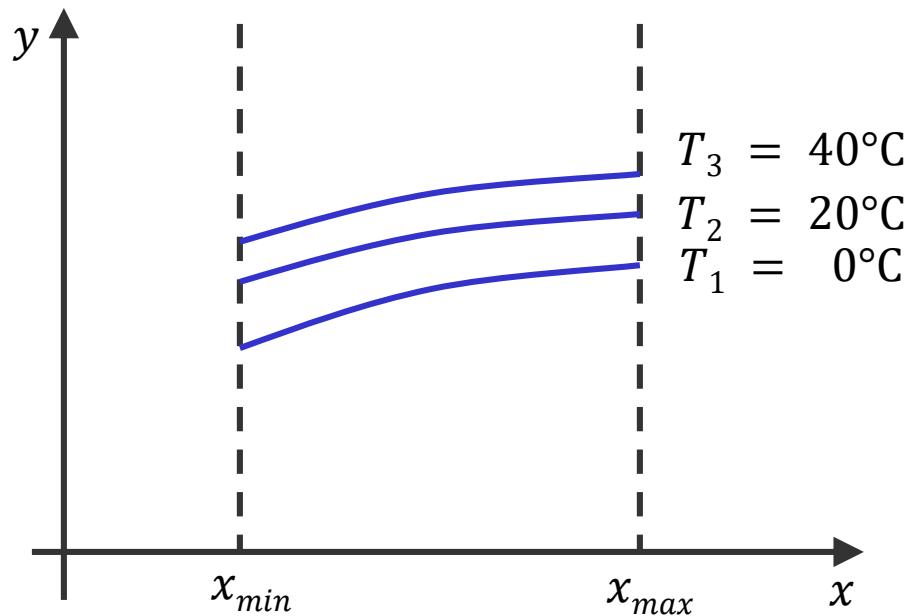
Beispiel 3: Keramischer NTC-Sensor: $R(T) = R_N e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_N} \right)}$

$$S_{rel} = \frac{1}{R(T)} \frac{\partial R}{\partial T} = -\frac{B}{T^2}$$

S_{rel} ca. 2 – 5% pro K

Querempfindlichkeit

Einfluss einer fremden Größe auf den Messwert der gesuchten Größe



Im Datenblatt eines Sensors
dargestellt, z. B. als
Parameterfeld

Die **Selektivität** eines Messverfahrens beschreibt, inwieweit Messwerte in einem komplexen multisensoriellem Messsystem ohne Beeinflussung durch andere Größen bestimmt werden können (Mehrkomponentenanalyse).

Reagiert ein Messverfahren **selektiv** auf eine bestimmte Messgröße, so besteht keine (bzw. nur eine sehr geringe) Querempfindlichkeit auf andere Messgrößen.

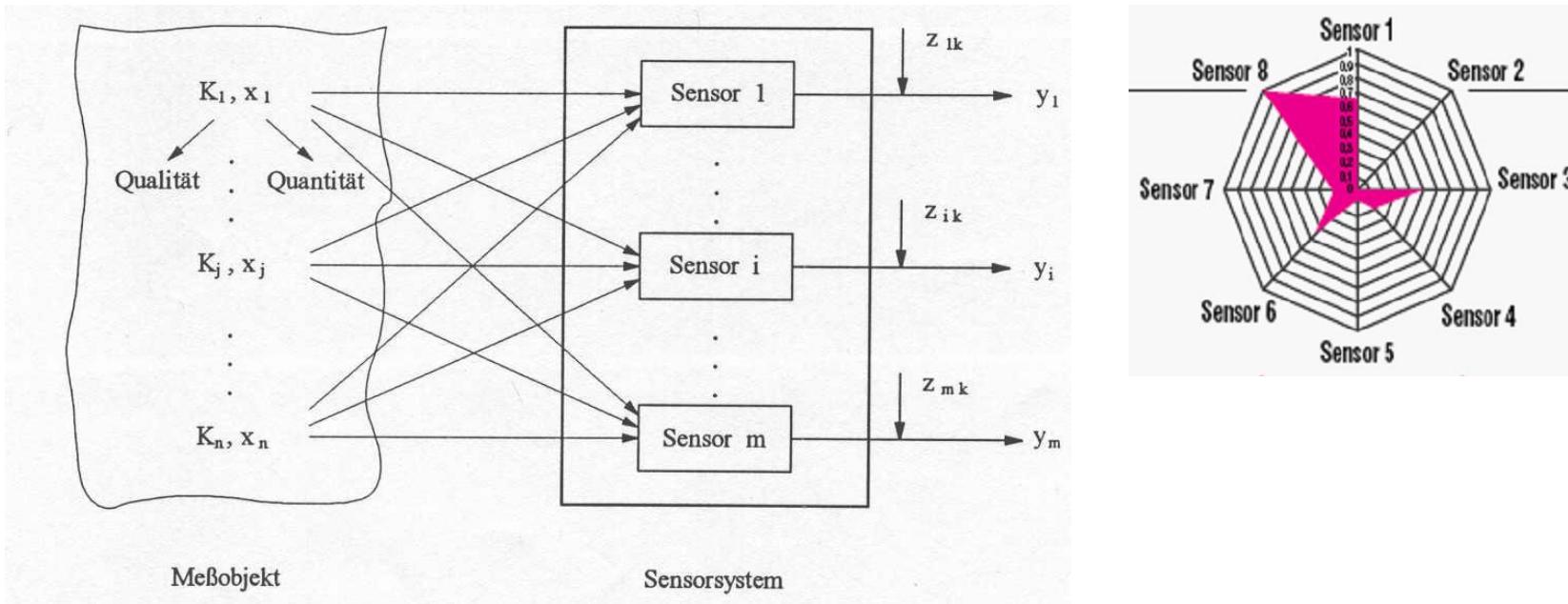
Beispiel: Ein Messsignal für eine bestimmte Komponente hängt beispielsweise nicht von den Konzentrationen der anderen Stoffe in einem Stoffgemisch ab.

Die **partielle Empfindlichkeit** $S_{ij} = (\partial y_i)/(\partial x_j)$ (\rightarrow Empfindlichkeit des Messsystems im Bezug auf eine bestimmte Messgröße) ist dann nur für die gewünschte Messgröße groß und für alle anderen eventuellen Störgrößen klein $S_{i\text{Messgröße}} \gg S_{i\text{Störgröße}}$

Die **Spezifität** beschreibt die Fähigkeit eines Verfahrens, eine ganz bestimmte Messgröße unabhängig von anderen Größen quantitativ zu bestimmen (Einzelkomponentenanalyse).

Querempfindlichkeit – Selektivität und Spezifität II

Multisensorsystem zur Untersuchung mehrerer Messgrößen typisch z. B. in der chemischen / biologischen Analytik, „elektronische Nase“ usw.



$$m \times n - \text{Selektivitätsmatrix: } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1} & \cdots & S_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Auflösung

Auflösung

Kleinste Änderung einer Eingangsgröße, die zu einer eindeutigen und reproduzierbaren Änderung der Ausgangsgröße führt.

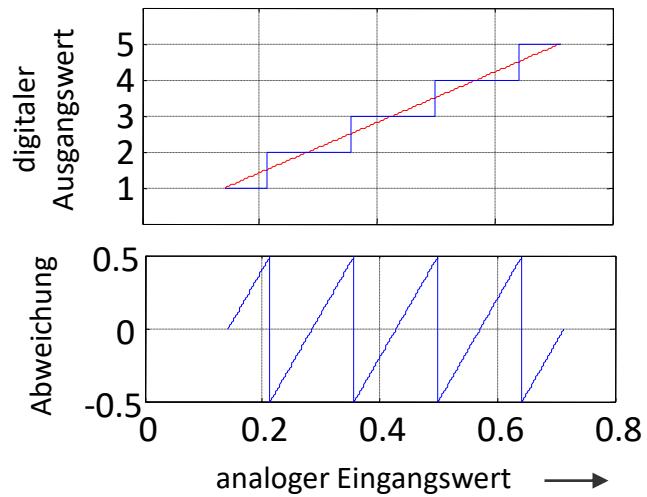
Analoginstrumente:

Auflösung begrenzt durch Reibung, Hysterese, Rauschen

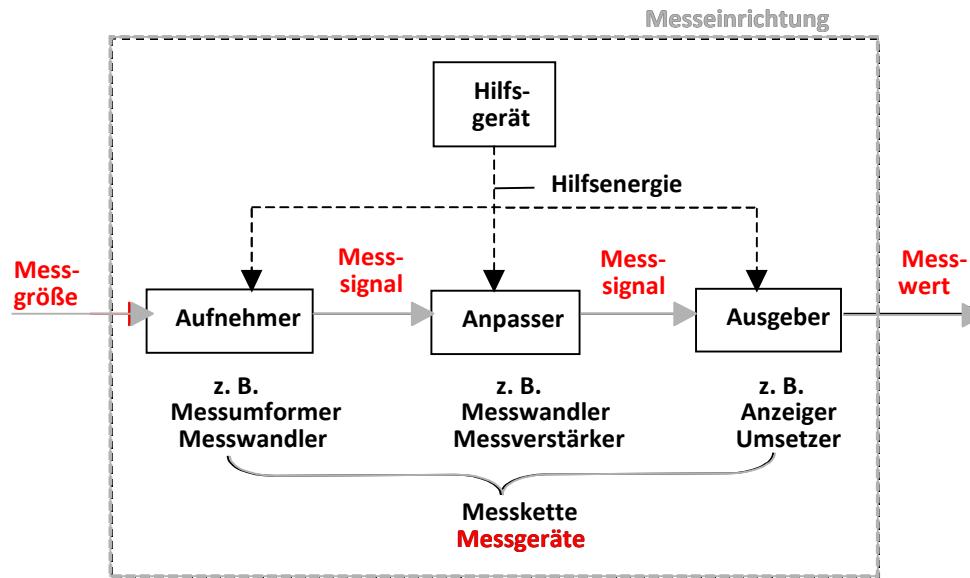
Digitalinstrumente:

Quantisierungsfehler < Auflösung

z. B. dreistellige Anzeige 000 ... 999
 → Quantisierungsfehler ± 0.5 Promille



Grundstruktur einer Messeinrichtung I



Messgröße: ist die physikalische Größe, deren Wert durch eine Messung ermittelt werden soll.

Messwert: ist der gemessene spezielle Wert einer Messgröße; Angabe als Produkt von Zahlenwert und Einheit

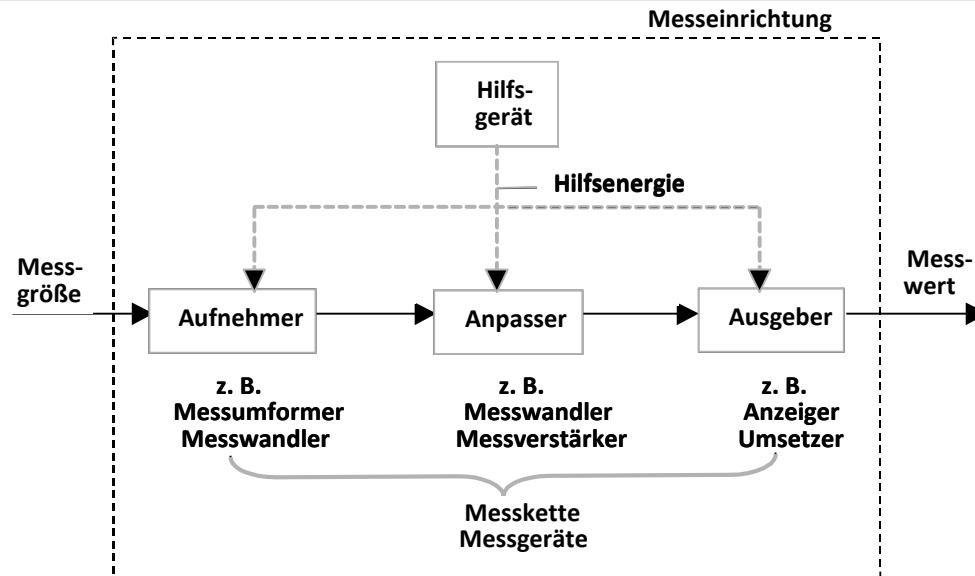
Messergebnis: ist ein aus Messungen gewonnener Schätzwert für den wahren Wert einer Messgröße. In einfachen Fällen kann bereits ein einzelner berichtigter Messwert das Messergebnis sein.

Messgerät: liefert oder verkörpert (z. B. durch Normale) Messwerte.

Messeinrichtung: die Gesamtheit aller Messgeräte und zusätzlicher Einrichtungen zur Erzielung eines Messergebnisses.

Messsignale stellen Messgrößen im Signalflussweg einer Messeinrichtung durch zugeordnete physikalische Größen gleicher oder anderer Art dar.

Grundstruktur einer Messeinrichtung II



- Aufnehmer:** ein Messgerät, welches an seinem Eingang die Messgröße aufnimmt und an seinem Ausgang ein entsprechendes Messsignal abgibt.
- Ausgeber:** Messgeräte, die den Messwert der gemessenen Größe ausgeben.
- Anpasser:** Messgeräte, die in der Messeinrichtung zwischen Aufnehmer und Ausgeber liegen. Sie bilden die Übertragungsstrecke.
- Hilfsgeräte:** zusätzliche Einrichtungen, die nicht unmittelbar zur Aufnahme, Umformung oder Ausgabe dienen (z.B. Hilfsenergiequellen zur Aufrechterhaltung der Funktion eines Messgerätes, Lupen, Thermostate).
- Messkette:** Folge von Elementen eines Messgeräts oder einer Messeinrichtung, die den Weg des Messsignals von der Aufnahme der Messgröße bis zur Bereitstellung der Ausgabe bildet.

Messmethoden:

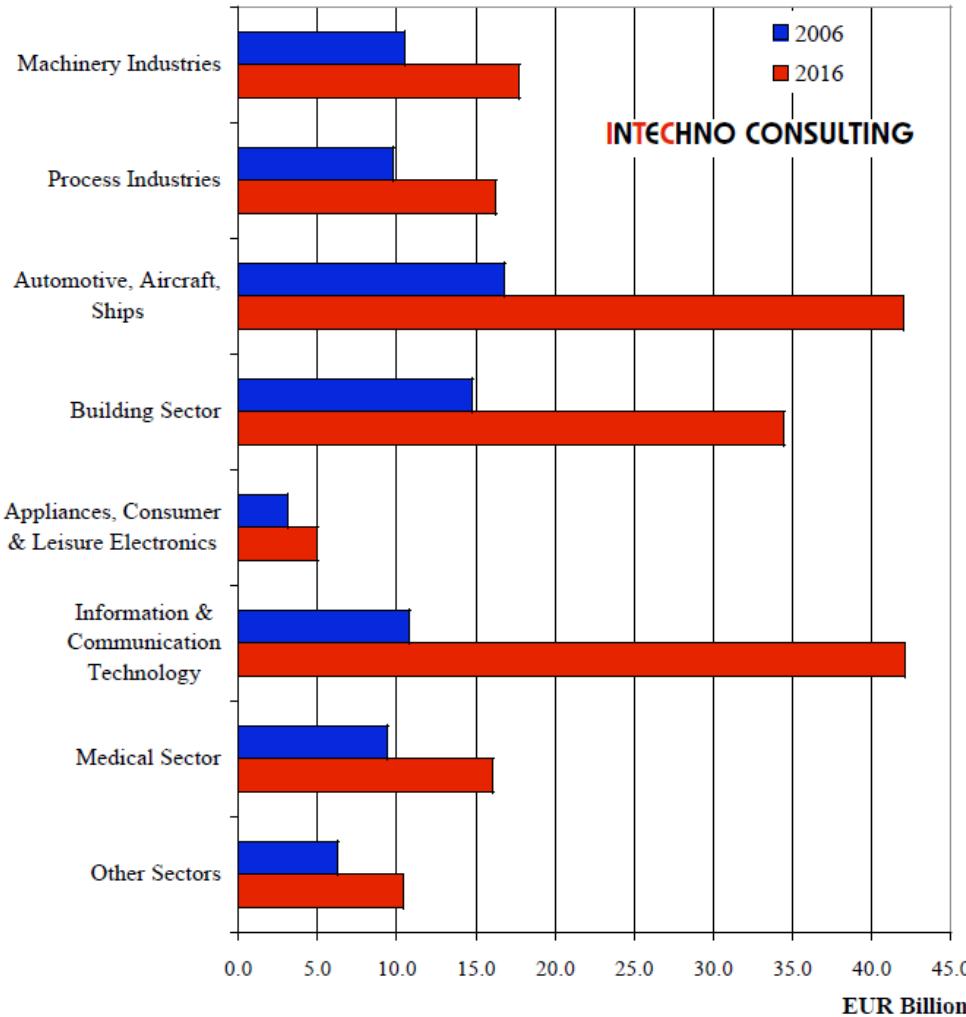
direkte vs. indirekte Messmethoden:

- Bei direkten Messverfahren: (Vergleichsverfahren) vergleicht man die unbekannte Messgröße mit einer physikalisch gleichartigen, aber bekannten und einstellbaren Größe. Das Messgerät stellt den Unterschied zwischen den beiden Größen fest und zeigt ihn an. Wird der Unterschied auf Null geregelt, spricht man von der *Kompensationsmethode*.
- Bei indirekten Verfahren wird die Messgröße zunächst im Messaufnehmer in eine andere (meist elektrische) Messgröße umgeformt und diese wird dann direkt oder mit der Kompensationsmethode gemessen. Dieses Vorgehen wird heute in den meisten Fällen gewählt.

analoge vs. digitale Messmethoden:

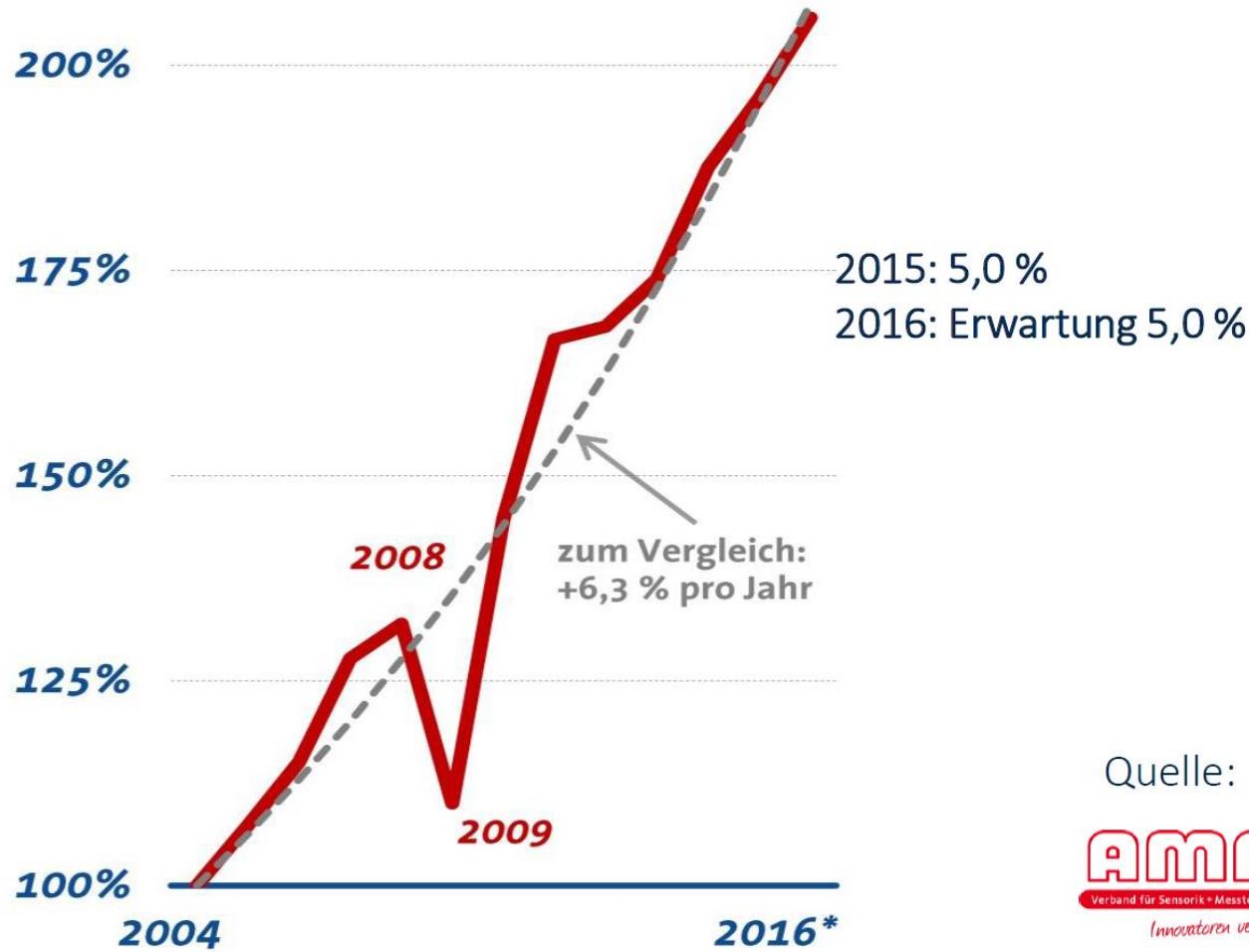
- Analoge und digitale Messverfahren unterscheiden sich durch die für die Darstellung benutzten Signale (analoge oder digitale Signale).
- Analog: eindeutige, punktweise stetige Darstellung der Messgröße
z.B. Marke auf eine Skala
- Digital: in festgelegten Schritten quantisiert
z.B. Ziffernanzeige oder Bildschirm

Technische Sensoren



Umsatz Sensorik und Messtechnik, Jahreswerte

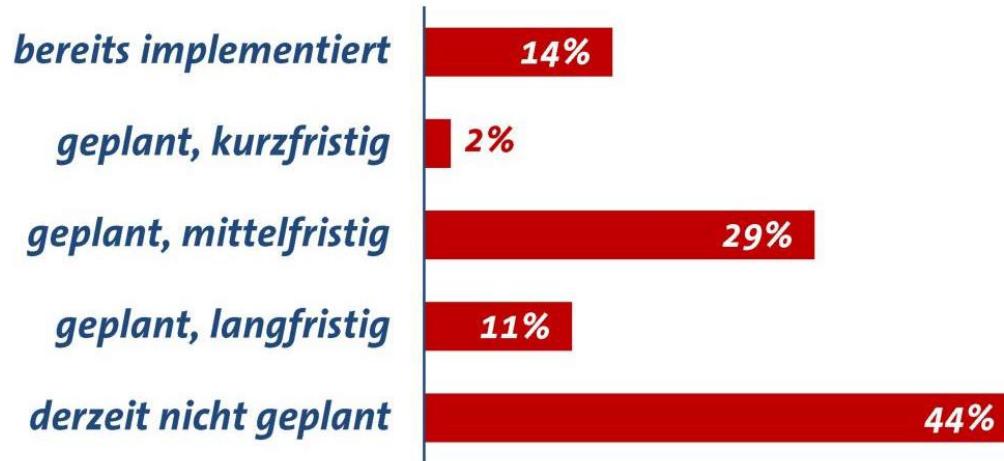
Verglichen mit 2004



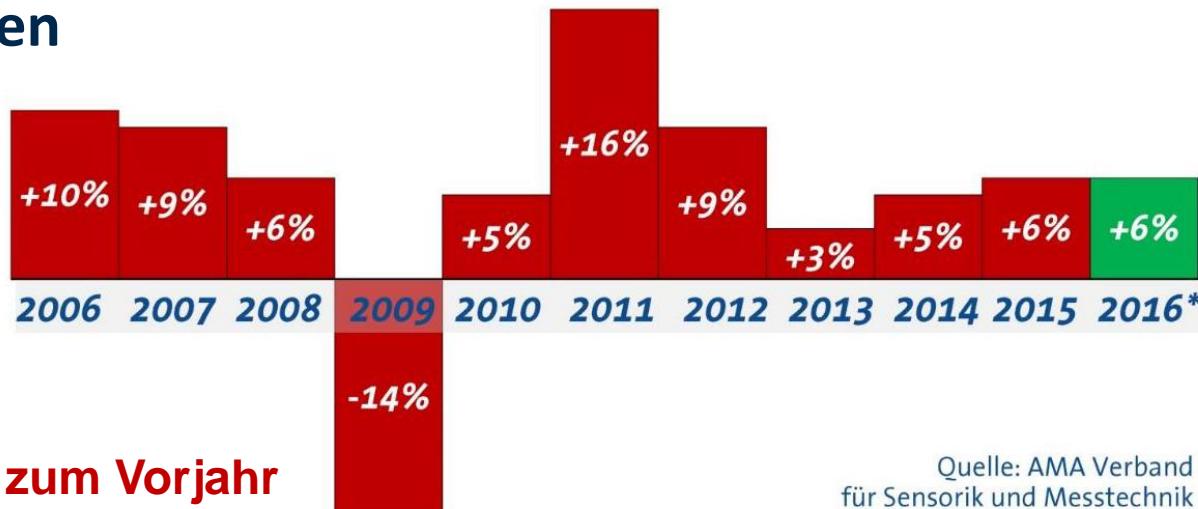
Quelle:

Alle 5 Jahre verdoppelt sich die Anzahl der Sensoren!

Einsatz Methoden von Industrie 4.0



Investitionen



Änderung zum Vorjahr

Quelle: AMA Verband
für Sensorik und Messtechnik

Rangfolge der 10 wichtigsten Sensorarten geordnet nach Marktvolumen (Stückzahl)

1. Temperatursensoren
2. Drucksensoren
3. Durchflussmessung
4. Binäre Positionssensoren
(Näherungsschalter, Lichtschranken, Lichttaster)
5. Sonstige Positionssensoren
6. Chemosensoren zur Messung von Flüssigkeiten und Gasen
7. Füllstandssensoren (Differenzdruck, Radar, Ultraschall usw.)
8. Geschwindigkeits- und Drehzahlsensoren
9. Chemosensoren zur Messung an Gasen
10. Rauchgas- und Brandmelder

Nach der Messgröße:

- geometrische, mechanische, akustische, elektrische, magnetische, optische, thermische Sensoren, Strahlungsdetektoren, chemische-, biochemische und biologische Sensoren

Nach dem Herstellungsprozess:

- Feinmechanik, Mikrosystemtechnik, Nanostrukturierung, faseroptische, integriert-optische Sensoren, Halbleiter-Sensoren, Dünnschicht- und Dickschichtsensoren

Nach dem Anwendungsgebiet:

- z. B. Energie, Industrie, Verkehr, Medizin und Gesundheit, Information und Kommunikation

Nach dem Wandlungsprinzip:

- input ← mechanisch, elektrisch, magnetisch, thermisch → output

Nach den elektrischen Eigenschaften des Sensorelementen:

- z. B. Widerstandssensoren, kapazitive Sensoren, induktive Sensoren, Hallsensoren, elektrodynamische Sensoren, piezoelektrische Sensoren, Photodioden

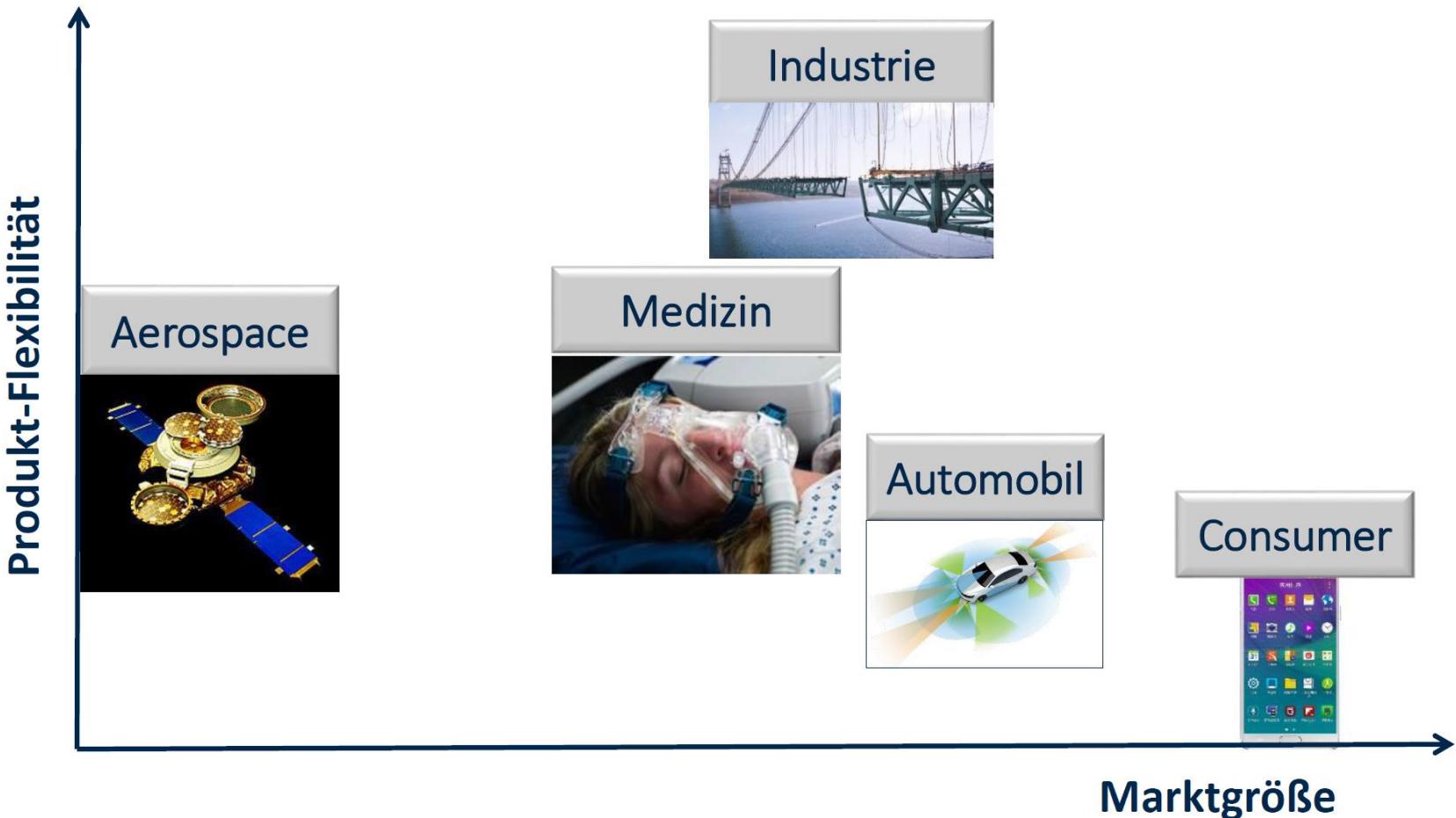
Einteilung der Sensoren

Nach physikalischer Messgröße

- Geometrische Messgrößen (Winkel, Länge, Abstand,)
- Mechanische Messgrößen (Kraft, Druck, Drehmoment,)
- Dynamische Messgröße (Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Radioaktivität,...)
- Thermische und kalorische Messgrößen (Temperatur, Wärmeleitfähigkeit, ...)
- Klimatische und meteorologische Messgrößen (Feuchte, Erdmagnetfeld, Partikeldichte,...)
- Optische Messgrößen (Spektralverteilung, Farbwert, Röntgenabsorption,...)
- Akustische Messgrößen
- Elektrische Messgrößen (Strom, Spannung, magn. Flussdichte,..)
- Chemische, biologische und medizinische Messgrößen (PH-Wert, Ionenselektive Sensorik, ...)
- Gassensoren, Gaskonzentration (Wasserstoff, Sauerstoff, CO, CO₂, ...)

Siehe auch <http://www.ama-sensorik.de/branchenverzeichnis/>

Klassifizierung nach dem Anwendungsgebiet



Klassifizierung von Sensoren nach dem Wandlungsprinzip

Aktoren

Eingangsgröße \ Ausgangsgröße	mechanisch	thermisch	magnetisch	elektrisch	Strahlung	chemisch
mechanisch	Hebelgesetz Elastizität physisches Pendel Momentsatz	thermische Ausdehnung, Dampfdruck	Kräfte im magnetischen Feld, Magnetostriktion	Kräfte im elektrischen Feld, Elektrostriktion, piezoelektr. Effekt	Strahlungsdruck Radiometer	Sorption, Desorption, Quellung, Elektromorphose Explosion
thermisch	adiabatische Zustandsänderung, Reibungswärme	Wärme Kondensation	Wirbelströme Ettinghausen	Joulesche Wärme, Peltier, dielektrische Verlustwärme, Wirbelströme	Strahlungsheizung, Thermospann. oder Pyroelektrizität	spezifische Wärmekapazität Wärmeleitfähig. Exotherme Reakt.
magnetisch	Konvektionsströme, magnetoelastischer Effekt. Magnetostriktion	Curie-Weiß'sches Gesetz	Dia-Para-Ferromagnetismus, Hysterese, Speicherung Induktion	Elektromagnetismus Kräfte im magnetischen Feld	Absorption + Curie-Weiß'sches Gesetz Photomagn.	
elektrisch	Induktion, piezoresistiver, piezoelektr. Effekt	Temperaturabhängigkeit des Widerstandes, Thermoelektr. Pyroelektrizität	Halleffekt, Thomson-Effekt, Induktion	Influenz, Ströme in Flüssigkeiten, Gasen und Festkörpern pn junction Eff.	Äußerer und innerer Photoeffekt, Photoleitung.	Volta-Spannung, Kontaktpotential elektrolytische Leitung, Konzentrationspotential
Strahlung	Interferenz, Tribolumineszenz, Photoelast. Effekt	Wärmestrahlung Fluoreszenz lösung, Thermolumineszenz ncandescence	Magnetische Drehung der Polarisationsebene (Faradayeffekt), Zeemann-Effekt	Kerr-Effekt, Elektro-Lumineszenz in verschiedenen Aggregatzuständen, Laser	Modulatoren, Frequenzwandlung durch Bildwandler oder Fluoreszenzstoffe	Emission und Absorption, Spektren Photolumineszenz, Chemo-lumineszenz
chemisch		Thermocolor, Flüssigkristalle		galvanische Zelle	Photographische Emulsionen	

Sensoren

Einteilung der Sensoren

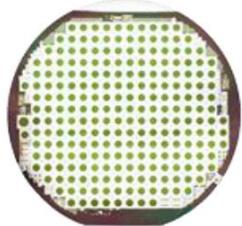
Nach Messprinzip

- Dehnmessstreifen DMS
- Piezoresistive Sensorelemente
- Dünnfilm-, Dickschicht-Messzellen
- Temperatur-Messwiderstand
- Resistive Sensorelemente
- Messpotentiometer
- Induktive Sensorelemente
- Kapazitive Sensorelemente
- Piezoelektrische Sensorelemente
- Magnetoresistive Elemente
- Magnetostriktive Sensorelemente
- Hallelemente
- Pyroelektrische Sensorelemente
- Thermopaar
- Thermoelement-Ausgleichsleitungen
- Fotozellen, Fotosensoren
- Faseroptische Sensoren
- Optoelektronische Sensorelemente
- Optische Interferometer- oder Interferenz-SE
- UV-Messzellen
- IR-Messzellen
- Laser-Messzellen
- Radar-Messzellen
- Ultraschall-Messzellen
- Festkörperelektrolyt
- Halbleiter-Gassensorelemente
- Halbleiter-Temperatursensoren
- Silizium auf Saphir
- ISFET Sensorelemente
- Hall-Winkelgeber
- Sensor-Arrays
- Laminar Flow Elemente
- Thermoketten
- Organische Halbleiter Sensoren

Klassifizierung nach den elektrischen Eigenschaften des Sensorelements

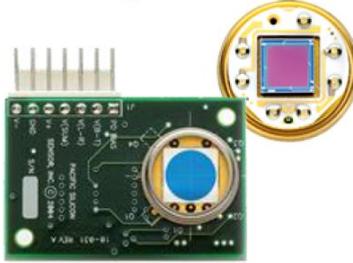
- Kapazitäts-, Induktivitäts- und Widerstands-Effekte
- Thermowiderstands-, thermoelektrischer Effekt
- pyroelektrischer Effekt
- piezoelektrischer Effekt, piezoresistiver Effekt
- Hall-, Gauß-, Wiegand-, magnetoresistiver Effekt
- Photoeffekte
- gassensitiver Feldeffekt, Volta-Effekt

Silizium - Sensorchip



- Design
- Halbleiterprozess
- MEMS Prozess
- Wafertest

Komponente



- Design
- Elektronik (ASIC, µP,...)
- SMD, COB, ...
- Kalibrierung
- First Level Package

Sensor / Smart Sensor

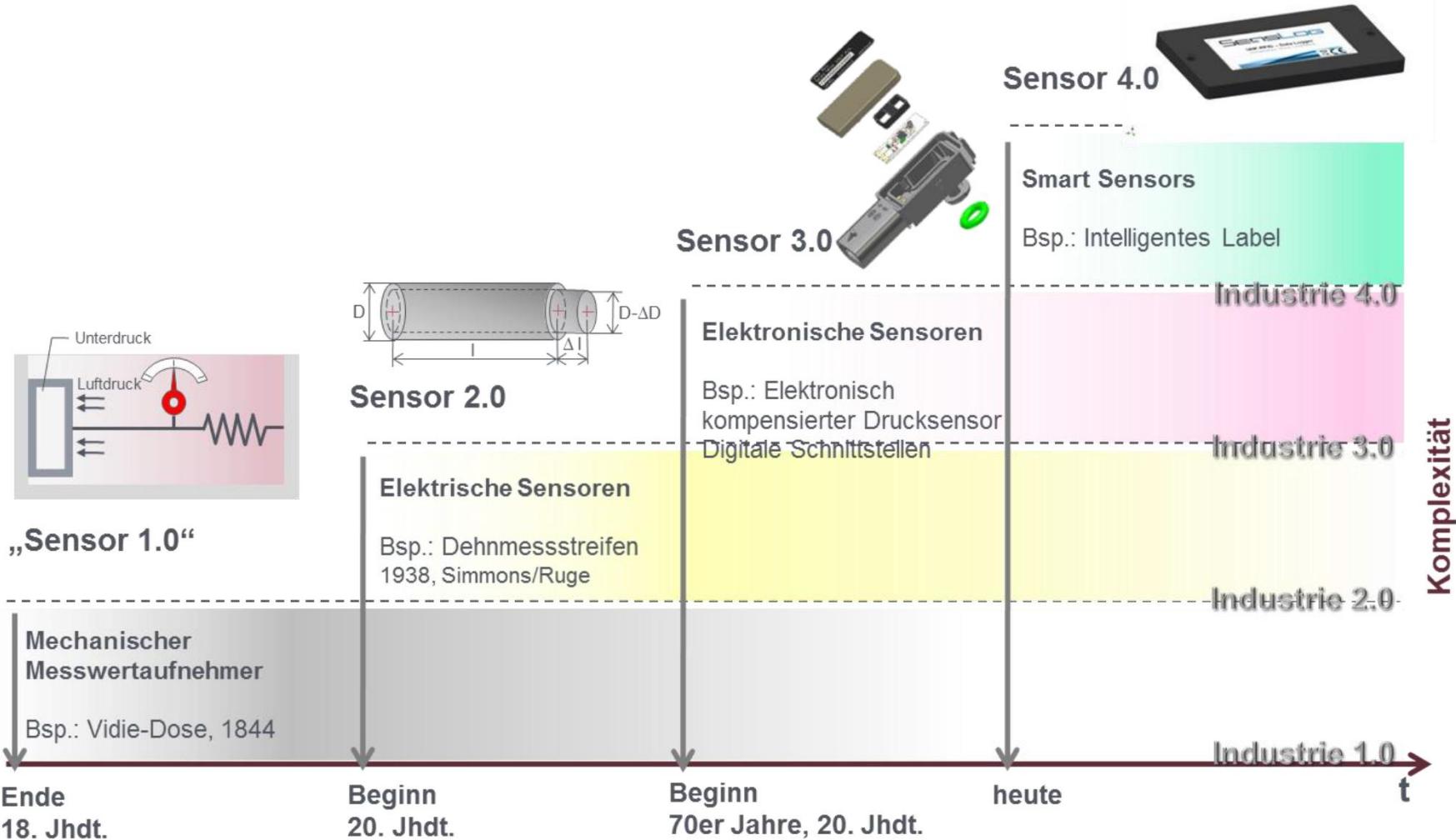


- Design
- Kommunikation
- Weitere Elektronik
- Housing
- Endprüfung
- 2nd Level package

Device



- Design
- Applikationsspezifische Software
- Kommunikation
- Housing, Display
- Endprüfung
- Energieversorgung
- ECU ...



- Näheres Heranführen der Sensoren an die Messgröße
 - Miniaturisierung
 - berührungslose Messprinzipien
- Zunehmender Einsatz von energieautarken und drahtlos kommunizierenden Sensoren
 - Zuschalten nur bei "Bedarf"
 - autarken Energieerzeugung: piezoelektrisch, thermoelektrisch, elektromagnetisch, photovoltaisch,...
 - Zu Netzwerken zusammengefasste miniaturisierte Messstellen
- Zunehmende Systemintegration (smart sensor)
- Datenverfügbarkeit an jedem Ort durch Nutzung von Smarten Sensorknoten (IOT)
 - wachsende Anzahl von Geschäftsmodellen mit Datenauswertungen aus der Cloud
- Individualisierung der Produktion → Losgröße 1
- Maschine-Maschine Kommunikation / Intelligente und autonome Anlagen und Prozesse (CPS)
- Dezentrale Steuerung von Maschinen
- Performancesteigerung durch Datenfusion verteilter Sensoren

- Zunehmende Funktionsintegration
 - Mustererkennung, zusätzliche Informationsgewinnung
 - Selbstüberwachung
 - Störungserkennung und -diagnose
 - Selbstkalibrierung (Selbstjustage) und Rekonfiguration
 - Ableitung von Informationen zur vorbeugenden Wartung
 - integrierte Kommunikationsschnittstelle (TEDS, IEEE 1451)
 - Lokalisierung (Ortung)
- Nutzung hochintegrierter Bauelemente für echtzeitfähige Signalverarbeitung
 - Hochauflösende und schnelle A/D-Wandler
 - Einchip-Mikrorechner µC, FPGA, DSSP (digitaler Sensor-Signal-Prozessor)
 - Programmierbare Logikbausteine (PLDs)
 - Halbleiter-Zusatzspeicher
 - Koppelmodule für elektrische Schnittstellen (drahtgebunden, drahtlos)
- Kopplung von physikalischen, chemischen und biologischen Sensoren auf einem Sensorelement
 - z.B. Lab on a Chip, Lab on a Disc
- Zunehmende Herstellung von Sensorelementen durch spezialisierte Hersteller (Foundrys)
 - damit wird die Herstellung von kompletten Sensoren zunehmend lukrativ für den Mittelstand.

Wo liegen die Innovationsschwerpunkte

Check AMA Innovationspreis 2015 + 2016

→ Hauptziele der Innovationen:

- Neue Funktionen: 37 %
- Verbesserung der Performance: 34 %
- Kostenreduzierung: 29 %
davon ca. 1/3 durch Miniaturisierung

→ Innovationsschwerpunkt

- Verbesserte Materialien: 25 %
- Neue Sensortechnologien: 21 %
- Elektronik/ASIC (Signalauswertung): 12 %
- Messtechnik / Software: 42 %

→ Vermarktung von

- Komponenten: 12 %
- Sensoren: 40 %
- Messtechnik (Software): 5 %
- Gerät inkl. Software: 43 %

- Die Innovationsschwerpunkte liegen bei der Signalverarbeitung/ Messtechnik, aber auch bei neuen Technologien und Materialien
- Bei ca. 80% der Innovationen spielen den Informations- und Kommunikationstechnologien (IKT) eine bedeutende Rolle.
- Vermarktet werden hauptsächlich Sensoren und Geräte (Wertschöpfung!!!)
- Über 70% nutzen schwerpunktmäßig Siliziumtechnologien!

Wesentliche Erfolgsfaktoren für die Sensoren der Zukunft

- Kombination von Innovationen: Materialien, Design, Mikroelektronik, MEMS, AVT, Zuverlässigkeit, embedded Software, Informationstechnologien, ...
- Design vom Chip bis zum Sensor auf die Applikation abstimmen
- Funktion anstatt Sensorotyp → Applikations-Knowhow
- Performance, Kosten, Zuverlässigkeit
- Datensicherheit
- Kooperationen / Netzwerke (MST – IKT)
- Technologieplattformen
- Schnelle Verfügbarkeit.

4. Spannung- und stromgebende Sensoren

ANALOGE MESSUNG ELEKTRISCHER GRÖßen

Strommessung: Dreheisenmesswerk I



Fließt Strom durch die Spule, so werden beide Eisen gleichsinnig magnetisiert und stoßen sich daher ab.

Elektrisches Drehmoment:

$$M_{\text{el}} = \eta(\alpha) \cdot i(t)^2$$

$\eta(\alpha)$: winkelabhängiger Faktor

Rückholmoment:

$$M_{\text{mech}} = k \cdot \alpha$$

k : Federkonstante

Stationär:

$$M_{\text{el}} = M_{\text{mech}}$$

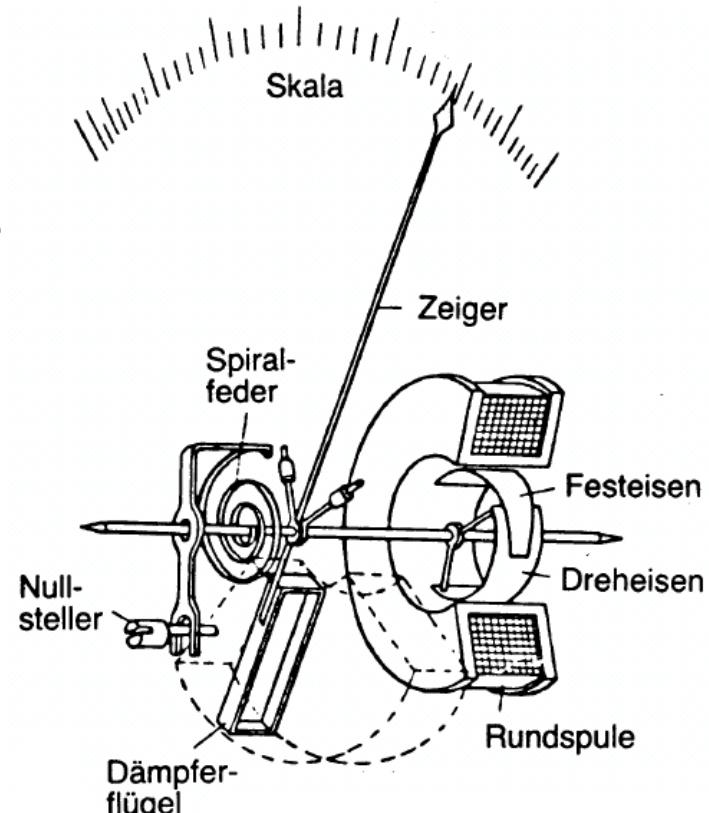
mech. Trägheit \rightarrow Effektivwertmessung

Ausschlagwinkel α :

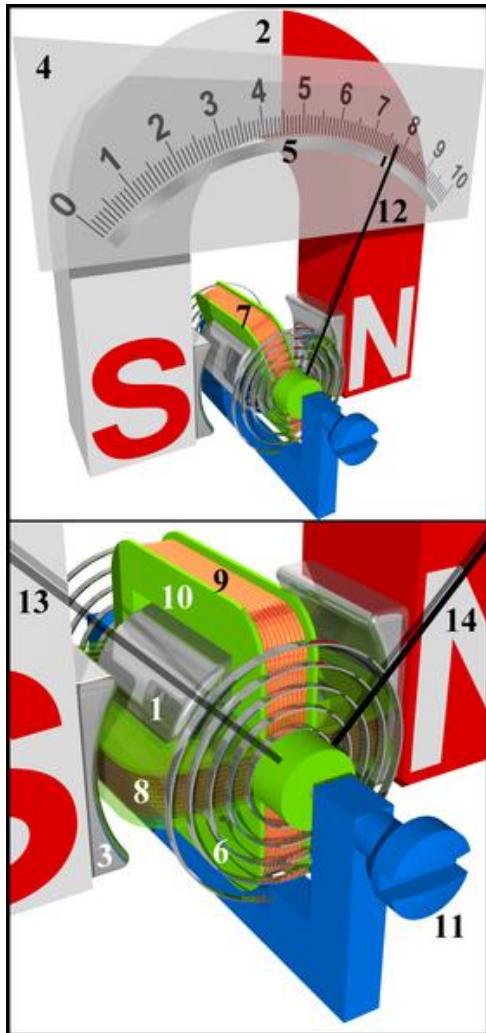
$$\alpha = \eta(\alpha) \cdot i_{\text{eff}}^2 / k$$

Sensitivität $S = f(\alpha)$, d.h. nicht-linear

Ausschlag proportional i^2 , daher wird bei Wechselstrom kein Gleichrichter benötigt.



Strommessung: Drehspulmesswerk I



Aufbau eines Drehspulinstruments:

- (1) Weicheisenkern,
- (2) Permanentmagnet,
- (3) Polschuhe,
- (4) Skala,
- (5) Spiegelskala,
- (6) Rückstellfeder,
- (7) Drehspule,
- (8) Ruhelage,
- (9) Maximalausschlag,
- (10) Spulenkörper,
- (11) Justierschraube,
- (12) Zeiger,
- (13) Südpol,
- (14) Nordpol

Strommessung: Drehspulmesswerk II

Elektrisches Drehmoment:

$$M_{el} = a \cdot b \cdot B \cdot N \cdot i_x$$

(N=Windungszahl)

Rückholmoment:

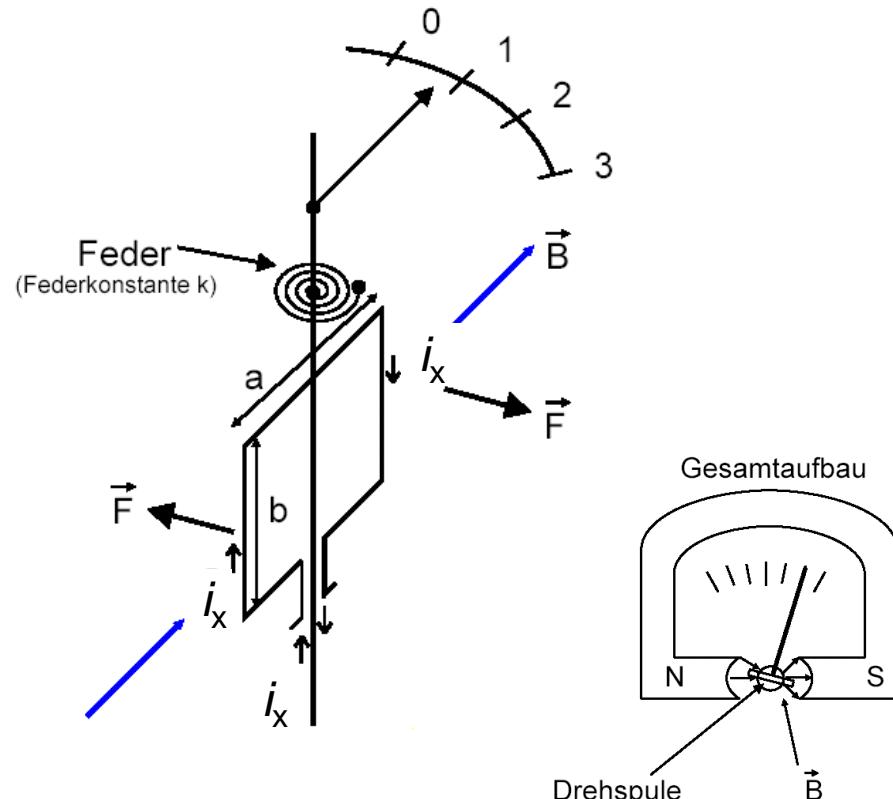
$$M_{mech} = k \cdot \alpha \quad (k=\text{Federkonstante})$$

Stationär:

- $M_{el} = M_{mech}$
- mech. Trägheit → linearer Mittelwert
 - α bei reinem Wechselstrom ≈ 0 !
d.h. zum Messen an Wechselströmen
Gleichrichter vorschalten (→ Gleichrichtwert)

➤ Ausschlagwinkel α

$$\alpha = a \cdot b \cdot B \cdot N / k \cdot i_x = \text{const} \cdot i_x$$

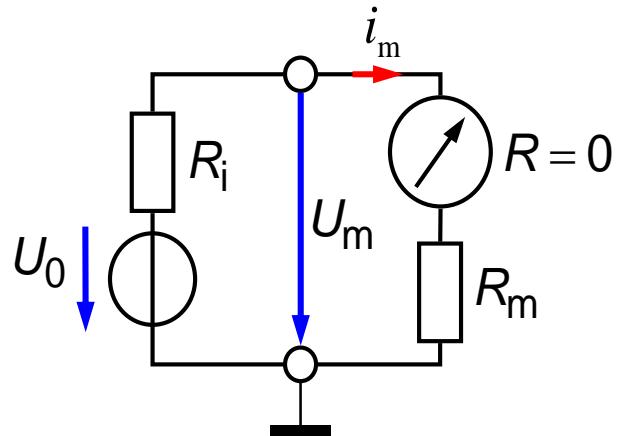


Innenwiderstand R_i der Drehspule

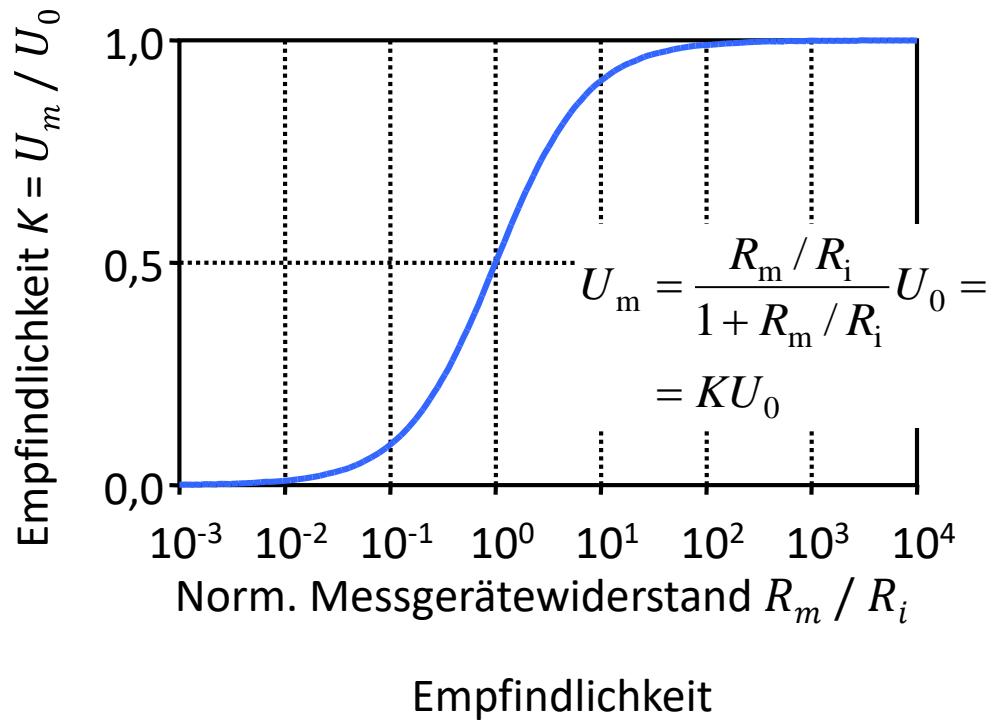
- Eigenverbrauch: Leistung $P_i = R_i \cdot i_x^2$
- Spannungsabfall an der Drehspule

Sensitivität $S = \text{const}$; d.h. linear

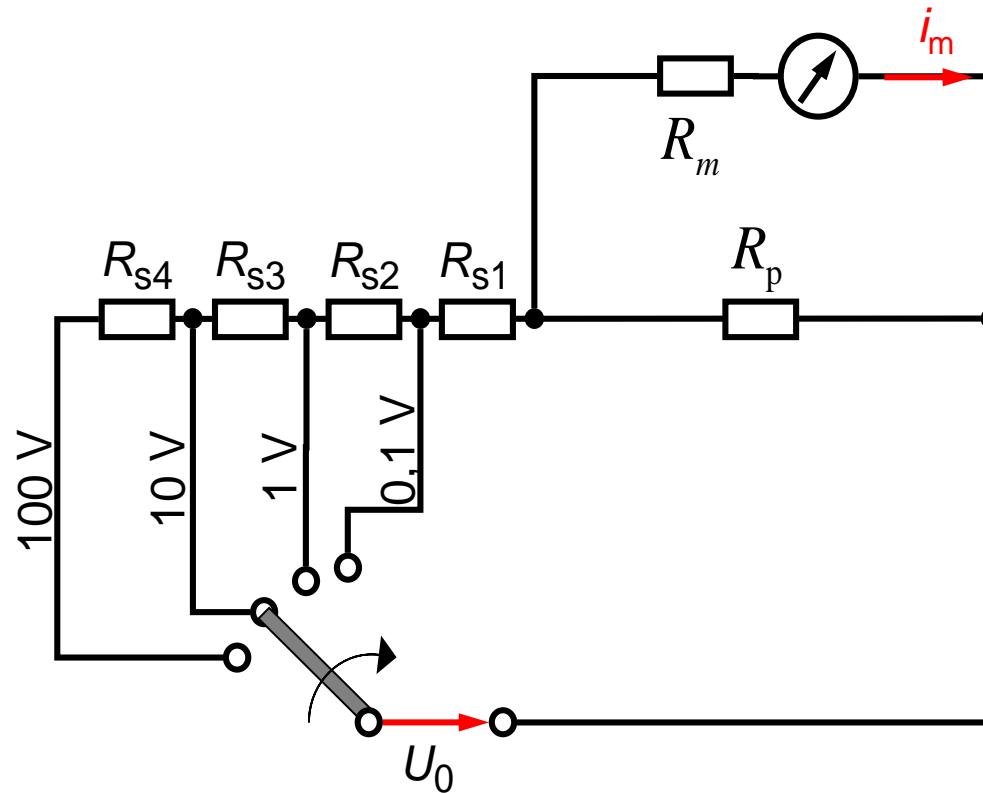
Direkte Spannungsmessung



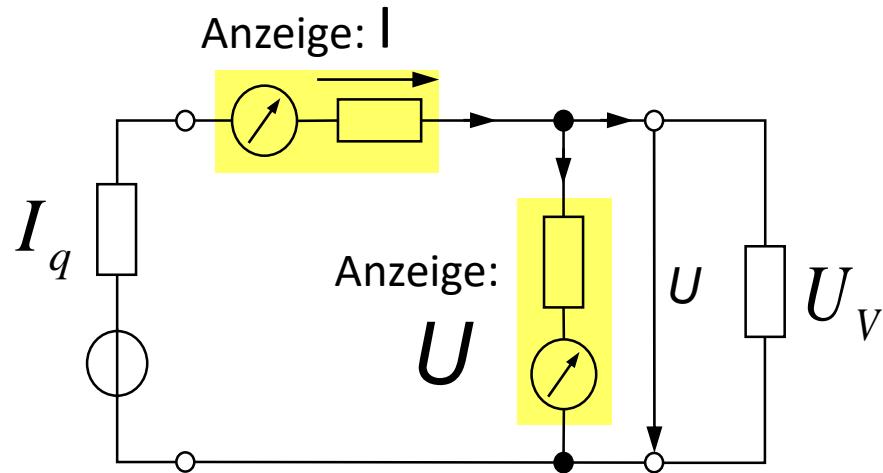
Modell



Messbereichserweiterung für die Spannungsmessung

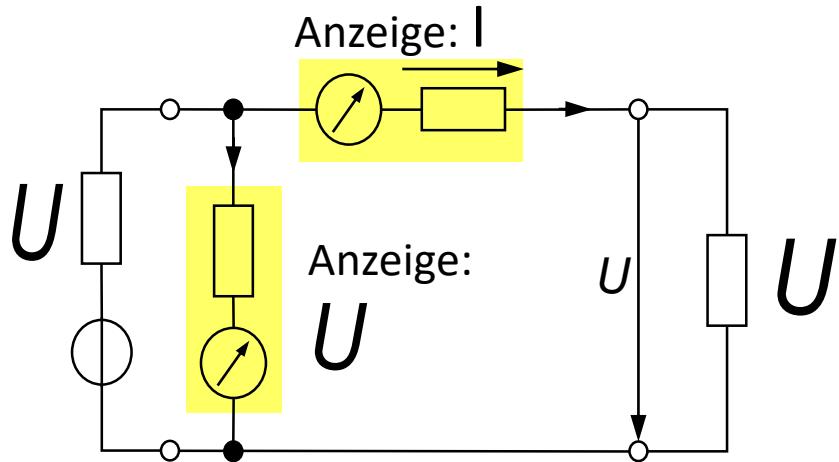


Gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung



Messung pseudokorrekt für
Lastspannung U_V und Generatorstrom I_q
Zur Messung kleiner Widerstände R_v

Gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung

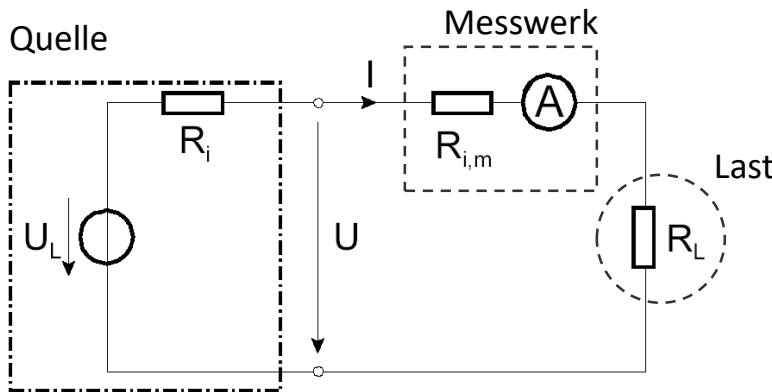


Messung pseudokorrekt für

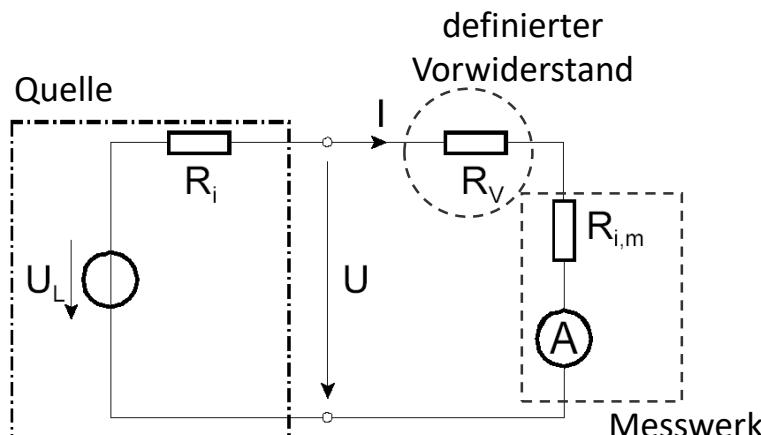
Generatorenspannung U_q und Laststrom I_V

Zur Messung großer Widerstände R_v

Beispiel: Strom- und Spannungsmessung mit Strommesswerken

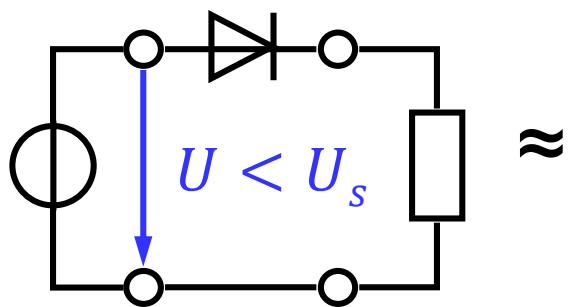


Strommessung mit möglichst
geringem Spannungsabfall an $R_{i,m}$
 → $R_{i,m}$ sehr niederohmig

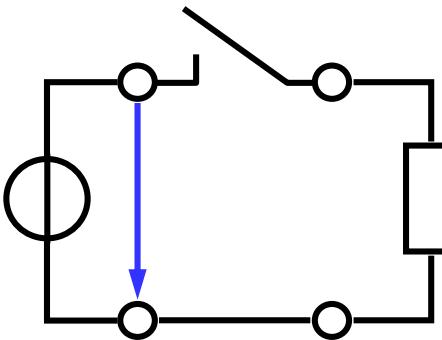


Spannungsmessung mit möglichst
geringer Stromaufnahme
 → R_v sehr hochohmig

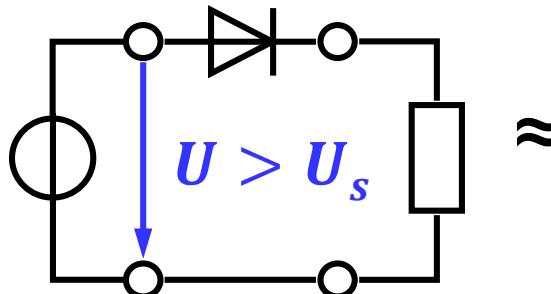
Schaltwirkung einer Diode



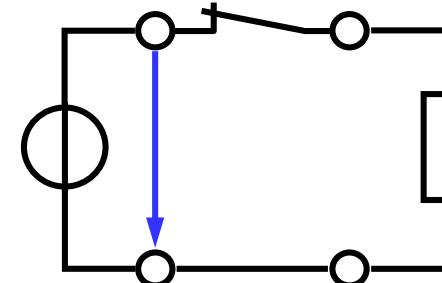
\approx



Sperrbereich

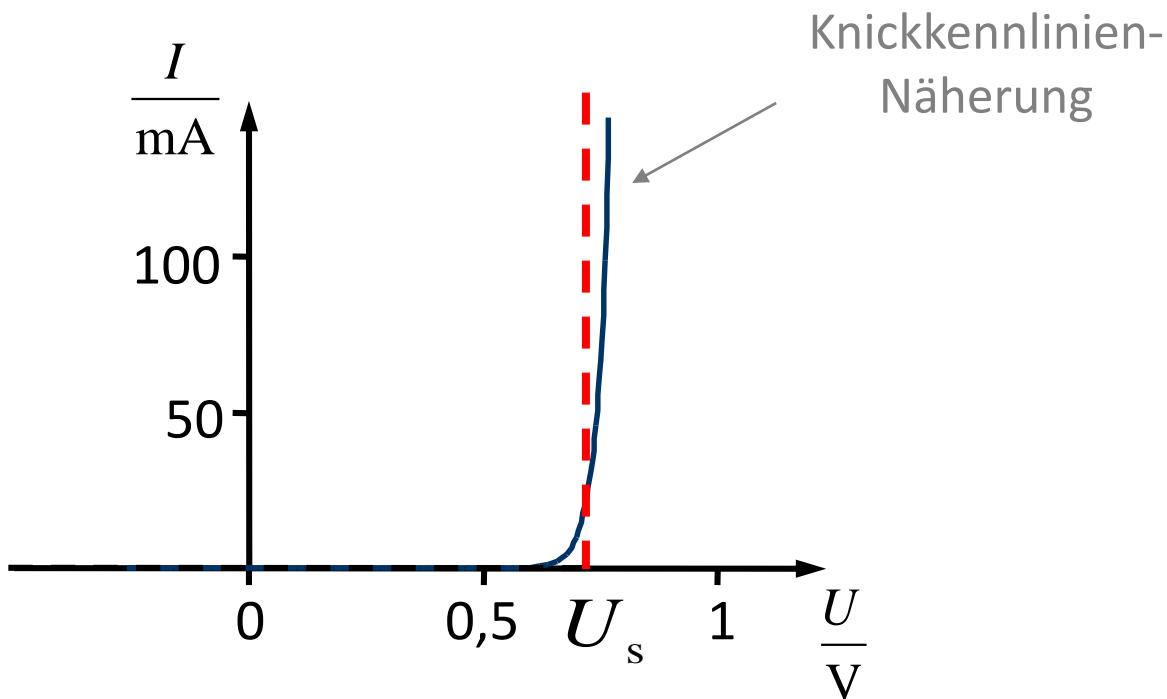


\approx

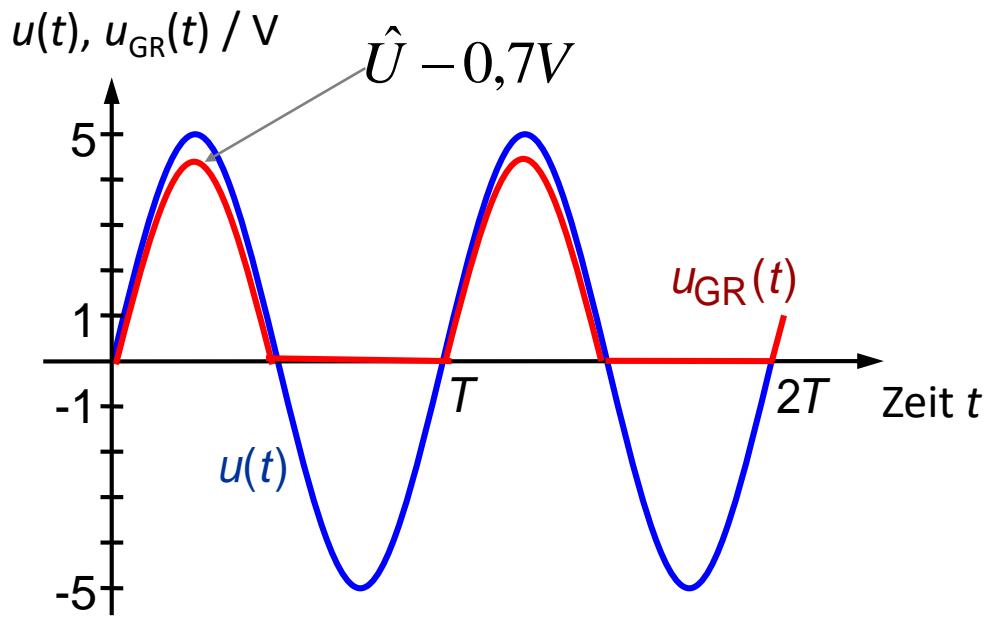
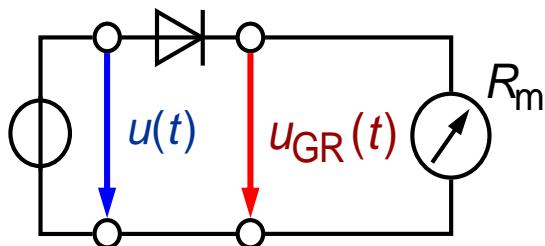


Durchlassbereich

Diodenkennlinie



Einweggleichrichtung



Aufbau

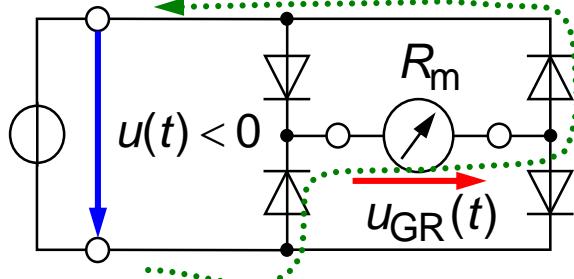
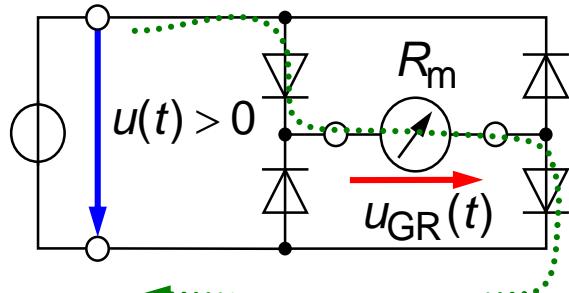
Zeitverlauf von Ein- und Ausgangsspannung

Messung von Wechselstrom und Wechselspannung IV

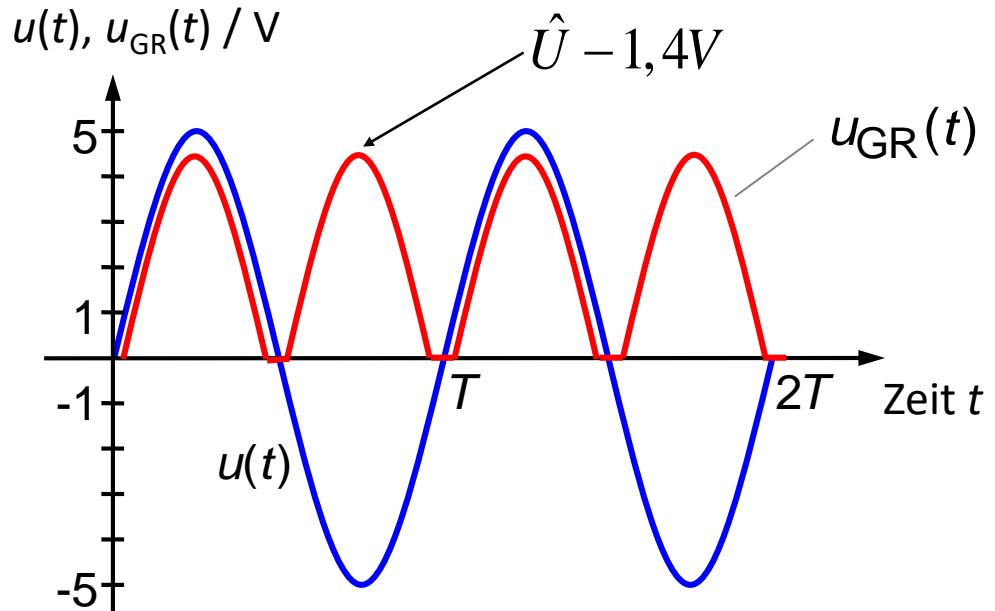


Vollweg-Gleichrichtung (Graetz-Schaltung)

Leo Graetz (*1856 in Breslau; † 1941 in München)

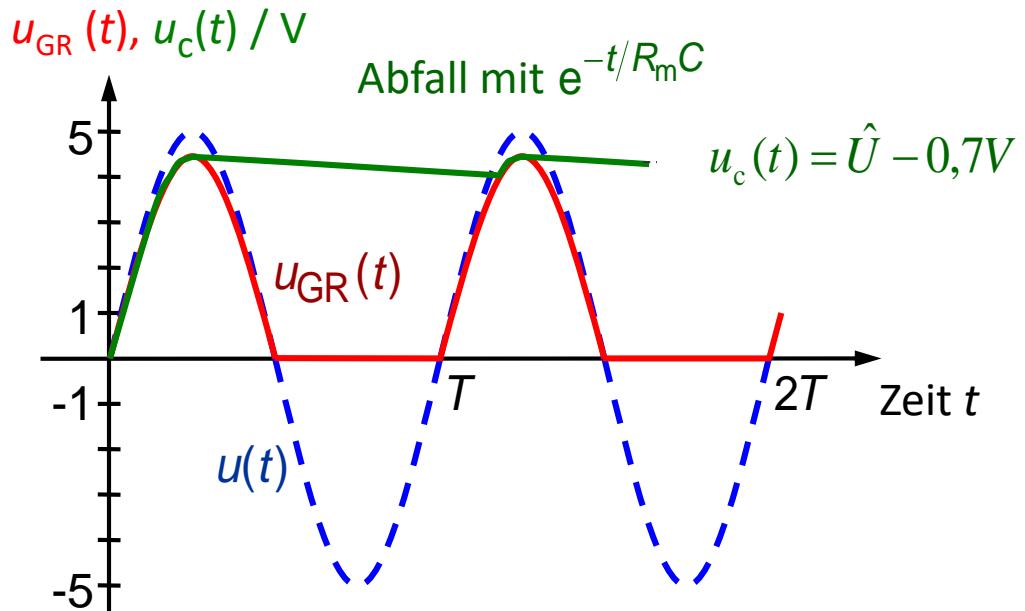
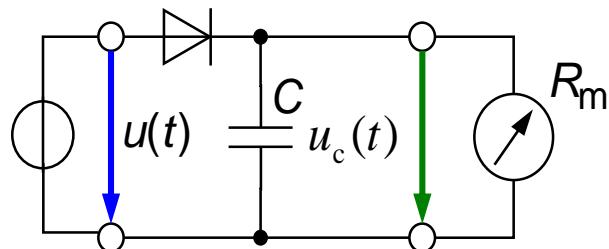


Stromfluß



Zeitverlauf von Ein- und Ausgangsspannung

Messung des Scheitelwertes (Spitzenwert)



Methode

Zeitverlauf von Ein- und Ausgangsspannung

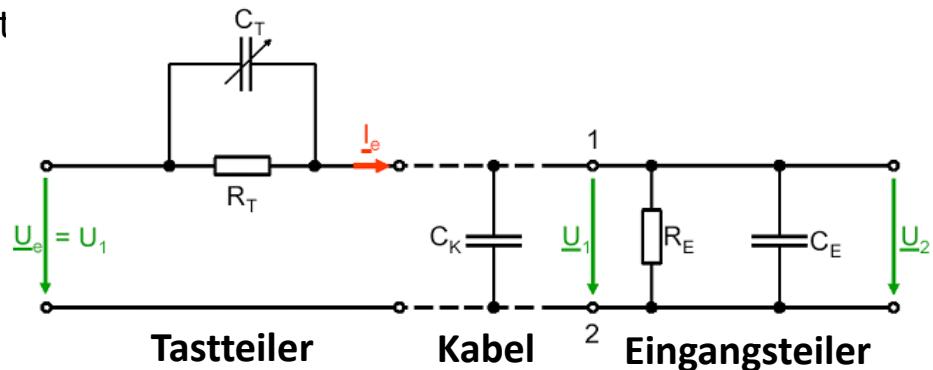
Exkurs: Tastkopf – Funktionsprinzip

Problem:

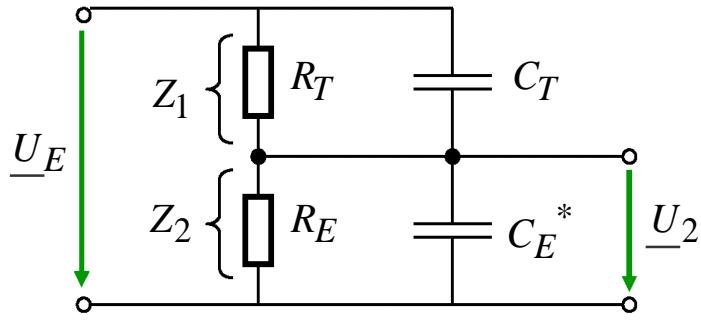
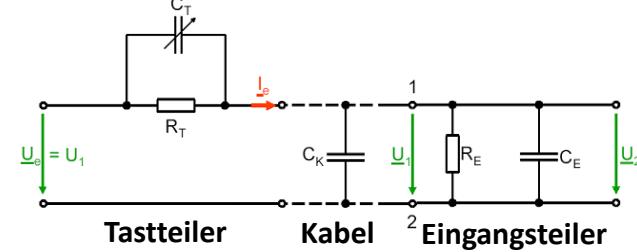
- Kabel besitzt Leitungskapazität C_K
- Oszilloskop hat Eingangswiderstand R_E und Eingangskapazität C_E
 - Quelle wird frequenzabhängig belastet

Verbesserung:

- angepassten Tastkopf benutzen (mit C_T und R_T)
 - frequenzkompensierter Spannungsteiler
- Mit Tastkopf wird die Quelle weniger belastet
 - Eingangs R steigt auf $R_E + R_T$
- Eingangs C nimmt ab $C_T \cdot C_E^*/(C_T + C_E^*)$



Exkurs: Tastkopf - Kompensation



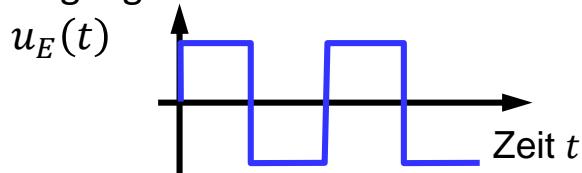
$$Z_1 = \frac{R_T}{1 + j \cdot \omega \cdot R_T \cdot C_T}$$

$$Z_2 = \frac{R_E}{1 + j \cdot \omega \cdot R_E \cdot C_E^*}$$

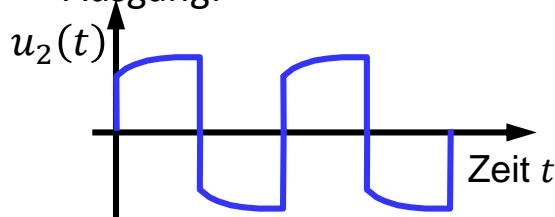
$$U_2 = U_E \cdot \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

Frequenzkompensiert wenn $R_T \cdot C_T = R_E \cdot (C_K + C_E) = R_E \cdot C_E^*$

Eingang:

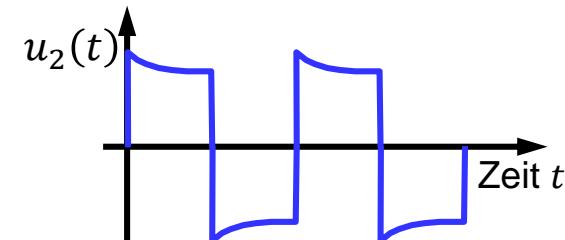


Ausgang:



$R_T C_T < R_E (C_E + C_K)$
unterkompensiert

$R_T C_T = R_E (C_E + C_K)$
richtig kompensiert

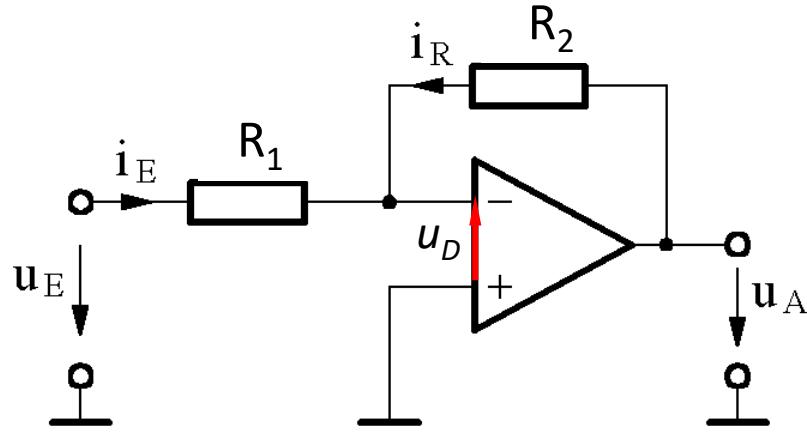


$R_T C_T > R_E (C_E + C_K)$
überkompensiert

4.2 Spannung- und stromgebende Sensoren

VERSTÄRKERSCHALTUNGEN ZUR MESSUNG VON STROM UND SPANNUNG

Invertierender Verstärker



$$\Rightarrow V = \frac{u_A}{u_E} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{V_0} \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Kirchhoff'sche Regeln:

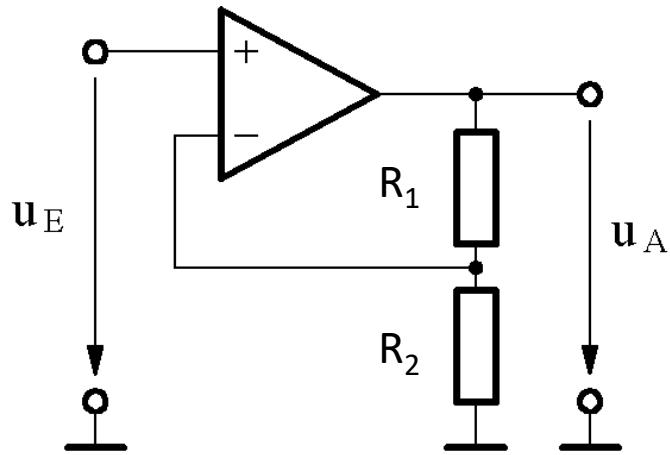
- 1) $i_E = -i_R$ da $i_p = i_n = 0$
- 2) $u_E = i_E \cdot R_1 - u_D$
- 3) $u_A = i_R \cdot R_2 - u_D = V_0 \cdot u_D$

$$V = -\frac{R_2}{R_1}$$

Negativer Eingang: Virtuelle Masse

- Da kein Strom in „-“ fließt, muss der selbe Strom, der über R_1 fließt auch über R_2 fließen.
- Eingangswiderstand der Schaltung: R_1

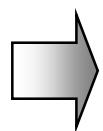
Nicht-invertierender Verstärker



Kirchhoffsche Regel:

$$u_D = u_E - u_A \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$$

$$u_A = V_0 \cdot u_D$$



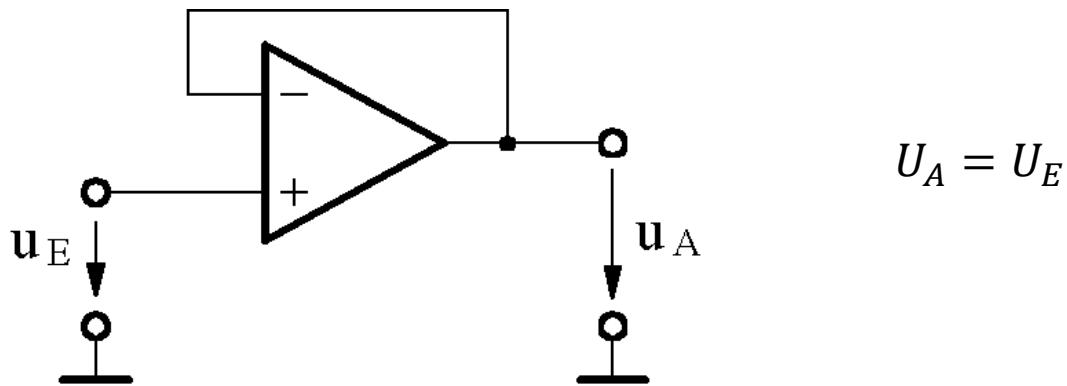
$$u_A \cdot \left(\frac{1}{V_0} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = u_E \quad \Rightarrow \lim_{V_0 \rightarrow \infty} V = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

sehr hoher Eingangswiderstand \rightarrow **Elektrometerverstärker**

Impedanzwandler / Spannungsfolger

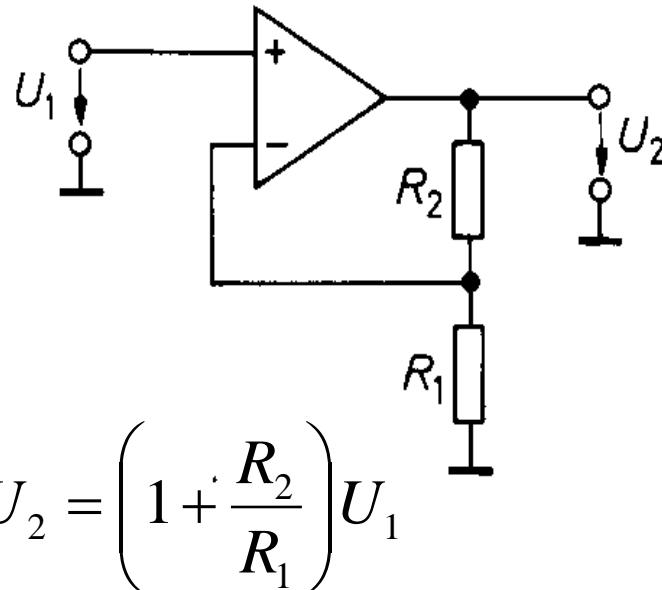
Sinn für den Einsatz eines Spannungsfolgers:

- geringe Rückwirkung auf die Messgröße
 - Eingangswiderstand sehr hoch
- stabiler / rückwirkungsunempfindlicher Ausgang
 - Ausgangswiderstand sehr niederohmig



Verstärkerschaltungen für Strom- und Spannungsgebenden Sensoren

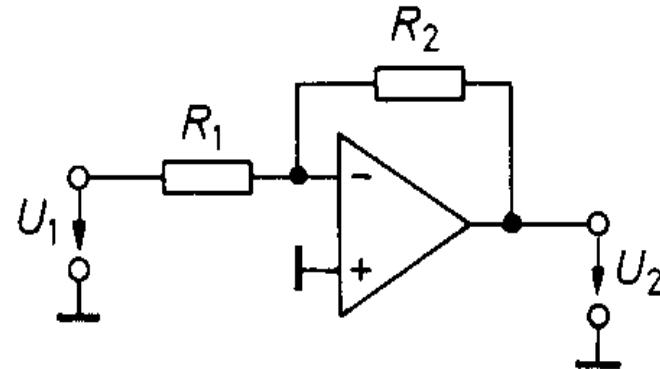
nichtinvertierende Verstärker (Spannungsverstärker)



Bemerkung

→ *Spannungsverstärker*

Invertierende Verstärker (Stromverstärker)



$$U_2 = -\frac{R_2}{R_1} U_1$$

Bemerkung $U_d \approx 0$

Der Eingangsstrom ist das wirksame Eingangssignal
→ *Stromverstärker*

4.3 Spannung- und stromgebende Sensoren

BEISPIELE FÜR SPANNUNG- UND STROMGEBENDE SENSOREN

Ausdehnungseffekte

- Volumen/Abmaße eines Körpers ändern sich mit der Temperatur

Thermowiderstands-Effekte

- Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes bei Metallen, bei Halbleitern und bei keramischen Metalloxiden

Temperaturabhängigkeit der Flussspannung eines p/n-Übergangs

- z. B. bei Diode oder Transistor

Thermoelektrischer Effekt (Seebeck-Effekt)

- Zwischen den Enden eines stromlosen Leiters entsteht eine Potentialdifferenz, wenn die beiden Enden des Leiters eine unterschiedliche Temperatur aufweisen (d.h. ein Temperatur-Gradient über dem Leiter existiert)

Pyroelektrischer Effekt:

- (wird später gesondert erklärt) . . .

Seebeck-Effekt:

An der Verbindungsstelle zweier unterschiedlicher Metalle diffundieren Elektronen aus dem Metall mit dem höheren Fermi-Niveau in das Metall mit dem niedrigeren Fermi-Niveau.

An der Berührungsstelle entsteht ein elektrisches Feld, das den Diffusionsstrom begrenzt.

Im Gleichgewichtszustand gilt für die Kontaktspannung:

$$U_{AB} = \frac{kT}{e_0} \ln \left(\frac{n_A}{n_B} \right) = k_{AB} T$$

mit dem Thermokoeffizient k_{AB}

$$k_{AB} = \frac{k}{e_0} \ln \left(\frac{n_A}{n_B} \right)$$

k = Boltzmann-Konstante $1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

e_0 = Elementarladung $1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ As}$

T = absolute Temperatur

n_A, n_B = Ladungsträgerdichten an den Kontaktstellen

Thermoelektrische Spannungsreihe bezogen auf Platin

Material X	$k_{X\text{Pt}}$ in [(mV) / (100 K)]
Konstantan (CuNi)	-3,47 ... 3,04
Nickel (Ni)	-1,9
Platin (Pt)	0,0
Wolfram (W)	0,7
Kupfer (Cu)	0,7
Eisen (Fe)	1,9
Nickel-Chrom (NiCr)	2,2
Silizium (Si)	44

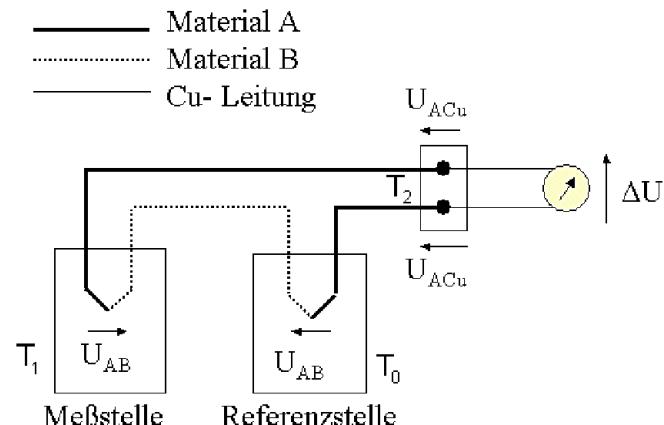
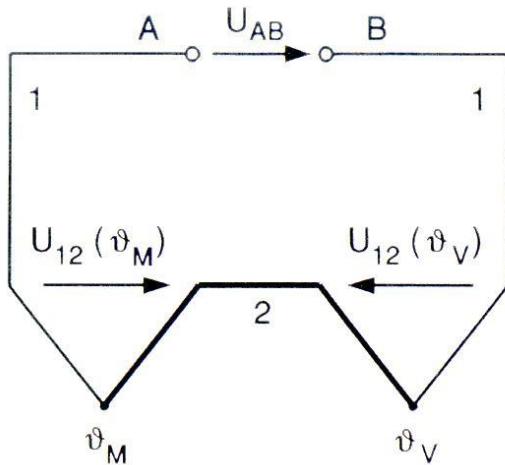
Thermokoeffizient k_{AB}

Der Thermokoeffizient k_{AB} zweier beliebiger Materialien A und B ergibt sich dann als die Differenz ihrer Thermokoeffizienten k_{APt} und k_{BPt} :

$$k_{AB} = k_{APt} - k_{BPt}$$

Thermoelement

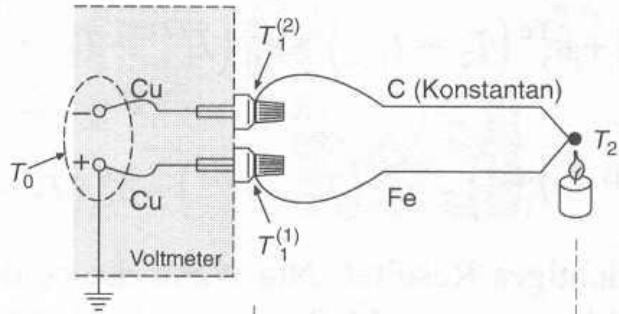
- Oft sind Verbindungsleitung vom Thermoelement zum Messgerät notwendig, d. h. noch eine weitere Kontaktstelle (Leitung zumeist aus Kupfer → zusätzliche Thermospannung)
- Zum Messen der Temperatur ϑ_M braucht man immer eine Vergleichsmessstelle mit der bekannten Temperatur ϑ_V



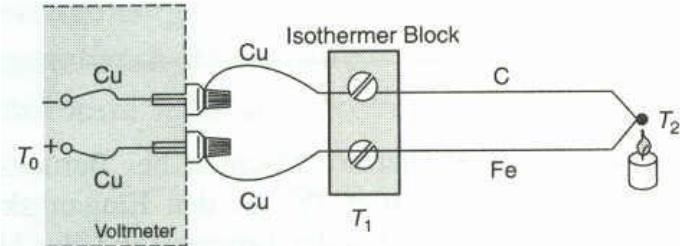
Kontaktspannung U_{AB} zwischen Leiter 1 aus Metall 1 und Leiter 2 aus Metall 2:

$$U_{AB} = U_{12}(\vartheta_M) - U_{12}(\vartheta_V) = \frac{k}{e} \ln \left(\frac{n_1}{n_2} \right) (\vartheta_M - \vartheta_V)$$

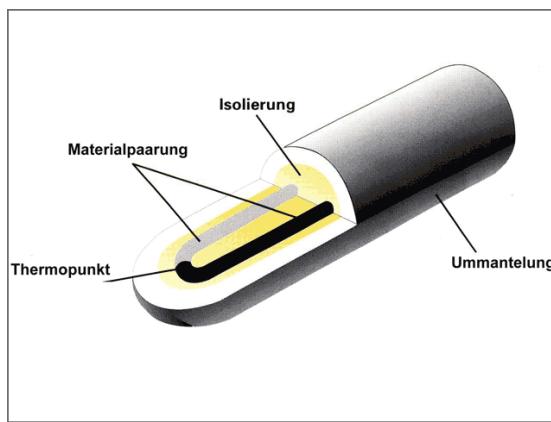
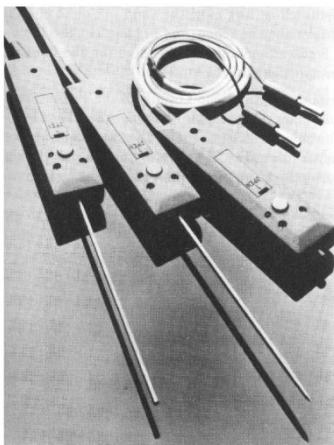
direkter Anschluss ohne Zuleitung



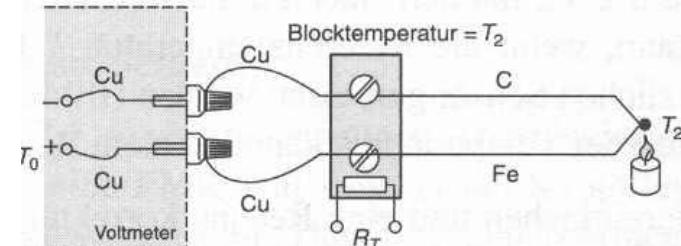
mit isothermen Anschlussblock



Bauformen



Kompensationsmethode



Magnetisch-Induktive Durchflussmesser (MID)

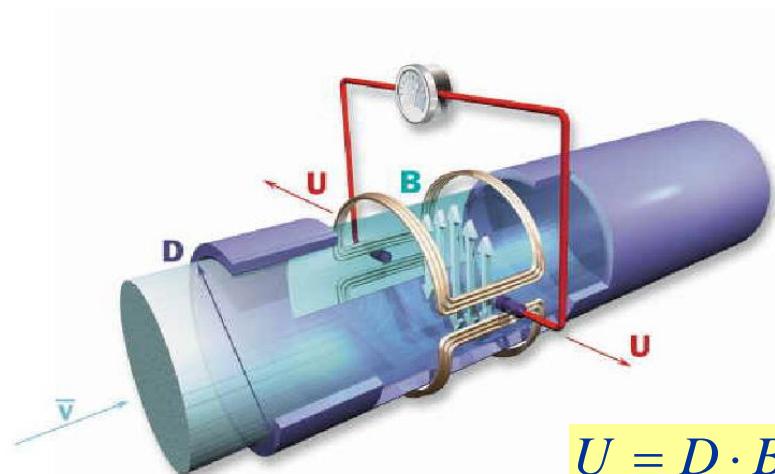
Messprinzip: Faradaysches Induktions Prinzip

Induktion einer Spannung in einen Leiter
 (=Medium), wenn dieser sich in einem
 Magnetfeld bewegt .

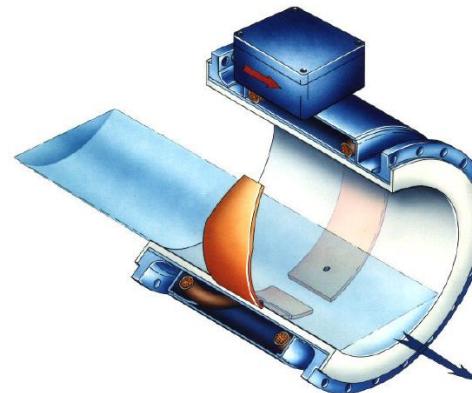
Spannung ist proportional zur Stärke des
 Magnetfeldes und der
 Strömungsgeschwindigkeit.

Eigenschaften:

- 😊 Volumendurchfluss $q_v \sim U$
- 😊 Messunsicherheit $\leq \pm 0,25 \%$
- 😊 Großer Messbereich (typisch von 0,3 – 10 m/s)
- 😊 keine mechanisch bewegten Teile
- 😊 unempfindlich gegenüber Verschmutzung
- 😢 hohe Anschaffungskosten
- 😢 Ungeeignet für nicht leitfähige Medien wie alle
 reinen Kohlenwasserstoff- Verbindungen (z.B.
 Öle u. Fette)



$$U = D \cdot B \cdot v$$

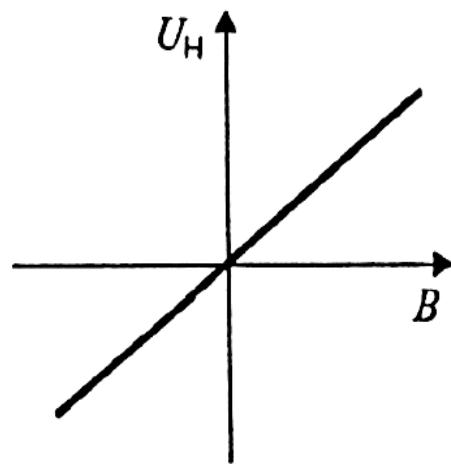
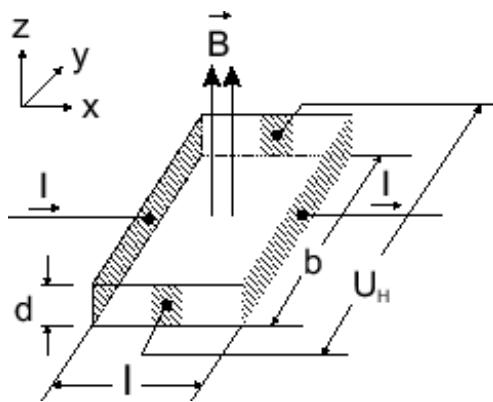


Wiegand-Effekt:

- Ein speziell vorbehandelter ferromagnetischer Draht (z.B. Kobalt-Eisen-Vanadium-Legierung) ändert bei Einfluss eines sich ändernden Magnetfeldes sprunghaft seine Magnetisierungsrichtung.
- Die beim Umklappen auftretende schnelle Magnetfeldänderung induziert in einer benachbart angeordneten Spule einen leicht detektierbaren Spannungsimpuls (z.B. zum Zählen)

Galvanomagnetische Effekte in Halbleitern (Hall-und Gauss-Effekt):

- Auf bewegte Ladungen im Magnetfeld wirkt die Lorenz-Kraft
- Fließt ein Strom in einer dünnen Halbleiter-Schicht (z.B. Indium-Antimonid-Halbleiter InSb), die von einem Magnetfeld durchsetzt ist, führt dies zu einer "Verdrängung" der Strombahnen auf eine Seite.
- Die unterschiedliche Ladungsdichte auf der Oberfläche ist als **Hall-Spannung** messbar. Sie ist proportional zur magnetischen Induktion. Die technische Realisation zur Magnetfeldmessung heißt Hall-Sonde bzw. Hall-Sensor.



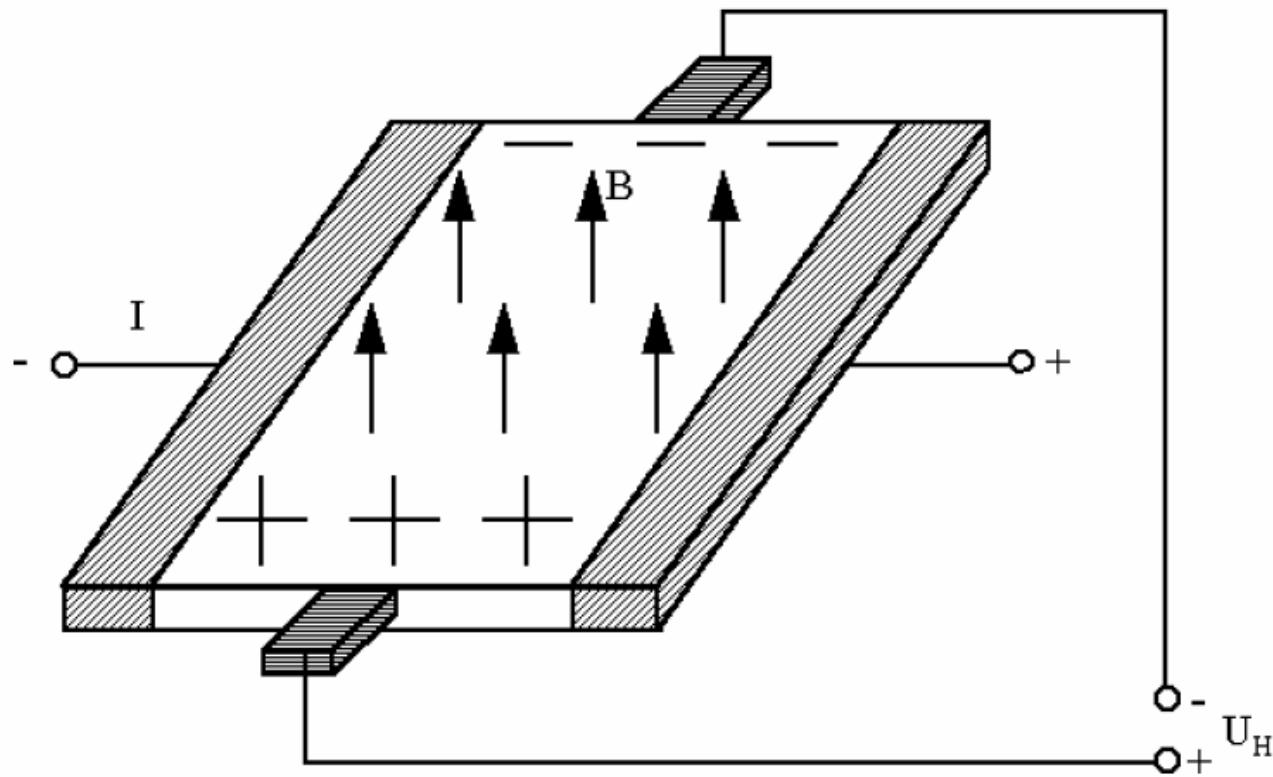
$$U_H = \frac{R_H}{d} \cdot I \cdot B$$

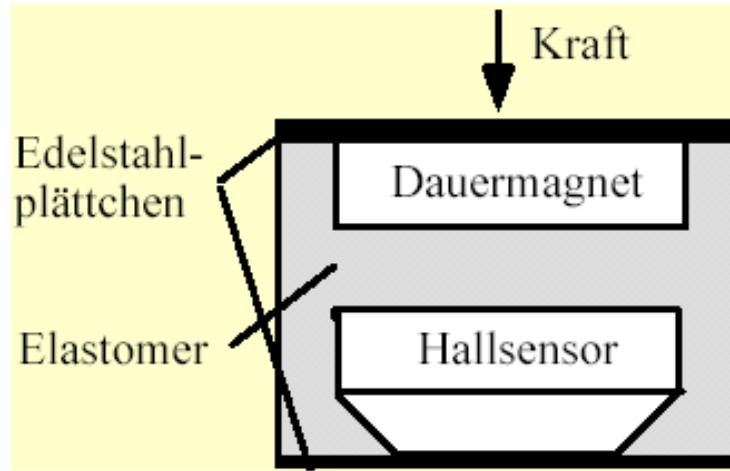
R_H : Hallkonstante

d : Dicke des Halbleiters

B : magnetische Induktion

I : eingeprägter Strom





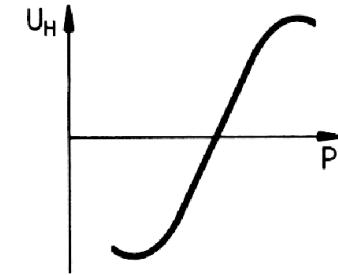
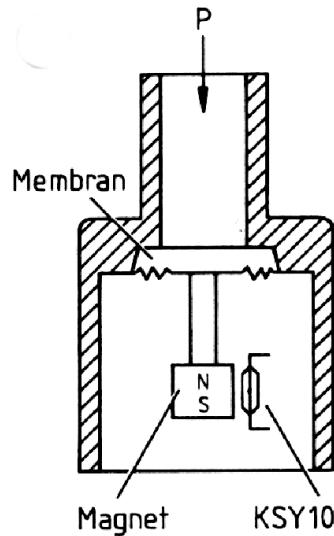
Umwandlung der Druckkraft in eine Wegänderung und wegen

$$U_H(P) = \frac{R_H}{d} \cdot I \cdot B(P)$$

in eine entsprechende Ausgangsspannung

Druckmessung mit Hall-Generator

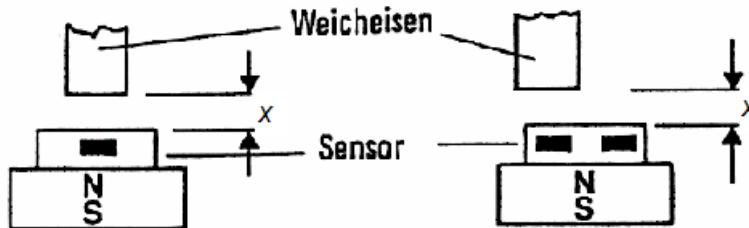
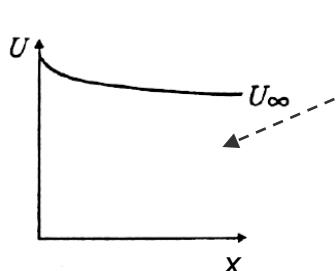
Änderung des einwirkenden Magnetfeldes durch seitl. Verschiebung eines Magneten
 $B = f(P)$



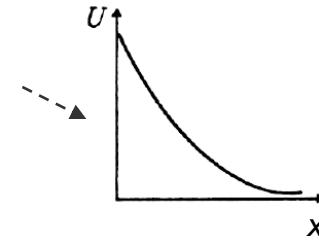
Alternativ: Verformung der Magnetfeldlinien durch Annäherung / Entfernen eines Weicheisenkerns

$$U_H(P) = \frac{R_H}{d} \cdot I \cdot B(P)$$

Option a)

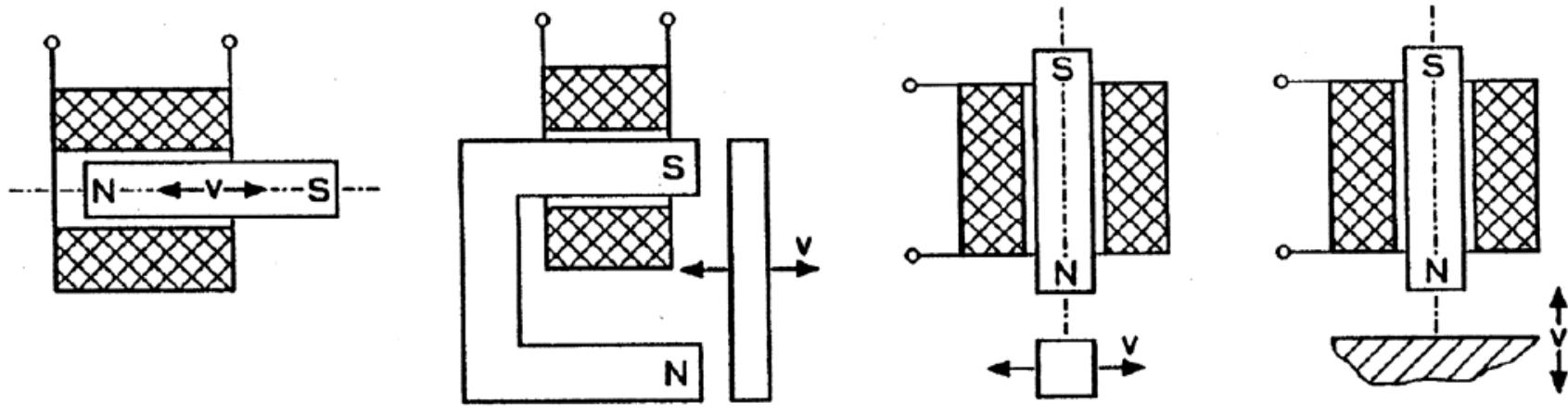


Option b) Differentielle Anordnung von 2 Hallgeneratoren:



Induktivitäts-Effekte z. B.:

- Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt eine sinusförmige Wechselspannung. Deshalb Einsatz als dynamische Sensoren, z.B. zur Abtastung von rotierenden Zahnrädern.
- Ein weichmagnetisches Teil taucht verschieden weit in eine Spule ein. Ein Resonanzkreis, in dem sich die Spule befindet, ändert je nach Eindringtiefe linear die Frequenz. (Statischer Weggeber)



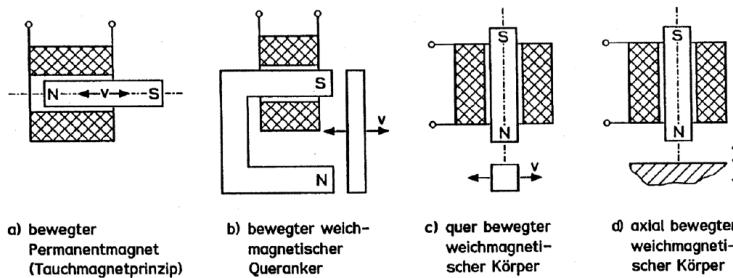
a) bewegter
Permanentmagnet
(Tauchmagnetprinzip)

b) bewegter weich-
magnetischer
Queranker

c) quer bewegter
weichmagneti-
scher Körper

d) axial bewegter
weichmagneti-
scher Körper

- Leiterschleife im Feld eines Permanentmagneten oder Elektromagneten.
- Bewegt sich der Leiter, so wird in ihm ein Strom induziert.
(Egal ob sich der Magnet oder Leiter bewegt oder das Magnetfeld sich ändert)
- Besonders wirksam ist ein Queranker, der einen definierten Luftspalt zum Joch des Permanentmagneten hat.



- Drehzahlsensor: Anordnung nach c) + weichmagnetischer Verzahnung
- Spulenspannung proportional zur Geschwindigkeit v des Magneten, des Weicheisens oder der Spule
- Anwendung des elektrodynamischen Prinzips: Tachogenerator, Gleichstromgenerator. Ein mit einer Spule umwickelter, weichmagnetischer Anker dreht sich im Feld eines Permanentmagneten. Dreht sich die Spule mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, so wird eine sinusförmige Spannung an der Spule induziert. Ändert man jeweils im Nulldurchgang die Polarität, so entsteht eine gleichgerichtete Sinusspannung, die der Drehzahl proportional ist.
- Alle elektromechanischen Aktoren lassen sich auch als Sensor benutzen.

z. B. Transistor

$$i_C = i_{CS} \cdot e^{\frac{u_{BE}}{U_T}} \text{ mit } U_T = \frac{k \cdot T}{e_0}$$

k : Boltzmann-Konstante = $1,38 \cdot 10^{-23}$ Ws/K

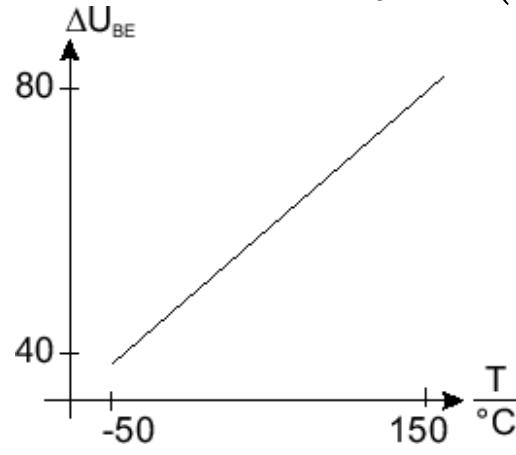
T : absolute Temperatur in Kelvin

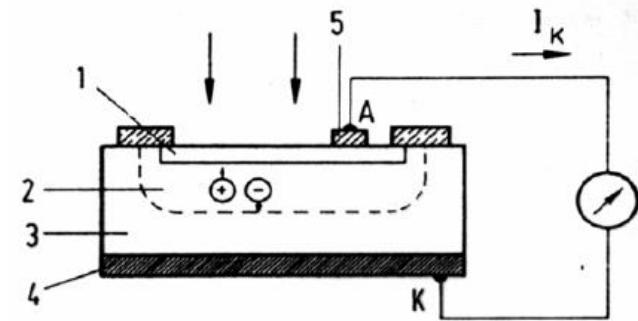
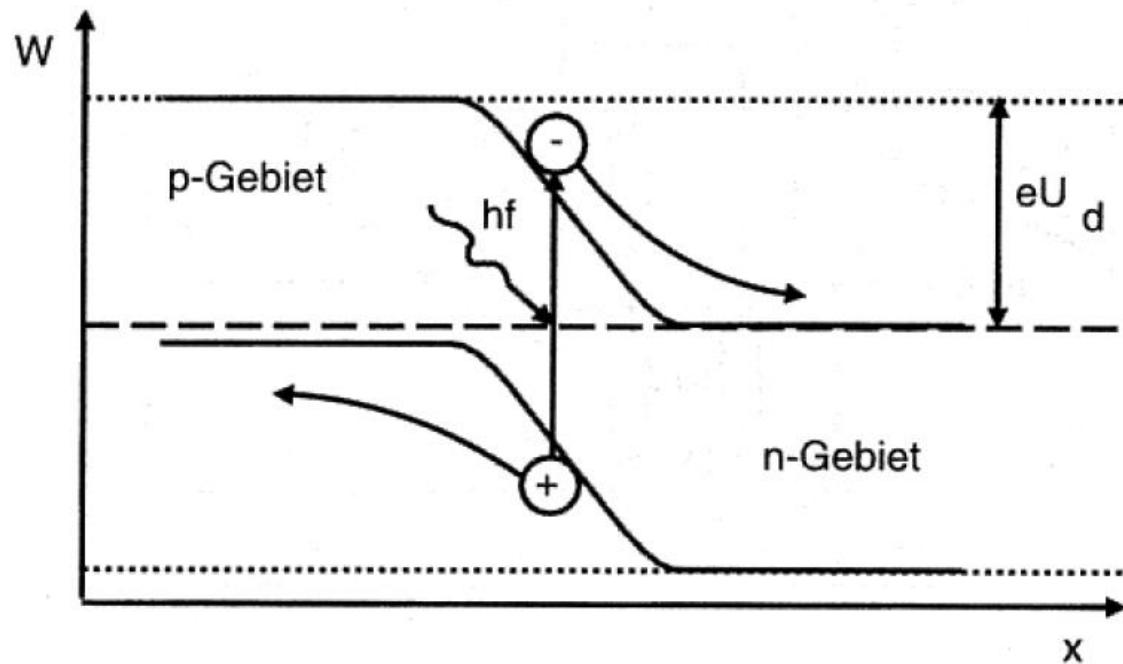
e_0 : Elementarladung = $1,6 \cdot 10^{-19}$ As

Ideal für **Integrierten Temperatursensor**:

Basis-Emitterspannungsdifferenz zweier gekoppelter Transistoren. Das Verhältnis der Ströme von zwei auf dem gleichen Chip hergestellten Transistoren entspricht dem Verhältnis ihrer Chip-Basisflächen A_1 und A_2

$$\Delta u_{BE} = u_{BE_1} - u_{BE_2} \approx \frac{k \cdot T}{e_0} \cdot \ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$





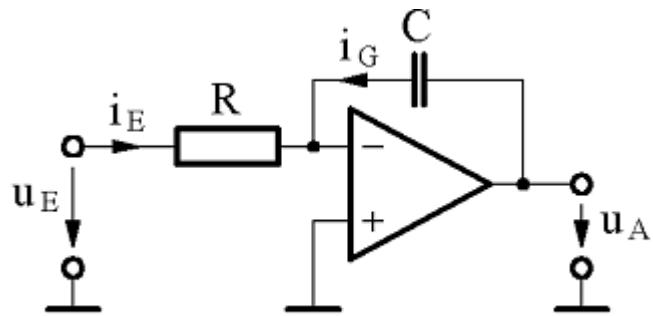
Silizium Photoelement:

- 1) p-leitende Zone
- 2) Raumladungszone
- 3) n-leitende Zone
- 4),5) Kontaktierung

4.4 Spannung- und stromgebende Sensoren

LADUNGSGEBENDE SENSOREN

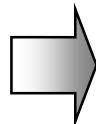
Invertierender Integrator



Es gilt:

$$i_E = -i_G$$

$$i_G(t) = C \cdot \frac{du_A(t)}{dt} = -\frac{u_e(t)}{R}$$

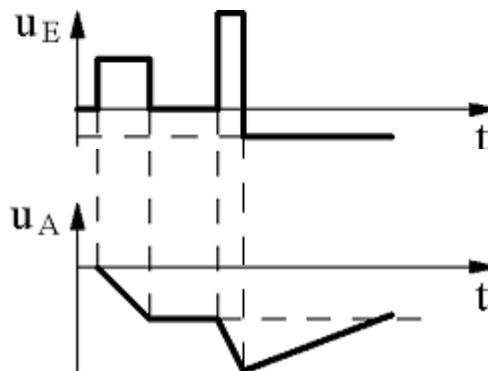


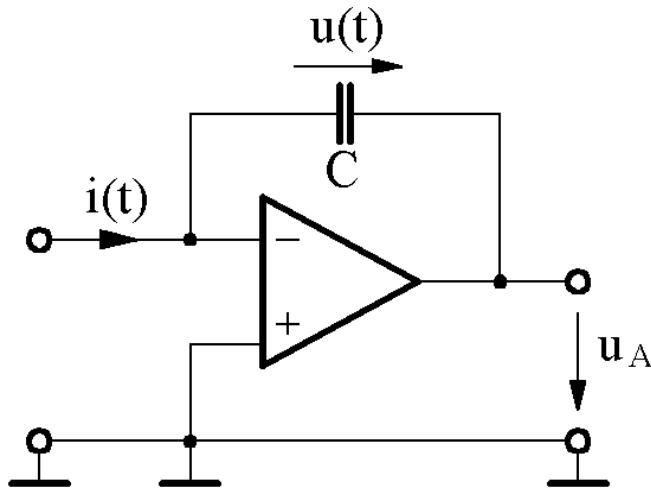
$$u_A(t) = u_A(0) - \frac{1}{R \cdot C} \int_0^t u_E(t) \cdot dt$$

Frequenzgang:

$$V(f) \sim 1/f$$

Tiefpass





$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -C \cdot \frac{du_A(t)}{dt}$$

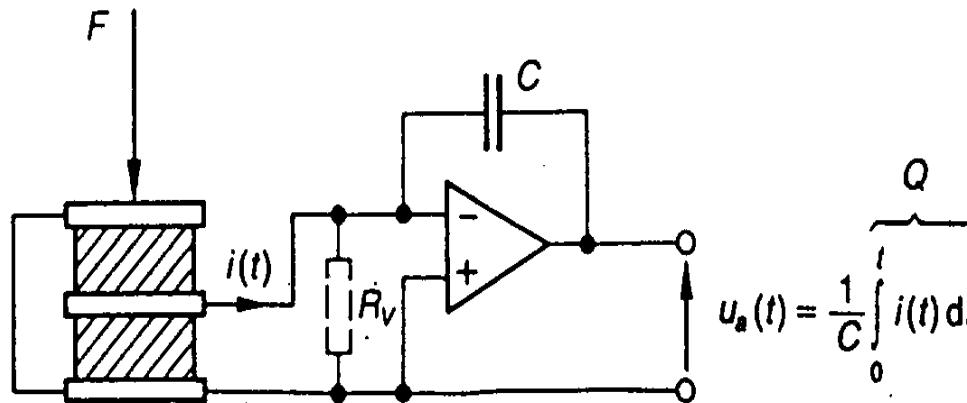
$$\Rightarrow u_A(t) = -\frac{1}{C} \cdot Q(t)$$

Aufpassen: Nullpunktfehlergrößen werden auch aufintegriert:
Einsatz z.B. bei Piezo-Sensoren

Beschaltung piezoelektrischer Aufnehmer mit Ladungsverstärker

Ein Piezoelement erzeugt eine Ladungsmenge proportional zur Kraft

Aber: Ladungen fließen bei einer elektrischen Belastung des Piezosensors rel. schnell ab; je nach Isolation in Sekunden bis Stunden
→ Isolation durch Ladungsverstärker



Ladungsverstärker zur Messung der vom Piezosensor generierten elektrischen Ladung

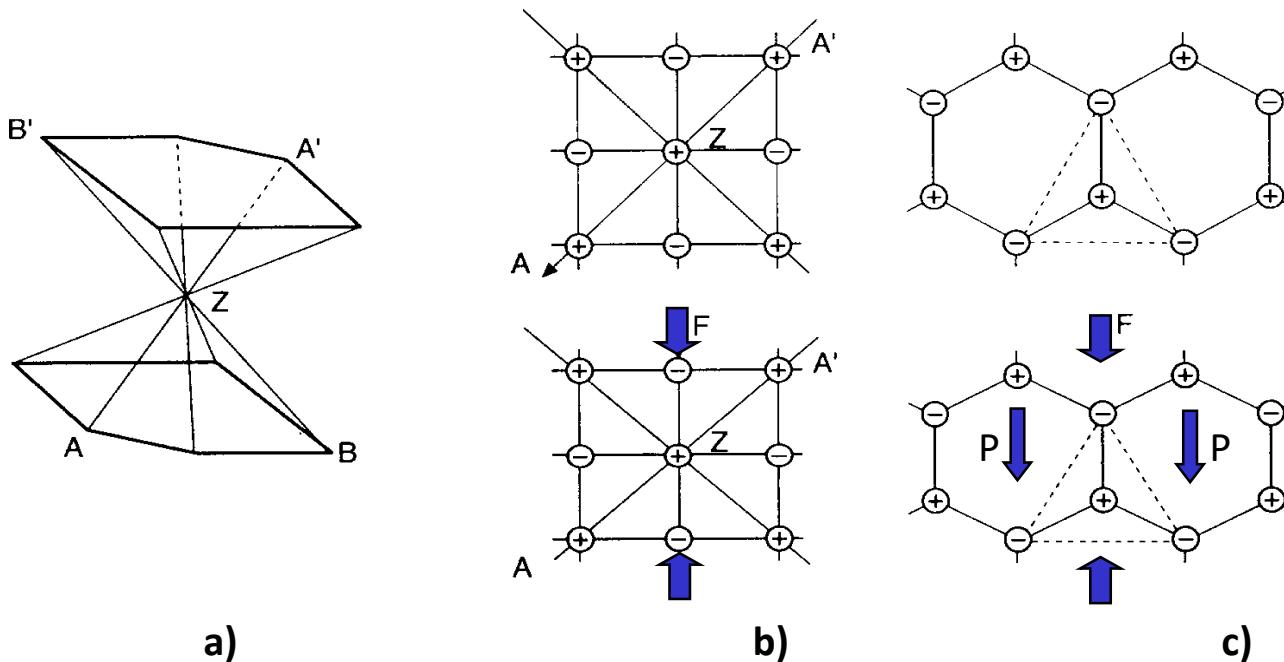
Exkurs: Piezoelektrischer-Effekt I

Piezoelektrischer Effekt:

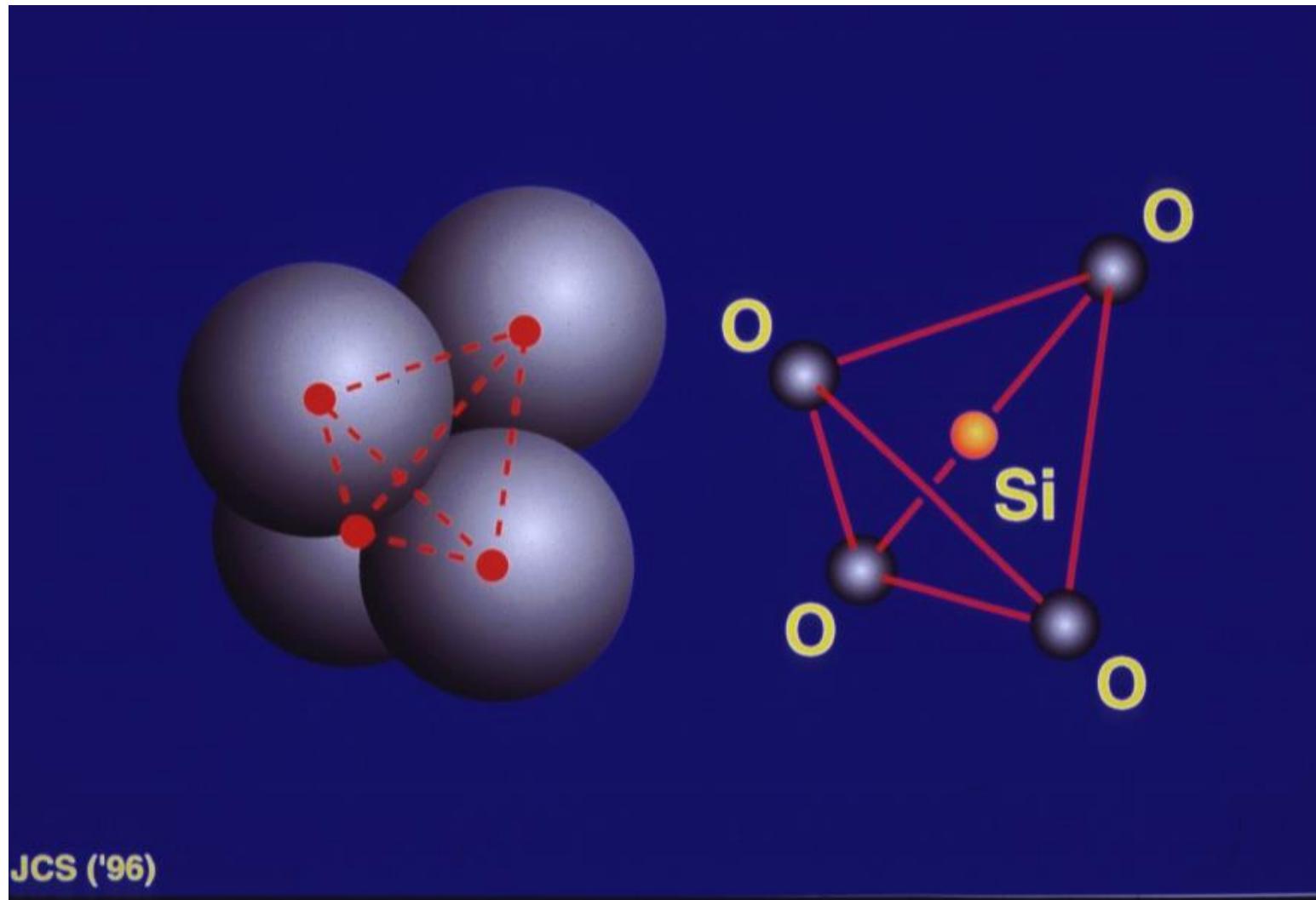
Durch eine Kraft, die auf einen nicht zentrosymmetrischen Kristall (z.B. Quarz oder eine polarisierte Keramik) wirkt, verschieben sich unterschiedlich geladene Ionen im Kristallgitter und auf der Oberfläche des Kristalls wird eine elektrische Ladungen erzeugt. Diese Ladungen lassen sich beim Abfluss über einen integrierenden Verstärker oder einem Verstärker mit extrem hohem Eingangswiderstand (Elektrometerverstärker) in eine proportionale Spannung umformen. Der Piezoeffekt ist reversibel. Zug- und Druckkräfte führen zu unterschiedlicher Polarität der Ladung. Die Größe der Ladung ist nicht temperaturabhängig und weist keine Hysterese in Abhängigkeit von der Kraft auf.

- Neben Quarz finden noch polykristalline piezoelektrische Keramiken wie Blei-Zirkon-Titanat (PZT), Barium-Titanat oder Lithium-Niobat Verwendung in Kraft-, Druck- und Beschleunigungssensoren.

Exkurs: Piezoelektrischer-Effekt II



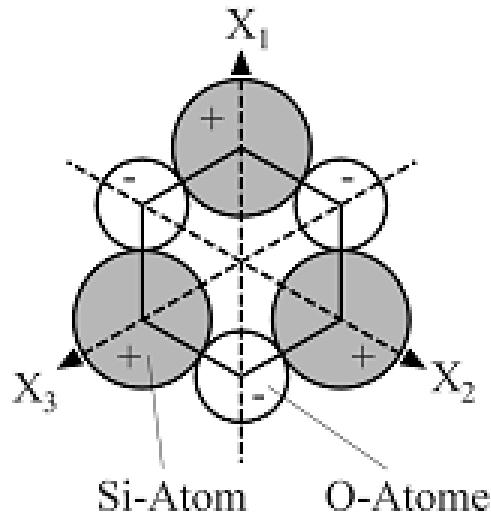
- a)** Kristall mit Symmetriezentrum, Z ist gemeinsamer Ladungsschwerpunkt für die positiven und negativen Ladungen der Gitteratome (nicht piezoelektrisch!).
- b)** Ionenkristall mit Symmetriezentrum. Auch im verformten Zustand bleibt das Symmetriezentrum = Ladungsschwerpunkt erhalten (\Rightarrow nicht piezoelektrisch!).
- c)** Ionenkristall ohne Symmetriezentrum. Ladungsschwerpunkte werden getrennt
 \Rightarrow piezoelektrisch !



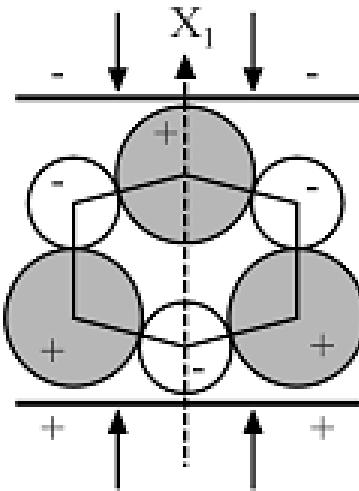
JCS ('96)

Veranschaulichung des piezoelektrischen Effekts:

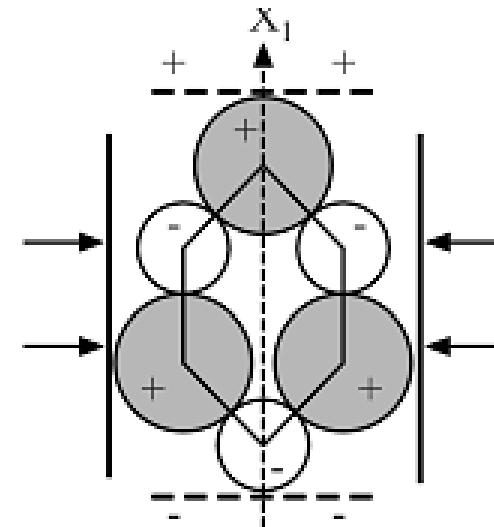
- Die Kreise stellen die Ladungsschwerpunkte der jeweiligen Atome dar.



a.)



b.)



c.)

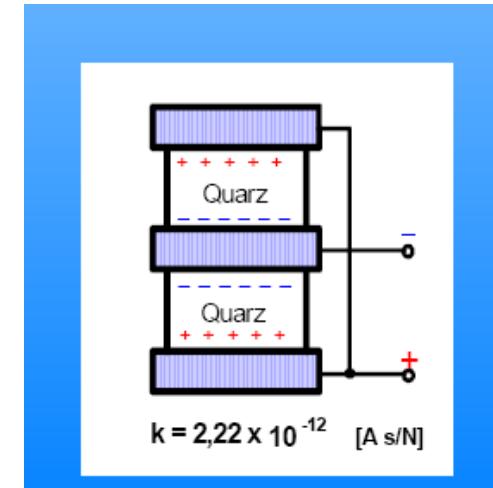
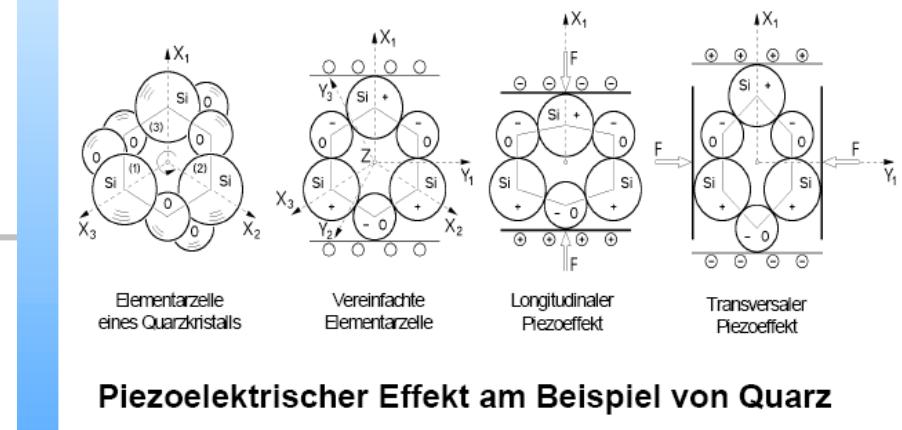
- a) Vereinfachtes Modell des Quarz-Gitters
- b) Longitudinaler Effekt
- c) Transversaler Effekt

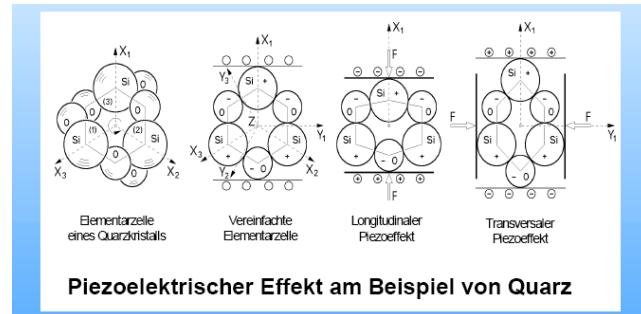
Bemerkung:

Die zwei Sauerstoffatome von SiO_2 (Quarz) sind in der Zeichnung zu einer Einheit zusammengefasst

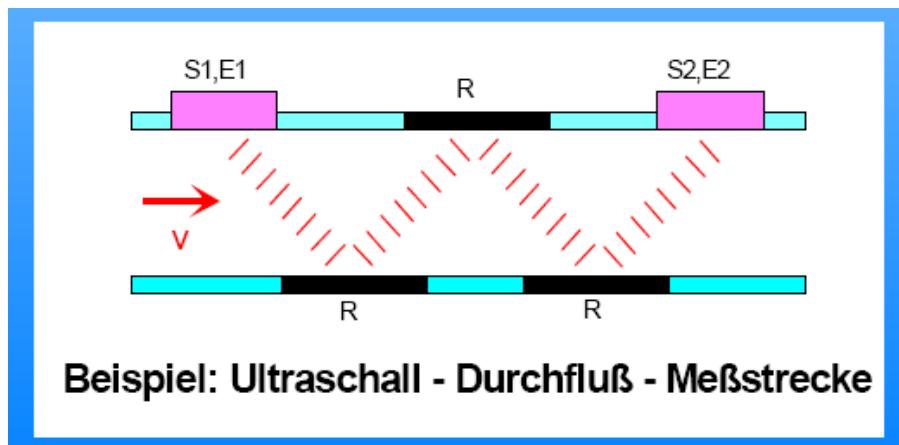
Piezoelektrische Sensoren I

- Piezoelektrische Kristalle und Piezokeramik lassen sich sowohl als elektro-mechanische Wandler einsetzen, wie auch als Wandler, die mechanische Größen in elektrische umsetzen, also als Aktor und als Sensor.
- Am Beispiel eines Quarzkristalls wird der Aufbau der Elementarzelle beschrieben und die Ladungsverschiebungen, die auftreten, wenn der Kristall verformt wird.
- Die entstehenden Ladungen lassen sich von entsprechend angebrachten Elektroden abgreifen.
- Setzt man zwei Quarzkristalle spiegelbildlich so zusammen, dass der longitudinale Piezoeffekt wirksam wird, so entsteht ein Kraftmesser. Die elektrische Ladung Q ist über einen weiten Bereich proportional der aufgebrachten Kraft F . Der Proportionalkoeffizient k heißt Kopplungsfaktor und hat die Dimension As/N .
- Da die elektrische Ladung leicht abfließt, benutzt man zur Signalaufbereitung Ladungsverstärker und trifft Vorkehrungen, dass die Drift die Messsignale nicht verfälscht.





- Für dynamische Messungen, bei denen es nicht auf den Gleichanteil ankommt, eignen sich piezoelektrische Wandler erheblich besser als für statische Messungen.
- Da man Piezokeramik sowohl als Sender von Druckwellen, wie auch als Empfänger einsetzen kann, reichen zwei solche Wandler, um die Schallgeschwindigkeit in einem Fluid stromauf und stromab zu vergleichen und daraus die Strömungsgeschwindigkeit zu ermitteln.



Piezoelektrische Sensoren messen nur Kräfte! Bei Anwendungen in der Druckmesstechnik muss der Druck - z. B. über eine Membran - erst in eine proportionale Kraft umgewandelt werden.

Vorteile piezoelektrischer Kraftsensoren

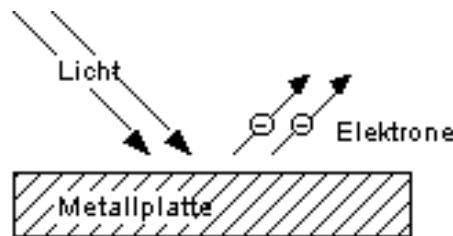
- Sensor kann mech. starr aufgebaut werden
 - mechanisch stabile Konstruktionen mit geringer Neigung zu Eigenschwingungen und geringer Hysterese.
- niedriger Temperaturkoeffizient,
- keine äußere Spannungsversorgung notwendig,
- hoher Wirkungsgrad bei der Umwandlung von mech. in elektrische Energie.

Nachteil

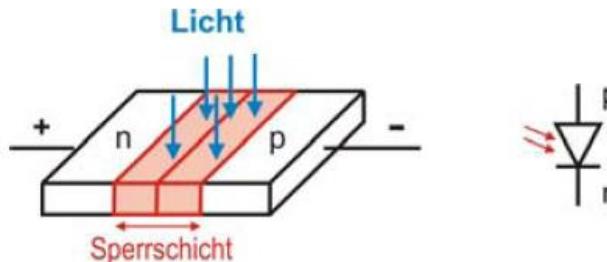
- Ladungen fließen bei elektrischer Belastung des Piezosensors (z.B. bei Anschluss eines Messgerätes) rel. schnell ab
je nach Isolation in Sekunden bis Stunden → Isolation durch Ladungsverstärker
- Piezoelektrische Sensoren eignen sich in erster Linie zur Messung von Kraft-, Druck- oder Beschleunigungsänderungen

Äußerer Photoeffekt:

- Übertragung der Energie eines Lichtquants auf ein Elektron.
- Das **Elektron kann** dadurch aus seiner Bindung **befreit** werden und **Bewegungsenergie** aufnehmen.
- Dieser von Einstein 1905 formulierte Effekt wird hauptsächlich bei Fotokathoden (z.B. in **Fotozellen** oder **Fotomultipliern**) ausgenutzt.

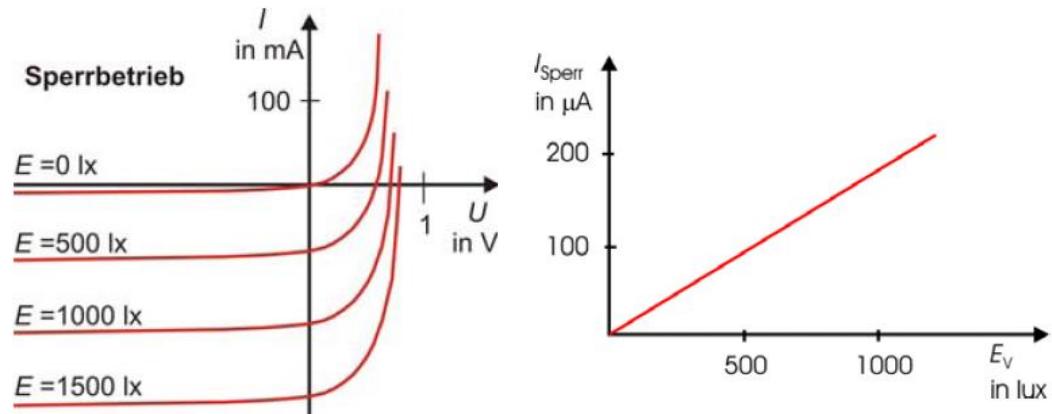
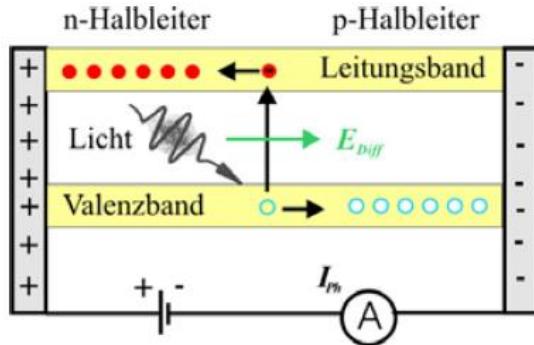


Optische Effekte II



Innerer Fotoeffekt:

- In **Photodioden** werden die Ladungsträgerpaare durch das elektrische Feld über der Raumladungszone getrennt, und es entsteht eine **Leerlaufspannung**.
- Im Gegensatz zum äußeren Fotoeffekt verlassen diese Ladungsträger die Probe nicht.



Bei Sensoren wird der innere Fotoeffekt, z.B. beim **Fotowiderstand**, der **Fotodiode**, dem **Fototransistor** und der **Solarzelle** ausgenutzt.

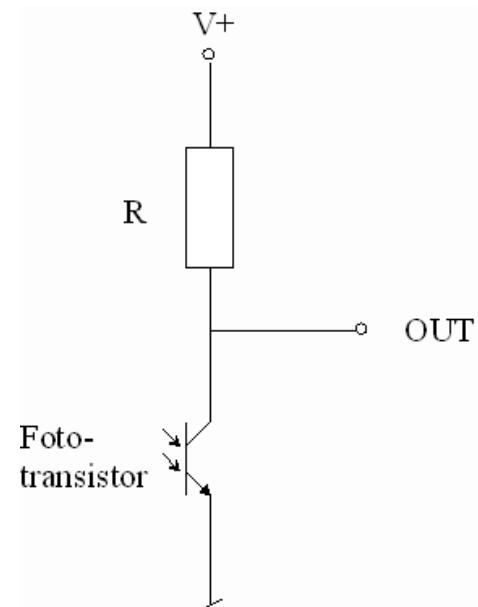
Photodiode:

- p/n-Übergang, der Licht ausgesetzt wird.
- Bei Beleuchtung werden Ladungsträger erzeugt und durch das Feld der Raumladungszone getrennt.
- Eine Photodiode kann ohne Vorspannung als Fotoelement betrieben werden oder mit negativer Vorspannung im Diodenbetrieb.
- In beiden Fällen ist der **Fotostrom über 4-8 Zehnerpotenzen eine lineare Funktion der bestrahlenden Lichtleistung**. Es sind Schaltzeiten bis unter 1 ns möglich.

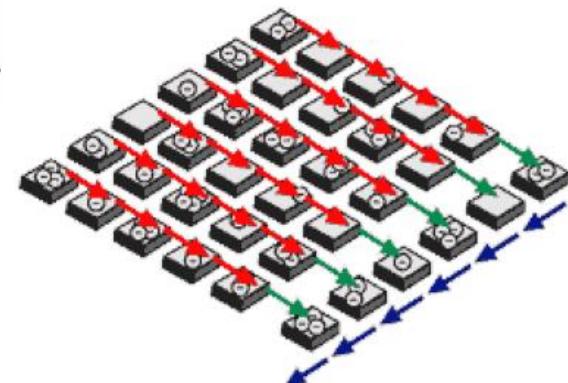
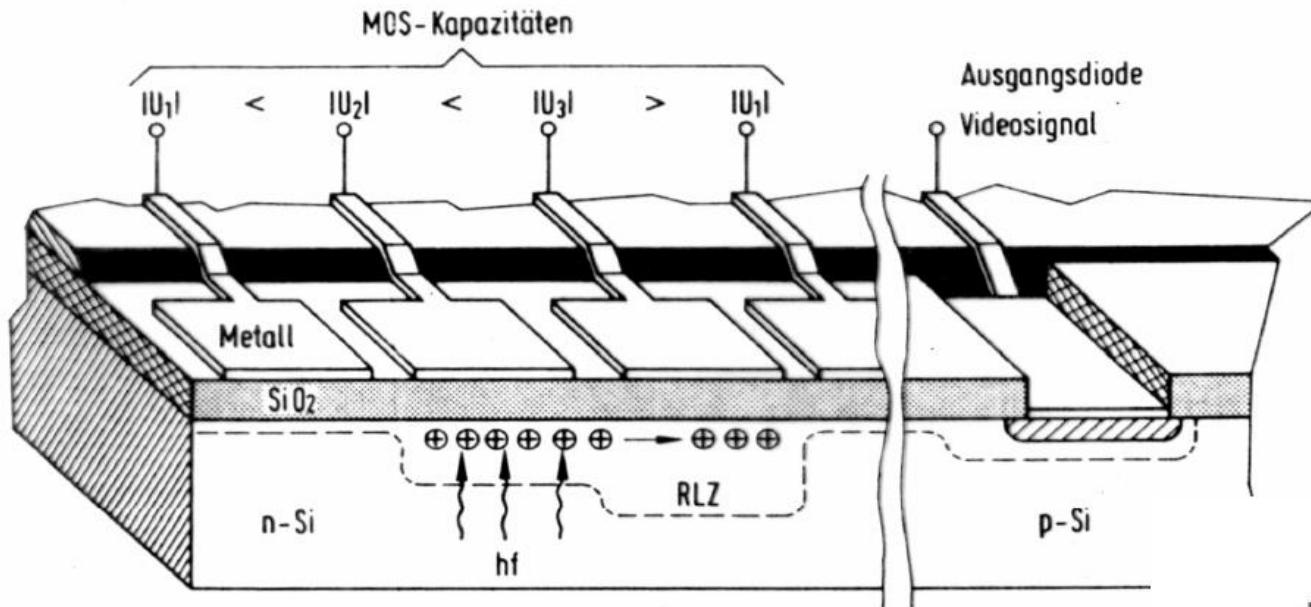


Fototransistoren:

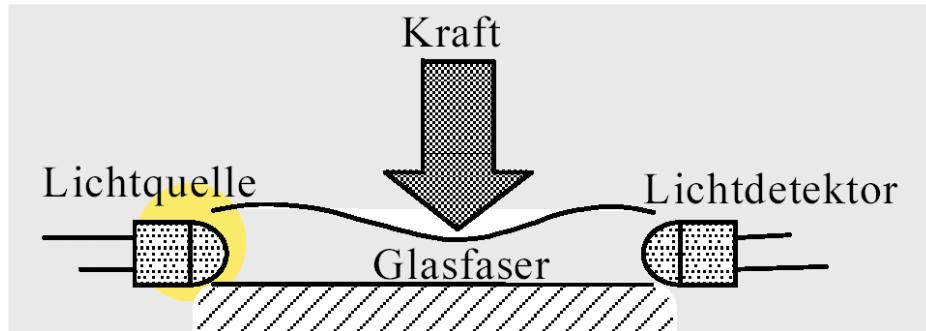
- Es kann auch der **Basis-Kollektor-Übergang eines Bipolartransistors als Photodiode eingesetzt werden.**
- Dadurch kann der **Fotostrom um den Faktor 100 bis 1000 verstärkt** werden, allerdings auf Kosten der Geschwindigkeit (Schaltzeiten nur noch bei 5-10 μ s).
- Zudem größere Linearitätsabweichungen als bei der Fotodiode.



CCD (Charge Coupled Devices)

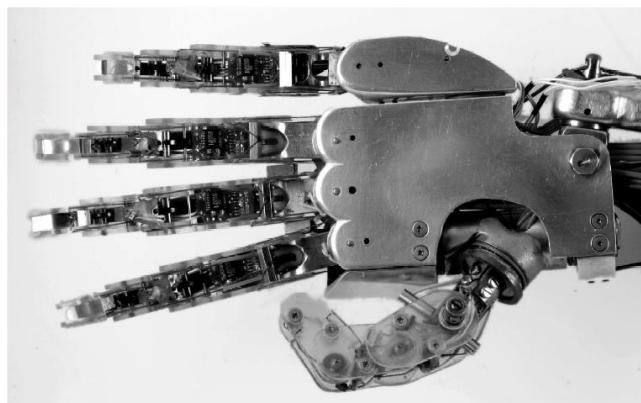


Optische Kraft- bzw. Druck-Sensoren

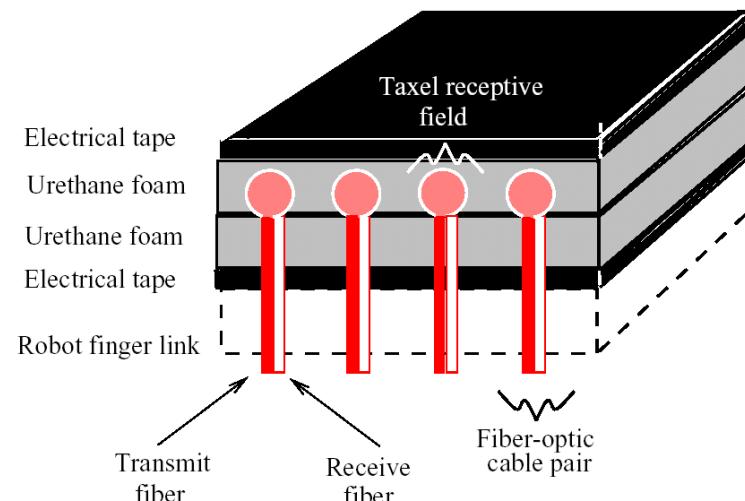


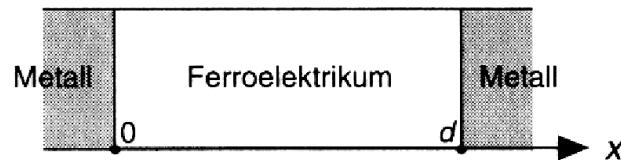
Glasfaser als Übertragungsmedium
Bei Krafteinwirkung Änderung der Absorptions- / Streueigenschaften

Anwendung z.B. als taktiler Sensor bei Robotern



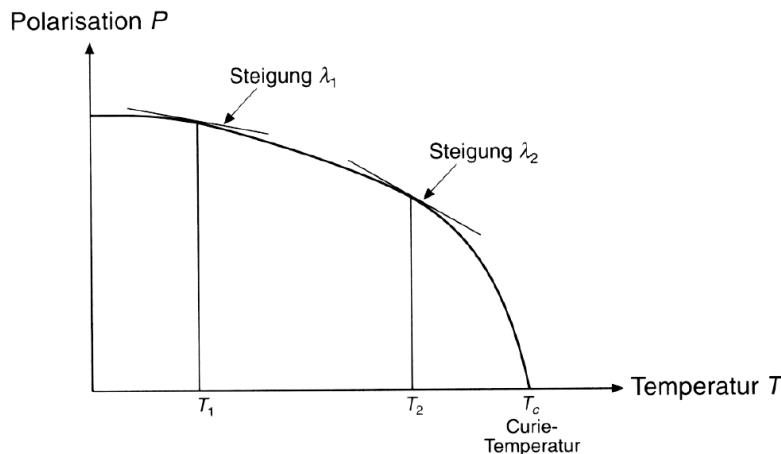
Massachusetts Institute of Technology
Dexterous Hand and Multi-point tactile sensor





Ein Kondensator mit **Ferroelektrikum** als Dielektrikum besitzt eine konstante Ladung auf den Metallplatten, hervorgerufen von der (permanenten) Polarisierung des Ferroelektrikums.

Steigt die **Temperatur**, z.B. durch Infrarotbestrahlung, steigt auch die Entropie im Ferroelektrikum; die **Polarisation wird kleiner**. Die entsprechende **Ladung auf den Platten wird ebenfalls kleiner**.



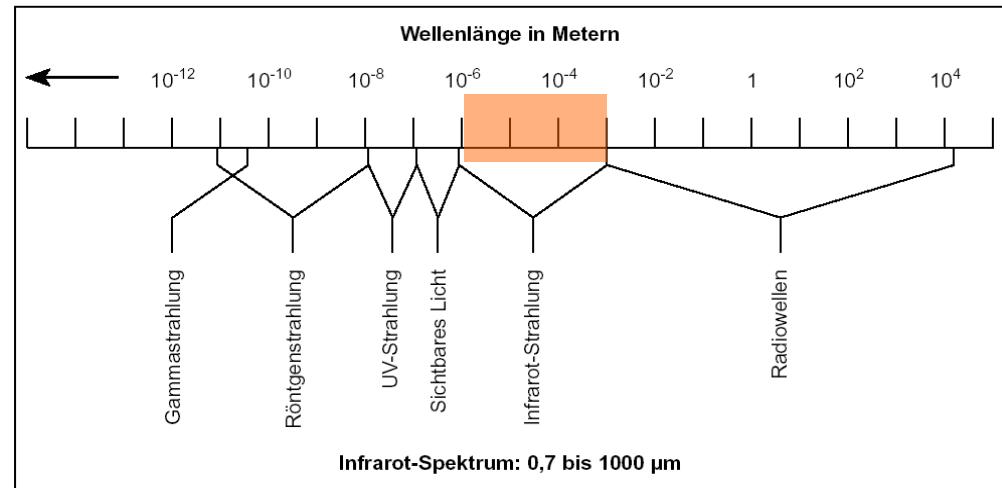
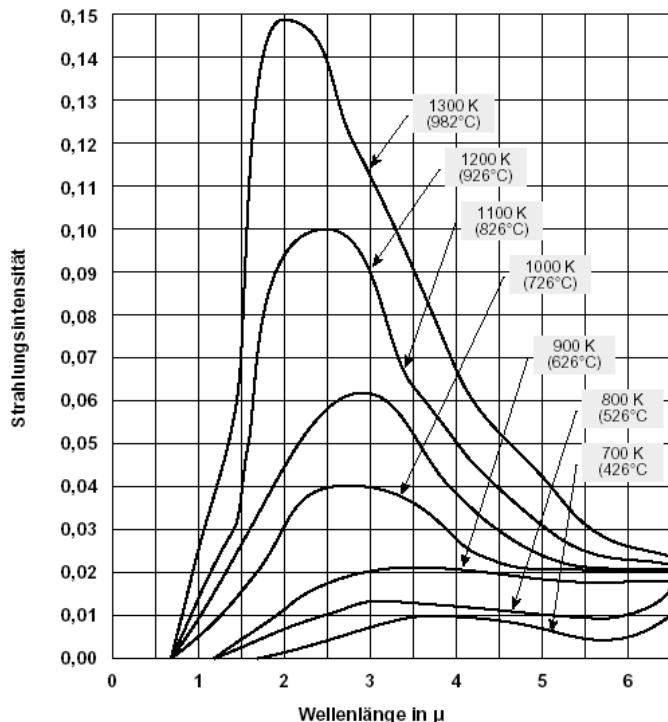
Werden die Platten leitfähig verbunden, kommt es zu Ladungsausgleich. Deshalb ist sehr **hochohmiger Abgriff** der sich ergebenden Spannung nötig.

Temperaturabhängigkeit der spontanen el.
Polarisation von ferroelektrischen Werkstoffen:

z.B. Infrarot-Temperaturmessung

- Jeder Körper mit einer Temperatur über dem absoluten Nullpunkt (0° Kelvin) strahlt Infrarot-Energie ab
- Messen der Temperatur eines Körpers durch Messen der Infrarotstrahlung

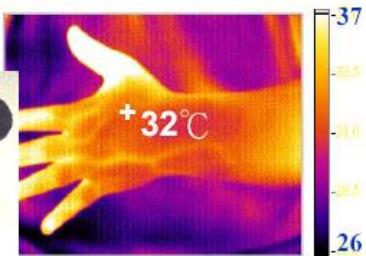
Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers
als Funktion von Wellenlänge und Temperatur



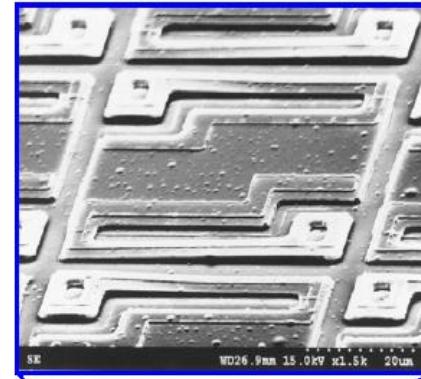
IR-Temperaturmessung

Fokussierung der Wärmestrahlung über infrarotdurchlässige Optik auf den Sensor
 Sensor z.B. eine infrarotempfindliche Photozelle, ein Photowiderstand, ein Thermowiderstand, ein Thermopile (eine miniaturisierte Serienschaltung mehrerer Thermoelemente) oder ein pyroelektrischer Sensor

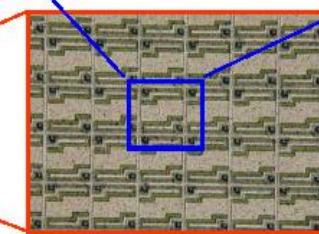
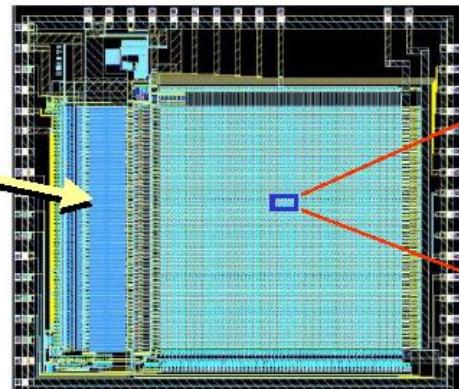
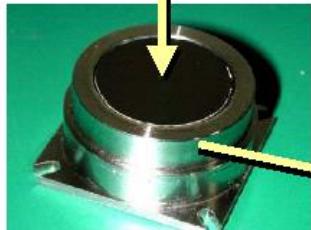
Optik



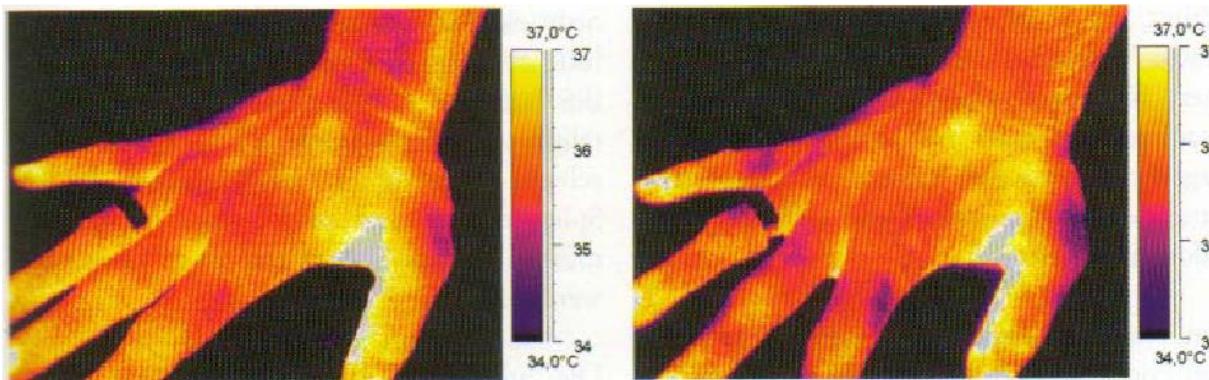
IR-Sensor-Pixel



IR-Sensor-Array



Beispiel: Temporäre Gefäßveränderung durch Nikotin



Beispiel: Thermographie Kamera



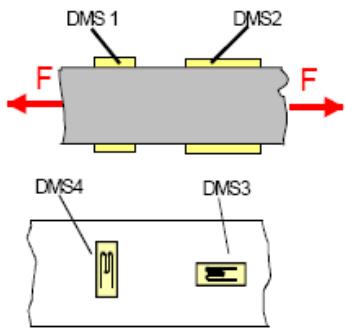
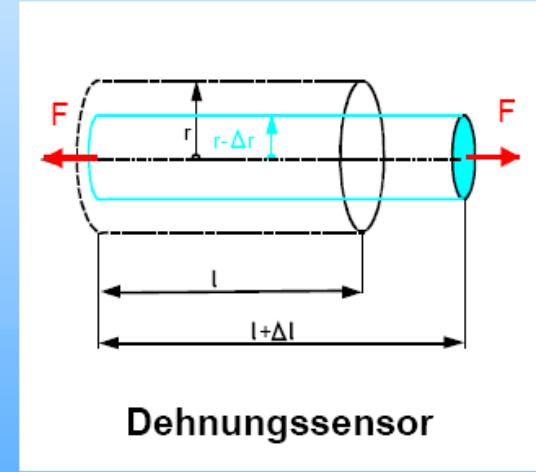
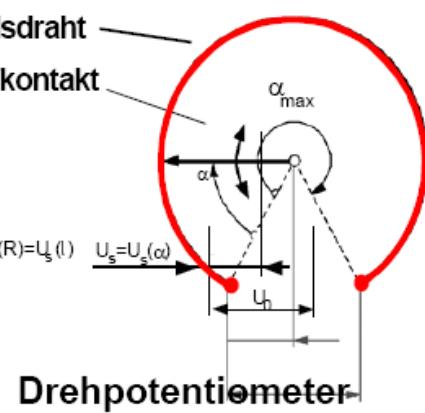
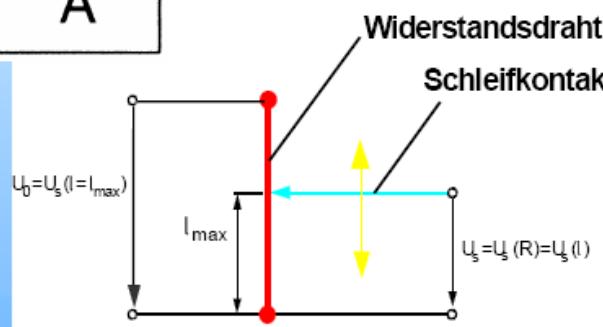
s. Link: http://coolcosmos.ipac.caltech.edu/image_galleries/our_ir_world_gallery.html

5. Widerstandssensoren

WHEATSTONESCHE MESSBRÜCKE / INSTRUMENTIERUNGSVERSTÄRKER

Widerstandssensoren

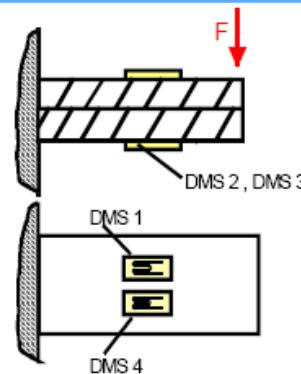
$$R = \frac{\rho \cdot L}{A}$$



Zug / Druck

kompensierte
Größen:

Biegung
Torsion
Temperatur



Biegung

kompensierte
Größen:

Zug / Druck
Torsion
Temperatur

Spannungsteiler als Messbrücke

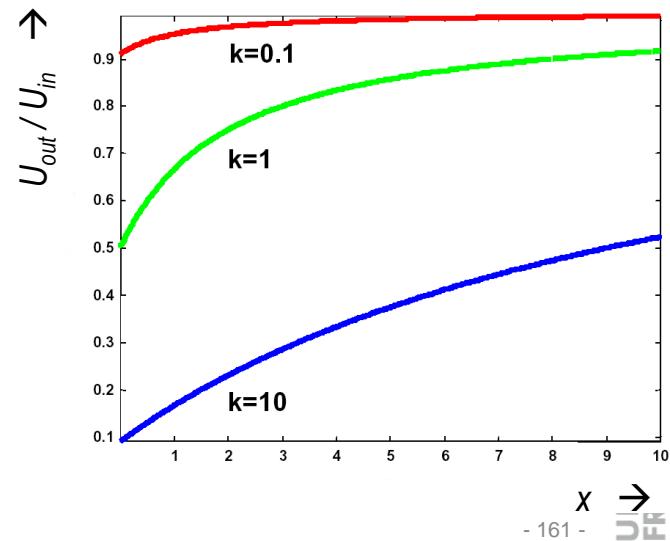
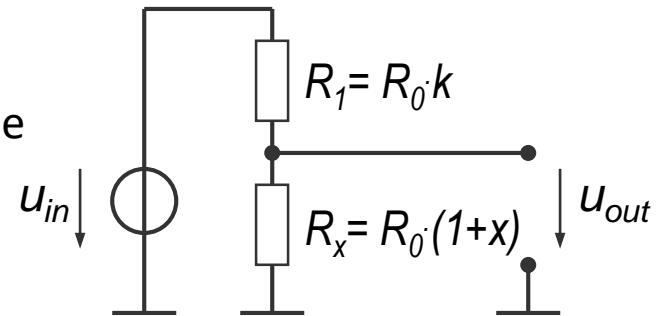
Problemstellung:

- Sensor liefert Messgröße als rel. Widerstandsänderung
 $R_x = R_0 \cdot (1+x)$; d.h gesucht ist der Wert von x
- R_0 ist der Widerstand ohne Einwirkung einer Umweltgröße
- R_1 ist fest, zur Vereinfachung ebenfalls als Faktor/Bruchteil von R_0 dargestellt

$$\begin{aligned} U_{out} &= U_{in} \cdot \frac{R_x}{R_x + R_1} = U_{in} \cdot \frac{R_0 \cdot (1+x)}{R_0 \cdot (1+x) + R_0 \cdot k} \\ &= U_{in} \cdot \frac{1+x}{1+x+k} \end{aligned}$$

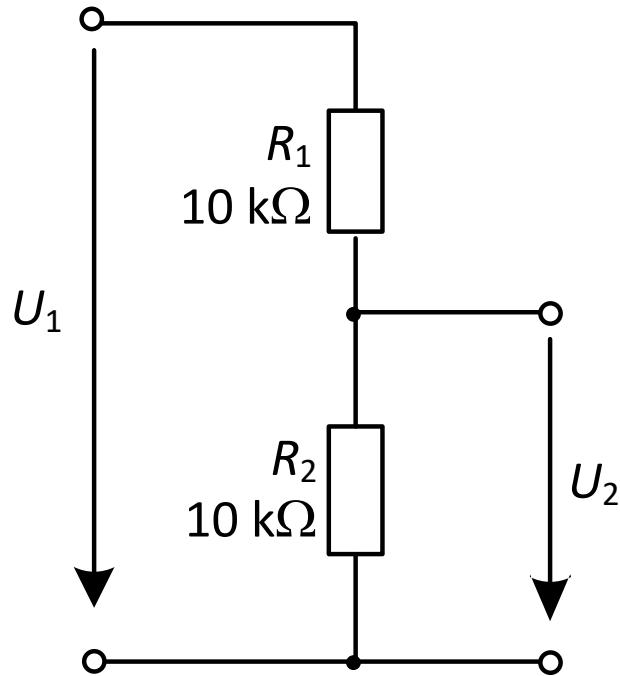
Frage:

- Wie groß ist die Empfindlichkeit der Anordnung ?
- Wie sind die Widerstandswerte am besten auszulegen ?



Wie beeinflusst ein Messgerät die Messung?

Spannungsteiler ohne Belastung:



$$U = 1 \text{ V}$$

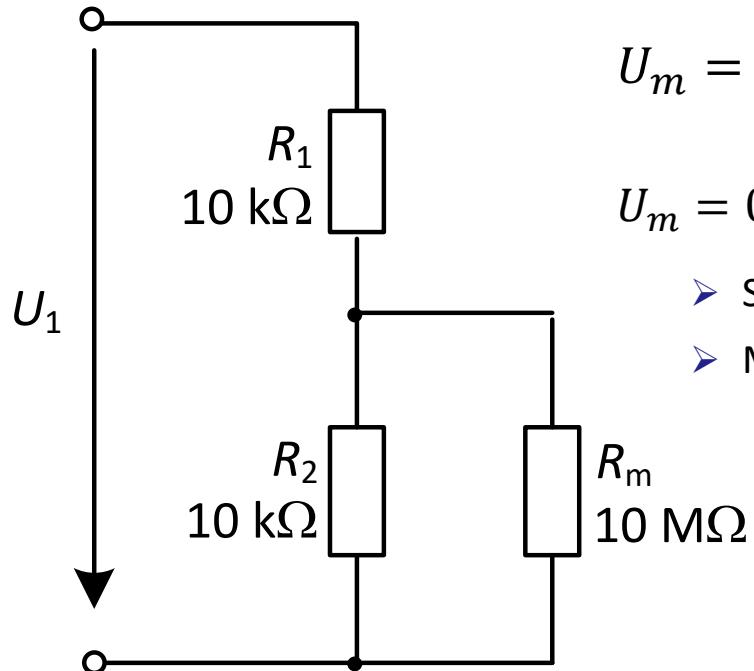
$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$U_{R2} = U \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2} = 1 \text{ V} \cdot \frac{10 \text{ k}\Omega}{10 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega} = 0,5 \text{ V}$$

Belasteter Spannungsteiler:

$$R_m = 10 \text{ M}\Omega$$



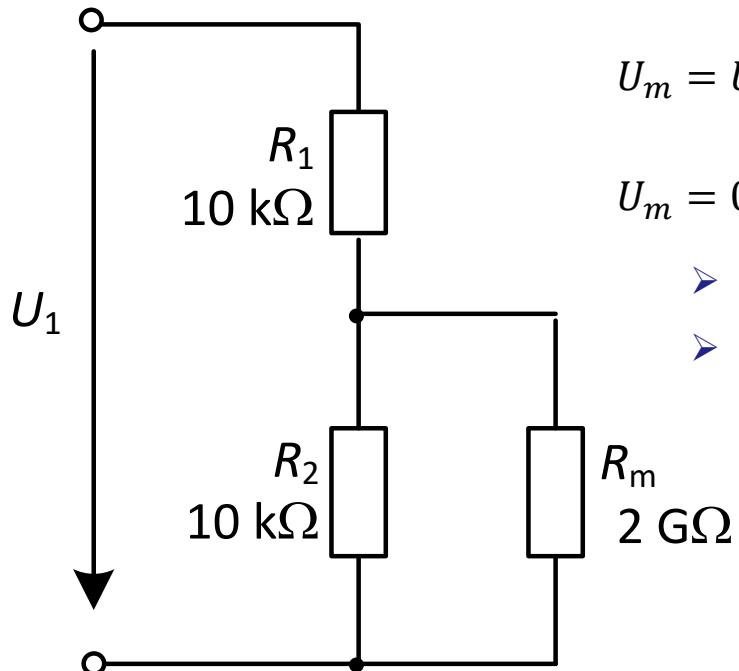
$$U_m = U \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_m}{R_2 + R_m}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_m}{R_2 + R_m}} = 1 \text{ V} \cdot \frac{\frac{10 \text{ k}\Omega \cdot 10 \text{ M}\Omega}{10 \text{ k}\Omega + 10 \text{ M}\Omega}}{10 \text{ k}\Omega + \frac{10 \text{ k}\Omega \cdot 10 \text{ M}\Omega}{10 \text{ k}\Omega + 10 \text{ M}\Omega}}$$

$$U_m = 0,499975 \text{ V}$$

- Spannungsabfall von $0,00025 \text{ V}$ bzw. $0,005 \%$
- Messgerät zeigt einen zu geringen Wert an

Lösung: Verwendung eines Messgeräts mit sehr hohem Innenwiderstand:

$$R_m = 2 \text{ G}\Omega$$



$$U_m = U \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_m}{R_2 + R_m}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_m}{R_2 + R_m}} = 1 \text{ V} \cdot \frac{\frac{10 \text{ k}\Omega \cdot 2 \text{ G}\Omega}{10 \text{ k}\Omega + 2 \text{ G}\Omega}}{10 \text{ k}\Omega + \frac{10 \text{ k}\Omega \cdot 2 \text{ G}\Omega}{10 \text{ k}\Omega + 2 \text{ G}\Omega}}$$

$$U_m = 0,49999875 \text{ V}$$

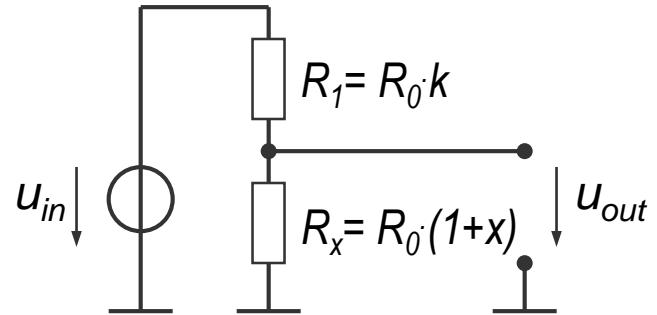
- Spannungsabfall von $0,00000225 \text{ V}$ bzw. $0,000045 \%$
- Messgerät zeigt einen sehr genauen Wert an

Spannungsteiler als Messbrücke

Sensor-Kennlinie:

$$U_{out} = U_{in} \cdot \frac{R_x}{R_x + R_1} = U_{in} \cdot \frac{1+x}{1+x+k}$$

Empfindlichkeit S:



$$S = \frac{dU_{out}}{dx} = \frac{d}{dx} \left[U_{in} \cdot \frac{x+1}{x+k+1} \right] = U_{in} \cdot \frac{(x+k+1) - (x+1)}{(x+k+1)^2} = \frac{U_{in} \cdot k}{(x+k+1)^2}$$

Quotientenregel →

Wann ist S maximal ?

$$\frac{dS}{dk} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{d}{dk} \cdot \left[\frac{U_{in} \cdot k}{(x+k+1)^2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{(x+k+1)^2 - k \cdot 2 \cdot (x+k+1)}{(x+k+1)^4} = 0$$

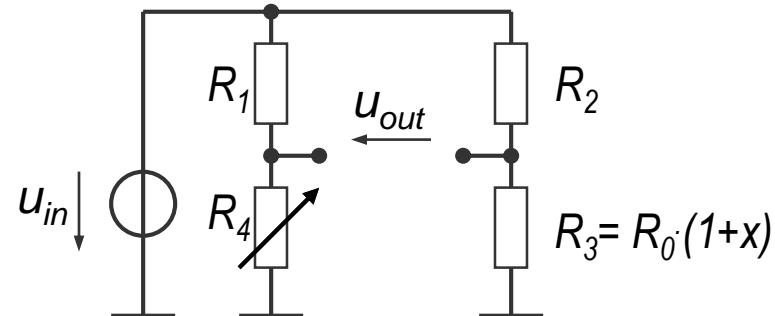


Die Sensitivität S des Spannungsteilers ist maximal für $k = 1 + x$
d.h. wenn $R_x = R_1$ ist

Wheatstonesche Messbrücke

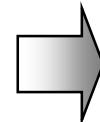
Aufbau:

- Zwei Spannungsteiler:
 - ein Referenzspannungsteiler
 - ein Sensor-Spannungsteiler



Ausschlagmethode:

- U_{out} wird gemessen
- Vorteil: schnell

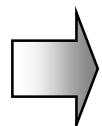


$$U_{out} = U_{in} \cdot \left[\frac{R_3}{R_3 + R_2} - \frac{R_4}{R_4 + R_1} \right]$$

Kompensationsmethode:

- R_4 wird solange verändert bis $U_{out}=0$ ist

$$U_{out} = 0 \Rightarrow \frac{R_3}{R_3 + R_2} - \frac{R_4}{R_4 + R_1} = 0$$



Abgleichbedingung: $R_3 \cdot R_1 - R_4 \cdot R_2 = 0$ bzw.

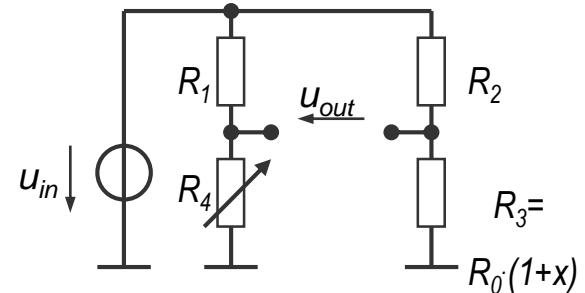
$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{R_4}{R_1}$$

- Vorteil der Kompensationsmethode: Messung unabhängig von U_{in}

Wheatstonesche Messbrücke

Problemstellung:

- Sensor liefert Messgröße als rel. Widerstandsänderung $R_3 = R_0(1+x)$; d.h gesucht ist der Wert von x
- Die Brücke sei nahezu abgeglichen d.h.: $k = \frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_0}$



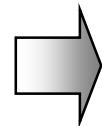
Ausgangsspannung:

$$U_{out} = U_{in} \cdot \left[\frac{R_3}{R_3 + R_2} - \frac{R_4}{R_4 + R_1} \right] = U_{in} \cdot \left[\frac{R_0 \cdot (1+x)}{R_0 \cdot (1+x) + R_0 \cdot k} - \frac{R_4}{R_4 + R_4 \cdot k} \right] = U_{in} \cdot \left[\frac{k \cdot x}{(1+k) \cdot (1+k+x)} \right]$$

Empfindlichkeit S:

$$S = \frac{dU_{out}}{dx} = \frac{d}{dx} \left[U_{in} \cdot \left[\frac{k \cdot x}{(1+k) \cdot (1+k+x)} \right] \right] = U_{in} \cdot \left[\frac{k \cdot (1+k) \cdot (1+k+x) - k \cdot x \cdot (1+k)}{(1+k)^2 \cdot (1+k+x)^2} \right]$$

$$= \frac{U_{in} \cdot k}{(1+k+x)^2}$$



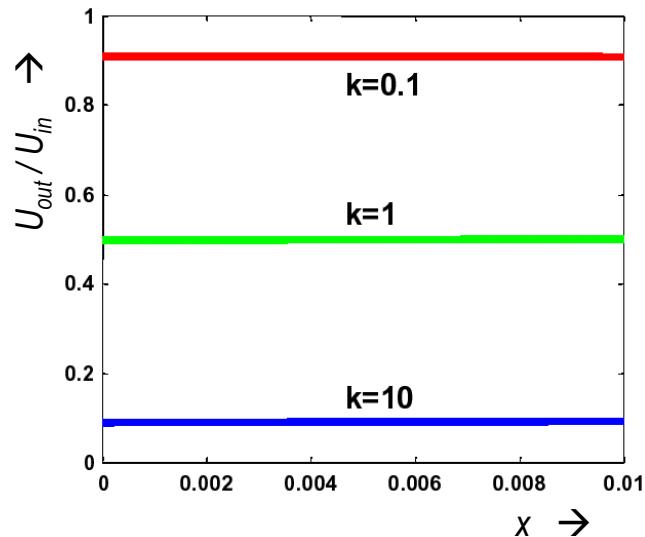
Die Wheatstonesche Messbrücke hat die gleiche Empfindlichkeit wie ein einfacher Spannungsteiler !

Warum wird die Wheatstonesche Messbrücke dann überhaupt eingesetzt ?

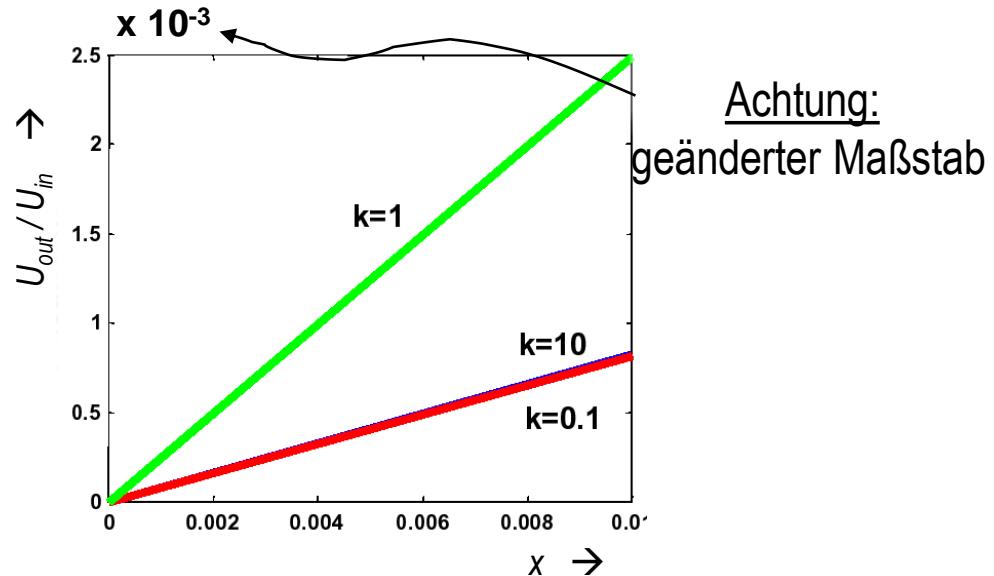
Wheatstonesche Messbrücke

Verlauf der Ausgangsspannung bei kleinen Änderungen von der Messgröße x :

Spannungsteiler als Messbrücke



Wheatstonesche Messbrücke

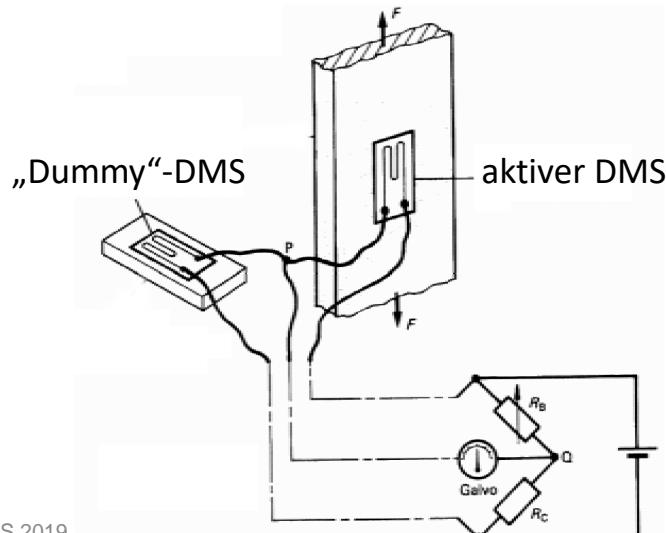
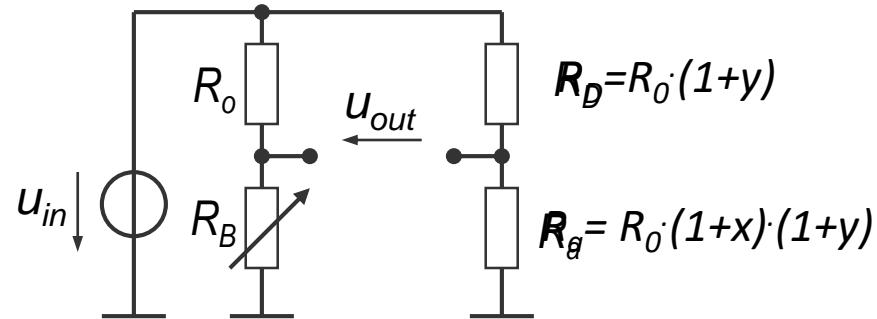


- Die Ausgangsspannung bei Einsatz eines Spannungsteiler besitzt einen großen Gleichspannungs-Offset
- Die Wheatstonesche Messbrücke beseitigt diesen Offset
- ⇒ Das Signal der Wheatstonesche Messbrücke kann daher verstärkt werden, um die Sensitivität zu erhöhen

DMS-Kompensationsschaltung mit Wheatstone Brücke

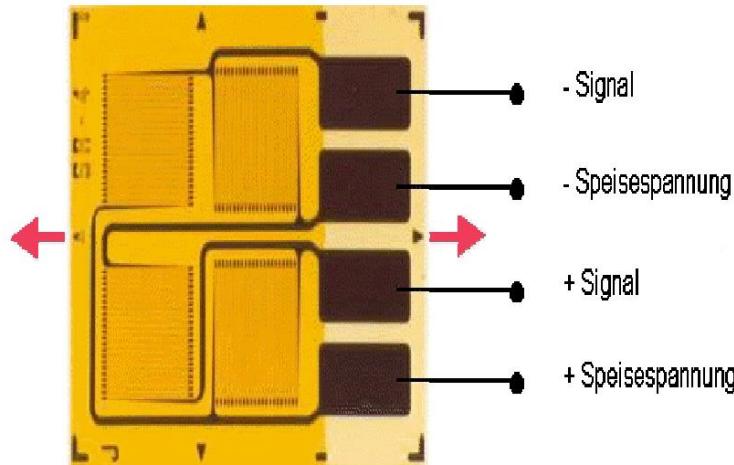
Problemstellung: DMS sind empfindlich gegenüber Temperaturdriften

- Wheatstonesche Messbrücke kann kompensierend beschaltet werden
- Auf ein aktives DMS-Element wirkt die Kraft x und Temperatur y : $R_a = R_0 \cdot (1+x) \cdot (1+y)$
- Auf ein gleichartiges „Dummy-Element“ wirkt nur die Temperatur y : $R_D = R_0 \cdot (1+y)$
- der Effekt von $(1+y)$ hebt sich im Sensor-Spannungsteiler gerade auf

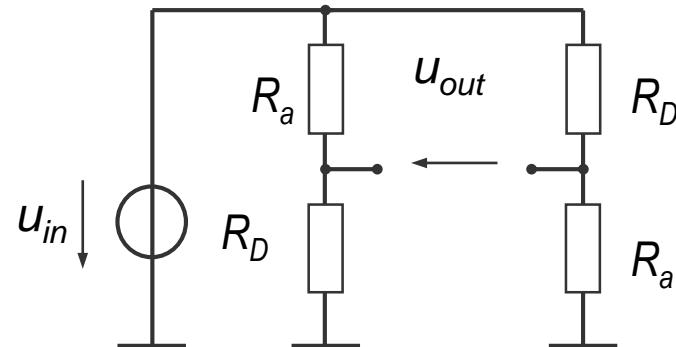


„Dummy“-DMS auf
gleichem Träger wie
aktiver DMS montiert
aber nicht in Richtung
der Kraft-Wirkung

DMS Vollbrücke:

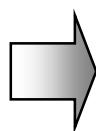


Schaltung:



$$U_{out} = U_{in} \cdot \left[\frac{R_a - R_D}{R_a + R_D} \right]$$

mit $R_a = R_D \cdot (1+x)$ $U_{out} = U_{in} \cdot \left[\frac{x}{2+x} \right]$



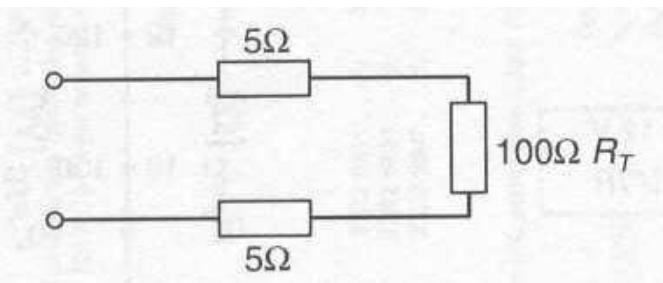
$$S = \frac{2}{(2+x)^2}$$

Vorteile der Vollbrücke:

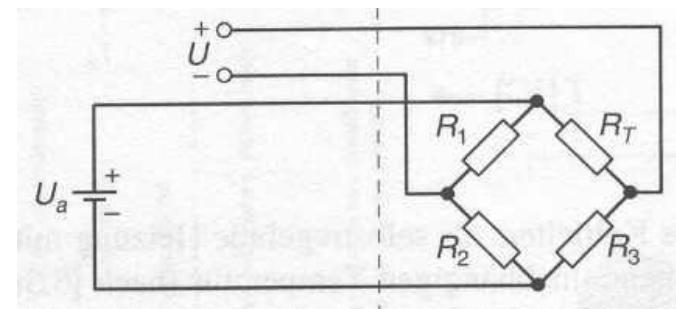
- Empfindlichkeit doppelt so groß wie bei einfacher Brücke
- Temperaturdrift kompensiert

Anschlussvarianten

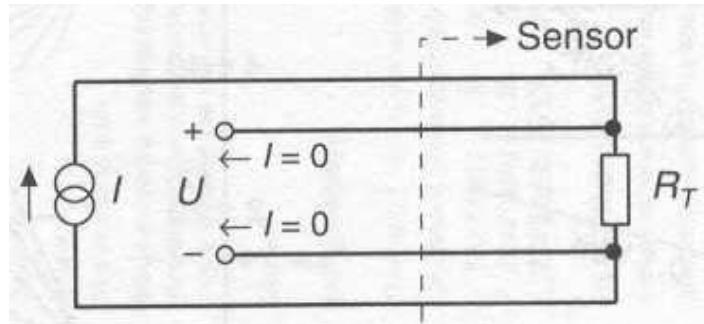
2-Leitertechnik



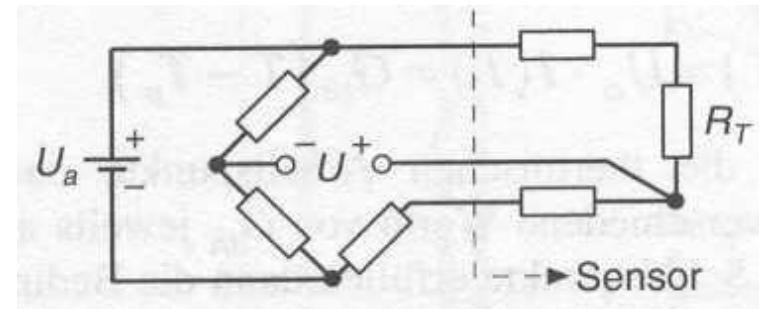
4-Leitertechnik mit Wheatstonescher Brücke



4-Leitertechnik mit Spannungsmessleitungen am Sensorwiderstand

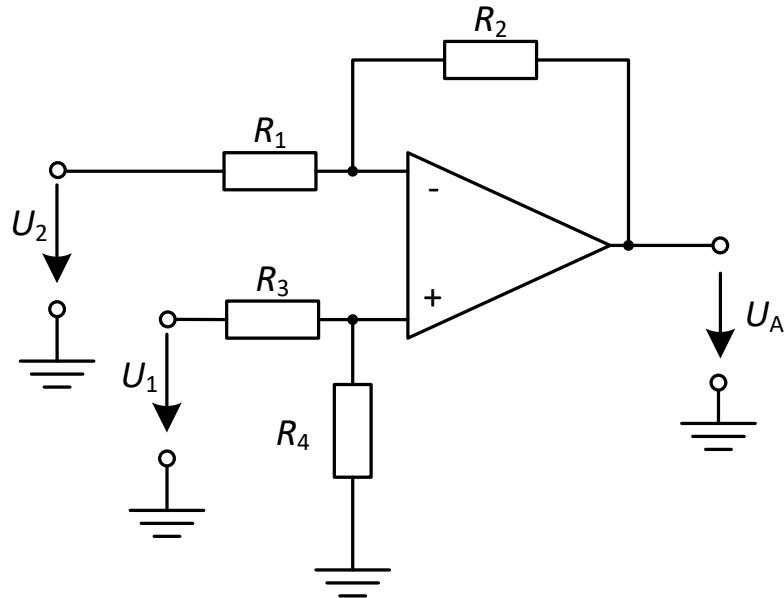


3-Leitertechnik mit Wheatstonescher Brücke



Subtrahierer

- 2 Nicht-invertierende Verstärker als Eingangsstufen (Elektrometerverstärker)
- Subtrahierer als Ausgangsstufe
- Sehr hohe Eingangswiderstände (z.B. INA116P Eingangsimpedanz > $10^{15}\Omega$)



$$U_A = \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}{\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)} U_1 - \frac{R_2}{R_1} U_2$$

für $R_1 = R_3$ und $R_2 = R_4$:

$$U_A = \frac{R_2}{R_1} (U_1 - U_2)$$

Subtrahierer – Herleitung

Knoten- und Maschengleichungen aufstellen

$$(I) \quad U_2 - U_{R1} - U_{R2} - U_A = 0$$

$$(II) \quad U_1 - U_{R3} - U_{R4} = 0$$

$$(III) \quad U_2 - U_{R1} - U_{R4} + U_D = 0$$

$$(IV) \quad i_1 - i_2 = 0$$

$$(V) \quad i_3 - i_4 = 0$$

Bauteilgleichungen aufstellen

$$(VI) \quad U_R = R \cdot i_R$$

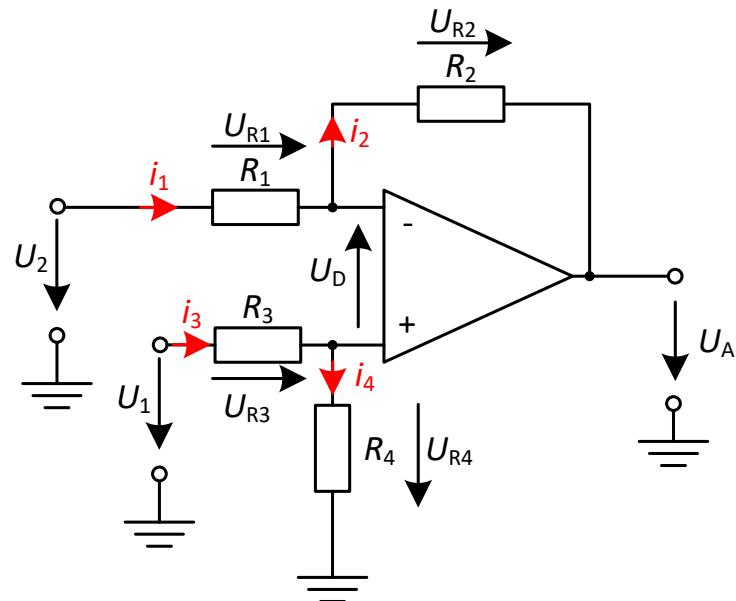
Einsetzen und umformen

$$(VI) \rightarrow (I): (VII) \quad i_1 = \frac{U_2 - U_A}{R_1 + R_2}$$

$$(VI) \rightarrow (II): (VIII) \quad i_4 = \frac{U_1}{R_3 + R_4}$$

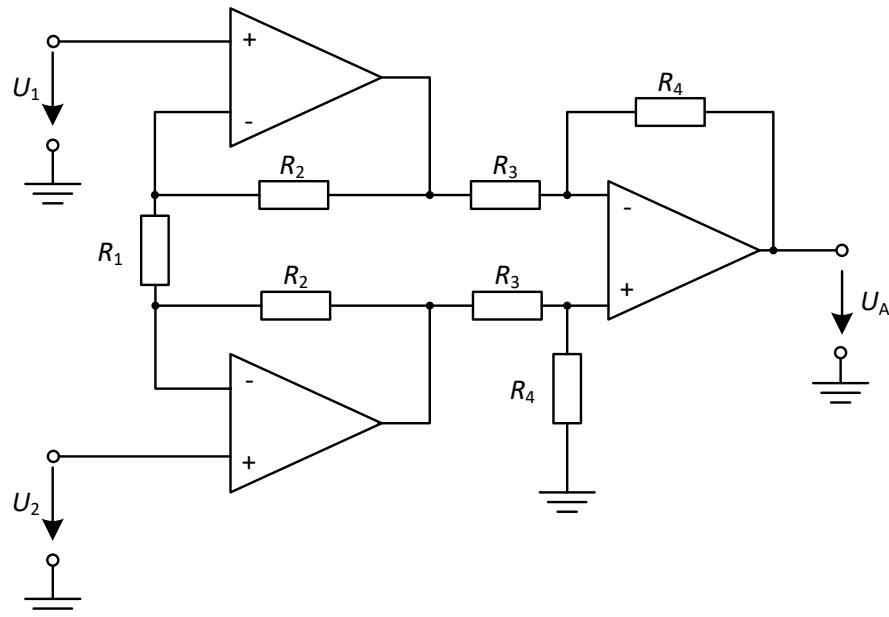
$$(VI) \rightarrow (III): (IX) \quad U_2 + U_D = R_1 i_1 + R_4 i_4$$

$$(VII) + (VIII) \rightarrow (IX): (X) \quad U_A = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_4}{R_1 \cdot (R_3 + R_4)} \cdot U_1 - \frac{R_2}{R_1} \cdot U_2 + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) U_D , \text{ der letzte Term beschreibt den Offset-Fehler}$$



Instrumentierungsverstärker

- 2 Nicht-invertierende Verstärker als Eingangsstufen (Elektrometerverstärker)
- Subtrahierer als Ausgangsstufe
- Sehr hohe Eingangswiderstände (z.B. INA116P Eingangsimpedanz > $10^{15}\Omega$)



$$U_A = -\frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1} \right) \cdot (U_1 - U_2)$$

- Herleitung siehe Schrüfer: „Messtechnik“, 10.Aufl., Studienbibliothek SB/J.1/4a

Analoge Signalvorverarbeitung II

Instrumentierungsverstärker – Herleitung (1)

Knoten- und Maschengleichungen aufstellen

$$(I) \quad U_1 - U_{D1} + U_{R1} - U_{A1} = 0$$

$$(II) \quad U_2 - U_{D2} + U_{R2} - U_{A2} = 0$$

$$(III) \quad U_{A1} - U_{R1} + U_{R2} - U_{R3} - U_{A2} = 0$$

$$(IV) \quad I_1 - I_3 = 0$$

$$(V) \quad I_2 + I_3 = 0$$

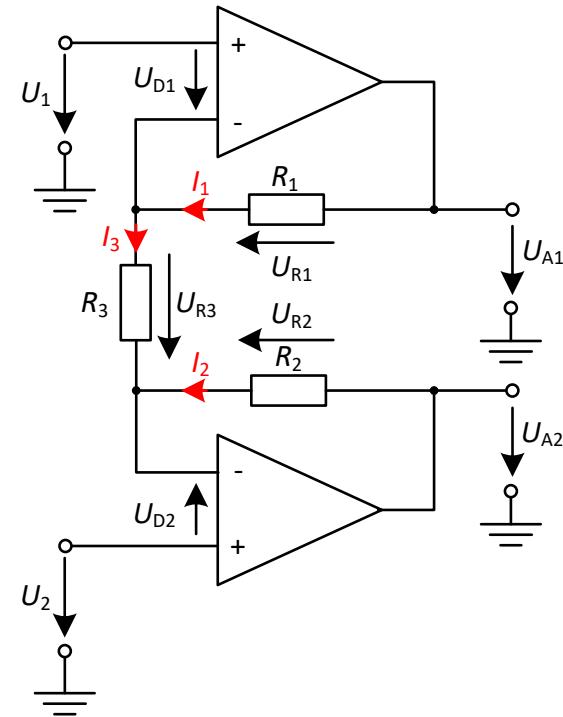
Einsetzen und umformen

$$(II) \rightarrow (III): (VI) \quad U_{A1} = I_1 \cdot (R_1 + R_3) + U_2 - U_{D2}$$

$$(I) \rightarrow (VI): (VII) \quad U_{A1} = \frac{R_1}{R_3} \cdot (U_2 - U_{D2}) - \left(\frac{R_1}{R_3} + 1 \right) \cdot (U_1 - U_{D1})$$

$$(I) \rightarrow (III): (VIII) \quad U_{A2} = I_2 \cdot (R_2 + R_3) + U_1 - U_{D1}$$

$$(II) \rightarrow (VIII): (IX) \quad U_{A2} = \frac{R_2}{R_3} \cdot (U_1 - U_{D1}) - \left(\frac{R_2}{R_3} + 1 \right) \cdot (U_2 - U_{D2})$$



Analoge Signalvorverarbeitung II

Instrumentierungsverstärker – Herleitung (2)

Aus Herleitung des Differenzverstärkers

$$(X) \quad U_A = \frac{(R_4 + R_6) \cdot R_7}{R_1 \cdot (R_5 + R_7)} \cdot U_{A2} - \frac{R_6}{R_4} \cdot U_{A1} + \left(\frac{R_6}{R_4} + 1 \right) U_{DS}$$

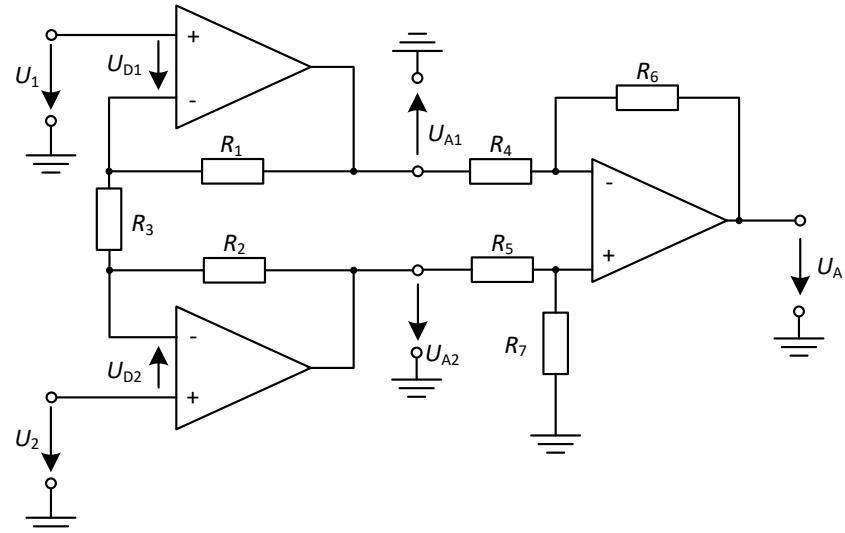
Von voriger Folie

$$(VII) \quad U_{A1} = \frac{R_1}{R_3} \cdot (U_2 - U_{D2}) - \left(\frac{R_1}{R_3} + 1 \right) \cdot (U_1 - U_{D1})$$

$$(IX) \quad U_{A2} = \frac{R_2}{R_3} \cdot (U_1 - U_{D1}) - \left(\frac{R_2}{R_3} + 1 \right) \cdot (U_2 - U_{D2})$$

Mit Vereinfachung $R_4 = R_5$ und $R_6 = R_7$:

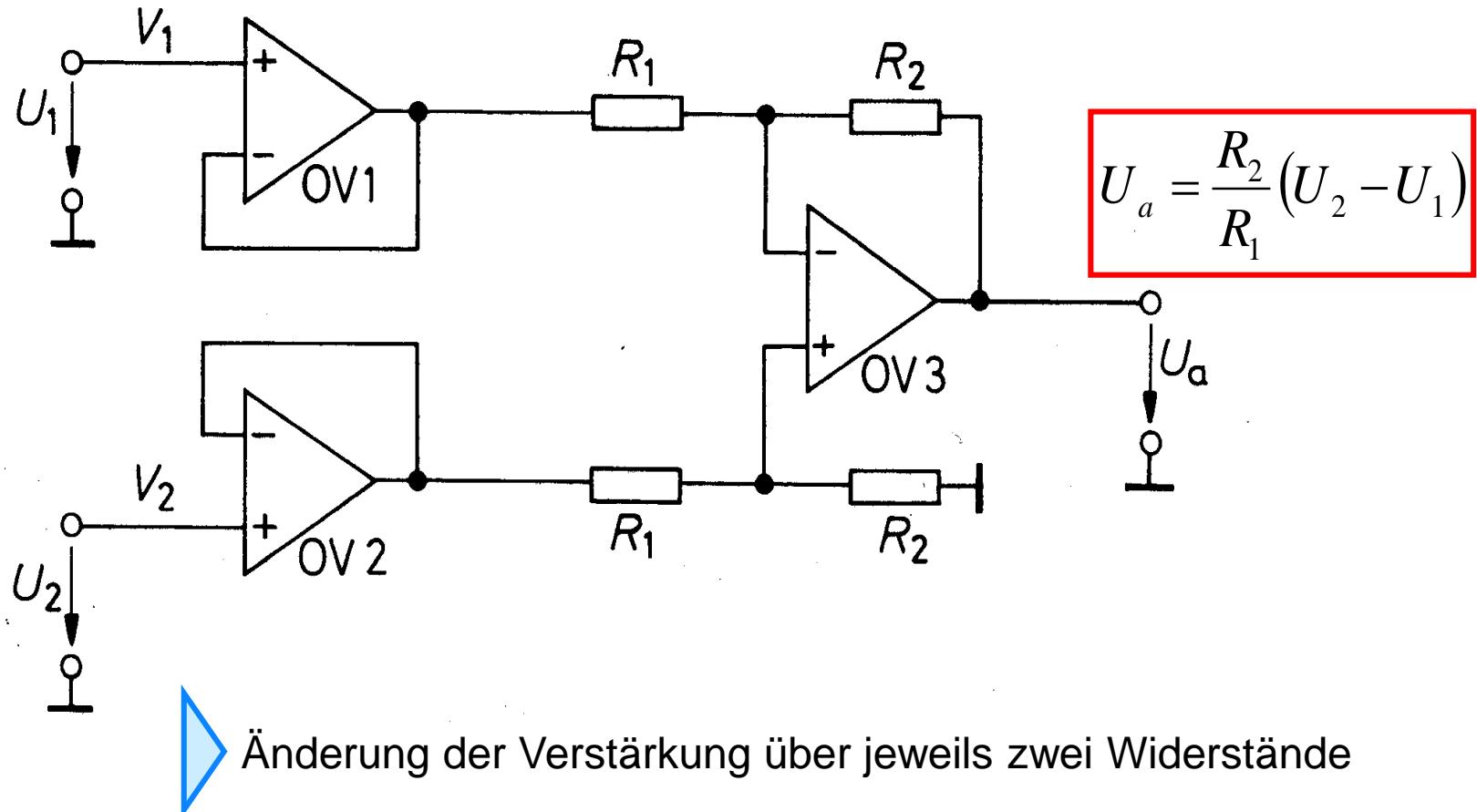
$$(VII)+(IX) \rightarrow (X): (XI) \quad U_A = \frac{R_6}{R_4} \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{R_3} + 1 \right) (U_2 - U_1) - \frac{R_6}{R_4} \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{R_3} + 1 \right) (U_{D2} - U_{D1}) + \left(\frac{R_6}{R_4} + 1 \right) U_{DS}$$



Mit $R_1 = R_2$ und unter Vernachlässigung der Offsetspannungsterme

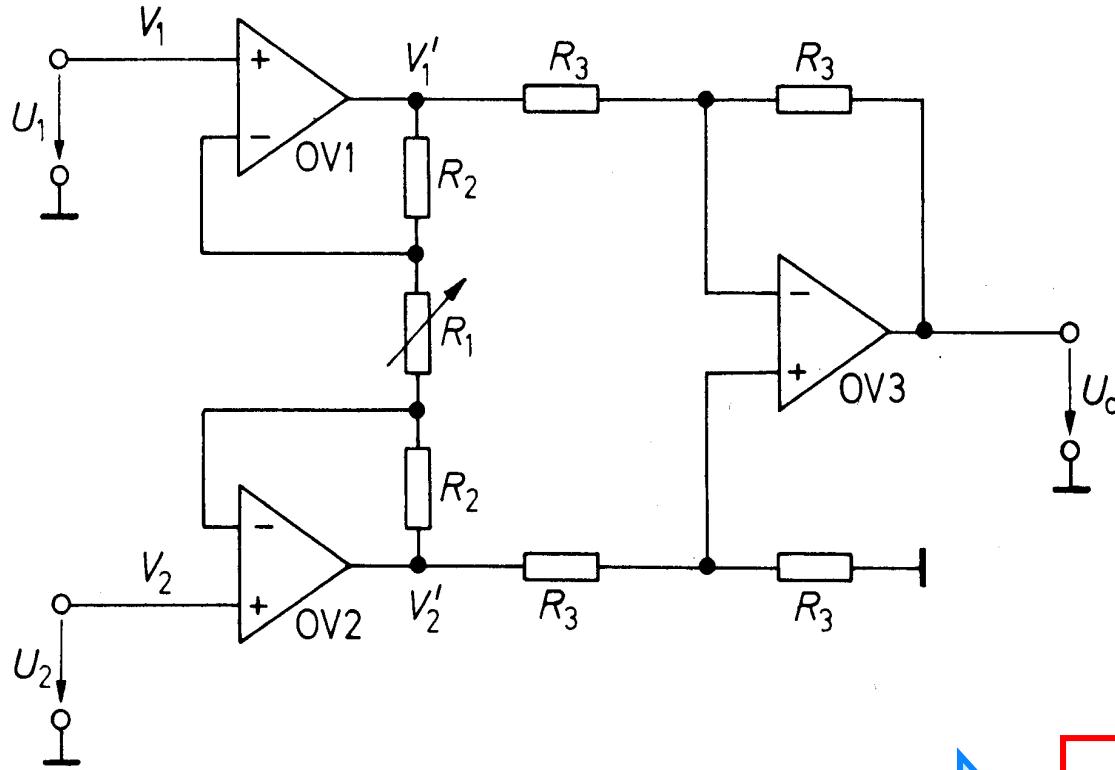
$$U_A = -\frac{R_6}{R_4} \cdot \left(1 + \frac{2R_1}{R_3} \right) (U_1 - U_2)$$

Beispielsweise für eine Brückenschaltung



Instrumentierungsverstärker – Spezialfall 2

Impedanzwandler: Elektrometersubtrahierer



$$I_{R1} = \frac{U_1 - U_2}{R_1}$$

$$V'_1 = I_{R1} (R_1 + R_2) + U_2$$

$$V'_2 = U_2 - I_{R1} R_2$$

$$U_a = V'_2 - V'_1$$

$$U_a = -I_{R1} (R_1 + 2R_2)$$



$$U_a = \left(1 + \frac{2 \cdot R_2}{R_1}\right) (U_2 - U_1)$$

Trägerfrequenzmessbrücke

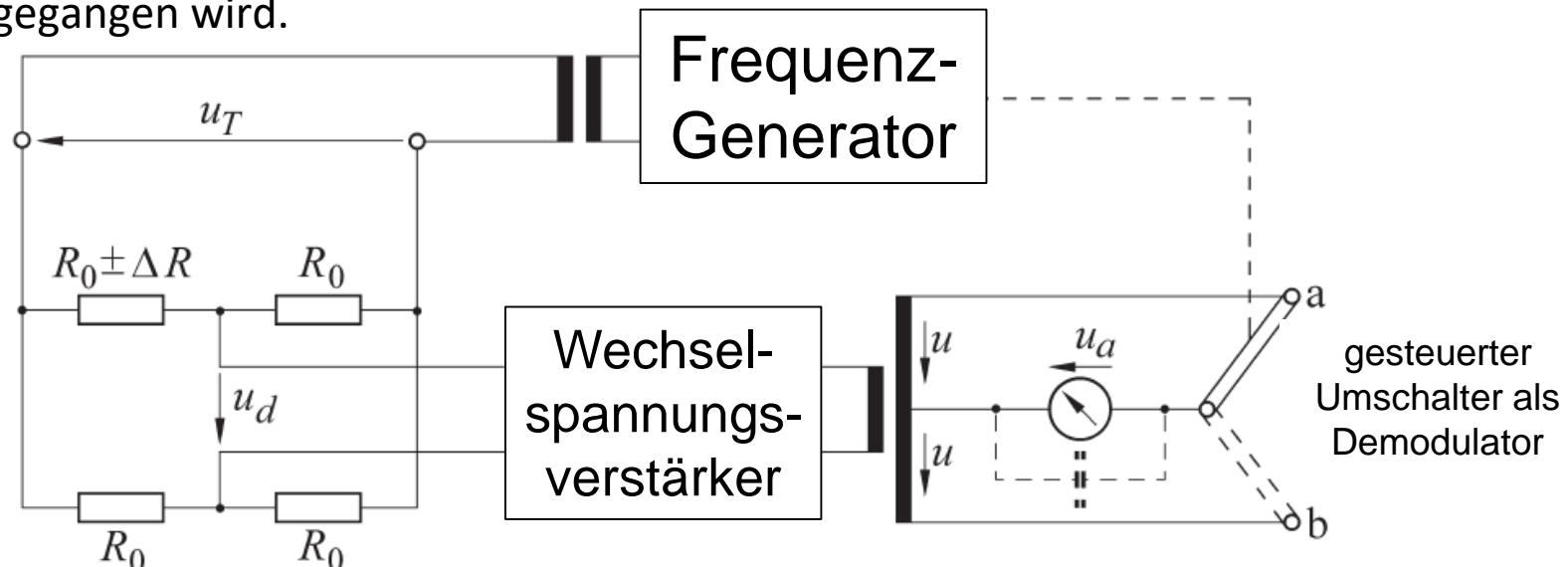
Auflösungsvermögen wird begrenzt durch

- Offsetdriften des Messverstärkers
- Thermospannungen (bei unterschiedlichen Materialien und Temperaturen an den Anschlusspunkten)
- Rauschen bei $f=0!$

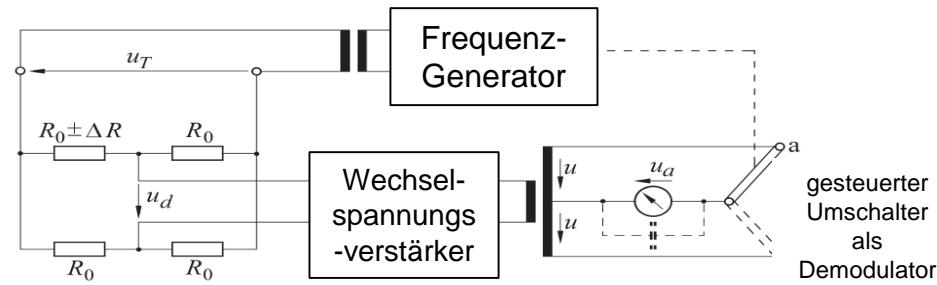
Offset- und Thermospannungen sind Gleichgrößen (=Gleichstrom / Gleichspannung)

Eine Störung durch Gleichgrößen kann vermieden und das

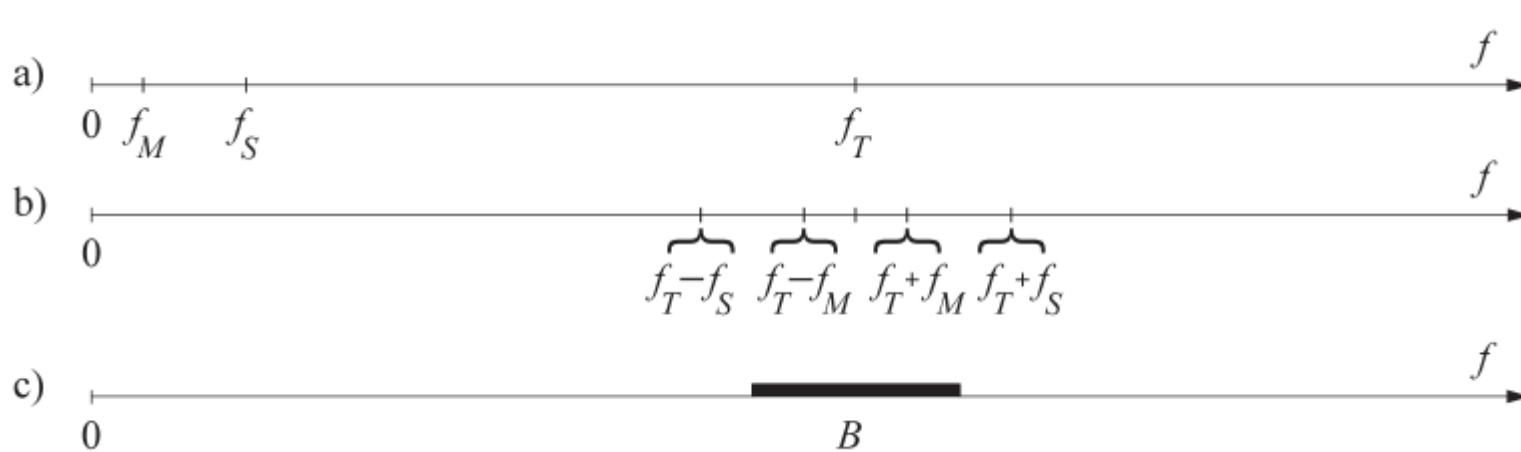
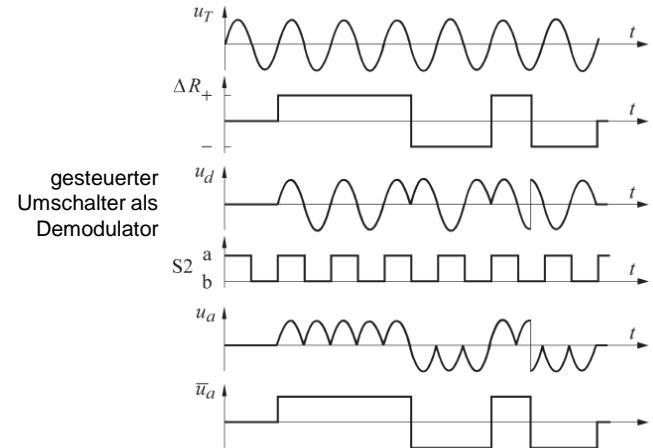
Auflösungsvermögen kann verbessert werden, wenn auf eine mit einer Wechselspannung gespeiste Brücke und eine Wechselspannungsmessung übergegangen wird.



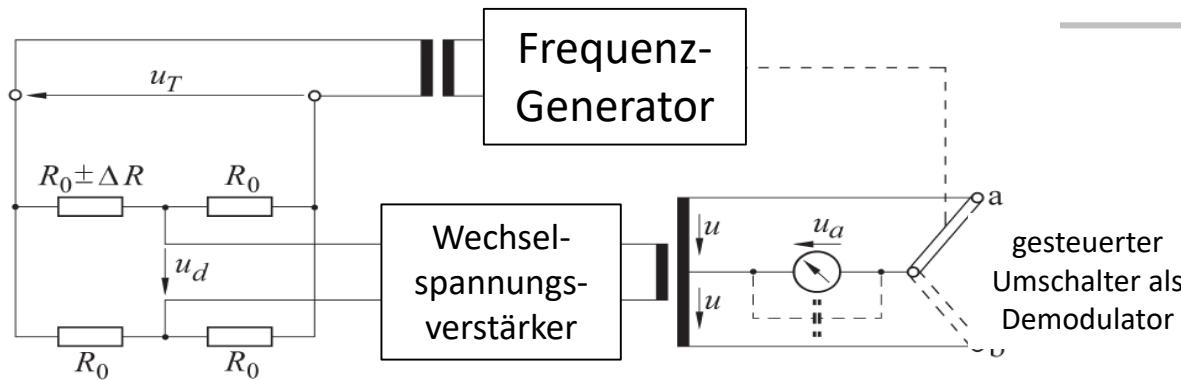
Unterdrückung von Störungen bei der Trägerfrequenzmessbrücke



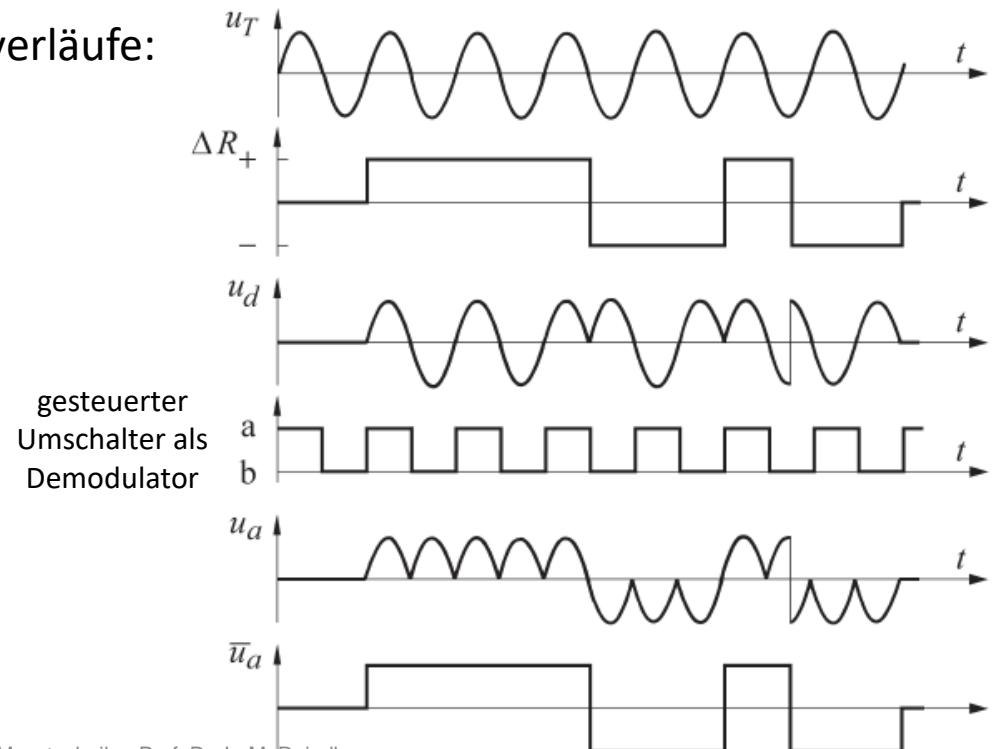
Signalverläufe:



Trägerfrequenzmessbrücke



Signalverläufe:



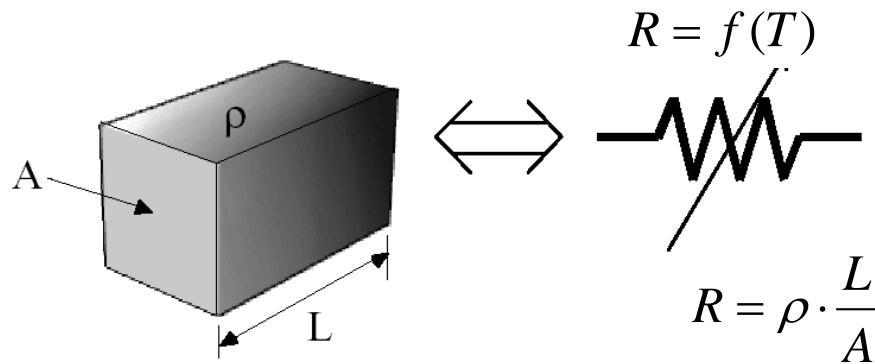
5.2 Widerstandssensoren

BEISPIELE VON WIDERSTANDSSENSOREN

Widerstandsthermometer (Thermoresistor)

- Der Widerstand von Leitern und Halbleitern ist temperaturabhängig wg.:
Leitungsmechanismus: Elektronengas „Drift / Diffusion“ von Elektronen durch den Leiter;
Elektronenbeweglichkeit ist temperaturabhängig
- Typische Sensormaterialien:
 - Metalle: z.B. Nickel oder Platin
 - Halbleiter: z.B. Silizium, Germanium oder Kohlenstoff
- **Metalle:**

$$\rho = \rho_G + \rho_p(T) \quad T \uparrow \rightarrow \text{Elektronenbeweglichkeit} \downarrow \rightarrow \text{Widerstand} \uparrow$$
- Bei **Halbleitern** ist zusätzlich die Ladungsträgerkonzentration abhängig von T (bei bestimmten keramischen Halbleitern beeinflussen noch andere Effekte die Ladungsträgerkonzentration)



- **Taylorreihenentwicklung** des elektrischen Widerstands in Abhängigkeit von der Temperatur α und β sind der lineare bzw. der quadratische Widerstandskoeffizient

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \dots]$$

- **Lineare Näherung:**

mit Temperatur ϑ in °C und $J_0 = 0$ °C $R(\vartheta) \approx R_0 [1 + \alpha \cdot \vartheta]$

- **Sensitivität:** $S = \frac{dR(\vartheta)}{d\vartheta} = R_0 \cdot \alpha$

- **Temperaturkoeffizient:** $\alpha = \frac{1}{R_0} \frac{dR}{d\vartheta}$

➤ Für Metalle α ca. 3500 bis 4250 ppm/K

Metallwiderstandsthermometer

Formeln nach DIN 43670:

- für **Pt100** im Temperaturbereich -200 °C - 850 °C

$$R(\vartheta) = 100[1 + 3,90802 \cdot 10^{-3} \vartheta - 0,580295 \cdot 10^{-6} \vartheta^2 - 4,27350 \cdot 10^{-12}(\vartheta - 100)\vartheta^3] \Omega$$

- für **Pt100** im Temperaturbereich 0 °C - 850 °C

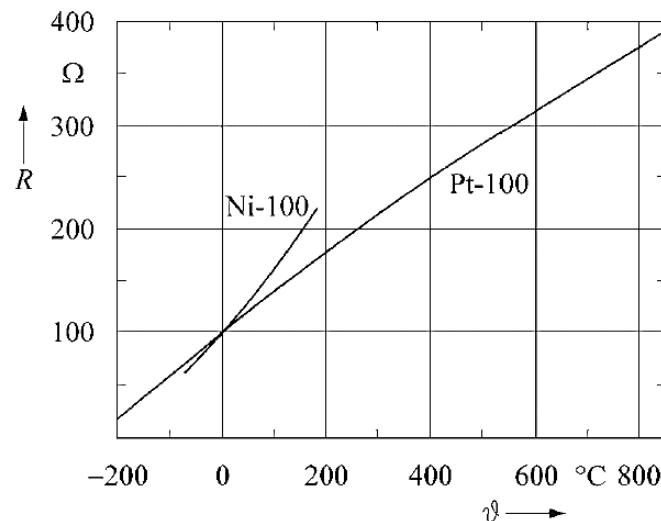
$$R(\vartheta) = 100[1 + 3,90802 \cdot 10^{-3} \vartheta - 0,580295 \cdot 10^{-6} \vartheta^2] \Omega$$

- für **Ni100** im Temperaturbereich -60 °C - 180 °C

$$R(\vartheta) = 100[1 + 0,5485 \cdot 10^{-2} \vartheta + 0,665 \cdot 10^{-5} \vartheta^2 + 2,805 \cdot 10^{-11} \vartheta^4] \Omega$$

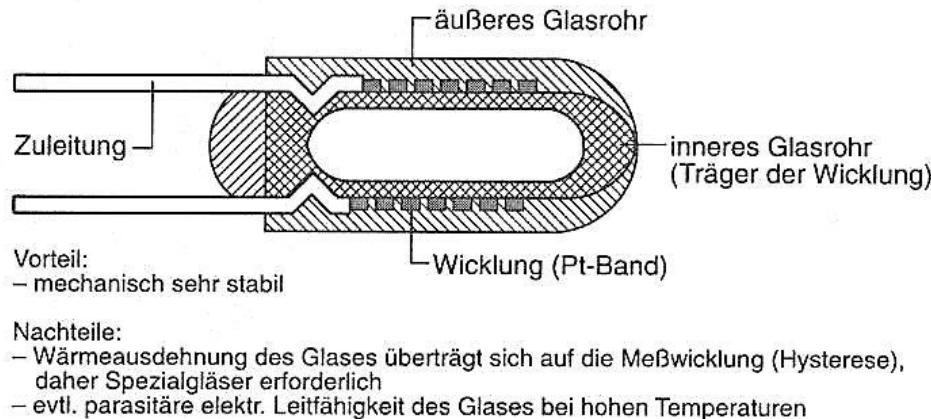
Definition:

Widerstandswerte von **Pt100** und **Ni100**
sind nach **DIN 43670** genormt und
betragen $R_0 = 100 \Omega$ bei 0°C.

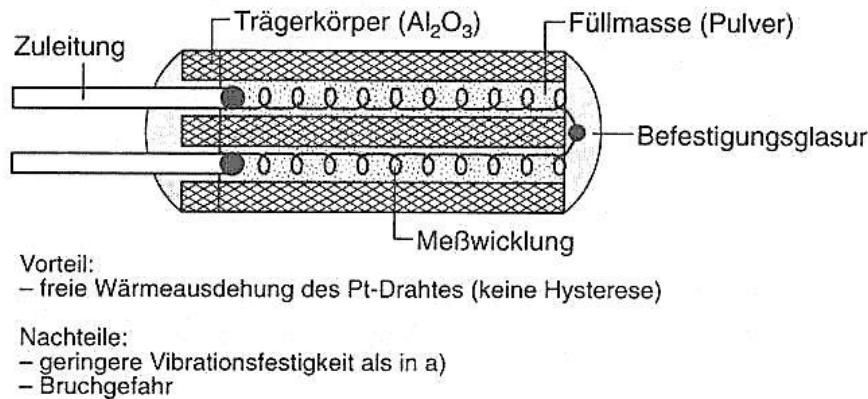


Metallwiderstandsthermometer: Aufbau

z. B. auf Glas aufgewickelter Platindraht, in Glasgehäuse eingeschmolzen



z. B. in Keramikgehäuse eingelagerte Drahtwendel

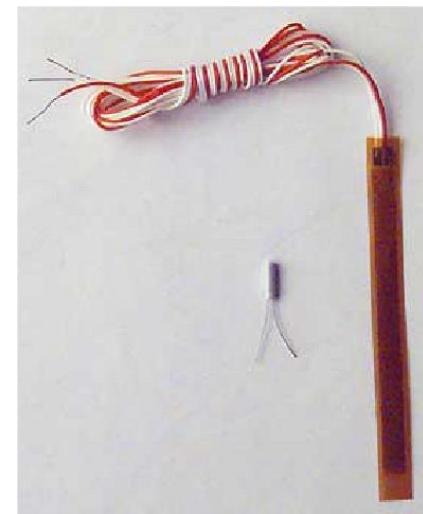
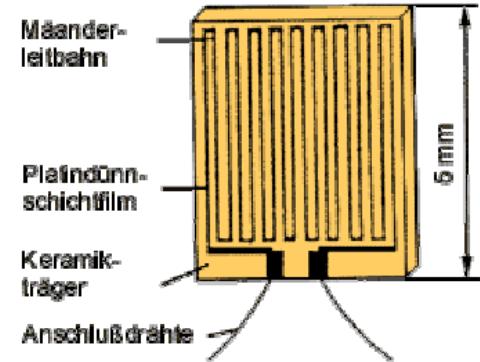
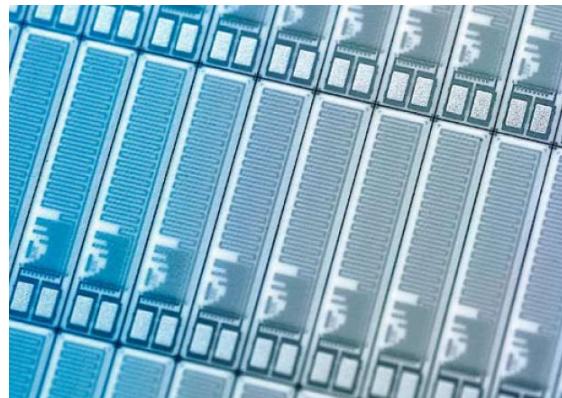


Metallwiderstandsthermometer: Eigenschaften

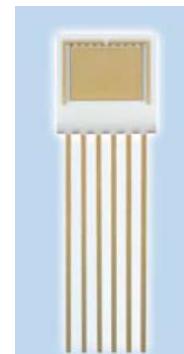
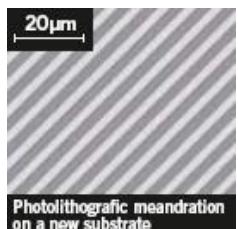
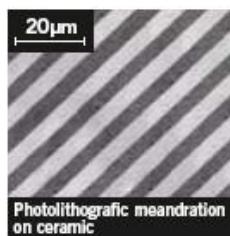
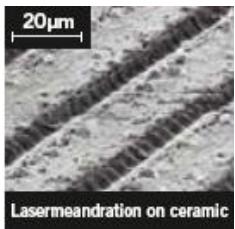
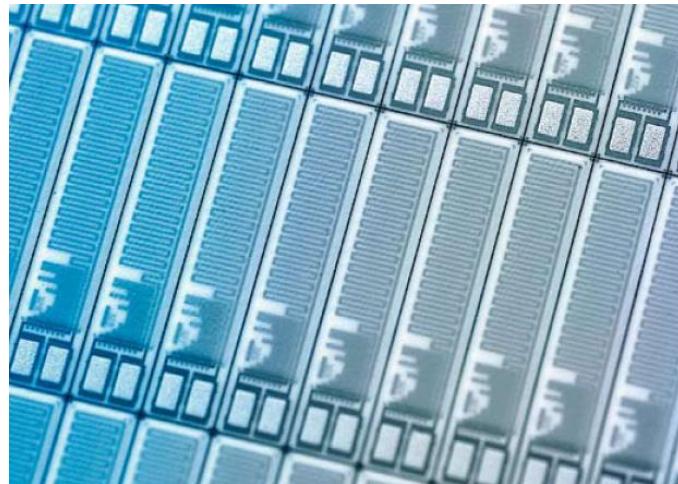
Eigenschaften von Metallwiderstandsthermometern:

- 😊 großer Temperaturbereich
- 😊 gute Langzeitstabilität
- 😊 breite Verfügbarkeit
- 😊 wenige Quereinflüsse

- 😢 hoher Preis
- 😢 Baugröße nicht beliebig klein
- 😢 Wärmeableitung



Bauformen von Metallwiderstandsthermometer



Medizintechnik,
bioverträglich



Prozesstechnik,
Druckunempfindlich
T bis 650°C



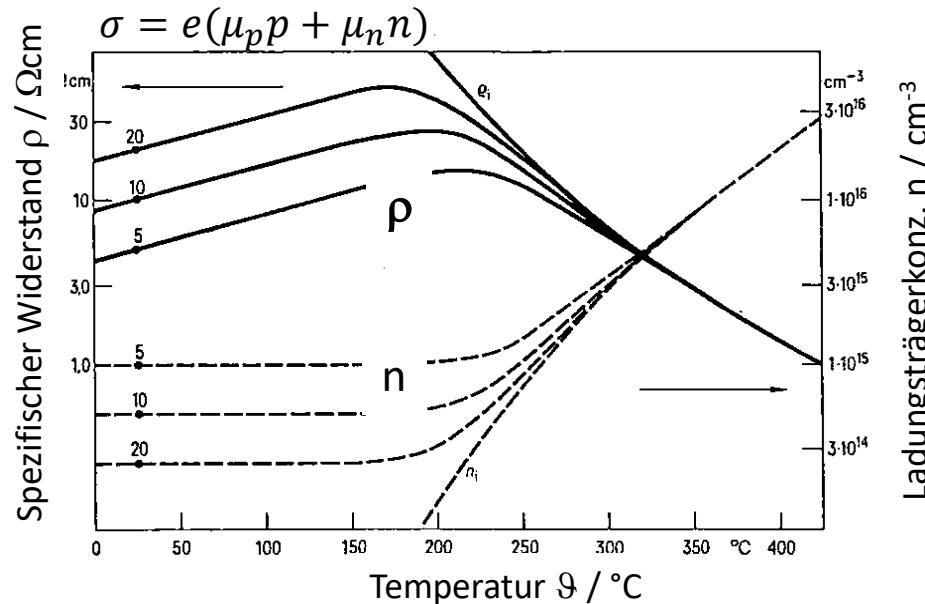
Kochfeld-
überwachung
T bis 450°C



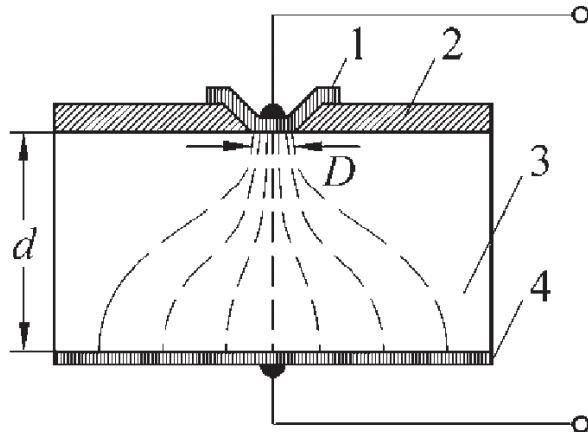
Kfz: Abgasnach-
behandlung,
T bis 1000°C

Temperaturgang des spezifischen Widerstands von Si

Ladungsträgerkonzentration
 n (---) und
spezifischer Widerstand
 ρ (—) von n-dotiertem Si
in Abhängigkeit von der Temperatur.

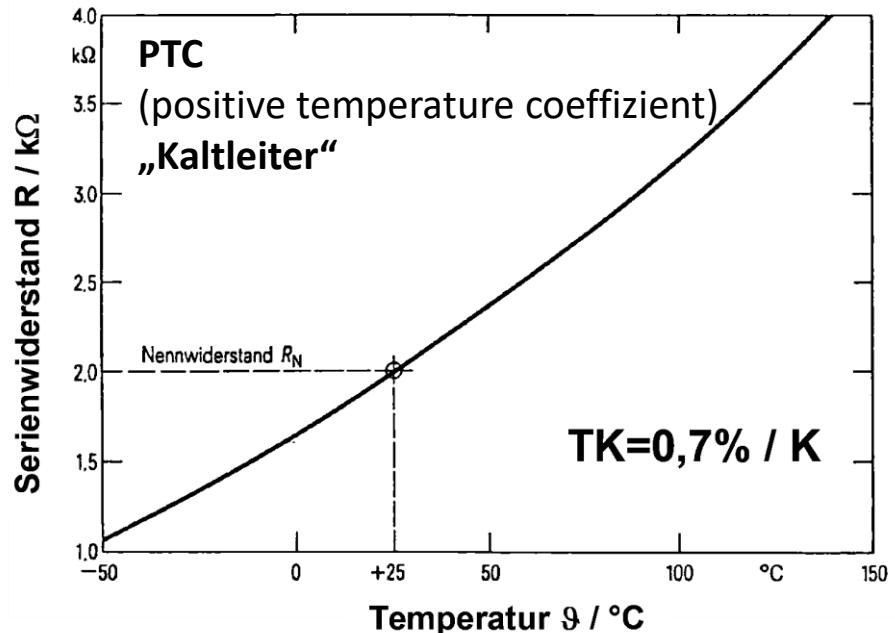


- von ca. -50 bis +150°C führt eine Erhöhung der Temperatur zu einer Verminderung der Ladungsträger-Beweglichkeit
→ der Widerstand des Silizium-Kristalls nimmt daher mit der Temperatur zu
$$R(\vartheta) = R_0[1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) + \beta(\vartheta - \vartheta_0)^2 + \dots]$$
- ab > 150 °C: mehr und mehr freie Ladungsträger bilden sich → der Widerstand nimmt ab
- Ein Si-Widerstandstemperatursensor enthält im Gegensatz zu Si-Dioden bzw. Si-Transistoren keinen pn-Übergang



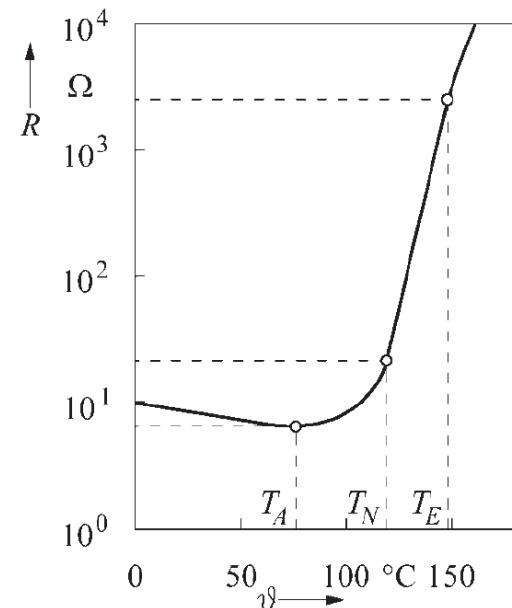
1, 4 Anschlusskontakte,
2 Passivierung mit Nitrid und Oxid
3 Si-Substrat

- Arbeitsbereich / Sättigungsbereich: ca. -50 °C bis 150 °C
- Vorteile: klein, preiswert, schnelle Ansprechzeiten
- Quereffekt: rel. hohe Querempfindlichkeit gegenüber mech. Spannungen wegen des vergleichsweise großen piezoresistiven Effekt



Keramische PTC-Keramikwiderstände (Kaltleiter)

- **Material** bestimmte halbleitende ferroelektrische Keramikwerkstoffe (z.B. Bariumtitanat)
- **Mechanismus** oberhalb der Curie Temperatur verändert sich Kristallstruktur
→ in einem schmalen Temperaturbereich exponentieller Anstieg des Widerstandes
- **Kennlinie** $R(T) = R_N e^{B \cdot (T - T_N)}$
- **TK** sehr starker Temperatureffekt, $\alpha \approx 25\% \text{ pro K}$
$$\alpha_N = \frac{1}{R(T)} \frac{\partial R}{\partial T} = B$$
- **Eigenschaften** wie Keramik NTC aber
 - 😊 sehr hoher TK
 - 😢 rel. kleiner Arbeitsbereich
 - 😢 große Streuung in den Materialkonstanten
 - 😢 schlechte Langzeitstabilität
- **Anwendung** Temperaturüberwachung



PTC



- **Material** bestimmte halbleitenden Keramikwerkstoffe
- **Leitungsmechanismus** wiederholter Wechsel („Hopping“) der Elektronen von Wirtsatomen zu Wirtsatom verursacht Stromtransport
- **Temperatureffekt** Hopping-Effekt ist thermisch aktiviert → Leitfähigkeit bei hohen Temperaturen besser ist als bei tiefen
- **Kennlinie** B Materialkonstante, mit $1500 \text{ K} < B < 7000 \text{ K}$
Referenztemperatur T_n häufig 20°C
$$R(T) = R_N e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_N} \right)}$$
- **Temperaturkoeffizient** deutlicher Temperatureffekt α ca. 2 – 5% pro K
$$\alpha_N = \frac{1}{R(T)} \frac{\partial R}{\partial T} = - \frac{B}{T^2}$$
- **Eigenschaften** Arbeitsbereich: $-55^\circ\text{C} - 350^\circ\text{C}$
 - 😊 hoher Widerstand, geringe Eigenerwärmung
 - 😊 Hoher Temperaturkoeffizient
 - 😊 kleine Wärmekapazität und kurze Ansprechzeiten
 - 😊 niedriger Preis
 - 😢 Fertigungsreproduzierbarkeit
 - 😢 Verunreinigungsempfindlich
 - 😢 nichtlineare Kennlinie

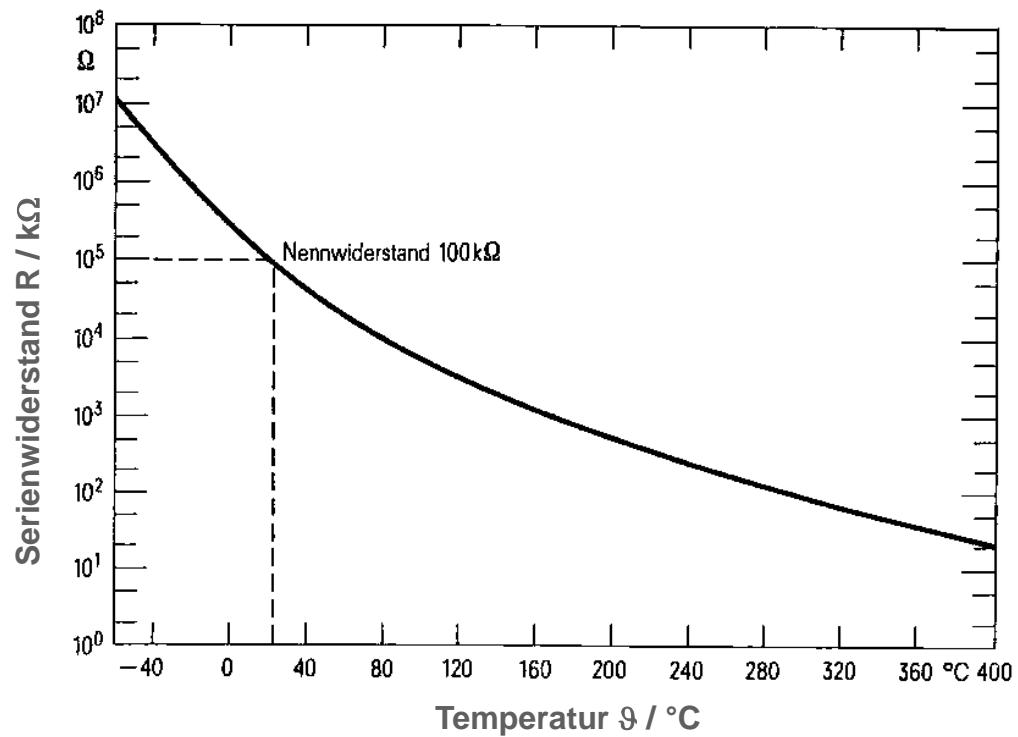
Kennlinie NTC-Keramikwiderstand

$$R(T) = R_N e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_N} \right)}$$

sehr nichtlineare Kennlinie
(exponentieller Verlauf)

Steinhart-Hart-Equation:

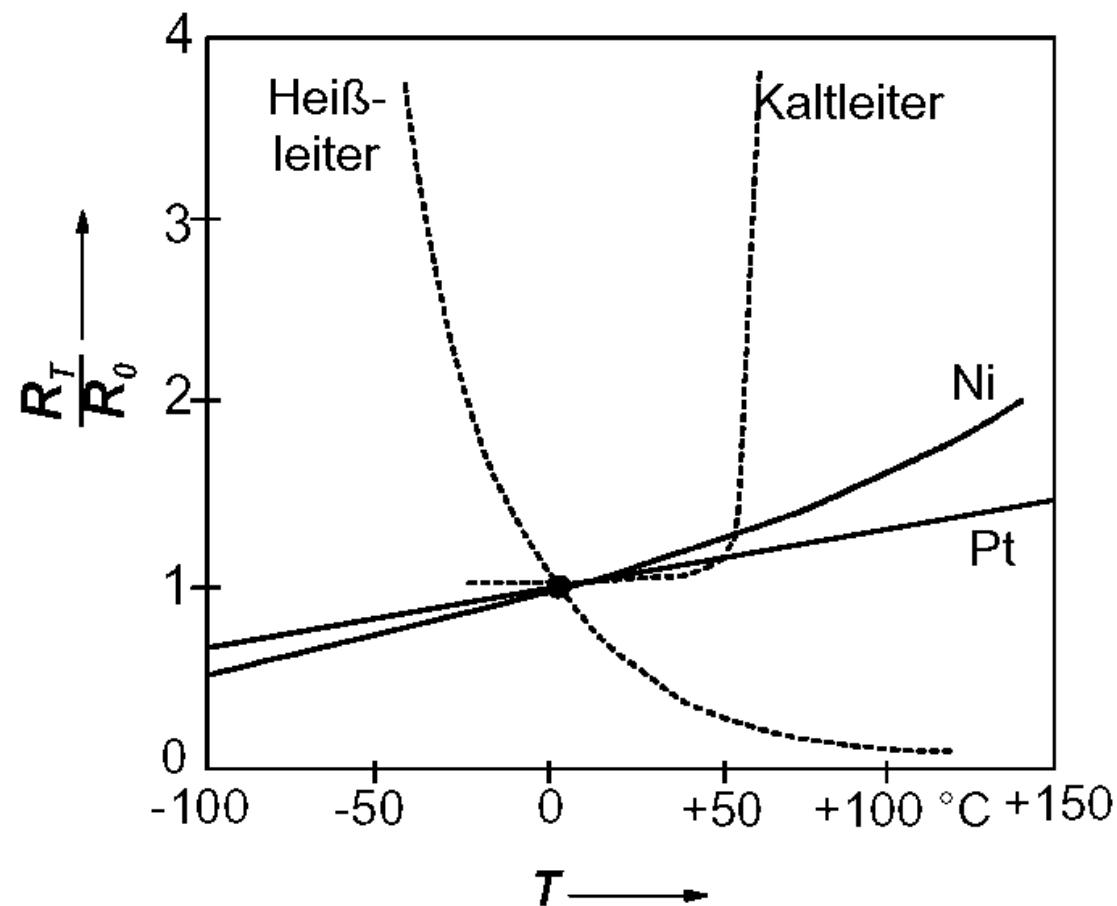
$$\frac{1}{T} = A + B \cdot \ln(R) + C \cdot (\ln(R))^3$$



NTC



Überblick und Vergleich der Kennlinien



Temperaturmessverfahren – Vergleich

	Widerstandsthermometer	Thermoelement
Abmessungen	rel. große Sensorfläche	kleine Sensorfläche möglich
Anschlussleitungen	Instrumenten-Kupferleitung	Thermomaterial
Genauigkeit	sehr gut	sehr gut
Langzeitstabilität	ausgezeichnet	befriedigend
Robustheit	gut	sehr gut
Preis	relativ teuer	preiswert
Selbsterwärmung	muss u. U. berücksichtigt werden	tritt nicht auf
Temperaturbereich	sehr groß möglich	sehr groß möglich
Vergleichsstelle	nicht erforderlich	erforderlich
Versorgung mit Messstrom	erforderlich	erforderlich

Längen- und Volumenausdehnung von Stoffen z. B. Volumenänderung von Flüssigkeiten und Gasen

Wechsel charakteristischer Zustände z. B.: **Schmelzpunkte, Erstarrungspunkte, Siedepunkte**

Änderung von charakteristischen Eigenschaften z. B. Änderungen

- von Transparenz, Reflexion, Farbe
- des elektrischen Widerstandes,
- der Strahlungsemission,
- des Elastizitätsmoduls.

- Der Sensorkörper muss (bei kontaktierenden Sensoren) die zu messende Temperatur annehmen.
 - Die Herstellung des **thermodynamischen Gleichgewichts** erfordert einen Energieaustausch und beansprucht hierfür Zeit. Damit ist u.a. auch festgelegt, wann der Sensor die richtige Temperatur anzeigt bzw. welche Messabweichung zu erwarten ist (s. dynamische Messabweichung).
- Der Sensor kann Temperatur des Messobjekts verändern
(wenn Wärmekapazität des Sensors gegenüber der des Messobjekts nicht vernachlässigbar ist)
- Die Sensoren führen in der Regel über ihre Zuleitungen Wärmeenergie nach außen ab und verändern die Temperatur des Messobjektes.

Temperaturskalen

Temperatureinheit – Kelvin [K]

- Die Einheit 1 K (1 Kelvin) ist definiert als der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser.

Celsius-Skala [°C]:

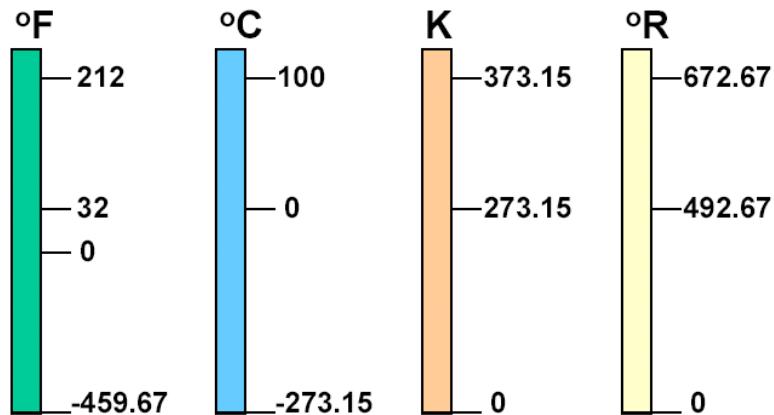
- Umrechnung von Kelvin T in Grad Celsius T_C : $T_C/^\circ\text{C} = T/\text{K} - 273,15$

Fahrenheit-Skala [°F]:

- ist in englischsprachigen Ländern (insbes. USA) gebräuchlich.

Rankine-Skala [°R]:

- Fahrenheit-Skala aber Nullpunkt als absoluter Nullpunkt definiert



Umrechnungen:

$$\frac{T_C}{^\circ\text{C}} = \frac{5}{9} \left(\frac{T_F}{^\circ\text{F}} - 32 \right)$$

$$\frac{T}{\text{K}} = \frac{5}{9} \left(\frac{T_F}{^\circ\text{F}} + 459,67 \right) = \frac{5}{9} \frac{T_R}{^\circ\text{R}}$$

Messbereich verschiedener Temperatursensoren

Aufnehmer	Anwendungsbereich	Empfindlichkeit bei 25 °C [mV/K]	TK bei 25 °C [K ⁻¹]	Kennlinie										
					-200	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	°C
(NiCr-Ni)-Thermoelement		0,04		≈ linear										
Si-Sensor mit pn-Übergang		1		linear										
Ni-Widerstand			+0,006	≈ linear										
Pt-Widerstand			+0,004	≈ linear										
NTC-Widerstand			-0,040	exponentiell										
PTC-Widerstand			+0,250	exponentiell										
Si-Ausbreitungswiderstand			+0,008	fast linear										
Quarz-Thermometer		1,5 kHz/K	0,00009	≈ linear										

Anwendungsbereiche von elektrischen Berührungsthermometern

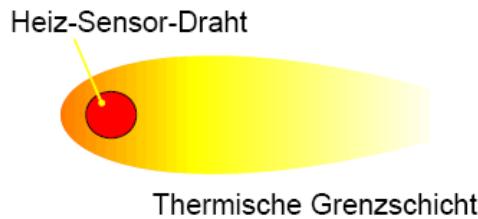
Revenues 2005	\$2.81 billion
Price Range	\$1 - \$ 10,000
Replacement rate	2 - 10 years

Industry	percentage / %
Chemical / Petrochemical	21
Metals	19
Rubber / Plastics	11
Automotive	6
Telecommunications	6
Computer	5
Pharmaceutical	5
Medical	4
Food and beverages	4
Others	19

Thermische Massenstrommessung (Anemometer)

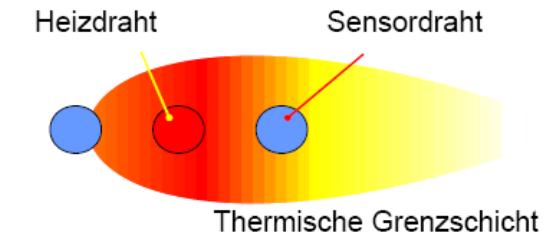
Bei der thermischen Massenstrommessung wird über Temperaturfühler die Abkühlung eines Sensors gemessen. Der Heizstrom zur Aufrechterhaltung der Temperatur ist ein Maß für die Strömungsgeschwindigkeit.

Hitzdraht

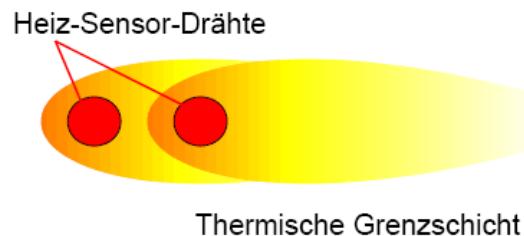


Misst die elektrische Leistung
zum Erhalten der konstanten
Temperatur

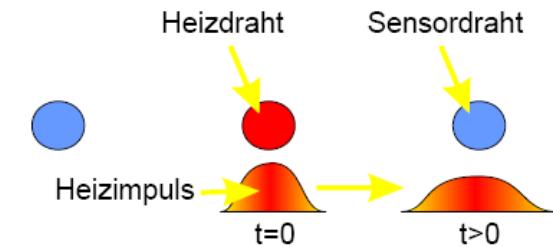
Wärmeübertragung



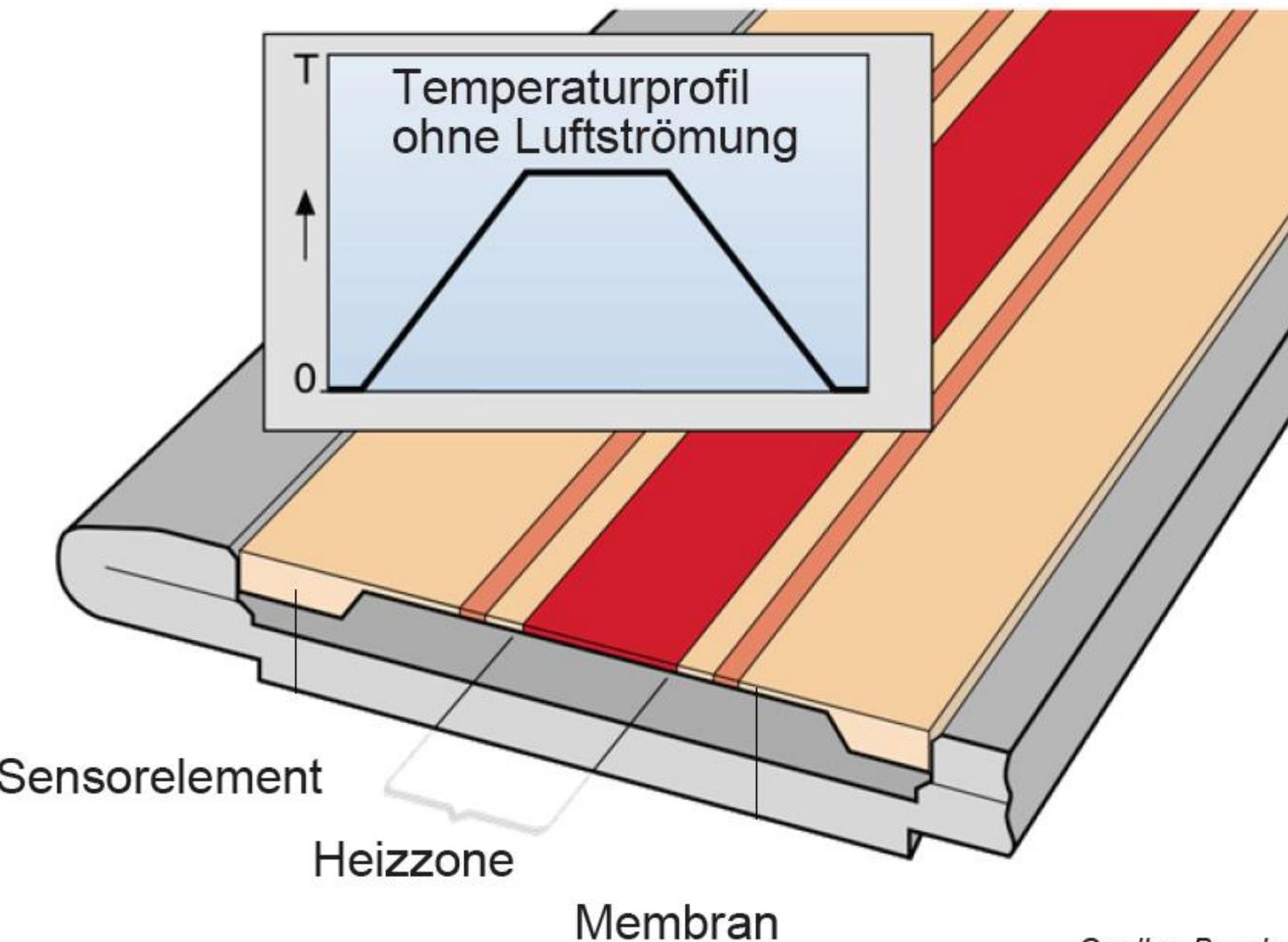
Misst die Wärmeübertragung vom
Heizdraht zu den Sensordrähten oder
das Gleichgewicht zwischen zwei Heiz-
Sensor-drähten



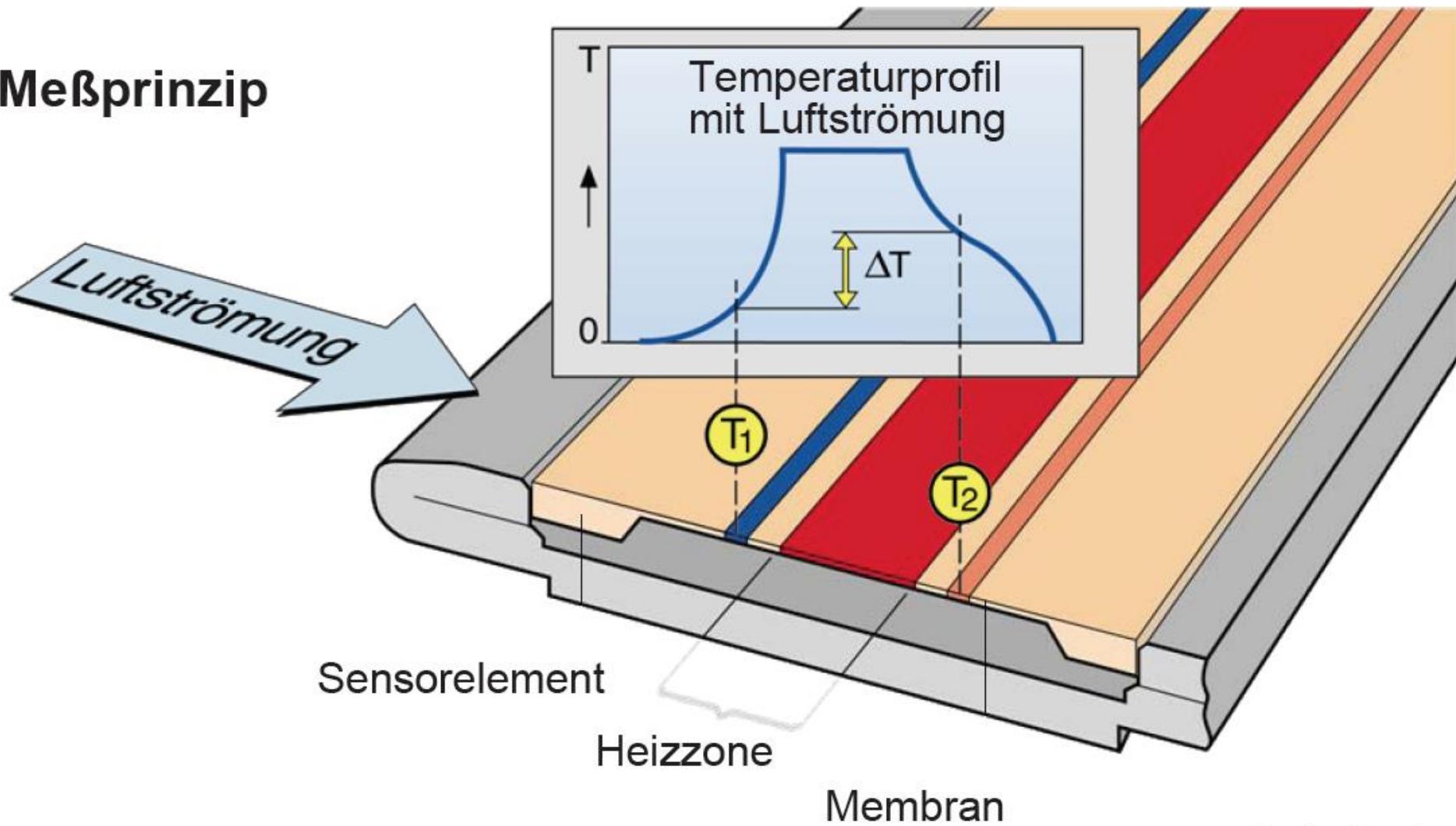
Zeitverzögerung



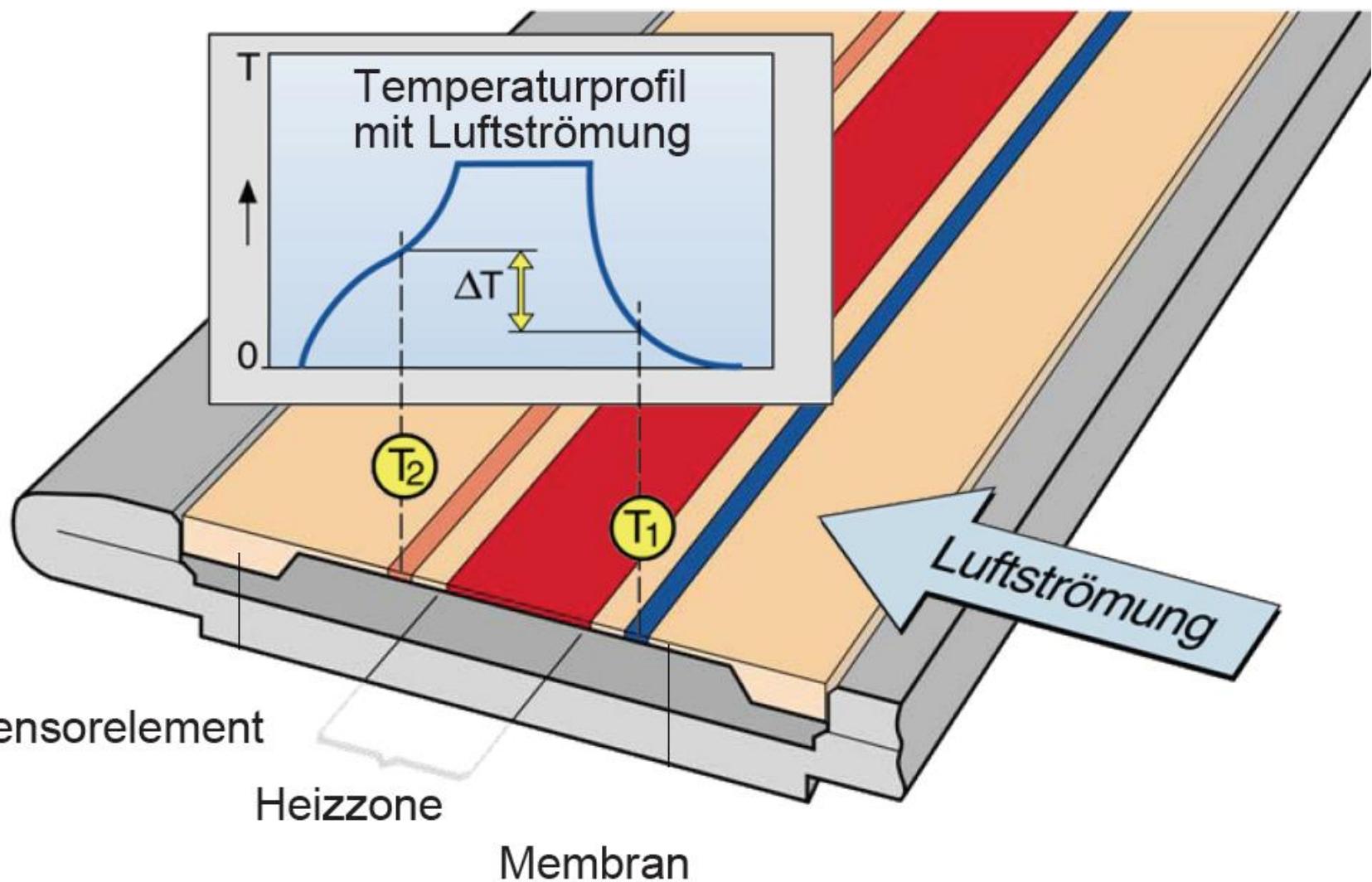
Misst die Zeit zwischen der
Erzeugung und der Sensierung
eines Heizimpulses an einer definiert
entfernten Stelle

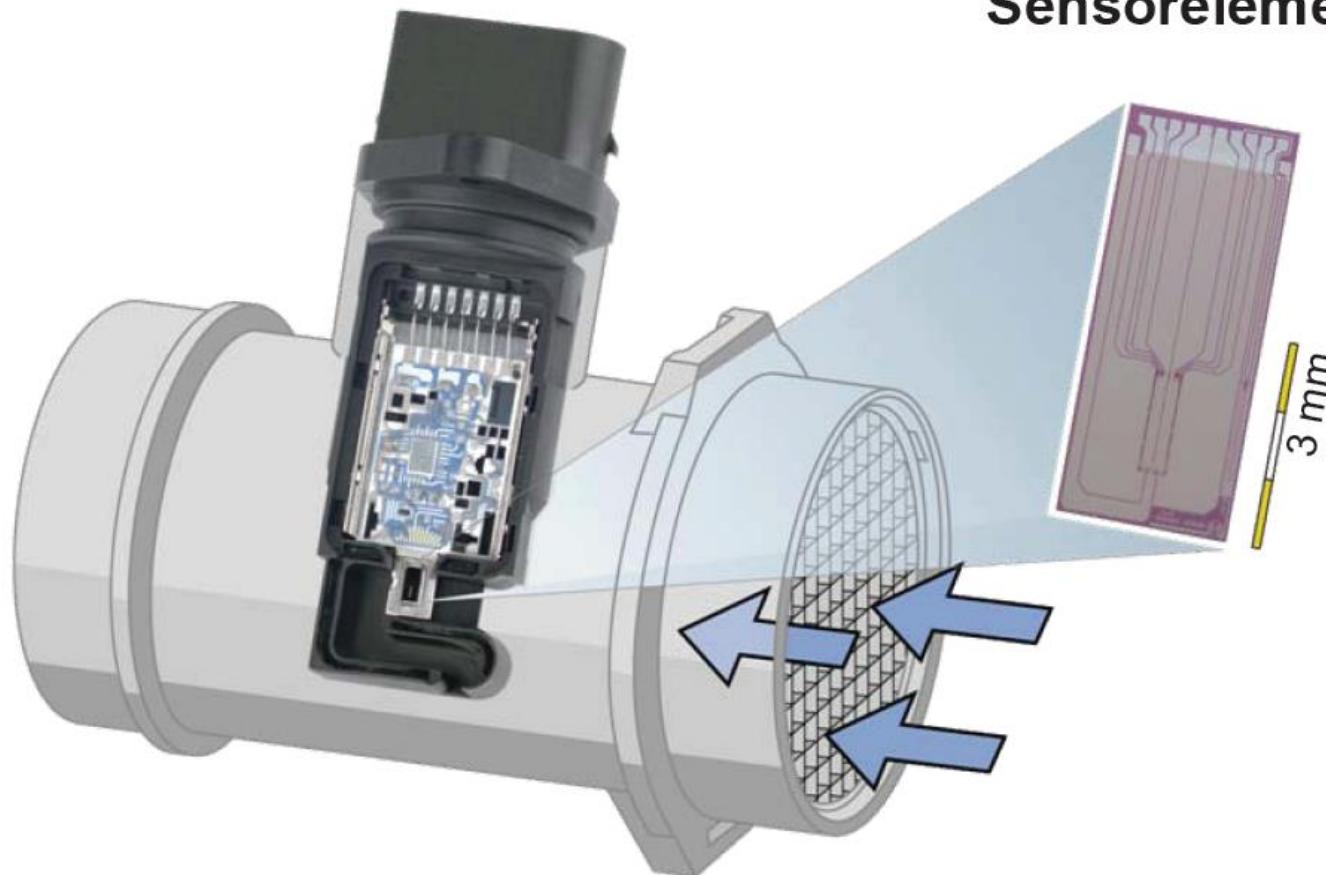


Meßprinzip

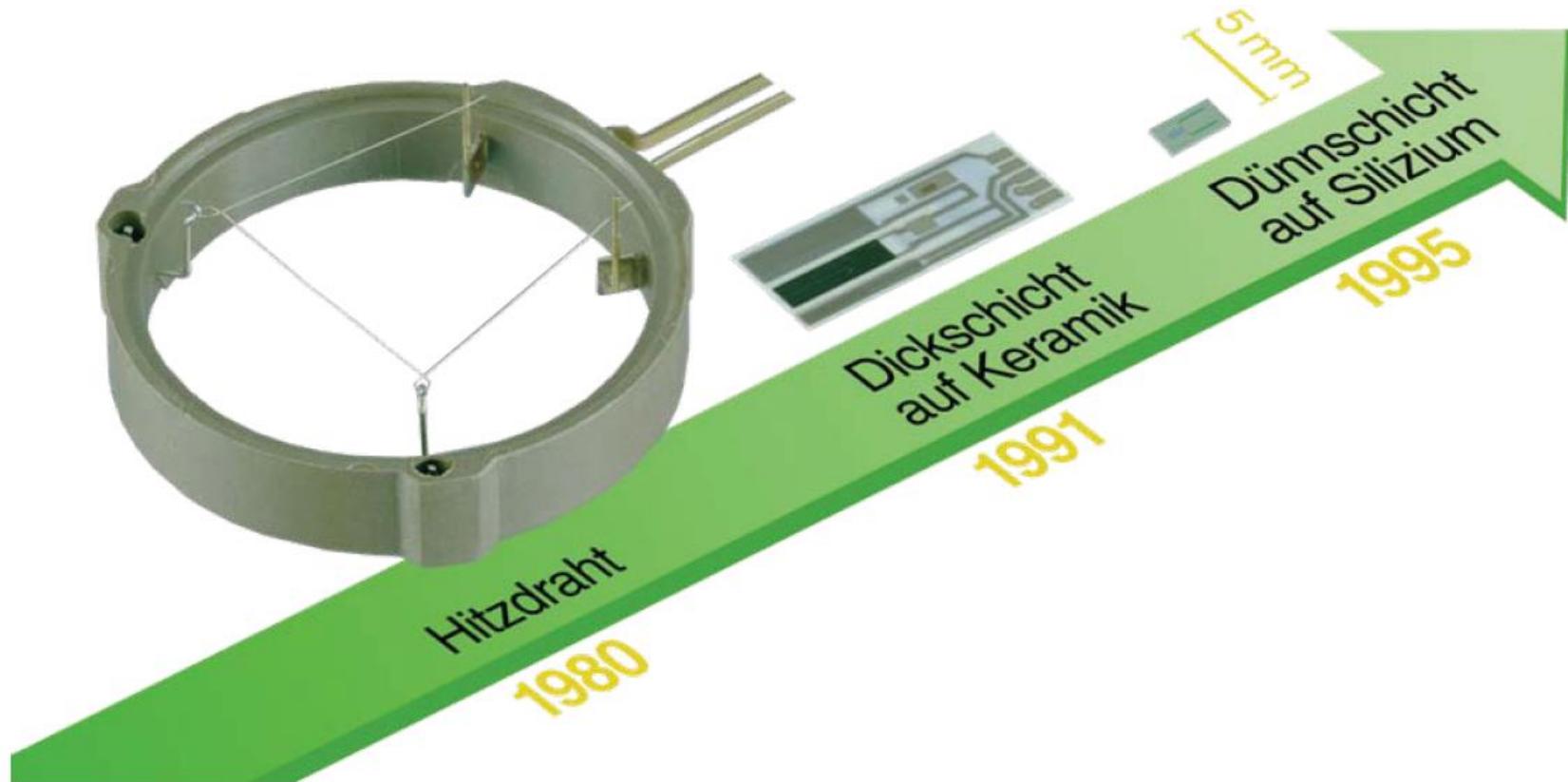


Quelle: Bosch





Quelle: Bosch

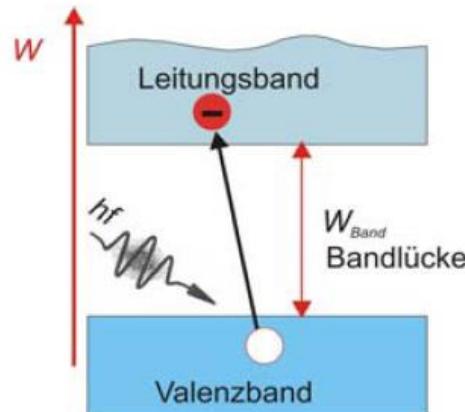


Quelle: Bosch

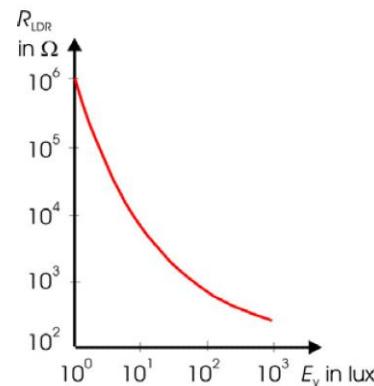
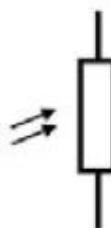
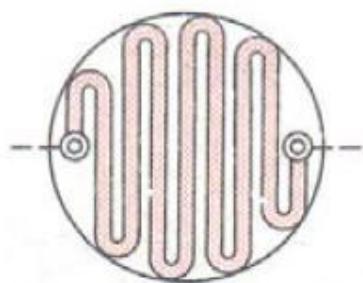
Photowiderstände

Innerer Fotoeffekt:

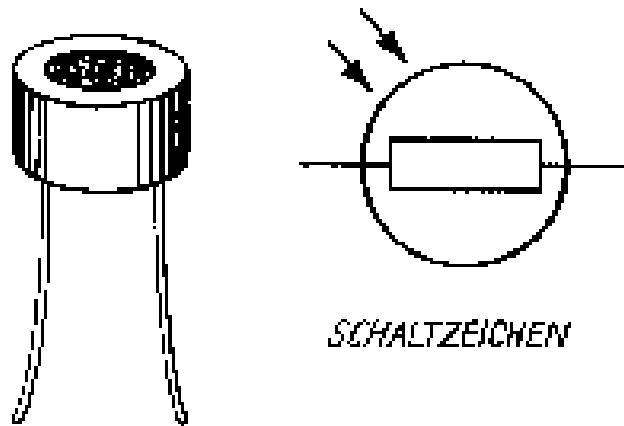
- Der innere Fotoeffekt beruht auf der **Erzeugung von quasifreien Ladungsträgern** durch die Energie der einfallenden Photonen.



- Dadurch wird die **Trägerdichte erhöht**, und es **verbessert sich die Leitfähigkeit bei Fotowiderständen**.



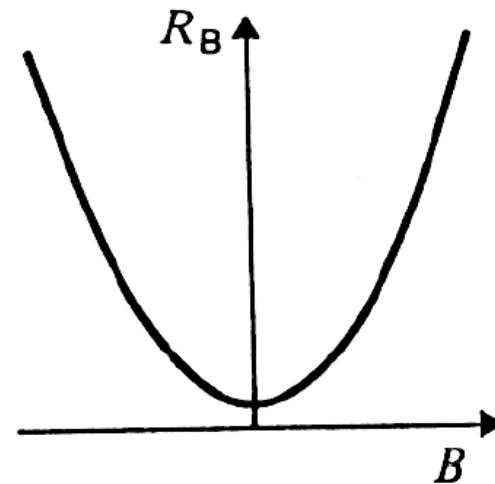
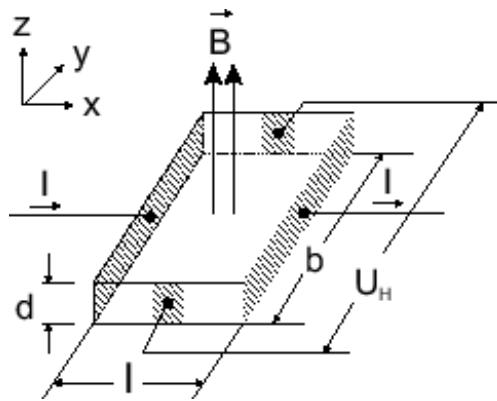
- Niedrigdotierte Verbindungshalbleiter als polykristalline Schicht auf Glassubstrat.
- Fotowiderstände besitzen einen Dunkelwiderstand im MW-Bereich.
- Bei Beleuchtung werden zusätzliche Ladungsträger generiert → der Widerstand sinkt



Magnetische Effekte

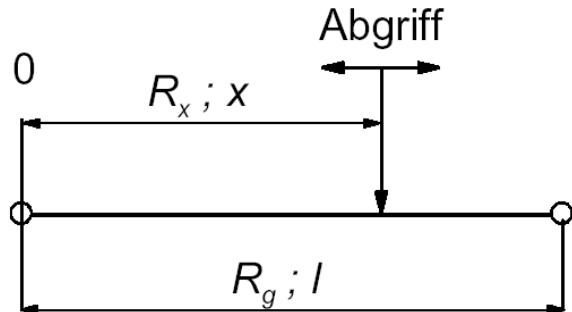
Galvanomagnetische Effekte in Halbleitern (Hall-und Gauss-Effekt):

- Der **Gauss-Effekt** hat die gleiche Ursache wie der Hall-Effekt, er **bezeichnet aber die zusätzliche Widerstandsänderung**, die durch die Ablenken der Stromdichtevektoren (gekrümmte Bahnen) bei einer magnetischen Induktion entsteht (magnetfeldabhängiger Widerstand; technische Realisierung z.B. Feldplatte).
- Beide Effekte sind geeignet, **zeitlich konstante Magnetfelder zu detektieren bzw. zu messen.**



- Widerstandsmessfühler sind passive Sensoren. Zu ihrer Auswertung ist eine Hilfsenergie erforderlich.
- Der elektrische Widerstand R ist abhängig von der Leiterlänge l , dem Leiterquerschnitt A und dem spezifischen Widerstand des Leiters ρ .
- Beim Potentiometer wird die wirksame Leiterlänge durch einen Schleifkontakt variiert.
- Beim Dehnmessstreifen mit Konstantan-Mäander wird die Leiterlänge durch Dehnung verändert, zugleich wird durch die Querkontraktion der Leiterquerschnitt verändert. Beide Einflüsse addieren sich zur Änderung des Widerstands. Der Faktor k beschreibt das Verhältnis von relativer Widerstandsänderung und Dehnung. Wäre nur die Längenänderung wirksam, dann wäre der Faktor $k = 1$. Durch die Verwendung von Konstantan als Leitermaterial wird der Temperatureinfluss auf die Widerstandswerte minimiert.
- Verwendet man anstelle des metallischen Leiters einen Halbleiter, dann wird auch der spezifische Widerstand durch die Dehnung beeinflusst. Bei Silizium erreicht man je nach Dotierung Faktoren von -100 bis +120. Durch die Kombination von n- und p-dotiertem Silizium auf einem Dehnmessstreifen kann man die Wirkungen summieren und erreicht $k = 220$.
- Will man nur die Zug/Druck-Spannungen, nur Biege-Spannungen oder nur Torsionsspannungen messen, dann verschaltet man jeweils vier Dehnmessstreifen und kann damit zugleich die Temperatureinflüsse kompensieren.

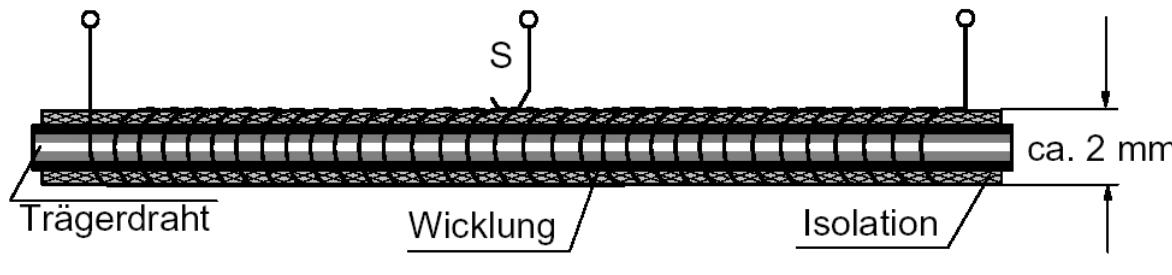
Prinzip:



$$R_x = \frac{\rho \cdot x}{A}$$

ρ : spezifischer Widerstand

Ausführungsbeispiel: Schleifdraht-Längenfühler:



Schleifer-Position bestimmt den zur gemessenen Länge proportionalen Widerstandswert
Widerstandsdräht auf einen mit Lack isolierten Trägerdraht gewickelt
Stromabnehmer (Schleifer): Drahtbürsten aus Platin-Iridium oder besondere Gold-Legierungen.

Dehnungsmessstreifen - Historie

- Dehnungsmessstreifen (DMS) von A. C. Ruge 1938 erfunden.
- DMS besteht aus dünnen Leiterbahnen (zumeist meanderförmiges Messgitter), die auf Trägermaterial aufgebracht sind
- DMS werden fest mit einer Werkstücks-Oberfläche verklebt.
- Bei mechanischen Spannungen verändern DMS ihren Widerstand.
- Zum Messen der sehr kleinen Widerstandsänderungen sind spezielle analoge Messschaltungen erforderlich.
- Neben der Größe und Richtung mechanischer Spannungen sind auch die damit verbundene Größen wie Weg, Kraft, Druck oder Beschleunigung messbar

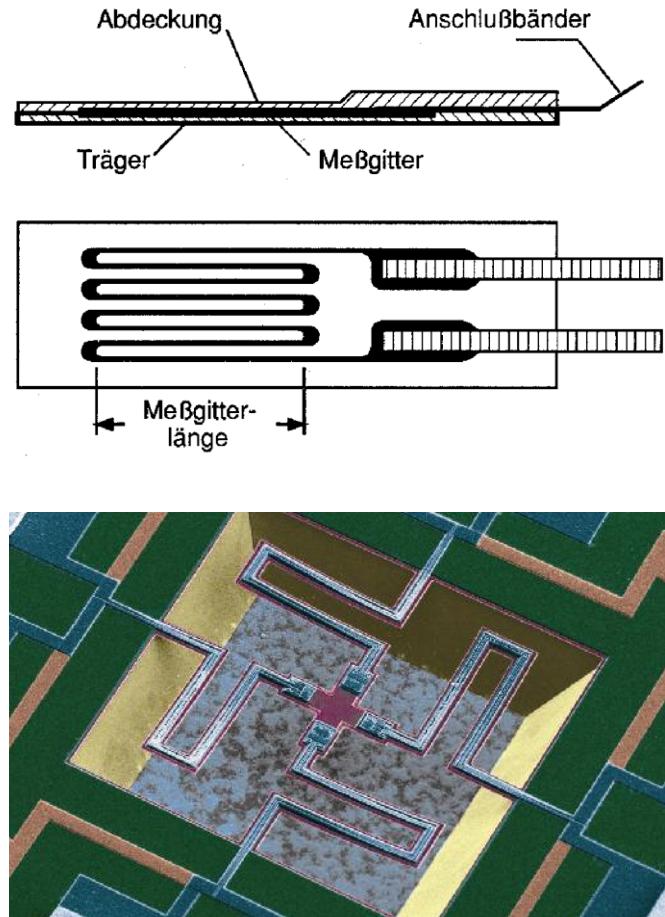


Bild: Piezo resistive Dehnungssensoren in MEMS-Technik (Prof. Paul)

Bei mechanischer Belastung (z. B. Dehnung) eines Drahtes (Metall) vergrößert sich dessen elektrischer Widerstand

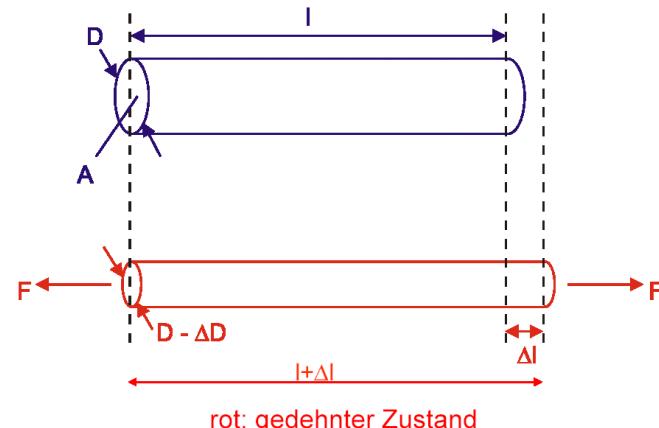
Dieser Effekt wurde von William Thomson im Jahre 1856 nachgewiesen. Er verwendete dazu die von Charles Wheatstone 1843 entwickelte Wheatstonesche Brückenschaltung

Ursachen der Widerstandsänderung:

- Vergrößerung der Länge
- Verringerung der Querschnittsfläche
- bei starker Dehnung auch Umkristallisierung.

Art der Dehnung hängt ab von

- Form des Körpers
- Angriffsweise der äußeren Kräfte
- Materialeigenschaften des Körpers



Mechanik:

Lineare Beschreibung der Elastizität σ durch *Hooke'sches Gesetz*:

$$\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

Widerstand R eines Drahtes:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{4 \cdot l \cdot \rho}{\pi \cdot D^2}$$

Wird der Draht (einachsig) gedehnt, ändert sich der Widerstand R aufgrund der Änderungen von Länge l , Querschnittsfläche A und spezifischer Widerstand ρ .

Für *infinitesimal* kleine Änderungen gilt (totales Differenzial):

$$dR = \frac{4 \cdot \rho}{\pi \cdot D^2} dl + \frac{4 \cdot l}{\pi \cdot D^2} d\rho - \frac{8 \cdot l \cdot \rho}{\pi \cdot D^3} dD$$

Gilt $\Delta r \ll r$, $\Delta l \ll l$ und $\Delta D \ll D$, so lässt sich mit guter Genauigkeit die relative Widerstandsänderung $\Delta R/R$ annähern:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta l}{l} - 2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

Bei einer Dehnung $\varepsilon = \Delta l/l$ in Längsrichtung verändert sich der Durchmesser um $\varepsilon_q = \Delta D/D$.

- Poissonzahl: $\mu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon}$

Für die relative Widerstandsänderung folgt:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta l}{l} - 2 \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta R}{R} = \varepsilon + 2\mu\varepsilon + \frac{\Delta \rho}{\rho} = (1 + 2\mu)\varepsilon + \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

k-Wert: Verhältnis der relativen Widerstandsänderung $\Delta R/R$ zur relativen Längenänderung $\varepsilon = \Delta l/l$

$$k = \frac{\Delta R/R}{\Delta l/l} = 1 + 2 \cdot \mu + \frac{\Delta \rho/\rho}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon$$

Hoher k -Wert → bei gleicher Dehnung erfolgt eine große Widerstandsänderung

Dehnungsmessstreifen – Typen

Metall DMS:

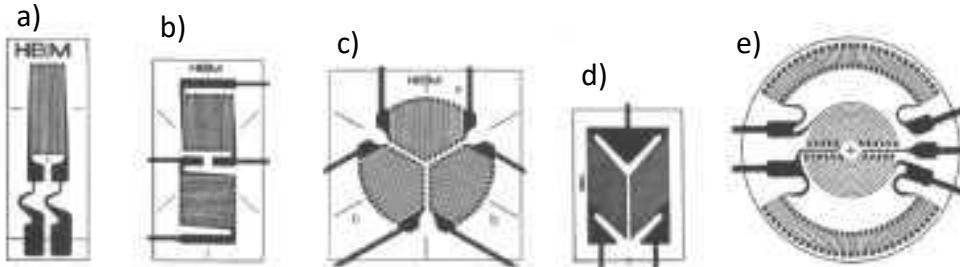
- k wird durch den Gefügeaufbau und die Vorgänge im Gefüge während der Dehnung bestimmt
- $k \approx 2$ bei den meisten verwendeten Metallen:
 - Konstantan (57 % Cu, 43 % Ni, $k=2.05$)
 - Nichrome V (20 % Cr, 80 % Ni, $k=2.2$)
 - Platin Wolfram (92 % Pt, 8 % W, $k=4.0$)
- **Folien-DMS:** bestehen aus Trägermaterial (z.B. Polyamid) und den eigentlichen Messstegen (z. B. Konstantan-Folie)
- **Draht-DMS:** flach gewickelter Dehndraht ($\varnothing \approx 0.02$ mm) auf Papierträger
- **Röhrchen-DMS:** DMS mit frei gespannten Drähten, Messung bei hohen Temperaturen

Halbleiter DMS:

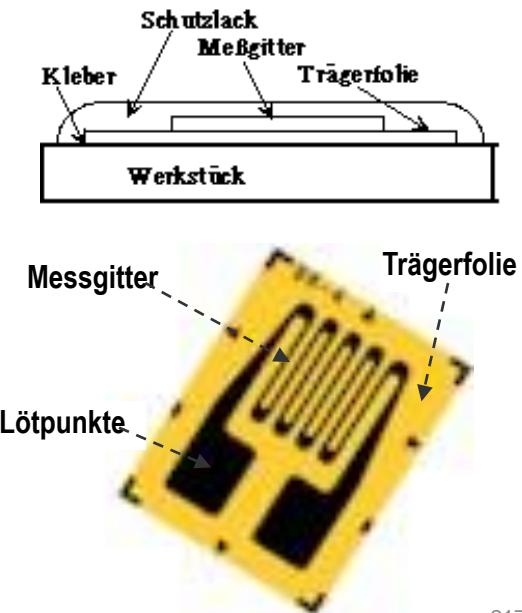
- Messgitter aus Halbleitermaterial, hochempfindlich, überwiegend in Drucksensoren angewandt ($k \approx 120$)

- am häufigsten verwendete Dehnungsmessstreifen
- metallisches Messgitter wird in einem galvanischen Verfahren auf eine Trägerfolie aufgebracht
- werden mit speziellem Kleber auf ein Werkstück aufgebracht (appliziert)
- Messgitter meist lang und schmal (typisch z. B. $6 \times 2 \text{ mm}^2$)
- zwei Löt-Anschlusspunkte
- Belastung / Messung nur in Längsrichtung (einachsige Spannungsmessung)
- die Querempfindlichkeit ist gering

Spezielle Ausführungsformen:



a) einfache Form; b) & c) für verschiedene Koordinaten;
d) für Drehmomentaufnehmer; e) Rosette für Membran-Druckaufnehmer



Typische Kennwerte eines Folien-DMS

- typische Nennwiderstände: $120\ \Omega$, $300\ \Omega$, $350\ \Omega$ oder $600\ \Omega$
- Toleranzen der Widerstandswerte $< \pm 0,5\%$
- Betriebsspannungen: $1\text{ V} - 10\text{ V}$
- Änderungen der Länge des DMS bis zu $\pm 3\%$
- elastischer Bereich in der Praxis meist nicht ausgenutzt
- typische Längenänderungen: $0,1 - 10\ \mu\text{m}$
- erreichbare Genauigkeit bei $20\text{ }^\circ\text{C}$ etwa 1% bis 5%

Rechenbeispiel:

DMS mit: $l = 6\text{ mm}$; $\Delta l = 0,1\ \mu\text{m}$; $R = 300\ \Omega$; Material = Konstantan $\rightarrow k=2,05$

$$\Delta R = R \cdot k \cdot \varepsilon = 300\ \Omega \cdot 2,05 \cdot \frac{0,1\ \mu\text{m}}{6\ \text{mm}}$$

Widerstandsänderungen sehr klein; gewünschte Messauflösung: $10^{-5} - 10^{-6}\ \Omega$
 \Rightarrow **Messbrücke verwenden!**

Exkurs: Piezoresistiver-Effekt

Piezoresistiver-Effekt:

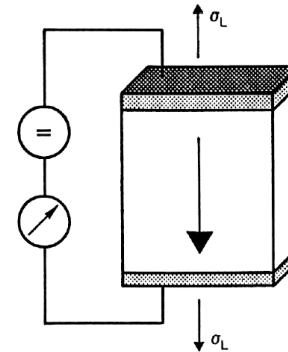
Beim **Piezoresistiven-Effekt** (oder Piezowiderstandseffekt) verändert sich der **Widerstand** eines Materials (wg. Änderung der Bandstruktur) **unter Zug oder Druckspannung**. Der Effekt ist in Halbleitern, z. B. Silizium, besonders stark ausgeprägt. Der Piezowiderstandseffekt ist **richtungsabhängig**.

Als integrierte Schaltung lassen sich dadurch sehr kleine Sensoren bauen, die auf dem Chip neben einer Widerstandsmessbrücke auch eine Konstantstromquelle und einen Messverstärker enthalten.

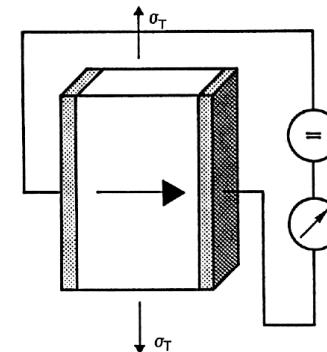
Es gilt:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \Pi \cdot \sigma$$

Π : Piezo-Widerstandskonstante
 (richtungsabhängig Π_L und Π_T)
 σ : mechanische Spannung
 ρ : spezifischer Widerstand

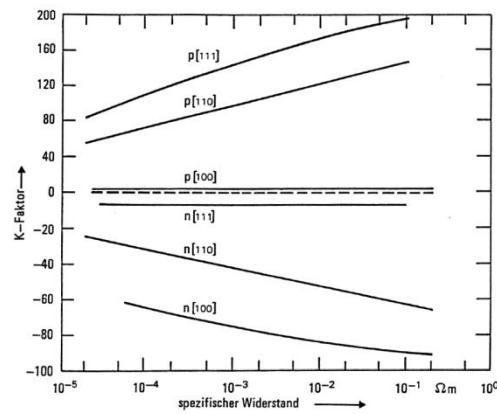
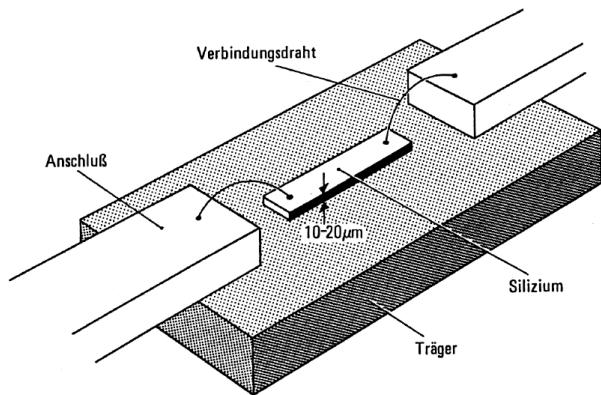


longitudinaler Effekt
 Strom fließt in Richtung der
 mech. Spannung



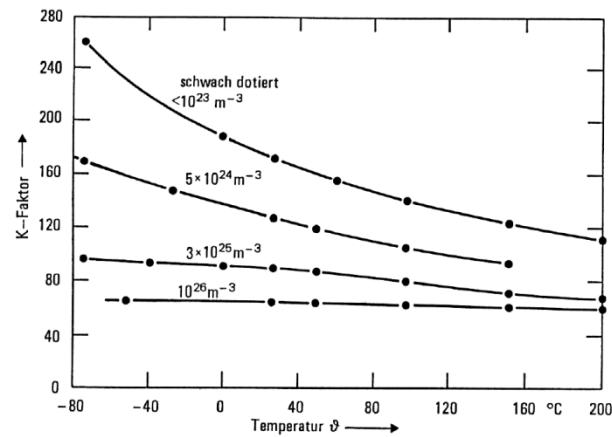
transversaler Effekt
 Strom fließt senkrecht zur Richtung
 der mech. Spannung

- 😊 k -Faktor von Si typisch 120 (vgl. Metall $k \approx 2$)
 - auf Verstärker kann ggf. verzichtet werden
 - Störspannungen fallen weniger ins Gewicht
- 😊 geringe Kriech- und Hysterese-Erscheinungen
- 😊 hohe Lebensdauer
- 😊 rel. hoher Widerstand
- 😢 Si-Streifen (Dicke < 20µm) sind leicht zerbrechlich
(Montage auf Träger notwendig)
- 😢 Widerstand stark temperaturabhängig
- 😢 Empfindlichkeit stark temperaturabhängig

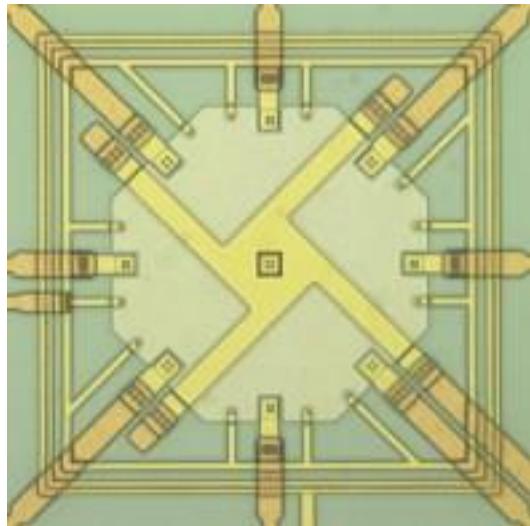


$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

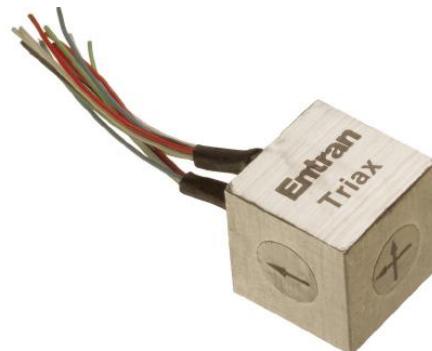
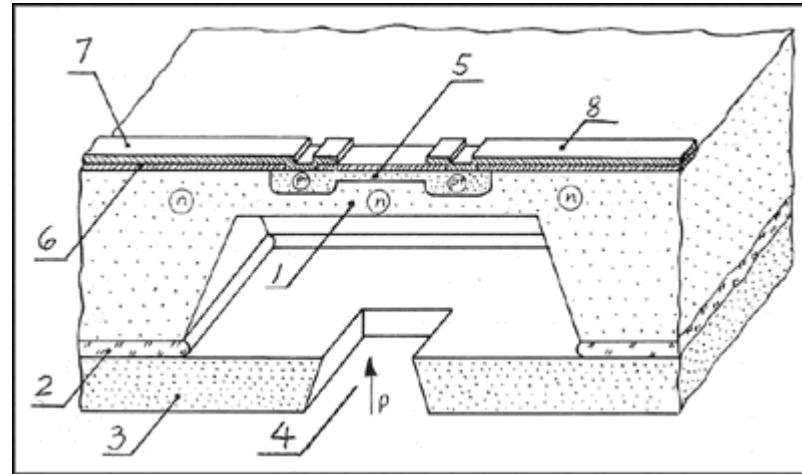
Dotierungsabhängigkeit von k bei Silizium



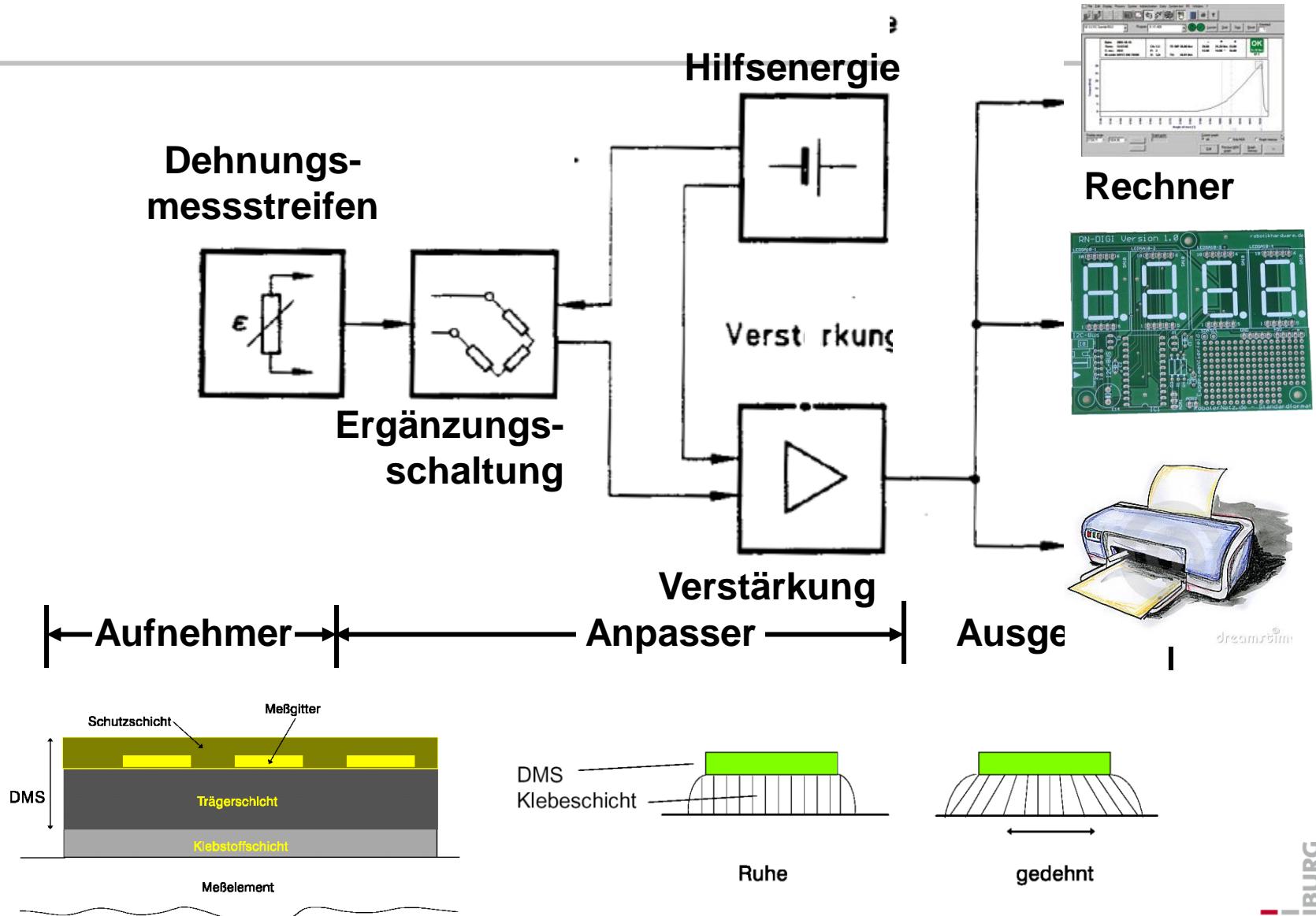
Beispielhafte Temperaturabhängigkeit von k bei p-Si



Drucksensor



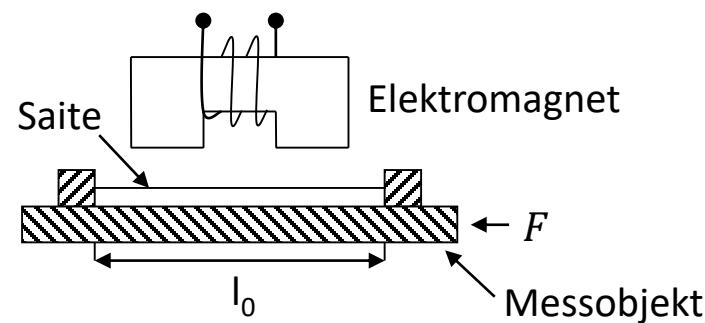
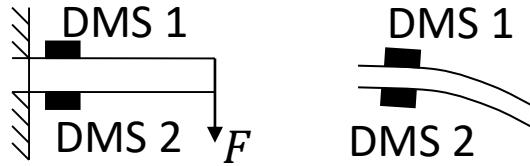
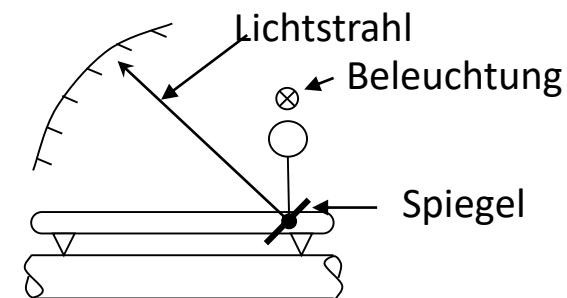
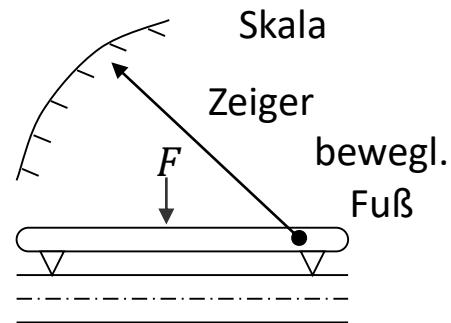
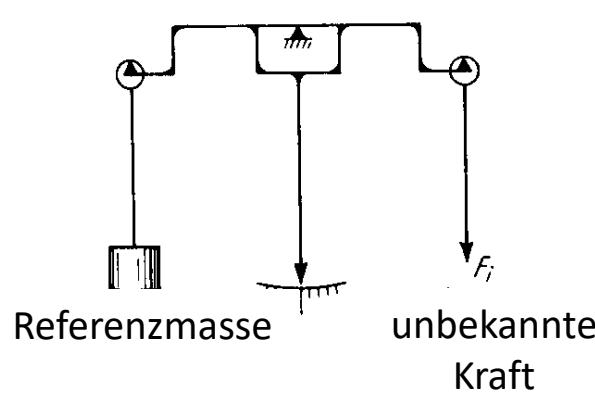
Prinzip Kraft- und Druckmessung mit DMS



Wie kann man eine Kraftmessung durchführen

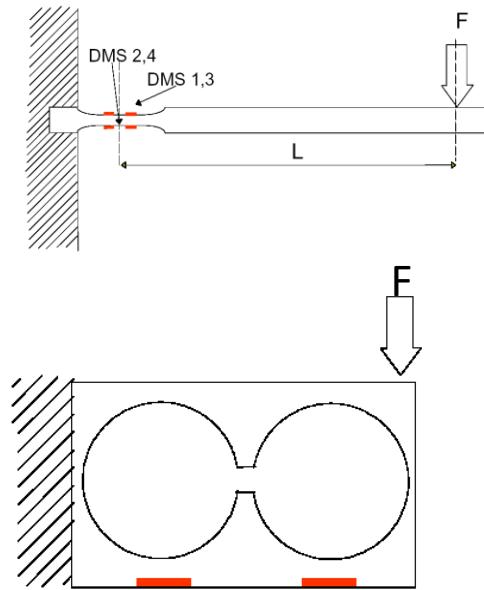
Messmechanismen sind:

- Die zu messenden Kraft wird mit der Kraftwirkung einer definierten Masse (z. B. Wirkung über einen Hebel) verglichen / kompensiert
- Kraft wirkt auf ein elastisches Bauteil und dessen Auslenkung oder Verformung wird gemessen
- Frequenzmessung an einer schwingenden Saite, die über die Kraft/Längenänderung verstimmt wird

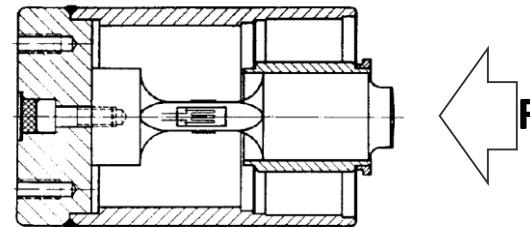


Kraftmessung mit DMS

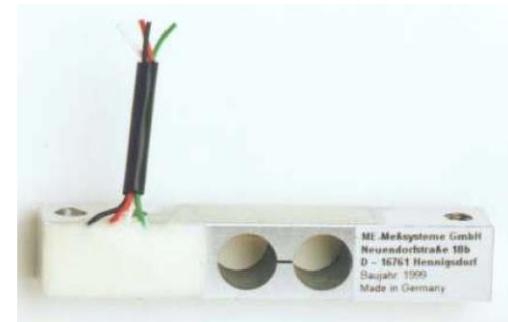
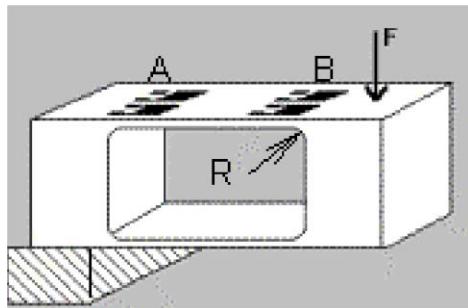
Kraftmessung über Hebel



Kraftmessdose

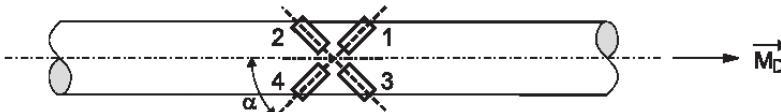


Produktausführungen



Anwendungen mit DMS

Drehmomentmessung



$$U_d = U_0 \cdot \frac{\Delta R}{R} = k \cdot M_D$$

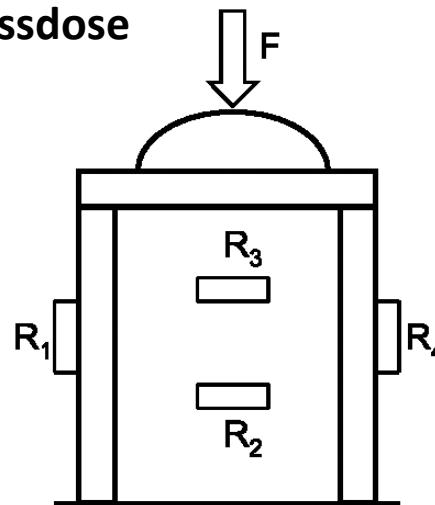
Drehmoment

$$P = M_D \cdot \omega = 2 \cdot \pi \cdot M_D \cdot n$$

Leistung

Winkelgeschwindigkeit

Kraftmessdose



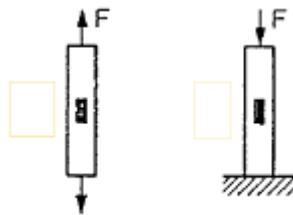
Kraft-Moment-Sensor (KMS)

Anordnung von mehreren DMS

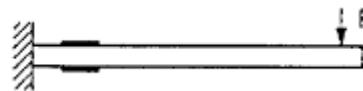


- Für Zug- und Druckkräfte
- Einsatz z. B. in elektr. Waagen
- $50 \text{ N} \dots 5 \cdot 10^9 \text{ N}$
- Messunsicherheit: 0,5%

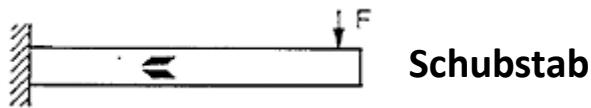
Anordnung zur Kraftmessung



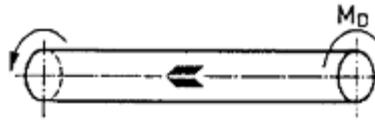
**Zugstab /
Druckstab**



Biegefeder



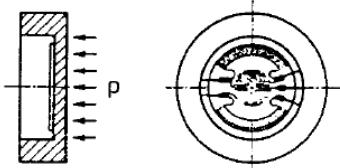
Schubstab



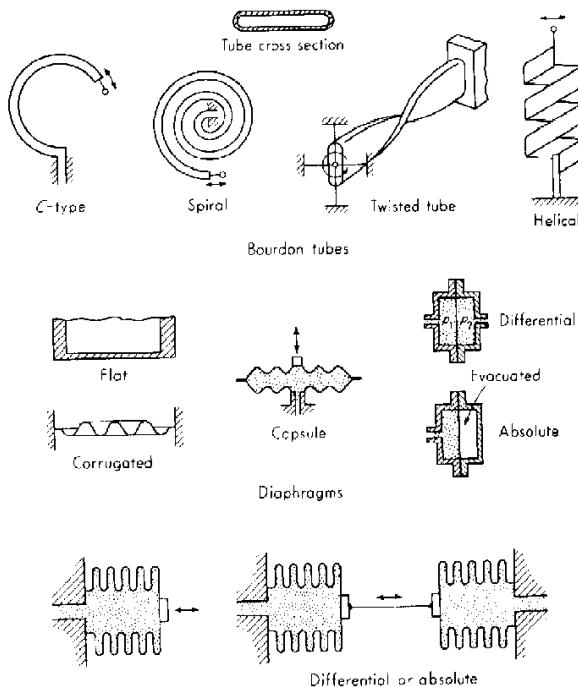
Torsionsstab

Anordnungen zur Druckmessung

Druckmembran (Plattenfeder):



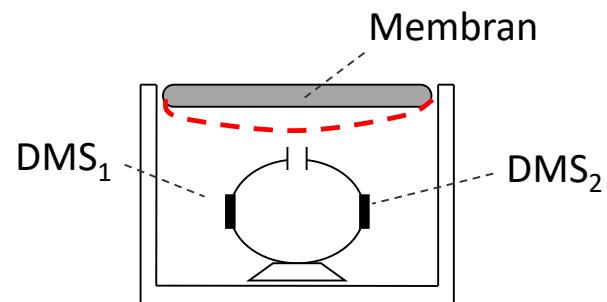
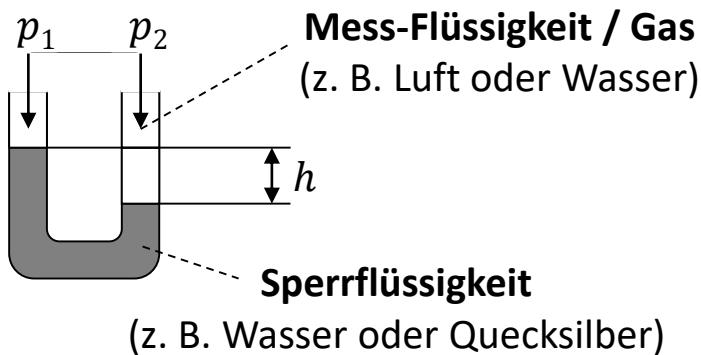
Weitere Beispiele für Druckmess- Anordnungen:

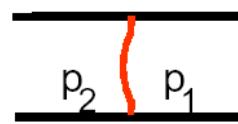
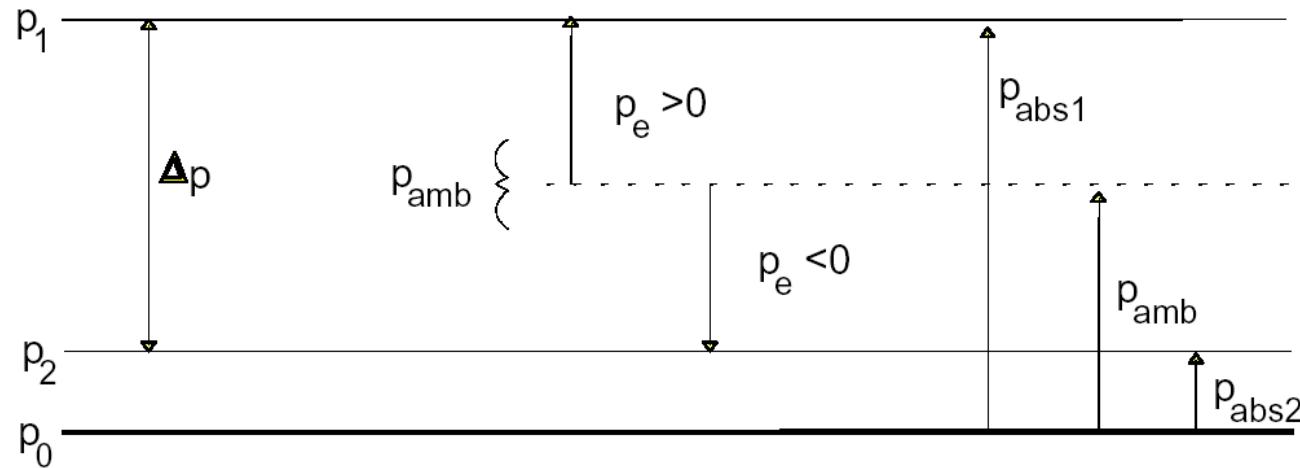


Wie kann man eine Druckmessung durchführen

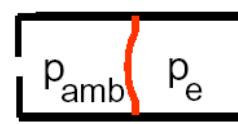
Messmechanismen sind:

- U-Rohr Manometer – Veränderung eines Flüssigkeitsspiegels in einer Röhre
- Druck übt eine Kraft auf eine elastische / oder elastisch gelagerte Membran aus, Verformung bzw. Auslenkung wird gemessen (vgl. Kraftmessung)

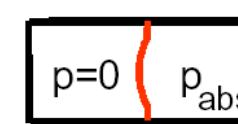




Diffrenz-
druck



Über-
druck

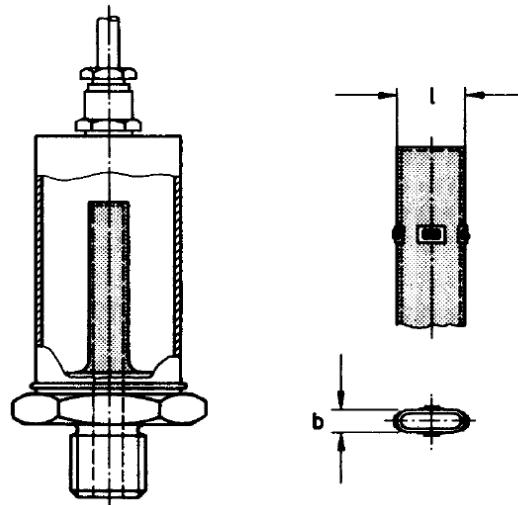


Absolut-
druck

Markt für Druck-Sensorik

Revenues 2005	\$4.94 billion
Price Range	\$2 - \$ 10,000
Replacement rate	4 - 6 years

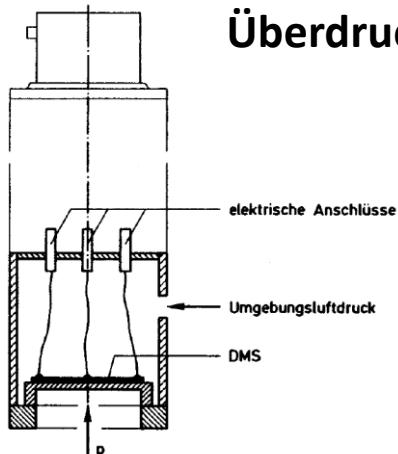
Industry	Revenues 1998 / %
Process Industries	35
Automotive	24
Medical	13
Aerospace	11
Semiconductor	3
Other industries	14



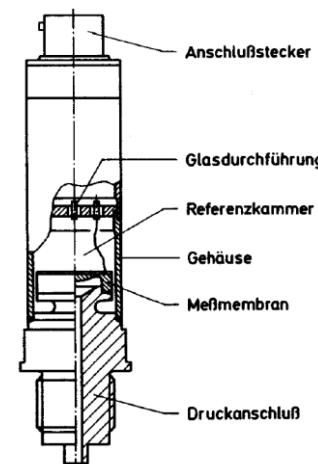
Druckmessung mit Rohrsensor

Rohr dehnt sich bei Druck aus
und wird länger

Überdrucksensor

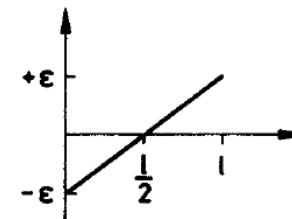
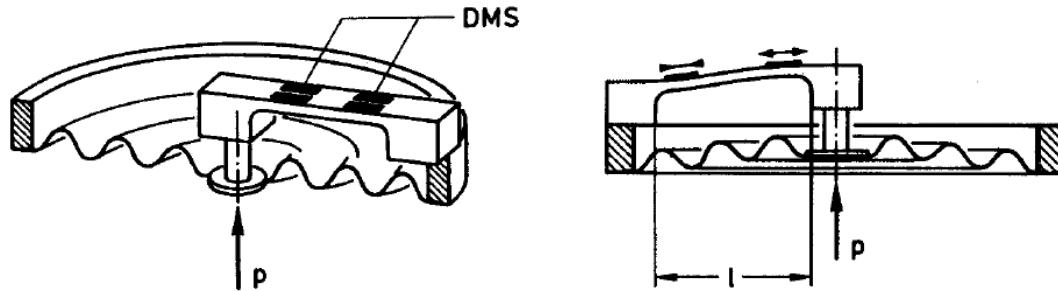


Absolutdrucksensor



Druckmessung mit DMS II

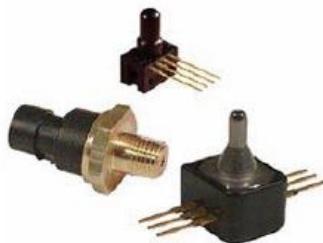
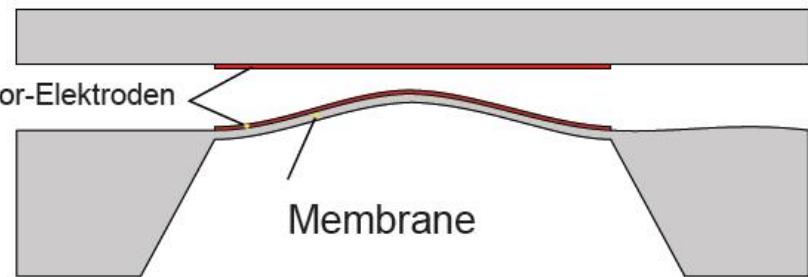
DMS-Druckmessung mit einer Wellmembran



Drucksensor mit Piezoresistiver Auswertung

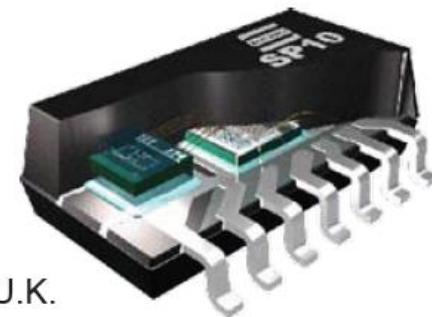


Kapazitive Auswertung

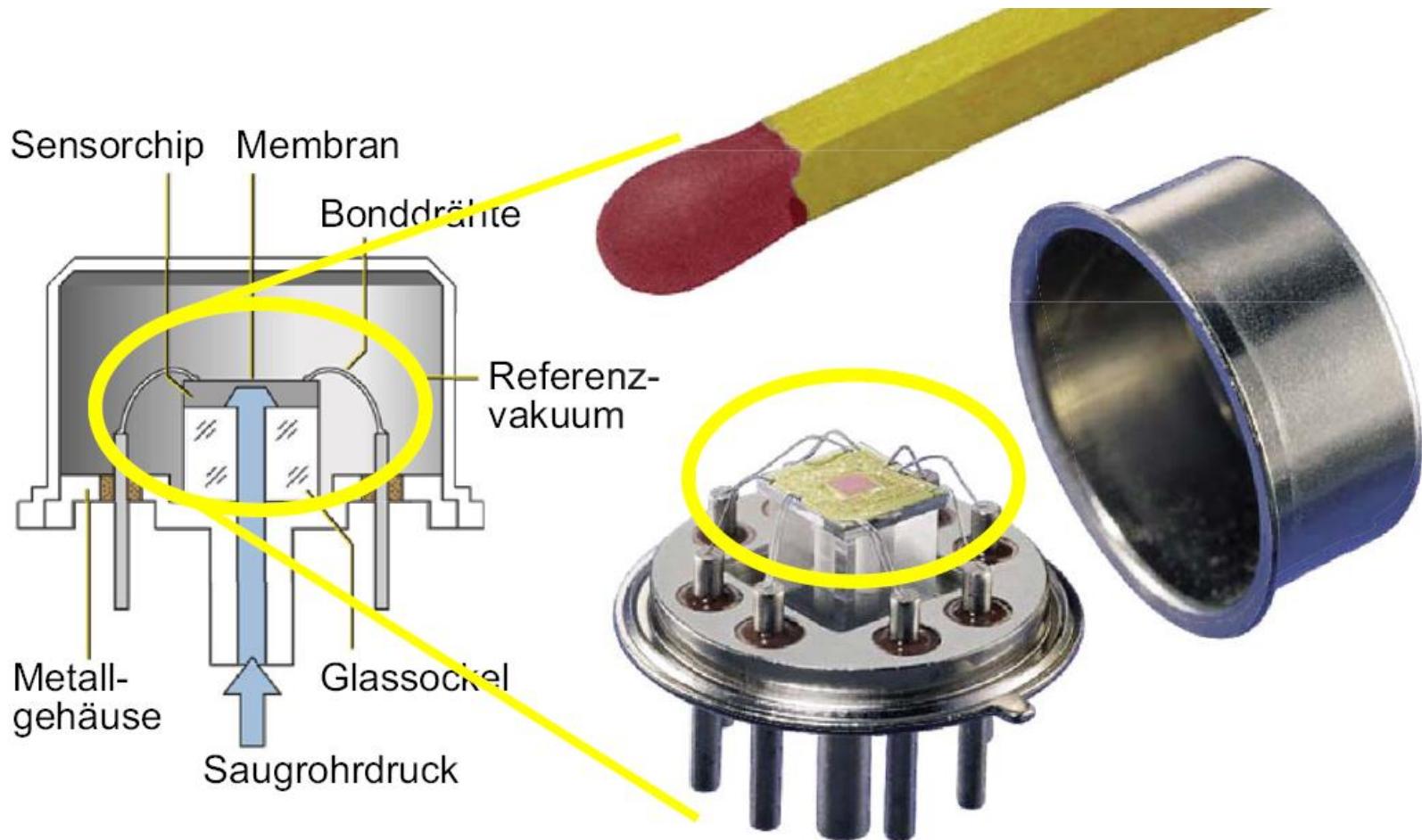


Hersteller:

- Honeywell, U.S.A.
- Motorola, U.S.A.
- NovaSensor, U.S.A.
- SensoNor, Norway
- Kulite Sensors Limited, U.K.

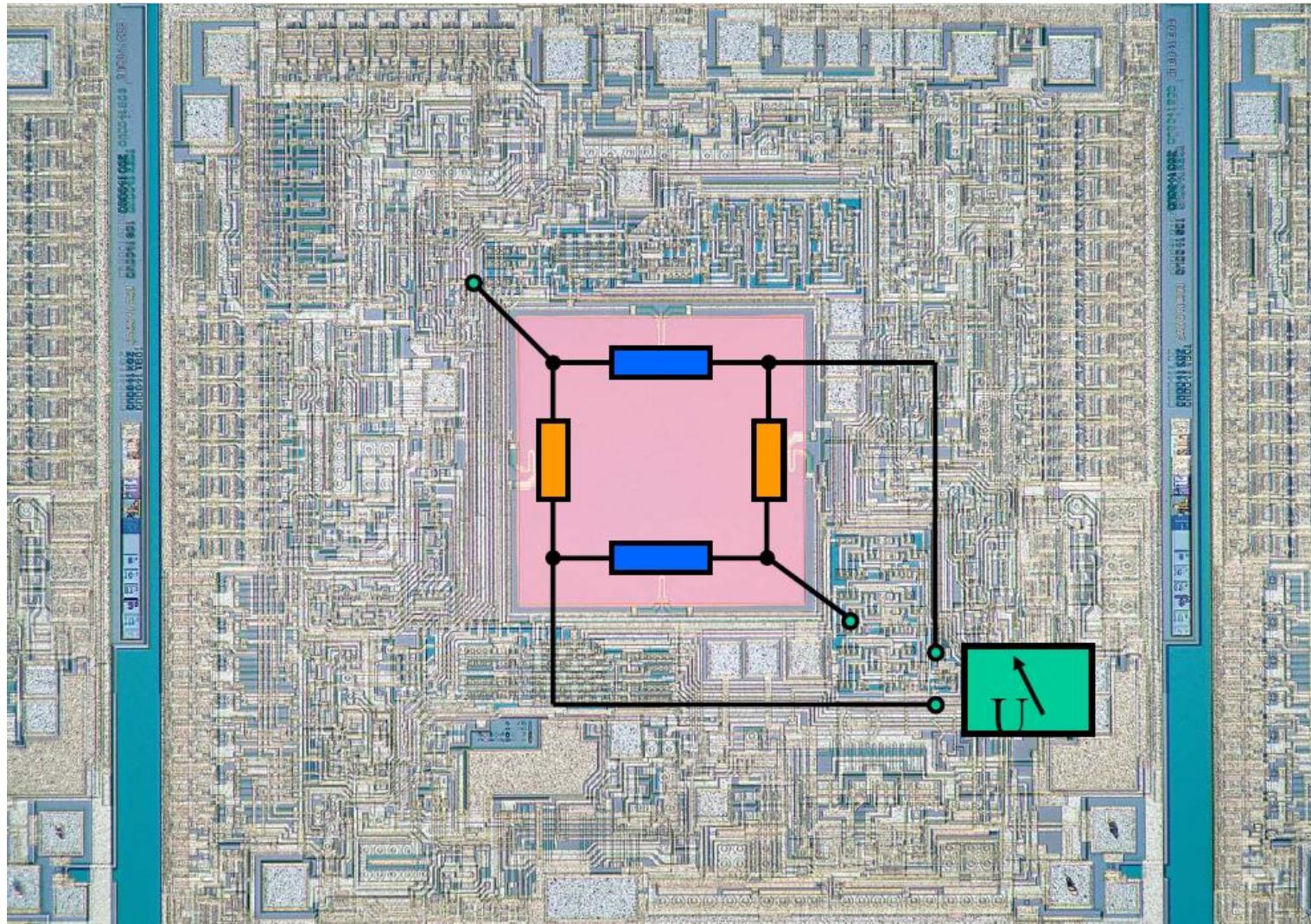


Drucksensor in Bulkmicromechanik I

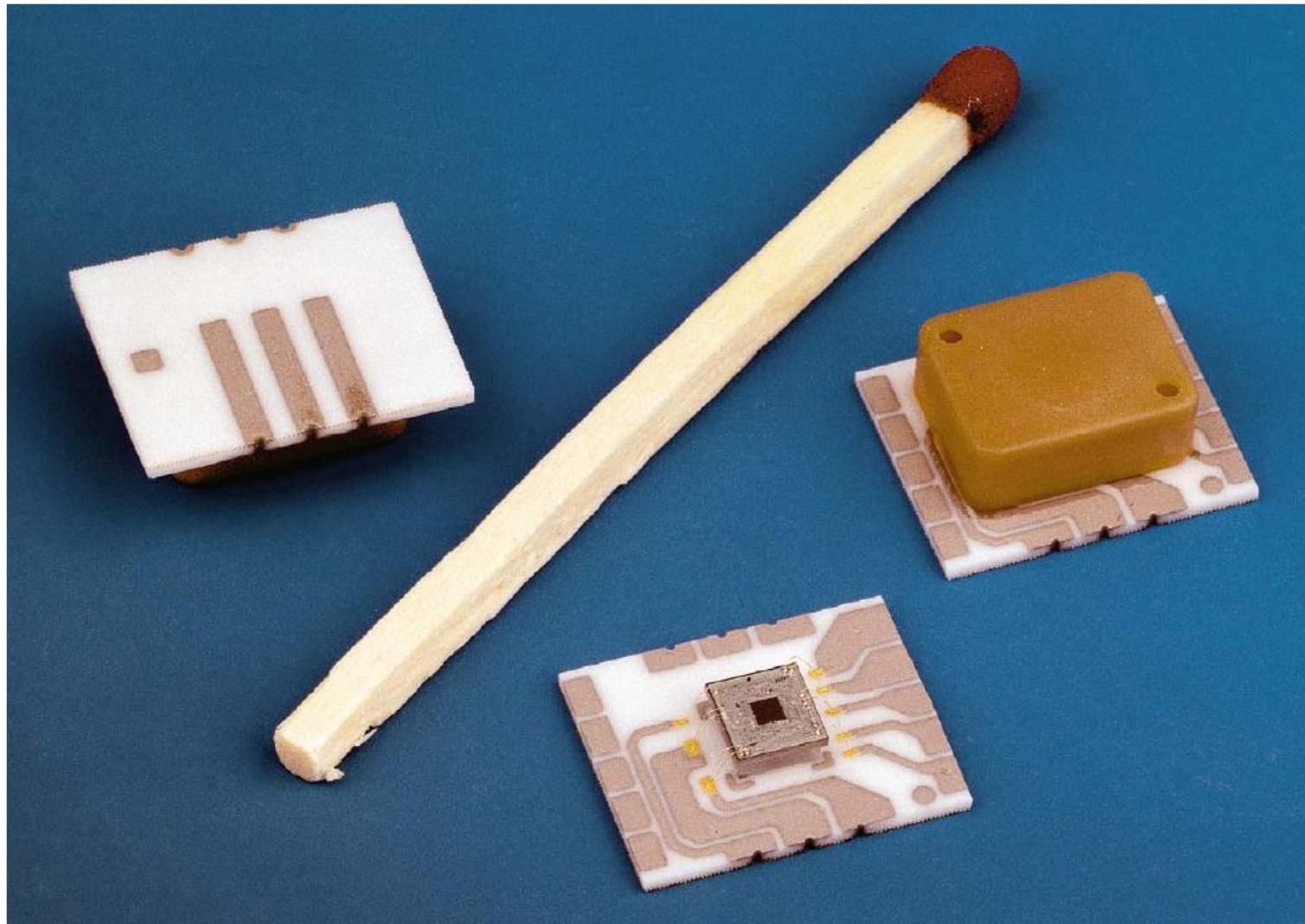


Quelle: Bosch

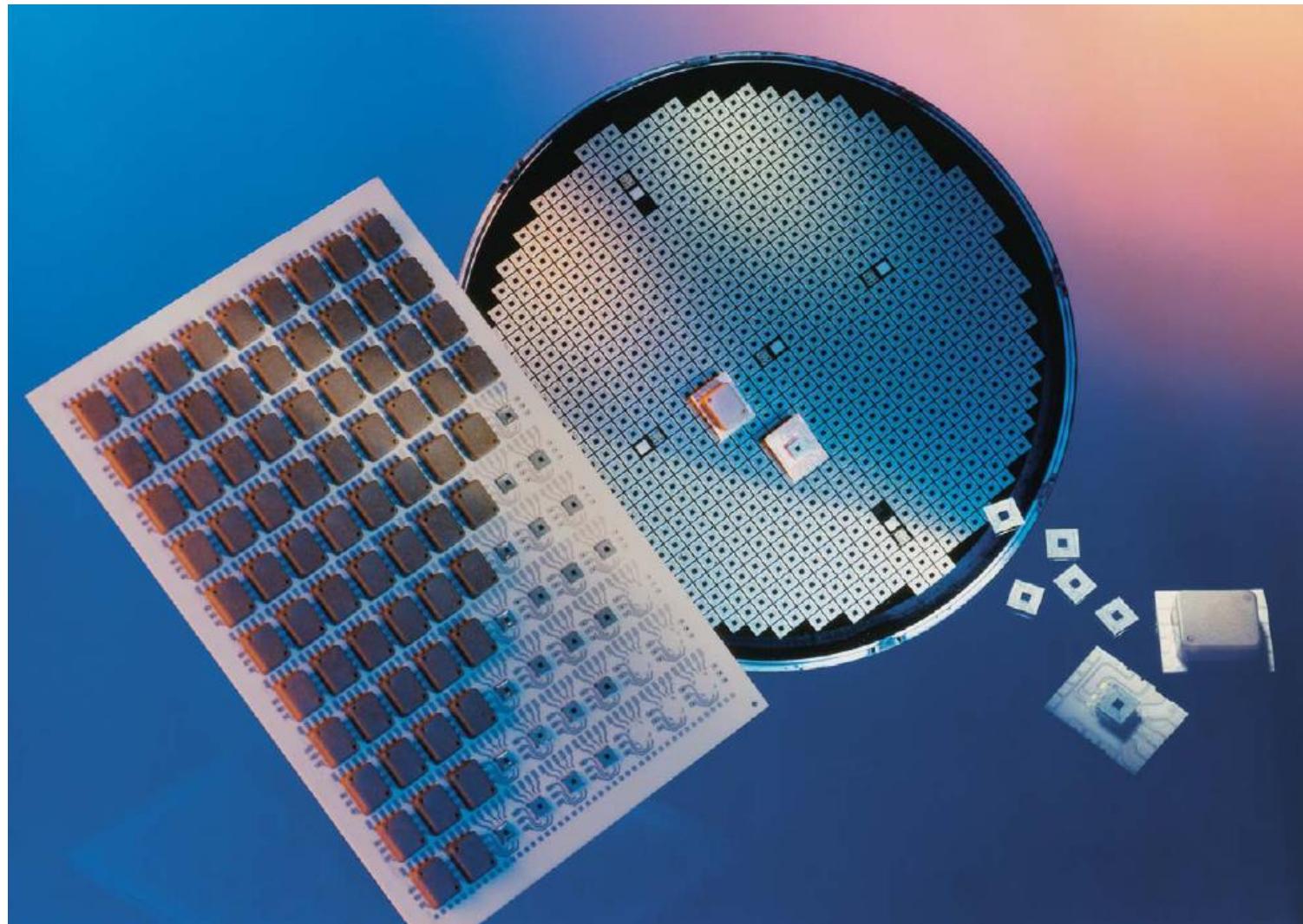
Drucksensor in Bulkmikromechanik II



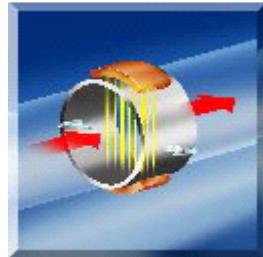
Drucksensor in Bulk mikromechanik III



Drucksensor in Bulk mikromechanik IV



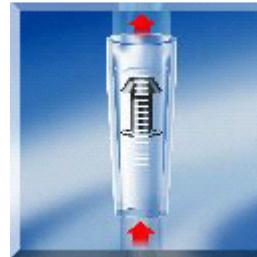
Prinzipien / Verfahren zur Durchflussmessung



Magnetisch- induktive
Durchflußmesser



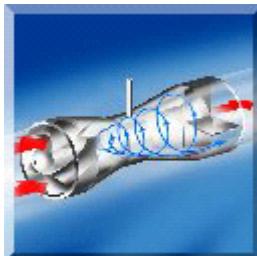
Wirbel-
Durchflußmesser



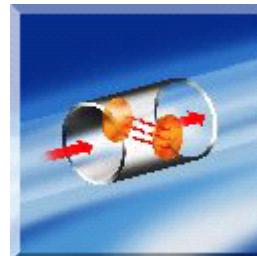
Schwebekörper-
Durchflußmesser



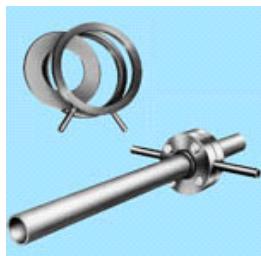
Coriolis-
Durchflußmesser



Drall-
Durchflußmesser



Ultraschall



Wirkdruckverfahren



Flügelradzähler

Wirbeldurchflußmesser

3%

Volumen-
zähler
21%

Andere
6,5%

Schwebe-
körper-
durchfluß-
messer
15%

Ultraschall-
Durchflußmesser
0,5%

magnetisch-
induktive
Durchfluß-
messer
15%

Masse - Durchflußmesser
1%

Wirkdruck-
messungen
38%



Glas-Schwebekörpermesser

Momentanwert-Durchflussmessung für Gase und Flüssigkeiten



Kolbenzähler

Kleinstmengen - Flüssigkeits-Volumenzähler



Integrierendes Staurohr

Durchflussmesser für Flüssigkeiten und Gasen (Pitot-Rohr-Prinzip)



Ultraschall- Durchflussmesser

Durchflussmessung von
Flüssigkeiten nach dem
Laufzeitdifferenzverfahren



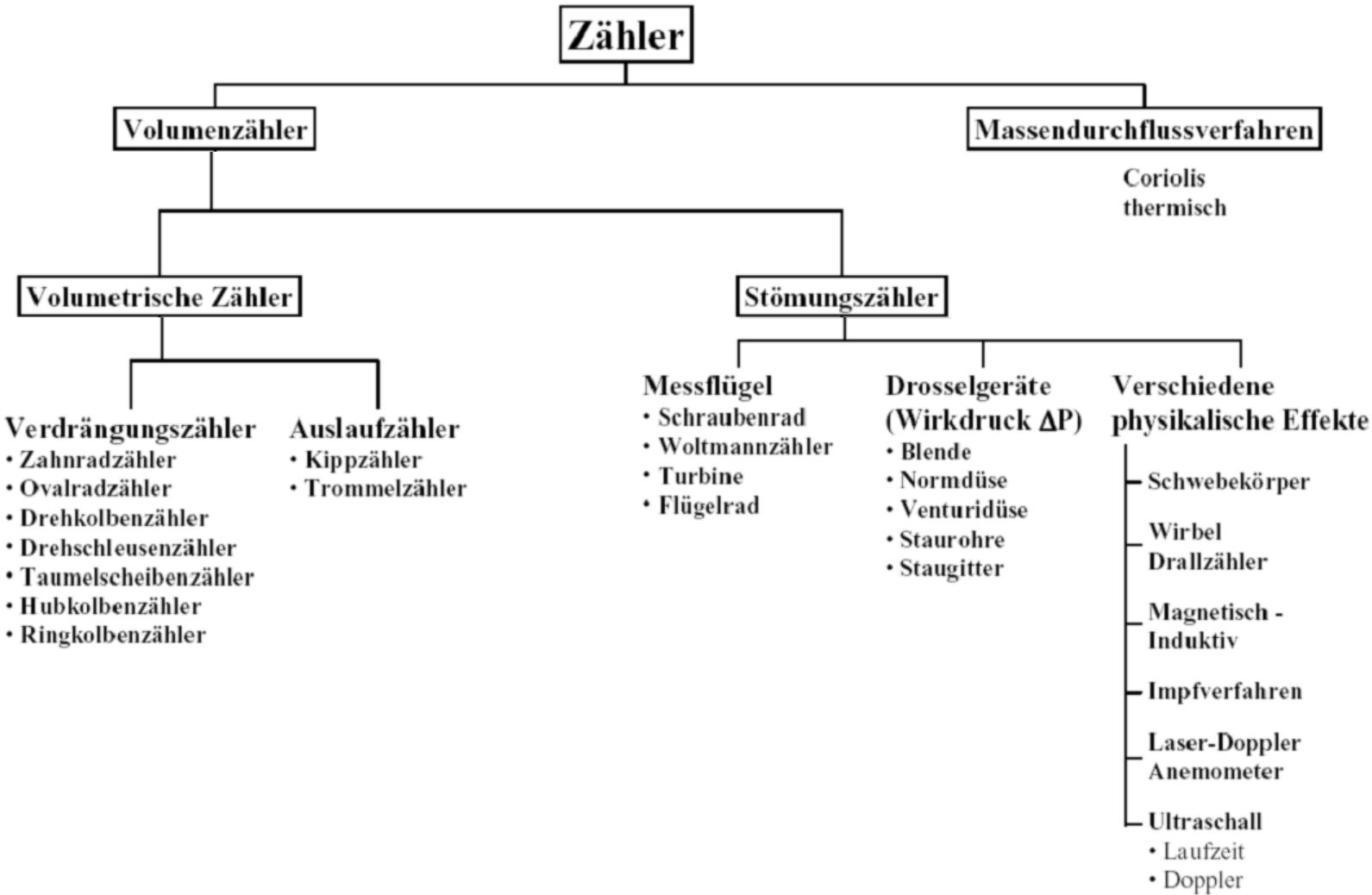
Magnetisch - Induktiver Durchflussmesser

Messung leitfähiger
Medien nach dem
Faraday'schen
Induktionsgesetz



Massedurchflussmesser

Direkte Masse- und
Dichtemessung nach
dem Coriolisprinzip



Revenues 2005	\$3.84 billion
Price Range	\$100 - \$ 50,000
Replacement rate	5 - 7 years

Industry	Revenues 1998 / %
Chemical / petrochemical	41
Food, beverages, pharma	16
Energy / utilities	14
Water / wastewater	12
Automotive	8
Pulp and paper	6
Other industries (Aerospace, Textiles, and Plastics)	3

Durchflussmessung: Grundlagen I

Man unterscheidet zwischen:

Volumendurchfluss:

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

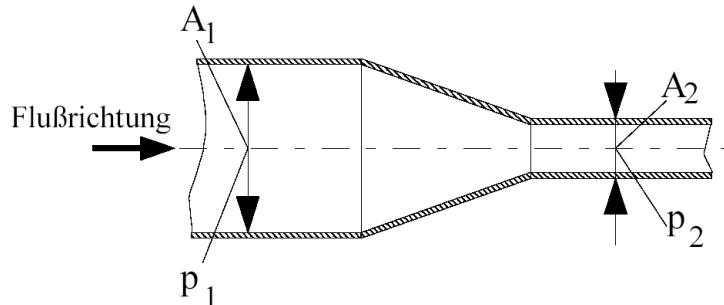
$$q_m = \rho \cdot q_v$$

Massendurchfluss:

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

mit ρ Dichte des Mediums

Kontinuitätsgleichung:



$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \Rightarrow \rho_1 \cdot v_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot v_2 \cdot A_2$$

Für inkompressible Medien
(Flüssigkeiten) gilt vereinfacht:

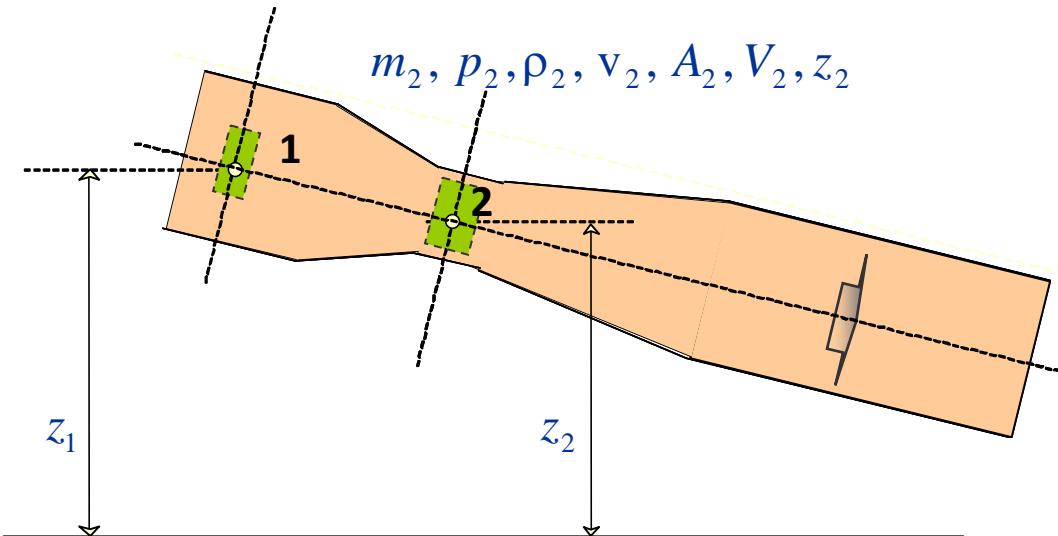
$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

Bei einem stetigen Fluss wird keine Masse im Rohr akkumuliert d.h. was vorne rein kommt geht hinten auch wieder raus

Durchflussmessung: Grundlagen II

$m_1, p_1, \rho_1, v_1, A_1, V_1, z_1$

$m_2, p_2, \rho_2, v_2, A_2, V_2, z_2$



Annahme: stetige Strömung
Medium ist Flüssigkeit (oder Gas bei nur kleinen Querschnittsänderungen)

$$m_1 = \rho_1 \cdot V_1 \quad \text{und} \quad m_2 = \rho_2 \cdot V_2$$

sowie d.h.:

$$m_1 = m_2 = m \quad \text{und} \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho$$

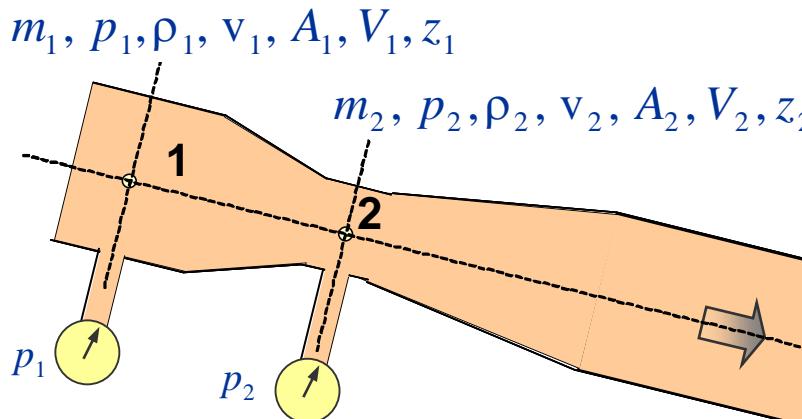
$$E_{1kin} + E_{1Pot(Höhe)} + E_{1Pot(Druck)} = E_{2kin} + E_{2Pot(Höhe)} + E_{2Pot(Druck)}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot z_1 + \frac{p_1 \cdot m}{\rho} = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot z_2 + \frac{p_2 \cdot m}{\rho}$$

→ $\frac{1}{2} \cdot v_1^2 + g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2} \cdot v_2^2 + g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho} = const = p_0$

Bernoulli-Gleichung

Durchflussmessung mit dem Venturi-Rohr:



Bernoulli-Gleichung

$$\frac{v_1^2}{2} + g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

Kontinuitätsgleichung (für inkompressible Medien)

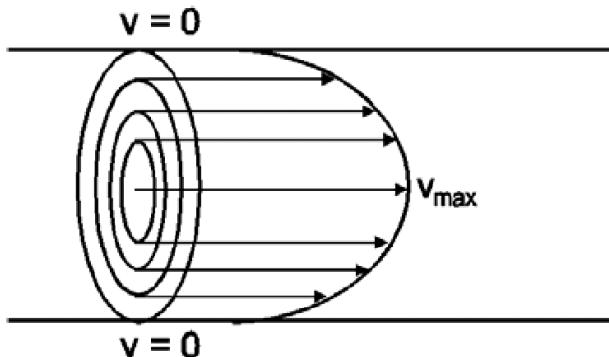
$$v_2 = v_1 \cdot A_1 / A_2$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = g \cdot \rho \cdot \underbrace{(z_2 - z_1)}_{= \Delta z} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Delta p = g \cdot \rho \cdot \Delta z + v_1^2 \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

$$q_V = \frac{dV}{dt} = A_1 \cdot v_1 = A_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (\Delta p - g \cdot \rho \cdot \Delta z)}{\rho \cdot \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)}}$$

Laminare Strömung



Die **Reynoldszahl (Re)** gibt an, ab wann eine laminare Strömung in eine turbulente Strömung übergeht

$$Re = \frac{\text{kinetische Energie}}{\text{Reibungsverlust}} \Rightarrow Re = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta}$$

ρ : Dichte

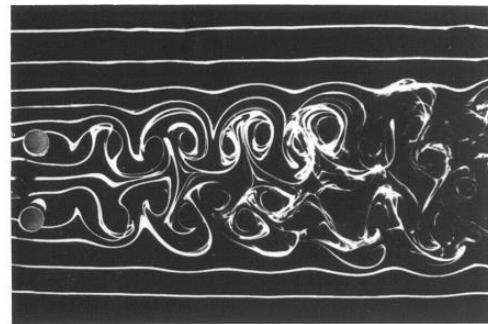
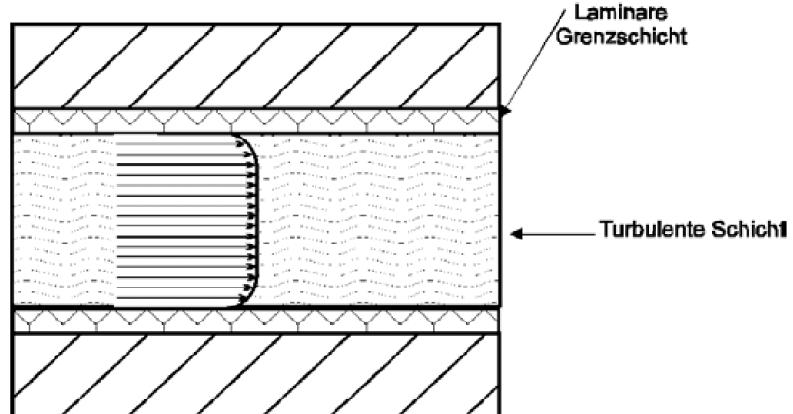
v : Strömungsgeschwindigkeit

η : Viskosität

l : charakteristische Länge

(bei Rohr: $l =$ Durchmesser)

Turbulente Strömung



Bei Strömung in einem runden Rohr und normalen Randbedingungen gilt näherungsweise:

- $Re < 2000$: laminare Strömung
- $2000 < Re < 4000$: Übergangsbereich
- $Re > 4000$: turbulente Strömung

Aber: diese Richtwerte können erheblich abweichen (z.B. abhängig von Oberflächenrauhigkeit etc.)

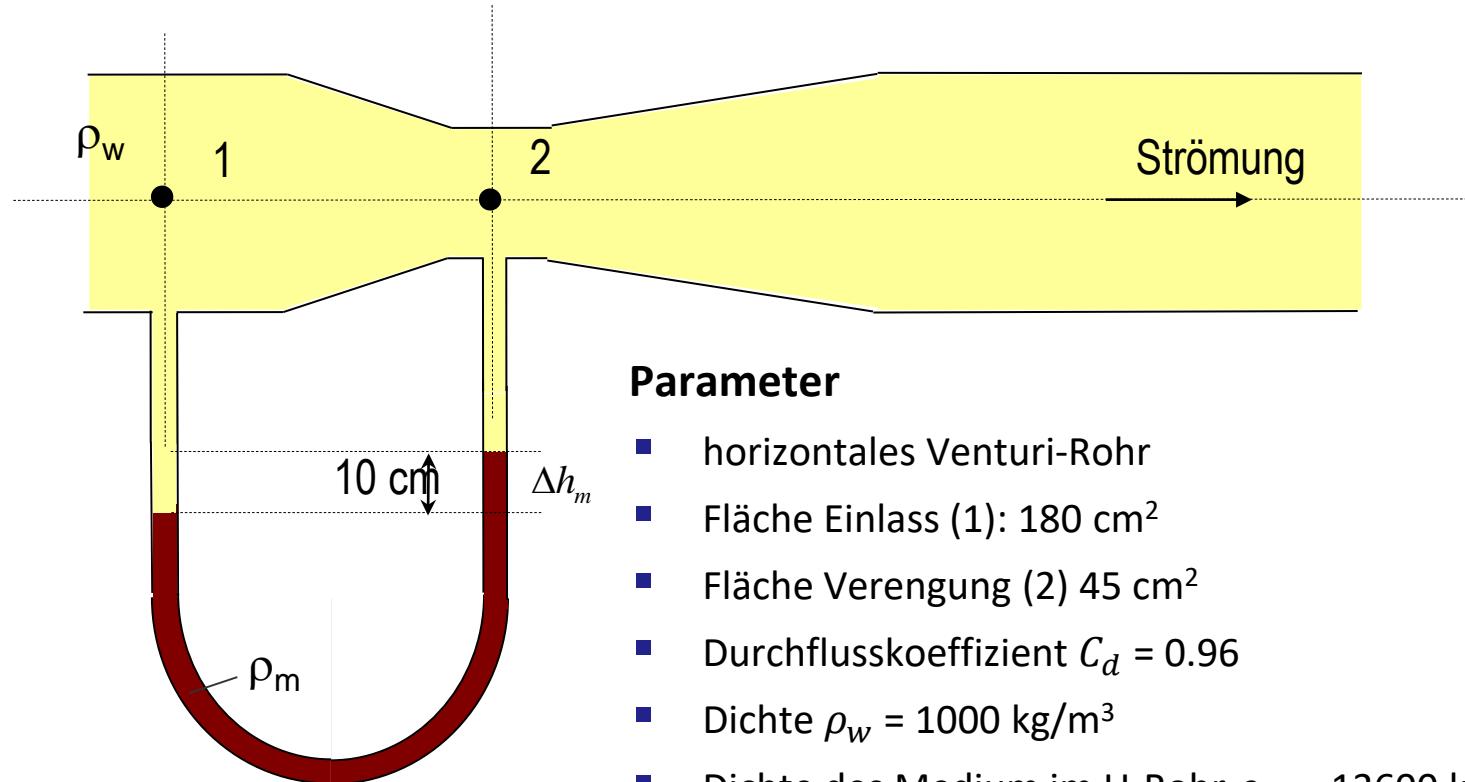
Auswirkung auf Messungen mit Venturi-Rohr:

- Reibungsverluste / Strömungsprofil (Geschwindigkeitsverteilung nicht gleichförmig)
 - ⇒ Der wahre Volumenfluss ist niedriger als durch ideale Formel berechnet
 - ⇒ Einführung eines Korrekturfaktors: **Durchflusskoeffizient C_d**

$$q_V = A_1 \cdot C_d \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (\Delta p - g \cdot \rho \cdot \Delta z)}{\rho \cdot \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)}}$$

Durchflusskoeffizient C_d
ca. 0,96 - 0,98 für Venturi-Rohr

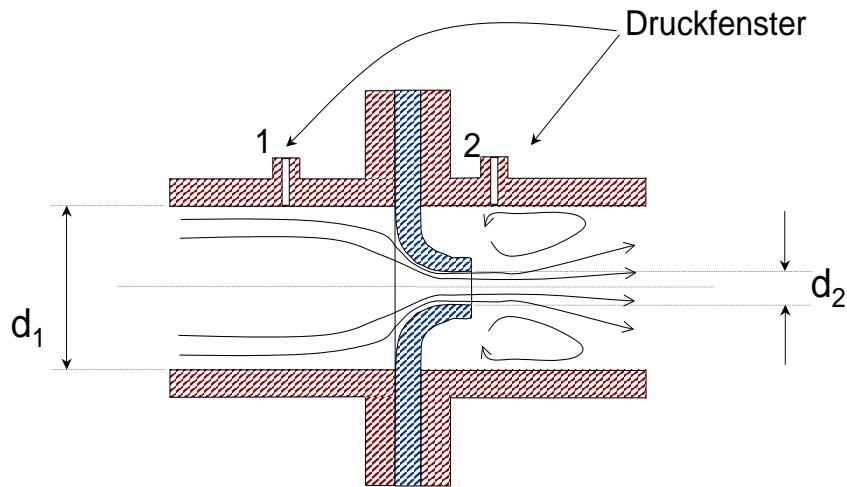
Durchflussmessung mit Venturi-Rohr: Beispiel



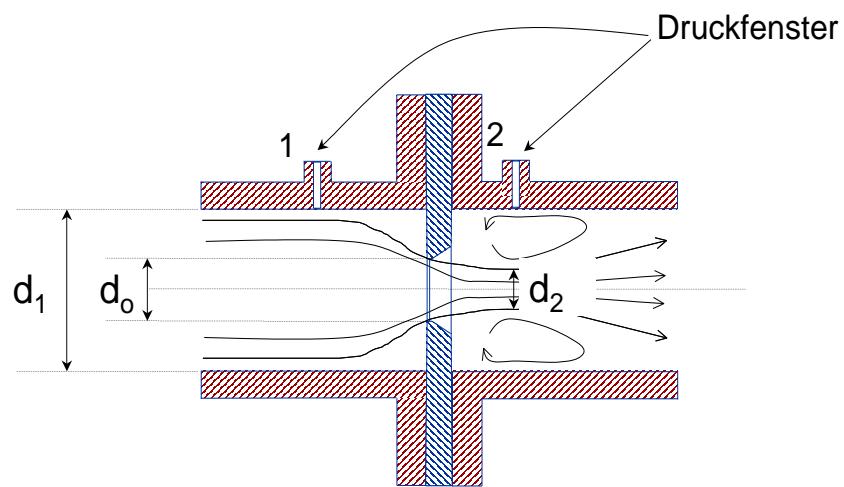
Parameter

- horizontales Venturi-Rohr
- Fläche Einlass (1): 180 cm^2
- Fläche Verengung (2) 45 cm^2
- Durchflusskoeffizient $C_d = 0.96$
- Dichte $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Dichte des Medium im U-Rohr $\rho_m = 13600 \text{ kg/m}^3$
- $\Delta h_m = 10 \text{ cm}$
- $q_v = ?$

Langradius-Düse (engl. Nozzle meter)



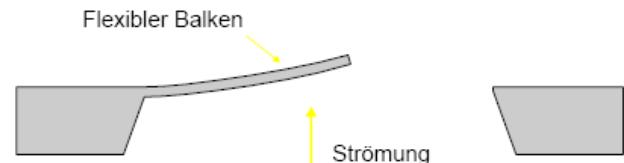
Druck-Blende (engl. Offrice plate)



- Einfacher, kleiner und billiger als Venturi-Rohr
- Aber höhere Verluste z.B. wegen Wirbelbildung
→ Durchflusskoeffizient $C_d \approx 0.7$ bis 0.96 (je nach Düsentyp)
- Sehr anfällig gegen Verschmutzung und Korrosion (kleinste Veränderungen der Blendenkante beeinflussen C_d)

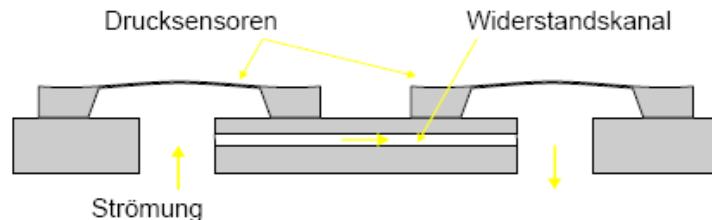
- Einfacher, kleiner und billiger als Venturi-Rohr und Langradius-Düse
- Aber höhere Verluste
→ Durchflusskoeffizient $C_d \approx 0.62$
- Sehr anfällig gegen Verschmutzung und Korrosion (kleinste Veränderungen der Blendenkante beeinflussen C_d)

Ausführung in MEMS Technik

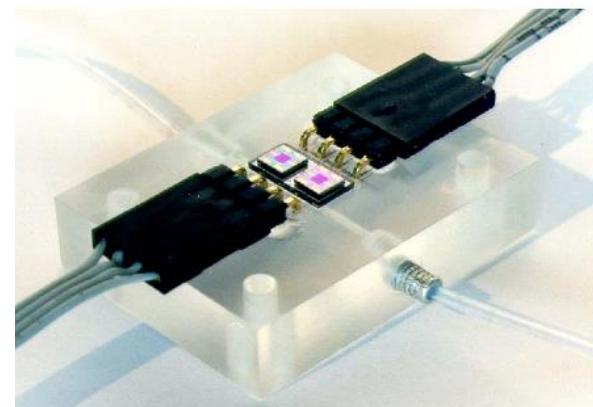


Mechanischer Scherspannungs-Strömungssensor: Misst die auf eine beweglich aufgehängte Platte wirkende Scherspannung

Trägheits – Strömungswiderstand-Sensor: Misst den Druckabfall aufgrund Umwandlung kinetischer Energie über einer Strömungsdrossel



Reibungs-Widerstandsströmungssensor:
Misst den Verlust der kinetischen Energie in einem Widerstandskanal durch Sensierung des Druckverlustes

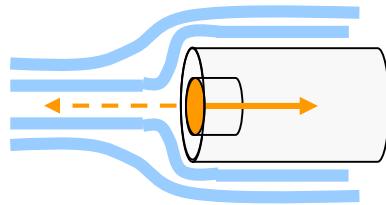


Quelle: R.E. Oosterbroek, MESA+ Research Institute -Transducers Technology Laboratory

Staudruckverfahren

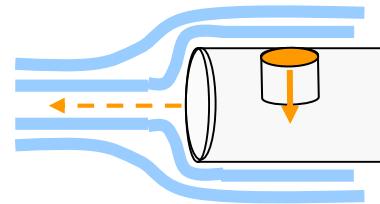
Pitot-Druck (p_{stau})

Druck auf eine senkrecht zur Strömungsrichtung fest stehende Platte unmittelbar vor der Platte, im „Staupunkt“, ist die Strömungsgeschwindigkeit null.



Statischer Druck (p_{stat})

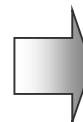
Druck auf eine parallel zur Strömung liegende Platte. Diesen Druck zeigt auch ein mit der Strömung geführtes, beliebig ausgerichtetes Manometer.



Bernoulli-Gleichung

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot v_1^2 + g \cdot z_1 + \frac{p_{stat}}{\rho}}_{\text{Strömung, die seitlich am Staukörper vorbei geht}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot v_2^2 + g \cdot z_2 + \frac{p_{stau}}{\rho}}_{\text{vor dem Staukörper}}$$

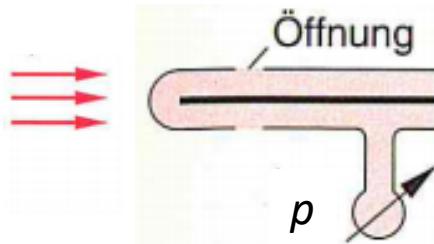
mit $z_1 = z_2$ und $v_2 = 0$



$$p_{stau} = p_{stat} + \frac{1}{2} \cdot v_1^2 \cdot \rho$$

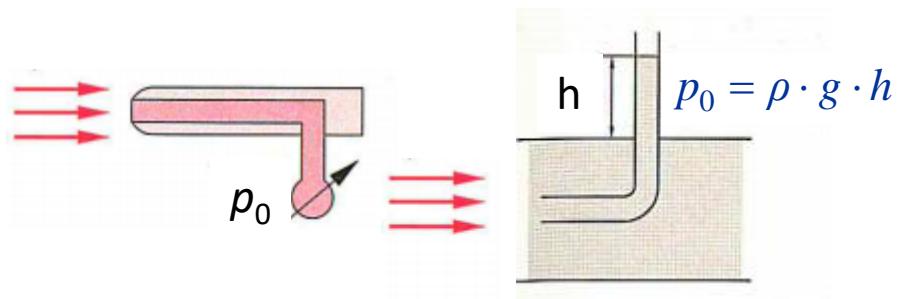
Messung des statischen Drucks p

- Drucksonde mit seitlichen Öffnungen
- Strömungslinien parallel zu Öffnungen

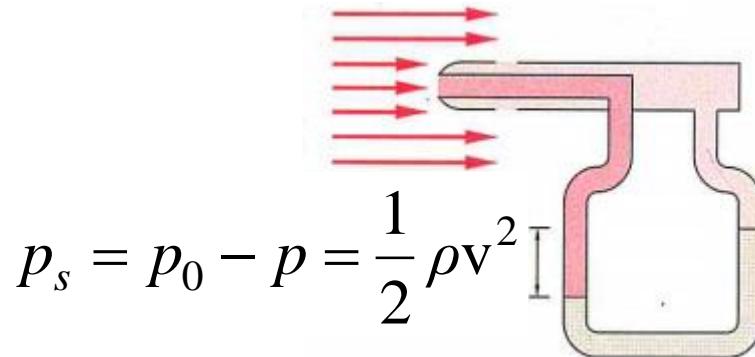


Messung des Gesamtdrucks p_0

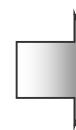
- Drucksonde mit vorderer Öffnung
- Strömungsgeschwindigkeit $u = 0$



Messung des Staudrucks



$$p_s = p_0 - p = \frac{1}{2} \rho v^2$$



$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_b - h_a)}$$

Quelle: Demtröder, Experimentalphysik 1, Springer Verlag



Anwendungen:

- Messung der Geschwindigkeit ('air speed') bei Flugzeugen
- Durchflussmessung in Rohren

Vorteil:

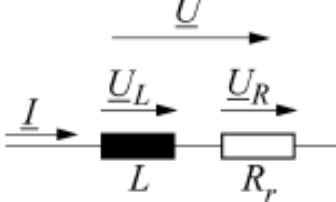
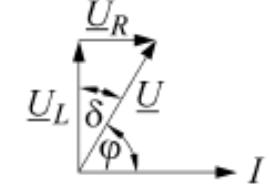
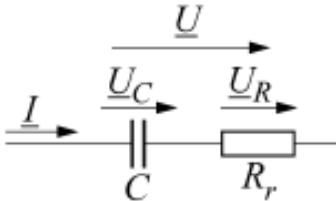
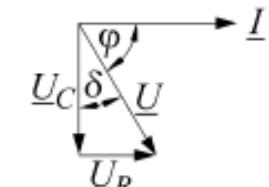
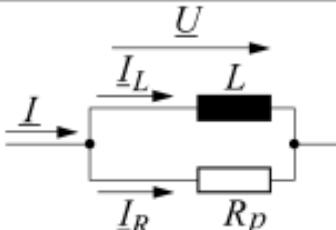
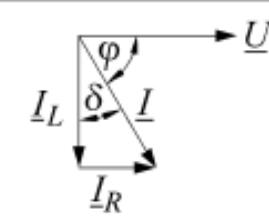
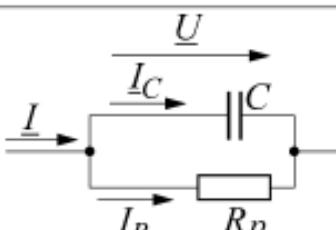
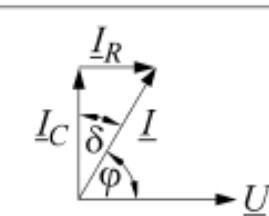
Punktmessung!



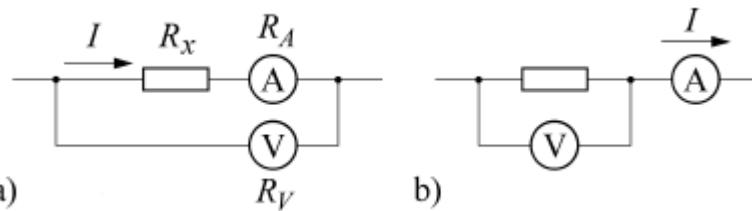
6. Induktive und kapazitive Sensoren

MESSSCHALTUNGEN ZUR AUSLESE VON KAPAZITIVEN UND INDUKTIVEN SENSOREN

Reihen- und Parallel-Ersatzschaltung für verlustbehaftete induktive und kapazitive Widerstände (Reaktanzen)

Ersatzschaltung	Zeigerdiagramm	$\tan \delta$
		$\frac{U_R}{U_L}$ $\frac{R_r}{\omega L}$
		$\frac{U_R}{U_C}$ $R_r \omega C$
		$\frac{I_R}{I_L}$ $\frac{\omega L}{R_p}$
		$\frac{I_R}{I_C}$ $\frac{1}{R_p \omega C}$

Kapazitive und induktive Sensoren: Messung der Effektivwerte



Bezeichnen U und I die gemessenen Effektivwerte, so ergibt sich der Betrag Z des Scheinwiderstandes

$$Z = \frac{U}{I}$$

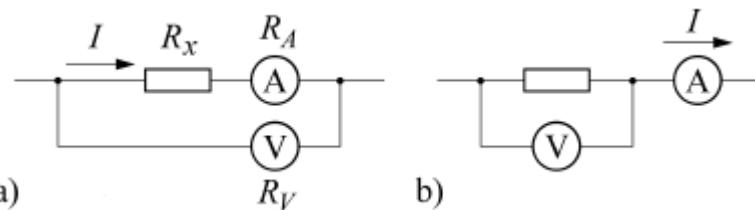
Der Scheinwiderstand Z enthält die Wirkkomponente R und die Blindkomponente X , mit $X = \omega L$ oder $X = 1/\omega C$

$$Z = R + jX \quad Z^2 = R^2 + X^2$$

Ist der Wirkwiderstand R zu vernachlässigen, so ergibt sich aus der Strom- und Spannungsmessung der Blindwiderstand:

$$\omega L = \frac{U}{I} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{U}{I}$$

Induktive Sensoren: Messung der Effektivwerte



Bei einer **Luftspule** können der Wirk- und der Scheinwiderstand getrennt gemessen werden.

Aus einer Messung mit Gleichspannung ergibt sich der Wirkwiderstand R

$$R = \left(\frac{U}{I} \right)_{\perp}$$

Aus einer Messung mit Wechselspannung der Scheinwiderstand Z

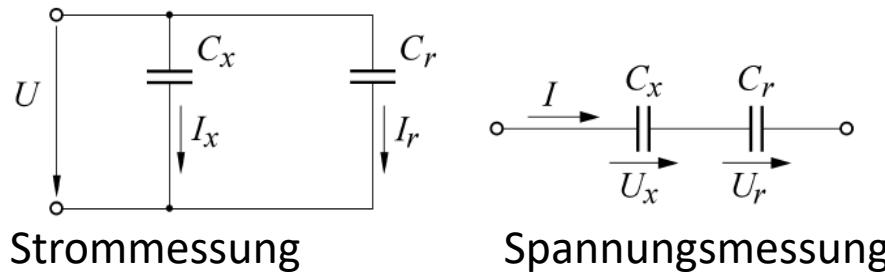
$$Z = \left(\frac{U}{I} \right)_{\sim}$$

Aus der Kombination der beiden Ergebnisse folgt für den Blindwiderstand

$$\omega^2 L^2 = Z^2 - R^2 = \left(\frac{U}{I} \right)_{\perp}^2 - \left(\frac{U}{I} \right)_{\sim}^2$$

Kapazitive Sensoren: Vergleich mit Referenzelement

Bestimmung einer Kapazität C_x mit Hilfe einer Vergleichskapazität C_r aus einer Messung mit Wechselspannung ω :



Bei gegebener Spannung U folgt bei einer Strommessung mit $U=U_x=U_r$:

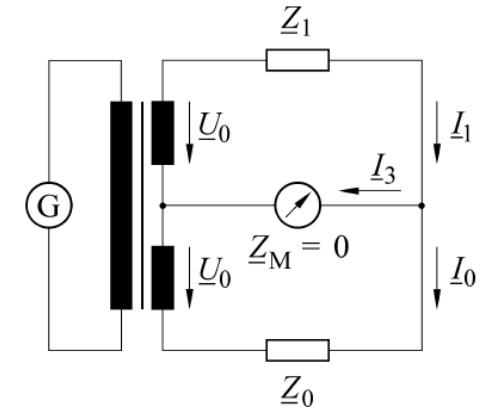
$$\frac{I_x}{\omega C_x} = \frac{I_r}{\omega C_r} \Rightarrow C_x = C_r \frac{I_x}{I_r}$$

Bei gegebenem Strom I folgt bei einer Spannungsmessung mit $I=I_x=I_r$

$$\omega C_x U_x = \omega C_r U_r \Rightarrow C_x = C_r \frac{U_r}{U_x}$$

Kapazitive und induktive Sensoren: Transformatorbrücke (Übertragerbrücke)

Zur **kontinuierlichen** Messung der Differenz zwischen einem Scheinwiderstand \underline{Z}_1 und einem bekannten Scheinwiderstand \underline{Z}_0



Der Transformator enthält zwei sehr genau ausgeführte Sekundärwicklungen, die zwei gleiche Sekundärspannungen \underline{U}_0 liefern.

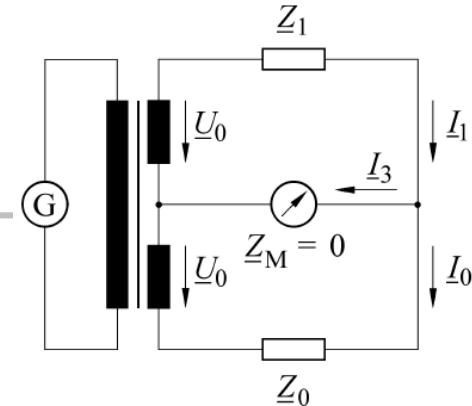
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_1} - \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = \underline{U}_0 \cdot \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} - \frac{1}{\underline{Z}_0} \right)$$

Für einen Kondensator als Beispiel mit $\underline{Z}_1 = 1/\omega C_1$ und $\underline{Z}_0 = 1/\omega C_0$ ist I_3 ein Maß für die Kapazitätsdifferenz:

$$\underline{I}_3 = \omega U_0 \cdot (C_1 - C_0)$$

Kapazitive und induktive Sensoren: Transformatorbrücke (Übertragerbrücke)

$$I_3 = \omega U_0 \cdot (C_1 - C_0)$$



Hat der verwendete Aufnehmer bei einem Arbeitspunkt die Kapazität C_0 und ändert sich diese auf $C_1 = C_0 + \Delta C$, so ist der kontinuierlich messbare Strom I_3 ein Maß für die Kapazitätsänderung ΔC :

$$I_3 = \omega U_0 \cdot \Delta C$$

Wie bei einer Ausschlag-Brücke wird der Gleichtaktanteil unterdrückt.
Wenn schnelle Kapazitätsänderungen erfasst werden müssen, kann die Frequenz der Speisespannung von 50 Hz bis auf 5 MHz erhöht werden.

Aufbau:

- Widerstände durch komplexe Impedanzen ersetzt

Kompensationsmethode / Abgleichbedingung:

$$\frac{Z_3}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1}$$

- Realteil abgeglichen wenn

$$R_1 R_3 - X_1 X_3 = R_2 R_4 - X_2 X_4$$

- Imaginärteil abgeglichen wenn

$$R_1 X_3 + X_1 R_3 = R_2 X_4 - X_2 R_4$$

oder:

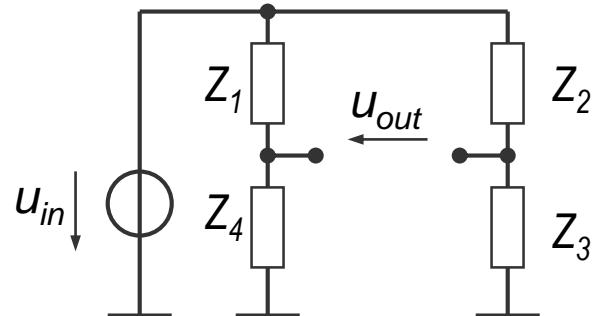
- Betrag abgeglichen wenn

$$|Z_2| \cdot |Z_4| = |Z_1| \cdot |Z_3|$$

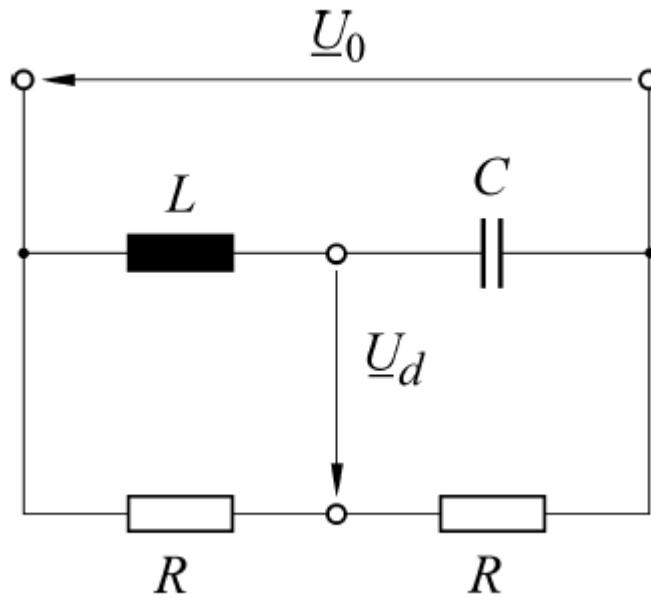
- Phase abgeglichen wenn

$$\varphi_2 + \varphi_4 = \varphi_1 + \varphi_3$$

→ Es gibt eine Vielzahl von Wechselspannungs-Messbrücken
(Zumeist benannt nach Ihren „Erfindern“: Wien, Maxwell, Schering, Hay, Owen etc.))



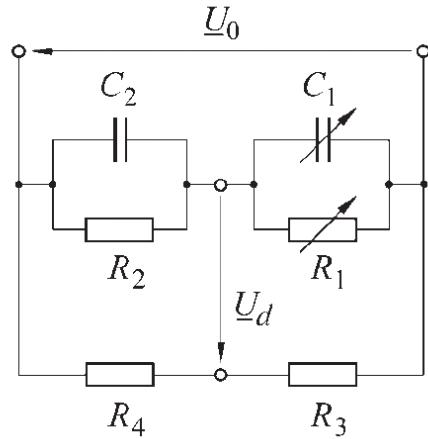
Beispiel einer nicht abgleichbaren Brücke



Wechselspannungsbrücken-Beispiele

Kapazität-Messbrücke nach Wien

(zur Vermessung verlustbehafteter Kondensatoren)



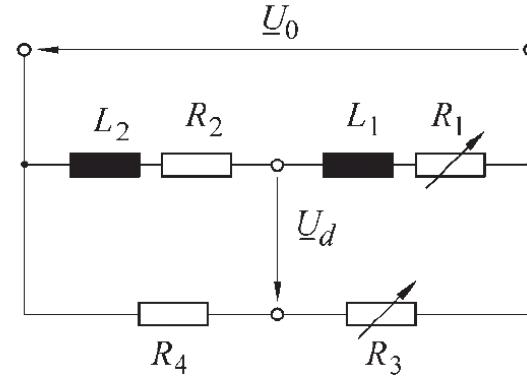
$$R_2 = \frac{R_4}{R_3} R_1$$

$$C_2 = \frac{R_3}{R_4} C_1$$

**Bestimmungsgleichungen
jeweils nach Abgleich gültig!**

Induktivitäts-Messbrücke nach Maxwell

(zur Vermessung verlustbehafteter Induktivitäten)

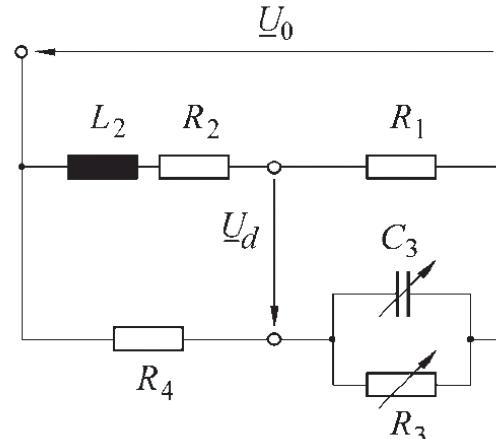


$$L_2 = \frac{L_1 R_4}{R_3}$$

$$R_2 = \frac{R_4}{R_3} R_1$$

Induktivitäts-Messbrücke nach Maxwell-Wien

(zur Vermessung verlustbehafteter Induktivitäten)

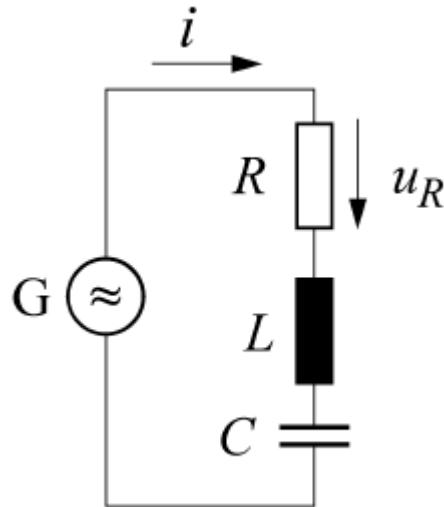


$$L_2 = R_1 R_4 C_3$$

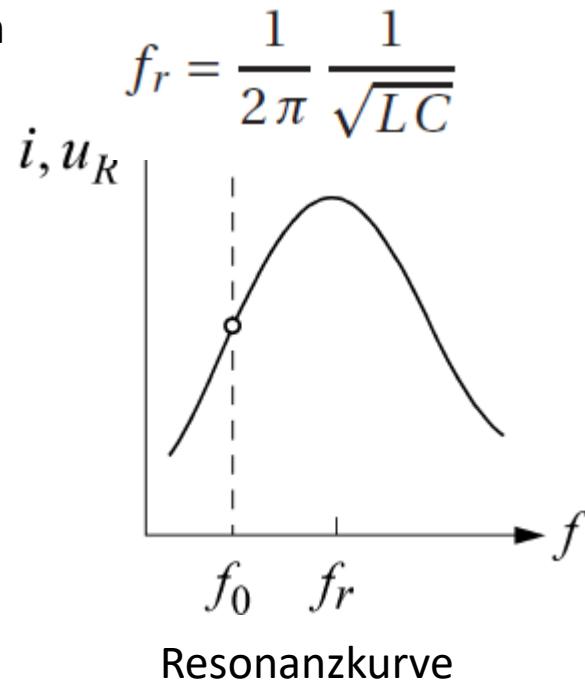
$$R_2 = \frac{R_1 R_4}{R_3}$$

Strommessung in einem fremderregten Schwingkreis

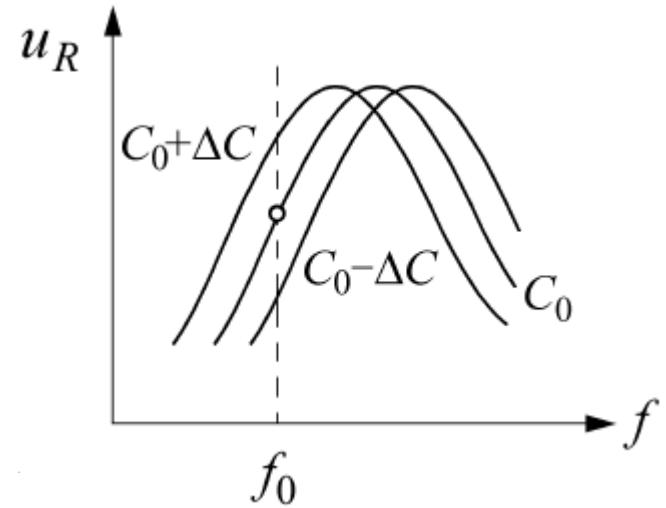
Bestimmung von L oder C durch eine Strommessung in einem Reihenschwingkreis



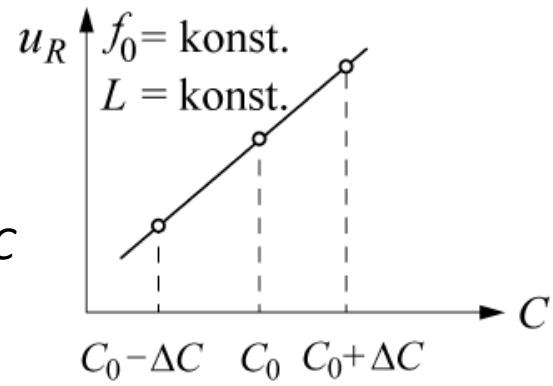
Schwingkreis mit dem Generator G , dem Widerstand R , der Induktivität L und der Kapazität C



u_R in Abhängigkeit von C bei festgehaltener Betriebsfrequenz f_0

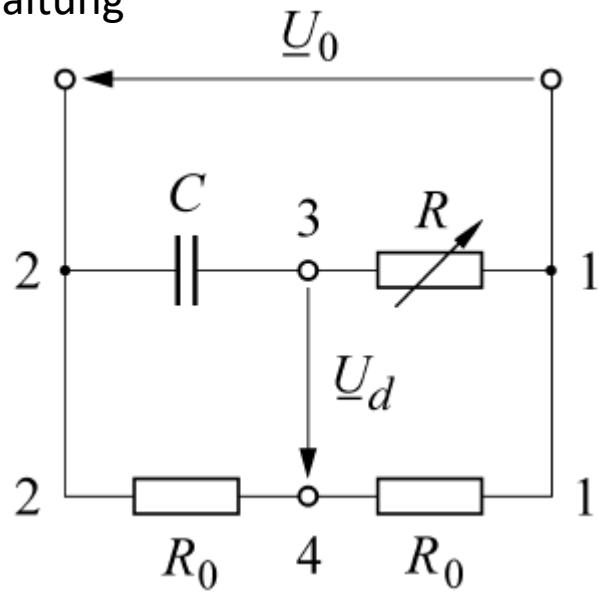


Wahl des Arbeitspunktes und der Betriebsfrequenz f_0

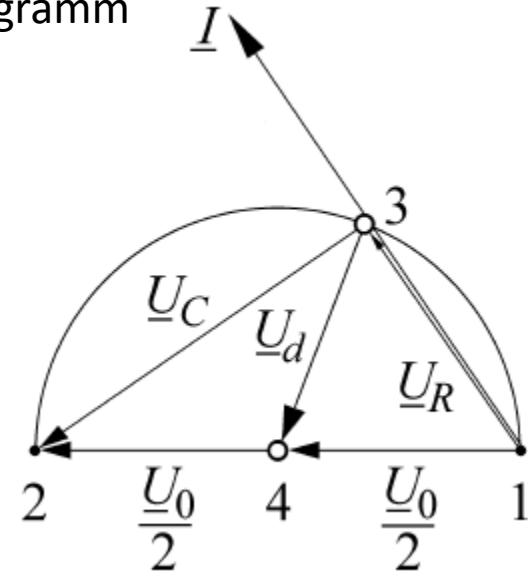


Phasenschieber-Brücke

Schaltung



Zeigerdiagramm



Die Spannung \underline{U}_C am Kondensator ist gegenüber dem Strom um 90° phasenverschoben (Punkte 3–2) und bildet mit \underline{U}_R immer einen rechten Winkel.

Wird der Widerstand R geändert, so ändert sich die Größe der Spannungen \underline{U}_R und \underline{U}_C , ihr Phasenwinkel bleibt aber konstant und der Anschlusspunkt 3 verschiebt sich längs eines über \underline{U}_0 geschlagenen Halbkreises.

Die Brücke wird benutzt, um die Phase einer Spannung zu verändern.

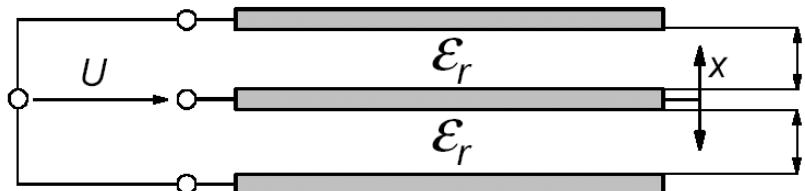
6.2 Induktive, kapazitive und resonante Sensoren

BEISPIELE VON KAPAZITIVEN , INDUKTIVEN UND RESONANTEN SENSOREN

Kapazitive Sensoren

- Die Kapazität kann mit Hilfe einer Brückenschaltung in ein Spannungssignal gewandelt werden.
- Wird bei einem Plattenkondensator der Plattenabstand a vergrößert oder verkleinert, so ändert sich seine Kapazität C indirekt proportional zum Abstand. Das ergibt eine nichtlineare Kennlinie. Je kleiner der Abstand wird, um so stärker steigt die Kapazität an.
- Verschiebt man die Kondensatorplatten seitlich, so verändert sich die wirksame Fläche. Die Kapazität ändert sich direkt proportional zur Fläche. Damit ergibt sich bei rechteckigen Platten ein linearer Zusammenhang und die Empfindlichkeit ändert sich nicht beim Durchlaufen des Messbereichs.
- So lässt sich beispielsweise der Flüssigkeitsstand einer leitenden Flüssigkeit messen, wenn man eine isolierte Elektrode einbringt. Als Gegenelektrode dient die Flüssigkeit selbst. Die Kondensatorfläche ist proportional zur Füllhöhe der Flüssigkeit.
- Eine Änderung Dielektrizitätskonstante ϵ lässt sich mit einer Längenänderung verknüpfen, wenn man ein zusätzliches Medium zwischen die Kondensatorplatten schiebt. Es ergibt sich je nach Stellung und Dielektrizitätskonstante des zusätzlichen Mediums eine wirksame mittlere Dielektrizitätskonstante. Zu dieser ist die Kapazität dann proportional.
- Bei elektrisch nichtleitenden Flüssigkeiten kann man zwei Elektroden einbringen. Die wirksame Dielektrizitätskonstante schwankt abhängig vom Anteil der Flüssigkeit und der Luft im Kondensatorspalt.

Differential-Kondensator



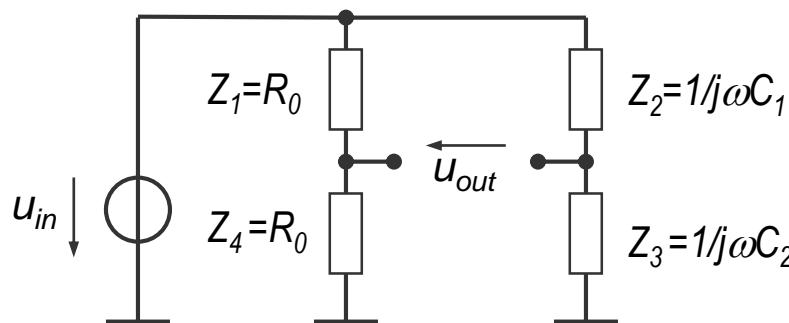
elektrische Parallelschaltung
zweier Kondensatoren

$$C = C_1 + C_2$$

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d_0 - x}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d_0 + x}, \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A \cdot d_0}{d_0^2 - x^2}$$

Praktische Anwendung:

beide Hälften des Differential-Kondensators in die diagonalen Zweige einer Messbrücke
(für Herleitung s. Brückenschaltung)

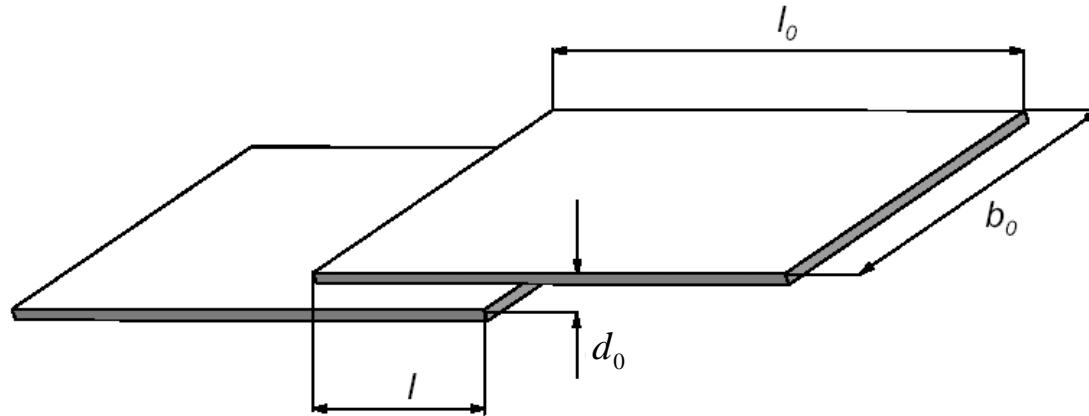


$$U_{out} = U_{in} \cdot \left[\frac{Z_3}{Z_3 + Z_2} - \frac{Z_4}{Z_4 + Z_1} \right]$$

$$\Rightarrow U_{out} = \frac{U_{in}}{2} \cdot \frac{x}{d_0}$$

→ Diagonalspannung der Brücke proportional zur Änderung des Plattenabstands x

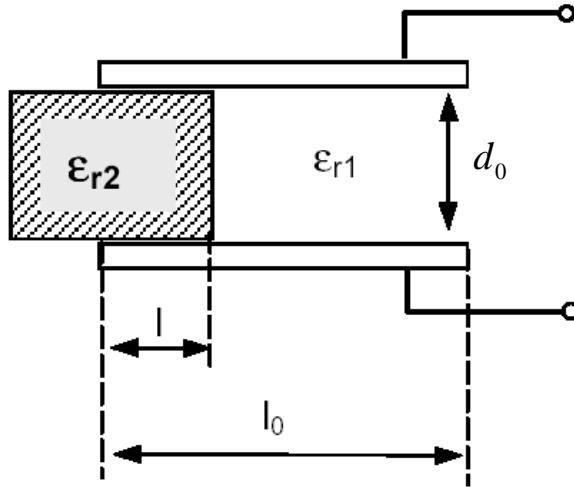
Parallelverschiebung der Kondensatorplatten



$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot b_0}{d_0} \cdot l = C_0 \frac{l}{l_0}$$

- Die Kapazität ist der Länge l proportional.
- Damit eignet sich auch diese Kondensatoranordnung zur Weg- / Positionsmessungen.
- Die Kondensatorplatten müssen bei ihrer Bewegung exakt parallel geführt werden!

Kondensator mit variablem Dielektrikum z.B. als Füllstandsensor



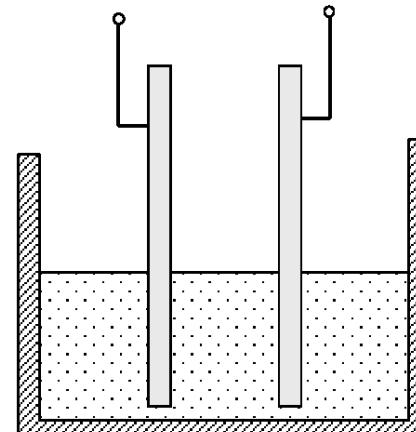
$$\text{Kapazität: } C = C_1 + C_2$$

$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot b_0 \cdot (l_0 - l)}{d_0} + \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot b_0 \cdot l}{d_0}$$

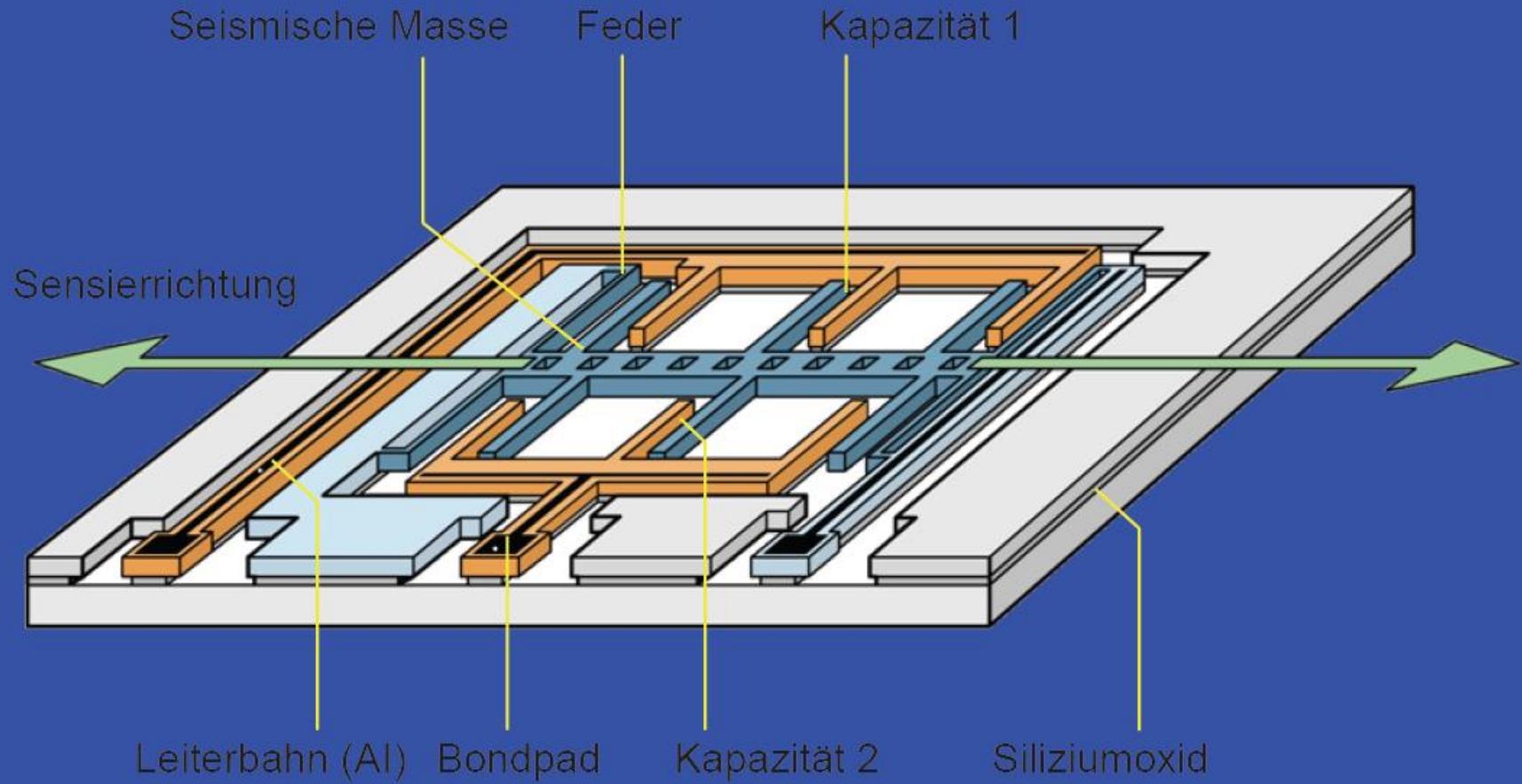
$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \cdot b_0}{d_0} \cdot [\epsilon_{r1} \cdot (l_0 - l) + \epsilon_{r2} \cdot l]$$

Anwendung: Füllstandmessung

Tank gefüllt mit einer Flüssigkeit
oder einem Schüttgut mit bekannten
dielektrischen Eigenschaften

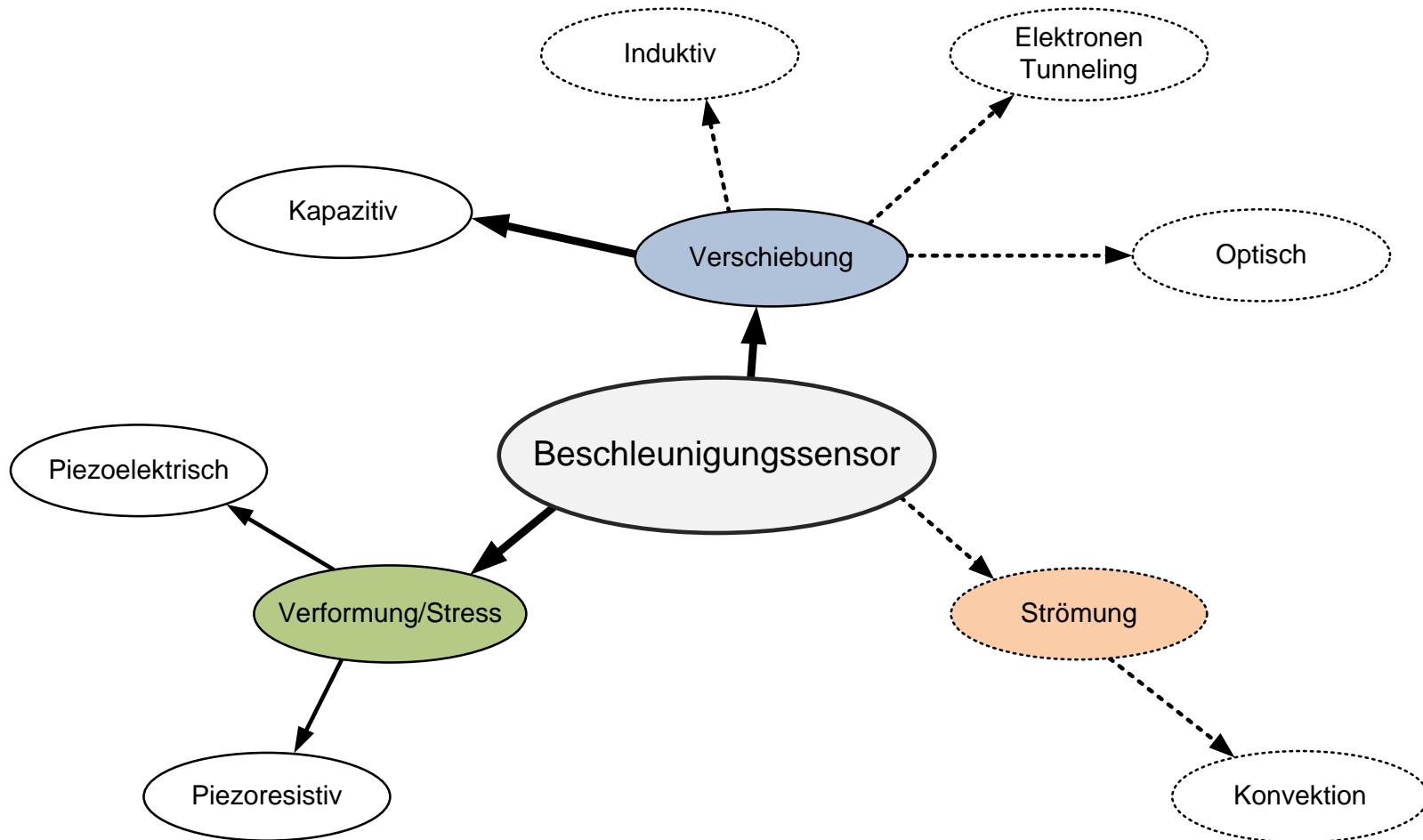


Beschleunigungssensor



Quelle: Bosch

Beschleunigungssensor – Klassifizierung



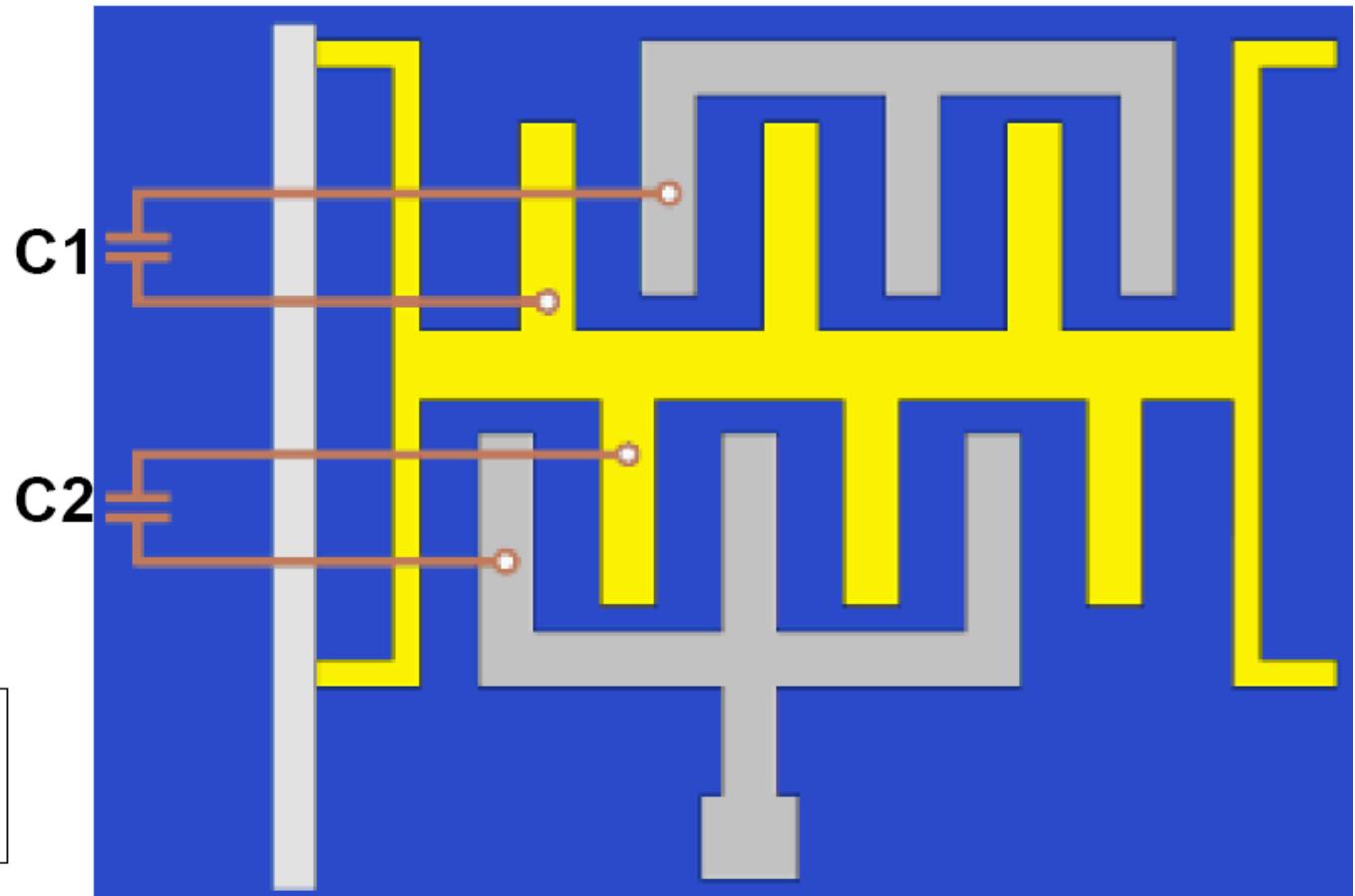
Beispiele von Beschleunigungen

$$1 \text{ g} \hat{=} 9,80665 \text{ m/s}^2$$

- Waschmaschine im Schleudergang $\hat{=}$ 300 g auf den Trommelinhalt
- Dragster-Fahrzeug beim Start $\hat{=}$ 6 g
- ICE $\hat{=}$ 0,05 g
- Tennisball $\hat{=}$ 1000 g
- Achterbahn (Silverstar Europa-Park Rust) $\hat{=}$ 4 g
- Ab 30 km/h wird bei einer negativen Beschleunigung von 2 g ein Airbag in ca. 50 ms ausgelöst

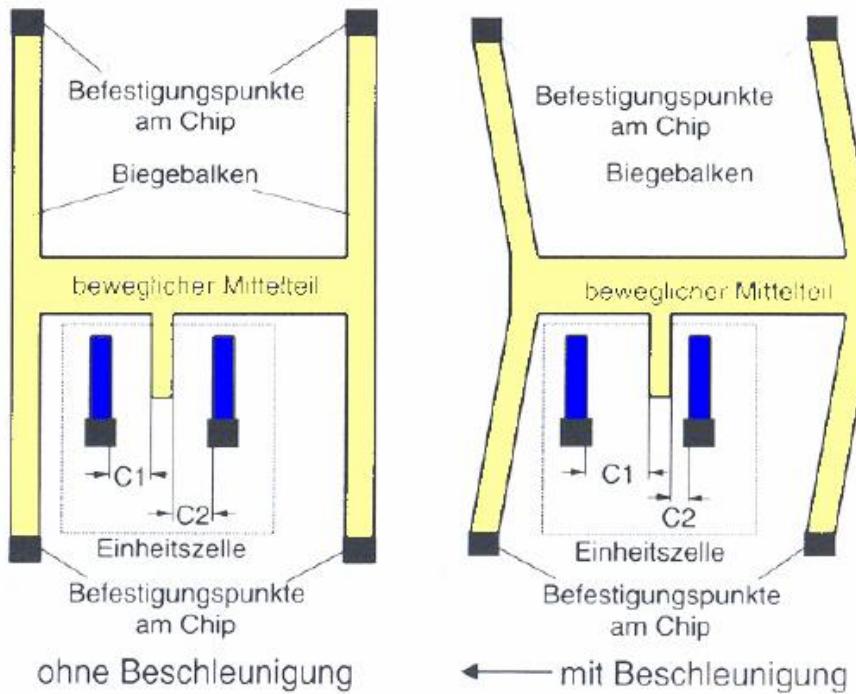
Beschleunigungssensor

Signal- auswertung



Quelle: Bosch

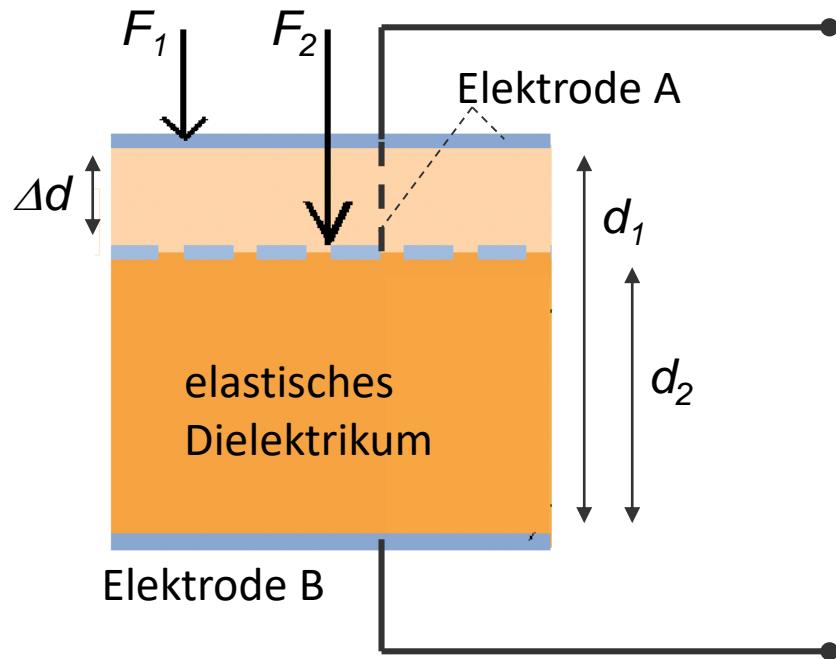
Beschleunigungssensor



Balkenlänge:	200 µm
Kantenlänge:	2 µm
Masse:	0,1 µg
Schock:	2000 g
C1,C2:	0,1 pF
Anzahl:	42
Meßbereich:	50 g
Auflösung:	0,01% - 0,005 g
Auslenkung:	0,2 Å ($1 \text{ Å} = 10^{-4} \mu\text{m}$)
Änderung C:	$20 \cdot 10^{-18} \text{ F}$
Dynamik:	1 kHz

Quelle: Bosch

Kraftmessung mit kapazitivem Sensor



Plattenkondensator
mit elastischem
Dielektrikum

Kapazitätsänderung:

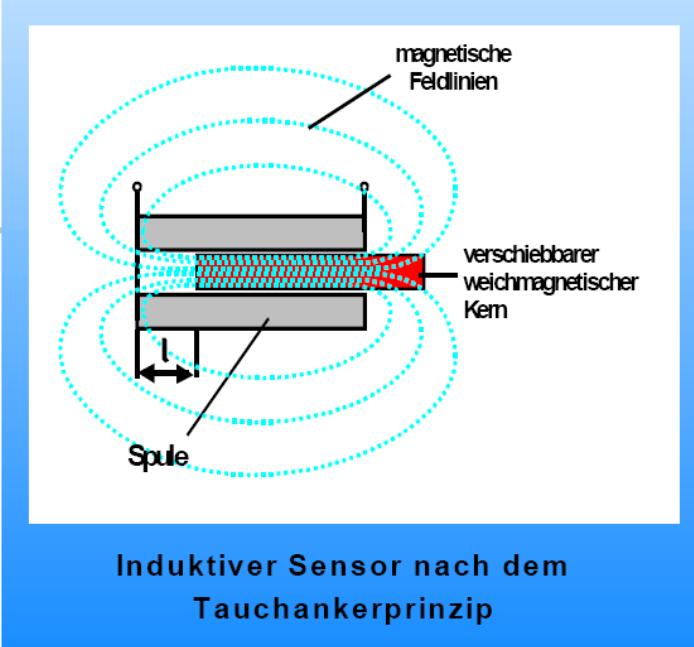
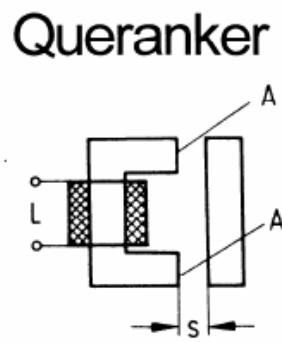
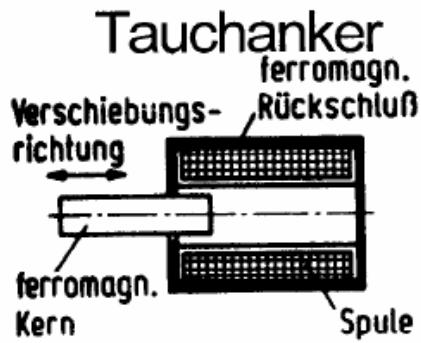
$$\Delta C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{\Delta d}$$

Elektrodenabstand d umgekehrt proportional zur Kraft $F \rightarrow C \sim F$

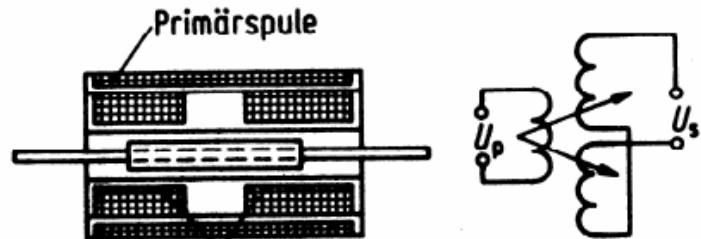
Induktive Sensoren

$$L = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot \frac{A}{l}$$

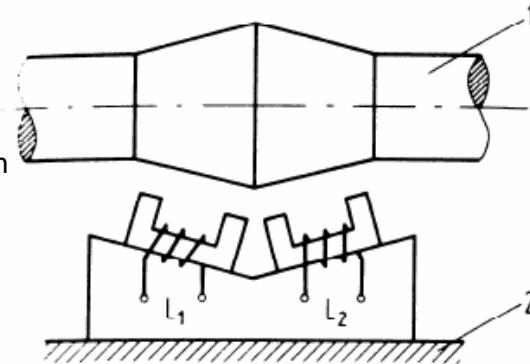
- Entweder wird die im Luftspalt durchflutete Fläche A variiert, wie beim Tauchanker, oder die Länge des Luftspalts l, wie beim Queranker.
- Einen linearen Verlauf der Kennlinie erreicht man durch eine Anordnung als Differentialtransformator, bei dem sich zwei Teilsysteme komplementär ergänzen, und durch die Verschaltung in einer Halbbrücke.
- Als Differentialtransformator benutzt man eine Anordnung mit einer Primärspule, zwei Sekundärspulen und einem beweglichen weichmagnetischen Kern. Als Ausgangssignal benutzt man die Differenz der in den Sekundärspulen induzierten Spannungen.



Differentialtransformator

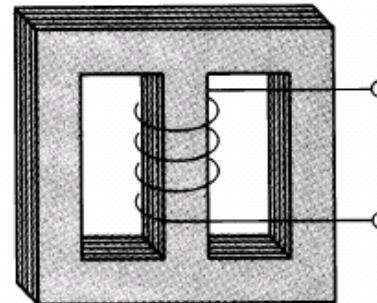
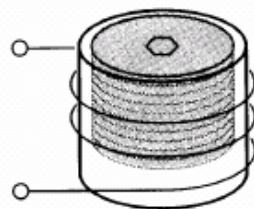
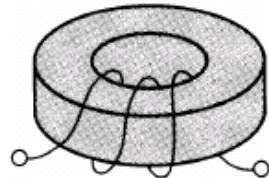


Einsatzbeispiel:
Messung des Abstandes zwischen Turbinenwelle (1) und Gehäuse (2)

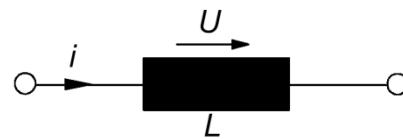


Realisierung einer Induktivität

Drahtwicklungen auf einem Weicheisen-Träger



$$L = \frac{w^2}{R_m} = \frac{w^2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{l}$$



w : Anzahl der Windungen

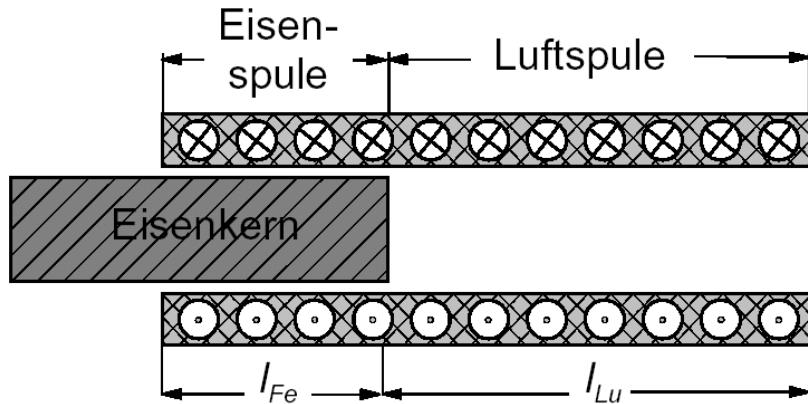
R_m : magnetischer Widerstand

l : Weglänge der magnetischen Feldlinien

μ_0 : magnetische Feldkonstante ($1,256 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am)

μ_r : Permeabilitätszahl (z.B. für Luft = 1, für Eisen = 10^3 - 10^4)

Induktiver Tauchanker-Wegsensor

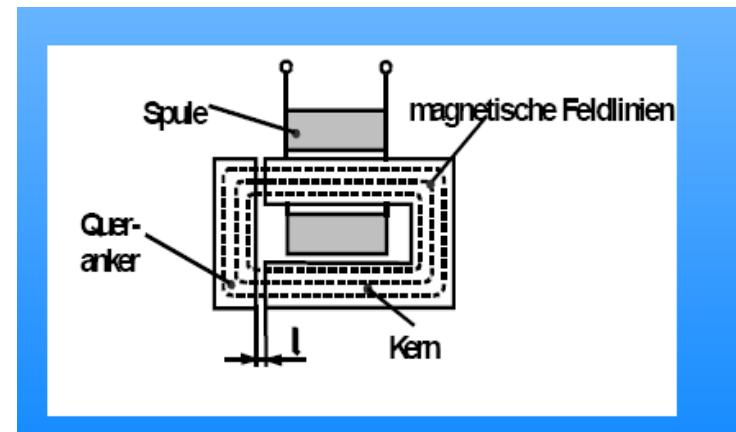


$$R_m = \underbrace{\frac{l_{Fe}}{\mu_0 \cdot \mu_{r_{Fe}} \cdot A_{Fe}}}_1 + \underbrace{\frac{l_{Lu}}{\mu_0 \cdot \mu_{r_{Lu}} \cdot A_{Lu}}}_2 + \underbrace{\frac{l_a}{\mu_0 \cdot \mu_{r_{Lu}} \cdot A_a}}_3$$

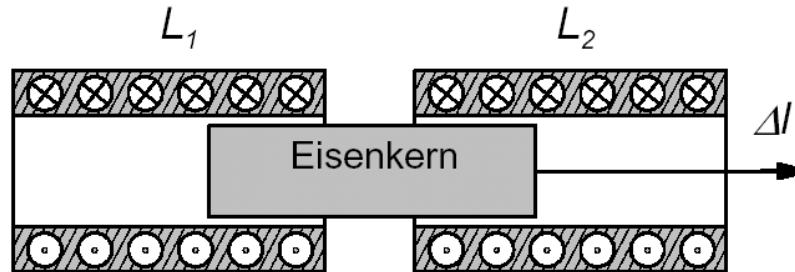
es gilt: $\mu_{r_{Fe}} \gg \mu_{r_{Lu}}$; $\mu_{r_{Lu}} \approx 1$; $A_a \gg A_{Lu}$

$$R_m \approx \frac{l_{Lu}}{\mu_0 \cdot A_{Lu}} \quad \Rightarrow L \approx \frac{w^2 \cdot \mu_0 \cdot A_{Lu}}{l_{Lu}}$$

- 1) im Eisen
- 2) innerhalb der Luft in der Spule
- 3) außerhalb der Spule



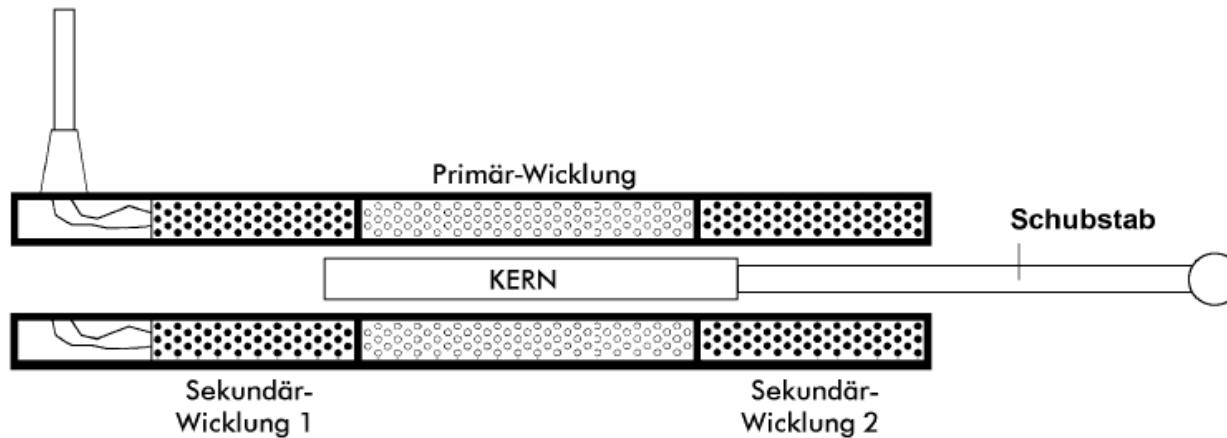
Differential-Tauchankergeber



- Anordnung in Brückenschaltung:
- Diagonalspannung der Brücke in etwa proportional zur Position des Eisenkerns.

LVDT-Positionssensoren

Linear variable differential transformer



- **Primärwicklung** wird mit einer Wechselspannung (Erregerspannung oder Primärspannung) gespeist
- Wechselspannung wird über den **Kern** in die beiden **Sekundärwicklungen** induziert
- Abhängig von der axialen Verschiebung des Kerns verändert sich die induzierte Spannung in den Sekundärwicklungen.

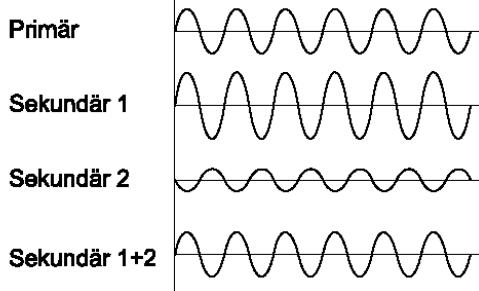
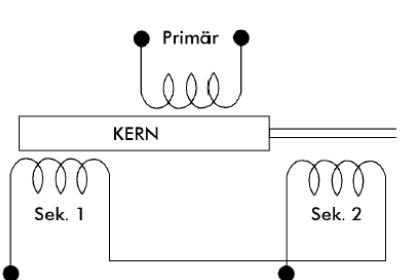
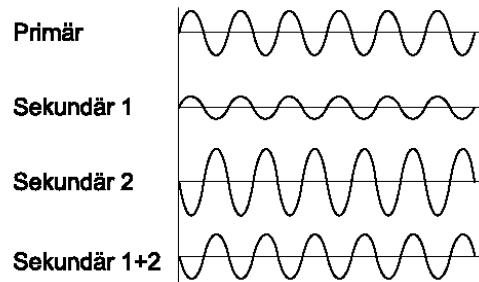
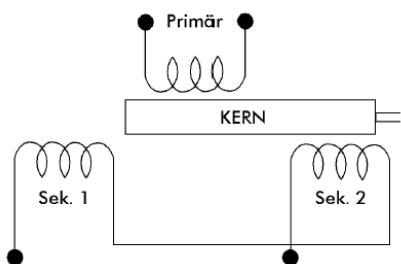
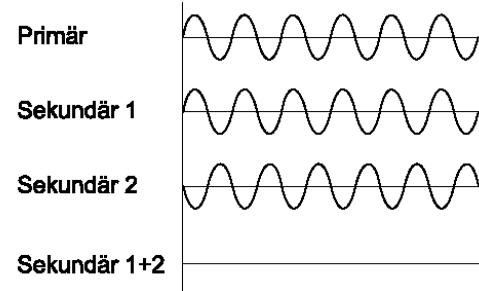
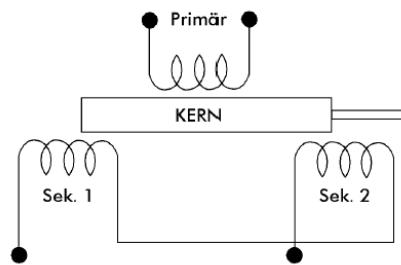
Sie wird größer in jener Sekundärwicklung, in die sich der Kern von der Mittelstellung aus bewegt.

Die Spannungen der Sekundärwicklungen werden entweder:

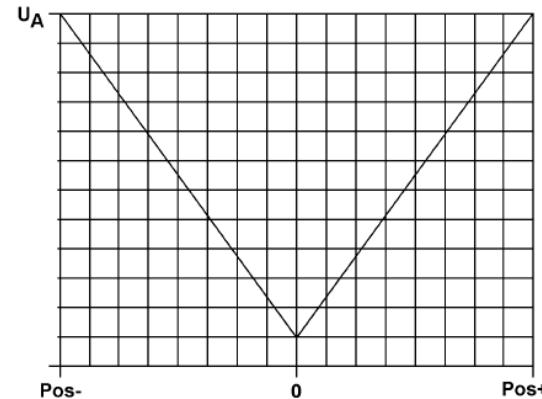
V1: summiert / subtrahiert und dann gleichgerichtet (rechst/links nicht eindeutig)

V2: oder einzeln gleichgerichtet und dann die Differenz gebildet (eindeutig über gesamten Bereich)

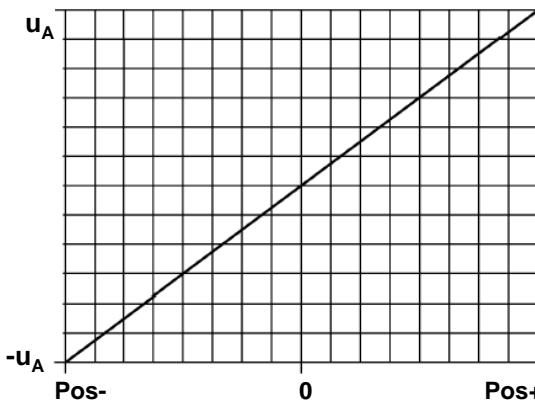
LVDT-Positionssensoren



V1: 1 u. 2 summiert und dann gleichgerichtet



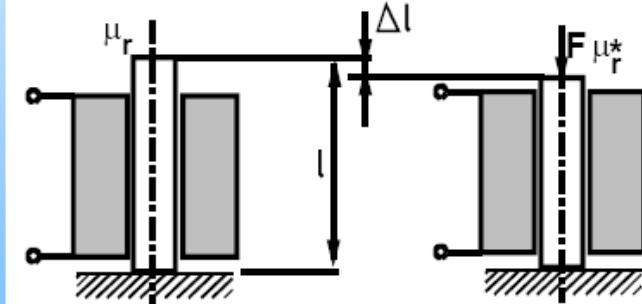
V2: 1 u. 2 gleichgerichtet und dann die Differenz



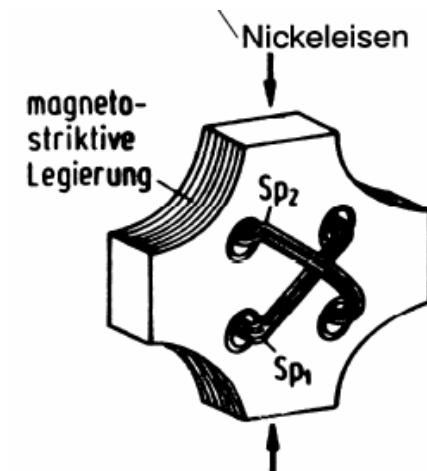
Magnetostriktive Sensoren

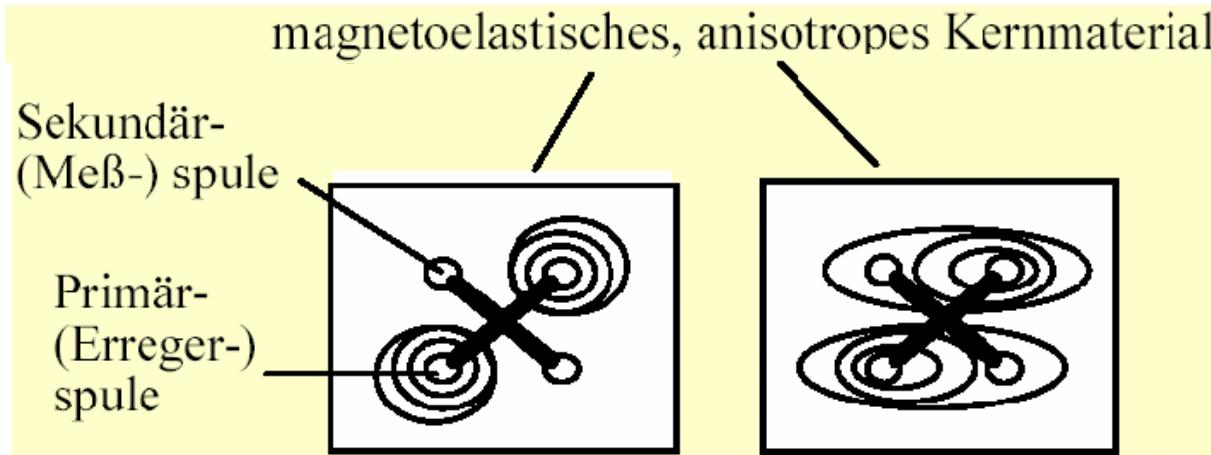
$$\mu_r = \mu_r(\sigma)$$

- Auch die Beeinflussung der Permeabilitätszahl μ_r lässt sich zur Änderung der Induktivität benutzen.
- Bei bestimmten Eisen-Nickel-Legierungen ist μ_r von der Normalspannung abhängig, die auf das Material einwirkt. Bei Zugbeanspruchung nimmt μ_r zu, bei Druck nimmt es ab.
- Bei statischer Beanspruchung wird dadurch die Induktivität einer Spule geändert, bei dynamischer Beanspruchung wird zusätzlich eine Spannung in der Spule induziert.
- Anwendung findet der Effekt in magnetostriktiven Kraftmessdosen. Die Längenänderungen sind gering, umso größer sind die Messbereiche. Sie reichen von 10^3 N bis 10^6 N.
- Auch in einem magnetoelastischen Transformator kann man diesen Effekt nutzen. Primärwicklung und Sekundärwicklung sind senkrecht zueinander angeordnet. Solange die magnetostriktive Legierung unbelastet ist, wird die Sekundärspule von den Magnetlinien der Primärspule nicht durchsetzt. Erst wenn die Permeabilität durch Belastung der Legierung anisotrop wird, induzieren Magnetlinien vom Feld der Primärspule Spannungen in der Sekundärspule. Man kann mit dieser Anordnung auch Kräfte vergleichen. Wenn man den Sensor in zwei Richtungen belastet, kann man den Effekt kompensieren.



Magnetoelastischer Sensor





Aufbau:

Zwei zueinander orthogonale Spulen in ferromagnetischem Material

Prinzip:

Permeabilität ändert sich bei mechanischer Belastung,
magnetisch isotropes Material wird unter Druck anisotrop

Bild links: Ohne Krafteinwirkung - Induktion symmetrischer Feldlinien

Bild rechts: Mit Krafteinwirkung -Vorzugsrichtungen verändern Magnetisierung in
Primärspule. Spannung wird in Sekundärspule induziert

7. Schwingende und resonante Sensoren

MESSSCHALTUNGEN ZUR AUSLESE VON SCHWINGENDEN SENSOREN

Anmerkung:

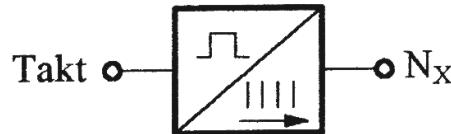
Da dieser Punkt für die meisten Studierenden schon bekannt ist, ist eine Zusammenfassung als Download im Netz / ILIAS:

→ ***Wiederholung 1-Digitale Zählschaltungen***

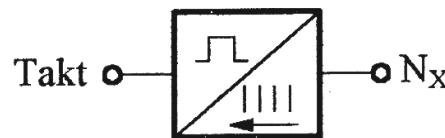
7. Schwingende und resonante Sensoren

WIEDERHOLUNG: DIGITALE ZÄHLSCHALTUNGEN

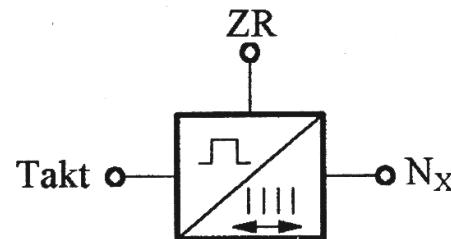
Zähler: Schaltsymbole



☞ **Vorwärtszähler**

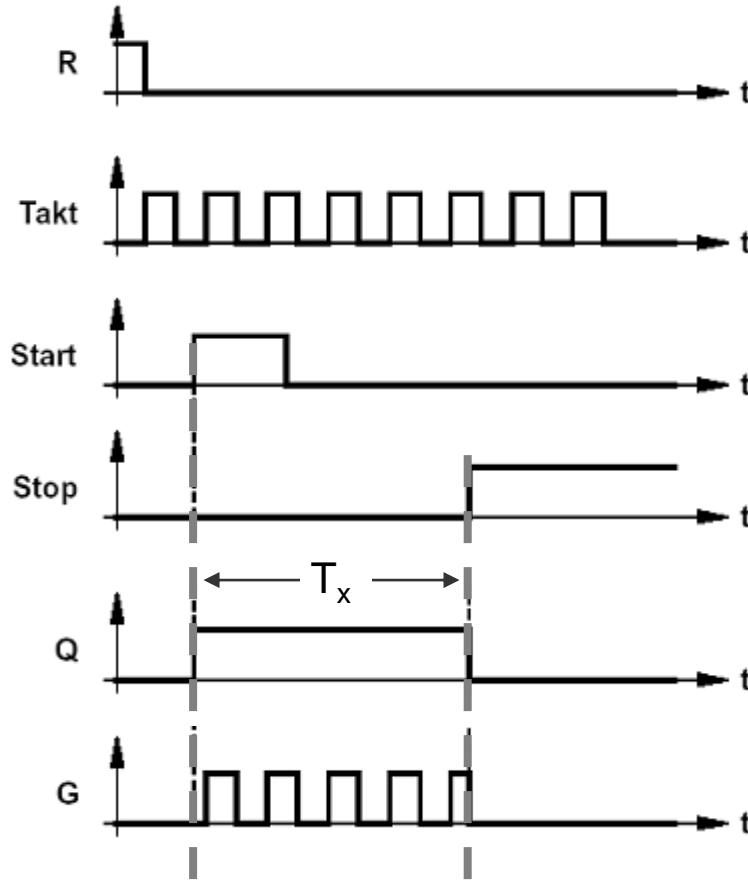
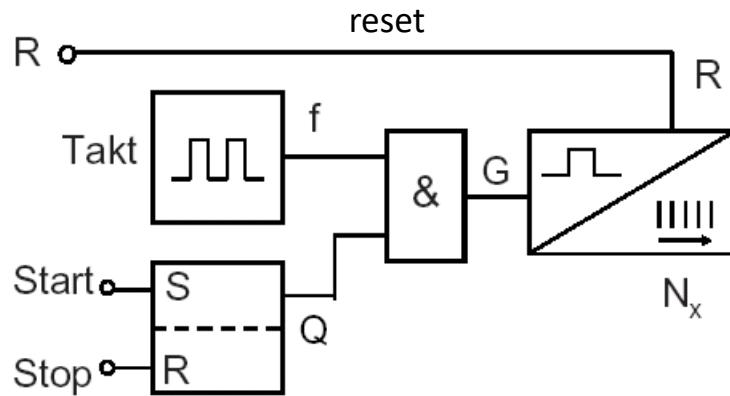


☞ **Rückwärtszähler**



☞ **Vorwärts- / Rückwärtszähler**

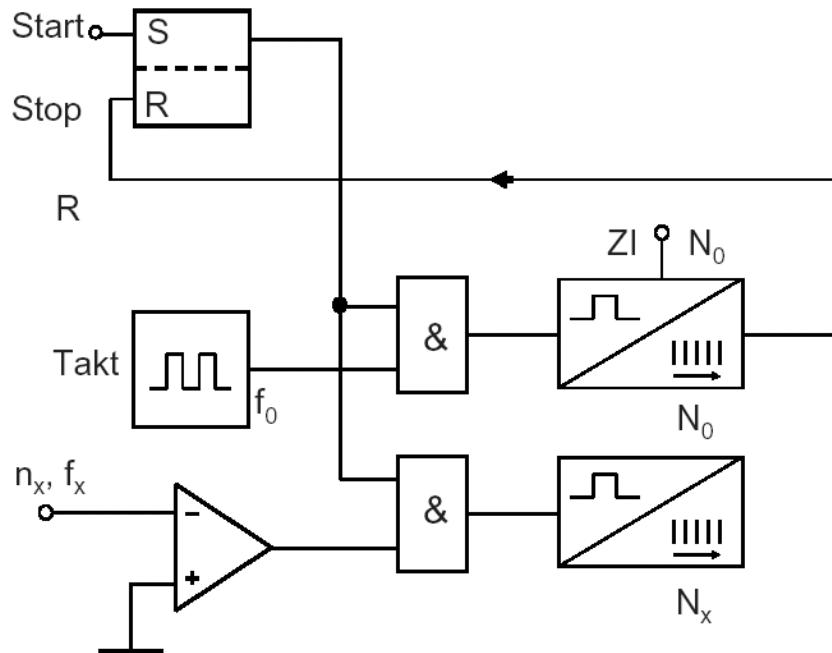
Digitale Zeitintervallmessung



Prinzip:

- Referenz-Takt-Impulse werden in der Zeit T_x zwischen *Start* und *Stop* gezählt
- Messergebnis ist der Zählerstand $N_x \rightarrow$ Zeitintervall $T_x = N_x / f$
- Auflösung: $\pm 0,5 / f$
→ Taktfrequenz f vorzugsweise $\gg 1 / \text{Messdauer } T_x$

Digitale Frequenzmessung / Impulsratenmessung



- Umwandlung des analogen Signals in eine Folge von Rechteckimpulsen
- Die Impulse laufen während der Messzeit T_g in einen Zähler und führen dort zum Zählerstand N_x :

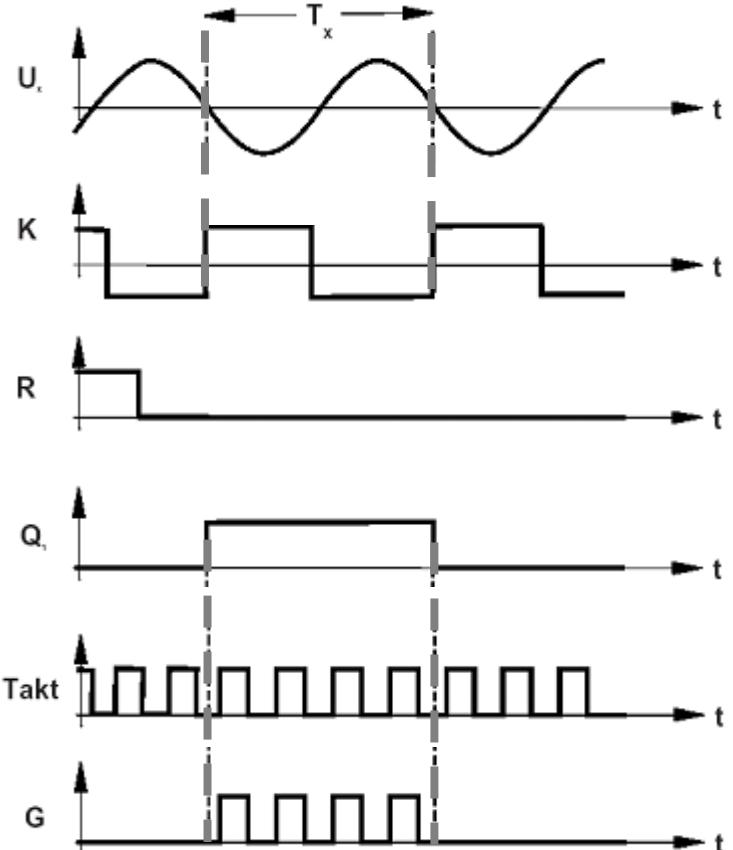
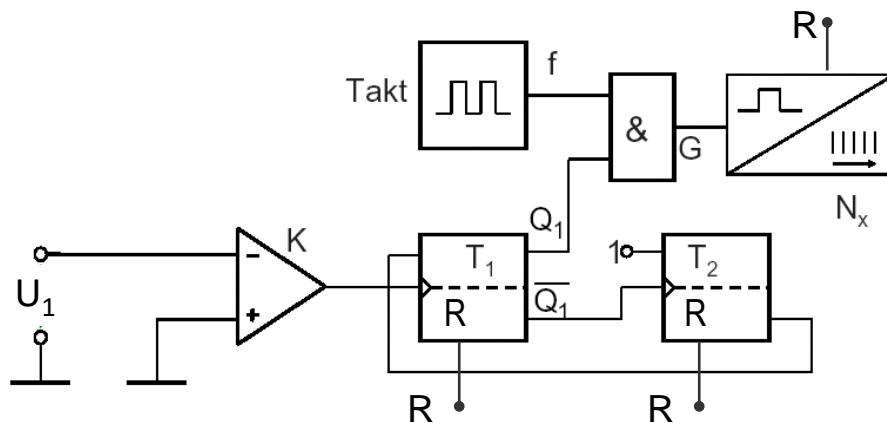
$$\text{Frequenz: } f_x = N_x / T_g$$

$$f_x = f_0 \cdot N_x / N_0$$

Messzeit T_g wird aus einer bekannten, konst. Frequenz f_0 abgeleitet

- Startimpuls setzt zunächst RS-FF → Q-Ausgang öffnet die vor den beiden Zählern als Tore liegenden UND-Gatter
- Zähler ZI generiert ein Stop-Signal N_0 -Takte nach dem Start-Trigger
d.h. nach der Zeit $T_g = N_0 / f_0$
- Sinnvolle Wahl des Verhältnisses von Messintervall T_g zu Messfrequenz f_x :
 $T_g \gg 1/f_x$

Digitale Periodendauermessung



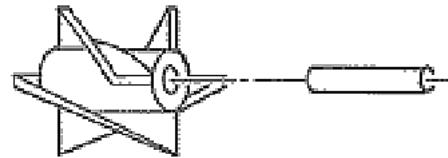
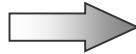
- Komparator erzeugt aus Analogsignal das Start bzw. Stoppsignal
→ Gate-Zeit (Q_1) entspricht einer Signal-Periode
- Freischalten des eines Zählvorganges: T_1 und T_2 über Reset-Eingang zurücksetzen
(T_2 bewirkt Sperrung weiterer Zählvorgänge nach einer Periode)
- Messergebnis ist der Zählerstand N_x
→ **Periodendauer** $T_x = N_x / f$
- Sinnvolle Wahl des Verhältnisses von Taktfrequenz f
zu Periodendauer T_x : $f \gg 1 / T_x$

7.2 Schwingende und resonante Sensoren

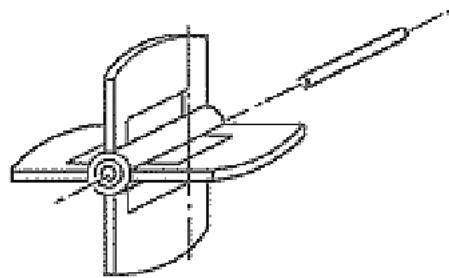
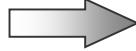
BEISPIELE VON SCHWINGENDEN ODER RESONANTEN SENSOREN

Durchflussmessung mit Messflügel-Zählern

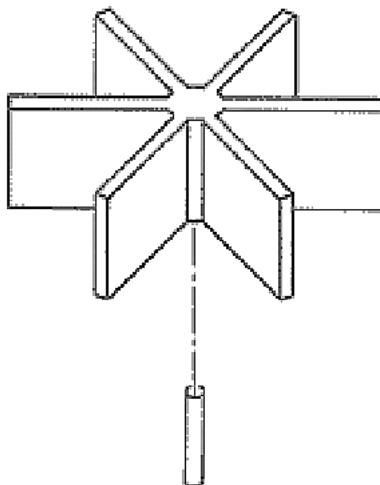
Strömung



Strömung



Strömung

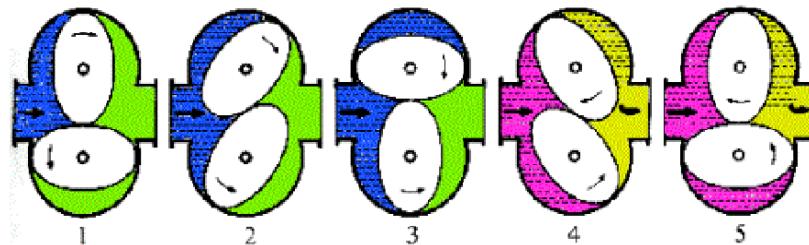


- Gehören zur Gruppe der **Strömungszähler**
- Anzahl der Laufradumdrehungen proportional zum durchgeflossenen Volumen
- Empfindlich gegenüber Einlaufstörungen (Strömungsprofile)
→ z.B. Strömungsgleichrichter; Drallreduzierer notwendig
- Auch bei großen Nennweiten sehr kompakt
- geringe Druckverluste
- großer Messbereich
- einsetzbar bei niederviskosen (dünnflüssigen) Medien, die frei von Feststoffen sind.

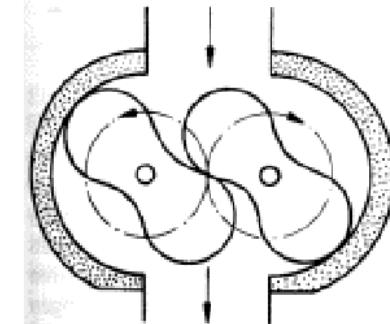
- Zähler dieser Bauart werden bevorzugt bei viskosen und schmierfähigen Medien (Öle, Brennstoffe) eingesetzt.
- Sonderformen auch bei nichtschmierenden, niederviskosen Medien im Einsatz.
- Auch für diese Durchflussmesser muss das Medium frei von Feststoffen sein.
- teilweise hoher bleibender Druckverlust.

Beispiele:

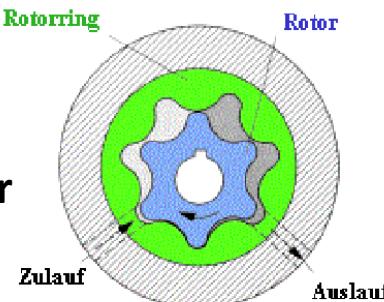
Ovalradzähler



Drehkolben-Gaszähler



Zahnringzähler



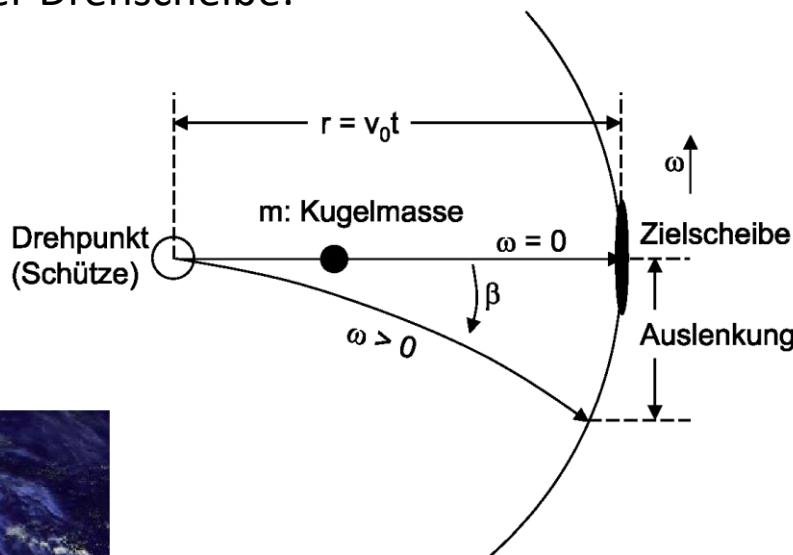
Ausgangspunkt: Coriolis-Kraft:

Beispiel 1:

Schiessstand auf einer Drehscheibe:

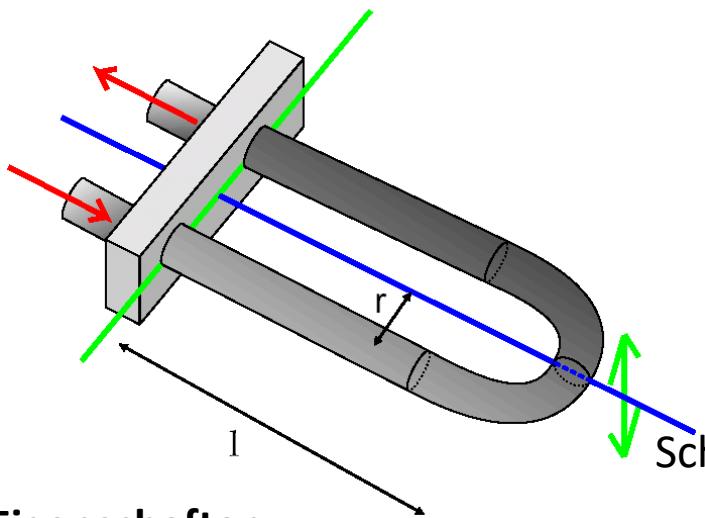
Coriolis Kraft F_c
Coriolis Beschleunigung a_c

$$F_c = m \cdot a_c = 2 \cdot m \cdot v_0 \cdot \omega$$



Beispiel 2:

Tiefdruckgebiet 'saugt' die umgebende Luft spiralförmig ein



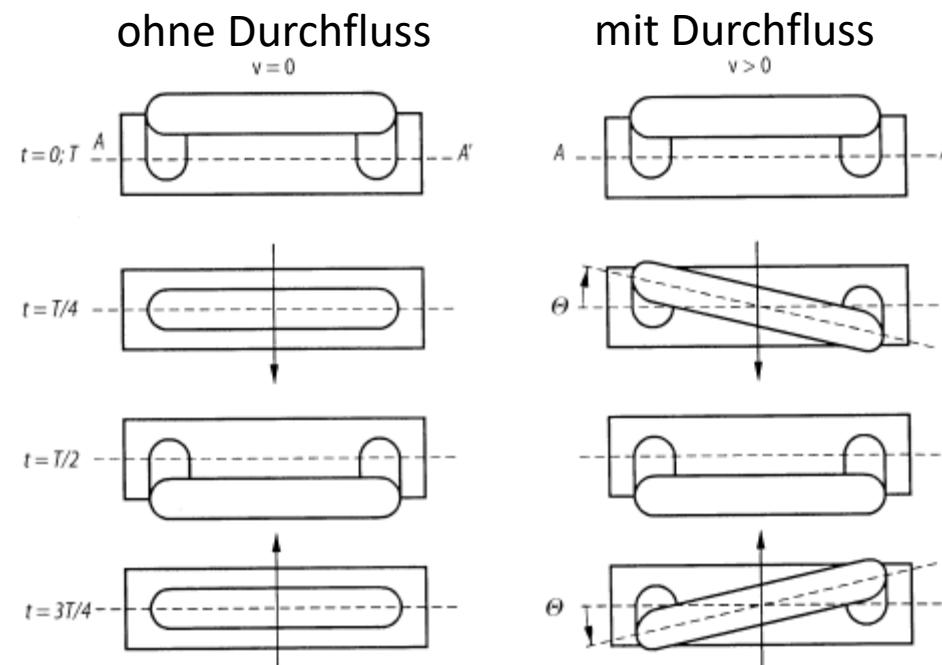
Eigenschaften:

- + Massendurchfluss $q_m \sim \Theta$
- + Messunsicherheit ca. $\pm 0,3\%$
- + Großer Durchflussmessbereich
(typisch von 3 kg / h bis hin zu 680000 kg / h)
- + Kurze Messdauer (typisch ca. 10 ms und 10 s)
- hohen Anschaffungskosten
- Empfindlich gegenüber Vibrationen

Messprinzip:

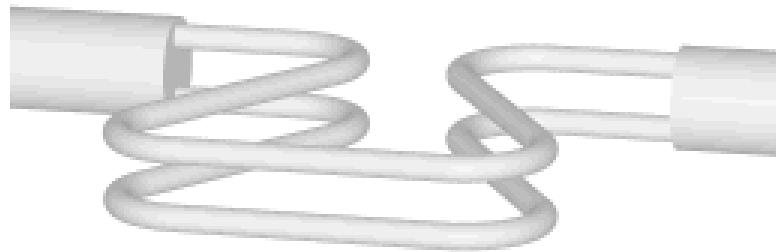
Ein zumeist U-förmig gebogenes Rohr, das vom Messmedium durchströmt wird, wird in Schwingungen versetzt.

Aus den Schwingungen des Massenstroms resultiert ein Moment, das das Rohr um die Hauptachse verdreht. Die Verdrehung wird dann von Sensoren gemessen und auf den Massenstrom umgerechnet

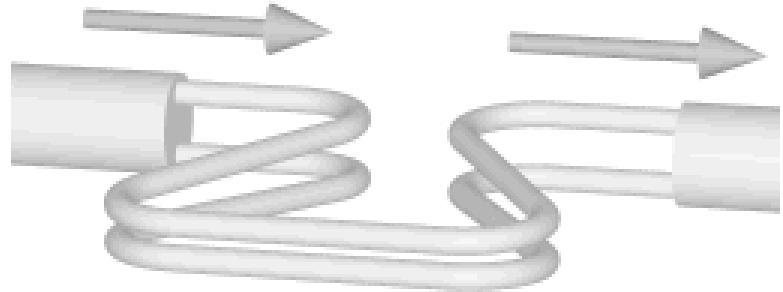


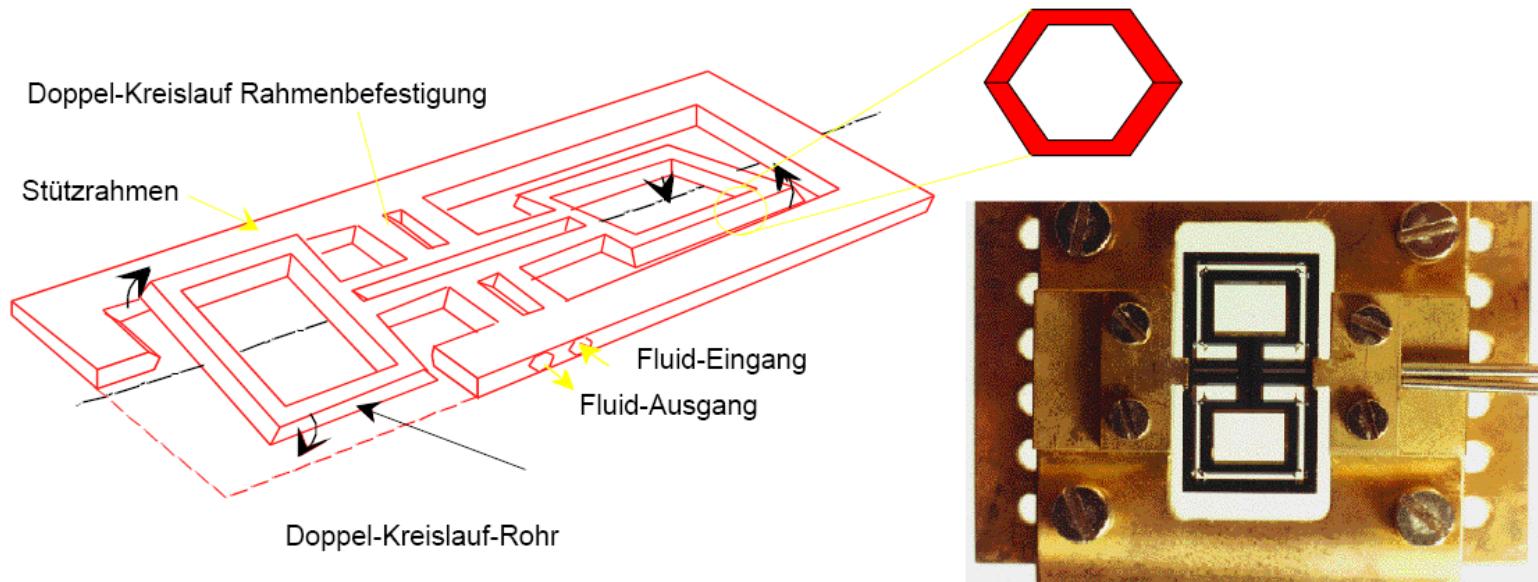
Coriolis-Massenstrommessung

ohne Durchfluss



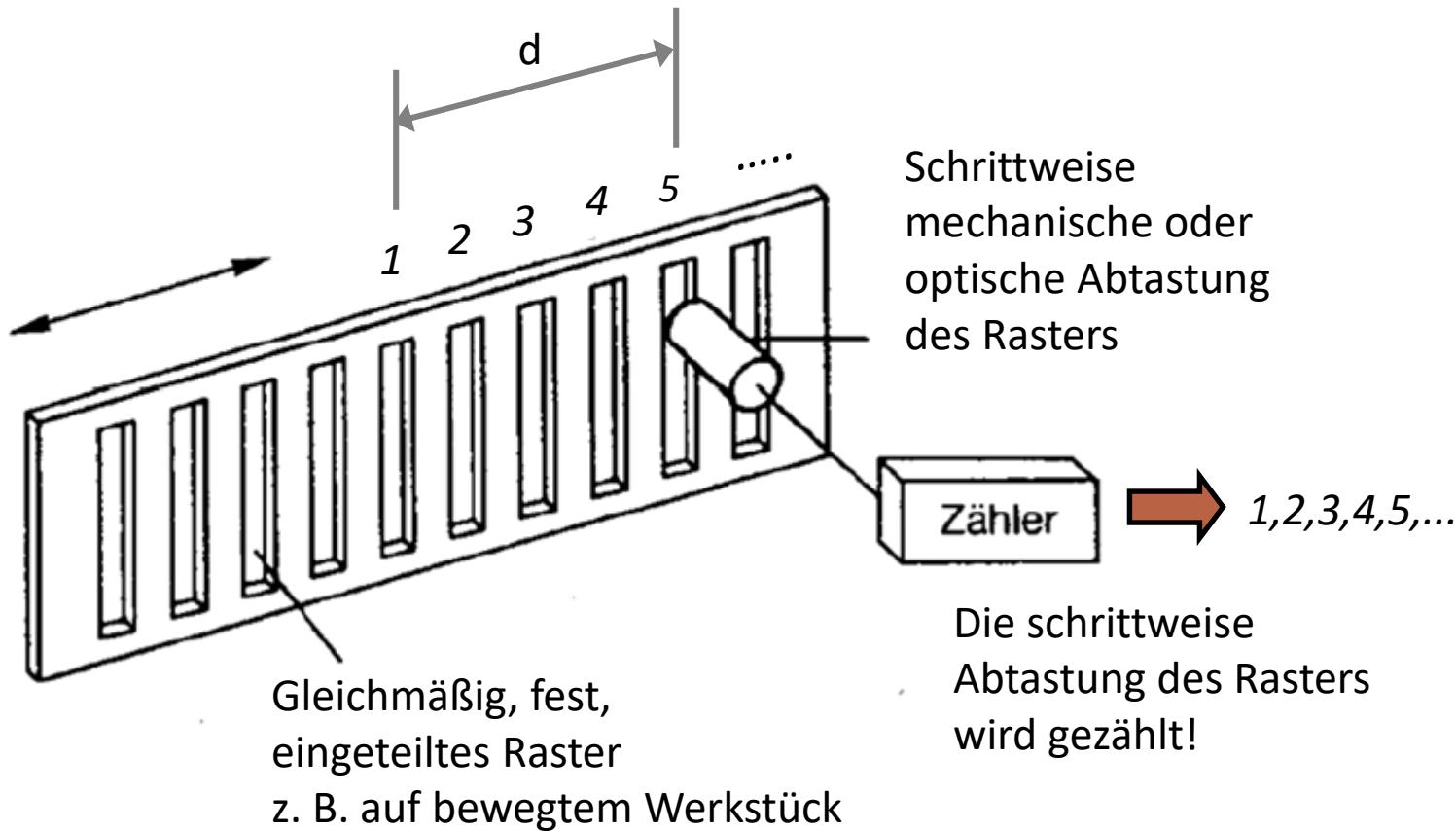
mit Durchfluss





Quelle: P. Enoksson, Royal Institute of Technology, Dept. of signals, sensors & systems,
Stockholm, Sweden

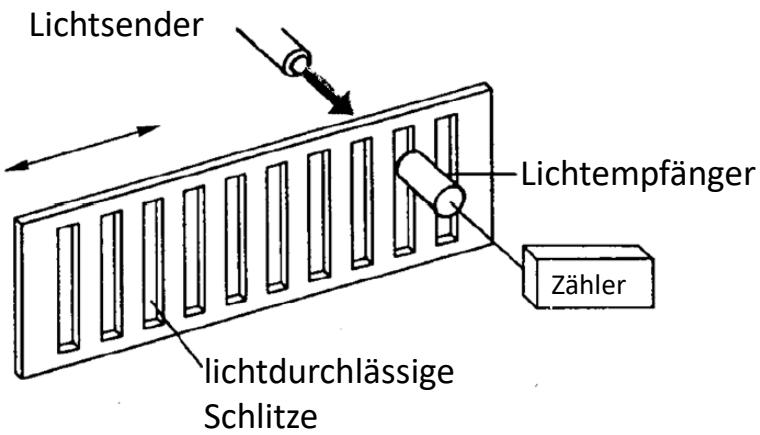
Das Grundprinzip der inkrementalen Wegmessung



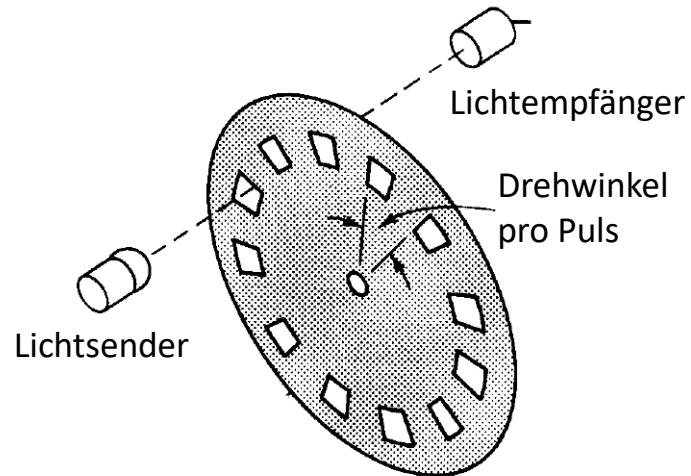
→ inkremental messen heißt zählend /addierend messen

Inkrementale Weggeber

Linearer Encoder



Winkelencoder / Drehgeber



induktiv

kapazitiv

magnetisch

optisch

Ursprung:

mechanisches Abtasten der Marken

Nachteil hier: Geschwindigkeit/Trägheit, Auflösung, Verschleiß

Heutzutage:

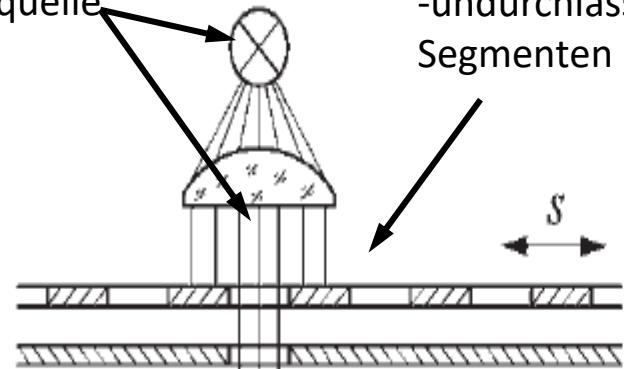
viele verbesserte Prinzipien entwickelt
(induktiv, kapazitiv, magnetisch, optisch)

maßgeblich im Einsatz optische und magnetische Encoder

Inkrementale Geber: Optische Abtastung

Durchlichtprinzip

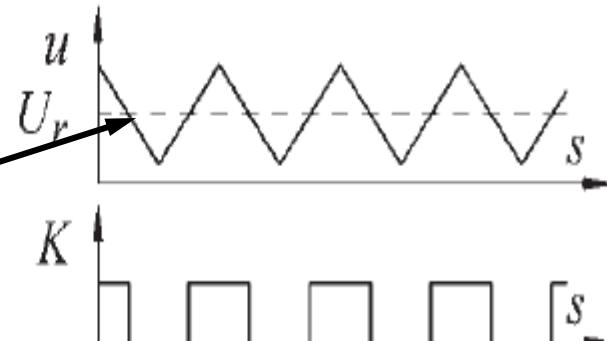
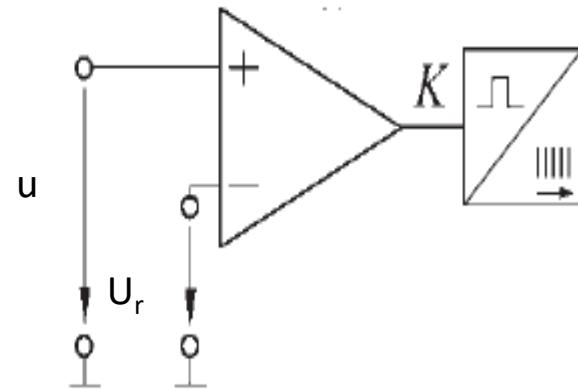
Strahlengang der
Lichtquelle



Raster mit lichtdurch-
lässigen bzw.
-undurchlässigen
Segmenten

Foto-
detektor
Blende

Komparator K vergleicht
Detektorspannung u mit einer
Referenzspannung U_r

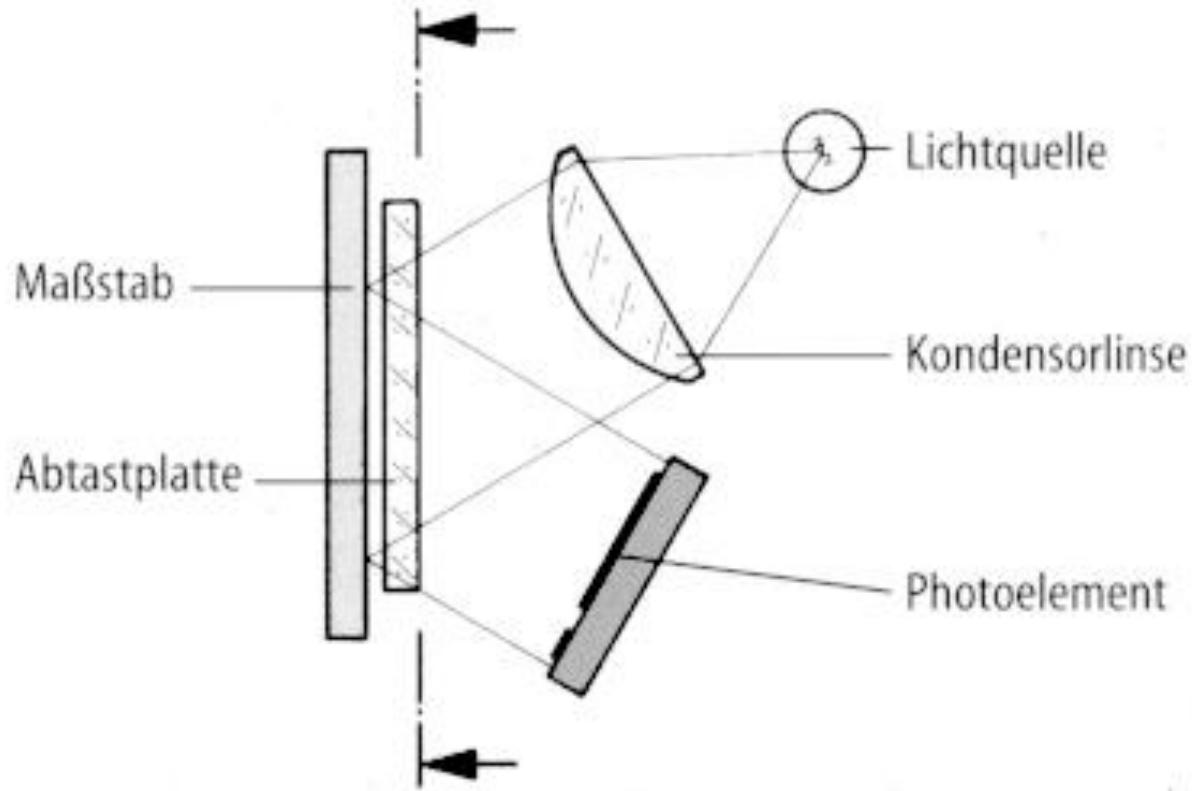


Die Ausgangs-Impulse vom
Komparator werden mit einem
Zähler gezählt

→ Die Ausgangsspannung u des Detektors
ändert sich je nach Position des Rasters

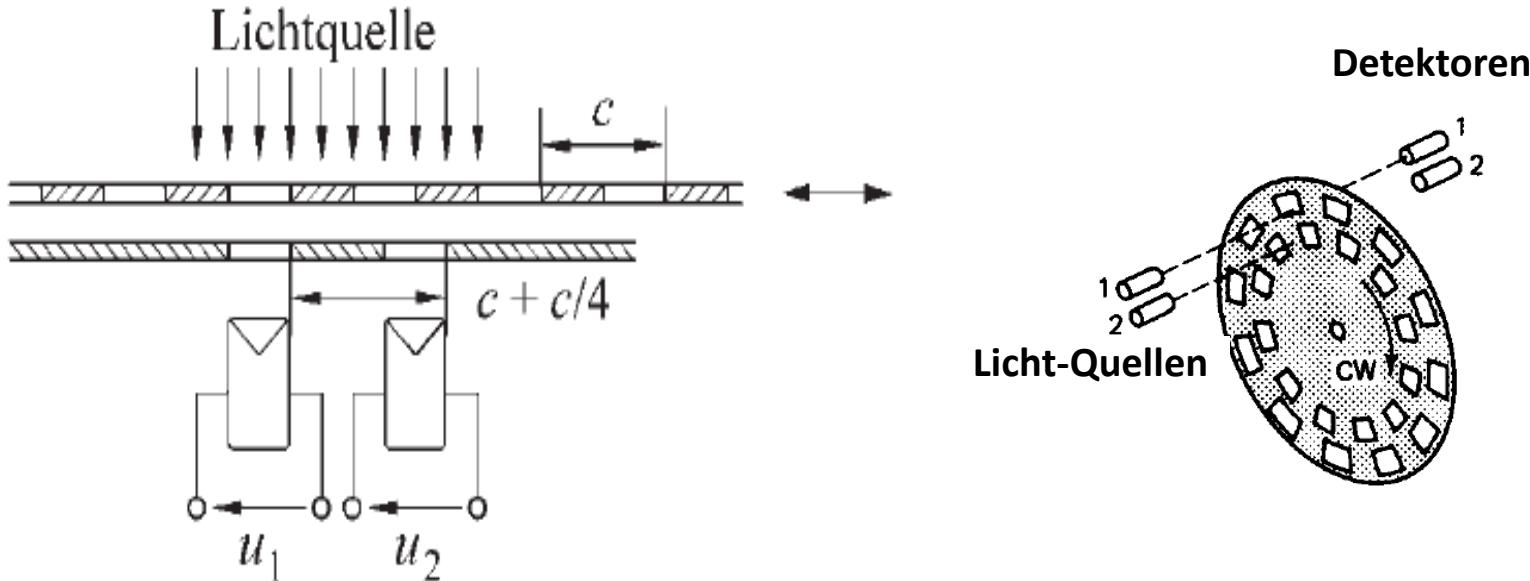
Inkrementale Geber: Optische Abtastung

Auflichtprinzip

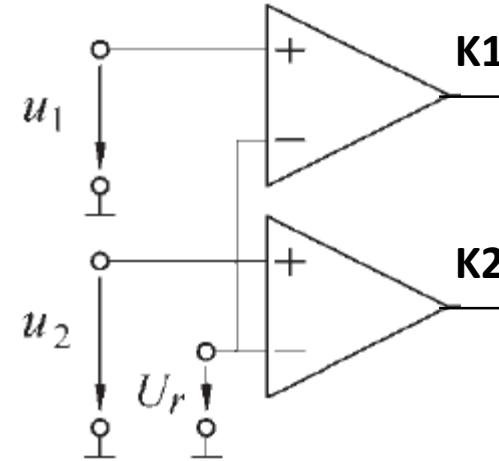
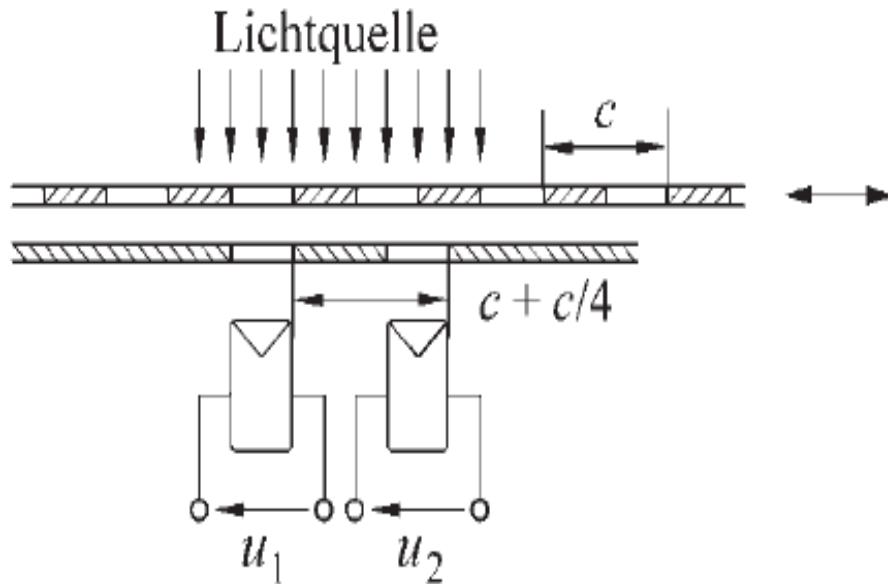


Inkrementale Geber: Richtungsbestimmung/-erkennung

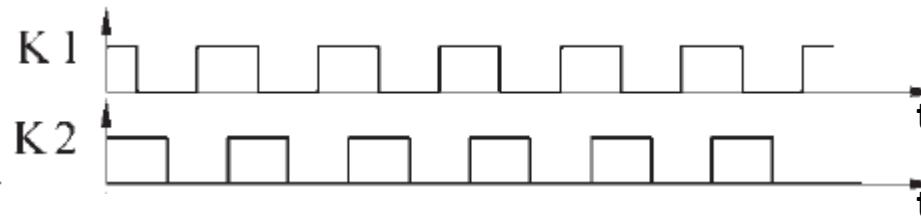
- **Bisher:** Es wird hochgezählt, egal ob sich das Raster nach links oder rechts dreht!
 - **Wunsch:** Die Position soll bei beliebiger Bewegung des Rasters richtig wiedergegeben werden
- Benötigung einer **Richtungserkennung**
- **Lösung:** Verwendung von zwei Fotodetektoren, die um ein Viertel des Rasterabstands versetzt angeordnet sind.



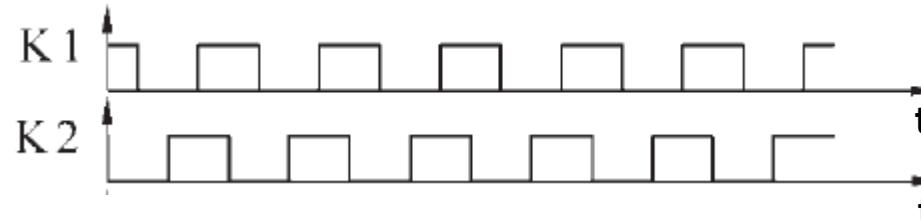
Inkrementale Geber: Richtungsbestimmung

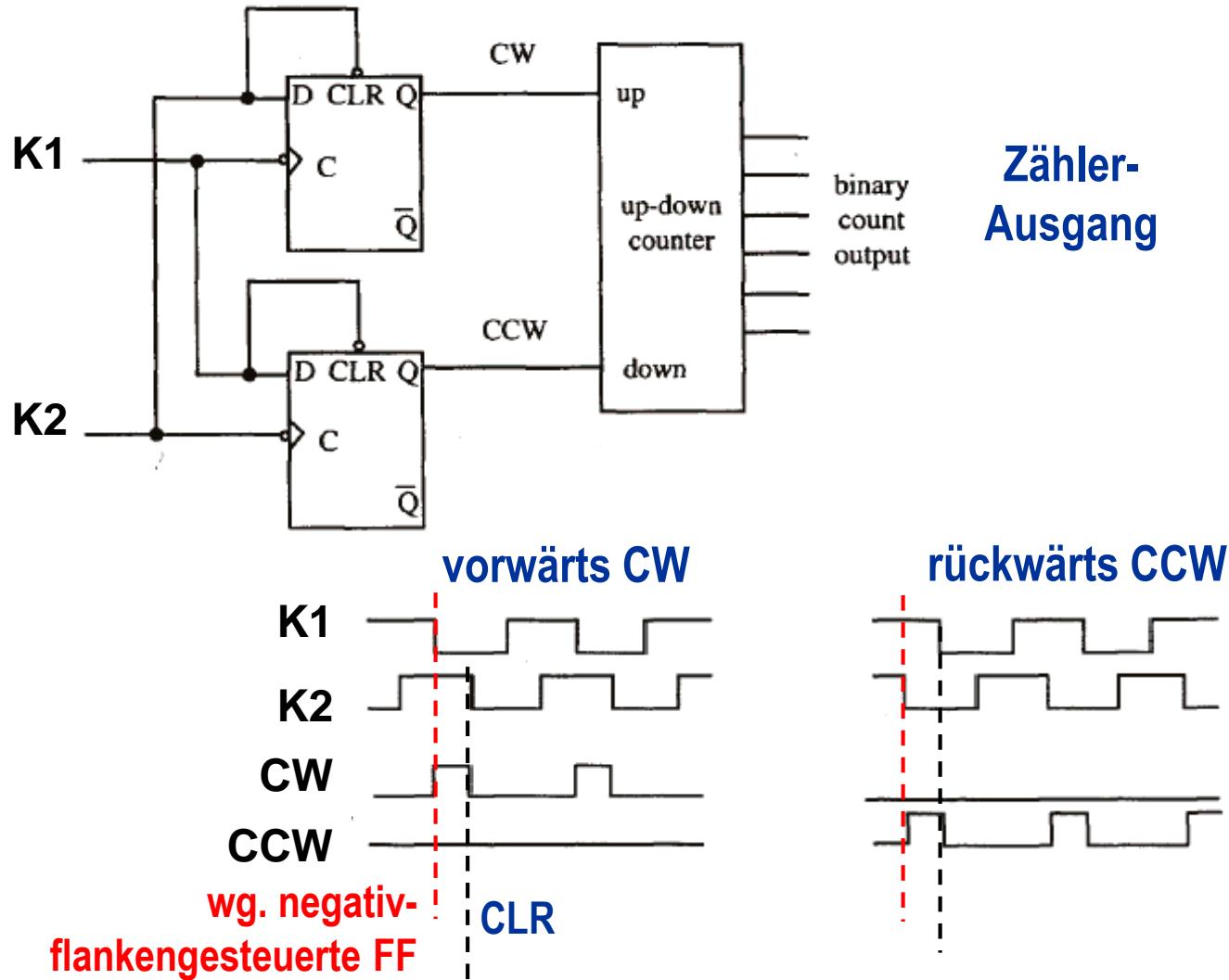


**Bewegung nach rechts
K1 eilt K2 voraus**

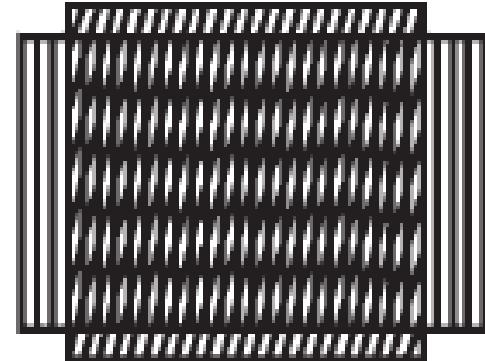


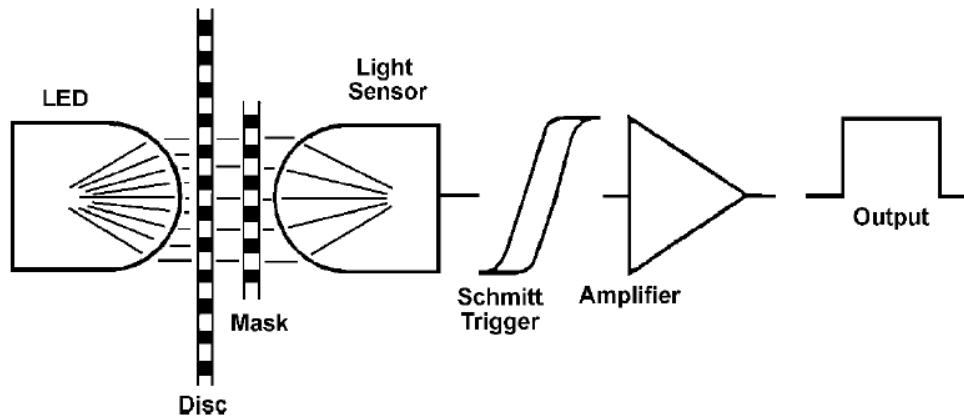
**Bewegung nach links
K2 eilt K1 voraus**





- Auflösung ist durch das Raster bestimmt.
- Die Abmessungen der Lichtquelle und des Detektors kleiner als den Strichabstand zu wählen ist nicht mehr sinnvoll → Messsignal zu schwach
- Problemlösung:
 - Vor den Detektor wird ein zweites fest stehende Raster mit derselben Teilung wie das beweglich angeordnete Raster angeordnet,
 - Das zweite Raster ist um einen kleinen Winkel geneigt
 - Bei Bewegung des Messgitters entstehen mehrere Strichabstände breite Hell-Dunkel-Streifen (**Moiré-Streifen, Moiré-Effekt**).
 - Je nach Relativbewegung der beiden Raster laufen diese nach oben oder unten und lassen damit die Bewegungsrichtung erkennen.
 - Die Auflösungen kann durch die Verwendung des Moire-Effektes um den Faktor 100 verbessert werden.

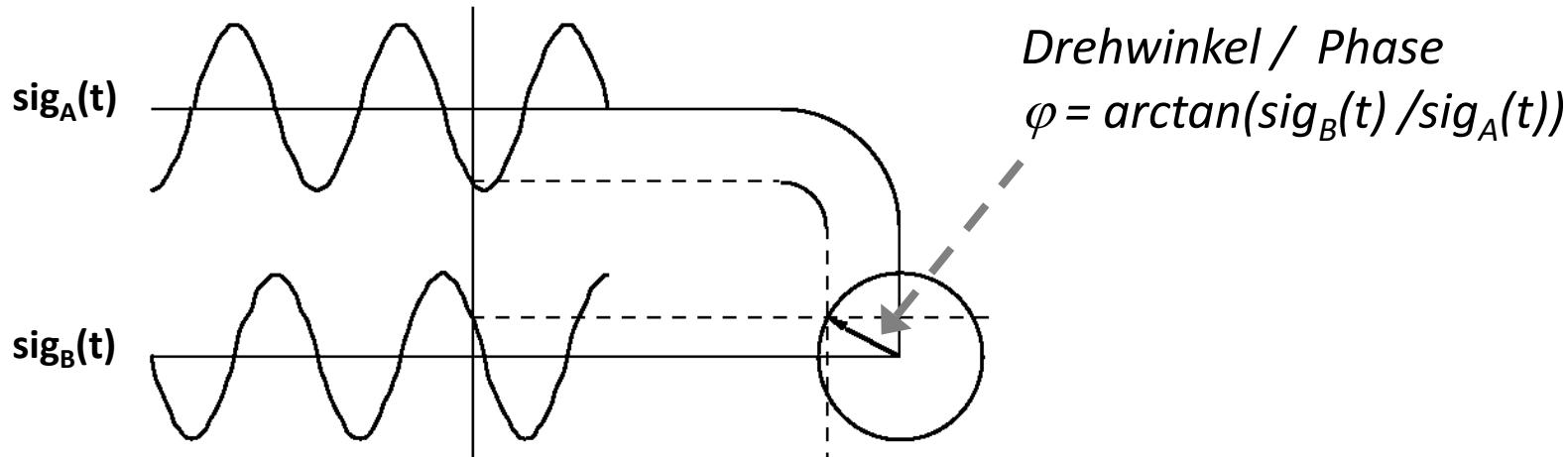




Integration über viele Striche/Teilungen

- Erhöhung der Messgenauigkeit / Zuverlässigkeit,
da Unvollkommenheiten der Einzelteilungen weniger relevant
- Sensorsignal aus „Korrelation“ der beiden Licht-Streifenmuster
→ „quasi-analoges“ Sensorsignal (erst durch Verstärker + Schmitt-Trigger → digital)

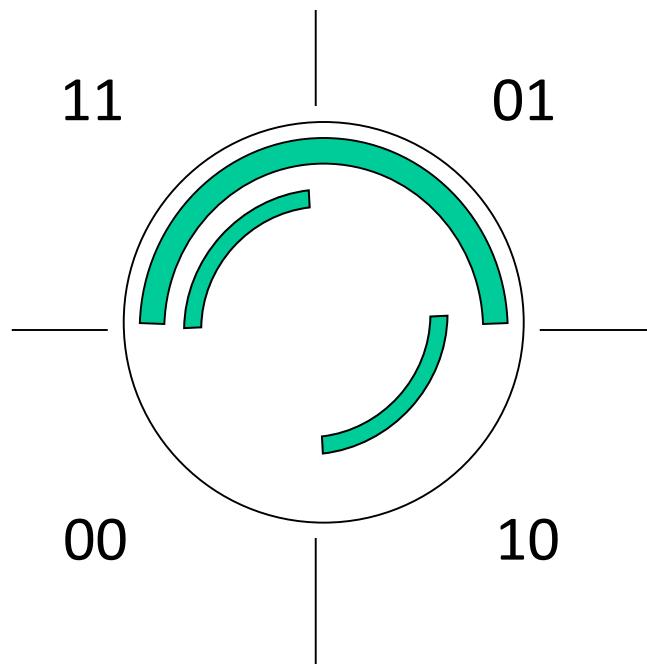
Inkrementale Geber: Weitere Möglichkeit der Verbesserung der Auflösung / Interpolation



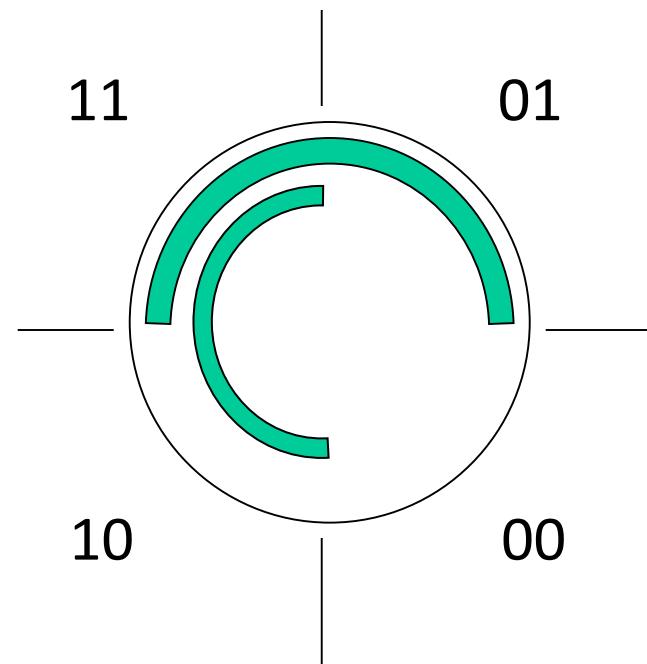
- Verschiedene digitale Interpolationsverfahren möglich / üblich
 - z.B. „quasi-analoges“ Sensorsignale direkt mit Analog/Digital-Wandler erfassen und Winkel φ berechnen. Es gilt:
$$-\varphi = \arctan(\text{Im}/\text{Re}) = \arctan(\text{sig}_B(t) / \text{sig}_A(t))$$
 - z.B. im Mikrocontroller:
 - - $\text{sig}_B(t) / \text{sig}_A(t)$ berechnen
 - - arctan-Werte aus Tabelle lesen
 - - Korrektur von systematischen Fehlern
(z.B. wg. nicht-ideal sinförmiger Signale, unterschiedlichen Amplituden usw.)
- Rechen-Beispiel:
Linearencoder mit:
- Teilungsperiode 100 µm
- Winkelmessgenauigkeit ± 3.6°
==> Positioniergenauigkeit ± 1 µm

Absolute Wegmessung

- Einführung mehrerer codierter Spuren - digitale Segmentierung
- Gibt für jeden Messschritt innerhalb seines Messbereichs (z.B. Länge oder Umdrehung) eine eindeutige, codierte Information aus.



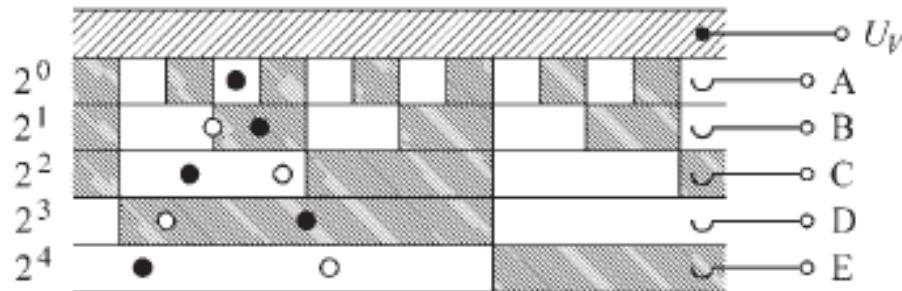
Dual-Code



Gray-Code

Am häufigsten benutzte Kodierungen:

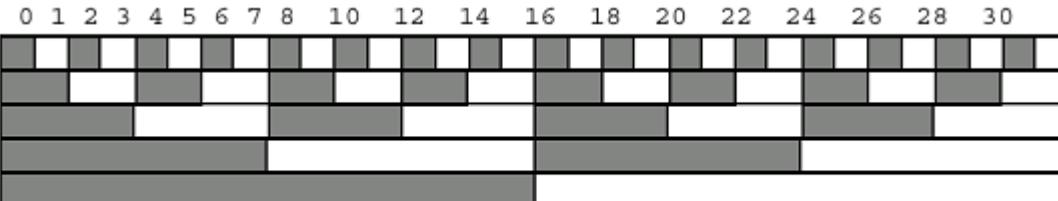
- **Dual-Code:**
 - Eventuelle Probleme bei der mechanischen Abtastung (durch Schleifkontakte auf dem Code)
 - Es können sich mehrere Bit auf einmal ändern, und eventuell falsch erkannt werden, wenn die Schleifkontakte nicht genau sitzen
 - Beispiel Übergang 01111 nach 10000 kann eventuell als 00111 erkannt werden



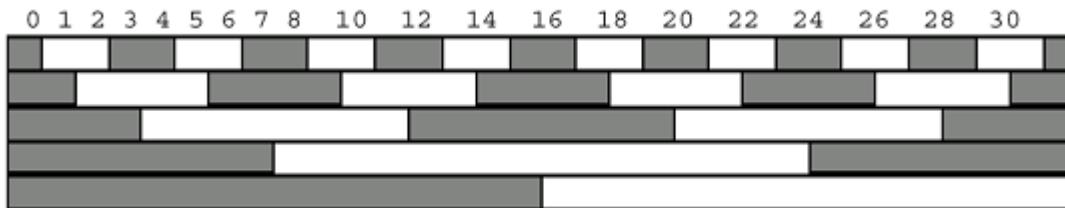
- **Gray-Code:**

Einschrittiger Code (d.h. es ändert sich jeweils nur ein Bit pro Schritt)

Absolute Wegmessung



Dualcode



Graycode

8 Bit-Code Drehgeber-Scheiben



Dual-Code



Gray-Code

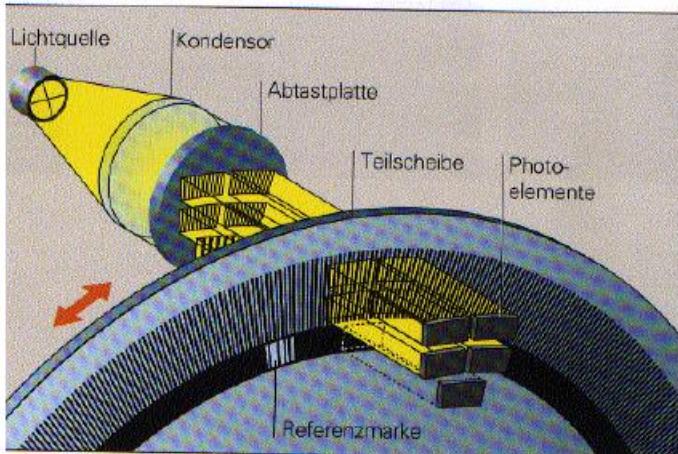
Lineargeber mit
5 Bit-Code Teilung

Am häufigsten
benutzte
Kodierungen:

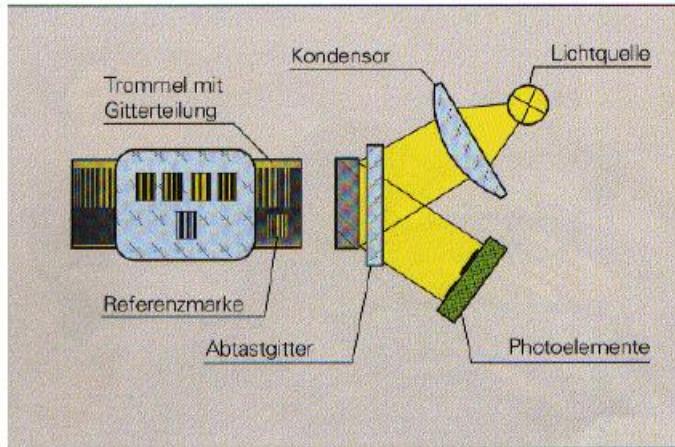
- Gray-Code
- Dual-Code

Inkrementale Geber: Optische Abtastung

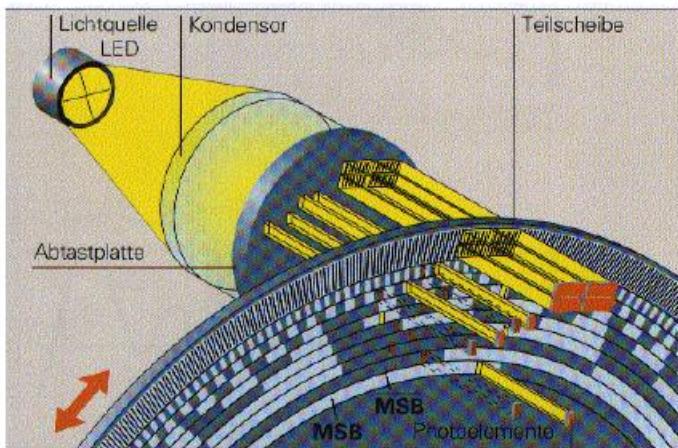
Durchlichtverfahren inkremental



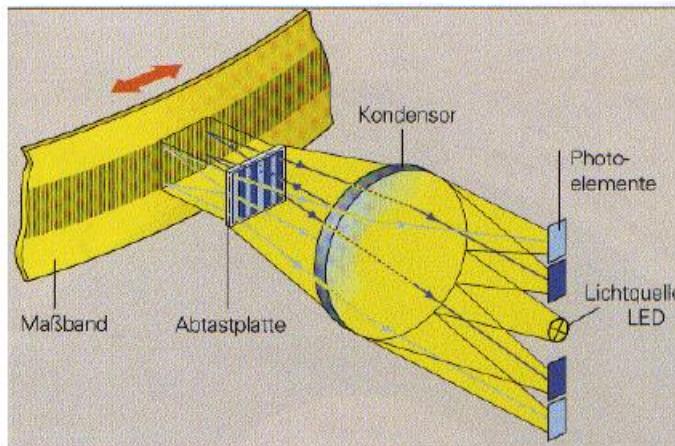
Auflichtverfahren, 4-Feld Abtastung



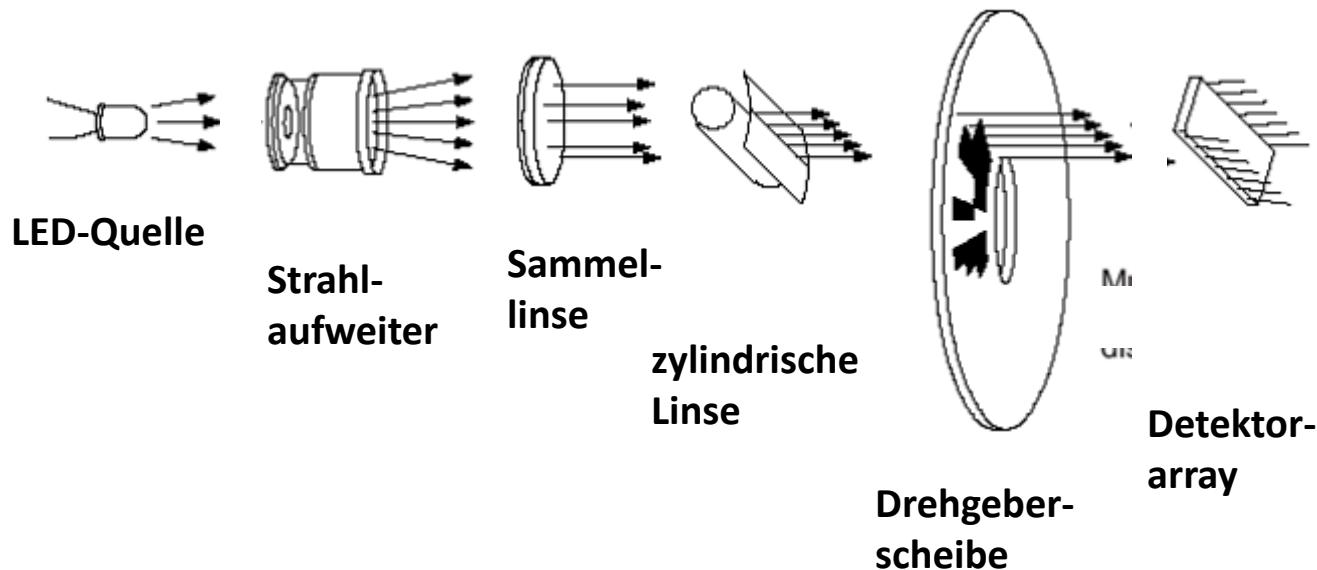
Durchlichtverfahren absolut



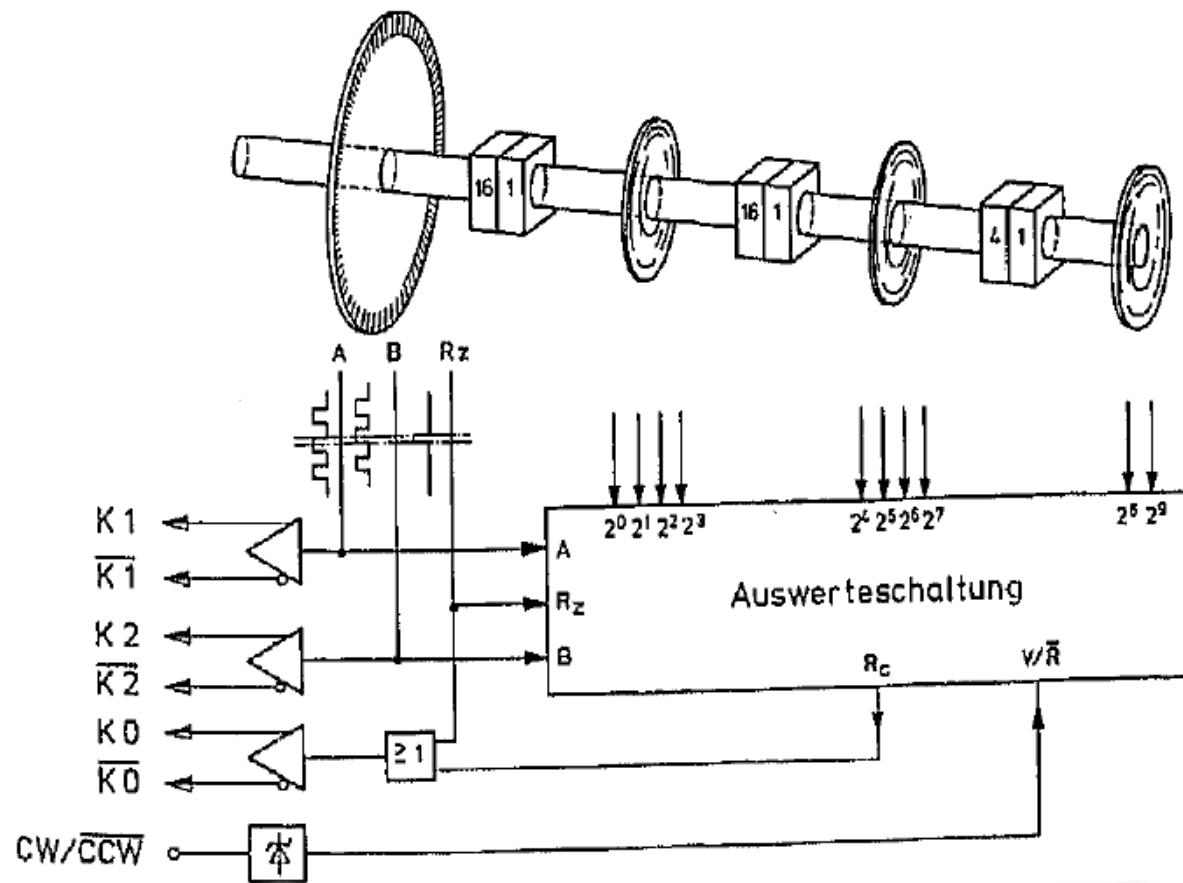
Auflichtverfahren, Quasi Einfeld Abtastung



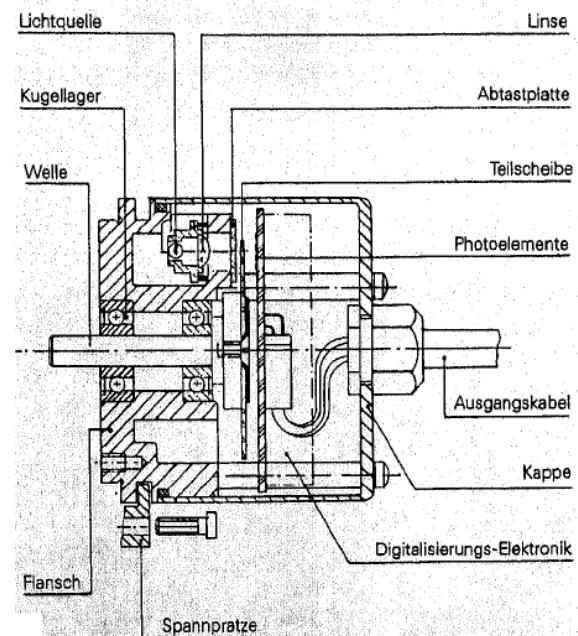
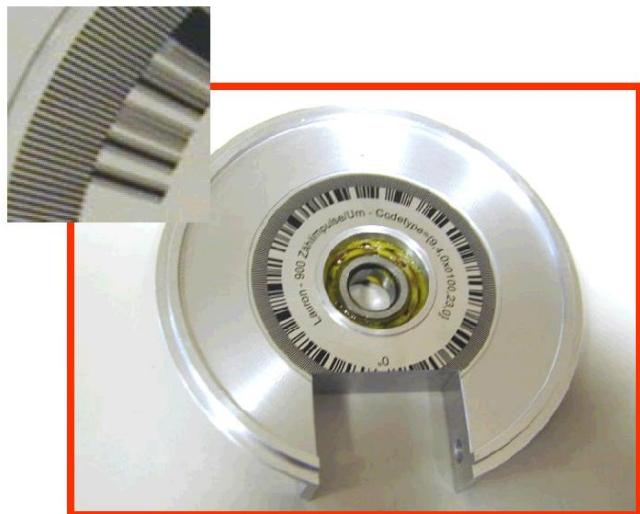
Aufbau eines optischen Absolutwegmessgeber



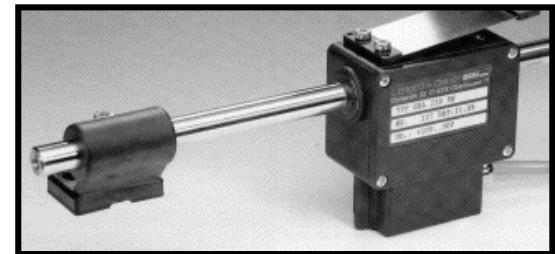
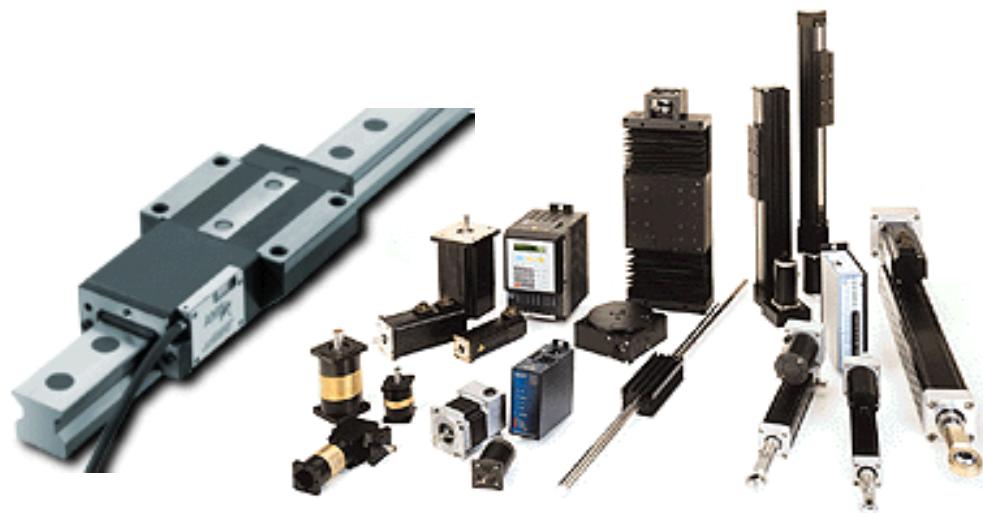
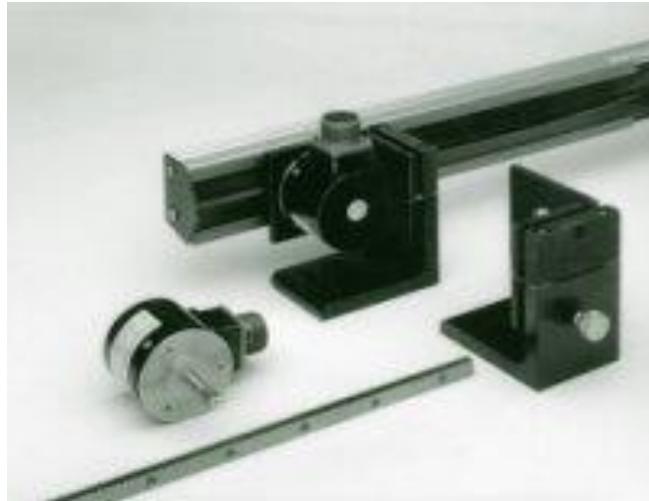
Einführung mehrerer über Getriebe gekoppelter Scheiben



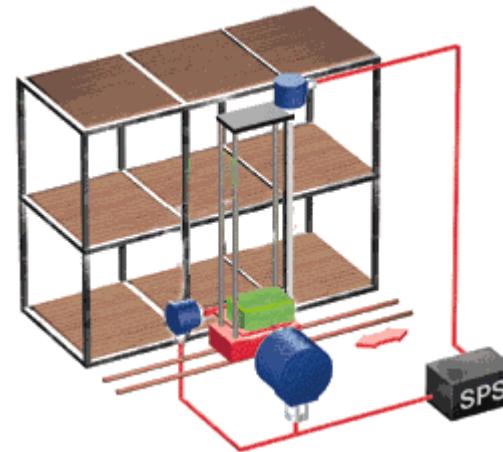
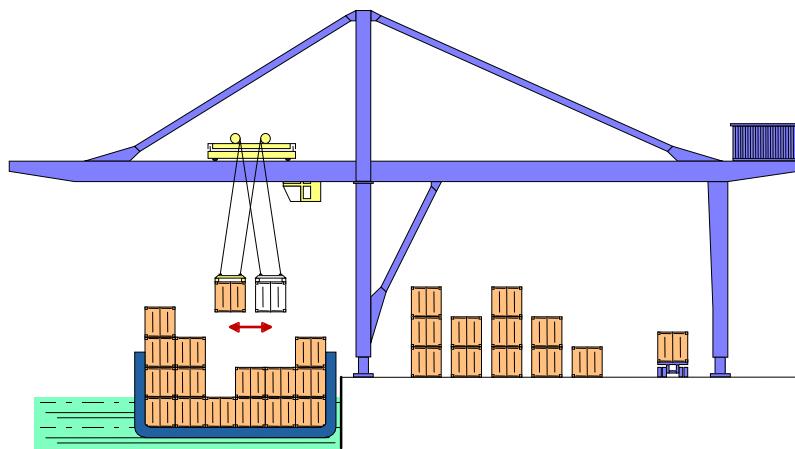
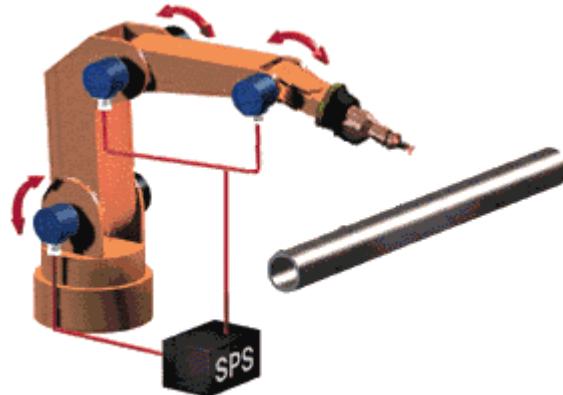
Ausführungsbispiel / Aufbau von Drehgebern



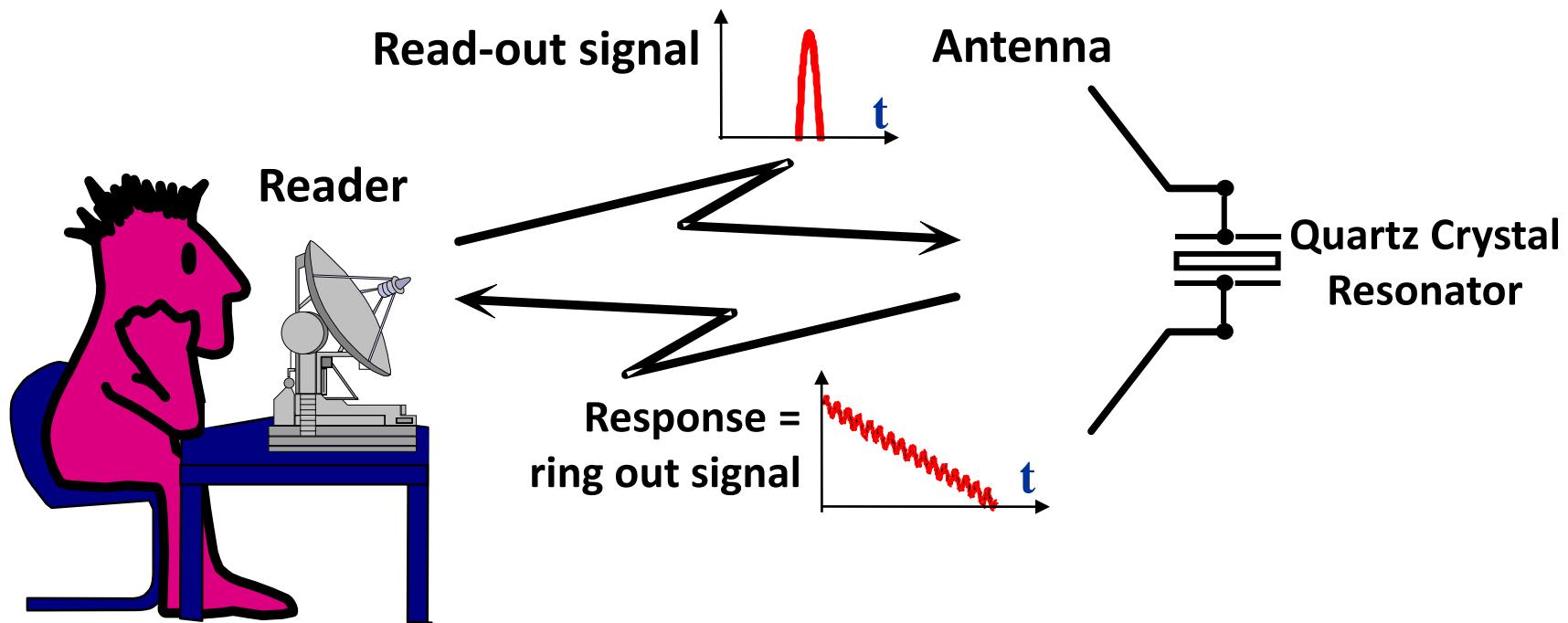
Ausführungsbeispiele von linearen Weggebern



Anwendungen von inkrementalen Weggebern



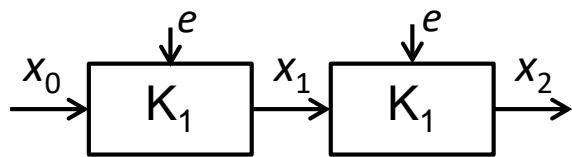
- Messen der Temperatur eines Körpers durch Messen der Schallgeschwindigkeit (Lehrstuhl EMP)



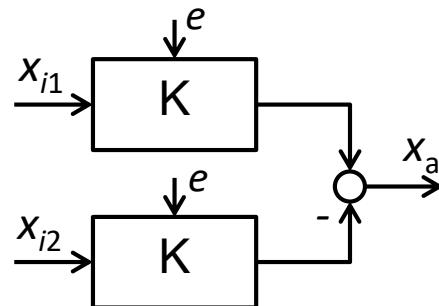
8. A/D- und D/A-Umsetzer

ANALOGE SIGNALAUFBEREITUNG

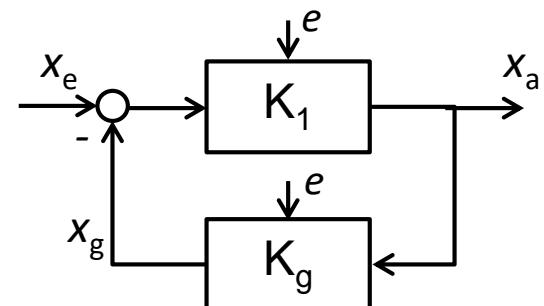
Kettenstruktur



Parallelstruktur



Kreisstruktur

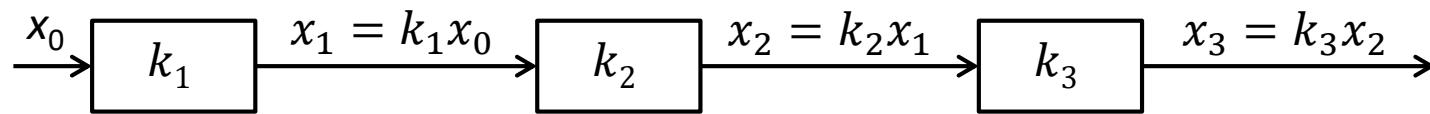
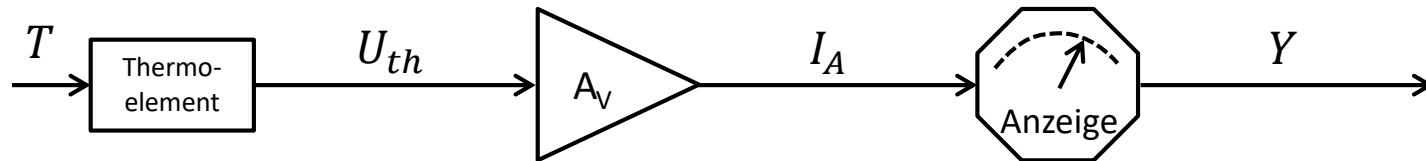


- Sehr häufig genutzt
- Additive und multiplikative Abweichungen werden verstärkt.
- Einflusseffekte

- Gleichtaktunterdrückung
- Referenzprinzip
 - Eliminieren von additiven und mult. Abweichungen
 - Möglichkeit zur Selbstkalibrierung
- Differential-Anordnung
 - Höhere Empfindlichkeit

- Rückwirkungsfreie Messung
- Geeignet für kleine Änderungen des Signals
- Genauigkeit abhängig von der Gegenkopplung
- hohe Genauigkeit
- aber:**
- Stabilitätsbetrachtung
- Dynamik

Kettenstruktur I (statisch)



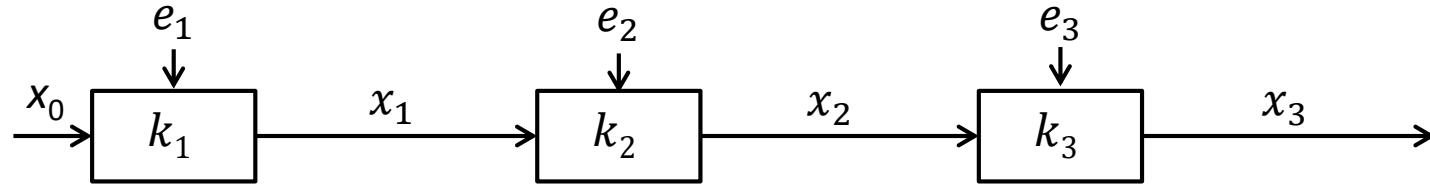
$$x_3 = k_1 k_2 k_3 x_0$$

Multiplikative Abweichungen: Abweichungen der Transmissionsfaktoren

$$x_3 = (k_3 + \Delta k_3)(k_2 + \Delta k_2)(k_1 + \Delta k_1)x_0$$

➤ Fehlerfortpflanzung !

Kettenstruktur II (statisch)



$$x_1 = k_1 x_0 + e_1$$

$$x_2 = k_2(k_1 x_0 + e_1) + e_2$$

$$x_3 = [k_2(k_1 x_0 + e_1) + e_2]k_3 + e_3$$

$$= k_3 k_2 k_1 x_0 + k_3 k_2 e_1 + k_3 e_2 + e_3$$

- Additive Abweichungen werden multipliziert mit den Übertragungsfaktoren und führen zu zusätzlichen Nullpunkt-Verschiebungen

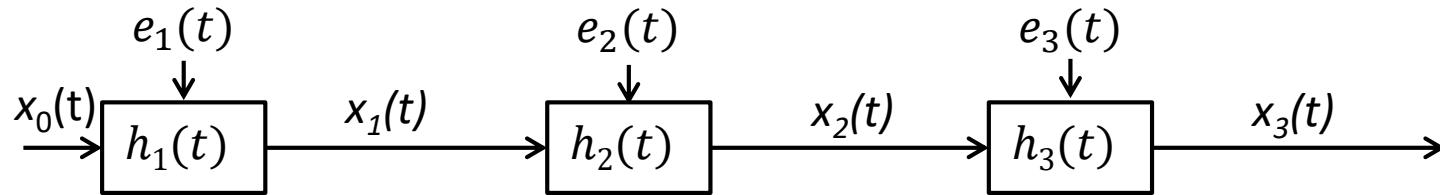
Temperatureinfluss:

$$x_3 = k_3(T)k_2(T)k_1(T)x_0 + k_3(T)k_2(T)e_1 + k_3(T)e_2 + e_3$$

Lineare Abhängigkeit der Übertragungsfaktoren von T

→ daraus folgt eine nicht lineare Abhängigkeit des gesamten Übertragungsfaktors von T

Bei einem LTI – System (linearen zeitinvarianten System) ergibt sich das Ausgangssignal $x_1(t)$ für eine beliebige Anregungsfunktion $x_0(t)$ durch Faltung mit der Impulsantwort $h(t)$



$$x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0(\tau) \cdot h_1(t - \tau) d\tau + e_1(t) = x_0(t) * h_1(t) + e_1(t)$$

$$x_2(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_0(\tau) \cdot h_1(t - \tau) d\tau + e_1(t) \right) \cdot h_2(t - \tau) d\tau + e_2(t) \right) = (x_0(t) * h_1(t) + e_1(t)) * h_2(t) + e_2(t)$$

$$x_3(t) = \dots$$

- Additive Abweichungen werden gefaltet mit den Impulsantworten und führen zu zusätzlichen Nullpunkt-Verschiebungen
- In vielen Fällen sind die Abweichungen $e_1(t)$, $e_2(t)$ und $e_3(t)$ miteinander korreliert (z.B. bei gemeinsamen Temperatureinfluß). Das müsste eigentlich bei der Fehlerrechnung berücksichtigt werden!

Anmerkung:

Da dieser Punkt für die meisten Studierenden (aus Systemtheorie) schon bekannt ist, habe ich eine Zusammenfassung auf das Netz gestellt

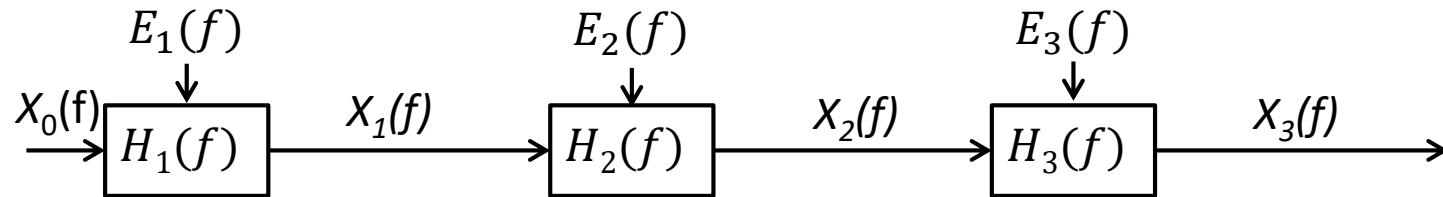
→ ***Wiederholung 2-dynamische Eigenschaften von Systemen***

7. Schwingende und resonante Sensoren

WIEDERHOLUNG: DYNAMISCHE EIGENSCHAFTEN VON MESSSYSTEMEN

Kettenstruktur IV (dynamisch, LTI Systeme, Frequenzbereich)

Bei einem LTI – System (linearen zeitinvarianten System) ergibt sich das Ausgangsspektrum $X_1(f)$ für ein beliebiges Anregungsspektrum $X_0(f)$ durch Multiplikation mit dem Frequenzgang $H(f)$

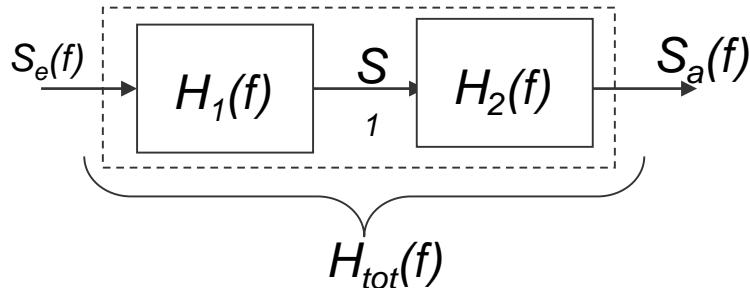


$$X_1(f) = X_0(f) \cdot H_1(f) + E_1(f)$$

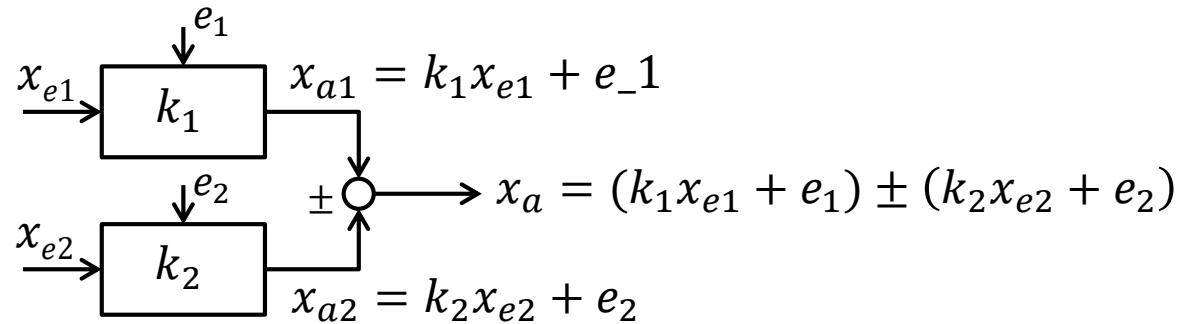
$$X_2(f) = (X_0(f) \cdot H_1(f) + E_1(f)) \cdot H_2(f) + E_2(f)$$

$$X_3(f) = \dots$$

Für Reihenschaltung ohne Abweichung $E(f)$ gilt:



$$H_{tot}(f) = \frac{S_a(f)}{S_e(f)} = H_1(f) \cdot H_2(f)$$



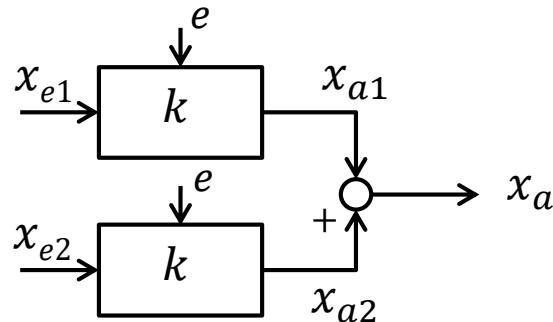
Für zeitveränderliche Signale gilt:

$$X_a(f) = (X_{e1}(f) K_1(f) + E_1(f)) \pm (X_{e1}(f) K_2(f) + E_2(f))$$

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{e1}(\tau) \cdot k_1(t - \tau) d\tau + e_1(t) \pm \int_{-\infty}^{\infty} x_{e2}(\tau) \cdot k_2(t - \tau) d\tau + e_2(t)$$

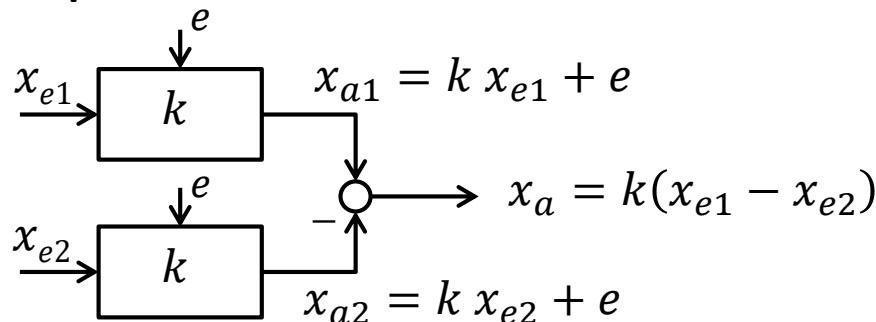
Summen- und Differenzprinzip

Summenprinzip:



→ Mittelwertbildung

Differenzprinzip

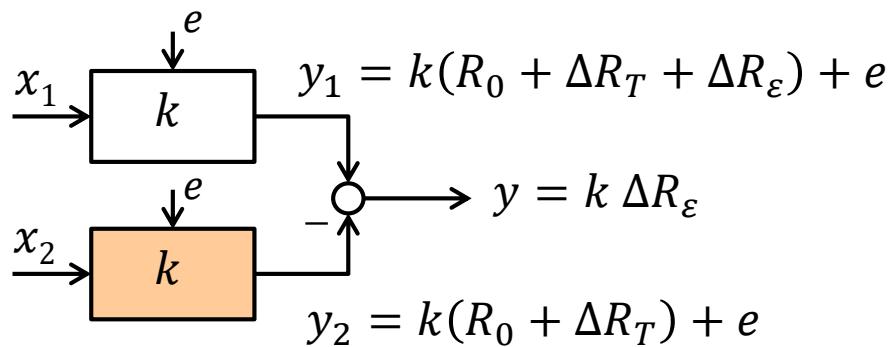


Eliminieren des Nullpunkts

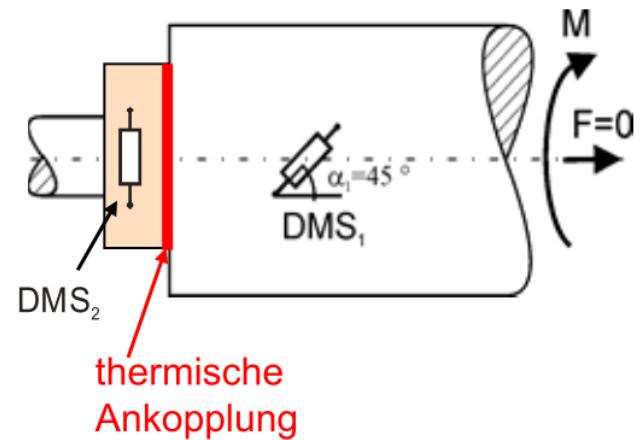
Oder Allgemeiner:
Gleichtaktunterdrückung

Dehnungsmessstreifen DMS mit dem Grundwiderstand R_0

- Dehnung ε
- Temperatur T

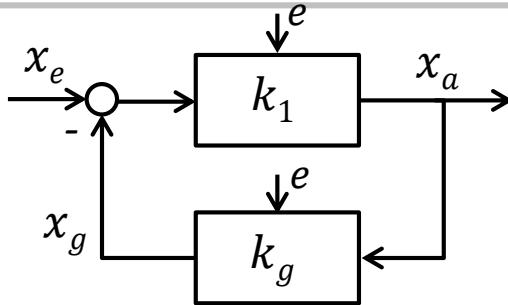


Drehmomentmessung mit DMS



➤ Unterdrückung des Temperatureinflusses !

Kreisstruktur



$$x_a = k_1(x_e - x_g) = k(x_e - k_g x_a)$$

$$x_a = \frac{k_1}{1 + k_1 k_g} x_e = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + k_g} x_e \approx \frac{1}{k_g} x_e \quad \text{für } k_1 \rightarrow \infty$$

$$X_a(f) = X_e(f) \cdot \frac{K_1(f)}{1 - K_1(f)K_g(f)} \approx \frac{X_e(f)}{K_g(f)} \quad \text{für } K_1(f) \rightarrow \infty$$

Vorteil:

- Messung ohne Beeinflussung der Messgröße
- Die Genauigkeit ist abhängig von der Gegenkopplung k_g
- Geeignet auch für kleine Änderungen eines Signals

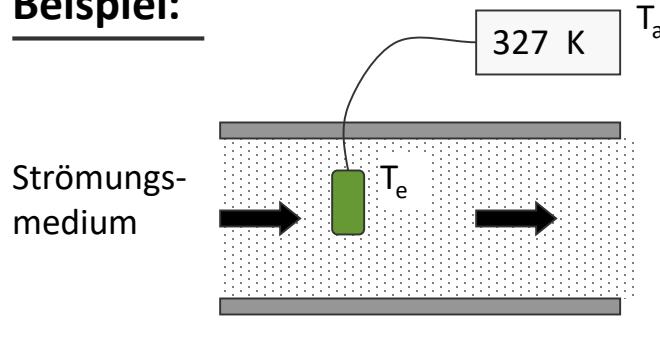


Nachteile:

- Stabilitätsbetrachtung notwendig
- Dynamik abhängig von der Rückkopplung

Dynamische Messabweichungen

Beispiel:

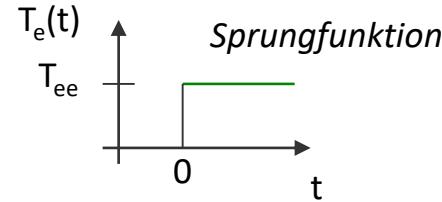


ohne Wärmeleitung ($\dot{q}_{ab} = 0$) folgt:

$$\rightarrow T_e(t) = T_a(t) + \tau \frac{dT_a(t)}{dt}$$

Lösung der Diff.-Gleichung

$$T_a(t) = T_{ee}(1 - e^{-t/\tau})$$



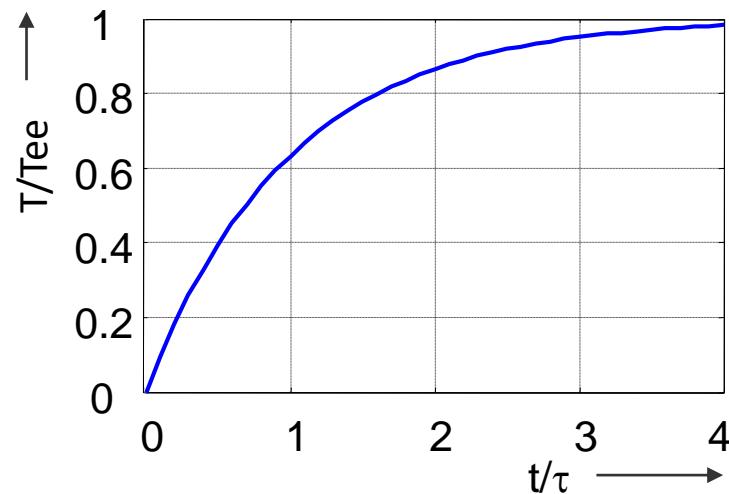
α : Wärmeübergangszahl
 F : Fühleroberfläche
 m : Fühlermasse
 c : spezifische Wärme des Fühlers

Wärmebilanz:

$$\dot{q}_{zu} = \dot{q}_{ab} + \dot{q}_{gespeichert} \quad \text{mit} \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt}$$

$$\alpha F(T_e - T_a) = 0 + mc \frac{dT_a}{dt}$$

$$\text{mit} \quad \tau = \frac{mc}{\alpha F}$$



Dynamische Eigenschaften fundamentaler Meßsysteme

Meßsystem 1. Ordnung

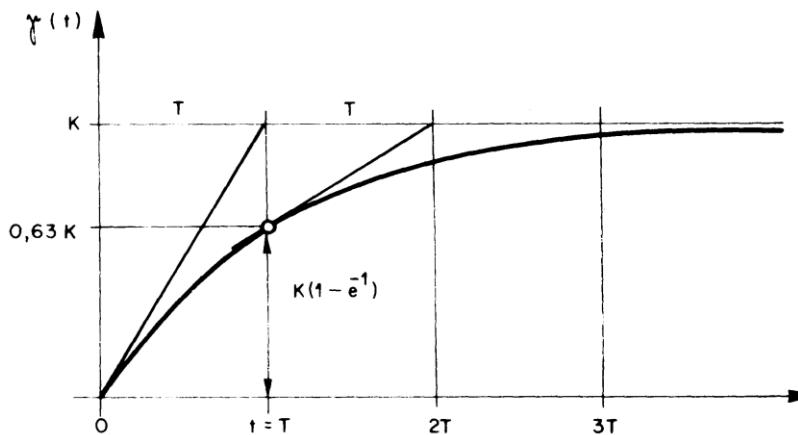
Lineare Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung:

$$K x_e(t) = x_a(t) + T x'_a(t) \quad \text{Thermometergleichung}$$

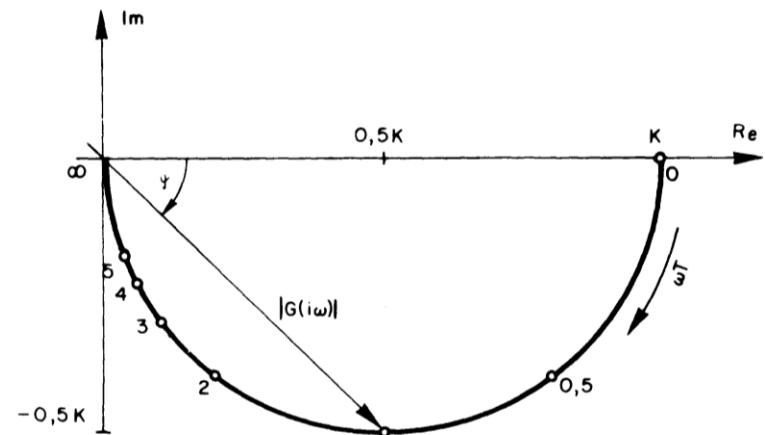
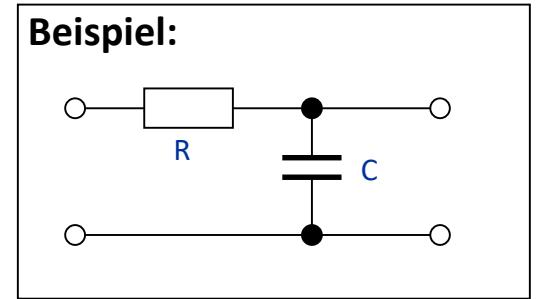
Die Lösung dieser DGL für die Sprungantwort lautet

$$\gamma(t) = K(1 - e^{-t/T}) \quad \text{für } t \geq 0$$

Dieses Element wird PT1-Glied genannt, mit K als Übertragungsfaktor und T als Zeitkonstante



Sprungantwort des Verzögerungsglieds
1. Ordnung

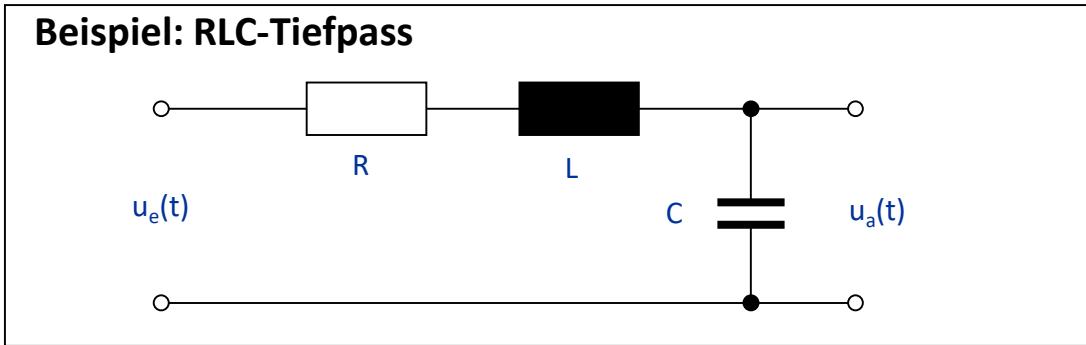


Darstellung des Frequenzgangs des
Verzögerungsglieds 1. Ordnung in der
Gauß'schen Zahlenebene (Ortskurve)

Dynamische Eigenschaften fundamentaler Meßsysteme

Meßsystem 2. Ordnung

Lineare Differentialgleichung (DGL) 2. Ordnung:



Man erhält die DGL:

$$LC \frac{d^2 u_a}{dt^2} + RC \frac{du_a}{dt} + u_a(t) = u_e(t) \quad \text{mit} \quad i_e = C \frac{du_a}{dt}$$

Berechnung der Übertragungsfunktion G(s) über die Laplacetransformation ergibt:

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{1}{1 + RCs + LCs^2}$$

Dynamische Eigenschaften fundamentaler Meßsysteme

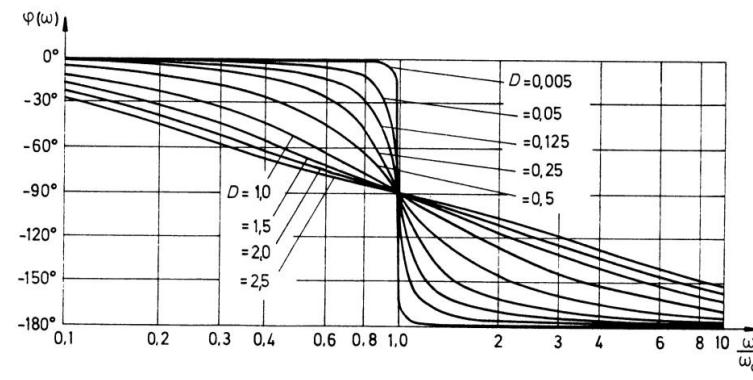
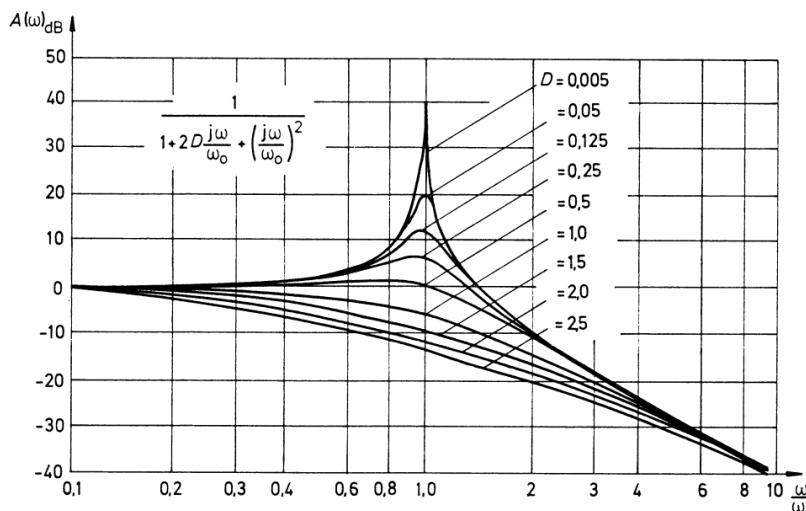
Meßsystem 2. Ordnung

Allgemeine Beschreibung ist: $G(s) = \frac{1}{1 + T_1 s + T_2^2 s^2}$

mit Dämpfungsgrad $D = \frac{1}{2} \frac{T_1}{T_2}$ und Eigenfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{T_2}$

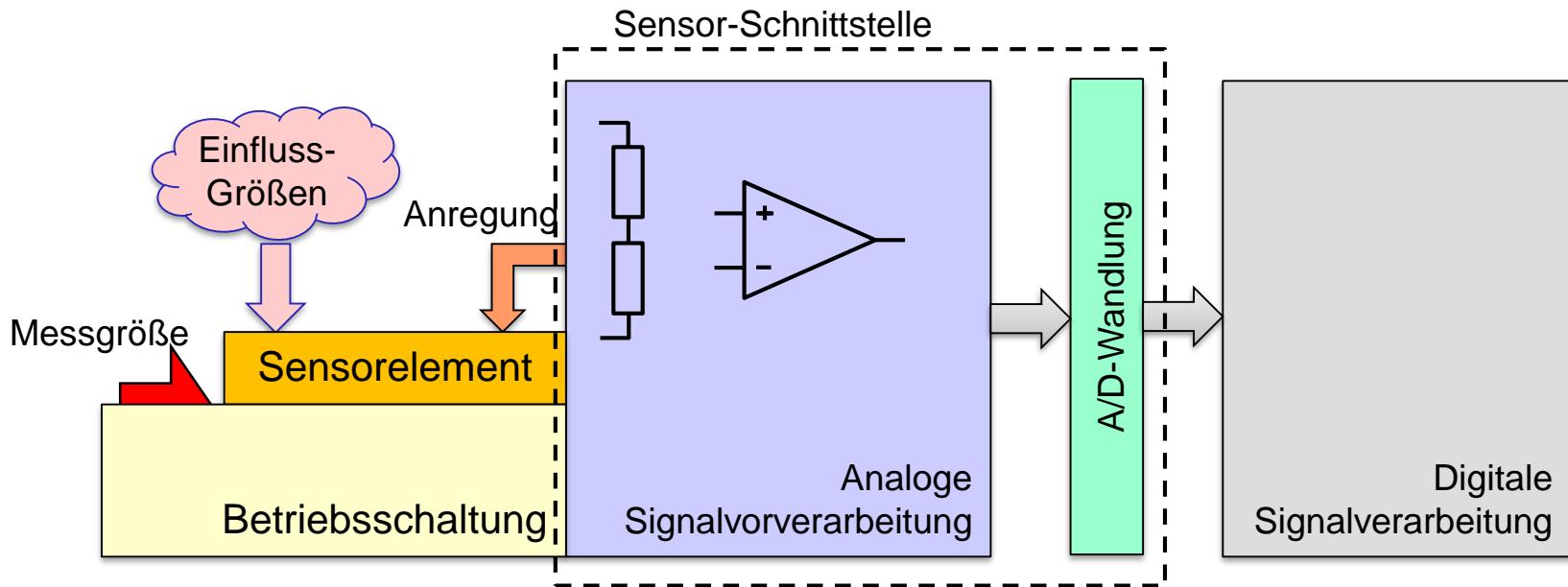
erhält man $G(s) = \frac{K}{1 + \frac{2D}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}$

Daraus lässt sich der Amplitudenzgang $|G(j\omega)|$ und der Phasenzgang $\varphi(\omega)$ berechnen.



Warum sind Operationsverstärker noch so wichtig?

Die OPV-Technik ist mittlerweile seit über 40 Jahren alt. Warum ist sie auch heute noch für die moderne Messtechnik von Interesse? Könnte man nicht stattdessen moderne Auswertealgorithmen verwenden?



Der Messverstärker

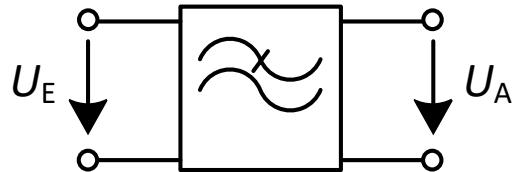
- gemessene Spannungen und Ströme oft sehr niedrig
- Sensorelemente oft sehr lastempfindlich
 - Messgrößen durch Verstärker abgreifen / umformen

Anforderungen an einen guten Messverstärker

- geringe Rückwirkung auf die Messgröße:
Um das Messobjekt nicht zu belasten, sollte bei der Spannungsmessung der Eingangswiderstand des Verstärkers hoch, bei der Strommessung niedrig sein
- hohes Auflösungsvermögen:
auch sehr kleine Strom- oder Spannungssignale / Änderungen sollten erkennbar sein
- definiertes Übertragungsverhalten:
Das Ausgangssignal soll eindeutig vom Eingangssignal abhängen.
- gutes dynamisches Verhalten:
Das Ausgangssignal des Verstärkers soll möglichst schnell dem Eingangssignal folgen.
- stabiler / rückwirkungsunempfindlicher Ausgang:
Das Ausgangssignal des Verstärkers soll durch nachfolgende Messgeräte nicht verändert werden.

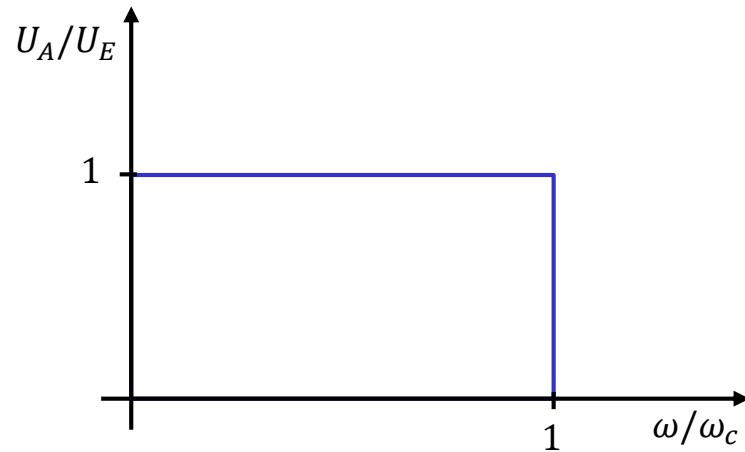
Idealer Tiefpass

Symbol Tiefpass:



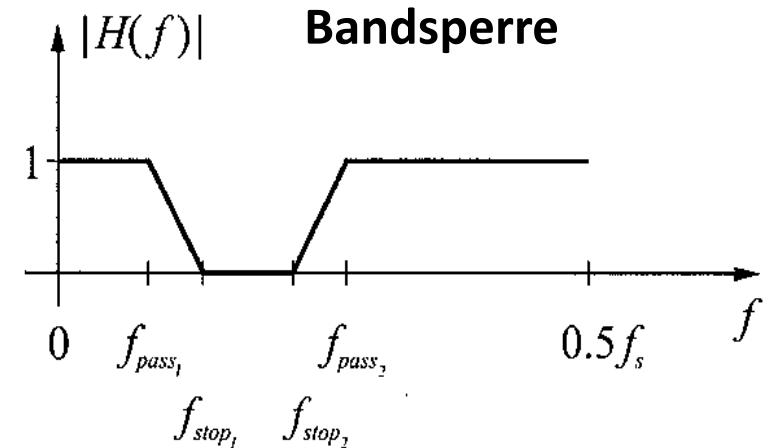
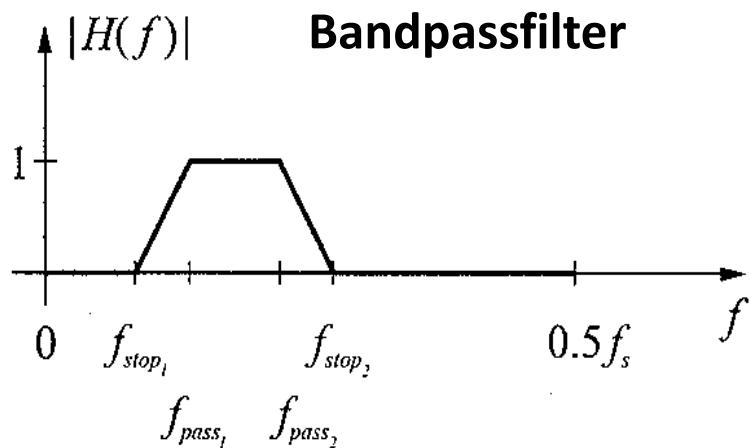
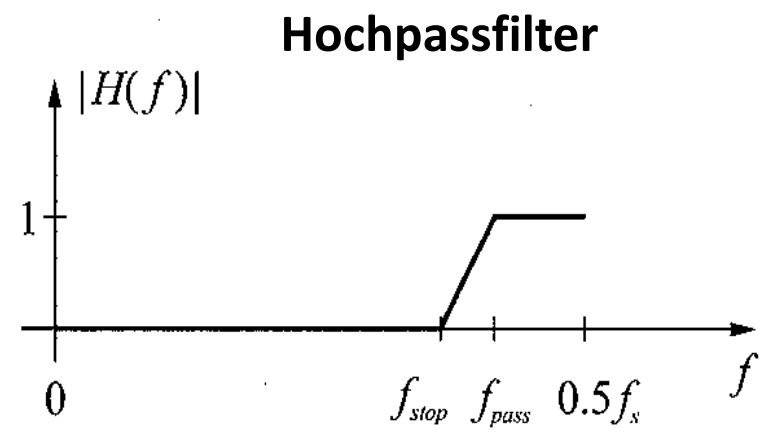
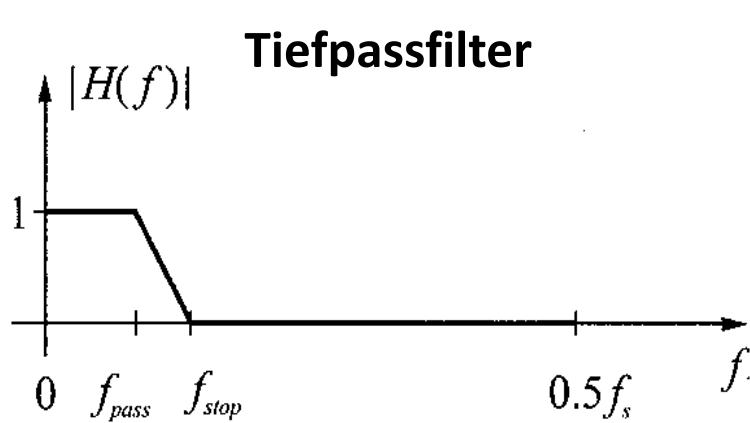
Dient der Unterdrückung hochfrequenter Signalanteile (z.B. Mobilfunk).

Idealer Frequenzgang: $\frac{U_A}{U_E} = \sigma(0) - \sigma\left(\frac{\omega}{\omega_c} - 1\right)$, $\sigma(x)$ bezeichnet die Heavyside-Funktion.

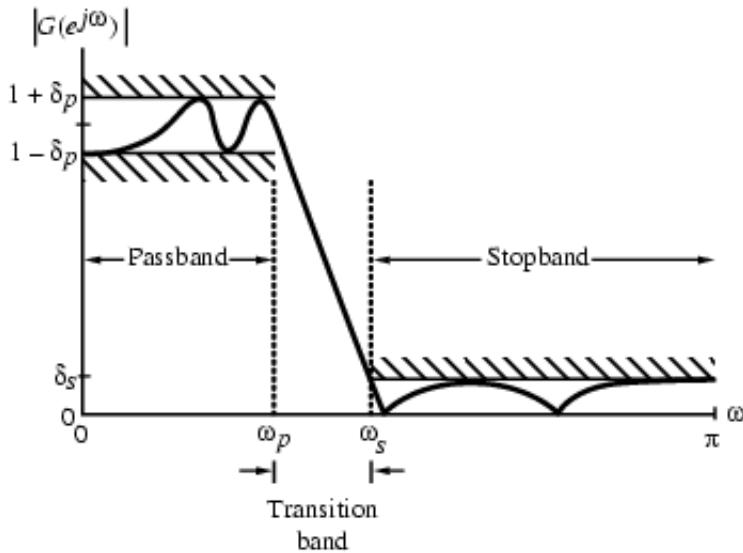


Allerdings weder analog noch digital nicht realisierbar.

Filtertypen



Filterspezifikation am Beispiel für einen Tiefpass



- Im **Durchlassbereich** $0 \leq \omega \leq \omega_{pass}$ fordern wir $|H(\omega)| \approx 1$ mit einer maximal zulässigen Abweichung von $\pm \delta_p$
$$1 - \delta_p \leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta_p, \quad |\omega| \leq \omega_{pass}$$
- Im **Sperrbereich** $\omega_{stop} \leq \omega \leq \pi$ fordern wir $|H(\omega)| \approx 0$ mit einer maximal zulässigen Abweichung von δ_s
$$|H(\omega)| \leq \delta_s, \quad \omega_{stop} \leq |\omega| \leq \pi$$

Die Filterspezifikation enthält somit

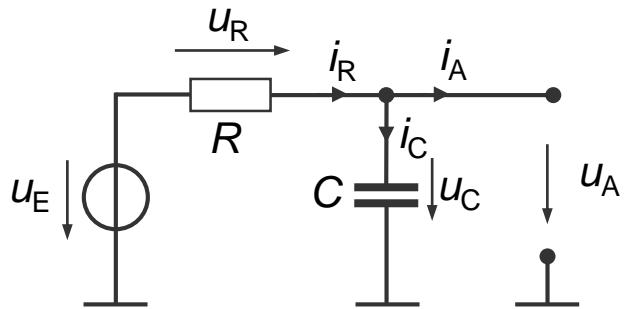
- ω_{pass} - Eckfrequenz des Durchlassbereichs
- ω_{stop} - Eckfrequenz des Sperrbereichs
- δ_p - zulässige Welligkeit im Durchlassbereich (meist in dB)
- δ_s - minimale Sperrdämpfung im Sperrbereich (meist in dB)

Knoten- und Maschengleichungen aufstellen

$$(I) \quad i_A - i_R + i_C = 0$$

$$(II) \quad u_R + u_C - u_E = 0$$

$$(III) \quad u_C - u_A = 0$$



Bauteilgleichungen aufstellen

$$(IV) \quad u_R = R \cdot i_R$$

$$(V) \quad i_C = \frac{\partial}{\partial t} (C \cdot u_C)$$

Einsetzen

$$(III) \rightarrow (II) \quad u_A = u_E - u_R$$

$$(I) + (V) \rightarrow (IV) \quad u_R = R \cdot (i_A + i_C) = R \cdot \left(i_A + \frac{\partial}{\partial t} (C \cdot u_C) \right) = R \cdot \left(i_A + \frac{\partial}{\partial t} (C \cdot u_A) \right)$$

Damit lässt sich eine Differentialgleichung (DGL) aufstellen

$$(VI) \quad u_A = u_E - R \cdot \left(i_A + \frac{\partial}{\partial t} (C \cdot u_A) \right)$$

Differentialgleichung

$$(VI) \quad u_A = u_E - R \cdot \left(i_A + \frac{\partial}{\partial t} (C \cdot u_A) \right)$$

Zwei vereinfachende Festlegungen

$$(A1) \quad i_A = 0 \quad (\text{unbelasteter Ausgang})$$

$$(A2) \quad C, R \neq f(t) \quad (\text{konstante Kapazität und Resistivität})$$

Reduzierte Differentialgleichung

$$(VI^*) \quad u_A + RC \cdot \frac{\partial}{\partial t} u_A = u_E$$

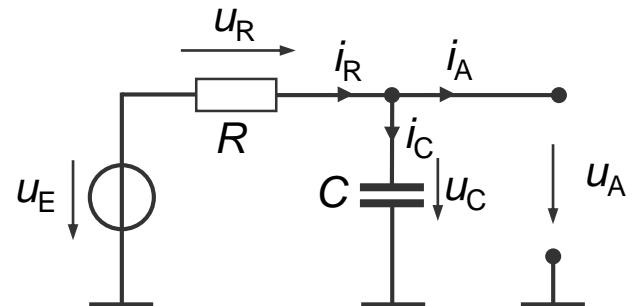
Laplace-Transformation:

$$(VII) \quad \mathcal{L}\{u_A(t)\} + RC \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t} u_A(t)\right\} = \mathcal{L}\{u_E(t)\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\{u_A(t)\} + RC(s \cdot \mathcal{L}\{u_A(t)\} - u_A(0)) = \mathcal{L}\{u_E(t)\}$$

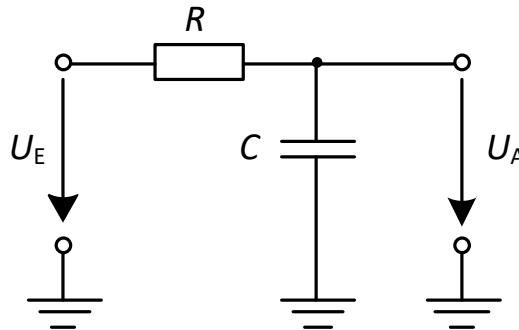
$$\xrightarrow{u_A(0)=0} \quad \mathcal{L}\{u_A(t)\} \cdot (1 + sRC) = \mathcal{L}\{u_E(t)\}$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{\mathcal{L}\{u_A(t)\}}{\mathcal{L}\{u_E(t)\}} = \frac{1}{1+s \cdot RC} \quad \text{bzw. } H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}$$



Tiefpass 1. Ordnung – einfache Herleitung

Als RC-Glied:



Betrachtung im Frequenzraum als Spannungsteiler komplexer Impedanzen Z_R und Z_C .

Es gilt $Z_R = R$ und $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ und somit für die Übertragungsfunktion $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{U_A(\omega)}{U_E(\omega)} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

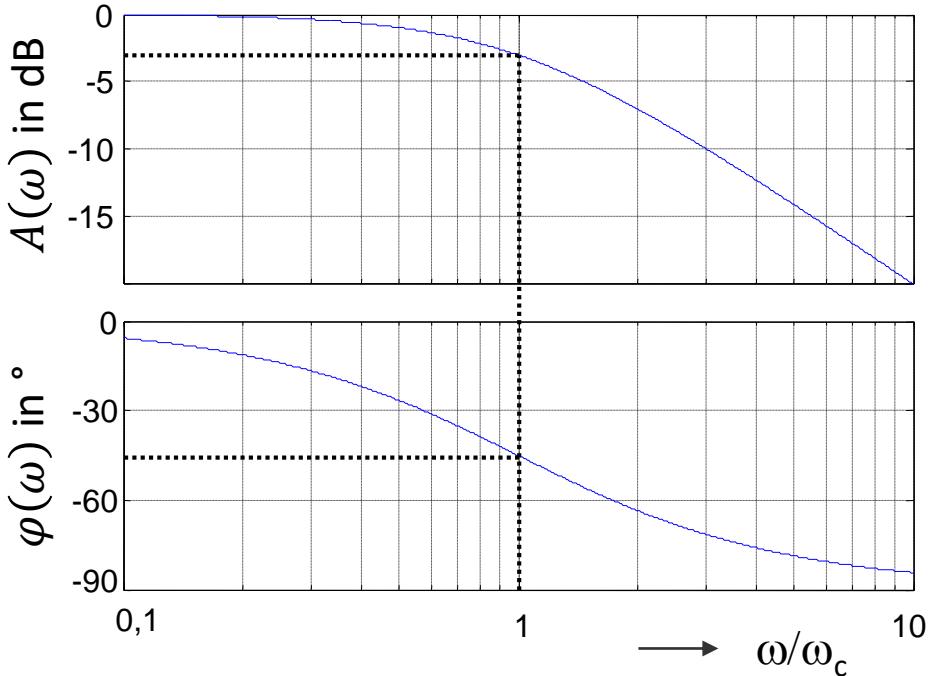
Mit der Definition der Grenzfrequenz $\omega_c := \frac{1}{RC}$ erhält man:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$$

Frequenzgang Tiefpass 1. Ordnung

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$$

Bode-Diagramm:

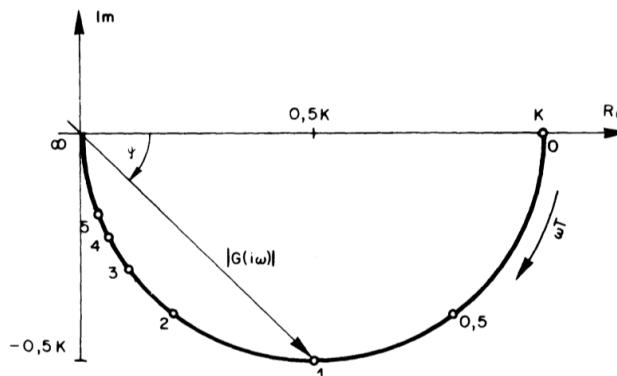


Amplitudenfrequenzgang:

$$A(\omega) = |H(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

Phasenfrequenzgang:

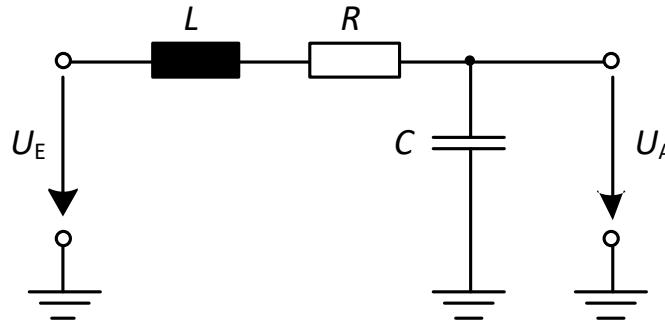
$$\varphi(\omega) = \arg\{H(\omega)\} = \arctan(-\omega/\omega_c)$$



Darstellung des Frequenzgangs $H(\omega)$ in der Gauß'schen Zahlenebene (Ortskurve)

Tiefpass 2. Ordnung

Erweiterung des RC-Tiefpasses um eine Induktivität L :



Erneut Betrachtung als komplexer Spannungsteiler der Impedanzen Z_L , Z_R und Z_C .

Es gilt $Z_L = j\omega L$, $Z_R = R$ und $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ und somit für der Frequenzgang $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{U_A(\omega)}{U_E(\omega)} = \frac{Z_C}{Z_L + Z_R + Z_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

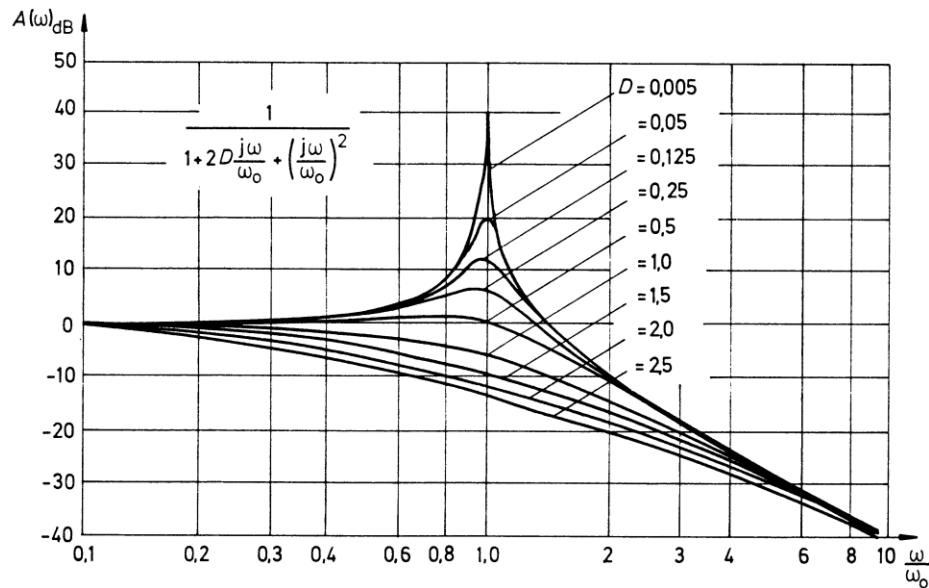
Durch die Definition von Dämpfungsgrad $D := \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ und Eigenfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ erhält

man die allgemeine Formulierung:

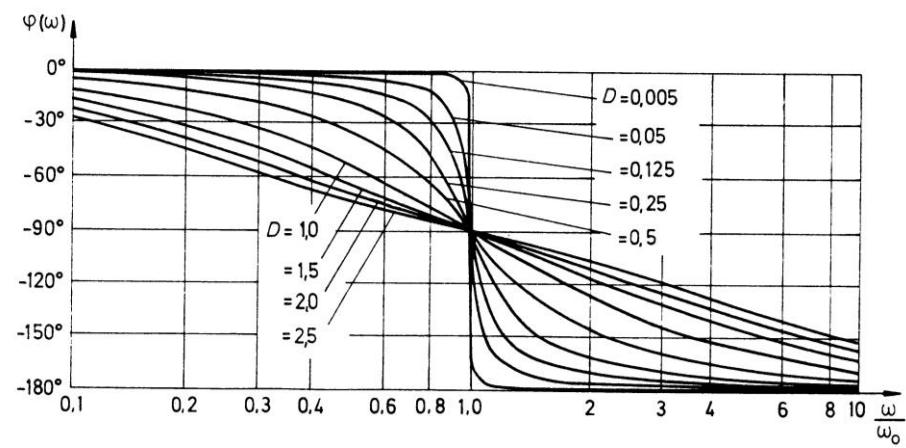
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2D\frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Tiefpass 2. Ordnung

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2D \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$



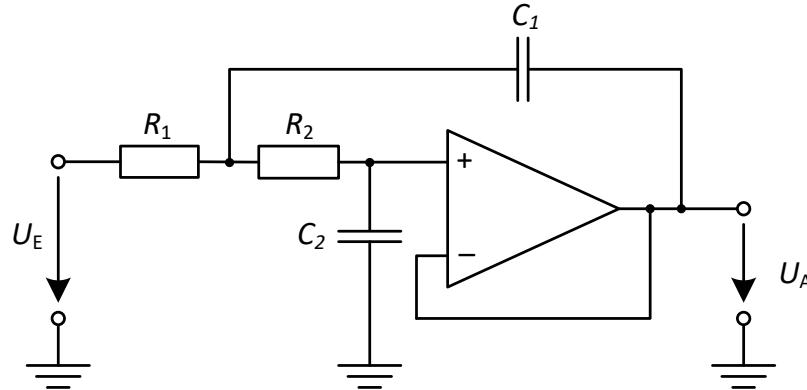
Amplitudenfrequenzgang



Phasenfrequenzgang

Aktiver Tiefpass 2. Ordnung

Erweiterung des RC-Tiefpasses um weiteren RC-Pfad und Impedanzwandler:



Der Frequenzgang $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2D\frac{j\omega}{\omega_2} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_1 \omega_2}}, \text{ mit } \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}, \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}, D = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right)$$

Werden die Widerstände und Kapazitäten gleich groß gewählt

$$R_1 = R_2 = R, C_1 = C_2 = C \text{ und } \omega_0 = RC$$

so erhält man die allgemeine Formulierung:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2\frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Aktiver Tiefpass 2. Ordnung – Herleitung über DGL I

Knoten- und Maschengleichungen aufstellen (Vereinfachungen wie bisher.)

$$(I) \quad i_E - i_{C1} + i_{C2} = 0$$

$$(II) \quad u_{R1} + u_{C1} + u_A - u_E = 0$$

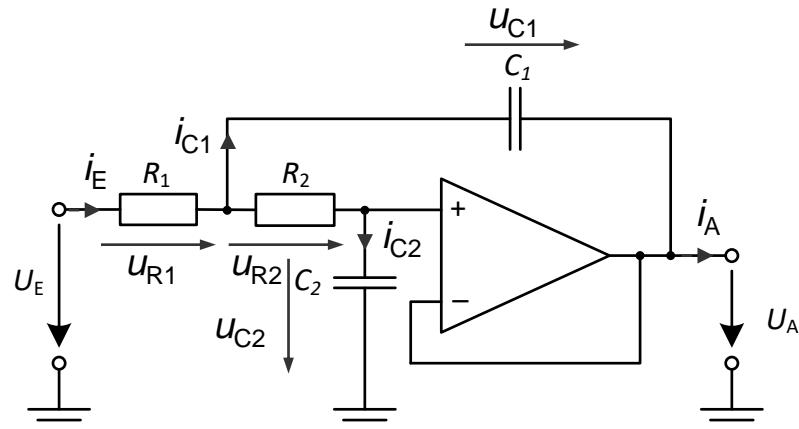
$$(III) \quad u_{C1} + u_A - u_{R2} - u_{C2} = 0$$

$$(IV) \quad u_{C2} - u_A = 0 \ (\rightarrow \text{Impedanzwandler})$$

Bauteilgleichungen aufstellen ($x = \{1,2\}$)

$$(V) \quad u_{Rx} = R_x \cdot i_{Rx}$$

$$(VI) \quad i_{Cx} = \frac{\partial}{\partial t} (C_x \cdot u_{Cx})$$



Einsetzen

$$(IV)+(V)+(VI) \rightarrow (III) \quad u_{C1} = u_{R2} = R_2 \cdot i_{C2} = R_2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (C_2 \cdot u_{C2}) = R_2 C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u_A)$$

$$(I)+(V)+(VI) \rightarrow (II) \quad u_A = u_E - u_{C1} - R_1 \cdot i_E = u_E - u_{C1} - R_1 \cdot (i_{C1} + i_{C2})$$

$$= u_E - R_2 C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u_A) - R_1 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} (C_1 \cdot u_{C1}) + \frac{\partial}{\partial t} (C_2 \cdot u_{C2}) \right)$$

$$= u_E - R_2 C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u_A) - R_1 C_1 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(R_2 C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u_A) \right) + R_1 C_2 \frac{\partial}{\partial t} (u_A)$$

Aktiver Tiefpass 2. Ordnung – Herleitung über DGL II

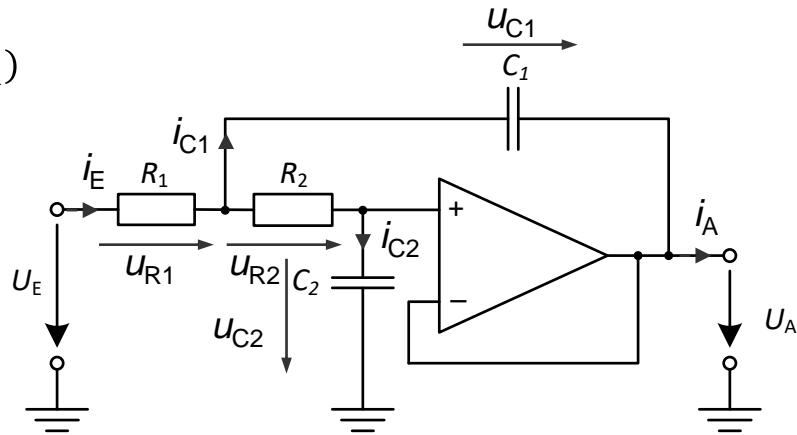
Differentialgleichung

$$(VII) \quad u_A = u_E - R_2 C_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u_A) - R_1 C_1 R_2 C_2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_A)$$

mit Ersetzung $\omega_{cx} = \frac{1}{R_x C_x}$, $2D = \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)$

$$(VII^*) \quad u_A = u_E - \frac{1}{\omega_{c2}} 2D \cdot \frac{\partial}{\partial t} (u_A) - \frac{1}{\omega_{c1} \omega_{c2}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_A)$$

Laplace-Transformation mit $u_A(0) = \frac{\partial}{\partial t} u_A(0) = 0$



$$(VIII) \quad \mathcal{L}\{u_A(t)\} + \frac{2D}{\omega_{c2}} \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial t} u_A(t)\right\} + \frac{1}{\omega_{c1} \omega_{c2}} \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_A(t)\right\} = \mathcal{L}\{u_E(t)\}$$

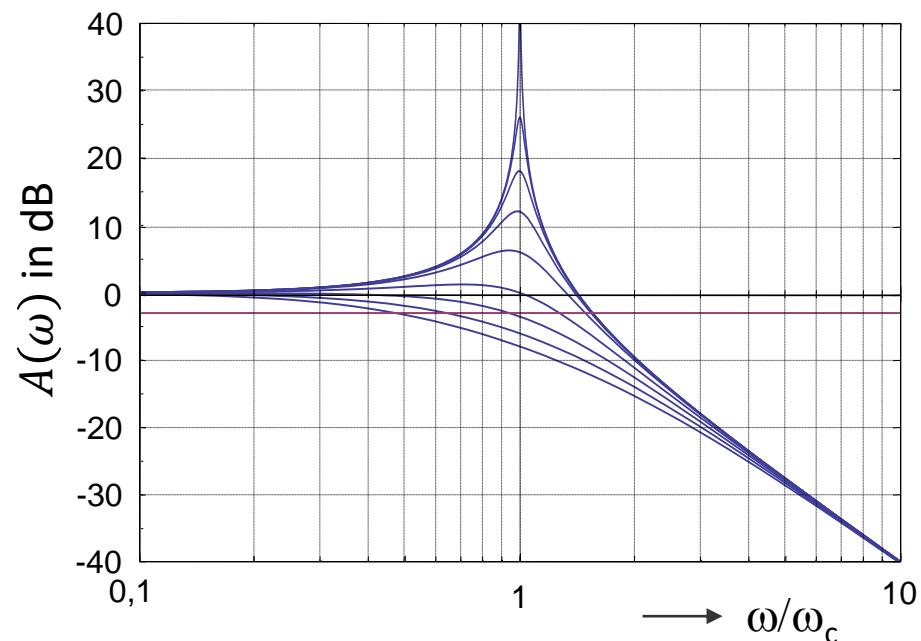
$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{u_A(t)\} + \frac{2D s}{\omega_{c2}} \cdot \mathcal{L}\{u_A(t)\} + \frac{s^2}{\omega_{c1} \omega_{c2}} \cdot \mathcal{L}\{u_A(t)\} = \mathcal{L}\{u_E(t)\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{u_A(t)\} \cdot \left(1 + \frac{2D s}{\omega_{c2}} + \frac{s^2}{\omega_{c1} \omega_{c2}} \right) = \mathcal{L}\{u_E(t)\}$$

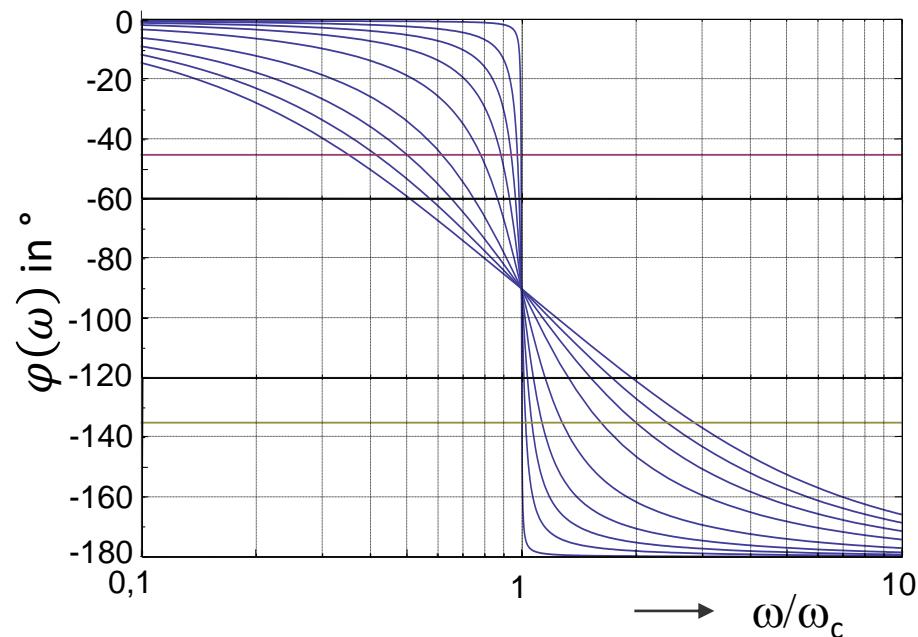
$$(IX) \quad H(s) = \frac{\mathcal{L}\{u_A(t)\}}{\mathcal{L}\{u_E(t)\}} = \frac{1}{1 + \frac{2D s}{\omega_{c2}} + \frac{s^2}{\omega_{c1} \omega_{c2}}} \quad \text{bzw. } H(\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot 2D \frac{\omega}{\omega_{c2}} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{c1} \omega_{c2}}}$$

Aktiver Tiefpass 2. Ordnung

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot 2D \frac{\omega}{\omega_{c2}} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_{c1} \omega_{c2}}}$$



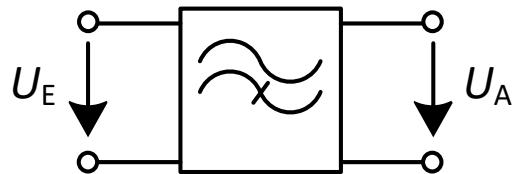
Amplitudenfrequenzgang für $\omega_{c1} = \omega_{c2}$



Phasenfrequenzgang für $\omega_{c1} = \omega_{c2}$

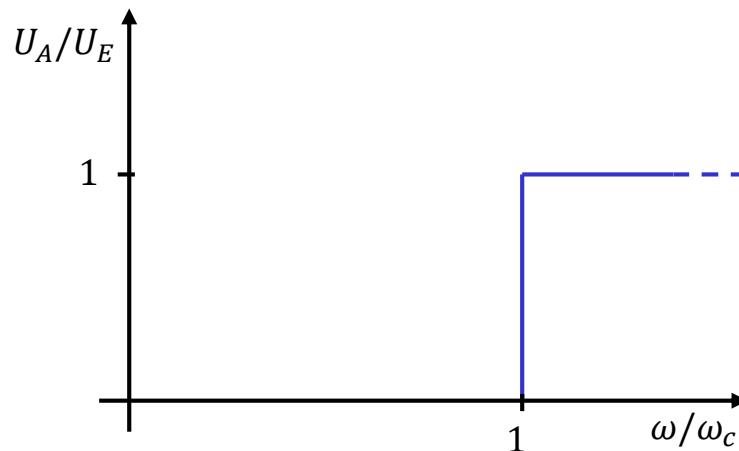
Idealer Hochpass

Symbol Hochpass:



Dient der Unterdrückung niederfrequenter Signalanteile (z.B. 50 Hz Netzbrummen).

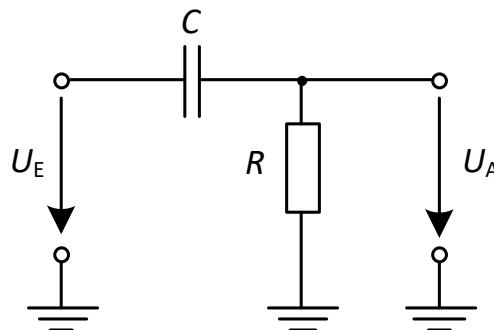
Idealer Frequenzgang: $\frac{U_A}{U_E} = \sigma \left(\frac{\omega}{\omega_c} - 1 \right)$



Ebenfalls nicht realisierbar.

Hochpass 1. Ordnung

Als RC-Glied:



Analog zum Tiefpass gilt für die Übertragung $H(\omega)$:

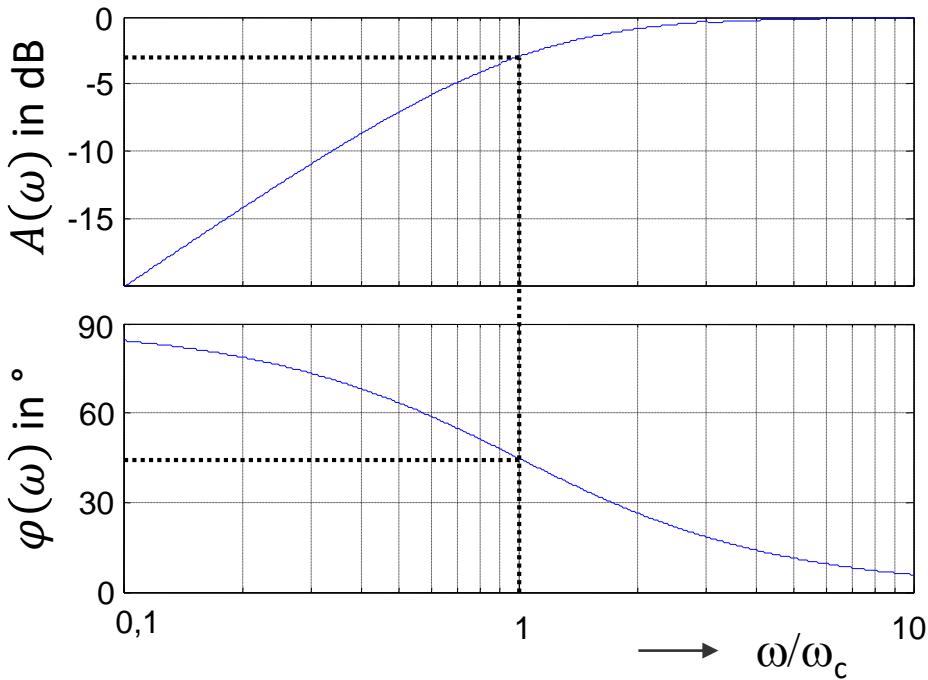
$$H(\omega) = \frac{U_A(\omega)}{U_E(\omega)} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_C} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2} + j \frac{\frac{1}{\omega RC}}{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}.$$

Und mit Einsetzen der Grenzfrequenz $\omega_c := \frac{1}{RC}$ erhält man:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - j\omega_c/\omega}$$

Hochpass 1. Ordnung

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - j\omega_c/\omega}$$



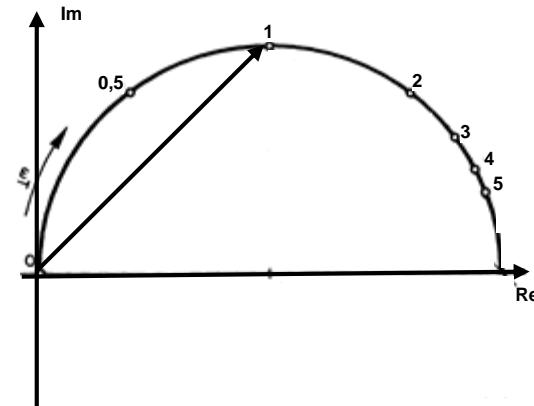
Bode-Diagramm:

Amplitudenfrequenzgang:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega_c/\omega)^2}}$$

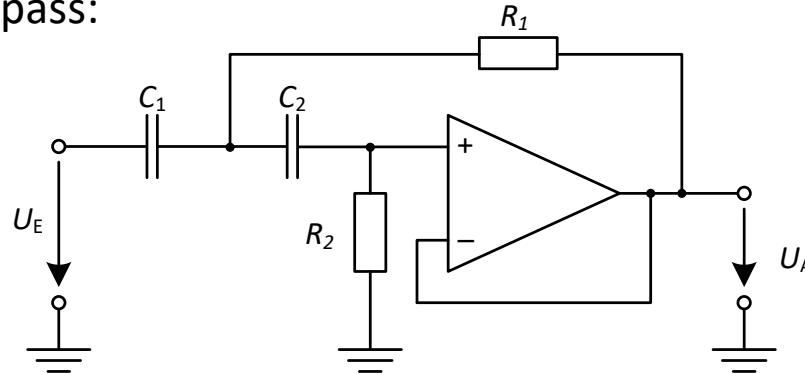
Phasenfrequenzgang:

$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega_c/\omega)$$



Aktiver Hochpass 2. Ordnung

Analog zum aktiven Tiefpass:



Die Übertragungsfunktion $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - j2D\frac{\omega_2}{\omega} - \frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2}}, \text{ mit } \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}, \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}, D = \frac{1}{2} \left(\frac{C_2}{C_1} + 1 \right)$$

Werden die Widerstände und Kapazitäten gleich groß gewählt

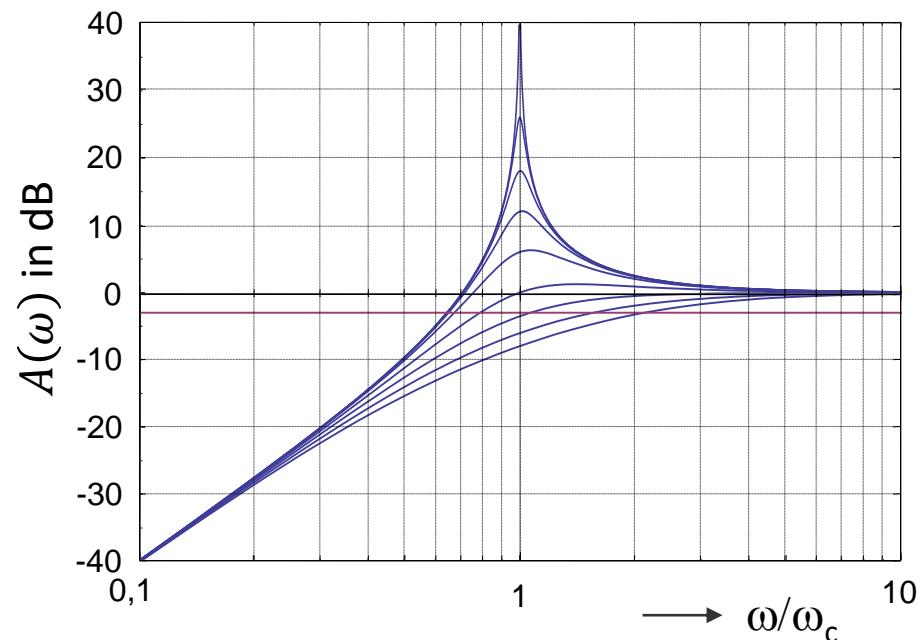
$$R_1 = R_2 = R, C_1 = C_2 = C \text{ und } \omega_0 = RC$$

so erhält man die allgemeine Formulierung:

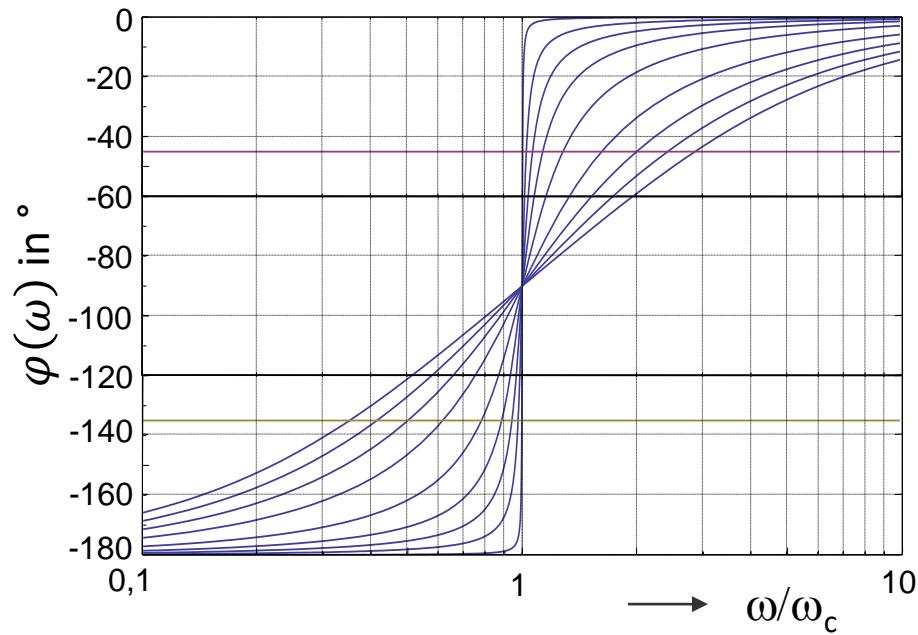
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2\frac{\omega_0}{j\omega} + \left(\frac{\omega_0}{j\omega}\right)^2}$$

Aktiver Hochpass 2. Ordnung

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + 2D \frac{\omega_{c2}}{j\omega} + \frac{\omega_{c1} \omega_{c2}}{(j\omega)^2}}$$



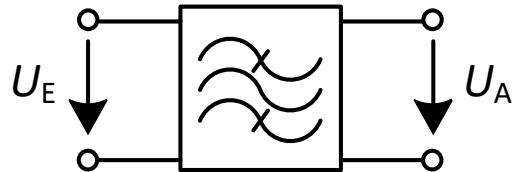
Amplitudenfrequenzgang für $\omega_{c1} = \omega_{c2}$



Phasenfrequenzgang für $\omega_{c1} = \omega_{c2}$

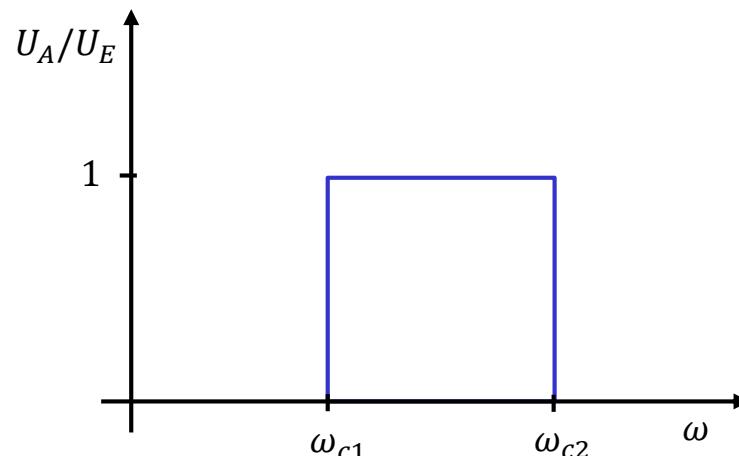
Idealer Bandpass

Symbol Bandpass:



Dient der Unterdrückung sowohl nieder-, als auch hochfrequenter Signalanteile.

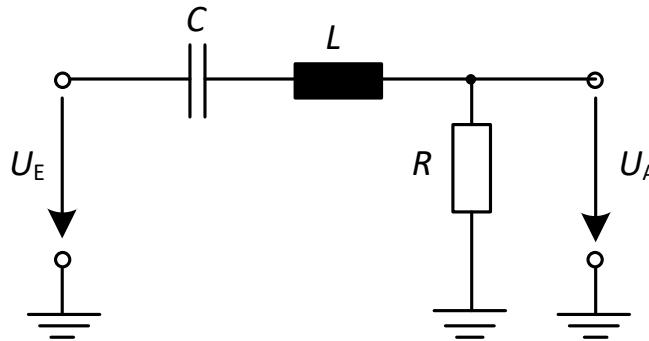
Idealer Frequenzgang: $\frac{U_A}{U_E} = \sigma\left(\frac{\omega}{\omega_{c1}} - 1\right) - \sigma\left(1 - \frac{\omega}{\omega_{c2}}\right)$



Erneut nicht realisierbar.

Bandpass 2. Ordnung

Als RCL-Glied:



Für die Übertragungsfunktion $H(\omega)$ eines Bandpasses gilt:

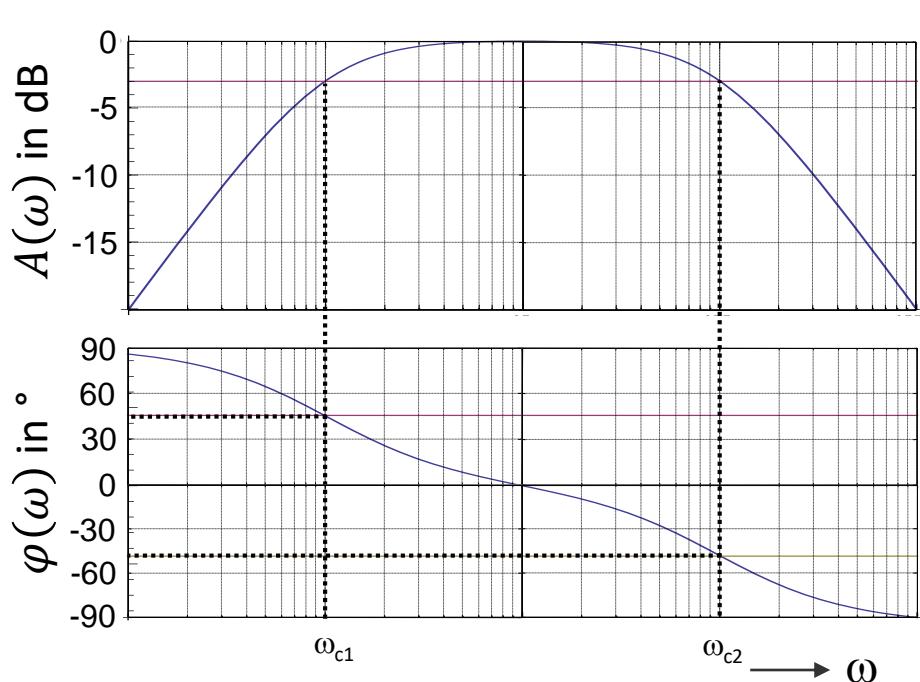
$$H(\omega) = \frac{U_A(\omega)}{U_E(\omega)} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\left(\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)}$$

Mit den Grenzfrequenzen $\omega_{c1} := \frac{1}{RC}$ und $\omega_{c2} := \frac{R}{L}$ erhält man:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_{c2}} - \frac{\omega_{c1}}{\omega}\right)}$$

Bandpass 2. Ordnung

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_{c2}} - \frac{\omega_{c1}}{\omega} \right)}$$



Bode-Diagramm:

Amplitudenfrequenzgang:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{c2}} - \frac{\omega_{c1}}{\omega} \right)^2}}$$

Phasenfrequenzgang:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left(-\frac{\omega}{\omega_{c2}} + \frac{\omega_{c1}}{\omega} \right)$$

8.2 A/D- und D/A-Umsetzer

SIGNALE

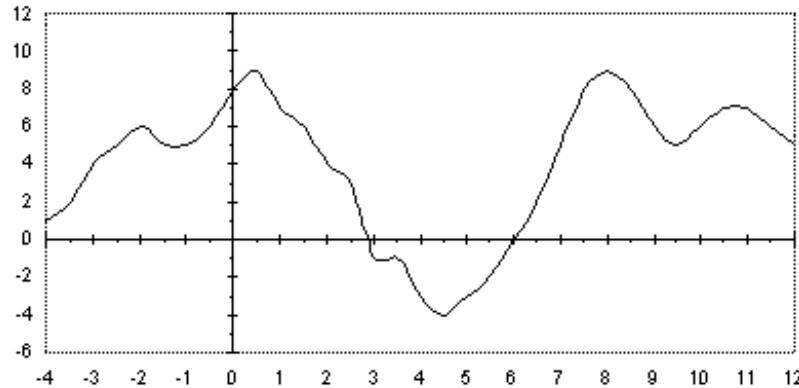
Definition:

Eine physikalische Größe, in deren Wert und Verlauf (meist Zeitverlauf) Informationen verschlüsselt sind, nennt man ein Signal.

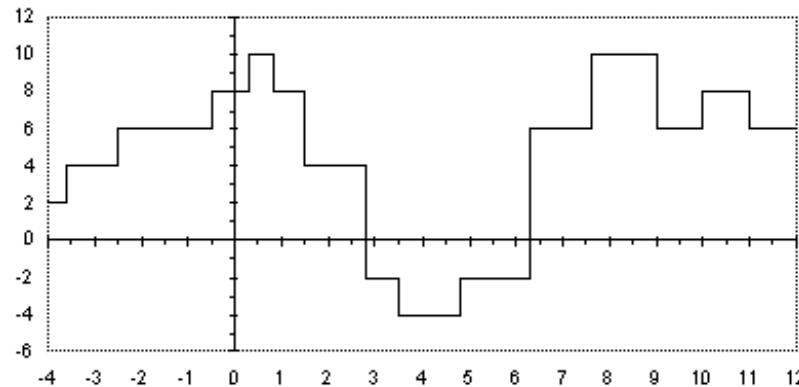
Wert und Verlauf können kontinuierlich oder diskontinuierlich (diskret) sein.

	zeitkontinuierlich	zeitdiskret
wert-kontinuierlich	Analog-signal	Abtast-signal
wert-diskret	digitalisierte Werte	Digital-signal

Zeitkontinuierliche Signale



Kontinuierliches oder analoges Signal:
Die informationstragende Größe ist **wert- und zeitkontinuierlich**.



Digitalisiertes Signal:
Die informationstragende Größe ist **wertdiskret und zeitkontinuierlich**.

Zeitdiskrete Signale I

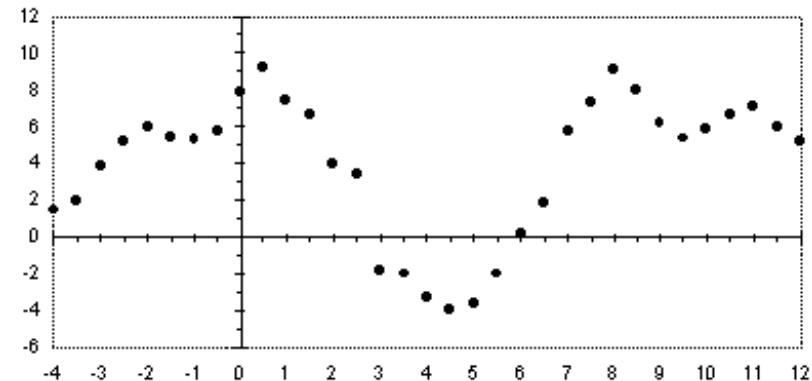
Vorkommen von zeitdiskreten Signalen

Zeitdiskrete Signale entstehen entweder durch Abtastung analoger Signale oder sind von Natur aus zeitdiskret.

Abtast-Signal (engl. discrete time signal):

Die informationstragende Größe ist
wertkontinuierlich und zeitdiskret.

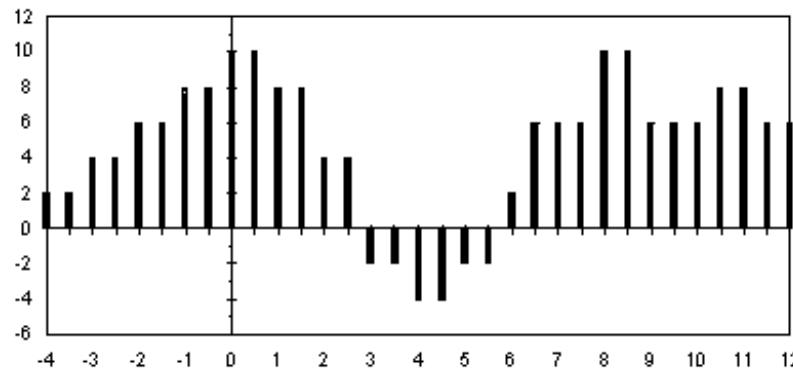
- (1) Die Abtastung erfolgt normalerweise mit einem festem Zeittakt oder die Abtastzeitpunkte sind zumindest bekannt (andernfalls Informationsverlust)
- (2) Wenn das Abtasttheorem und (1) eingehalten wird, dann entsteht durch die Abtastung kein Informationsverlust



Die Funktionswerte zwischen den
Abtastpunkten existieren nicht
– sie sind auch insbes. nicht 0!

Digital signal:

- Die informationstragende Größe ist **wert-** und **zeitdiskret**. Häufig wird ein fester Zeittakt vorausgesetzt (äquidistante Abtastung). Die Amplituden-Diskretisierung **bedingt** einen Informationsverlust (aber meist vernachlässigbar klein). Hierzu wird meist ein binäres Digitalsignal bzw. n-binäres Signal mit 2^n möglichen Werten/Stufen eingesetzt.



8.3 A/D- und D/A-Umsetzer

ABTASTUNG

Vorteile digitaler Signale

Signalübertragung

- robust gegenüber elektromagnetischen Störfeldern
- robust gegenüber den Eigenschaften des Übertragungskanals
- einfache galvanische Trennung z. B. durch Optokoppler

Signalverarbeitung

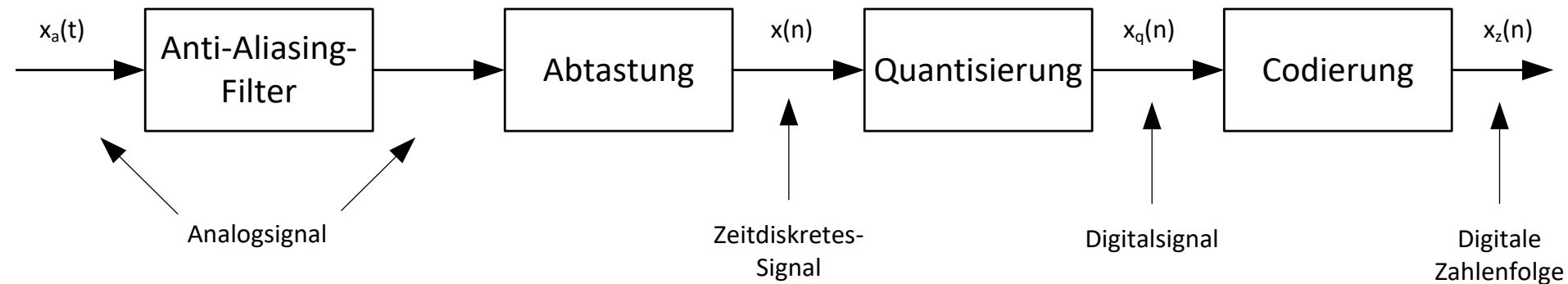
- einfache Speicherung
- direkt im Digitalrechner verarbeitbar; Rechenoperationen z. B. Linearisieren, Quadrieren, Multiplizieren, Soll-Ist-Vergleich
- aber Quantisierungsfehler!

Zumeist nur binäre Digitalsignale:

- 0 = z. B.: 0V, Low, nicht wahr, falsch
- 1 = z. B.: 5V, High, wahr, richtig

Analog-Digital-Umsetzer ADU

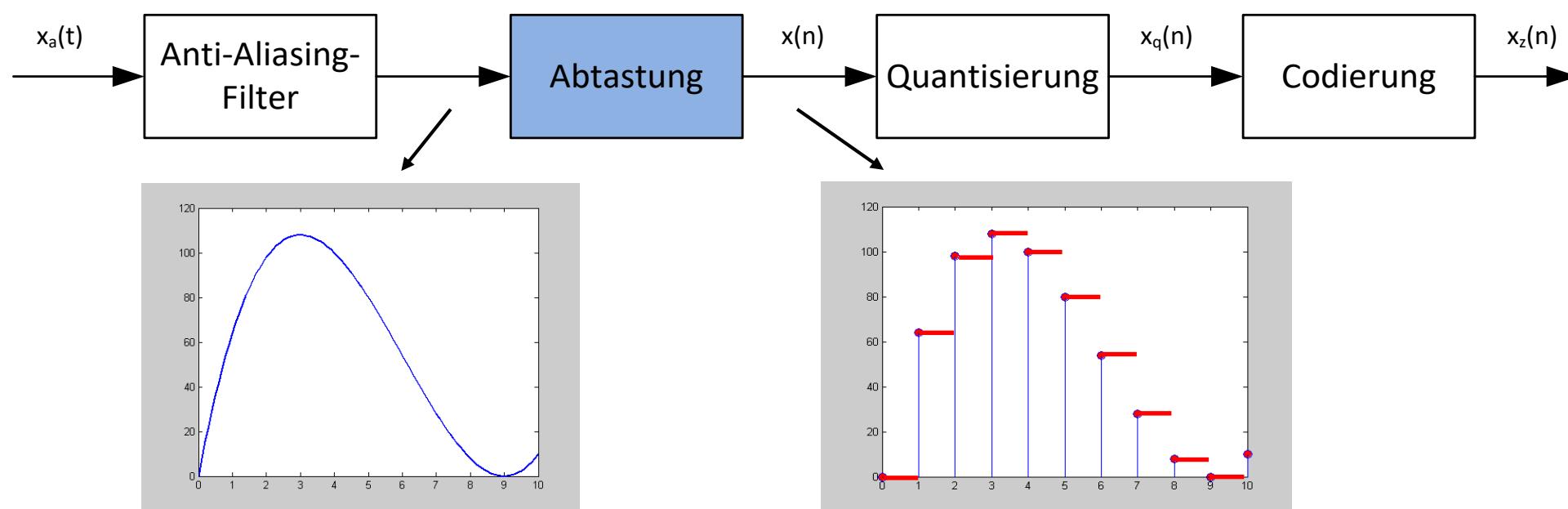
engl.: analog-digital-converter ADC



4 Schritte

1. Anti-Aliasing-Filter
2. Abtastung
3. Quantisierung
4. Codierung

ADU: Abtastung (Sample & Hold) I



Die Abtastung macht aus einem zeit- und wertkontinuierlichen Signal ein zeitdiskretes wertkontinuierliches Signal

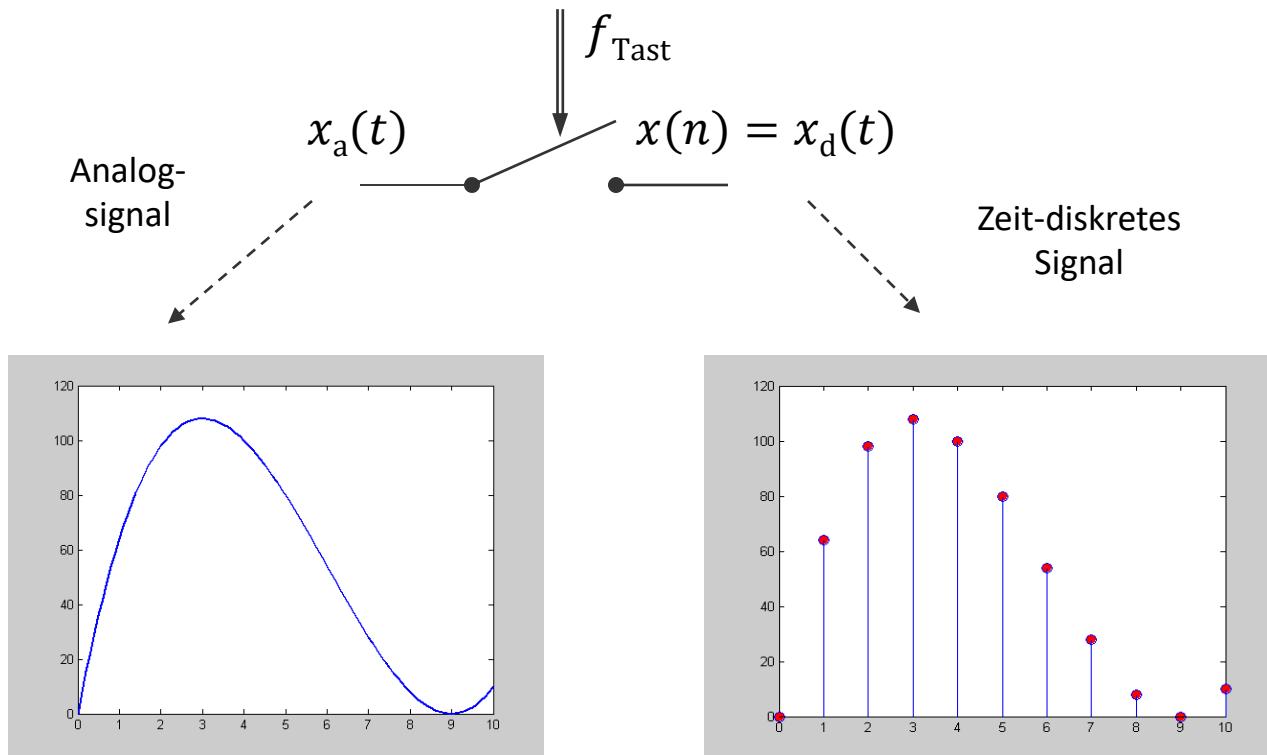
Grund für Sample & Hold:

- Die Analog-zu-Digital-Umsetzung braucht Zeit
- Die Signalamplitude ist vorteilhafterweise konstant während der A/D-Wandlung (je nach Wandlertyp)

ADU: Abtastung (Sample & Hold) II

Idealer Abtaster

- Der Schalter wird periodisch jeweils nach der Zeitdauer $1/f_{\text{Tast}}$ für eine unendlich kurze Zeit geschlossen und so ein Abtastwert (sample) aus dem Analogsignal entnommen (ein realer Abtaster hat eine endliche Abtastdauer)



Mathematische Darstellung des Abtastprozesses

Wir betrachten ein analoges Signal $x(t)$ mit einem bandbegrenzten Spektrum $X(f)$ mit Grenzfrequenz f_g .

Zur Abtastung wird dieses Signal mit einer äquidistanten Diracfolge $\omega(t)$ multipliziert.

$$\omega(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{\text{Tast}}) \quad \text{mit } T_{\text{Tast}}: \text{Abtastzeit}$$

Das Spektrum der äquidistanten Diracfolge ist wieder eine äquidistante Diracfolge $\Omega(f)$ mit:

$$\Omega(f) = f_{\text{Tast}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_{\text{Tast}}) \quad \text{mit } f_{\text{Tast}} = 1/T_{\text{Tast}} = \text{Abtastfrequenz}$$

Die Spektren werden gefaltet.

Das Produkt im Zeitbereich ergibt das Abtastsignal $x_a(t)$ (äquidistante Folge gewichteter Diracimpulse):

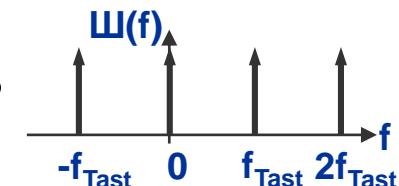
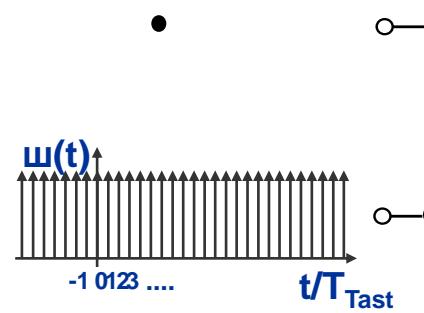
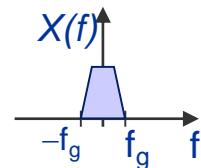
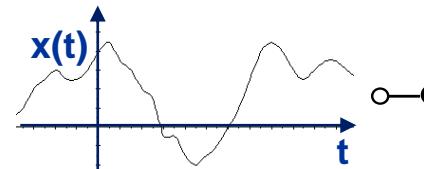
$$x_a(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{\text{Tast}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT_{\text{Tast}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{\text{Tast}}) \cdot \delta(t - nT_{\text{Tast}})$$

Die Zahlenfolge $x[n] = x(nT_{\text{Tast}})$ nennt man Abtastsequenz.

Die Faltung des Signalspektrums $X(f)$ mit der äquidistanten Diracfolge $\Omega(f)$ ergibt ein periodisches Spektrum $X_a(f)$ mit der Periode $f_{\text{Tast}} = 1/T_{\text{Tast}}$.

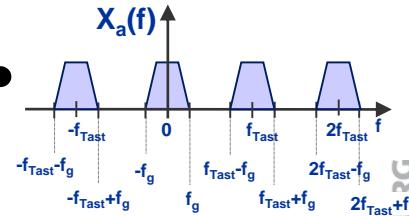
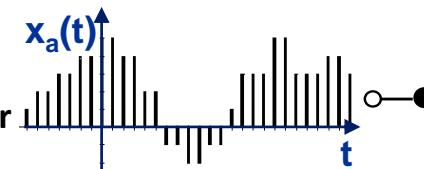
$$X_a(f) = X(f) * f_{\text{Tast}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_{\text{Tast}}) = f_S \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_{\text{Tast}})$$

$$x(t) \rightarrow x(n \cdot T_{\text{Tast}})$$

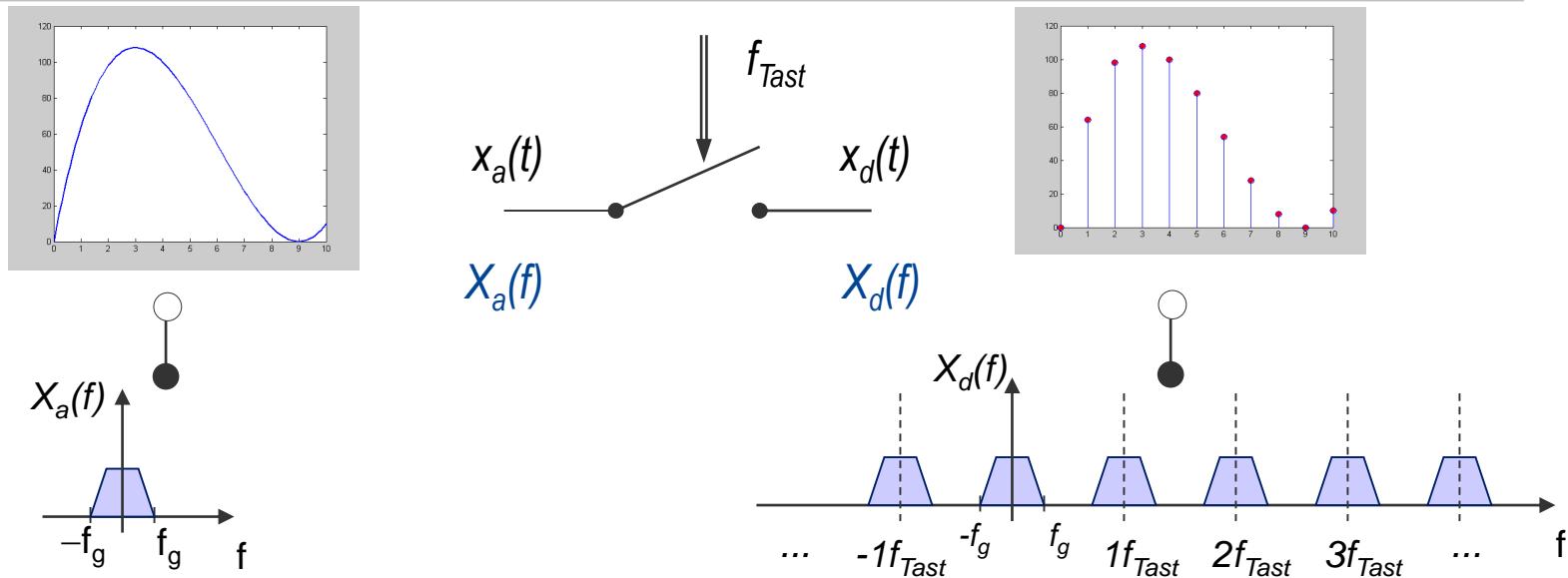


=

=



ADU: Abtastung eines tiefpassgesteuerten Signals



Merke!

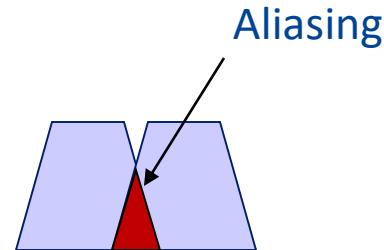
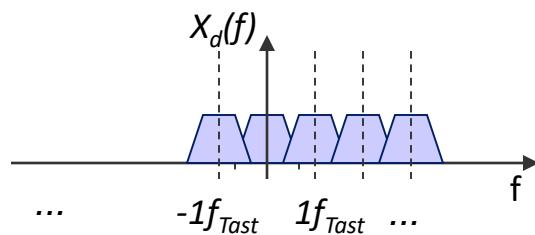
Eine Abtastung eines analogen Signals führt stets zu einer periodischen Wiederholung seines Spektrums im zeitdiskreten Signal.

Die Periode der Wiederholung entspricht genau der Abtastfrequenz f_{Tast}
Das Spektrum des zeitdiskreten Signal bei der Periode 0 entspricht bis auf einen Skalierungsfaktor dem Spektrum des ursprünglichen Analogsignals

- Die Signalinformation ist auch im zeitdiskreten Signal komplett enthalten.

ADU: Abtastung – Aliasing

- Wird die Abtastfrequenz zu niedrig gewählt (Unterabtastung), so kommt es zu Überlappungen der periodisch wiederholten Spektren (Aliasing):

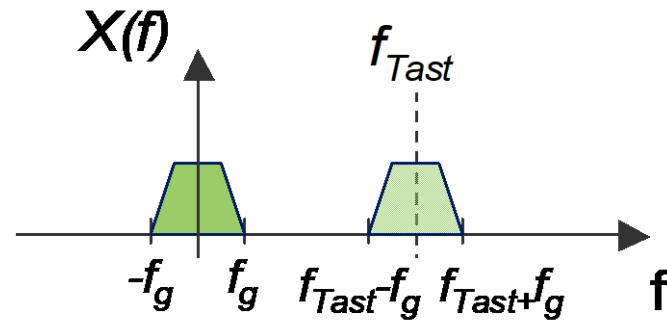


- Wenn Aliasing auftritt, so kommt es zu Informationsverfälschungen bzw. Fehlern, die später nicht mehr behoben werden können!
- Aliasing tritt dann auf, wenn die Abtastfrequenz weniger als doppelt so groß gewählt wird, wie die höchste Frequenz im abgetasteten Analogsignal

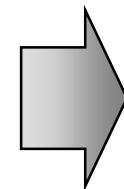
Abtasttheorem

Gegeben sei ein tiefpassbegrenztes Signal $x(t)$. Falls dieses Signal mit einer Abtastfrequenz f_{Tast} abgetastet wird, die größer als das Doppelte seiner Grenzfrequenz f_g (die höchste im Signal vorkommende Frequenz), so ist es vollständig durch die zugehörigen Abtastwerte $x(n)$ festgelegt.

$$f_{Tast} > 2 \cdot f_g$$



$$f_{\text{Tast}} > 2 \cdot f_g$$



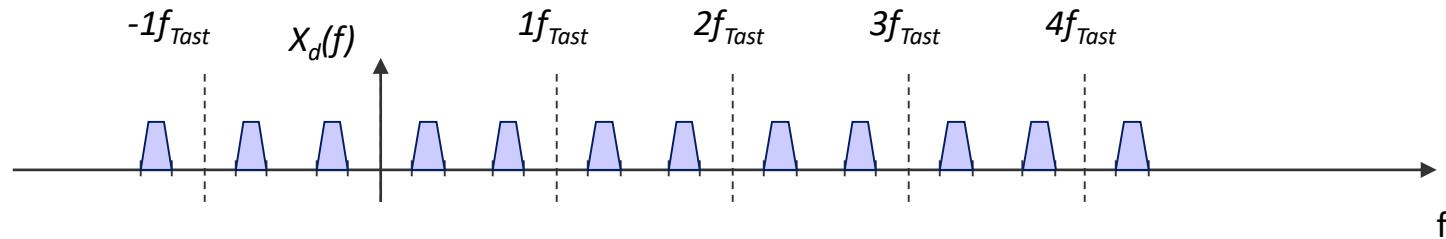
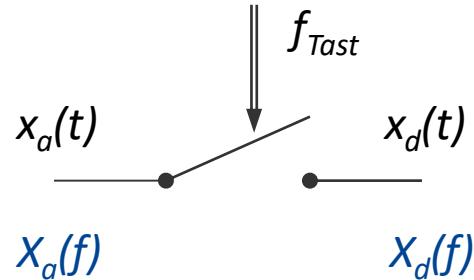
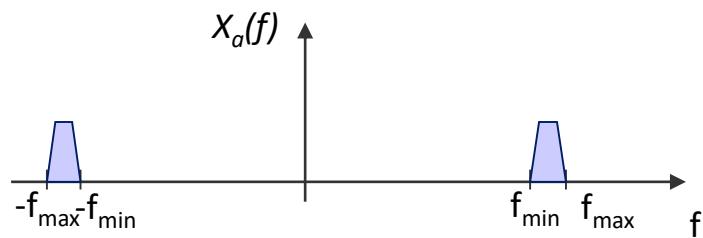
Vor jeden ADU gehört ein Filter!
(Anti-Aliasing-Filter; Tiefpass oder Bandpass)



Ausnahme: Filter kann u. U. weggelassen werden, falls die Messgröße von sich aus tiefpassbegrenzt ist (z. B. wg. Trägheit), aber aufpassen: Störungen (z. B. Rauschen) sind i. A. nicht tiefpassbegrenzt und daher können hochfrequente Störsignale durch die Abtastung in das Auswerteband gespiegelt werden!

- unnötig hoher Störpegel

Abtastung eines bandpassbegrenzten Signals I



Es kommt zu keinen Überlappungen falls

- a) die Abtastfrequenz $f_{\text{Tast}} > 2 \cdot |f_{\max} - f_{\min}|$ und
- b) falls keine Vielfachen von $n \cdot f_{\text{Tast}}/2$ in den Bereich von f_{\min} bis f_{\max} fallen

Erweitertes Abtasttheorem:

Gegeben sei ein **bandpassbegrenztes** Signal $x(t)$, das auf den Frequenzbereich von f_{min} bis f_{max} begrenzt ist. Falls dieses Signal mit einer Abtastfrequenz f_{Tast} abgetastet wird, die größer als das Doppelte seiner Bandbreite ($f_{max} - f_{min}$) ist, so ist es vollständig durch die zugehörigen Abtastwerte $x(n)$ festgelegt.

Zusätzliche Bedingung:

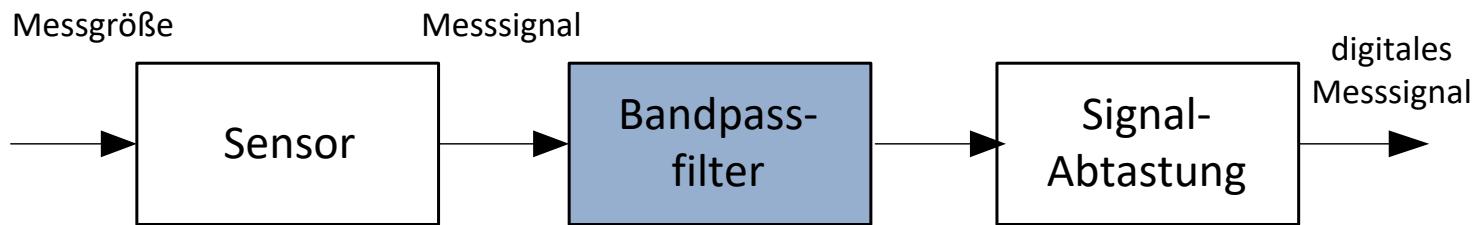
Der Frequenzbereich von f_{min} bis f_{max} in dem $X(f)$ von Null verschieden ist, muss zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen von $f_{Tast}/2$ liegen

$$f_{Tast} > 2 \cdot |f_{max} - f_{min}|, \text{ und}$$

$$n \cdot \frac{f_{Tast}}{2} < f_{min} < f_{max} < (n + 1) \cdot \frac{f_{Tast}}{2}$$

$$f_{Tast} > 2 \cdot |f_{max} - f_{min}|, \text{ und}$$

$$n \cdot \frac{f_{Tast}}{2} < f_{min} < f_{max} < (n + 1) \cdot \frac{f_{Tast}}{2}$$



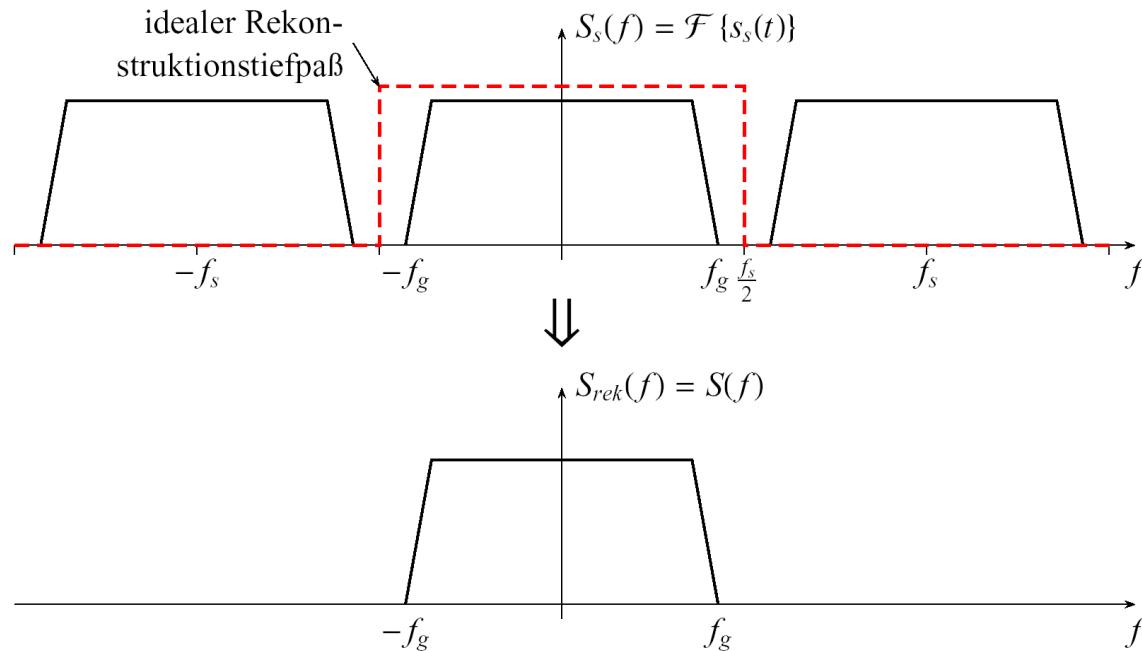
Merke!

Mittenfrequenz des Messsignals muss für eindeutige Frequenzzuordnung bekannt sein.

Vorteil der Unterabtastung: Signal wird ins Basisband (um die Frequenz 0) transferiert (wird als „Mischen“ bezeichnet) → weniger Abtastpunkte → weniger Speicherplatzbedarf → weniger Rechenaufwand

aber aufpassen: A/D-Wandler muss entsprechend kurze Abtastpulse verwenden
Aperturzeit $\ll 1/f_{max}$

Digital-zu-Analog-Wandlung (DAU)



Wenn man das Abtasttheorem eingehalten hat und aus dem diskreten Signalspektrum mit einem geeigneten Filter eine einzelne Periode herausfiltert, so kann man das ursprüngliche Analogsignal wieder **exakt** herstellen / rekonstruieren

Mathematische Darstellung der Rekonstruktion

Wie kann die ursprüngliche kontinuierliche Kurve $x(t)$ aus den Abtastwerten $x[n]$ wieder rekonstruiert werden?

Wir erhalten das nichtperiodische ursprüngliche Spektrum $X(f)$ aus dem periodischen Spektrum $X_a(f)$

$$X_a(f) = X(f) * f_{Tast} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_{Tast}) = f_S \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_{Tast})$$

durch Multiplikation mit einem idealen Tiefpass

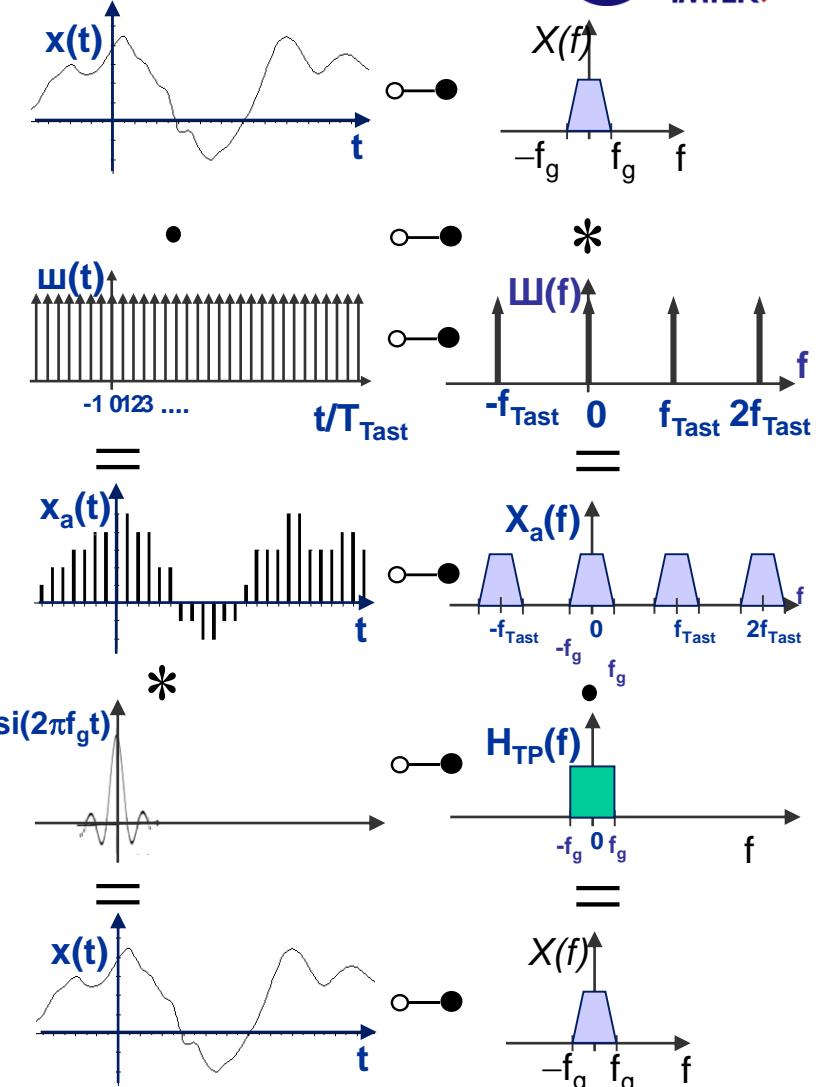
$$H_{TP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2 \cdot f_g}\right)$$

$$\rightarrow X(f) = X_a(f) \cdot T_{Tast} \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2 \cdot f_g}\right)$$

$$x(t) = x_a(t) * [2 \cdot f_g T_{Tast} \cdot \text{si}(2\pi \cdot f_g t)]$$

Haben wir mit der größtmöglichen Abtastperiode (Nyquistfrequenz) $T_{Tast} = 1/(2 \cdot f_g)$ abgetastet, so folgt:

$$x(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_{Tast}) \delta(t - nT_{Tast}) \right] * [2 \cdot f_g T_{Tast} \cdot \text{si}(2\pi \cdot f_g t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_{Tast}) \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{t - nT_{Tast}}{T_{Tast}}\right)$$



Mathematische Darstellung der Rekonstruktion

Wir können also die Funktion $x(t)$ für alle Zeiten t aus den Samples zu den Zeiten $n \cdot T_{\text{Tast}}$ rekonstruieren, vorausgesetzt, dass $x(t)$ bandbegrenzt ist

$$f_g < \frac{1}{2 \cdot T_{\text{Tast}}} = \frac{f_{\text{Tast}}}{2}$$

Zur Rekonstruktion des tiefpassbegrenzten Signals müssen wir lediglich jeden Sampelpunkt $x(n \cdot T_{\text{Tast}})$ mit der Funktion

$$\text{si}(2\pi \cdot f_g \cdot (t - n \cdot T_{\text{Tast}}))$$

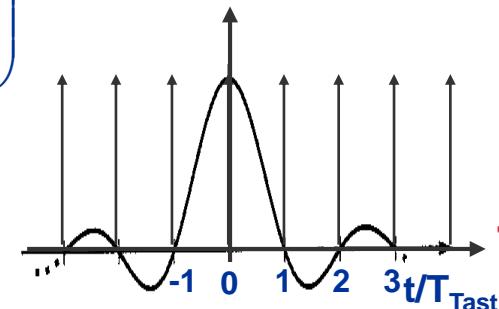
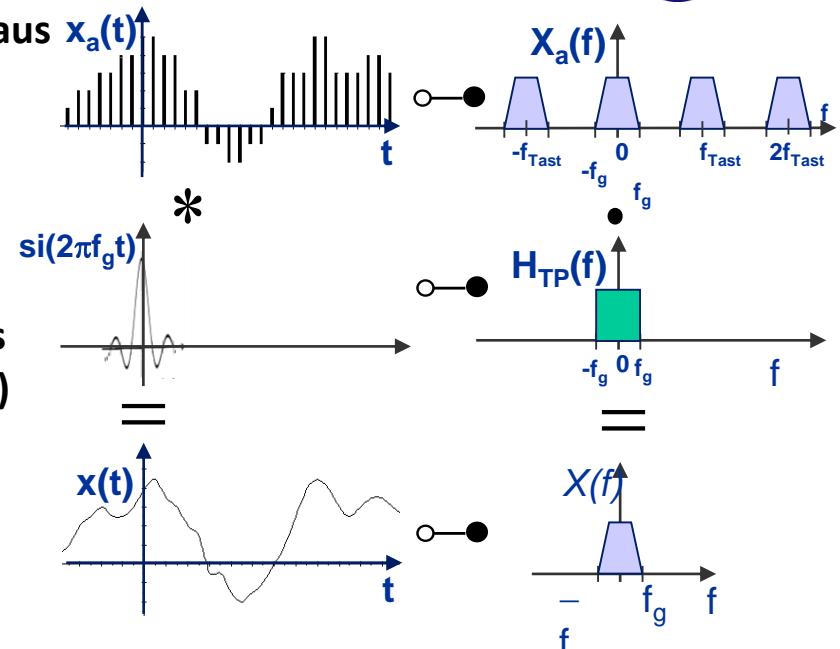
multiplizieren und über alle Samples summieren (=falten!)!

Der Faktor $\text{si}(2\pi \cdot f_g \cdot (t - n \cdot T_{\text{Tast}}))$ ist 1 für $t = n \cdot T_{\text{Tast}}$, für andere Zeiten fällt er oszillierend gegen Null.

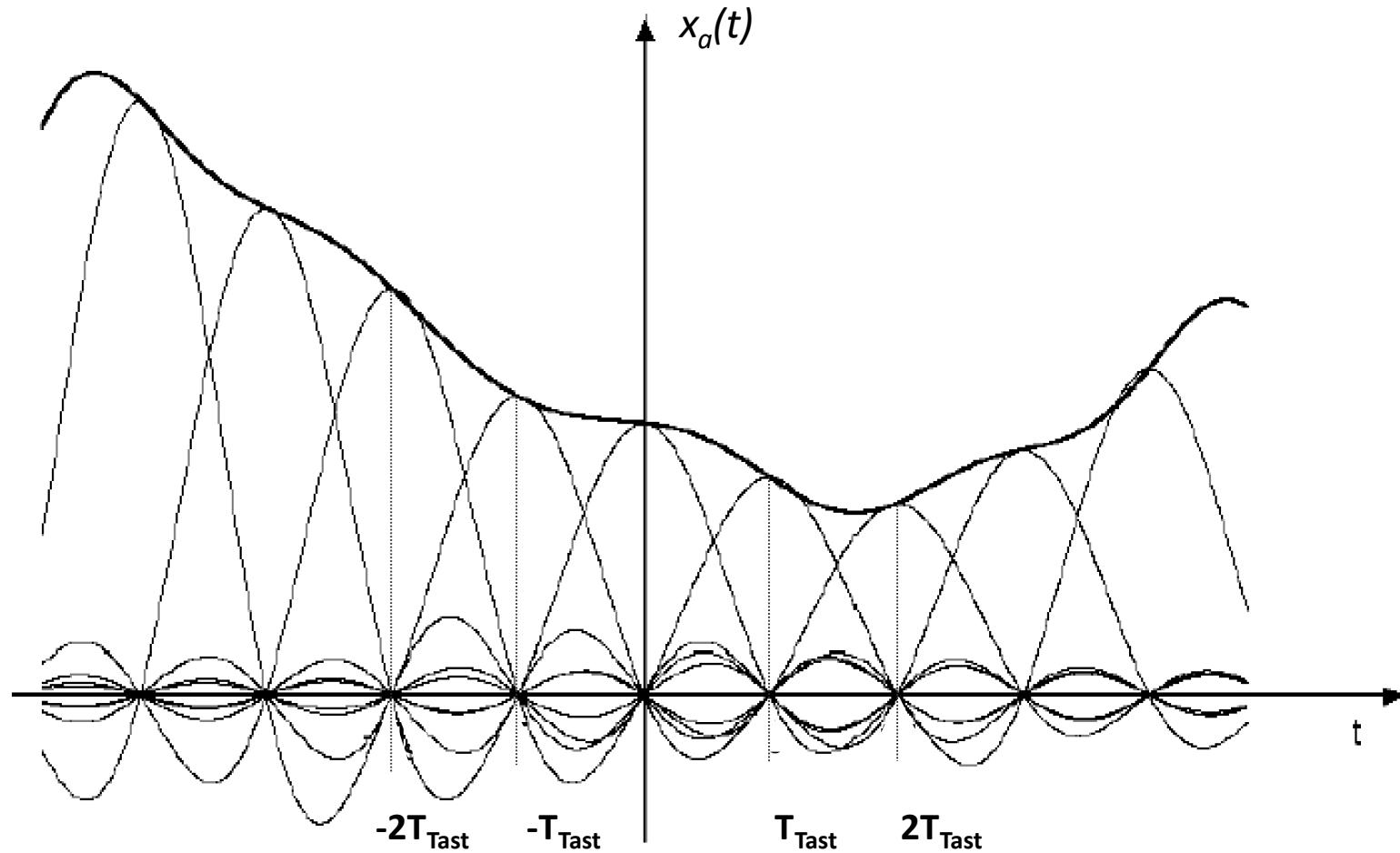
Wenn wir zur Rekonstruktion die größtmögliche Bandbreite $f_{g,\max} = f_{\text{Tast}}/2$ wählen, so fallen die Nullstellen der entsprechenden si-Funktionen genau mit den anderen Abtastpunkten zusammen.

$$\text{si}(2\pi \cdot f_{g,\max} (t - n \cdot T_{\text{Tast}})) = \text{si}\left(\pi \cdot \frac{t - n \cdot T_{\text{Tast}}}{T_{\text{Tast}}}\right)$$

 $x(t)$ ist zusammengesetzt aus lauter si-Funktionen an den Abtastzeiten $t = n \cdot T_{\text{Tast}}$ mit der Amplitude $x(n \cdot T_{\text{Tast}})$. Der Nullstellenabstand der si-Funktion beträgt T_{Tast} .

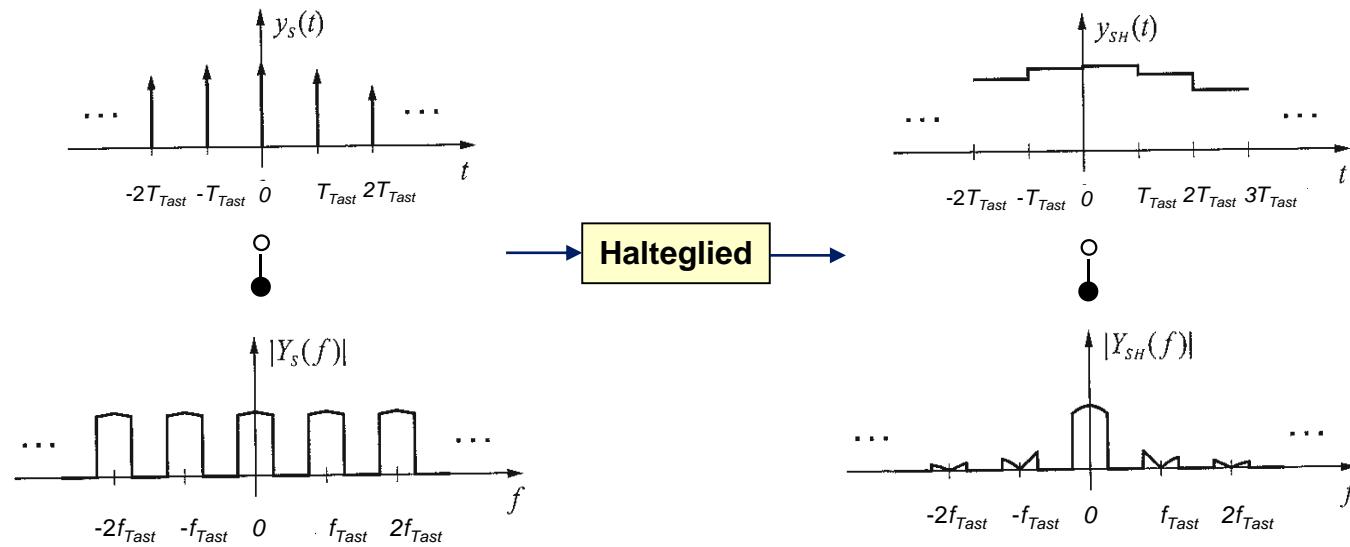


Digital-zu-Analog-Wandlung (DAU) bei TP-Signal II



Digital-zu-Analog-Wandlung (DAU) bei TP-Signal III

Im Prinzip reicht zur Rekonstruktion des analogen Signals der Tiefpass aus. Allerdings besitzt das so gewonnene Signal nur eine niedrige Amplitude. Deshalb wird zur Signalrekonstruktion dem Tiefpassfilter ein Halteglied (Hold) vorgeschaltet.



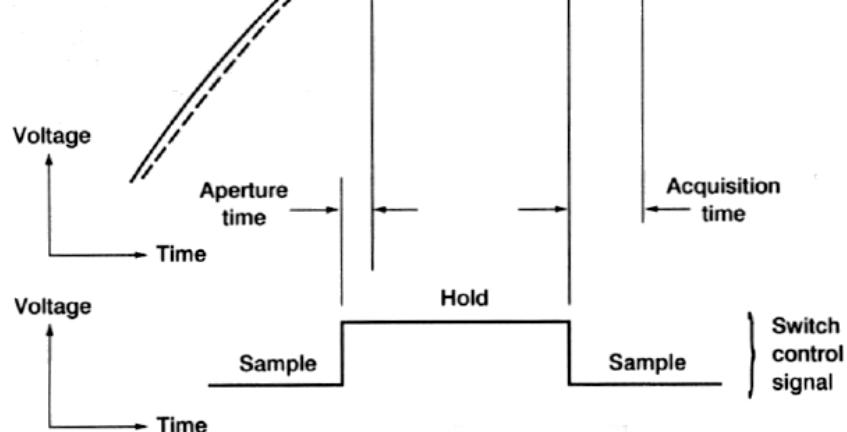
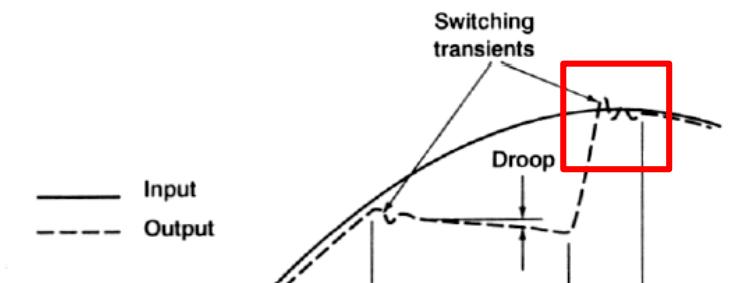
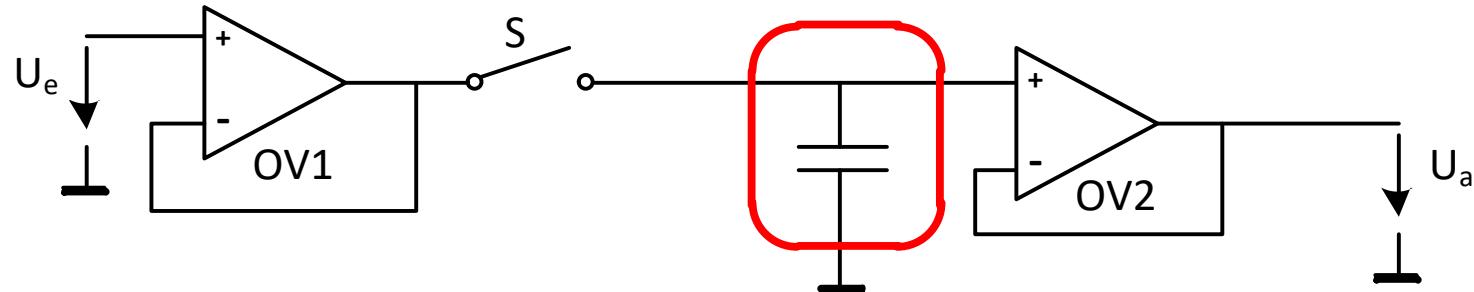
- Impulsantwort des Halteglieds: $h(t) = \text{rect}\left(\frac{(t-T_{Tast}/2)}{T_{Tast}}\right)$
- Frequenzgang des Halteglieds: $H(f) = T_s \cdot \text{si}\left(\frac{\pi f}{f_{Tast}}\right) \cdot e^{-j\pi f T_{Tast}}$

Der Frequenzgang des Halteglieds muss im nachfolgenden Tiefpass mit kompensiert werden.

- In der Treppenform am Ausgang des DA-Wandlers stecken noch hochfrequente Signalanteile, die durch die Restspektren bei $f = \dots, -2f_{Tast}, -f_{Tast}, f_{Tast}, 2f_{Tast}, \dots$ repräsentiert werden.
- Das Basisspektrum im Bereich $-f_{Tast}/2 < f < f_{Tast}/2$ wird durch das Halteglied ebenfalls leicht verformt.
- Die Aufgaben des (analogen) Glättungsfilters sind daher:
 - Unterdrückung der Restspektren bei $f = \dots, -2f_{Tast}, -f_{Tast}, f_{Tast}, 2f_{Tast}, \dots$
 - Kompensieren der Verformung im Basisspektrum
- Das GlättungsfILTER ist daher ein Tiefpassfilter
- Die Kompensation im Basisbereich kann auch bereits in der digitalen Domäne erfolgen
- Auf die Kompensation im Basisspektrum kann verzichtet werden, wenn der DA-Wandler mit einer hohen Frequenz arbeitet (die Sinc-Funktion verläuft im Basisbereich in diesem Fall sehr flach)
- Eine hohe Abtastfrequenz vermindert die Anforderungen an das analoge GlättungsfILTER

Hier weiter 12.7.

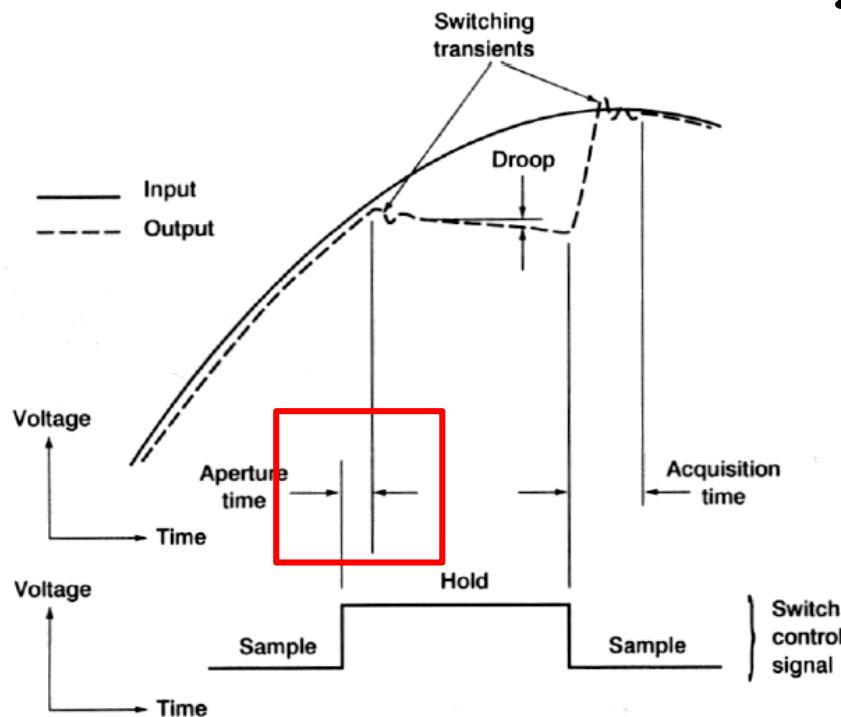
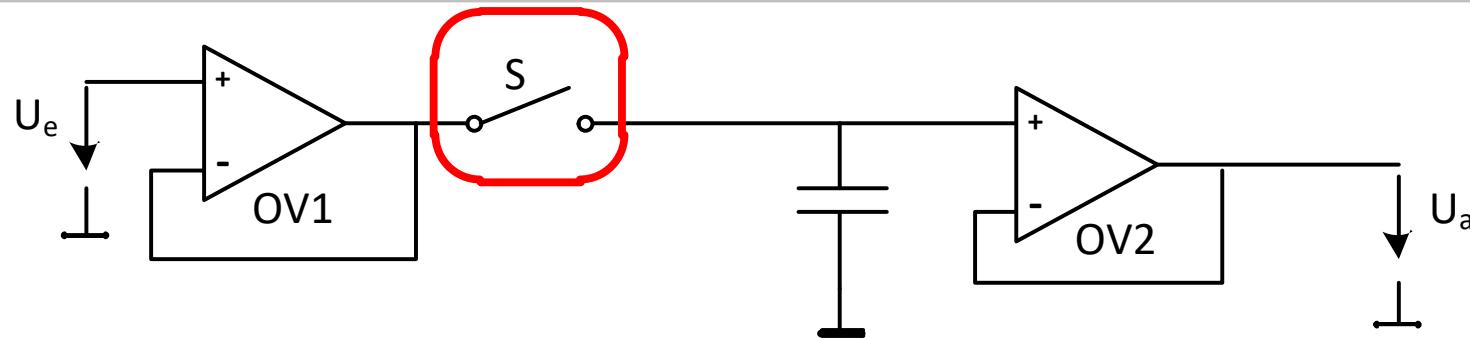
reale Abtastung (Sample & Hold)



Ursachen für Fehler

- Begrenzte Bandbreite
Settling time (Aufladen von C)

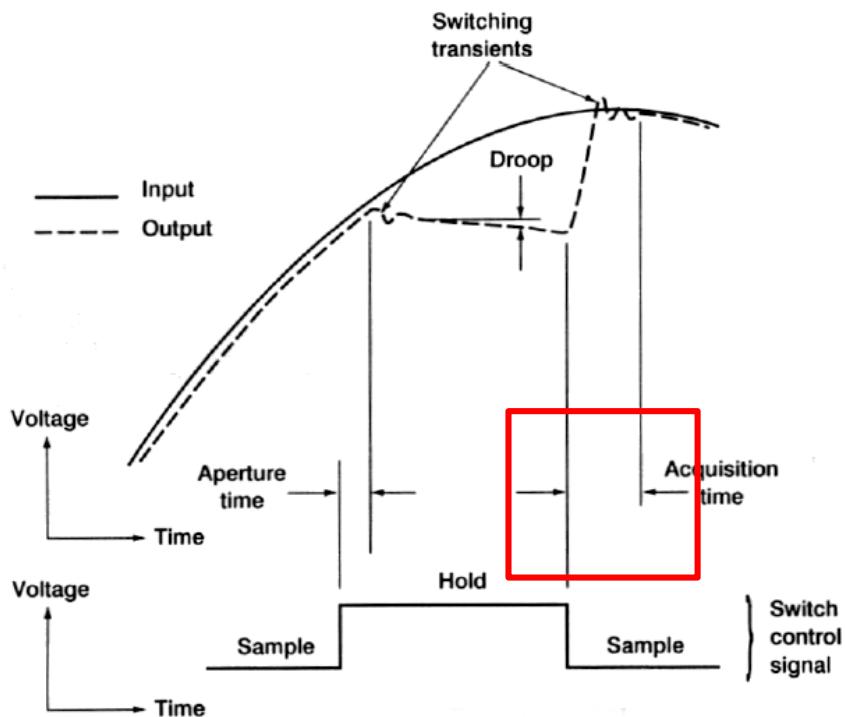
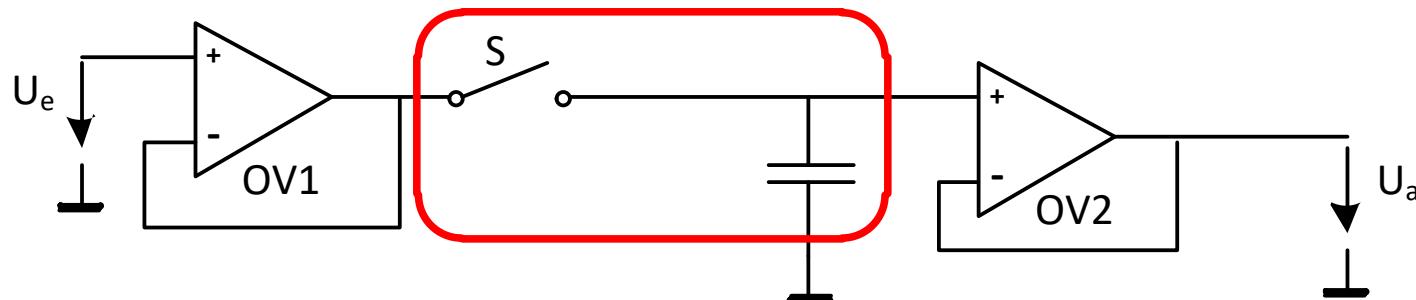
reale Abtastung (Sample & Hold)



Ursachen für Fehler

- **Apperatur-Zeit**
Zeit um Schalter zu öffnen
➤ Aperatur-Jitter Δt

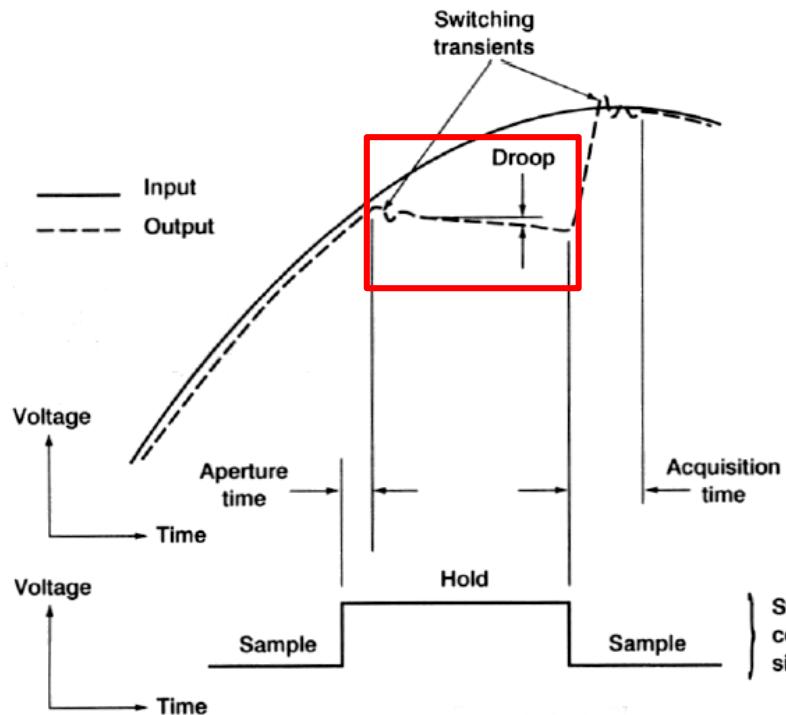
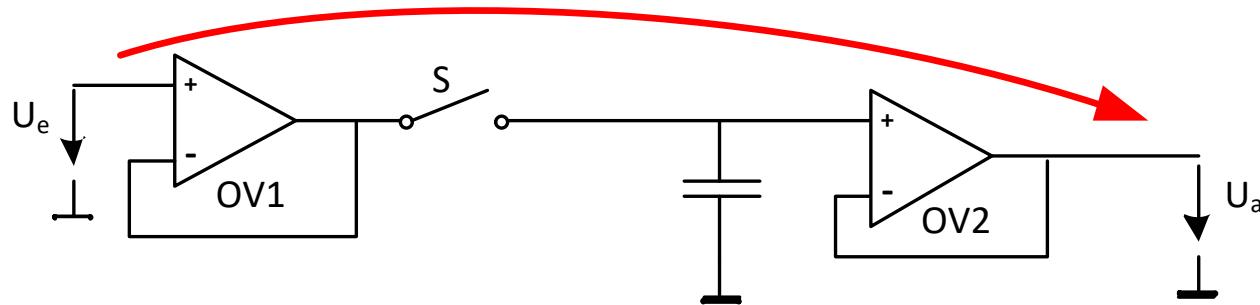
reale Abtastung (Sample & Hold)



Ursachen für Fehler

- Abtast-Dauer (Acquisition time)
Aperatur-Zeit + Settling time

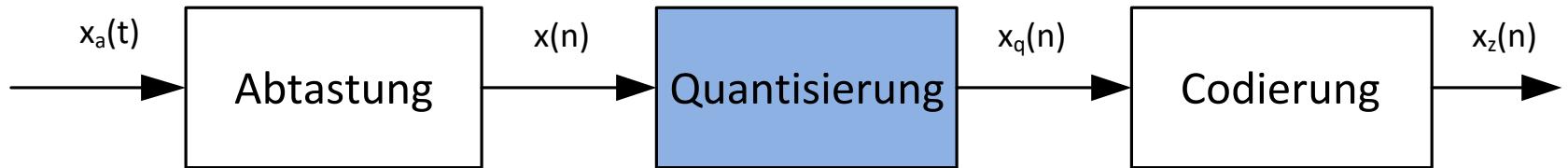
reale Abtastung (Sample & Hold)



Ursachen für Fehler

- Spannungsabfall während „Hold“ engl.: **Drop**
- Übersprechen (engl.: **Feedthrough**) von U_e nach U_a bei S geöffnet
- Rauschen

Quantisierung



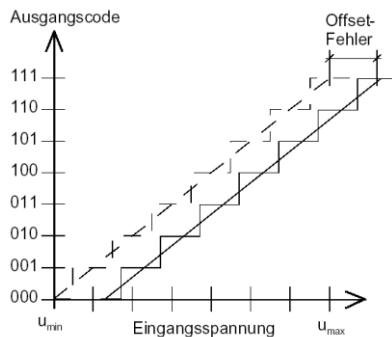
- Umsetzung des zeitdiskreten Signals $x(n)$ in ein Digitalsignal $x_q(n)$;
(z. B. Dualsignale $x_q(n) = \{01001011\} = 75$)
- Digitalsignal kann nur Werte aus einem festen, begrenzten Wertevorrat annehmen (z. B. bei 8-Bit-Dualcode 256 Werte)
- Ein Maß für die Auflösung ist das „least significant bit“ LSB Wertebereich von A_{max} bis A_{min} wird bei einer n -Bit Quantisierung in $(2^n - 1)$ Schritte unterteilt
 - $1 \text{ LSB} = (A_{max} - A_{min}) / (2^n - 1)$
- Der Unterschied zwischen dem Digitalsignal $x_q(n)$ und dem zeitdiskreten Signal $x(n)$

$$e_q(n) = x_q(n) - x(n)$$

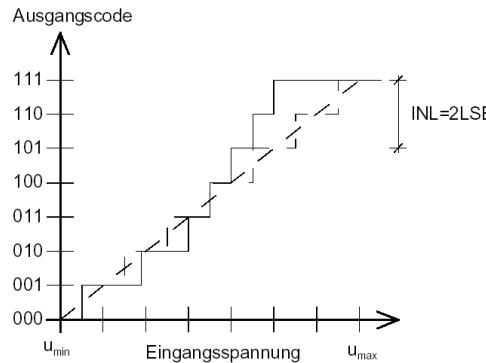
wird **Quantisierungsfehler** $e_q(n)$ oder Quantisierungsrauschen genannt

Quantisierungs-Fehlerarten

Offset-Fehler

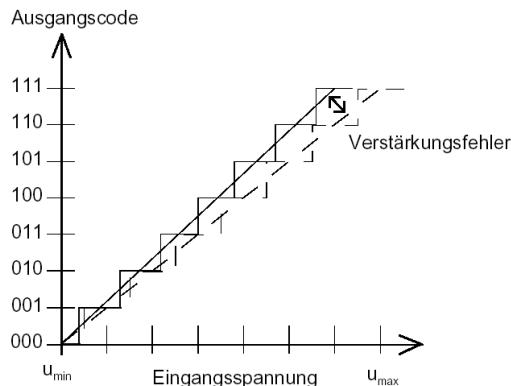


Integrale Nichtlinearität

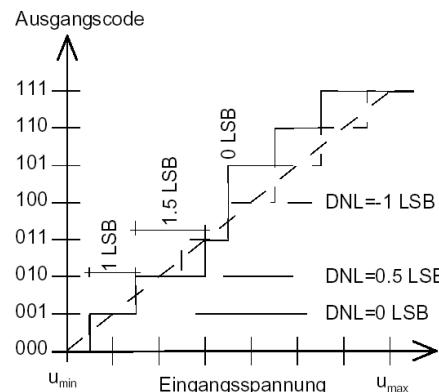


Fehler zwischen quantisiertem Wert und dem idealen kontinuierlichen Wert.

Verstärkungsfehler



Differentielle Nichtlinearität

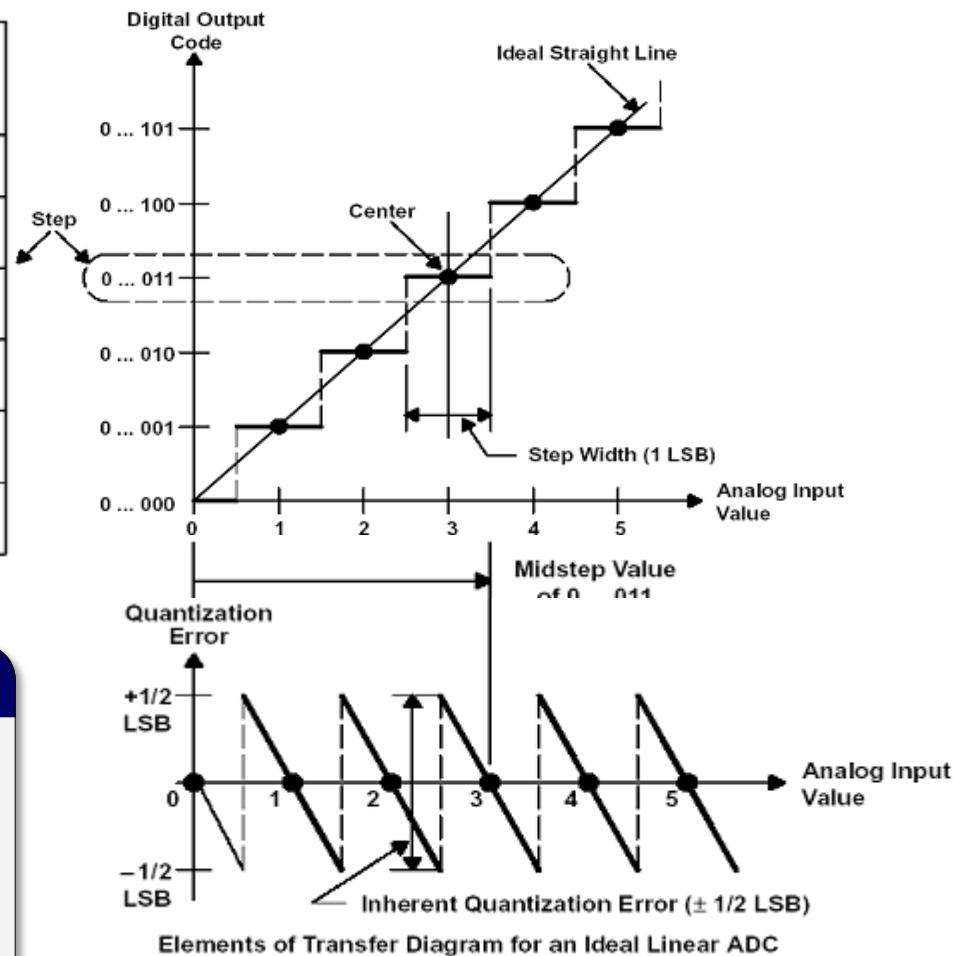


Differenz δ zwischen erwarteter Spannungsänderung bei 1 LSB und tatsächlicher Spannungsänderung „Stufenbreitenfehler“

Wenn $|\delta| > 1 LSB$
 ➤ nichtmonotones Verhalten

Angaben Üblicherweise in LSB
 (z. B. im Datenblatt: differentielle Nichtlinearität $< \pm 0.25 LSB$)

CONVERSION CODE	
RANGE OF ANALOG INPUT VALUES	DIGITAL OUTPUT CODE
4.5 • 5.5	0 ... 101
3.5 • 4.5	0 ... 100
2.5 • 3.5	0 ... 011
1.5 • 2.5	0 ... 010
0.5 • 1.5	0 ... 001
0 • 0.5	0 ... 000



Quantisierung

Die Quantisierung setzt ein zeitdiskretes und wertkontinuierliches Signals in ein Digitalsignal $x_q(n)$ um (zeit- und wertdiskret)

Quantisierungsrauschen II

- Aus den quantisierten Werten kann das ursprüngliche Signal i.a. nicht mehr fehlerfrei rekonstruiert werden.
- Der Quantisierungsfehler wird durch die Wortlänge (Auflösung) kontrolliert.
 - Je größer die Wortlänge desto kleiner der mögliche Quantisierungsfehler, desto größer die Präzision der Signaldarstellung.
- Allerdings, mit wachsender Wortlänge
 - sinkt die Geschwindigkeit der AD-Wandler
 - steigt der Preis der AD-Wandler
 - nimmt die Komplexität der arithmetischen Operationen zu
 - steigt der Speicherplatzbedarf in der Signalverarbeitung.
- In praktischen Anwendungen ist daher je nach Aufgabe zwischen der gewünschten Präzision und dem notwendigen Aufwand abzuwägen.

Quantisierungsrauschen III

- Annahme: B Bits stehen zur Darstellung der Amplitudenwerte zur Verfügung
(N...Wortlänge, Auflösung)
 - 2^N Quantisierungsintervalle können dargestellt werden (Quantisierungsintervall = Treppenhöhe)
- **Gleichmäßige Quantisierung:**
Der Quantisierungsbereich $[-X_{max}, X_{max}]$ wird in 2^N gleich große Intervalle unterteilt
 - Quantisierungsintervallbreite: $q = 2^{-(N-1)}X_{max}$
- Quantisierungsfehler: $e[n] = x_q[n] - x[n]$
 - bei Rundung $-q/2 < e \leq q/2$
 - bei Abschneiden $-q < e \leq 0$

Quantisierungsrauschen IV

-
- Das Fehlersignal $e[n]$ ist ein Zufallssignal, das durch die Quantisierung entsteht und deshalb als Quantisierungsrauschen bezeichnet wird.
 - Das quantisierte Signal $x_Q(t)$ kann als Überlagerung des amplitudenkontinuierlichen Signals $x[n]$ und des Fehlersignals $e[n]$ aufgefasst werden:

$$x_Q[n] = x[n] + e[n]$$

- Ein Qualitätsmaß in der Signalverarbeitung ist der sogenannte Signal-Rauschabstand SNR (Signal to Noise Ratio):

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{P_S}{P_N} \right)$$

P_S ... mittlere Leistung des Nutzsignals $x[n]$

P_N ... mittlere Leistung des Fehlersignals $e[n]$

Quantisierungsrauschen V

- Der Quantisierungsfehler lässt sich als Rauschsignal interpretieren.
- Es sei N die Anzahl der Bits des A/D-Umsetzers, dann beträgt das Signal-zu-Rauschverhältnis SNR

$$SNR = 10 \cdot \log \left(\frac{P_A}{P_Q} \right) = N \cdot 6,02 \text{ dB} + 4,77 \text{ dB} - 20 \cdot \log \left(\frac{A_{peak}}{A_{eff}} \right)$$

mit P_A der Leistung des Signals und P_Q der Leistung des Rauschanteils; A_{peak} ist der Spitzenzwert des Signals (= Vollausschlag des AD-Wandlers!) und A_{eff} der Effektivwert.

- Für ein Sinussignal gilt: $\frac{A_{peak}}{A_{eff}} = \sqrt{2}$
- Das Signal-zu Rauschverhältnis ergibt sich damit zu:

$$SNR_{Sinussignal} = N \cdot 6,02 \text{ dB} + 1,76 \text{ dB}$$
- Für ein typisches Audiosignal (Musik oder Sprache) gilt $\frac{A_{peak}}{A_{eff}} \approx 4$
 Der Signal-zu-Rausch-Abstand aufgrund des Quantisierungsrauschen ist damit bei einem Sprachsignal um etwa 9 dB schlechter als bei einem rein sinusförmigen Signal.

Abschätzung:

$$SNR_{dB} \approx N \cdot 6 \text{ dB}$$

gültig für den Fall, dass

- das Eingangssignal symmetrisch gleichförmig mit der Auflösung N (Anzahl der Bits) quantisiert wird
- das Eingangssignal im gesamten Aussteuerbereich gleichverteilt ist
- Jede Erhöhung der Auflösung um 1 Bit verbessert also den Abstand zwischen Nutzanteil und dem Quantisierungsrauschen um 6 dB.

Quantisierungsrauschen VII

Zu obiger Formel ist folgendes zu sagen:

- Die Formel berücksichtigt Übersteuerungsfehler nicht. Bei Übersteuerung wird das Signal wegen der Sättigung begrenzt. Die daraus resultierenden Verzerrungen können das SNR gegenüber der obigen Schätzformel beträchtlich verringern.
- Bei Nicht-Vollaussteuerung sinkt das SNR ebenfalls. Wird das Eingangssignal beispielsweise um den Faktor 2 verkleinert, so nimmt das SNR um 6 dB ab.
- Daraus folgt, dass zur Erzielung eines großen SNRs der AD-Wandler voll ausgesteuert, aber nicht übersteuert werden soll.
- Reale Signale (z.B. Sprache) haben meist eine Verteilungsdichtefunktion, die in der Umgebung des Nullpunkts ein hohes Maximum aufweisen. Im Vergleich zur Abschätzung, bei der im Aussteuerbereich gleichverteilte Signale angenommen sind, verschlechtert sich das SNR dadurch um einige dB. Zur Anpassung stuft man in diesen Fällen die Quantisierungskennlinie derartig, dass Signalanteile mit geringen Amplitudenwerten feiner quantisiert werden (z.B. logarithmisch gestufte Quantisierer).

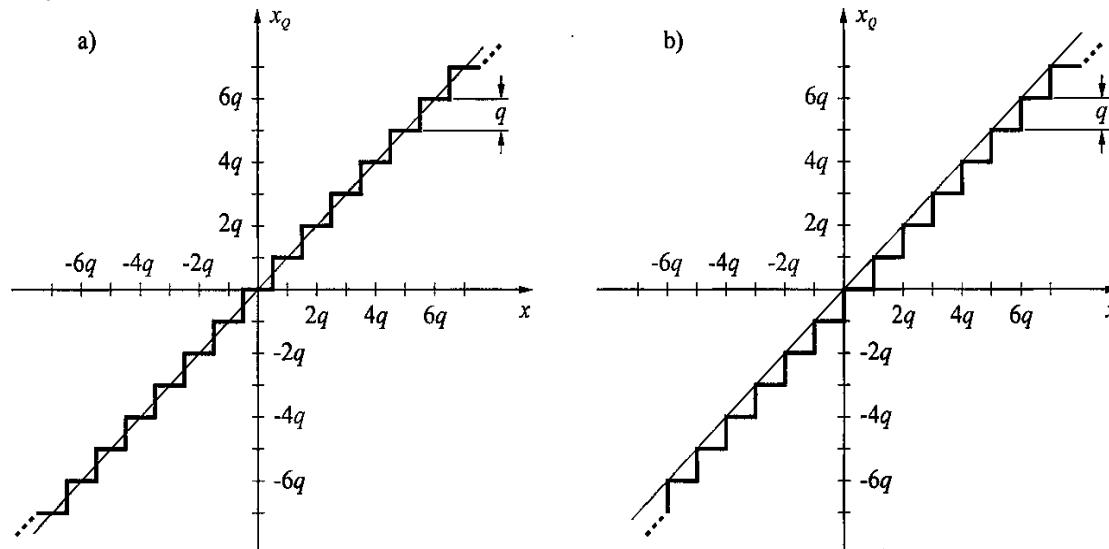
Quantisierungskennlinien I

Charakterisierung der Quantisierung

- mit Hilfe von sogenannten Quantisierungskennlinien (Die quantisierte Zahl kann dabei nur Werte annehmen, die den Höhen der Treppenstufen entsprechen).

Runden und Abschneiden

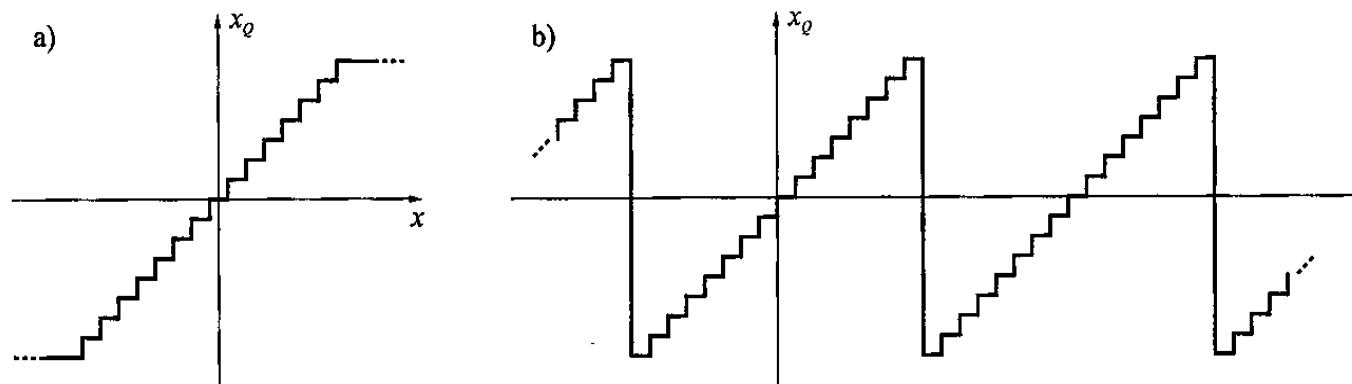
- Rundungskennlinie (vor allem bei AD-Wandlern)
- Abschneidekennlinie (vorwiegend bei der Ergebnisquantisierung von Festkomma-Multiplikationen)



Quantisierungskennlinien II

Sättigung und Zweierkomplementüberlauf

- Obige Kennlinien implizieren einen unbegrenzten Zahlenbereich.
 - In Wirklichkeit tritt ein Kennlinienknick auf, wenn die Eingangsgröße außerhalb gewisser Grenzen zu liegen kommt.
- a) Sättigung: Die (modifizierte) Quantisierungskennlinie geht an der linken und rechten Grenze in einen horizontalen Ast über (üblich bei AD-Wandlern)
- b) Zweierkomplementüberlauf: sägezahnförmige Fortsetzung (üblich bei Festkomma-Signalprozessoren)

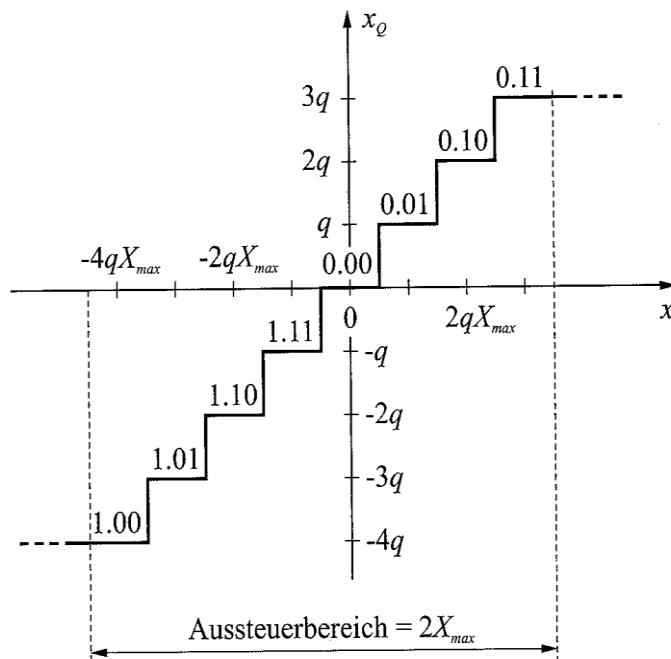


Quantisierungskennlinien III

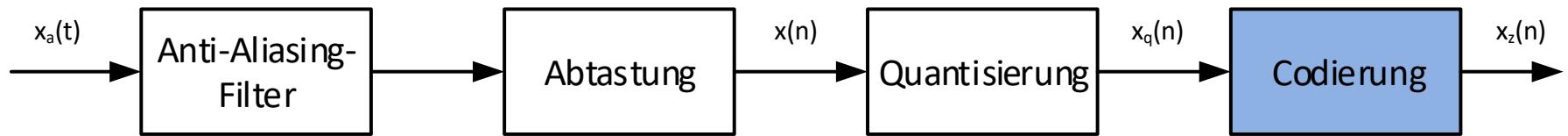
Beispiel: Rundungskennlinie mit Sättigung

- typisch für AD-Wandler
- Die Auflösung beträgt in diesem Beispiel $N=3$ Bit, daraus ergibt sich bei einem Aussteuerbereich von $[-1, \dots, 1]$ eine Quantisierungsintervallbreite von $q = 2^{-(N-1)} = 0,25$.

Typische Werte liegen zwischen $7,81 \cdot 10^{-3}$ (8 Bit) und $1.91 \cdot 10^{-6}$ (20 Bit).

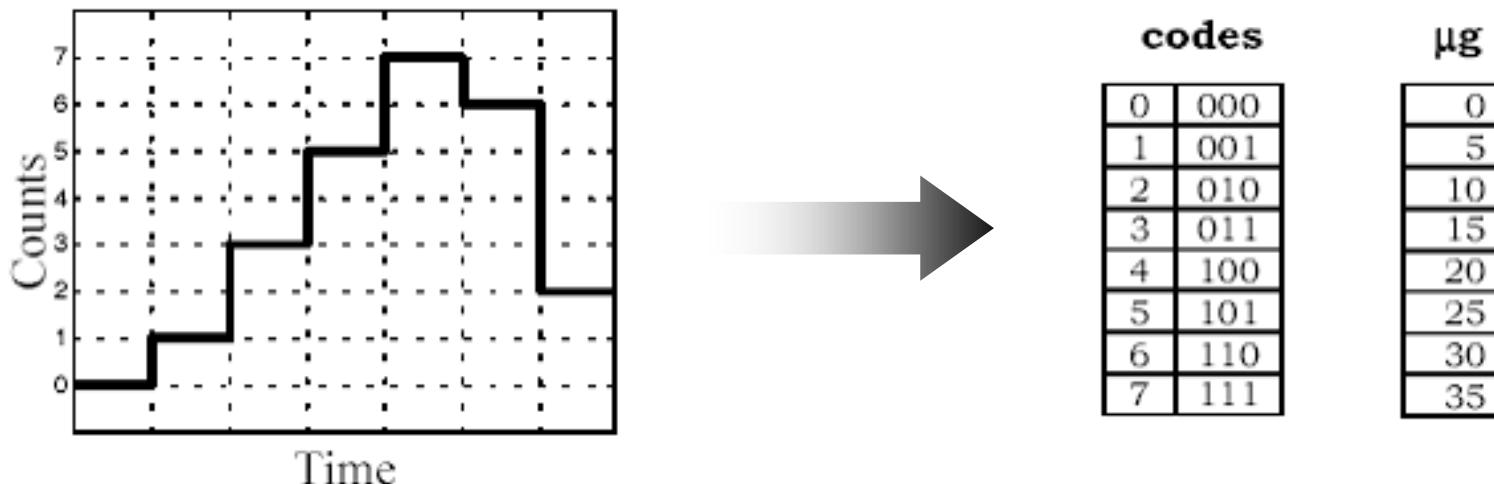


Codierung



Codierung ist die Zuweisung eines codierten Wertes zu jedem diskreten Wert $x_q(n)$

- i.A. dann auch Zuweisung zur Einheit, die der Messgröße entspricht

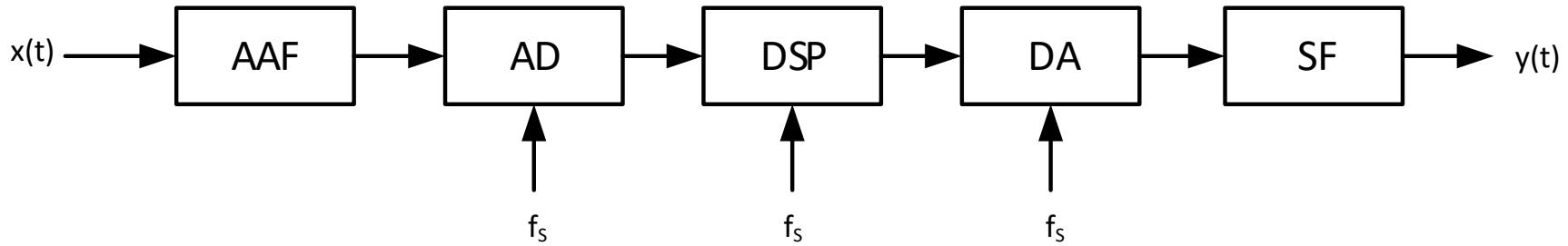


Dezimalzahl	Hexadezimale Ziffer	Dualzahl	BCD-Code	Aiken-Code	Gray-Code
0	0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1
2	2	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 0 1 1
3	3	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 1	0 0 1 0
4	4	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 1 1 0
5	5	0 1 0 1	0 1 0 1	1 0 1 1	0 1 1 1
6	6	0 1 1 0	0 1 1 0	1 1 0 0	0 1 0 1
7	7	0 1 1 1	0 1 1 1	1 1 0 1	0 1 0 0
8	8	1 0 0 0	1 0 0 0	1 1 1 0	1 1 0 0
9	9	1 0 0 1	1 0 0 1	1 1 1 1	1 1 0 1
10	A	1 0 1 0			1 1 1 1
11	B	1 0 1 1			1 1 1 0
12	C	1 1 0 0			1 0 1 0
13	D	1 1 0 1			1 0 1 1
14	E	1 1 1 0			1 0 0 1
15	F	1 1 1 1			1 0 0 0

- Dualcode, $Z = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$, a_i sind binär d.h. 0 oder 1
- BCD (Binary Coded Decimals – d.h. nur Zahlen von 0 bis 9)
- Aiken Code: Weglassen der mittleren Zeichen → symmetrisch
- Gray Code: von Stufe zu Stufe wird nur ein Bit geändert

Abtastung / Digitale Messsignalverarbeitung

Typisches Echtzeitsystem zur digitalen Signalverarbeitung

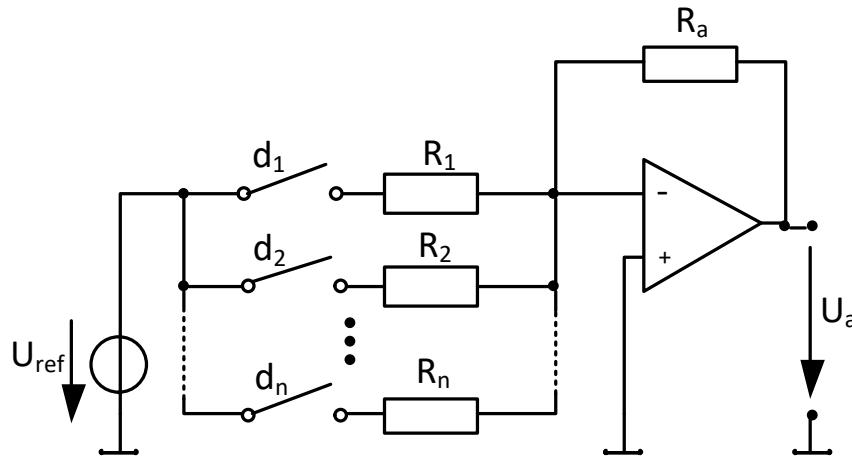


- **Antialiasingfilter (AAF, analog)** zur Bandbegrenzung, damit das Abtasttheorem erfüllt wird.
- **AD-Wandler**
- **Digitaler Signalprozessor (DSP)**
- **DA-Wandler**
- **Rekonstruktionsfilter (SF = smoothing filter, Glättungsfilter)**

8.4 A/D- und D/A-Wandler

WANDLERTYPEN

DAC mit gewichtetem Widerstandsnetzwerk (engl.: binary weighted ladder)



$$U_a = -U_{ref} \cdot R_a \cdot \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{R_i}$$

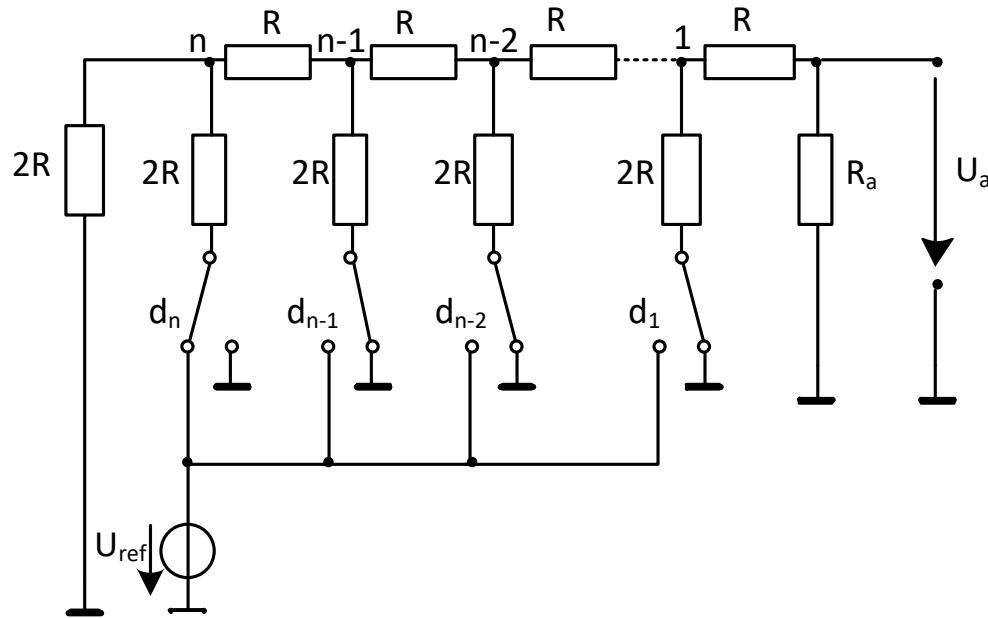
mit $R_a = \frac{R_1}{2}$ und $R_{i+1} = 2 \cdot R_i$

$$U_a = -U_{ref} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{2 \cdot d_i - 1}{2^i}$$

Probleme

- Der Innenwiderstand des Netzwerkes variiert abhängig von der Schalterstellung und der Innenwiderstand der Referenzspannungsquelle ist nicht vernachlässigbar
 - U_a weicht vom idealen Wert ab
- Widerstände mit sehr hoher Präzision und gleicher Drift (z. B. Temperaturgang) sind erforderlich.
Für Widerstände die etliche Dekaden übersteigen, ist dies sehr schwierig realisierbar (in integrierten Schaltungen gar nicht realisierbar)

DAC mit R-2R Kettenleiter Widerstandsnetzwerk (engl.: R-2R ladder)

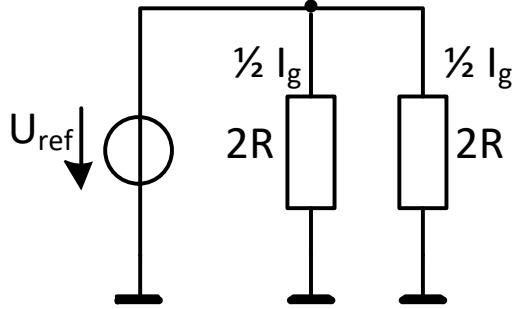


$$U_a = U_{ref} \cdot \frac{R_a}{R_a + R} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{2^i}$$

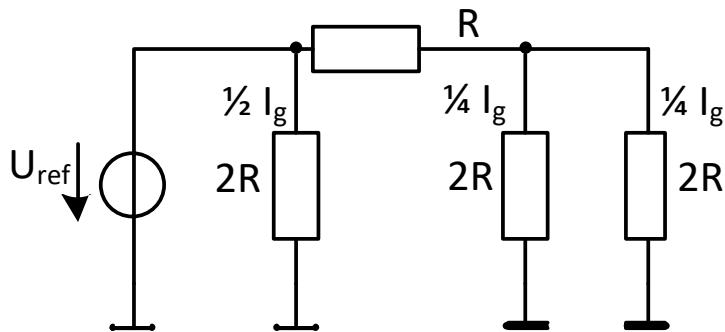
Vorteile

- Nur 2 Widerstandstypen im gleichen Wertebereich (auch in integrierten Schaltungen gut realisierbar)
- Innenwiderstand des Netzwerkes ist unabhängig von der Schalterstellung
- Abhängigkeit von U_a von der Last R_a kann durch einen Puffer-Verstärker beseitigt werden

Funktionsprinzip des R-2R DAC I

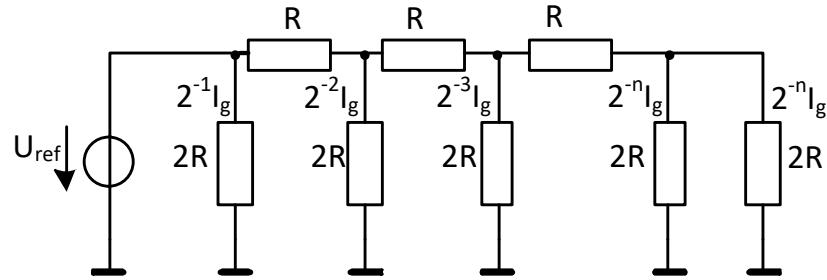


- (1) Einfache Stromverzweigung: In jedem der Stromkreise fließt $I_g/2$

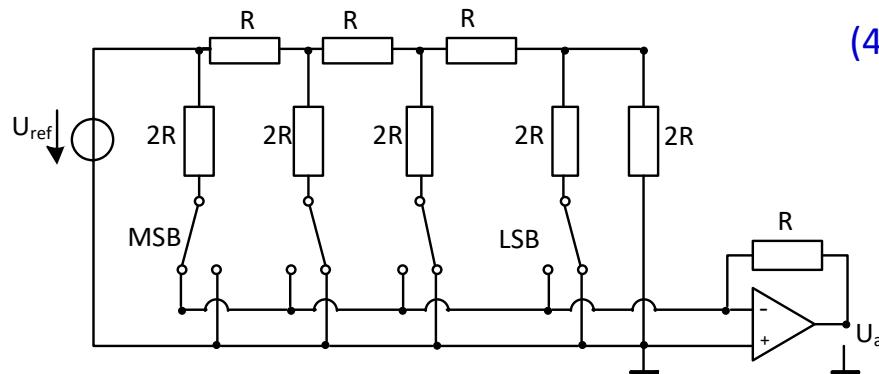


- (2) Eine weitere Masche: Im ersten Stromkreis ändert sich nichts, in den beiden rechten Kreisen fließt $I_g/4$

Funktionsprinzip des R-2R DAC II



(3) Allgemeiner R-2R-Stromteiler:
im n -ten Stromkreis fließt der Strom $2^{-n} \cdot I_g$.



(4) Stromorientierte Schaltung eines DAC in R-2R-Schaltung

Funktionsprinzip des R-2R DAC III

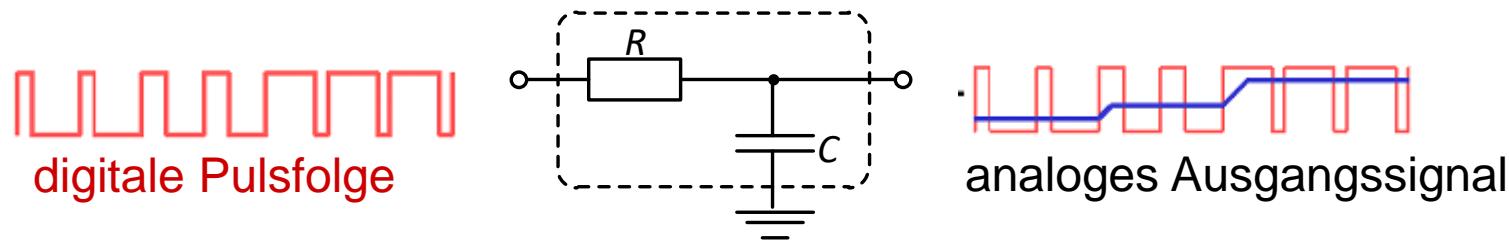
- In einer funktionsfähigen Schaltung muss dafür gesorgt werden, dass die Stromwerte erhalten bleiben, unabhängig davon, ob ein Bit (Schalter) gesetzt ist oder nicht.
- Die Strom- und Spannungsverhältnisse dürfen sich nicht ändern, sonst gibt es Verschiebungen im Resultat.
- Erreicht wird die Konstanz der Ströme durch einen Umschalter, der die Leitungen entweder auf Masse legt oder auf die Sammelleitung zum OPV. Diese Leitung hat das Potential der virtuellen Masse des OPV.
- Bezeichnet man die Schalterstellungen mit $d_i = (0, 1)$, mit
 - $d_i = 0$: Schalter auf Masse und
 - $d_i = 1$: Schalter auf Sammelleitung,dann kann der Strom der Sammelleitung dargestellt werden durch:

$$I_e = I_g \cdot \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{2^i}$$

DAC durch Pulsbreitenmodulation (engl.: pulse width modulation PWD)

Grundkomponenten

- eine Digitalleitung
- einen RC-Tiefpassfilter



Funktionsweise

- auf der Digitalleitung wird eine Pulsfolge mit fester Frequenz erzeugt
- die Pulsbreite wird proportional zur gewünschten Ausgangsspannung gewählt
- die erzeugte digitale Pulsfolge wird dann tiefpassgefiltert
- die analoge Ausgangsspannung des Tiefpass ist proportional zur mittleren Dauer der „High“-Pegel

Parallel (Flash) ADU

Grundelemente

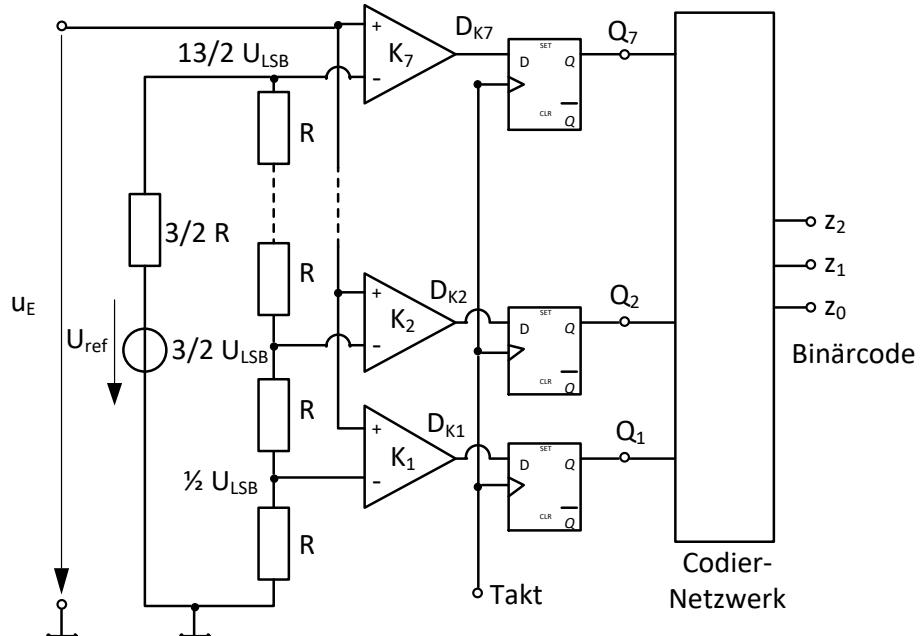
- Linear abgestufter Vielfach-Spannungsteiler z. B. aus einer Widerstandskette
- $2^n - 1$ Komparatoren
- Speicher + Codierer

Funktionsprinzip

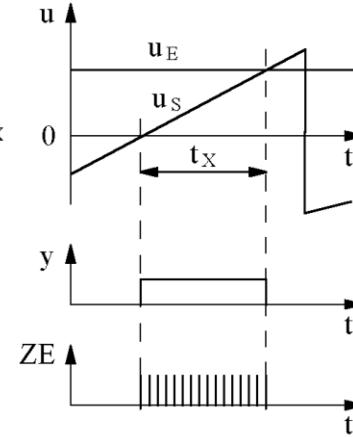
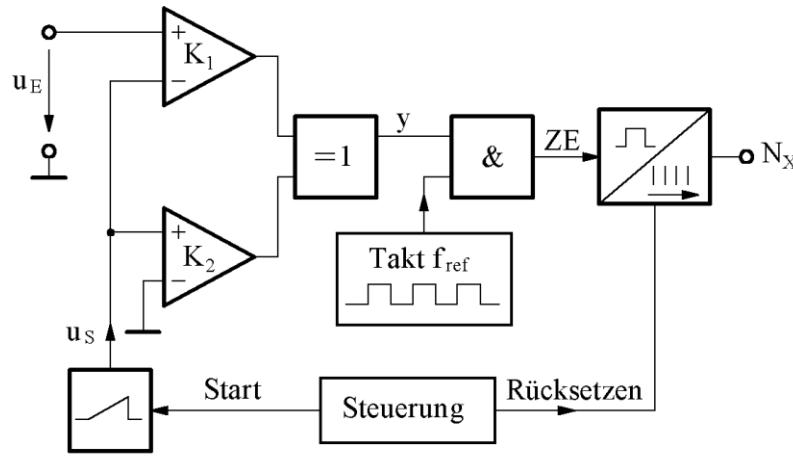
- Das analoge Signal liegt an allen Komparatoren an und wird mit dem jeweiligen Vergleichswert verglichen
- Bei Abtasttakt werden alle Komparatorwerte in Flip-Flop gespeichert und der „Linealcode“ dann in eine Dualzahl umcodiert

Eigenschaften

- sehr schnell (z. B. 8-bit ADC mit 50 MHz Abtastrate)
- teuer / sehr aufwendig für große n ; typisch $n \leq 8$ (heutzutage maximal $n = 10$)



Sägezahn ADU (engl.: single slope / ramp ADC)

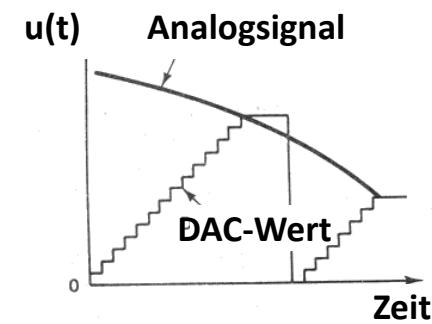


Funktionsprinzip

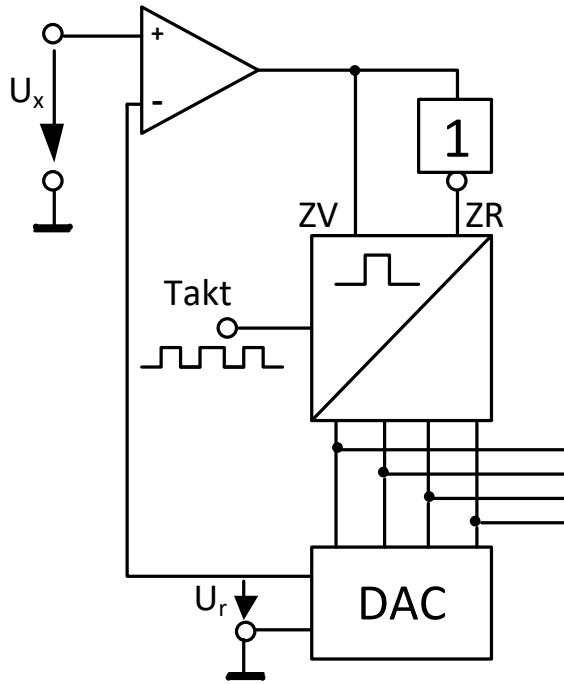
- Nach Reset und $U_S > 0$ beginnt der Zähler zu zählen bis die Rampenspannung $U_S > U_E$ wird
- Der binäre Zählerstand bzw. $N_x \sim U_e$

Eigenschaften

- Relativ langsam, Abtastdauer kann bis zu $2^n/f_{ref}$ dauern
- Empfindlich gegenüber Rausch-Spitzen
- Rampe muss sehr linear sein
(z. B. Rampe erzeugbar mit Zählerausgang an DAC)



Kompensierender ADU mit Nachlaufsteuerung (engl.: tracking ADC)

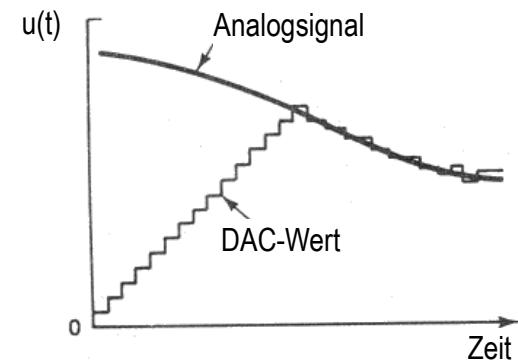


Funktionsprinzip

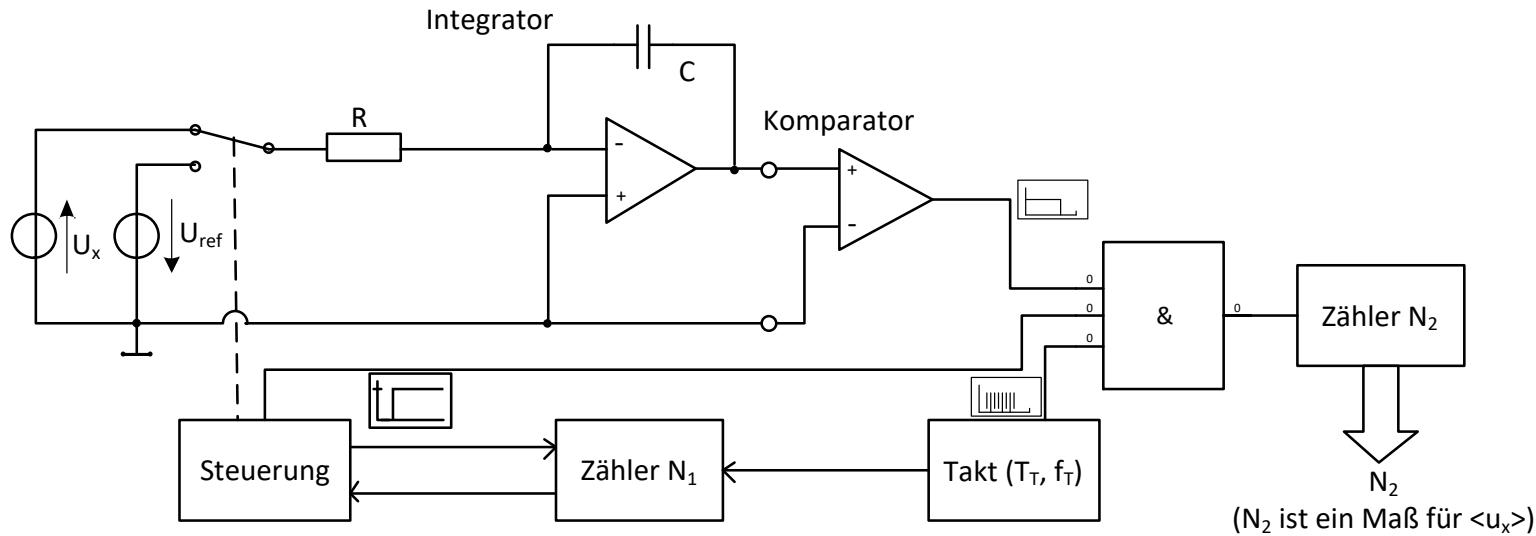
- $u_x > U_r \rightarrow K = 1 \rightarrow ZV = 1; ZR = 0$ Vorwärtzzählung
- $u_x < U_r \rightarrow K = 0 \rightarrow ZV = 0; ZR = 1$ Rückwärtzzählung
- falls $u_x = U_r = \text{const.}$:
immer abwechselnd Vor- und Rückwärtzzählung um LSB

Eigenschaften

- Relativ langsam, Abtastdauer kann im ungünstigsten Fall bis zu $2^n/f_{ref}$ dauern



Zweirampen ADU (engl.: dual slope ADC)



Eigenschaften

- Sehr hohe Auflösung (Einsatz in Multimetern)
- langsam (typ. f_{Tast} einige 10 Hz)
- Unempfindlich gegenüber Drift (Takt, RC usw.) und gegenüber Rauschen (wg. Integration)

Zeitpunkt t_1

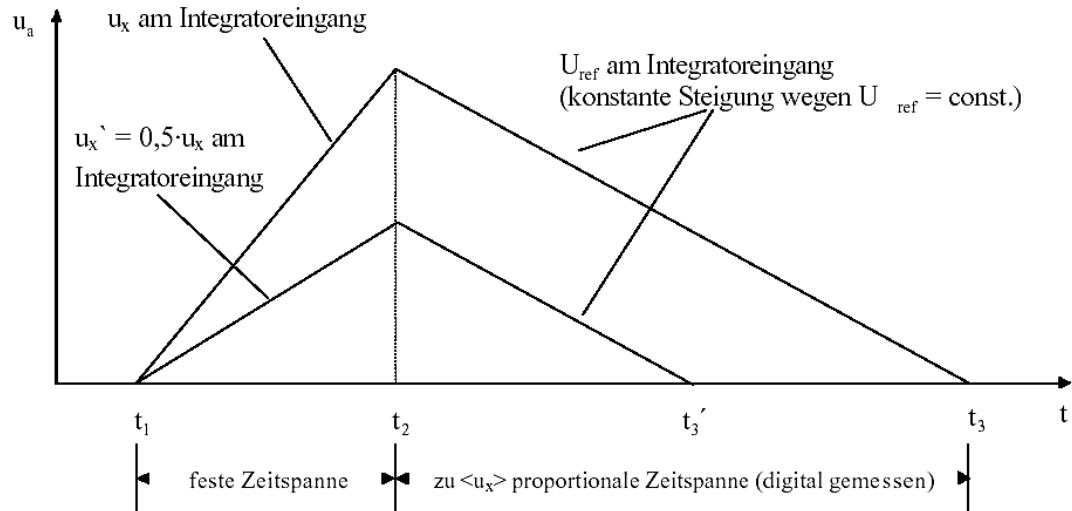
- Alle Zähler „Reset“ und N_1 Start
- der Integrator erzeugt eine Rampe, deren Steigung proportional zu U_x ist

Zeitpunkt t_2

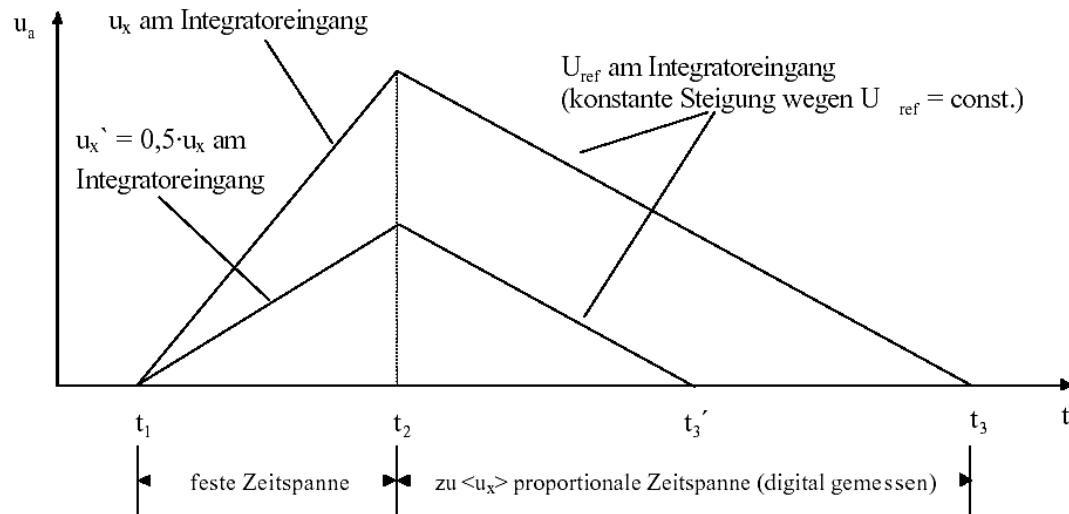
- Über den Zähler N_1 wird der Schalter nach einer definierten Zeit auf die Referenzspannung U_{Ref} umgelegt (Rampe läuft definiert „zurück“)
- Zähler N_2 wird gestartet

Zeitpunkt t_3

- der Zähler N_2 zählt bis der Komparator anspricht, d. h. $U_a < 0 \text{ V}$
- Zählerstand N_2 repräsentiert U_x



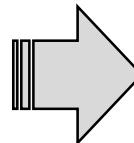
Funktionsprinzip Zweirampen ADU II



$$u_a(t_3) = -\frac{1}{RC} \cdot \left[\int_{t_1}^{t_2} u_x dt + \int_{t_2}^{t_3} U_{\text{ref}} dt \right] = 0$$

$$\Rightarrow u_x(t_2 - t_1) + U_{\text{ref}}(t_3 - t_2) = 0$$

$$\Rightarrow u_x \cdot N_1 + U_{\text{ref}} \cdot N_2 = 0$$



$$u_x = -U_{\text{ref}} \frac{N_2}{N_1}$$

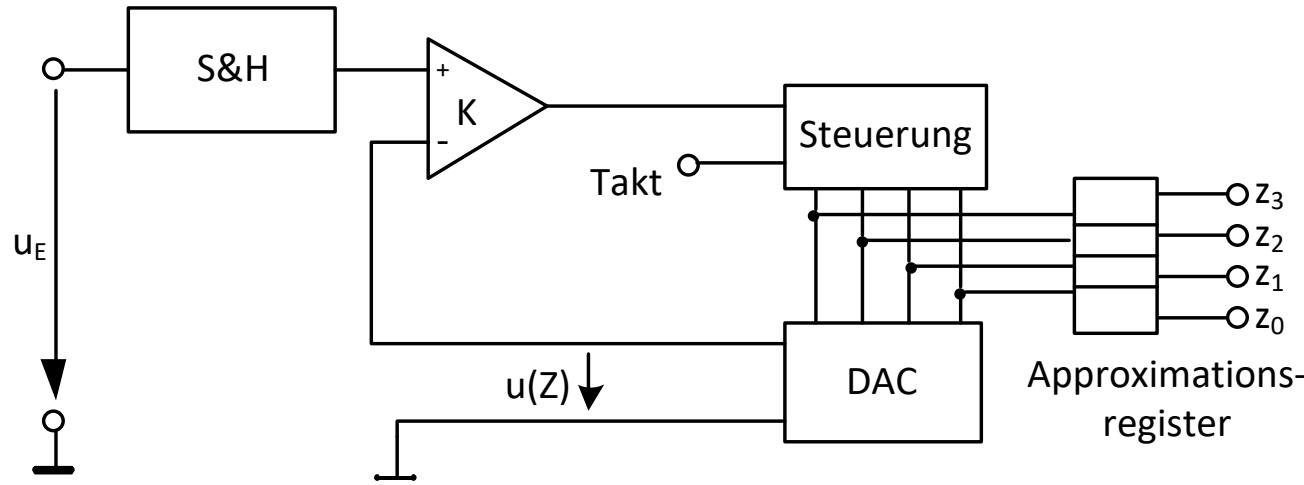
die Genauigkeit ist nur
von U_{ref} abhängig!

Zweirampen ADU

Mittelwertbildung beim Zweirampen-ADU:

- sehr gute Rauschunterdrückung
 - nur zur Umsetzung von Gleichspannungen sinnvoll
eine überlagerte Wechselstörungen wird weitgehend unterdrückt.
 - Wenn das Mittelungsintervall $t_2 - t_1$ ein ganzzahliges Vielfaches der Störperiodendauer ist:
 - die Wechselstörung wird zu 100% unterdrückt!
 - Um das häufig vorhandene Netzbrummen (50 Hz bzw. 60 Hz) vollständig zu unterdrücken, kann man somit z. B. beim 50 Hz Netz $t_2 - t_1 = 20 \text{ ms}$ wählen
- **beim Zweirampen-ADU kein S&H verwenden!**

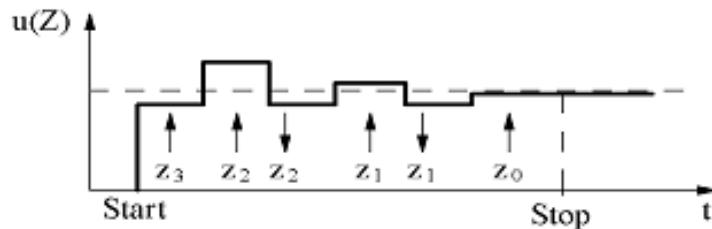
ADU mit sukzessiver Approximation (engl.: successive approximation ADC)



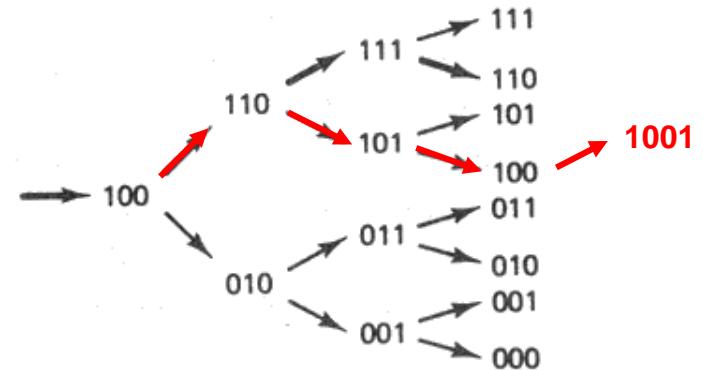
Eigenschaften

- Wandlungszeit fest (n Takte bei n-Bit ADC) typisch im ms bis μ s Bereich
- typisch 8 bis 16 Bit Auflösung
- Serieller Ausgang einfach realisierbar da die einzelnen Bits seriell generiert werden

Funktionsprinzip sukzessive Approximation



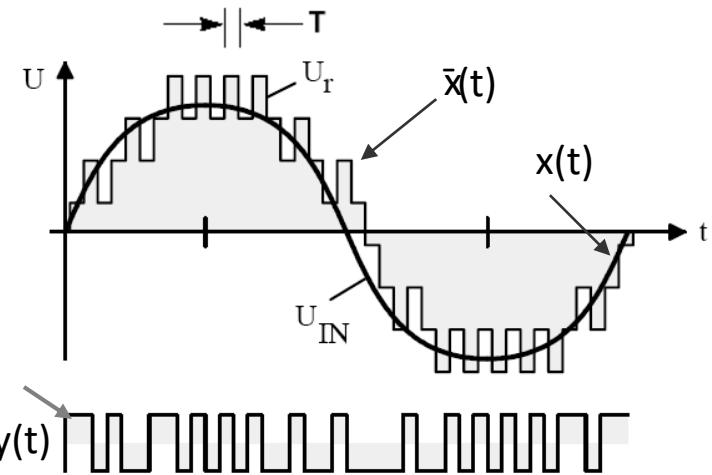
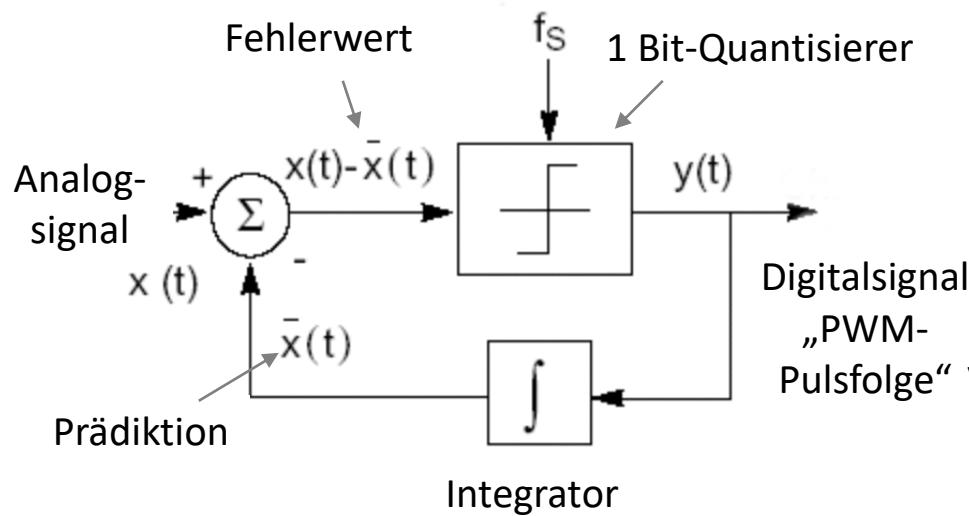
z_0	1
z_1	0
z_2	0
z_3	1



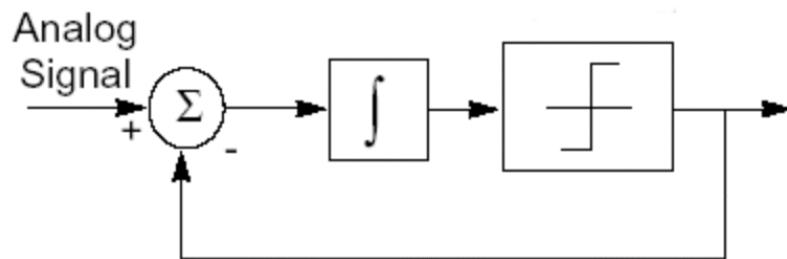
- Zu Beginn liefert das Approximationsregister einen Wert entsprechen $\frac{1}{2} U_{E Max}$ (1000... d. h. nur MSB = 1)
- Wenn $u(Z) > u_E$ setze MSB = 0 sonst MSB = 1
- Dann dasselbe Vorgehen sukzessiv wiederholen bis zum LSB
- **Prinzip des „binary search“**

Sigma-Delta-ADU

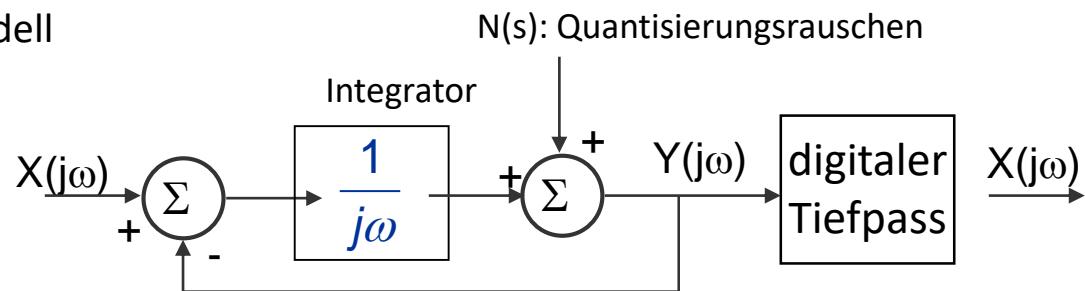
engl. Sigma-Delta ADC



1 Bit-Sigma-Delta-Modulator (Geglättete Version des Delta-Modulators)



Übertragungsverhalten / Modell
des Sigma-Delta-Modulators



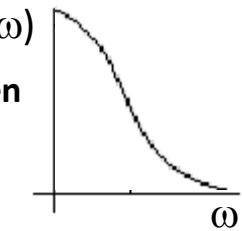
Signalübertragungsfunktion

$$Y(j\omega) = [X(j\omega) - Y(j\omega)] \cdot \frac{1}{j\omega}$$

Noise $N(j\omega) = 0$

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1/j\omega}{1+1/j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

Integrator
→ Tiefpass-Verhalten
bzgl. Signal

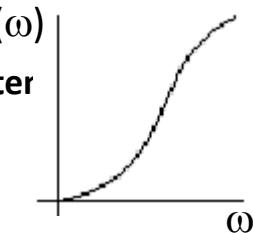


Rauschübertragungsfunktion

$$Y(j\omega) = -Y(j\omega) \cdot \frac{1}{j\omega} + N(j\omega)$$

$$\frac{Y(j\omega)}{N(j\omega)} = \frac{1}{1+1/j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega + 1}$$

Differenzierer
→ Hochpass-Verhalter
bzgl. Rauschen



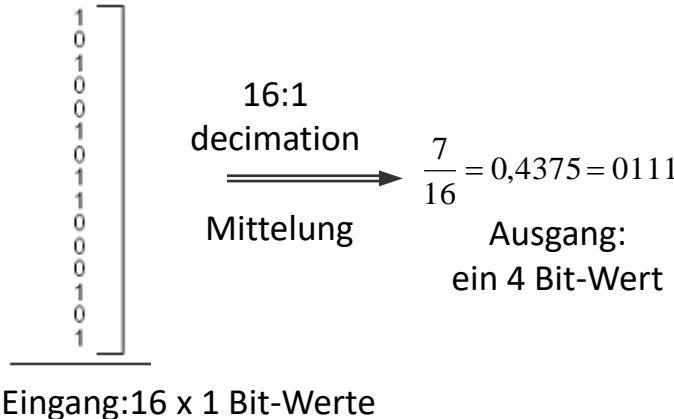
„Trick Nr. 1“ des Sigma-Delta-ADC:

$Y(j\omega)$ mit digitalem Tiefpassfilter filtern, um das Quantisierungsrauschen zu beseitigen. Damit das „noise-shaping“ gut funktioniert, ist eine hohe Überabtastung notwendig ($f_{Tast} = M \cdot f_{Max}$ mit $M \gg 2$ → viel Rauschleistung außerhalb des Nutzbandes $[0 .. f_{Max}]$)

Sigma-Delta-ADU

„Trick Nr. 2“: digital decimation

Verringerung der Abtastpunkte
→ Erhöhung der Auflösung

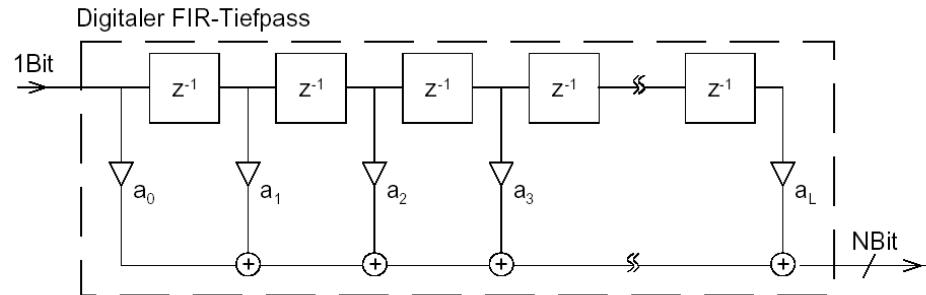


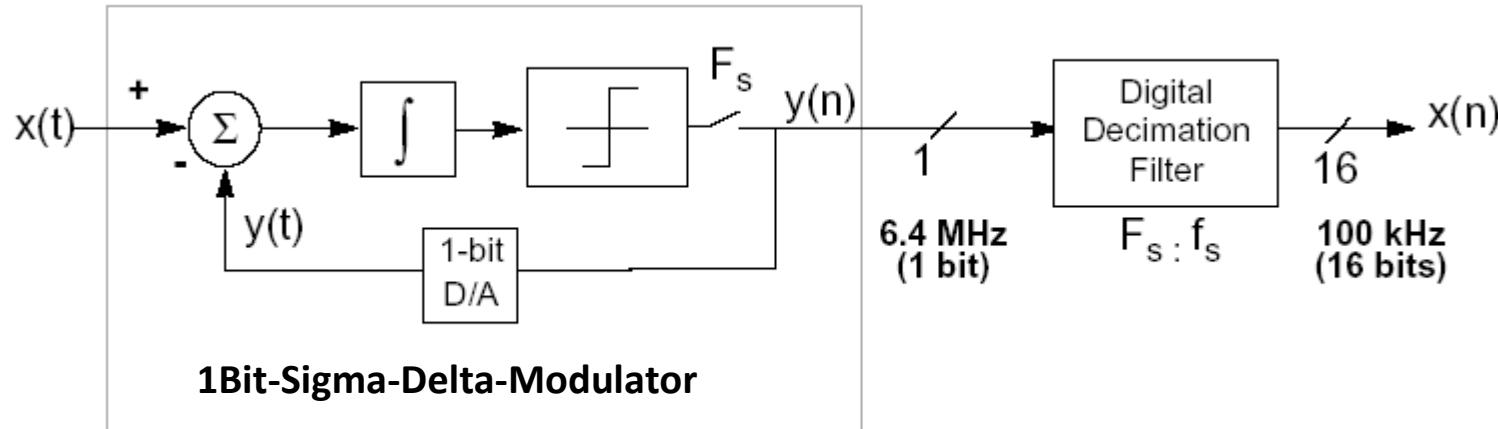
Nutzen der Überabtastung (engl. „oversampling“)

- Erhöhung der Auflösung durch Mittelung über mehrere Abtastpunkte (digital decimation)
 - Quantisierungsrauschen kommt maßgeblich außerhalb des interessierenden Frequenzbandes zu liegen
→ kann weggefilttert werden (engl. noise shaping)
 - einfaches Anti-Aliasing Filter ausreichend

Filter/Decimation Implementierung:

- FIR Tiefpassfilter
 - Nur jeder L-te Ausgangswert des Filters wird übernommen



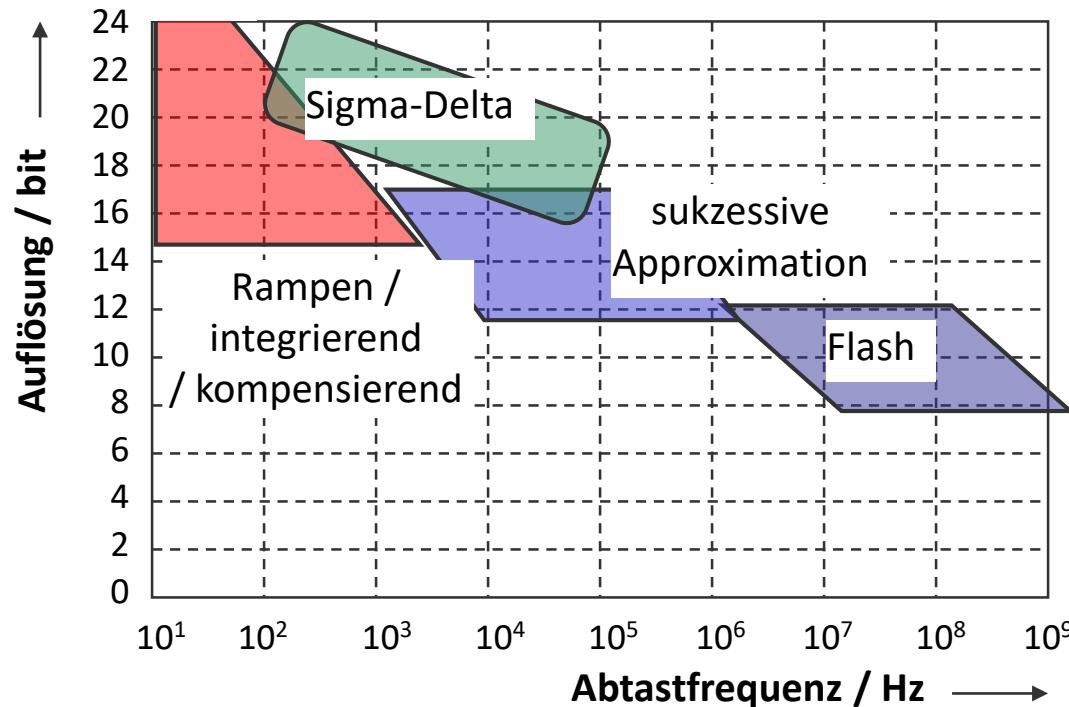


Eigenschaften

- Abtastfrequenz typisch bis etwa 100 kHz
(interner Takt bis 100 MHz)
- typisch 10-24 Bit Auflösung
- Einsatz z.B. in der Audiotechnik

Kennwerte

- Auflösung: Zahl der Amplitudenintervalle der Quantisierungsstufen
- Maximale Abtastfrequenz: Max. Konversionen/Sekunde
- Aperturzeit: Dauer des Erfassungsvorganges (obere Grenzfrequenz)
- Konversionszeit: Dauer des Digitalisierungsvorganges
- Aperturjitter: Unsicherheit der zeitlichen Erfassung



2. Messabweichungen – „Messfehler“

EINFÜHRUNG

Nach DIN 1319 ist Messen die Ausführung von geplanten Tätigkeiten zum quantitativen Vergleich einer Messgröße mit einer Einheit.

Messabweichungen beim Messen

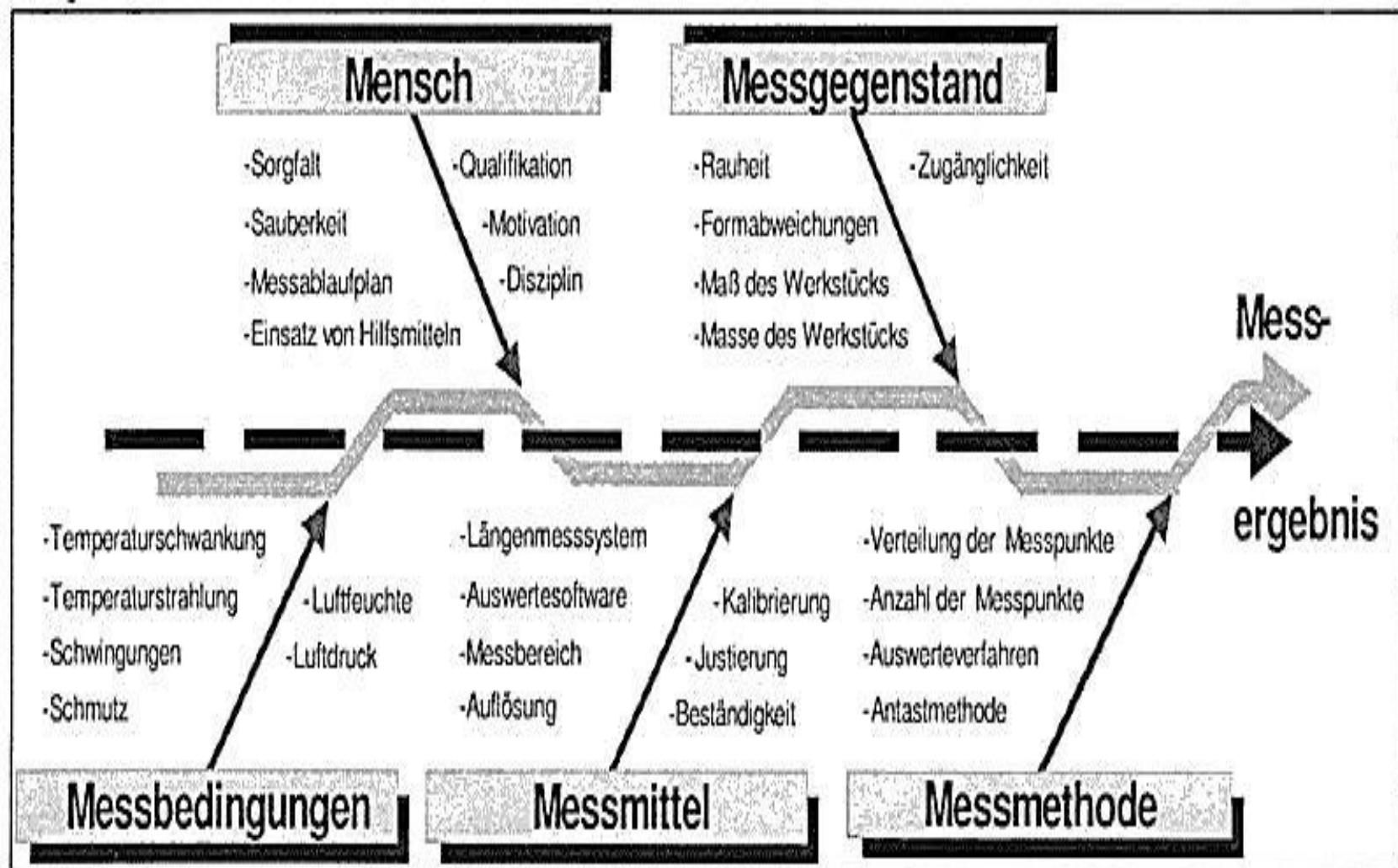
$$X = x \cdot N \pm U$$

mit X : Messgröße
 x : Maßzahl
 N : Einheit
 U : Messabweichung

- Die Größe X muss messbar sein!
- Die Einheit N muss eindeutig definiert sein!

Ursachen für Messabweichungen nach DIN

Ishikawa-Diagramm

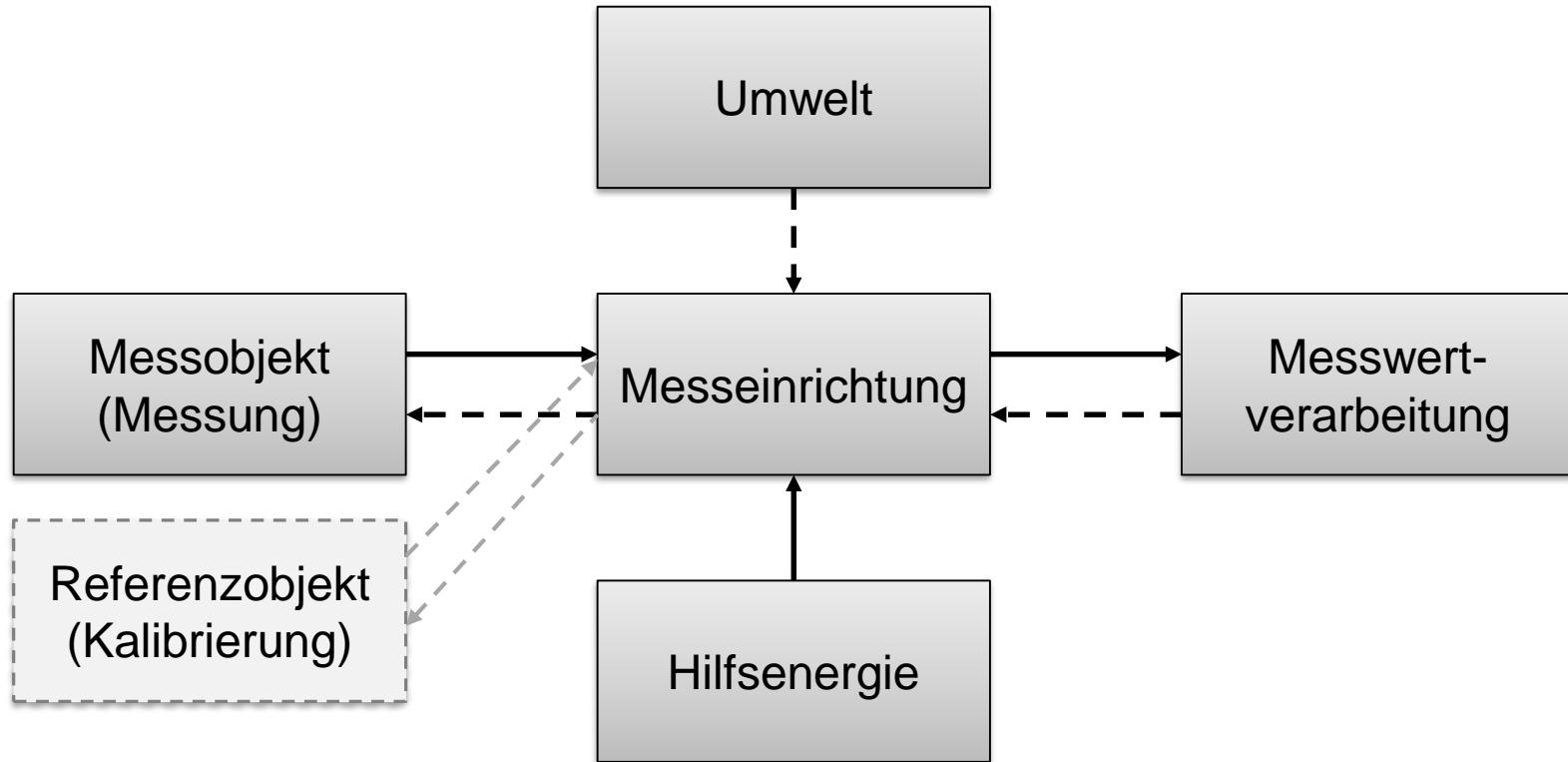


Wichtige Begrifflichkeiten

Begriffe

- Messwert: Resultat einer einzelnen Messung bestehend aus Zahlenwert und Einheit.
- Messgröße: Physikalische Größe, die Ziel der Messung ist.
- Wahrer Wert: Ideeller Wert, der der Messgröße zugordnet wird. Ist **nicht** feststellbar und lässt sich **nur näherungsweise** bestimmen.
- Richtiger Wert: Der beste verfügbare Schätzwert für den wahren Wert.
- Messergebnis: **Schätzung** des wahren Werts und Schätzung der Unsicherheit dieses Schätzwertes.

Komponenten eines Messsystems



Eine **Rückwirkung** vom Messgerät auf das Messobjekt **ist zu vermeiden**. Das Messergebnis darf nicht durch die Umgebungsbedingungen, die Spannungsversorgung oder den Anschluss weiterer Geräte verfälscht werden.

Die Rückwirkung bzw. Wechselwirkung zwischen Messobjekt und Messeinrichtung beeinflussen den Messwert.

Es gibt drei Arten diese Wechselwirkung zu berücksichtigen...

1. Effekt vernachlässigen (nur wenn man dies begründen kann)
2. Rechnerische Korrektur des Messwerts
3. Anwendung eines Kompensationsmessverfahrens

Ausschlagmethode:

Messgröße wird direkt oder über eine Zwischengröße in einen möglichst proportionalen Ausschlag umgewandelt

Vorteil: Einfacher Aufbau, schnell

Nachteil: Energieentzug → Rückwirkung!



Kompensationsmethode:

Messgerät erzeugt eine Kompensationsgröße, die von der Messgröße subtrahiert wird und so das Messgerät wieder in den Ausgangszustand (meist Null) zurückbringt

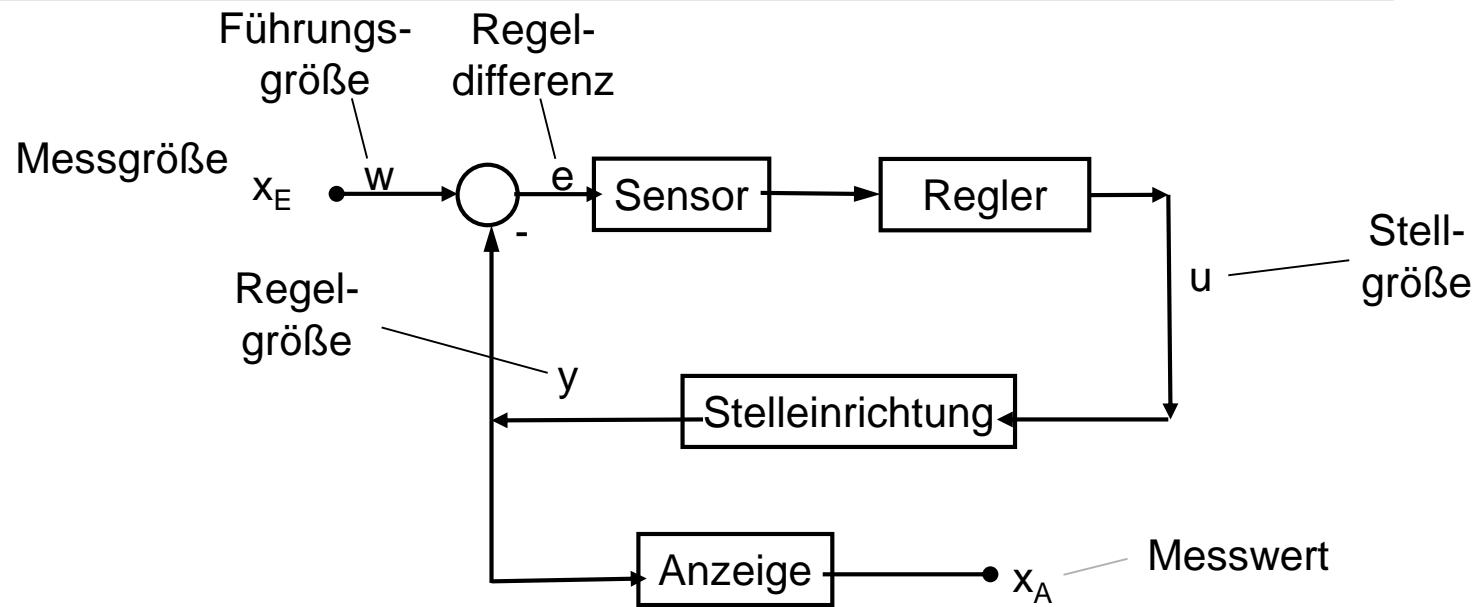
Die Kompensation erfolgt über einen Regelkreis

Vorteil: Sehr genaue Messung möglich

Nachteil: Meist langsamer als Ausschlagmethode



Kompensationsmethode



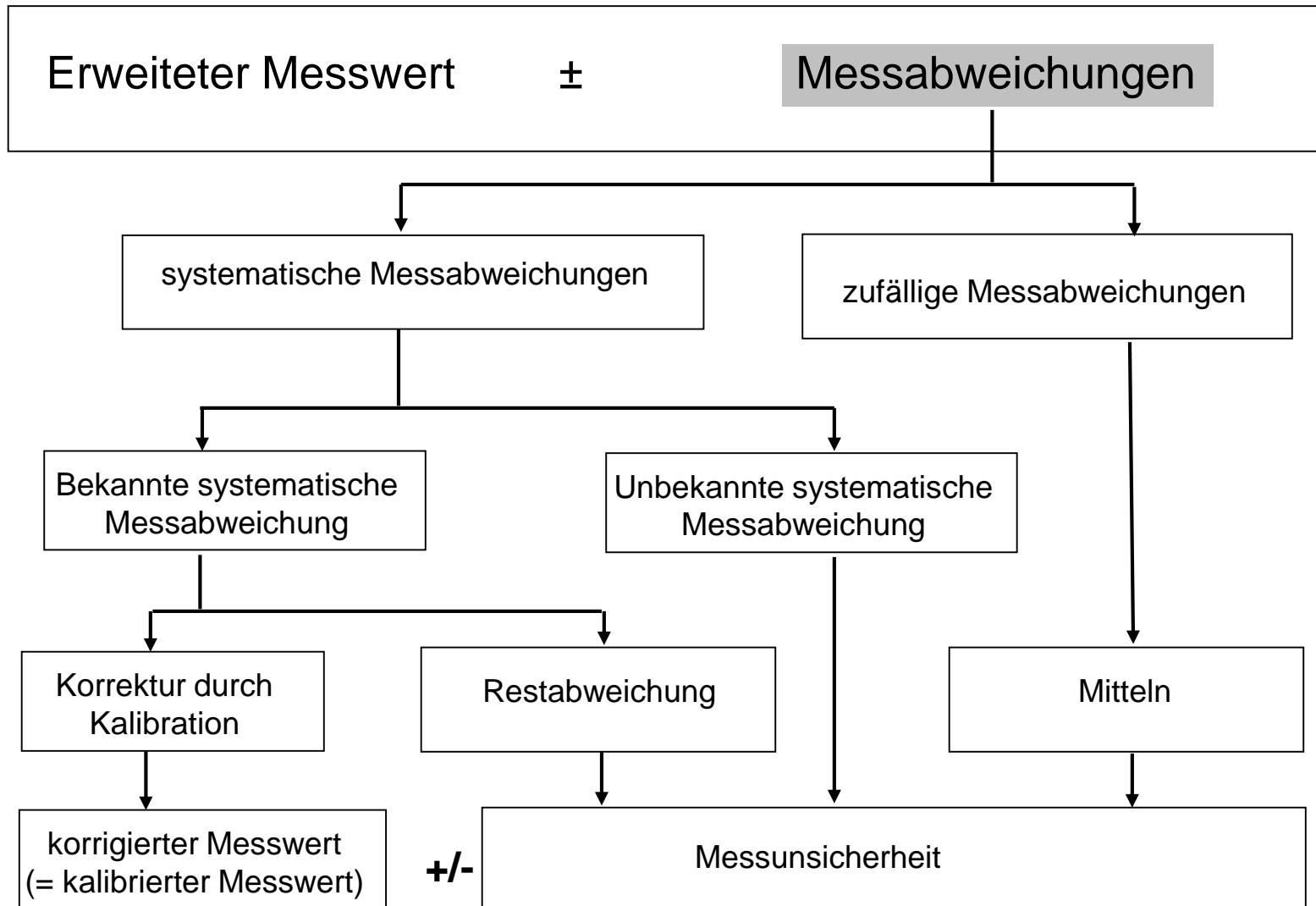
Vorgehen:

Regeldifferenz $e = 0$ da Kompensation zur Ruhelage

Die Messgröße x_E ist direkt proportional zur Stellgröße u des Reglers, da dieser den Regelkreis in die Ruhelage zurückbringt.

Mehr Info siehe Vorlesung Systemtheorie

Es kann analog oder digital korrigiert werden!



Definition

- Kalibrieren:** Bestimmung der Messabweichung an einem oder mehreren Stellen im Messbereich. Vergleich mit kalibrierten Meisterteilen oder mit kalibrierten Messgeräten einer höheren Genauigkeitsklasse.
- Justieren:** Eingriff in das Messgerät mit dem Ziel, Messabweichungen zu verkleinern.
- Eichen:** Amtliche Prüfung von Messgeräten durch akkreditierte Personen (juristischer Begriff)

Definition: Rückführbarkeit

... ist die Eigenschaft eines Messergebisses oder des Wertes eines Normals, durch eine ununterbrochene Kette von Vergleichsmessungen mit angegebenen Messunsicherheiten auf geeignete Normale, im allgemeinen internationale oder nationale Normale, bezogen zu sein.

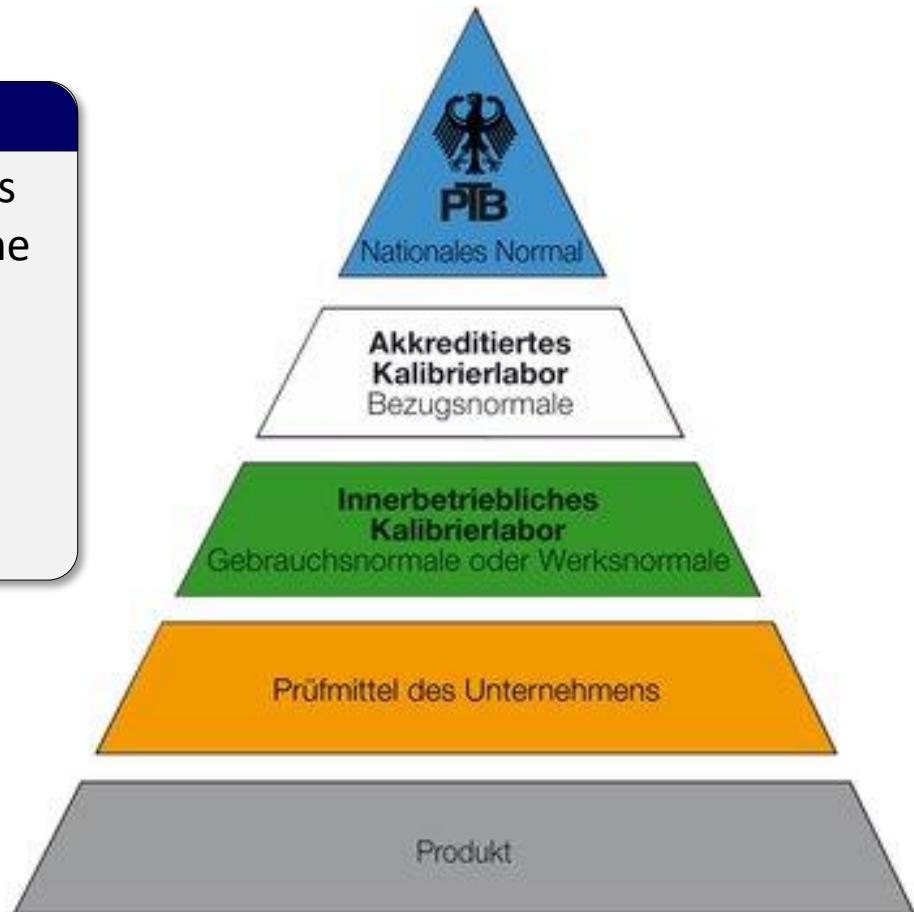
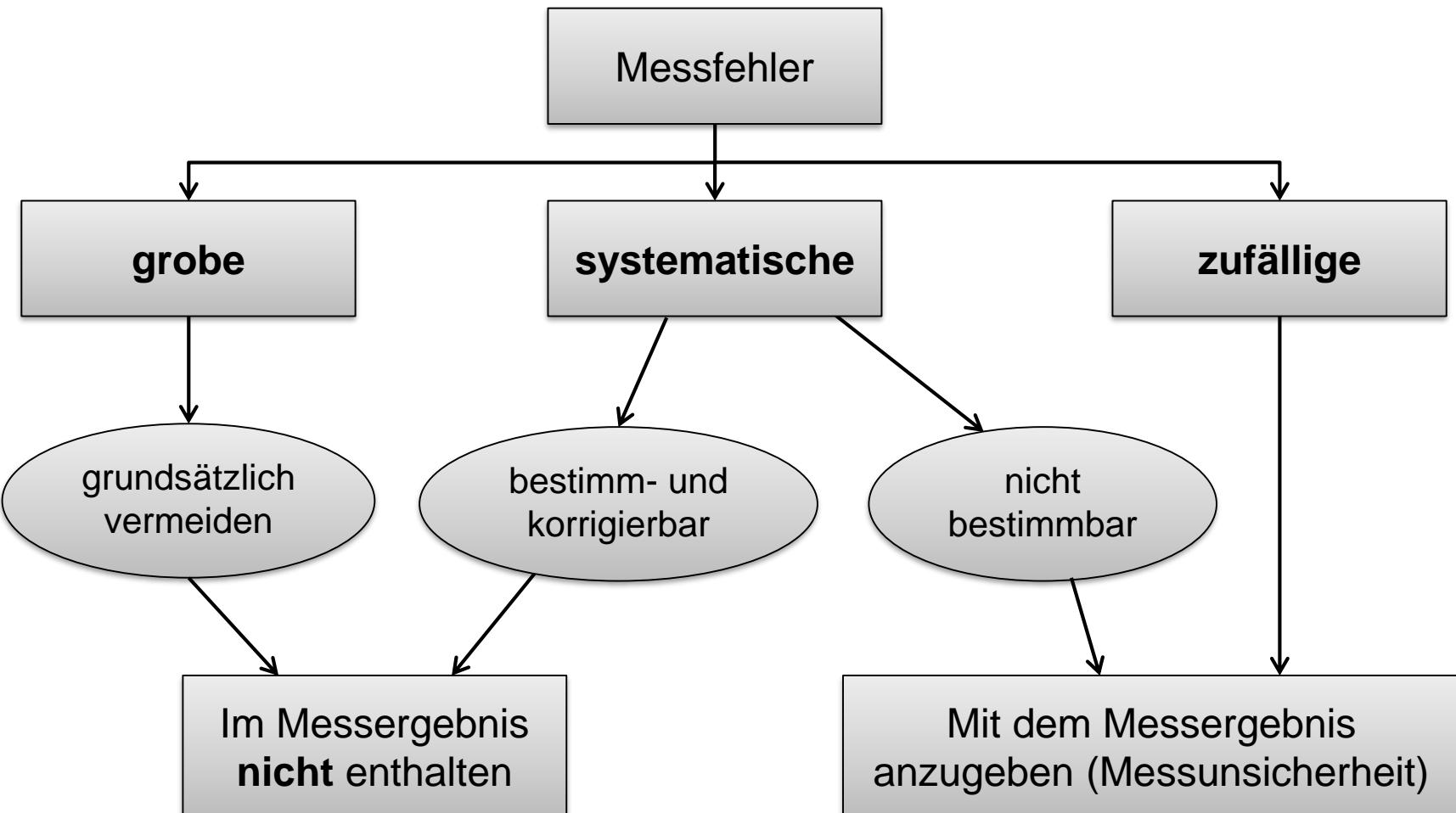


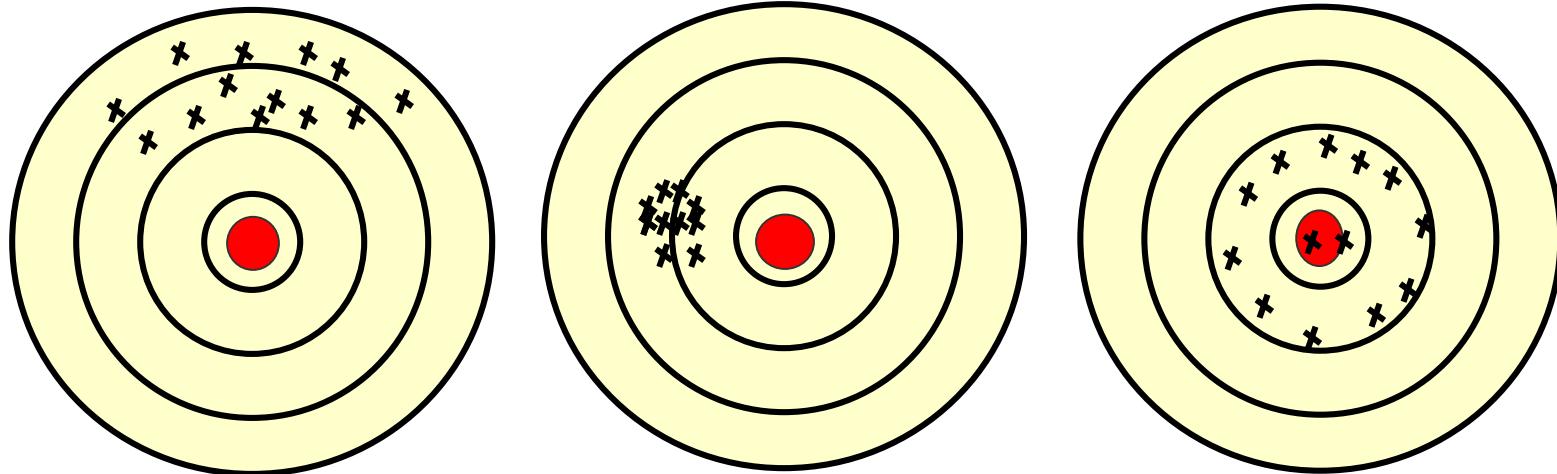
Bild: <http://www.deprag.com>



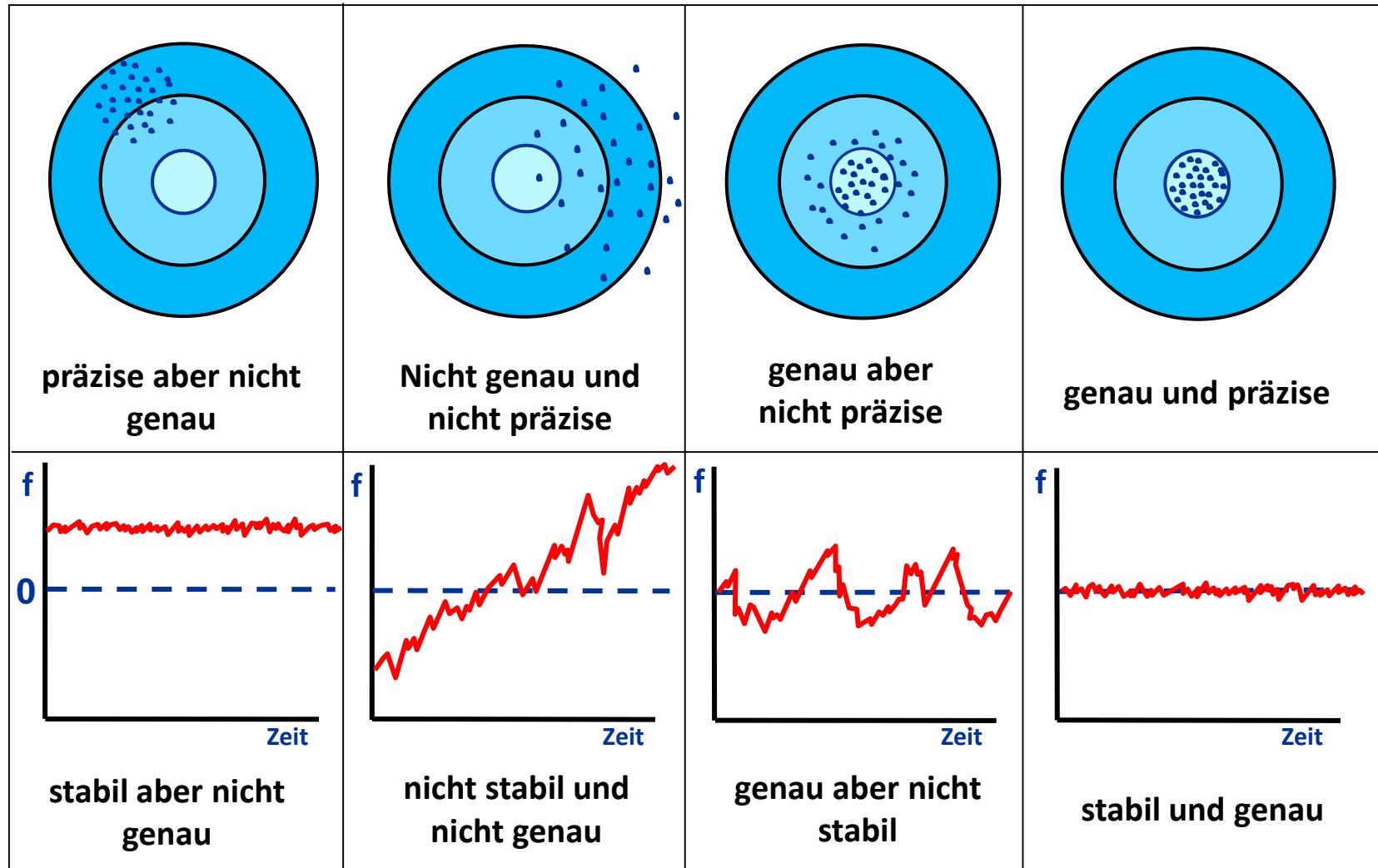
Messabweichungen (früher Messfehler)

Auch in einer korrekt durchgeföhrten Messung kommt es zu Streuungen der Messergebnisse. Um diese Streuung von einer fehlerhaft durchgeföhrten Messung unterscheiden zu können spricht man in diesem Fall von Messabweichung.

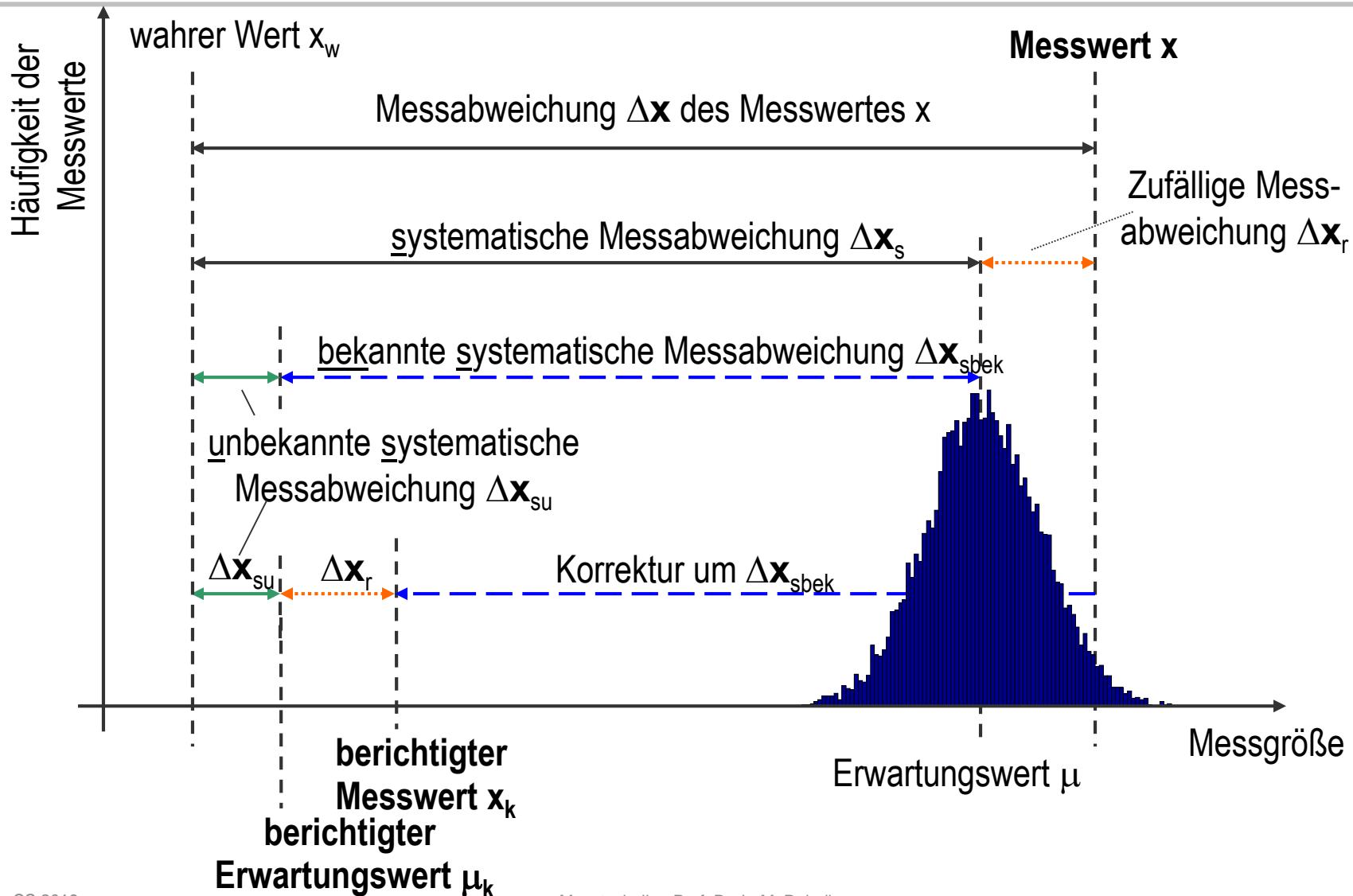
Welche Messung ist die beste?  = wahrer Wert



Genauigkeit (accuracy), Präzision (precision) und Massbeständigkeit (stability)



Systematische Messfehler II



2.2 Messabweichungen – „Messfehler“

SYSTEMATISCHE MESSABWEICHUNGEN

Die Ursachen eines systematischen Fehlers sind bekannt.

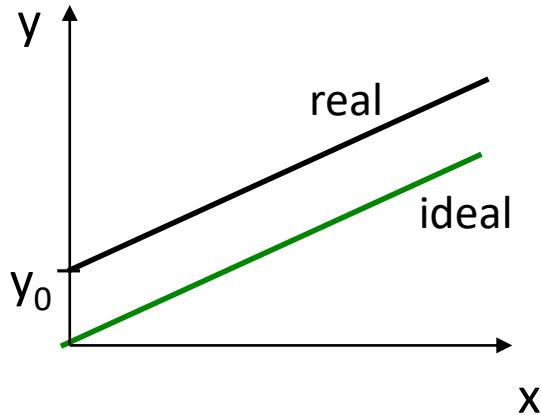
- Damit lässt sich der wahre Messwert x_w aus dem angezeigten Messwert x berechnen.

$$x_w = x - \Delta x = x \cdot \left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right)$$

- Δx ist der einheitenbezogene absolute Fehler
- $\Delta x/x$ ist der auf den Messwert bezogene relative Fehler.

Beispiele für systematische Fehler:

- Nullpunktfehler
- Empfindlichkeitsfehler



Offset (Nullpunktabweichung)

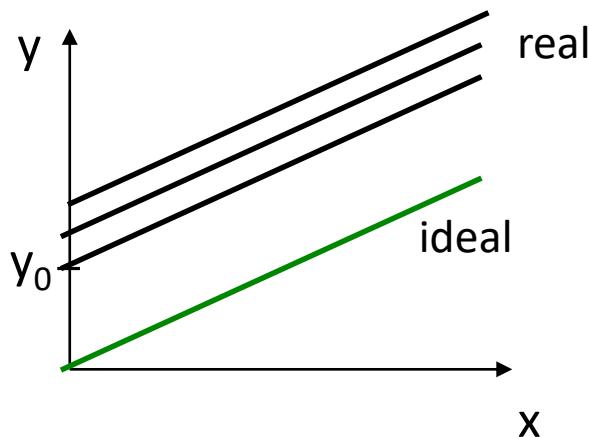
Ideal:

$$y = S \cdot x$$

S = Sensitivität

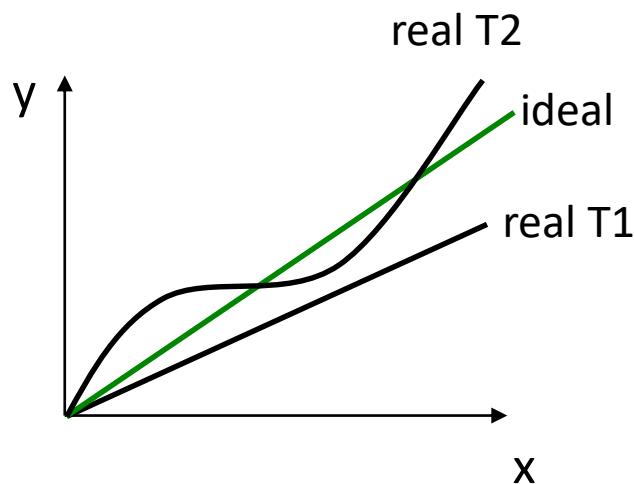
Real:

$$y = S \cdot x + y_0$$



Offset Drift

z. B. durch Querempfindlichkeiten, Alterung



Empfindlichkeitsabweichung

Ideal:

$$y = S \cdot x$$

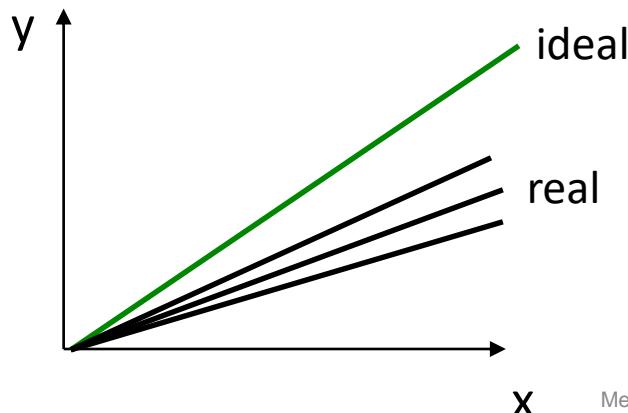
Real T1:

$$y = (S+DS) \cdot x$$

Real T2:

Nicht-Linearität:

$$y = S \cdot x + S \cdot f(S) \cdot x$$



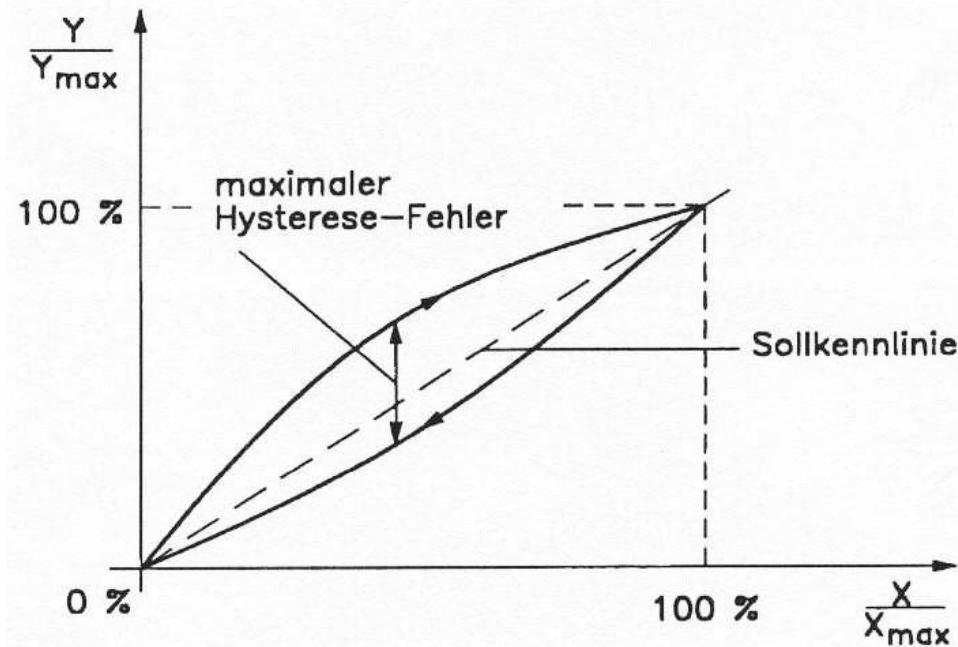
Empfindlichkeits-Drift

z.B. durch Querempfindlichkeiten, Alterung

Messabweichung durch Hysterese

Endwert einer sich einstellenden Größe hängt von der Richtung ab aus der die Einstellung erfolgt

- Zuordnung von Eingangs- und Ausgangsgröße nicht eindeutig.
z. B. bei mechanischen Vorgängen mit Spiel (Getriebe, Zeiger-Anzeige), bei Ummagnetisierungsvorgängen oder bei nicht-elastischer mechanischer Belastung



(früher Fehlerfortpflanzungsgesetz)

Messergebnis $y = f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_m)$ aus m verschiedenen Messwerten x_n .

Für kleine Abweichungen $|\Delta x_n| \ll |x_n| \Rightarrow$ Bildung eines totalen Differenzials:

Max. Unsicherheit = totales Differenzial der Funktion $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\Delta y \cong \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \Delta x_i$$

Regel für systematische Fehler:

- Bei Addition von Messgrößen \rightarrow absolute Fehler werden addiert $(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots)$
- Bei Subtraktion von Messgrößen \rightarrow absolute Fehler werden subtrahiert $(\Delta x_1 - \Delta x_2 - \dots)$
- Bei Multiplikation von Messgrößen \rightarrow relative Fehler werden addiert $\left(\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \dots \right)$
- Bei Division von Messgrößen \rightarrow relative Fehler werden subtrahiert $\left(\frac{\Delta x_1}{x_1} - \frac{\Delta x_2}{x_2} - \dots \right)$

Beispiel zur Fehlerfortpflanzung I

Bestimmung eines Widerstandwertes durch Messen von Spannung U_m und Strom I_m

$$R_m = \frac{U_m}{I_m};$$

$$\frac{\partial R_m}{\partial U_m} = \frac{1}{I_m} \quad \text{und} \quad \frac{\partial R_m}{\partial I_m} = -\frac{U_m}{I_m^2}$$

$$\Rightarrow \text{Max. Unsicherheit } \Delta R_m = \frac{1}{I_m} \cdot \Delta U_m - \frac{U_m}{I_m^2} \Delta I_m \quad | \cdot \frac{1}{R_m} = \frac{I_m}{U_m};$$

$$\Rightarrow \text{max. relative Unsicherheit} = \frac{\Delta R_m}{R_m} = \frac{\Delta U_m}{U_m} - \frac{\Delta I_m}{I_m}$$

Beispiel zur Fehlerfortpflanzung II

An einem Verbraucher wurden Messungen mit folgenden systematischen relativen Fehlern durchgeführt:

$$\frac{\Delta U}{U} = -0,011; \frac{\Delta I}{I} = 0,02; \frac{\Delta R}{R} = -0,031$$

Berechne den relativen Fehler der Verbrauchsleistung mit dem Ansatz: $P = \frac{U^2}{R}$

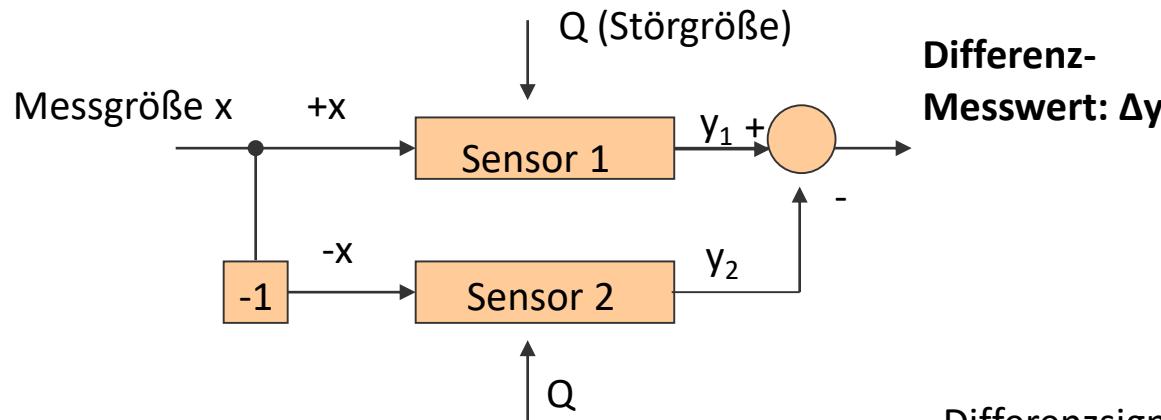
$$\frac{\Delta P}{P} = 2 \cdot \frac{\Delta U}{U} - 1 \cdot \frac{\Delta R}{R} = 2 \cdot (-0,011) - (-0,031) = +0,009$$

Die Leistung wurde also systematisch um 0,9 % zu groß gemessen und der Messwert kann entsprechend berichtigt werden.

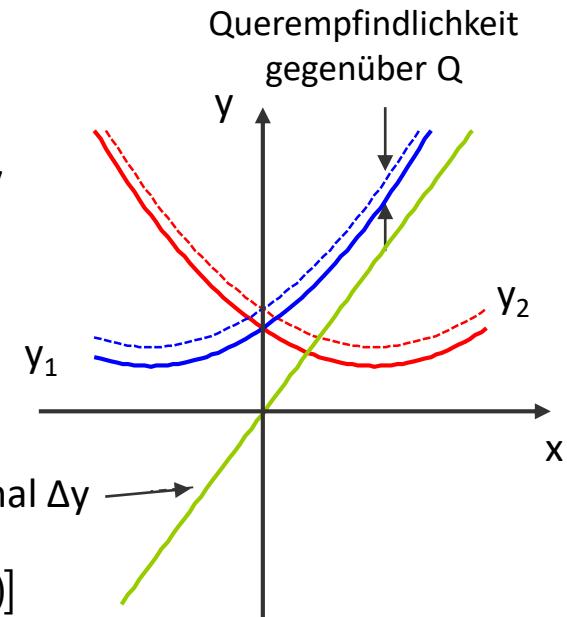
Welcher systematische Fehler würde sich ergeben, wenn man die Leistung aus $P = U \cdot I$ oder aus $I^2 \cdot R$ berechnen würde?

Korrektur von systematischen Messabweichungen I

Linearisierung nach dem Differenzprinzip



$$\Delta y = y_1 - y_2 \text{ mit } y_1 = f[(x_0 + x), (Q_0 + Q)] \text{ und } y_2 = f[(x_0 - x), (Q_0 + Q)]$$



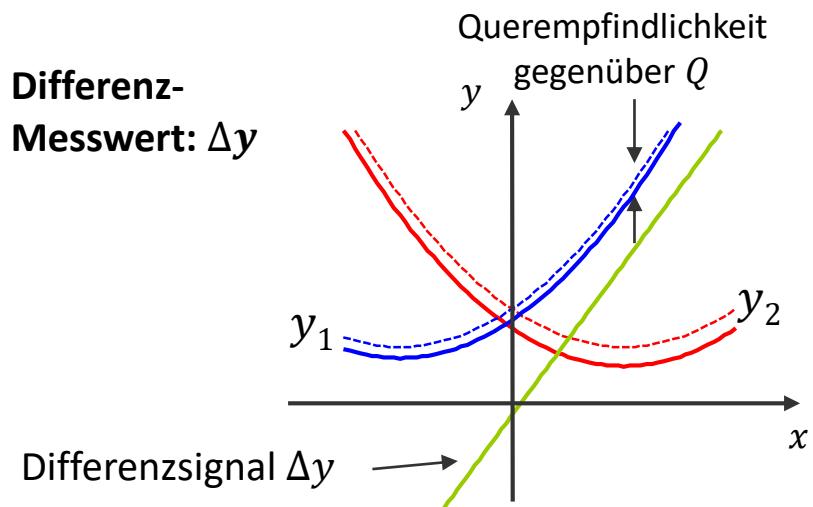
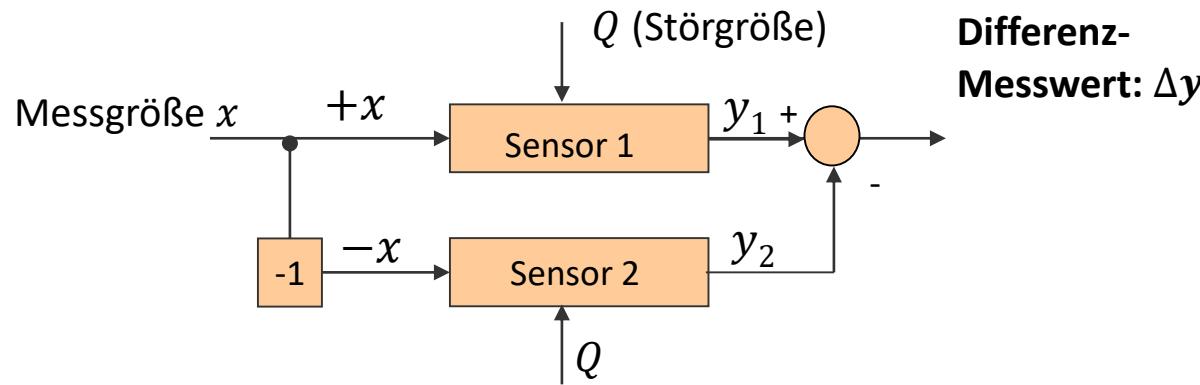
Entwicklung als Taylor-Reihe bis Glied 2ter Ordnung um einen Arbeitspunkt (x_0, Q_0) . x_0 = Offset der Messgröße x , Q_0 = Offset der Störgröße Q .

$$y_1 = \underbrace{y(x_0, Q_0)}_{\text{Glied 0-ter Ordnung}} + \underbrace{\frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial Q} \cdot Q}_{\text{Glieder 1-ter Ordnung}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x \cdot \partial Q} \cdot x \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial Q^2} Q^2}_{\text{Glieder 2-ter Ordnung}}$$

$$y_2 = y(x_0, Q_0) + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial x} \cdot (-x) + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial Q} \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x^2} (-x)^2 + \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x \cdot \partial Q} \cdot (-x) \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial Q^2} Q^2$$

Korrektur von systematischen Messabweichungen II

Linearisierung nach dem Differenzprinzip



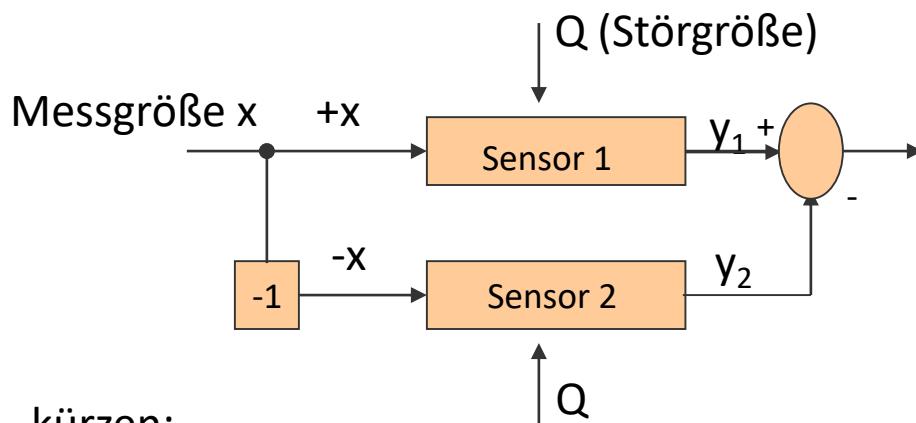
$$y_1 = y(x_0, Q_0) + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial Q} \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x \cdot \partial Q} \cdot x \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial Q^2} Q^2$$

$$y_2 = y(x_0, Q_0) + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial x} \cdot (-x) + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial Q} \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x^2} (-x)^2 + \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x \cdot \partial Q} \cdot (-x) \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial Q^2} Q^2$$

$$\Rightarrow \Delta y = y_1 - y_2 \approx 2 \cdot \left(\frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x \cdot \partial Q} \cdot x \cdot Q \right)$$

Korrektur von systematischen Messabweichungen II

Linearisierung nach dem Differenzprinzip



Differenz-Messwert:

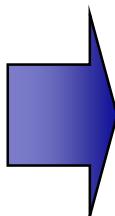
Δy

Differenzsignal Δy

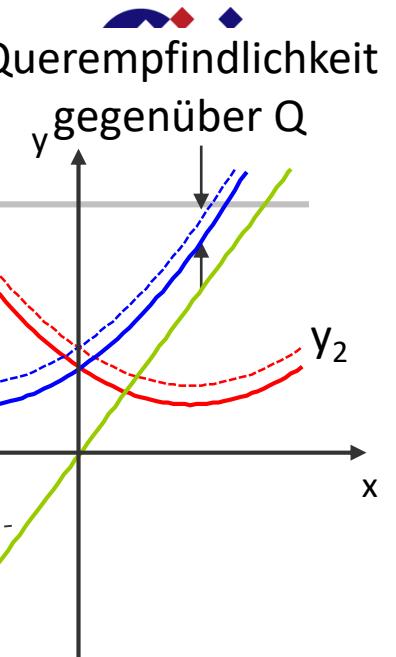
$$y_1 = y(x_0, Q_0) + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial Q} \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x \cdot \partial Q} \cdot x \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial Q^2} Q^2$$

$$y_2 = y(x_0, Q_0) + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial x} \cdot (-x) + \frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial Q} \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x^2} (-x)^2 + \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x \cdot \partial Q} \cdot (-x) \cdot Q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial Q^2} Q^2$$

$$\Rightarrow \Delta y = y_1 - y_2 \approx 2 \cdot \left(\frac{\partial y(x_0, Q_0)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial^2 y(x_0, Q_0)}{\partial x \cdot \partial Q} \cdot x \cdot Q \right)$$

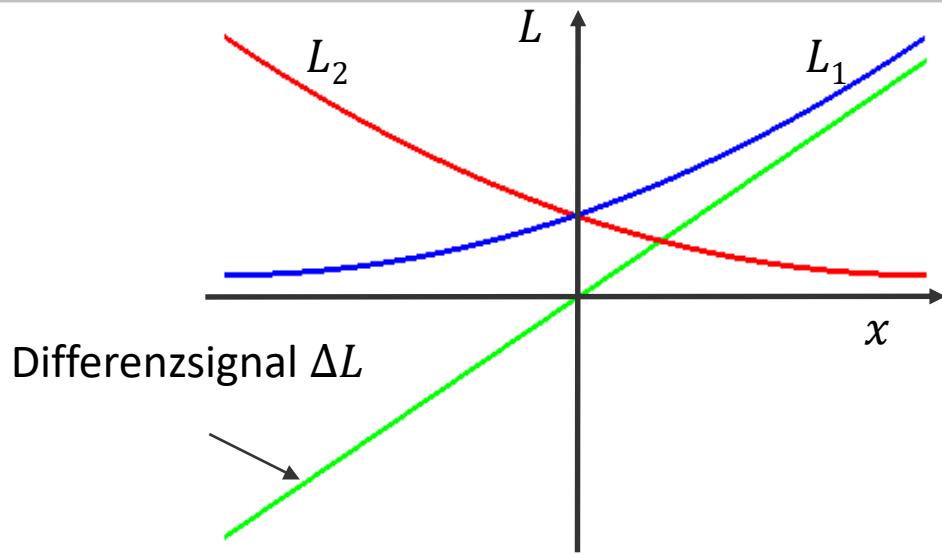
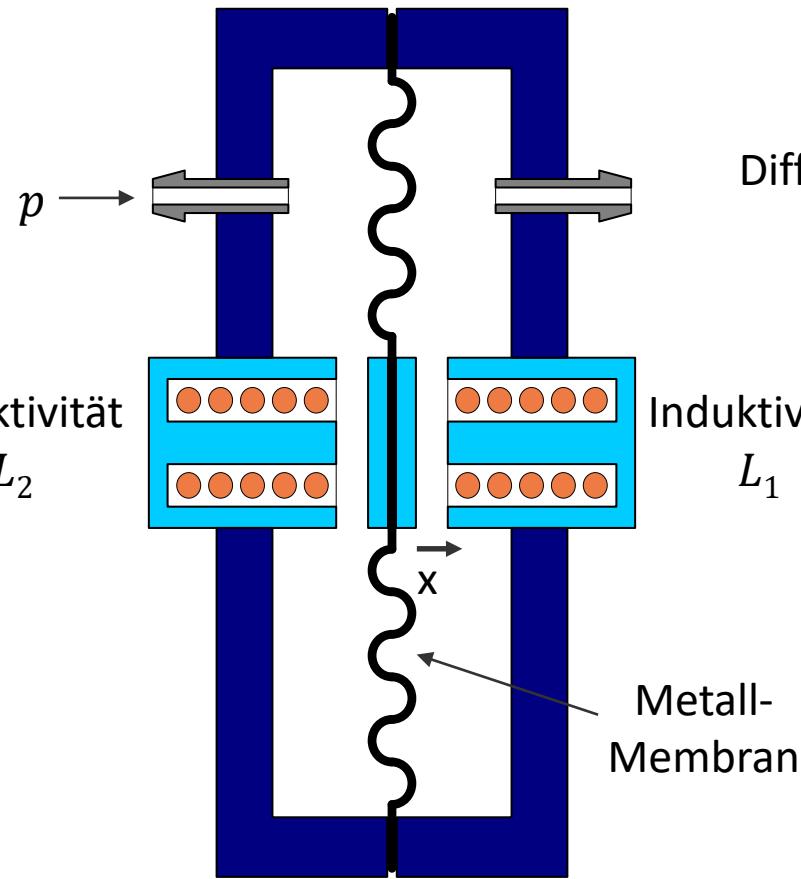


- Querempfindlichkeit verringert, da viele Terme weggefallen sind.
- Empfindlichkeit verdoppelt (Faktor 2)
- verbesserte Linearität, weil quadratischer Term weggefallen ist.

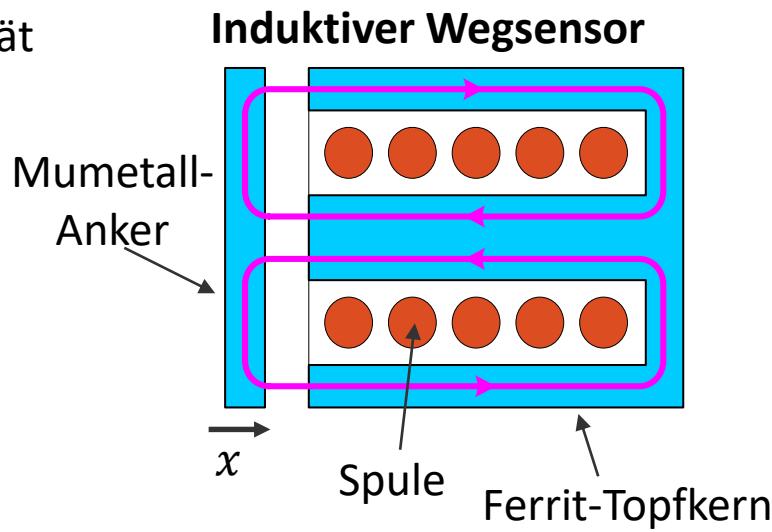


Beispiele für Sensoren nach dem Differenzprinzip I

Drucksensor mit zwei
induktiven Wegsensoren



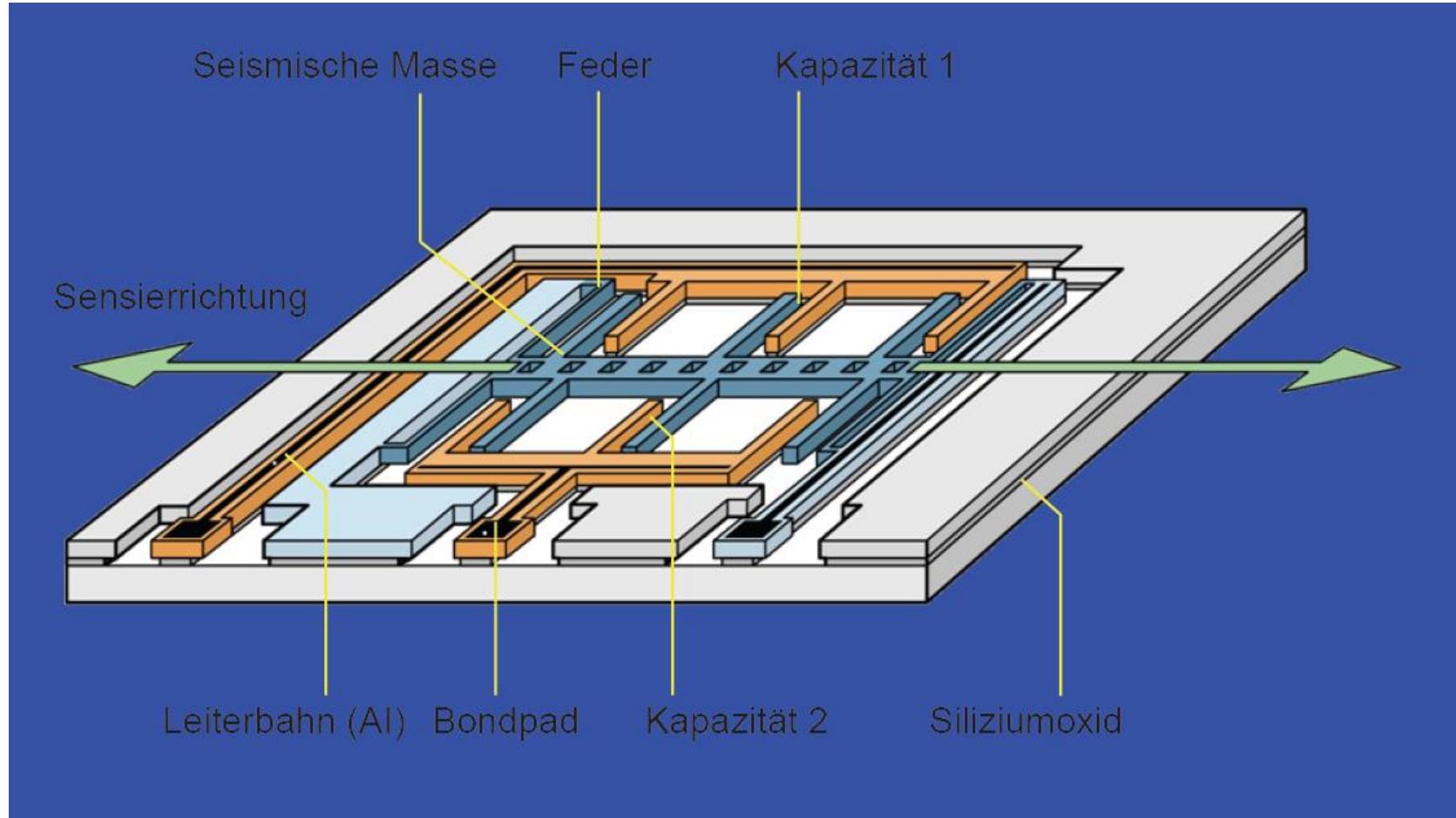
Induktiver Wegsensor



Beispiele für Sensoren nach dem Differenzprinzip II

Beschleunigungssensor I

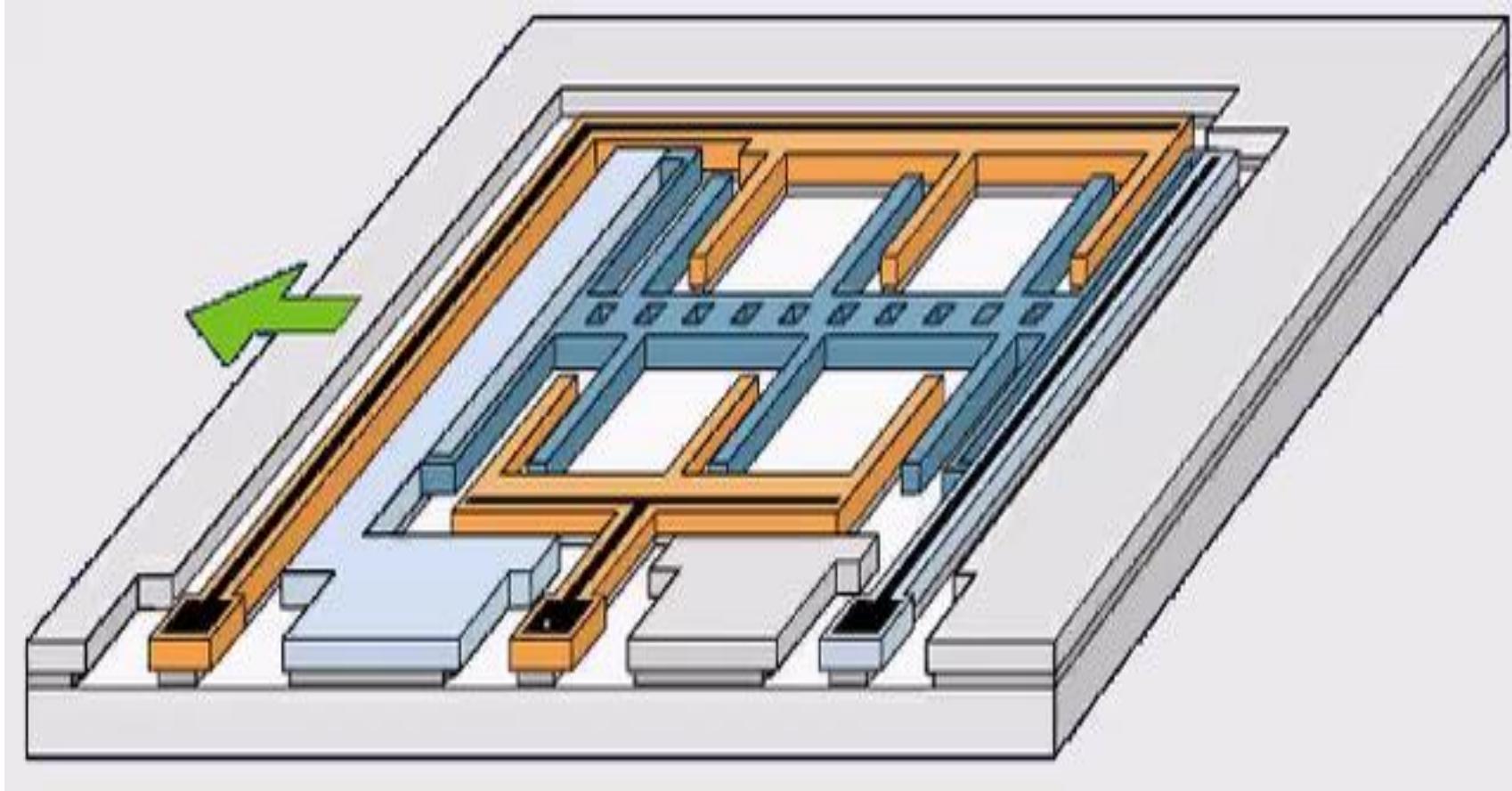
Quelle: Bosch



Beispiele für Sensoren nach dem Differenzprinzip II

Beschleunigungssensor I

Quelle: Bosch

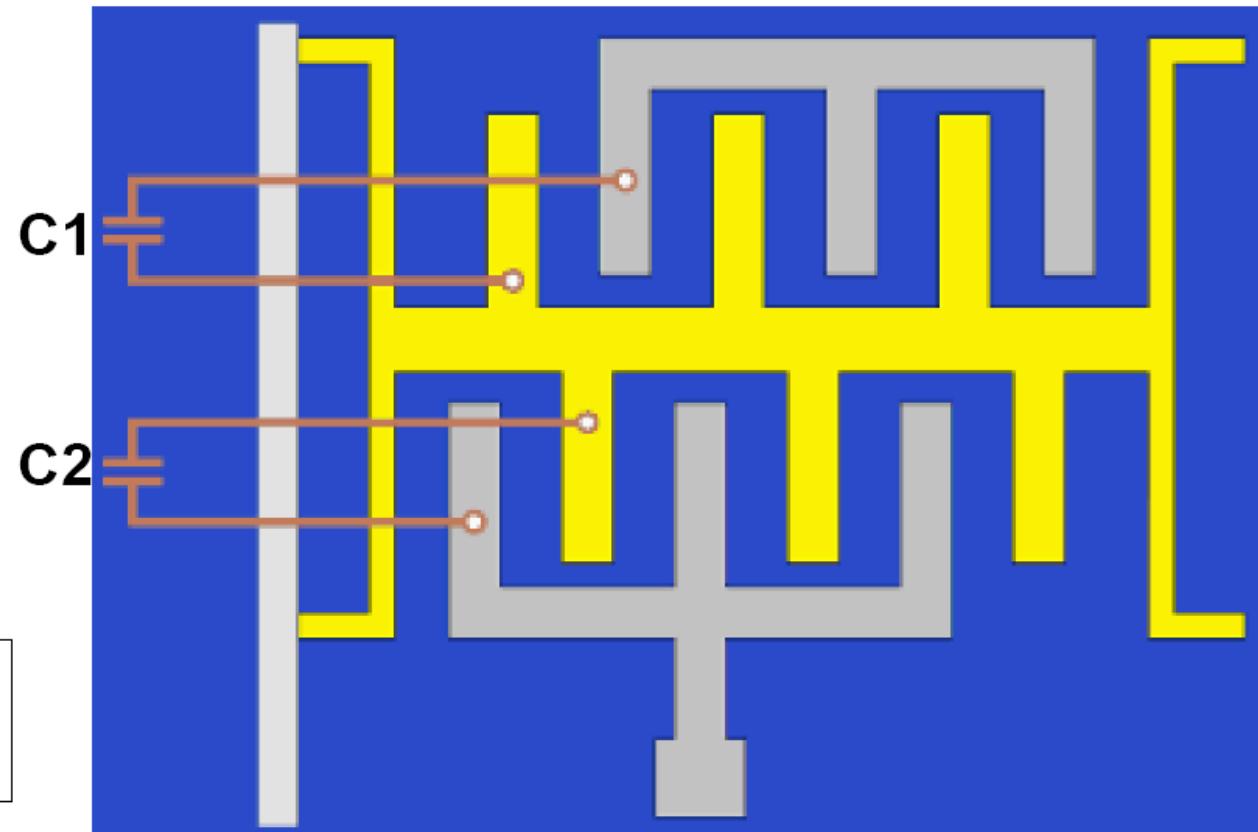


Beispiele für Sensoren nach dem Differenzprinzip III

Beschleunigungssensor II

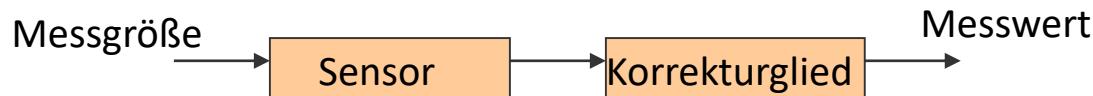
Quelle: Bosch

Signal- auswertung

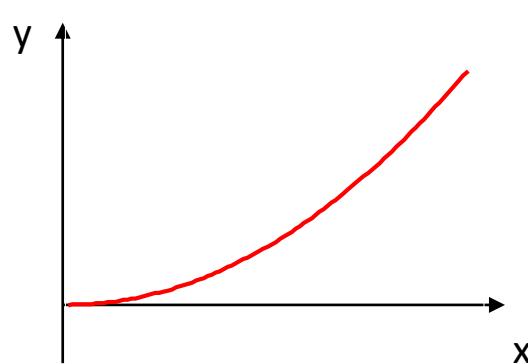


Korrektur von systematischen Messabweichungen

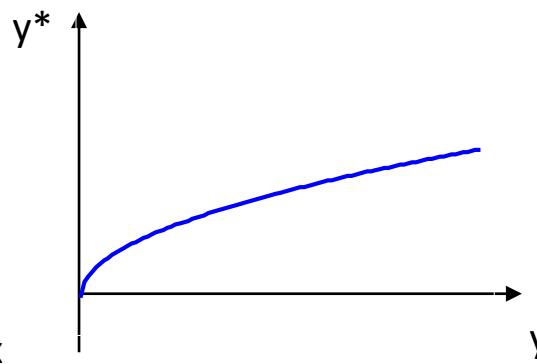
Ideal: Die Korrekturfunktion ist die Inverse der Sensorfunktion



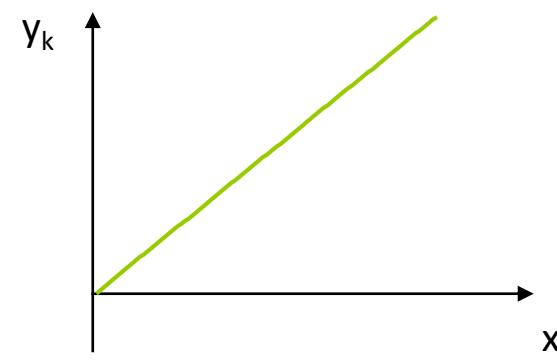
Sensorfunktion
z.B. $y = a \cdot x^2$



Korrekturfunktion
z.B. $y^* = b \cdot y^{1/2}$



Ausgabewert
→ $y_k = c \cdot x$



Es kann analog oder digital korrigiert werden!

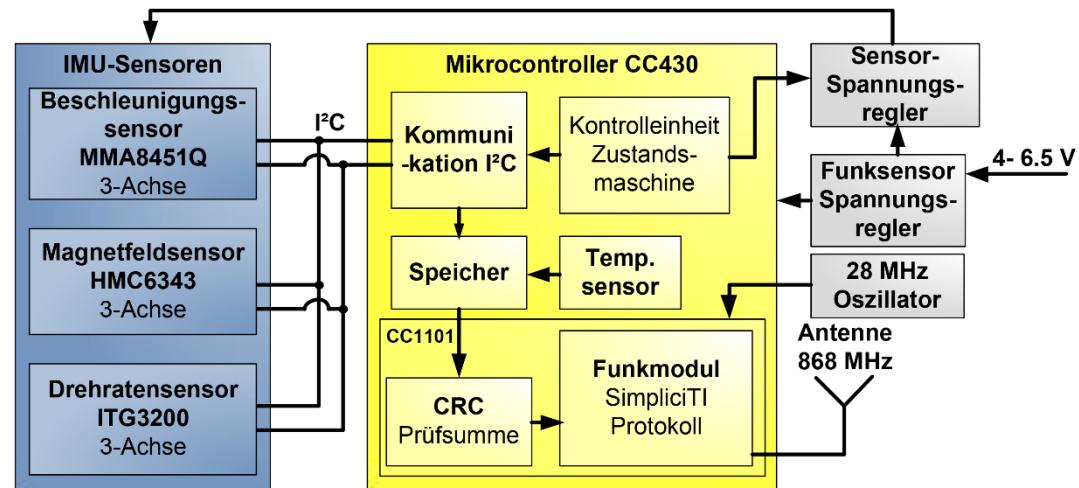
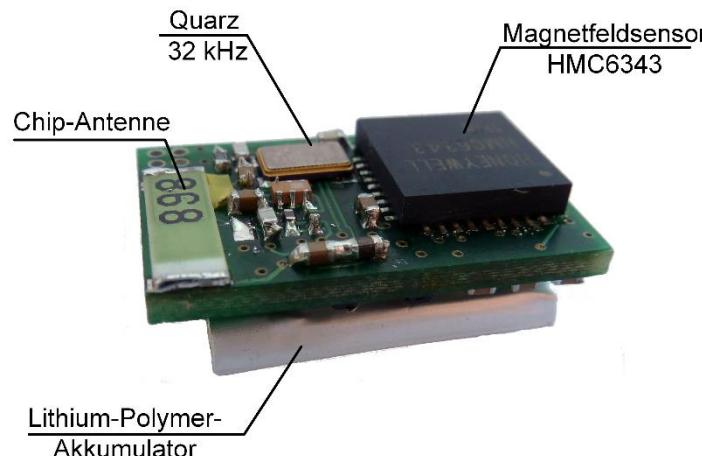
Kalibrierung am Beispiel einer inertialen Messeinheit

Anwendung

- Bewegungsdetektion
- Positionsbestimmung

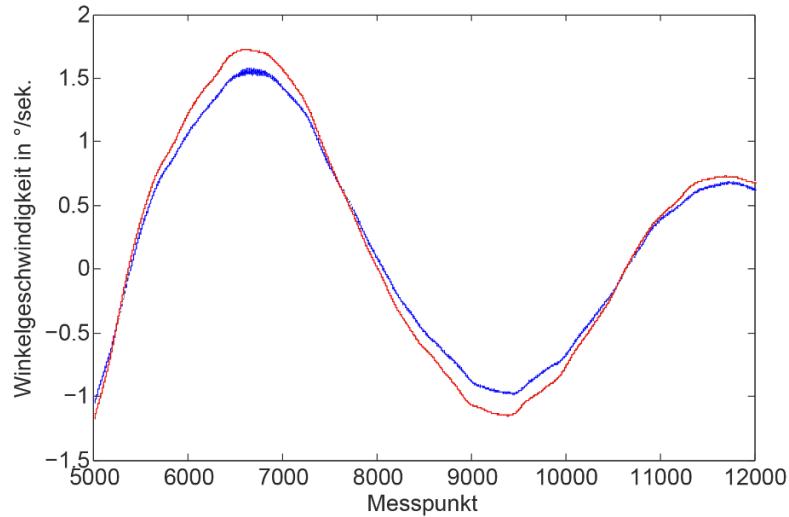
Aufbau

- Verwendete Sensortypen:
 - Beschleunigungssensor
 - Drehratensensor
 - Magnetfeldsensor
- Erfassung in allen Raumrichtungen

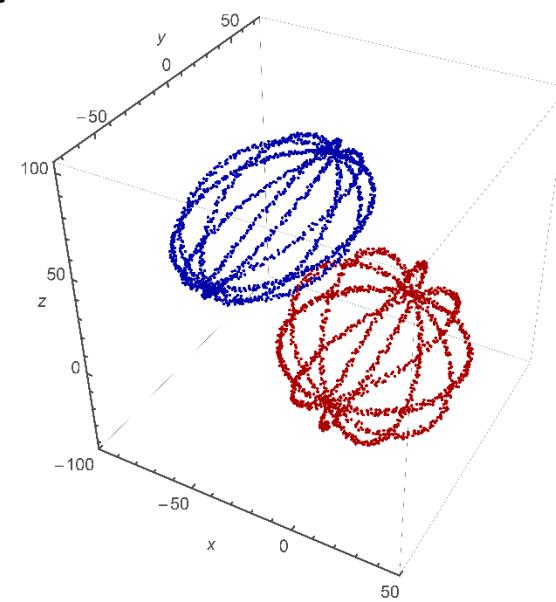


Systematische Messabweichungen

- Messwert und wahrer Wert stimmen nicht überein
- Beispiele: Sensorwerte der inertialen Messeinheit



Drehrate entlang einer Achse
bei Schaukelbewegung der IMU:
Messwerte und Referenzwerte



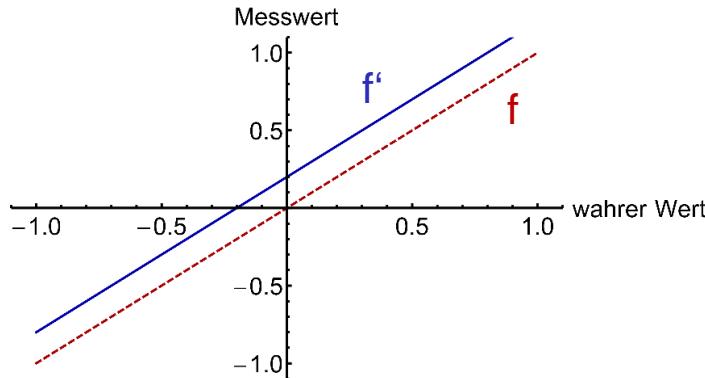
Magnetfeld in μT entlang der Messachsen
bei Rotation der IMU:
Messwerte und Referenzwerte

- Korrektur der ausgelesenen Daten notwendig \Rightarrow Kalibrierung

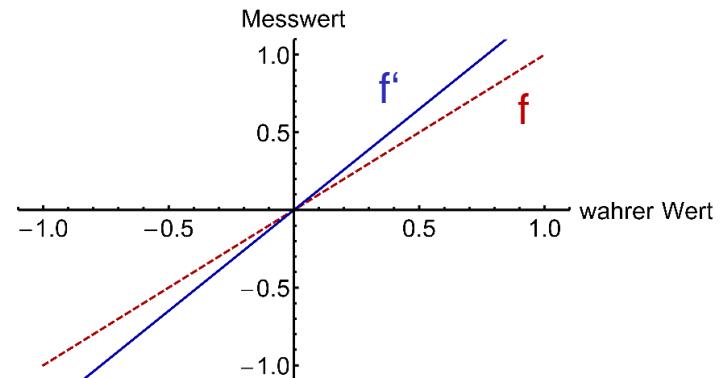
Systematische Messabweichungen am Beispiel einer inertialen Messeinheit

ideales Messsystem (f, x, y, z) und reales Messsystem (f', x', y', z')

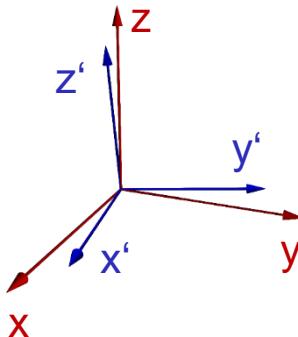
1 Nullpunktabweichung (Offset)



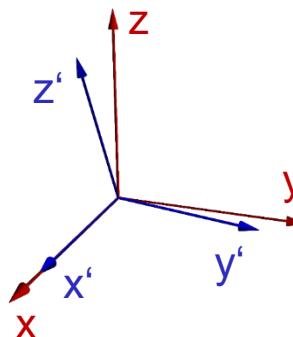
2 Skalierungsfehler



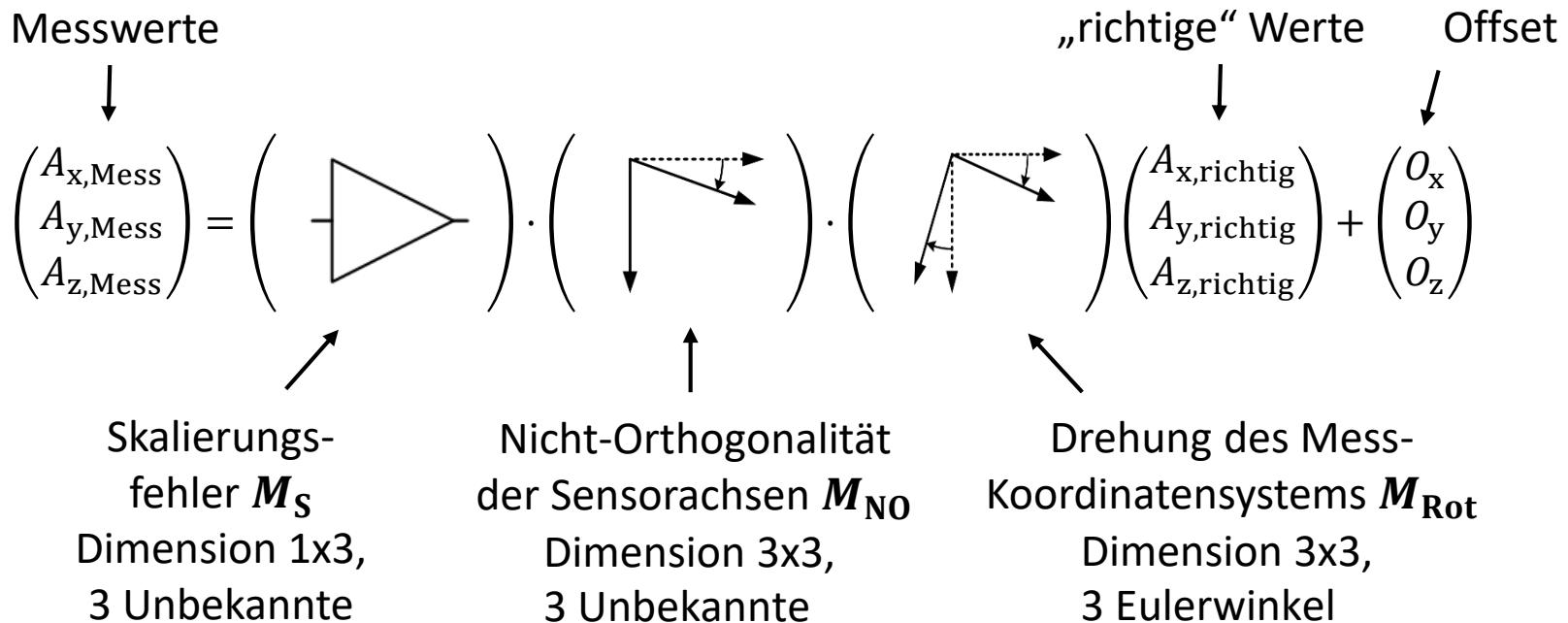
3 Orientierungsfehler (Verkippung)



4 Nicht-Orthogonalität der Achsen



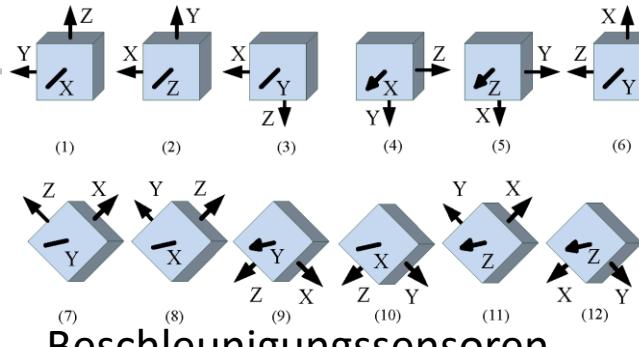
Mathematische Modellierung der systematischen Messabweichungen einer inertialen Messeinheit



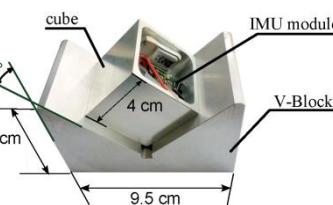
Zu bestimmende Kalibriergrößen:

- Nichtidealitätsmatrix $\mathbf{M} = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{M}_{NO} \cdot \mathbf{M}_{Rot} \Rightarrow 9$ Unbekannte
- Offset-Vektor $\vec{O} \Rightarrow 3$ Unbekannte
- Gilt für Beschleunigungssensor, Drehratensor und Magnetfeldsensor
- Wir brauchen pro Sensortyp mindestens 12 unabhängige Messungen, bei denen die richtigen Messwerte bekannt sind.

Kalibrierung einer inertialen Messeinheit



Beschleunigungssensoren



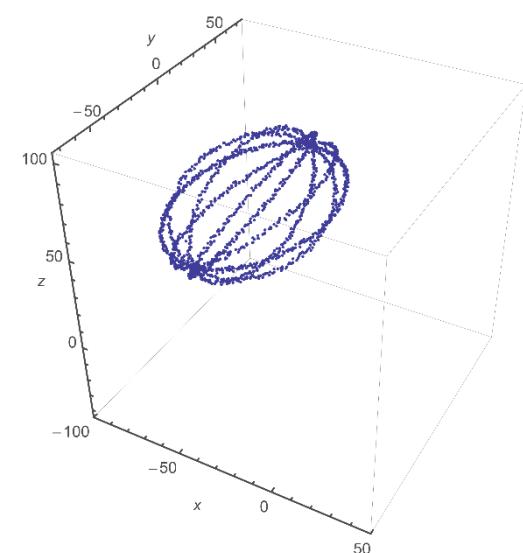
1. Aufzeichnung verschiedener Datensätze von \vec{A}_{mess} bei bekannten Werten von \vec{A}_{richtig}

2. Berechnung der Kalibrierungsdaten über...

- analytische Ausdrücke für die Elemente von M und \vec{O}
- numerische Näherungsverfahren
(z.B. Methode der kleinsten Fehlerquadrate)

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{pmatrix}$$

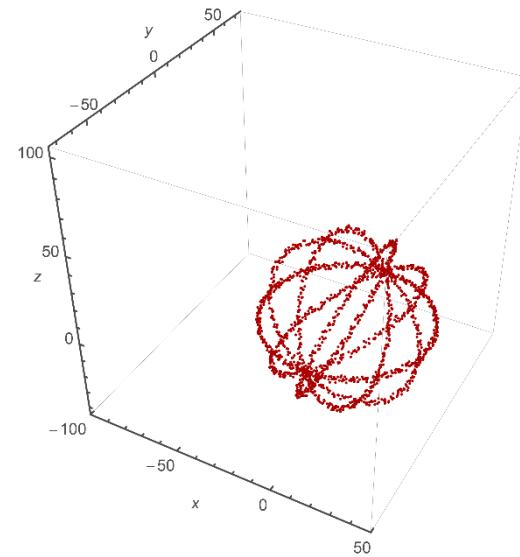
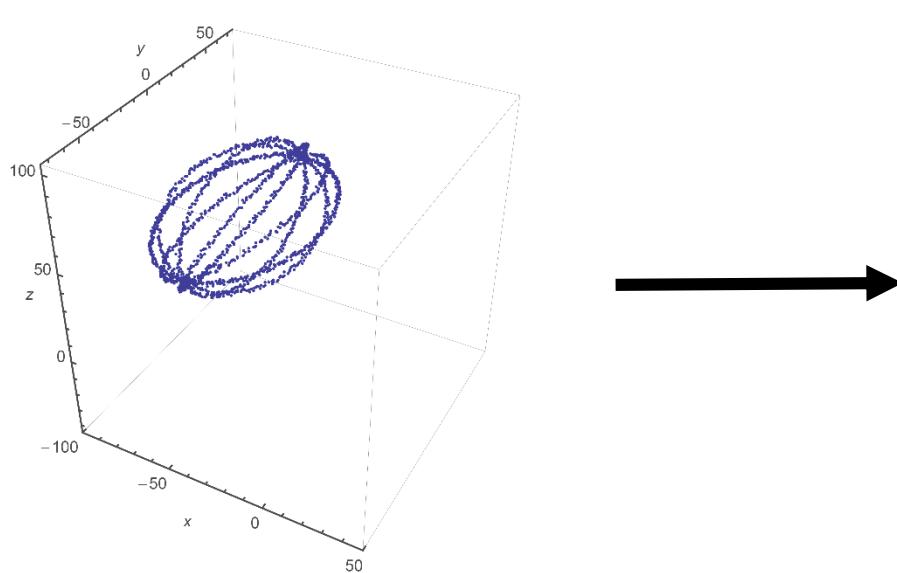
Magnetfeld-sensoren



Berechnung der kalibrierten Messwerte einer inertialen Messeinheit

Rückrechnen eines Messwerts auf den richtigen Wert:

$$\begin{pmatrix} A_{x,\text{richtig}} \\ A_{y,\text{richtig}} \\ A_{z,\text{richtig}} \end{pmatrix} = M^{-1} \left(\begin{pmatrix} A_{x,\text{Mess}} \\ A_{y,\text{Mess}} \\ A_{z,\text{Mess}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix} \right)$$



Einige Elemente der Kalibrationsmatrix können auch aus dem zeitlichen Verlauf der Messwerte abgeleitet werden:

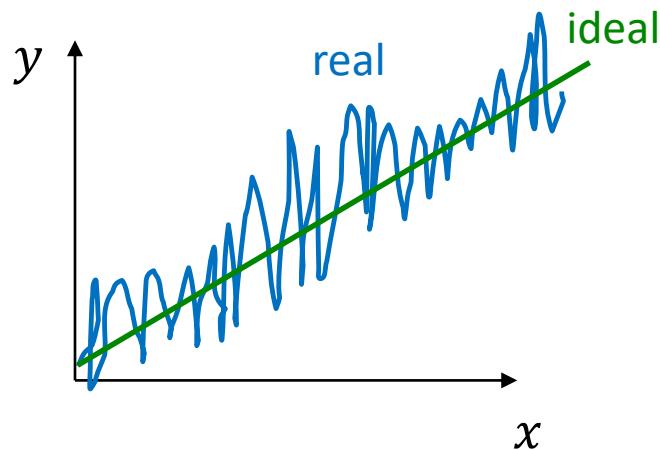
- Liegt eine zufällige Bewegung in allen drei Achsen vor, so sollten die Messwerte für die einzelnen Achsen untereinander unkorreliert sein.
- Eine Nicht-Orthogonalität der Sensorachsen M_{NO} führt hingegen zu einer permanenten Korrelation der Messwerte für die einzelnen Achsen.

2.3 Messabweichungen – „Messfehler“

ZUFÄLLIGE MESSABWEICHUNGEN

Zufällige Messabweichungen I

Im Gegensatz zur systematischen Messabweichung kennt man hier weder Betrag noch Vorzeichen der Messabweichung.



Ideal:
$$y = S \cdot x$$

Real:
$$y = S \cdot x + n(t)$$

Zufällige Messabweichung

Zufällige Messabweichungen durch **nicht** erfassbare und **nicht** beeinflussbare Änderungen der Messgeräte, des Beobachters und der Umwelt (z. B. Rauschen). Man kennt weder Betrag noch Vorzeichen der Abweichung.

Exkurs: Ursachen des Rauschens

Thermisches Rauschen, Johnson-Noise, Johnson-Nyquist-Rauschen

ist auf temperaturabhängige willkürliche Ladungsträgerbewegungen in Verlustwiderständen zurückzuführen

$$P_r = k_B \cdot T \cdot B$$

k_B = Boltzmannkonstante

T = Temperatur in Kelvin,

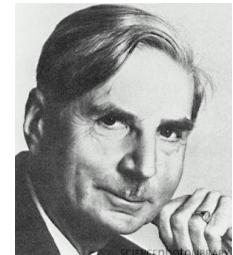
B = Bandbreite



Harry Nyquist,
(1889–1976)



John B. Johnson
(1887–1970)



Walter Schottky
(1886–1976)

Schrotrauschen, Stromrauschen, Schottky-Noise

entsteht wenn Ladungsträger einen pn-Übergang passieren

1/f-Rauschen, Funkelrauschen, Flicker-Noise

erzeugt ein Rauschsignal mit einer Spektralverteilung, die mit $1/f$ zu höheren Frequenzen hin abfällt.

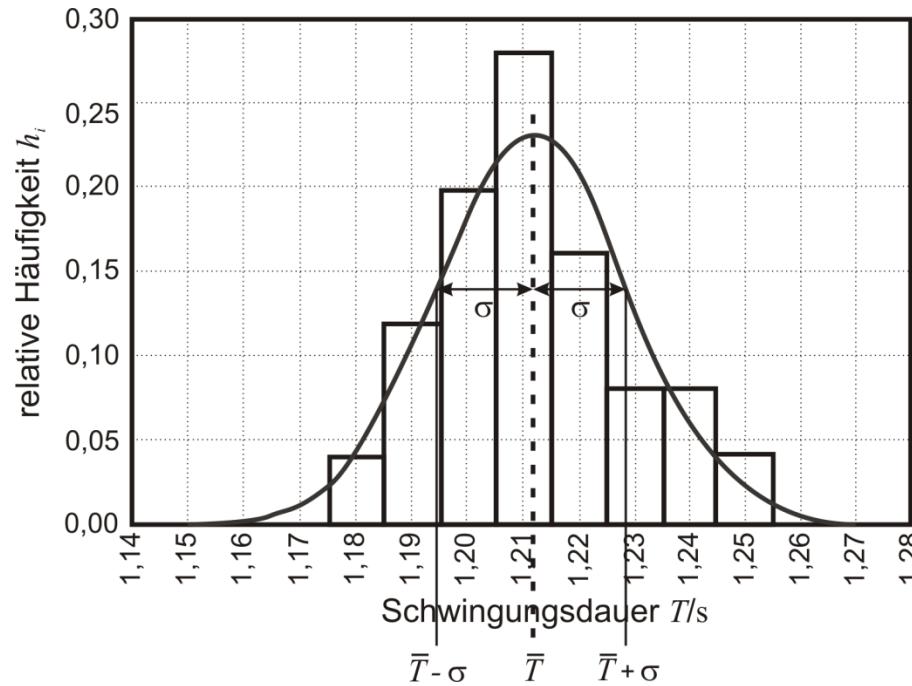
Entsteht bei Halbleiterbauelementen durch fluktuierende Umladungen von Oberflächenzuständen.

Rekombinationsrauschen, Quantenrauschen, R-G-Noise

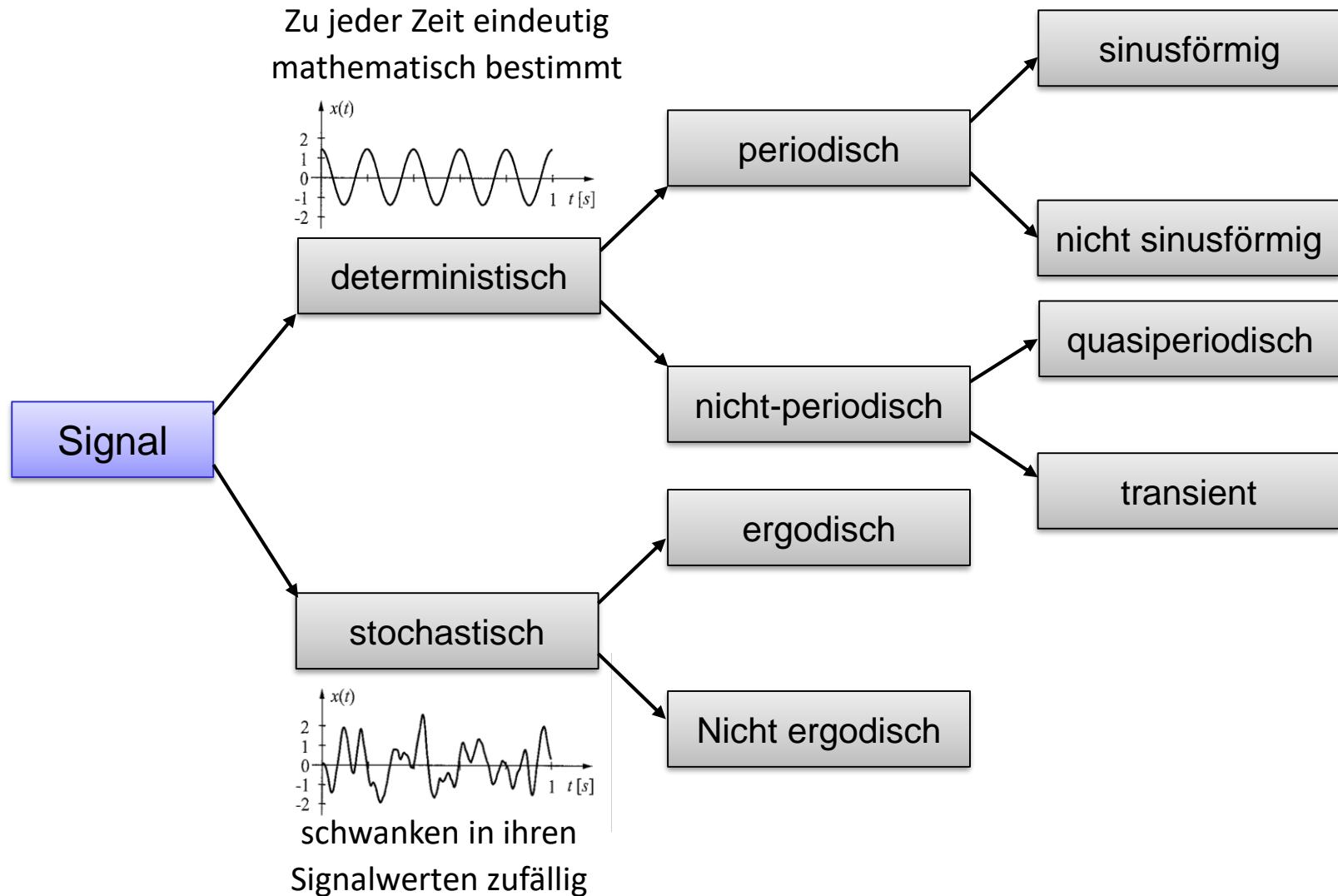
ist auf das willkürliche Einfangen (Trapping) und Freigeben bzw. die zufällige Generation und Rekombination der Ladungsträger in Halbleitern zurückzuführen.

Zufällige Messabweichungen haben einen **statistischen Charakter**, wobei sich bei Messungen die Messwerte um einen nicht bekannten wahren Wert verteilen.

Deshalb werden Messungen anstatt mit einem einzelnen Messwert immer durch ein **Intervall** angegeben, in dem sich der wahre Wert mit einer gewissen statistischen Wahrscheinlichkeit befindet.



Analoge Signalformen



Stochastische Signale

Stochastische Signale schwanken in ihren Signalwerten zufällig. Stochastische Signale können nur mit Mitteln der Statistik beschrieben werden.

spezielle Eigenschaft stochastischer Signale: **stationär**

Man spricht von einem stationären stochastischen Signal, wenn die betrachteten statistischen Kenngrößen sich nicht mit der Zeit verändern

spezielle Eigenschaft stationärer Signale: **ergodisch**

Man spricht bei einer Gruppe (Ensemble, Schar oder Stichprobe) von Signalen von ergodischen Signalen, wenn die betrachteten statistischen Kenngrößen nicht vom speziellen Gruppenmitglied abhängt.

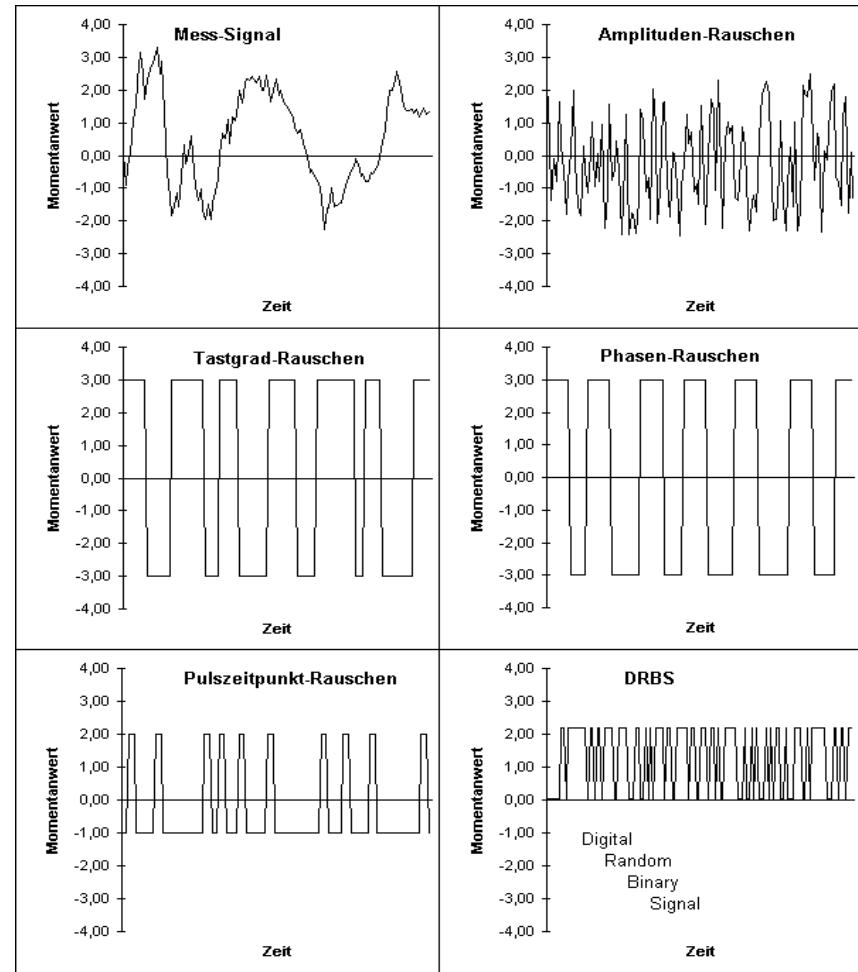
Bei ergodischen Systemen gilt: Schar-Mittelwert = Zeit-Mittelwert

Beispiel Würfel: Der Mittelwert und die Verteilung des Auftretens der einzelnen Werte ist bleibt, egal ob ich mit 100 Würfeln einmal würfle, oder mit einem Würfel 100 mal würfle.

Beispiele für stochastische Signale

Beispiele:

- Rauschen
- Datensignale, Sprach- oder Bildsignale, alle Signale, die Information beinhalten.
- Mess-Signale sind meist die Summe aus einem abhängigen (deterministischen) und einem zufälligen (stochastischen) Anteil.



Begriffe der Statistik

Grundgesamtheit

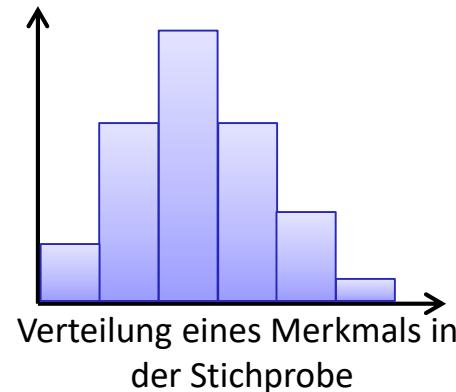
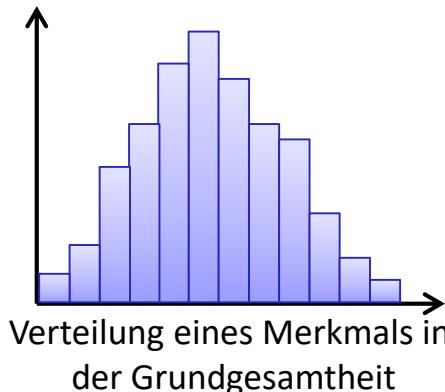
Menge aller potentiellen Untersuchungsobjekte für eine bestimmte Fragestellung.

Stichprobe

Teilmenge der Grundgesamtheit, sollte „statistisch repräsentativ“ für die Grundgesamtheit sein (anderenfalls: Repräsentativitätsfehler!)

Grundidee:

Die Verteilung eines Merkmals ist in der Grundgesamtheit und der Stichprobe gleich!

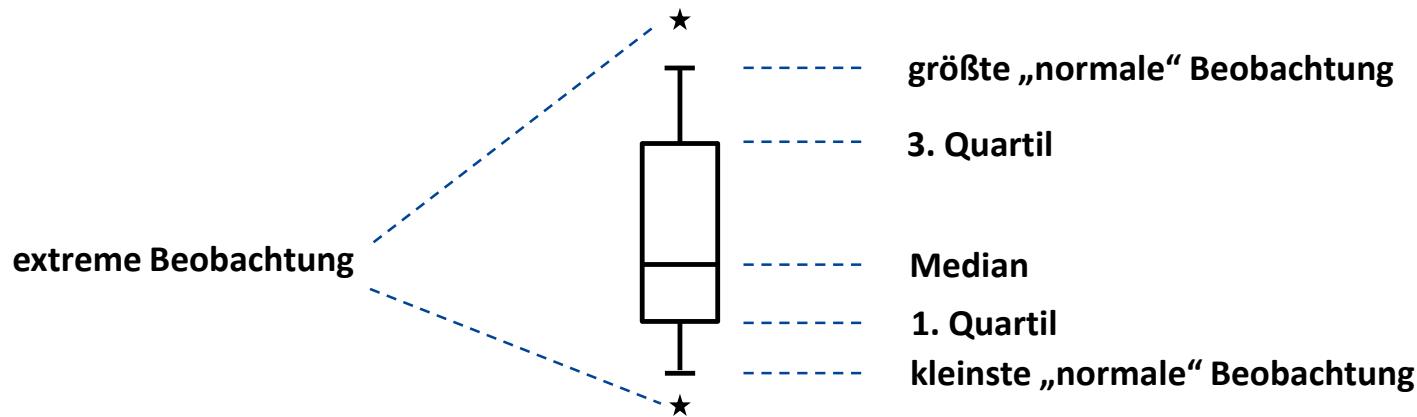


Deskriptive Statistik

Die deskriptive (beschreibende oder zusammenfassende) Statistik ist die Abbildung von bestimmten Merkmalen eines Datensatzes, auf einzelne Kennwerte. Durch Berechnung dieser Kennwerte, werden komplexe Daten mit einer kleinen Anzahl von Kennwerten beschrieben.

Lage- und Streuungsmaße (Kennzahlen):

Mittelwert, Varianz, Standardabweichung, Variationskoeffizient, Modalwert, Median, 1. Quartil, 3. Quartil, Quartilsdifferenz



Quantile / Perzentile

Werden Beobachtungswerte x_i **aufsteigend sortiert**, dann bezeichnet

$$x_\alpha = \begin{cases} x_{[n\alpha]}, & \text{falls } n\alpha \neq [n\alpha] \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{n\alpha} + x_{n\alpha+1}), & \text{falls } n\alpha \text{ eine ganz Zahl ist} \end{cases}$$

das α -Quantil x_α (mit $0 \leq \alpha \leq 1$).

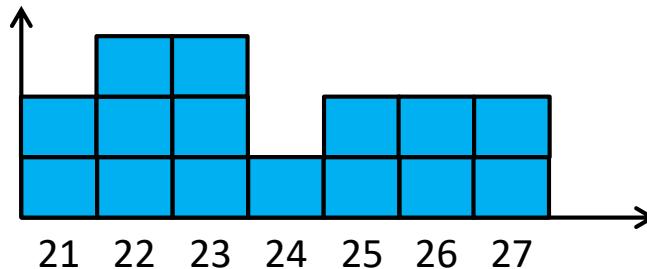
Es sind folgende Begriffe für verschiedene α -Werte definiert.

$$x_\alpha = \begin{cases} \text{Minimum,} & \text{für } \alpha = 0,00 \\ \text{unteres Quartil,} & \text{für } \alpha = 0,25 \\ \text{Median} & \text{für } \alpha = 0,50 \\ \text{oberes Quartil} & \text{für } \alpha = 0,75 \\ \text{Maximum} & \text{für } \alpha = 1,00 \end{cases}$$

Beispiel zu Quantilen

Sie beobachten das Alter der Studenten einer Vorlesung und erhalten folgenden aufsteigend sortierten Werte.

21, 21, 22, 22, 22, 23, 23, 23, 24, 25, 25, 26, 26, 27, 27



$$x_{0,00} = 21 \hat{=} \text{Minimum}$$

$$x_{0,25} = 22 \hat{=} \text{unteres / 1. Quartil}$$

$$x_{0,75} = 26 \hat{=} \text{oberes / 3. Quartil}$$

$$x_{1,00} = 27 \hat{=} \text{Maximum}$$

$$x_{0,10} = 21 \hat{=} 10\%-Quantil$$

$$x_{0,50} = 23 \hat{=} \text{Median}$$

$$x_{0,90} = 27 \hat{=} 90\%-Quantil$$

→ Im Gegensatz zum Mittelwert von $\bar{x} = 23,8$ liegt z. B. der Median bei $x_{0,50} = 23$

Verteilungen

- Deskriptive / Zusammenfassende Statistiken sind knapp und prägnant, allerdings auch sehr gefährlich, weil sie Datengrundlagen überdecken.
- Man sollte sich deshalb immer die **Verteilung** der Daten ansehen, also eine Beschreibung (oder Darstellung) der **Häufigkeiten**, mit der die einzelnen Werte austreten.
- Die gängigste Darstellungsmethode einer Datenverteilung ist das Histogramm.
- Ein normalisiertes Histogramm wird als **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** bezeichnet (engl. Probability density function, pdf)
- Histogramme und pdf werden meist als **Balkendiagramme** dargestellt.

Vorteile von Histogrammen

Histogramme sind besonders nützlich weil wie folgende Merkmale der deskriptiven Statistik sofort hervorheben:

Modus / Modalwert:

- Der häufigste Wert in einer Verteilung.

Verteilungsform:

- Wie sind die Werte um den Modalwert verteilt. Asymmetrisch oder symmetrisch und mit welchen Charakteristiken.

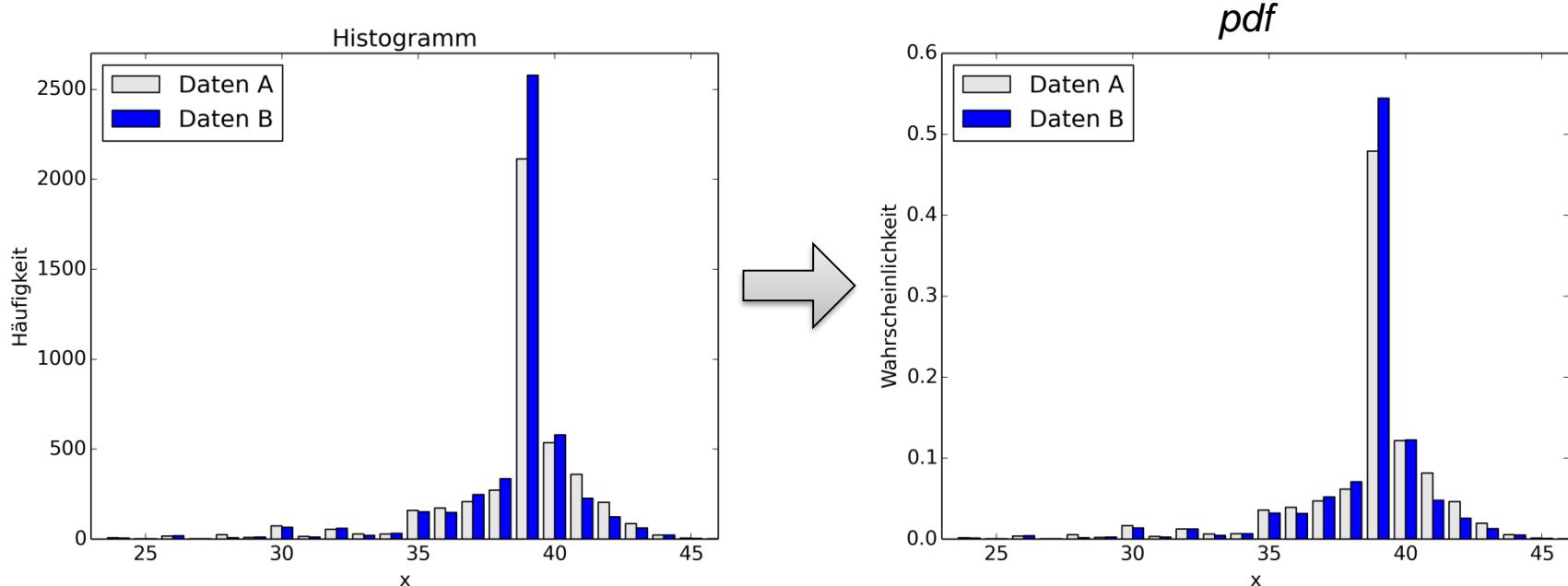
Ausreißer:

- Werte, die sehr weit vom Modus entfernt liegen heißen Ausreißer. Es gilt zu klären welche ungewöhnliche Fälle sind und welche mit Fehlern in der Datenerhebung zusammenhängen.

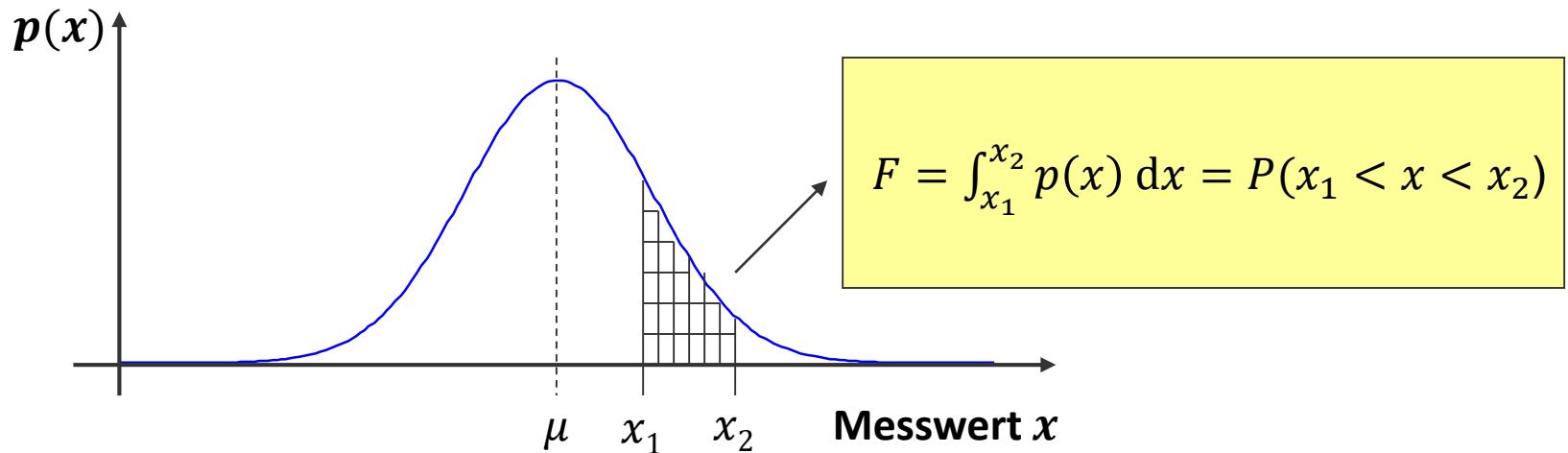
Nachteil von Histogrammen

Histogramme können zwar einzelne Merkmale einer Verteilung sichtbar machen, aber zum Vergleichen zweier Verteilungen sind sie nicht geeignet.

Eine etwas bessere Vergleichbarkeit liefern die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen** (oft kurz **Dichtefunktion**, **Wahrscheinlichkeitsdichte** oder nur **Dichte**, abgekürzt *WDF* oder *pdf* von engl. *probability density function*), die aus den Histogrammen durch Normierung auf die Gesamtzahl der Einträge der betreffenden Verteilung hervorgeht .



Wahrscheinlichkeit P für Auftreten eines Messwertes x im Intervall $x_1 < x < x_2$ ist durch die Fläche F gegeben



Es gilt: $P(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$ (Normierungsbedingung)

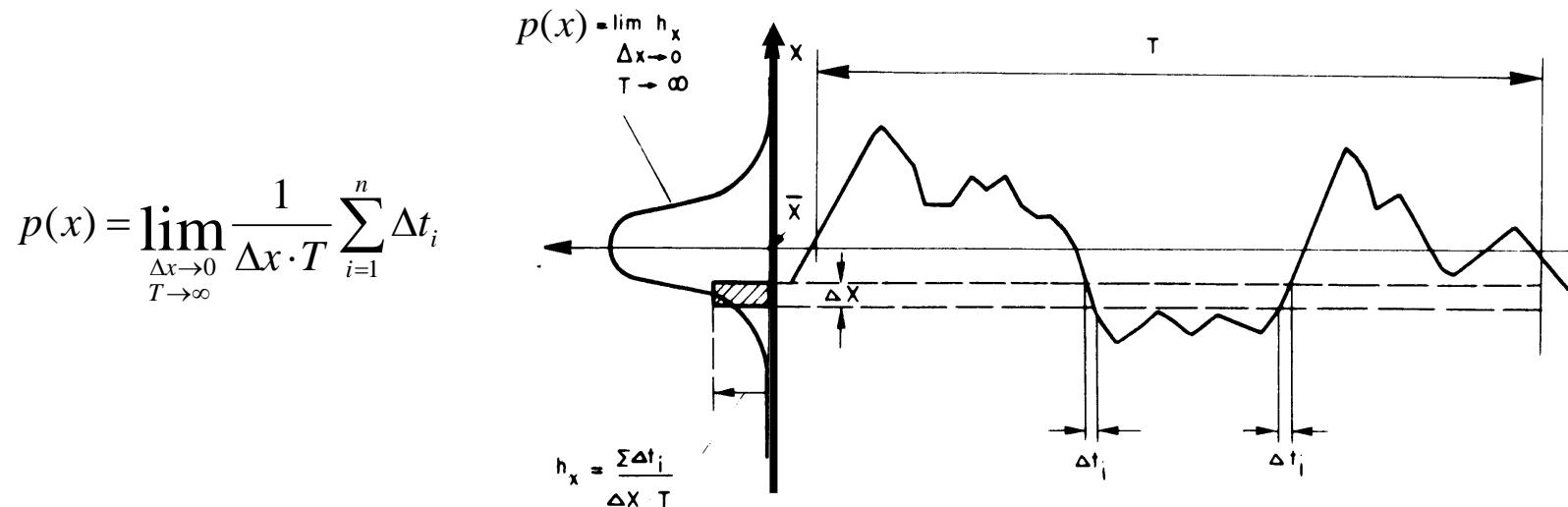
Erwartungswert: $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} [p(x) \cdot x] dx$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x)$

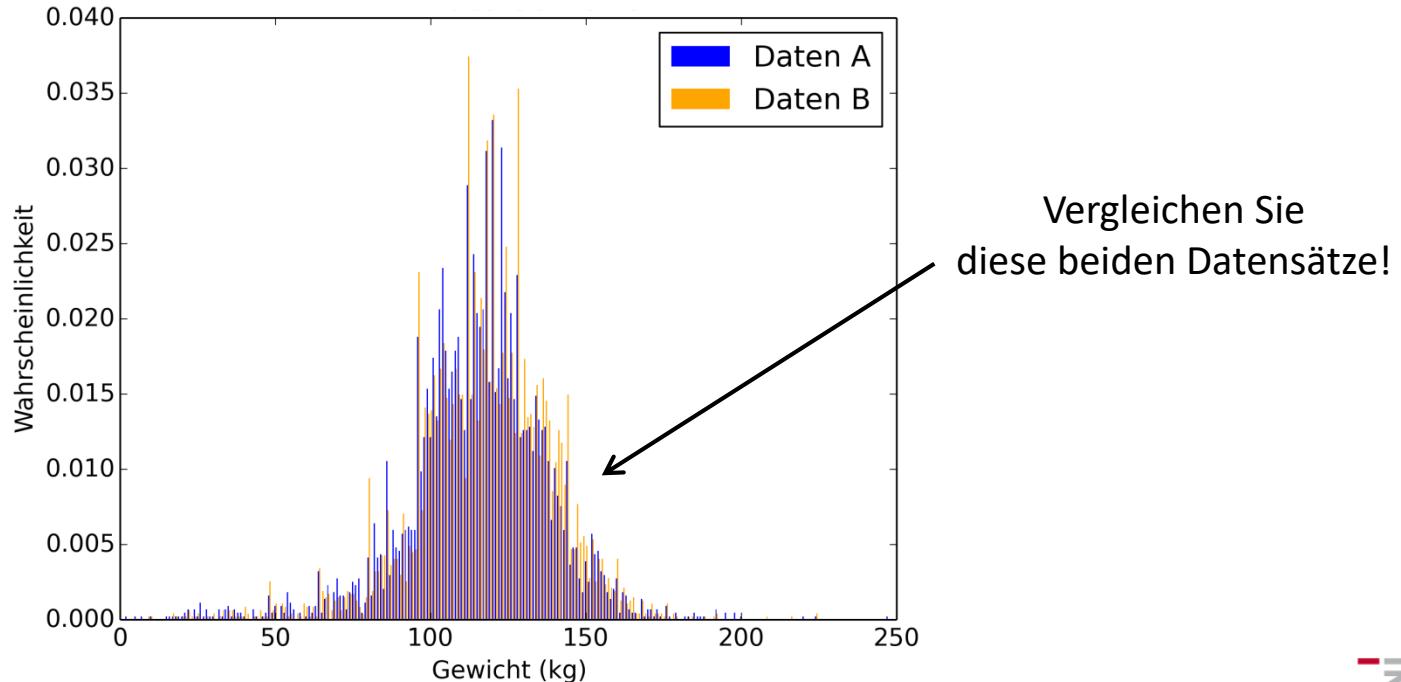
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x)$:

Gibt die durchschnittliche Häufigkeit für das Auftretens bestimmter Amplitudenwerte in einem stationären stochastischen Signal, oder den Rauschanteil $n(t)$ in einem zeitlich veränderlichen Signal.

Es wird näherungsweise bestimmt durch die Summe der Zeitintervalle, in der die Amplitude des stochastischen Signals innerhalb dieses spezifischen Amplitudenintervall liegt, normiert auf die gesamte zeitliche Länge des analysierten Signals.



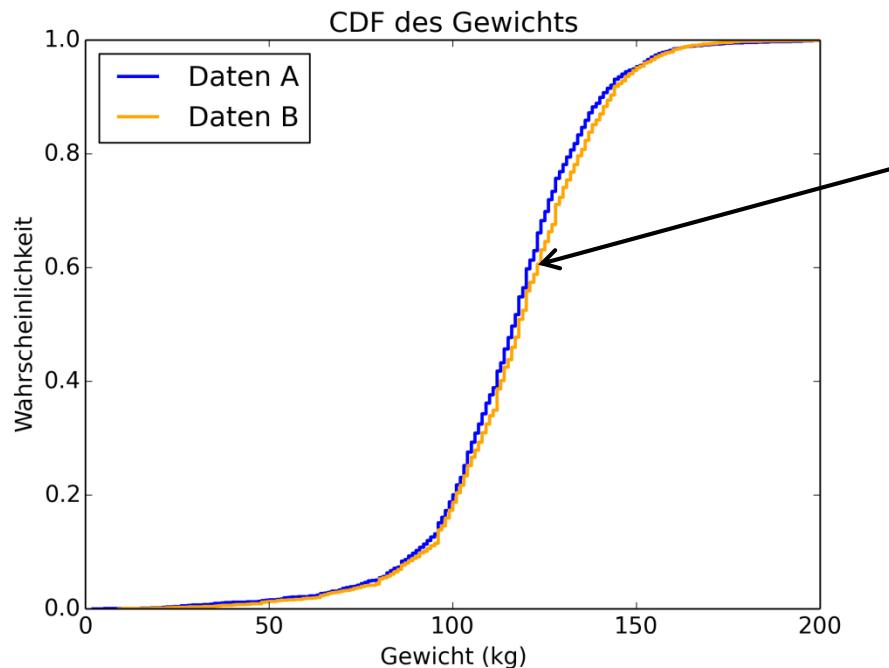
- Mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen lässt sich gut arbeiten, wenn die Anzahl der unterschiedenen Werte klein ist.
- Sobald die Anzahl an unterschiedenen Werten ansteigt, werden die einzelnen Wahrscheinlichkeiten kleiner und der Anteil an Zufallsrauschen steigt.
- Indem alle Werte aus einem Intervall zu einer gemeinsamen Klasse zusammengefasst werden lässt sich dieser Effekt abschwächen. Ideale Klasseneinteilungen sind aber teilweise schwer zu finden.



Kumulative Verteilungsfunktionen CDF

- Bei einer hohen Anzahl an Werten geht man daher oft zur kumulativen Verteilungsfunktion (**CDF**) über.
- Die kumulative Verteilungsfunktion $CDF(x)$ berechnet sich durch Aufsummieren der Werte der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x)$ zu:

$$CDF(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$



Über die gesamte Verteilung sind die Daten A etwas leichter, wobei der Unterschied oberhalb des Mittelwert etwas größer ausfällt.

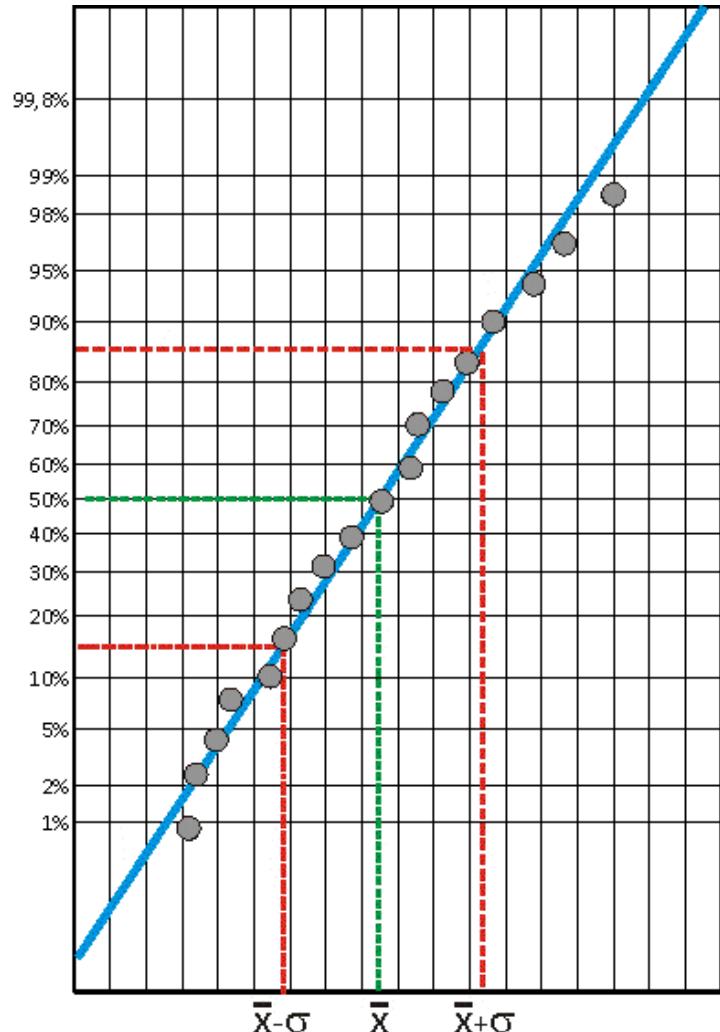
Exkurs: Wahrscheinlichkeitsnetz

- Ein Wahrscheinlichkeitsnetz ist eine CDF in der die y -Achse nach der sogenannten Errorfunktion (kommt gleich) skaliert ist.
- Die Messwerte werden als Histogramm aufgetragen, dann wird dieses auf die Anzahl der Messungen normiert (=Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion) und zur CDF aufsummiert. Das Ergebnis wird in das Wahrscheinlichkeitsnetz eingezeichnet.
- Ist die Verteilung Gaußverteilt, dann ergibt sich eine Gerade.
- Funktioniert auch schon relativ gut bei kleinen Stichproben

Vorteil:

Schnelle grafische Möglichkeit Messwerte ohne Rechnung auf Normalverteiltheit zu prüfen.

→ Wahrscheinlichkeitsnetzpapier gibt es zu kaufen.

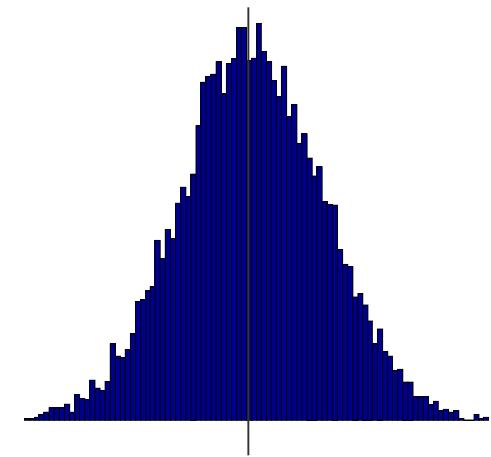


Mittelwert / Erwartungswert

- Nicht erfassbare / beeinflussbare Änderung von:
 - Messgerät, Umwelt, Beobachter
- Betrag und Vorzeichen nicht feststellbar
- Wiederholte Messungen streuen
- Der wahre Wert X_w berechnet sich aus dem Erwartungswert μ minus der systematischen Messabweichung X_s :

$$X_w = \mu - X_s$$

- Der Erwartungswert μ berechnet sich als Mittelwert einer unendlich lagen Messreihe x_i :
- $$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$
- Da der Erwartungswert μ somit nicht bestimmbar ist, muss auch der wahre Wert unbestimmbar bleiben.
 - Ein guter Schätzwert für den wahren Wert ist das **arithmetische Mittel** \bar{x} aus den N Stichprobenwerten x_i



Erwartungswert μ

Was ist der Unterschied zwischen ... Erwartungswert und Mittelwert?

Mittelwert

Bei einer Stichprobe von N Werten x_i ist der Mittelwert \bar{x} die Summe aller Werte, dividiert durch ihre Anzahl

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} (\mathbf{1}^T \mathbf{x}) \quad \text{mit } \mathbf{1}^T = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]_{1 \times N}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}_{1 \times N}$$

Der Mittelwert, welcher mit einer Stichprobe berechnet wird, ist selbst eine Zufallsgröße.

Es gilt:

Für sehr viele Messungen $N \rightarrow \infty$ nähert sich der Mittelwert dem Erwartungswert μ der Messgröße. In diesem Fall hat der Mittelwert die Eigenschaft, dass die Summe der linearen Abweichungen gegen Null geht!

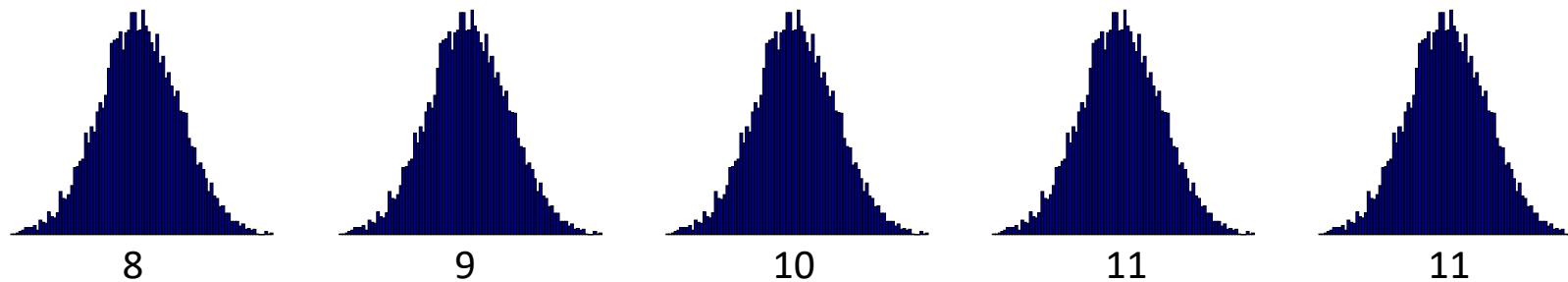
$$\sum_i^n (x_i - \bar{x}) = 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Beispiel zum Erwartungswert und Mittelwert

In einem Zufallsexperiment wirft man **60-mal** einen Würfel. X bezeichne die Anzahl der Sechser, die man dabei würfelt.

Der Erwartungswert ist demnach: $\mu = E(X) = 60 \cdot \frac{1}{6} = \mathbf{10}$

Nach 5 Durchläufen dieses Zufallsexperiments, erhält man folgende Stichprobe:



Daraus folgt für den Mittelwert: $\bar{x} = \frac{8+9+10+11+11}{5} = \mathbf{9,8}$

- Der **Mittelwert** einer Stichprobe (engl. *mean*) wird wie bereits beschrieben mit folgender Formel angegeben: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i$
- Der **Durchschnitt** (engl. *average*) ist eine von vielen deskriptiven Statistiken, die Sie wählen können, um den **typischsten Wert** einer Stichprobe beziehungsweise **eine zentrale Tendenz** zu beschreiben.

Beispiel:

- Äpfel haben beispielsweise alle eine ähnliche Größe. Wenn Sie also sechs Äpfel kaufen, die zusammen 1,5 kg wiegen, liegt die Vermutung nahe, dass jeder etwa 250 g wiegt.
- Kürbisse dagegen sind sehr unterschiedlich. Sie pflanzen z. B. Kürbisse in Ihrem Garten an. Nehmen Sie dann z. B. drei Zierkürbisse á 500 g, zwei Pie-Pumpkins á 1,5 kg und einen Atlantic Giant Kürbis mit 290 kg beträgt der Mittelwert dieser Stichprobe 49 kg. Würde Sie aber sagen, der durchschnittliche Kürbis in Ihrem Garten wiegt 50 kg, wäre das falsch oder zumindest irreführend.

→ Dieses Phänomen tritt auch bei verschiedenen Verteilungen und Ausreisern auf.

Da ein einzelner Wert nicht ausreicht um eine Übersicht über Stichproben zu geben
(→ siehe Beispiel der Kürbisse)
geht dies mit zwei Werten schon deutlich besser: **Mittelwert** und **Varianz**

Während der Mittelwert den Schwerpunkt der Verteilung angibt, ist es Aufgabe der Varianz die **Streuung** der Daten zu beschreiben.

Varianz

Bei unendlichen vielen Messwerten ist die Varianz definiert als:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

Der Term $x_i - \bar{x}$ beschreibt die Abweichung vom Mittelwert. Die Varianz ist also die **mittlere quadratische Abweichung** und ihre Symbolschreibweise ist deshalb auch σ^2 .

Standardabweichung I

- Die Standardabweichung σ wird als **positive** Wurzel der Varianz σ^2 definiert.
- Die Standardabweichung σ einer Messung ist stets unbekannt!
- Die Standardabweichung ist ein Maß für die Zuverlässigkeit der Messwerte innerhalb einer Messreihe.

Standardabweichung (für $N > 200$)

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

gilt nach DIN 1319 ab $N > 200$

Standardabweichung II

- Werden nur wenige Messungen durchgeführt ($30 < N < 200$) darf der Vertrauensbereich nicht mehr durch die Standardabweichung angeben werden.
- Stattdessen wird in diesem Fall der **mittlere Abweichung des Mittelwerts** $s_{\bar{x}}$ angegeben
 - **Grund:** der Mittelwert \bar{x} ist bei wenigen Messungen ($N < 200$) nur ein Schätzwert, der nicht mit dem wahren Wert übereinstimmen muss.

Überlegung:

- Aus einer unendlichen Menge an Messwerten werden n entnommen und der Mittelwert \bar{x}_k berechnet.
- Bei unendlich vielen Werten kann man dies theoretisch beliebig oft machen und daraus eine Wahrscheinlichkeit angeben, die beschreibt, mit welcher statistischen Sicherheit/Wahrscheinlichkeit sich der **geschätzte Mittelwert** \bar{x}_k innerhalb definierter Grenzen befindet.
- Man nennt diese Grenzen die **Standardabweichung/Streuung der Mittelwerte** bzw. der **mittlerer Messabweichung des Mittelwerts**.

Die empirische Standardabweichung $s_{\bar{x}}$ des Mittelwerts ergibt sich zu:

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$s_{\bar{x}}$ beschreibt die **Streuung des Mittelwerts** oder die **mittlere Messabweichung des Mittelwerts**. Hierbei sind x_i die Messwerte, \bar{x} der Mittelwert der Messwerte, N die Anzahl der Messungen und σ die Standardabweichung der Einzelmessung.

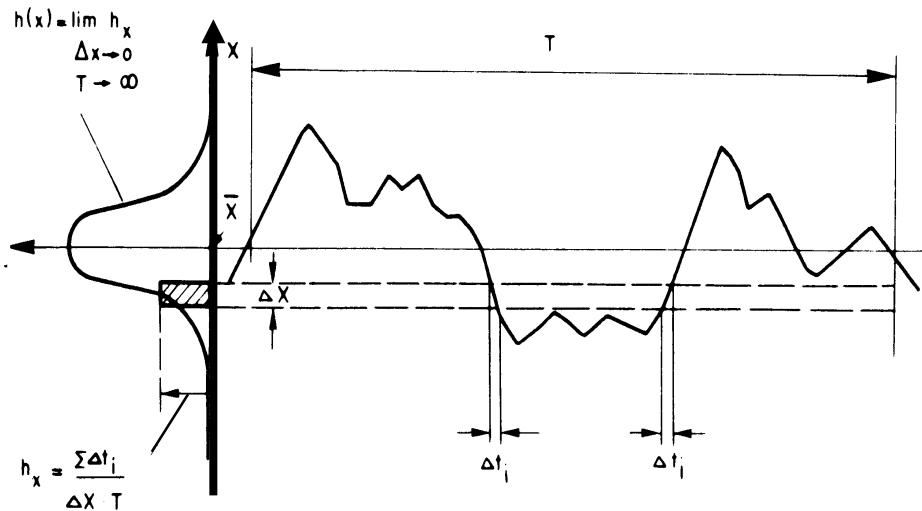
In der Praxis, für $N > 200$, ist die Standardabweichung der Mittelwerte um den Faktor $1/\sqrt{N}$ kleiner als die Standardabweichung der Einzelmessung.

Ein Messergebnis, das aus endlich vielen ($N > 200$) Messwerten besteht wird somit in der folgenden Form angegeben:

- $x = \bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$ 68,3 % der Messwerte
- $x = \bar{x} \pm \frac{2 \cdot \sigma}{\sqrt{N}} = \bar{x} \pm 2 \cdot s_{\bar{x}}$ 95,4 % der Messwerte
- $x = \bar{x} \pm \frac{3 \cdot \sigma}{\sqrt{N}} = \bar{x} \pm 3 \cdot s_{\bar{x}}$ 99,7 % der Messwerte

Amplitudendichte $h(x)$

$$h(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta x \cdot T} \sum_{i=1}^n \Delta t_i$$



Die Amplitudendichte $h(x)$ erlaubt die Berechnung der charakteristischen Kenngrößen eines stochastischen Signals in einfacher Weise:

Mittelwert:

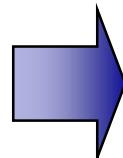
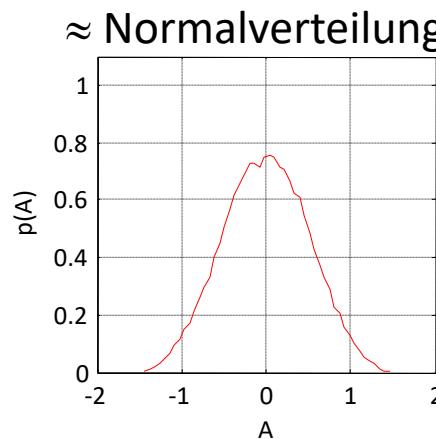
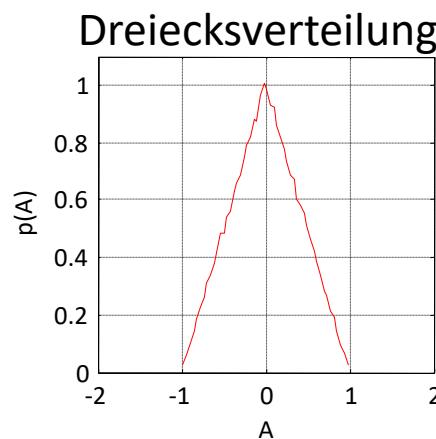
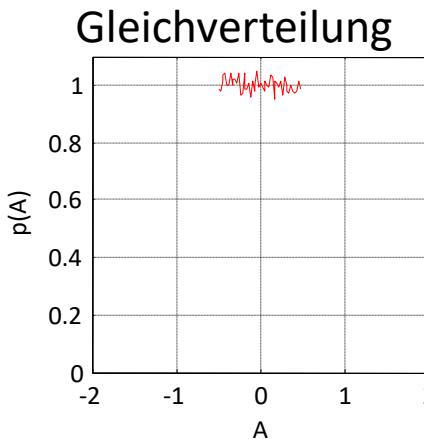
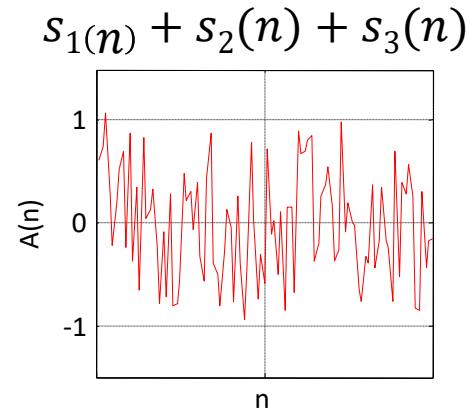
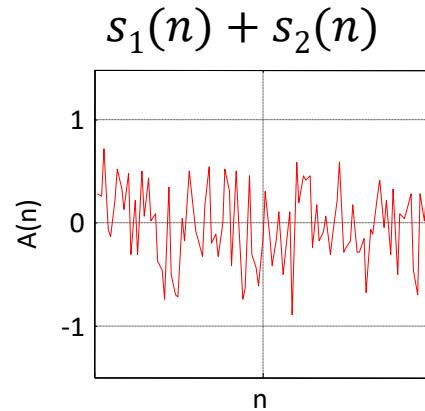
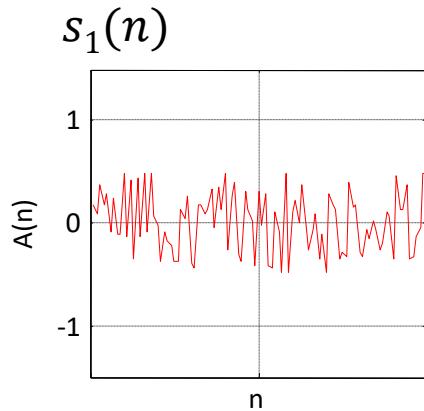
$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) x dx$$

Varianz:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) (x - \bar{x})^2 dx$$

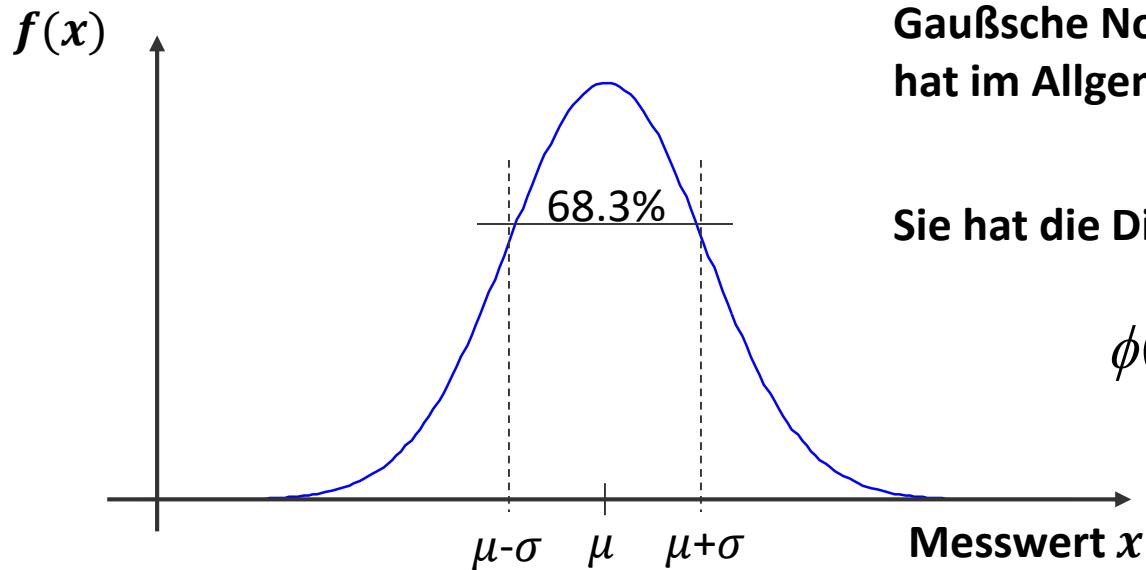
Mathematisch korrekt	Näherung für N<200
Mittelwert μ	\bar{x} = linearer Mittelwert =Schätzer für den Mittelwert
Standardabweichung σ	Schwankung s =Schätzer für die Standardabweichung
Varianz σ^2 $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(x - \mu)^2 dx$	Streuung s^2 =Stichprobenvarianz =empirische Varianz $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$
Im Idealfall hat der Mittelwert keine Standardabweichung	Mittlere Messabweichung $s_{\bar{x}}$ =Schwankung des Mittelwertes $s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \frac{s}{\sqrt{N}}$

Wie kommt es zur Gaußschen Normalverteilung?



Zentraler Grenzwertsatz der Statistik:

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Summe vieler statistisch unabhängiger Zufallsgrößen nähert sich einer Normalverteilung an



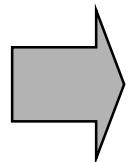
**Gaußsche Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$
hat im Allgemeinen $\mu \neq 0$ und $\sigma \neq 1$**

Sie hat die Dichte $f(x)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

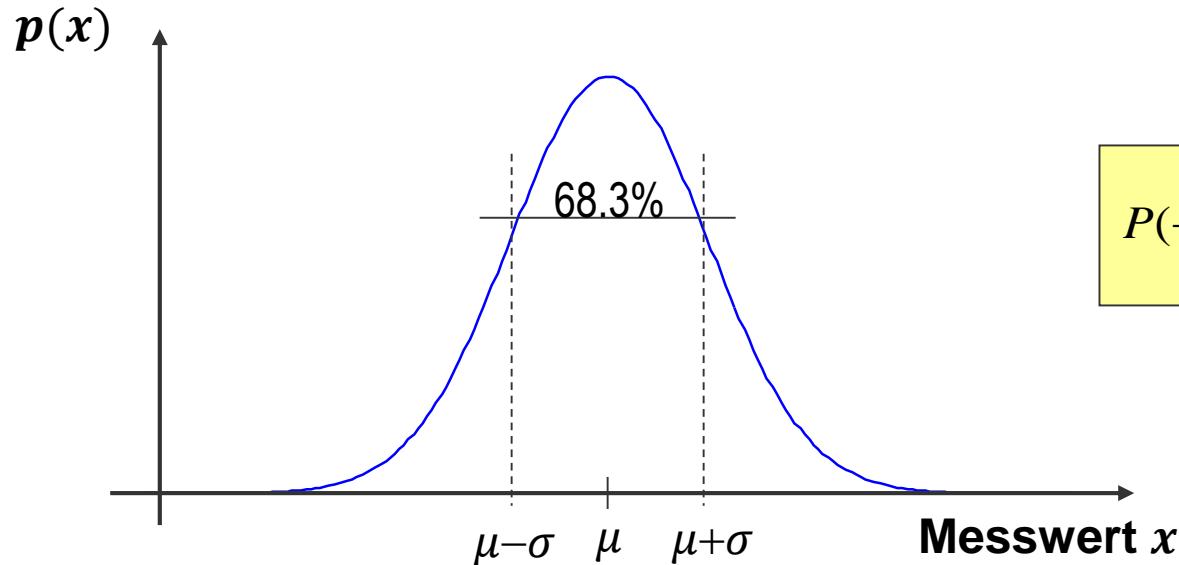
$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \phi(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad \Rightarrow \text{besitzt keine analytische Lösung}$$

→ Errorfunktion (Tabellenwerken)



$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]$$

Gaußsche Verteilungsfunktion II



$$P(-\delta < x - \mu < \delta) = \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Vertrauensfaktor t $t = \delta/\sigma$

Zufällige Messabweichung eines Einzelmesswertes x_i liegt mit einer Wahrscheinlichkeit P innerhalb des Intervalls $\pm t \cdot \sigma$ (nur gültig ab $N > 200$)

$t = \delta/\sigma$	0,5	0,67	1,0	1,65	1,96	2,58	3,0	3,3	6
P	38,3%	50%	68,3%	90%	95%	99%	99,73%	99,9%	1-3,4 ppm

Standardnormalverteilung $N(0,1)$

Wie erhält man die Verteilungsfunktion?

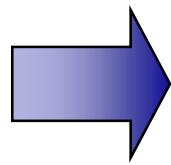
Im ersten Schritt normiert man eine gegebene Verteilungsfunktion $N(\mu, \sigma)$ mit $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ zur Standardnormalverteilung $N(0,1)$

Dichte der Standard-Normalverteilung $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$

Die Errorfunktion $\text{erf}(x) := \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2} dc$ (Werte in Tabellenwerken)

Die Verteilungsfunktion $\Phi(z)$:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(u) du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^z \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-c^2) dc = \frac{1}{2} \left(1 + \text{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right)$$



$$P(x \leq C_0) = F(x) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{C_0-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{C_0-\mu}{\sigma}\right) \quad (C_0 = \text{bel. Konstante})$$

Normierung von beliebiger Gaußverteilung auf
Standard-Normalverteilung

Normalverteilung Beispiel

$$P(x \leq C_0) = F(x) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{C_0-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{C_0-\mu}{\sigma}\right) \quad (C_0 = \text{bel. Konstante})$$

Gegeben:

Normalverteilung mit $\mu = 2$ und $\sigma = 5$

Gesucht:

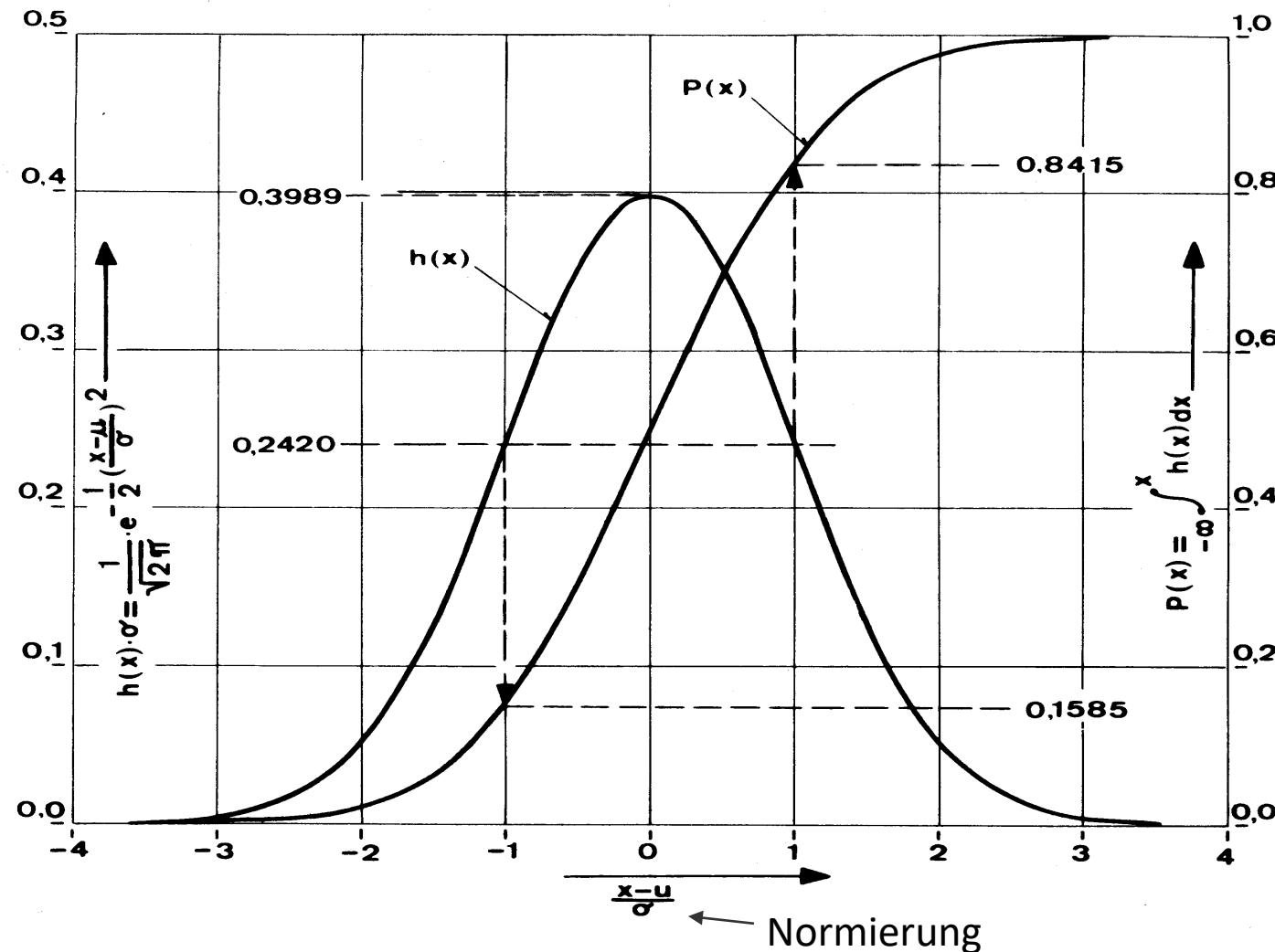
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert x kleiner 3 ist?

→ $C_0 = 3$ und $\mu = 2$ und $\sigma = 5$

→ $P(x \leq 3) = F(x) = P\left(\frac{x-2}{5} \leq \frac{3-2}{5}\right) = \Phi\left(\frac{3-2}{5}\right) = \Phi\left(\frac{1}{5}\right) = \underbrace{0,5793}_{\text{Wert laut Tabelle}}$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 58 %

Gaußsche Verteilungsfunktion, Errorfunktion



Φ Funktion ist nur für pos. Werte tabelliert, aber wegen Symmetrie gilt:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Beispiel 1: $\Phi(-0,63) = 1 - \Phi(0,63) = 1 - 0,7375 = 0,2625$

Beispiel 2: berechne $P(-C_0 < x \leq C_0)$

$$\begin{aligned} P(-C_0 < x \leq C_0) &= P(x < C_0) - P(x < -C_0) && \text{(ersetze } P(x < -C_0)) \\ &= P(x < C_0) - [1 - P(x < C_0)] && \text{(ausmultiplizieren)} \\ &= 2P(x < C_0) - 1 && (\Phi(x) \text{ Funktion einsetzen}) \\ &= 2 \cdot \Phi\left(\frac{C_0 - \mu}{\sigma}\right) - 1 \end{aligned}$$

Unbekannte Verteilungsfunktionen

Nicht jeder Zufallsprozess weist eine Gauß-Verteilung auf! (Beispiel: Würfeln mit 1 Würfel)

Bei unbekannter Verteilung können Wahrscheinlichkeitswerte nur geschätzt werden
Tschebyscheffsche Ungleichung (gilt für beliebige Verteilungsfunktionen)

$$P(|x - \mu| = |\Delta x| \geq \delta) \leq \sigma^2 / \delta^2$$

- Wahrscheinlichkeit P , dass der Betrag der Abweichung Δx eines Messwertes x vom Mittelwert μ größer als der Wert δ ist
- $1-P$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Messwert x im Intervall $\mu \pm \delta$ befindet
- σ^2 ist die Varianz der Messung

Beispiel:

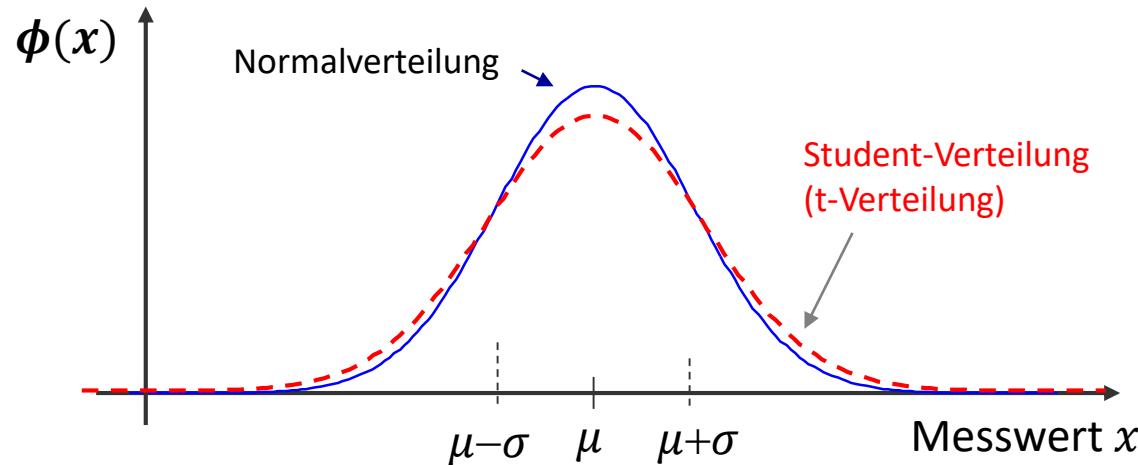
$$\delta = 2\sigma \rightarrow P \leq 25\%$$

d. h. auch wenn hier die Verteilungsfunktion völlig unbekannt ist, so ist dennoch zu folgern, dass ein Messwert x mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 75\%$ im Intervall $\mu \pm 2\sigma$ liegt.

Bemerkung: Liegt in einer Messreihe eine nicht Gauß-verteilte Verteilungsfunktion vor, so deutet dies in den meisten Fällen auf nicht kompensierte systematische Messabweichungen hin.

Verteilungsfunktion bei kleiner Stichprobenzahl

Bei kleiner Stichprobenzahl muss die Gaußverteilung durch die Student-Verteilung ersetzt werden (William Gosset, 1908). Diese entspricht einer um den Faktor t verbreiterten Normalverteilung. Die Studentverteilung ist von der Stichprobenanzahl abhängig und nähert sich für große N ($N > 200$) der Gaußverteilung.



zufällige Schwankung der Einzelmesswerte
= Vertrauensgrenze für Einzelmessung

$$\Delta x_i = t \cdot s$$

Vollständige Angabe eines Messergebnisses:
Schätzwert \bar{x} und Vertrauensgrenzen V

$$x = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Streuung des
Schätzwertes
für den
Mittelwert

Tabelle zur t-Verteilung

Abhängigkeit des Vertrauensfaktors t von der Anzahl der Messungen N und der gewählten statistischen Sicherheit P

$P = 68,3\% \hat{=} 1,0\sigma$		$P = 95\% \hat{=} 1,96\sigma$		$P = 99\% \hat{=} 2,58\sigma$		$P = 99,73\% \hat{=} 3,0\sigma$		
N	t	t/\sqrt{N}	t	t/\sqrt{N}	t	t/\sqrt{N}	t	t/\sqrt{N}
2	1,84	1,30	12,71	8,99	63,66	45,01	235,8	166,7
3	1,32	0,76	4,30	2,48	9,9	5,70	19,2	11,10
4	1,20	0,60	3,20	1,60	5,8	2,90	9,2	4,60
6	1,11	0,45	2,60	1,06	4,0	1,63	5,5	2,25
10	1,06	0,34	2,30	0,73	3,2	1,01	4,1	1,30
20	1,03	0,23	2,10	0,47	2,9	0,65	3,4	0,76
50	1,01	0,14	2,00	0,28	2,7	0,38	3,1	0,44
100	1,00	0,10	1,97	0,20	2,6	0,26	3,04	0,30
200	1,00	0,07	1,96	0,14	2,58	0,18	3,0	0,21
> 200	1,00	$\frac{1,00}{\sqrt{N}} \approx 0$	1,96	$\frac{1,96}{\sqrt{N}} \approx 0$	2,58	$\frac{2,58}{\sqrt{N}} \approx 0$	3,0	$\frac{3,00}{\sqrt{N}} \approx 0$

Bestimmung der Korrekturwerte t aus einer t-Verteilungs-Tabelle:

- 1) Zeile entsprechend der Anzahl der Messpunkte N auswählen
- 2) statistische Sicherheit P wählen (aus Aufgabe)
- 3) Gesuchten Korrekturwert t oder t/\sqrt{N} ablesen
- 4) Δx_i oder x ausrechnen

Zufällige Messabweichung: Beispiel

Messreihe ($N = 10$):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T/°C	21,8	15,6	19,5	20,1	16,0	19,3	19,8	16,0	21,6	21,5

Schätzwert des Mittelwertes von T : $T = 19,12$

Schwankung s : $s = 2,4142$

Zufällige Messabweichung $F_{Ti}(99\%)$ eines **Einzelmesswertes** T_i
bei einer statistischen Sicherheit von 99 % und $N = 10$; $t = 3,2$ (aus Tabelle zur t-Verteilung)

$$F_{Ti}(99\%) = \pm t \cdot s = \pm 3,2 \cdot 2,4142 = \pm 7,7254$$

Zufällige Messabweichung des Schätzwertes für den Mittelwert (statistischen Sicherheit von 99 %)

$$F_{Ti}(99\%) = \pm t \cdot s / \sqrt{N} = \pm 7,7254 / \sqrt{10} = \pm 2,443$$

Gesamtes Messergebnis $T = 19,12 \text{ } ^\circ\text{C} \pm 2,443 \text{ } ^\circ\text{C}$

Überprüfung der Gaußhypothese I

Methode: Empirisch

Quantitativ χ^2 -Test (Chi-Quadrat-Test)

- 1) Ermittlung von Mittelwert \bar{x} und Varianz s
- 2) Man teile die n Messwerte in K Klassen ($K \geq 4$), wobei in jedem Intervall mindestens 5 Messwerte liegen.
- 3) Man bestimme die Anzahl n_{ei} der Messwerte pro Klasse
- 4) Aus der Gaußverteilung (mit gleichem \bar{x} und s !) ermittelt man die Wahrscheinlichkeit P_i mit der die Werte in der i-ten Klasse liegen. Daraus bestimme man die Anzahl n_{oi} der Messwerte die bei angenommener Gaußverteilung im Mittel in diesem Intervall liegen würden
 $n_{oi} = n P_i$ $n = \text{Anzahl der Messungen}$
- 5) Man ermittle die Ausdrücke:

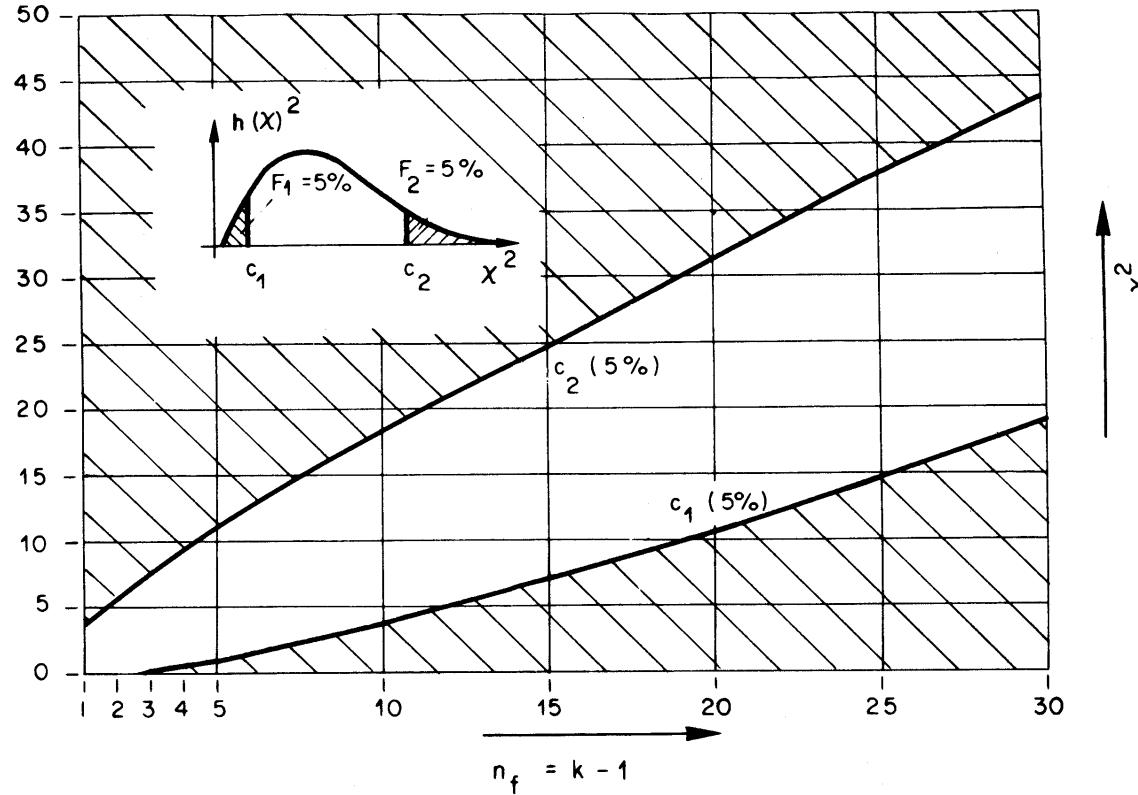
$$\chi^2 = \sum \frac{(n_{ei} - n_{oi})^2}{n_{oi}} \quad \text{und} \quad n_f = K - 1$$



Relative Abweichung der Messwerte von einer an n angepassten Gaußverteilung

Überprüfung der Gaußhypothese II

und entscheide anhand von unterem Bild über Annahme oder Verwerfung der These



Vertrauensgrenzen des Chi-Quadrat-Testes in Funktion des Freiheitsgrades $n_f = k - 1$, für die Signifikanzgrenzen 5%. k ist die Anzahl der beim Test verwendeten Klassen

Beispiel Histogramm/Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Beispiel: „Messergebnis“: Notenspiegel Klausur Messtechnik SS 04

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0	5
Anzahl	1	2	3	4	4	7	12	7	5	3	10

Gesamtzahl der Messungen: $N = 59$

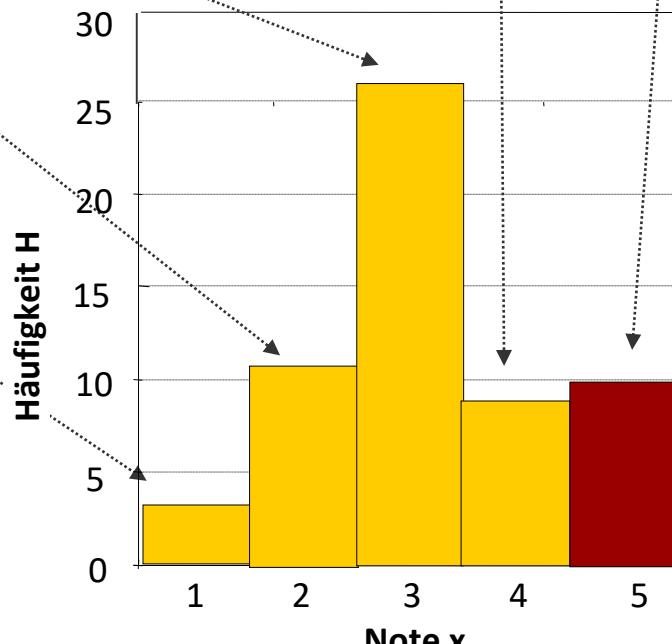
Klassenbreite: $\Delta x = 1,0$

relative Häufigkeit: $h(x) = H / N$

Häufigkeitsverteilung $h(x)$

wenn Anzahl N der Messungen $\rightarrow \infty$

und Klassenbreite $\rightarrow 0$



Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x)$:

$$p(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{H}{N \cdot \Delta x}$$

Bsp.: χ^2 -Test am Beispiel Messtechnik Klausur SS04 I

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0	5
Anzahl	1	2	3	4	4	7	12	7	5	3	10

- 1) Anzahl Teilnehmer $n = 58$;
 Mittelwert $\bar{x} = 3,2$; Varianz $\sigma = 1,08$

2) Anzahl der Klassen $K = 5$

3) Anzahl der Messwerte pro Klasse:
 $n_1 = 3$; $n_2 = 11$; $n_3 = 26$; $n_4 = 8$; $n_5 = 10$

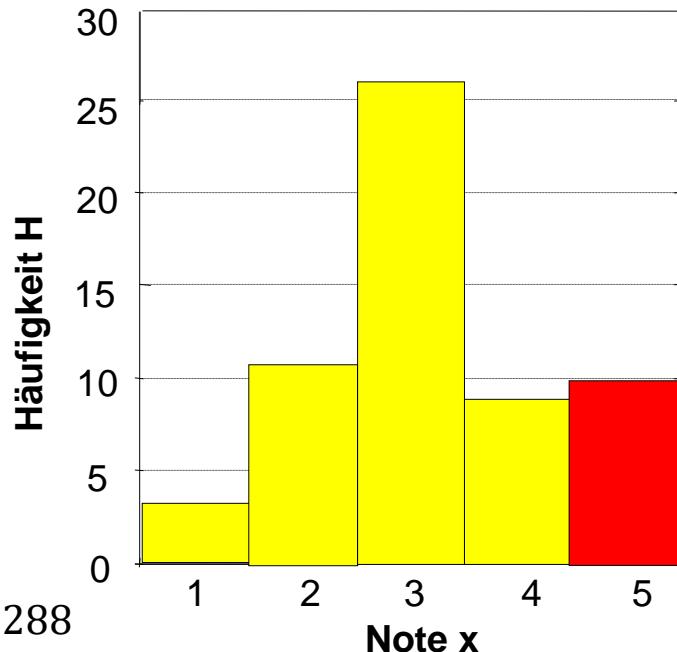
4) Wahrscheinlichkeit Pi errechnen:

$$P_1 = P(0,7 < x < 1,7) = P(x < 1,7) - P(x < 0,7)$$

mit $P(x \leq C_0) = \Phi\left(\frac{C_0 - \mu}{\sigma}\right)$

$$\rightarrow P_1 = \Phi\left(\frac{1,7 - 3,2}{1,08}\right) - \Phi\left(\frac{0,7 - 3,2}{1,08}\right) = 0,0329 - 0,0104 = 0,0288$$

Analog: $P_2 = 0,3036$; $P_3 = 0,3544$; $P_4 = 0,2405$; $P_5 = 0,0719$



Bsp.: χ^2 -Test am Beispiel Messtechnik Klausur SS04 II

Eine Gaußverteilung wäre also:

$$P_1 = 0,0288; P_2 = 0,3036; P_3 = 0,3544;$$

$$P_4 = 0,2405; P_5 = 0,0719$$

Mit Excel erhält man die Werte aus der Tabelle:

χ^2 ist also 15,67; $n_f = 4$.

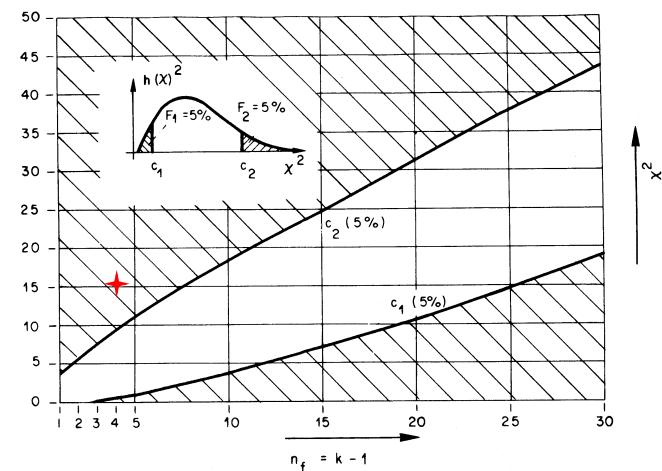
Dieser χ^2 Wert liegt im Bild über der Vertrauengrenze des χ^2 -Tests (vor 2 Folien) im grau gestrichelten Bereich.

Damit ist die Verteilung mit über 95 % Sicherheit nicht Gaußverteilt!

Beachte: Die Note 5 „sammelt“ alle Arbeiten ein, in denen weniger als 50% der Punkte erreicht wurden. Sie trägt auch mit 8,15 mehr als die Hälfte zur Summe 15,67 bei. Wären hier nur 6 oder weniger Einträge, so würde sich wieder eine Gaußverteilung ergeben.

Die Verteilung der erzielten Punkte hingegen ist Gaußverteilt.

n_{ei}	P_i	$n_{oi} = n \cdot P_i$	$(n_{ei} - n_{oi})^2 / n_{oi}$
3	0,0288	1,6704	1,0583
11	0,3036	17,6088	2,4804
26	0,3544	20,5552	1,4423
8	0,2405	13,9490	2,5371
10	0,0719	4,1702	8,1499
$\Sigma n_{ei}=n$		Σn_{oi}	$\Sigma(n_{ei}-n_{oi})^2/n_{oi} = \chi^2$
58		57,9536	15,6680



Fortpflanzung zufälliger Abweichungen I

Messergebnis $y = f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_m)$ aus m verschiedenen Messwerten x_n .
Für kleine Schwankungen ($s_n \ll |x_n|$) gilt bei Gaußverteilungen:

Schwankung $s_{\bar{y}}$ des Schätzwertes $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_m)$

Wobei die $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_m$ die Mittelwerte der Einzelmessungen darstellen.

$$s_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{n=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \cdot s_n^2}$$

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Diese Formel wurde früher Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz genannt. Sie betrifft jedoch nicht die Fortpflanzung von Messabweichungen (früher „Fehler“ genannt) sondern von Unsicherheiten („zufällige Messabweichungen“).

Fortpflanzung zufälliger Abweichungen II

Voraussetzung für das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz ist, dass die einzelnen Streuungen s_n unkorreliert sind.

Sind sie korreliert (mit der Korrelation ϱ), so ist dies bei der Berechnung der Schwankung des Schätzwertes zu berücksichtigen. Für zwei Messwerte x_1 und x_2 mit den zugehörigen Streuungen s_1 und s_2 und deren Kovarianz $u(x_1, x_2) = \varrho \cdot s_1 \cdot s_2$ ergibt sich beispielsweise:

$$y_i - \bar{y} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_{1i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_{2i}$$

→ $s_{\bar{y}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} s_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} s_2 \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \cdot u(x_1, x_2)$

→ $s_{\bar{y}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} s_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} s_2 \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \cdot \varrho \cdot s_1 \cdot s_2}$

Sind die beiden Streuungen unkorreliert, so ist $u(x_1, x_2) = 0$ und der letzte Term in der Wurzel fällt weg.

2.4 Messabweichungen – „Messfehler“

UNBEKANNTESYSTEMATISCHE MESSABWEICHUNGEN

Was machen wir mit den unbekannten systematischen Messabweichungen?

Die Behandlung der systematischen und der statistischen Messabweichungen wurde von Gauß eingeführt und ist seither Standard.

Auch Gauß erkannte und diskutierte die „unbekannte systematische Messabweichung“, konnte diese jedoch in seinen Formalismen nicht berücksichtigen.

In den letzten 20 Jahren wurde die Behandlung der unbekannten systematischen Messabweichung in der Messtechnik heftig diskutiert und dies führte zur Einführung des **GUM** (Leitfaden „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“).

Hierbei versucht man die Größe der unbekannten systematischen Messunsicherheit durch statistische Analyse des Messvorgangs (meist mit Monte Carlo Rechnungen) zu ermitteln (Methode A) oder mit anderen Mitteln (Methode B).

Für jede Einflussgröße wird sodann angegeben, mit welcher Methode sie bewertet wird und wie stark sie die gesamte Messunsicherheit beeinflusst.

Bei Kalibrierscheinen von akkreditierten Kalibrierlaboratorien, beispielsweise im Deutschen Kalibrierdienst (DKD), ist der GUM mittlerweile die verbindliche Grundlage zur Ermittlung der Messunsicherheit.

Beispiel aus der Praxis: Warum benötigt man die Angabe von Messunsicherheiten?

Fertigungsingenieur muss ein Werkstück mit einer Stufenhöhe von 36 mm mit einer Toleranz von 10 µm fertigen.

Gemäß der für ihn gültigen QS-Richtlinien darf die Messung um höchstens 1 µm „falsch“ sein.

Der Vertriebsingenieur eines mittelständischen badischen Messgeräteherstellers führt ihm ein optisches Messgerät für diese Aufgabe vor.

Die Messabweichung einer Einzelmessung eines genau kalibrierten Musterwerkstücks mit dem Demonstrationsgerät beträgt unter 1 µm.

Das Gerät wird bestellt, ausgeliefert und die erste Messung an dem kalibrierten Werkstück zeigt eine Messabweichung von 8 µm.

Was lief hier falsch?



Ziele und Bedeutung des GUM

- Einheitliches Verständnis für Messunsicherheit liefern
- Universelle Methode zur Messunsicherheitsbestimmung
- Messergebnisse vergleichbar und übertragbar machen
- Vergleichbarkeit von Messgeräten und Messverfahren
- Herleitung von Spezifikationen



Modellbildung der Messung

$$\text{Messgröße} \rightarrow Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

← Mit Unsicherheit behaftete Eingangsgrößen

Verlustleistung (Messgröße) eines
Widerstandes

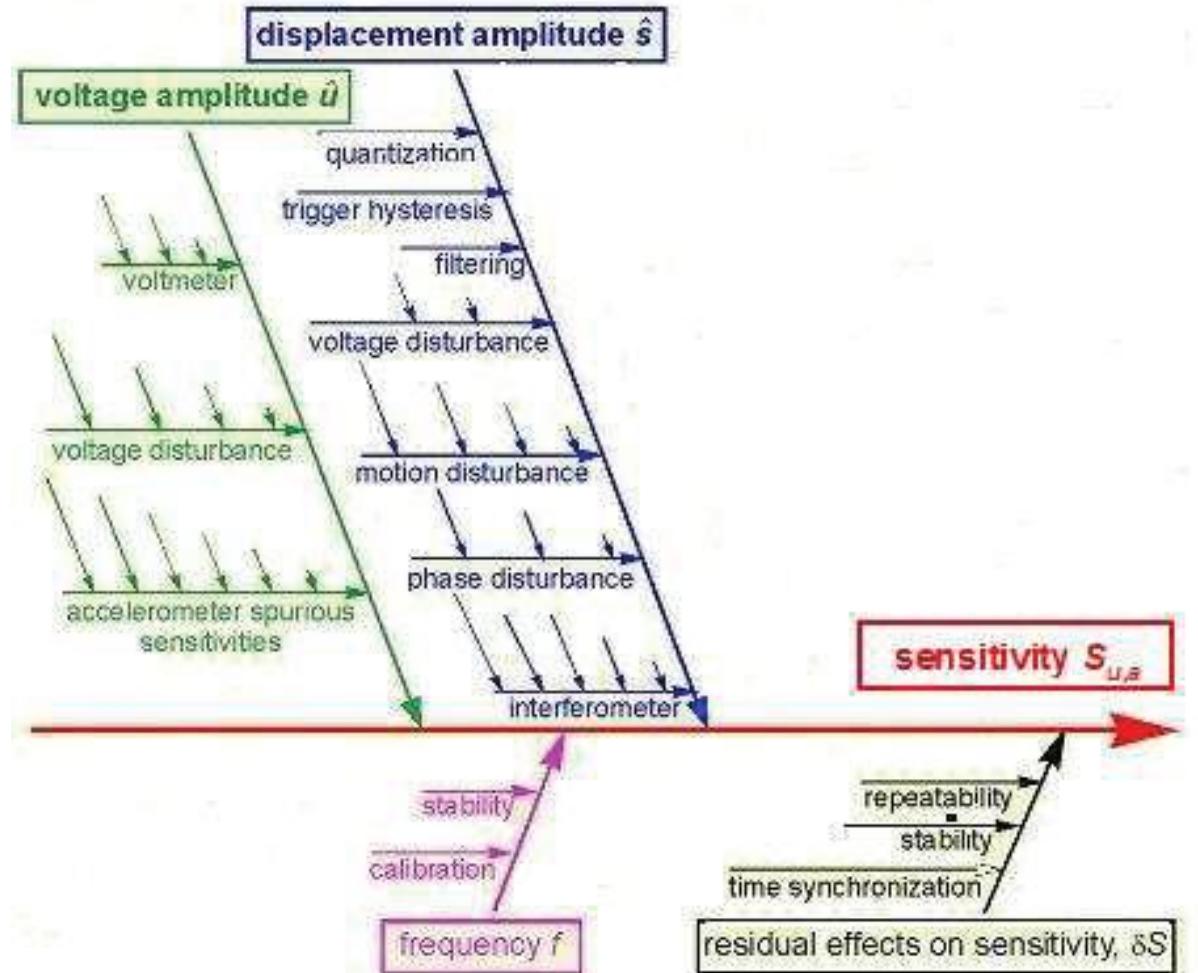
$$P = f(V, R_0, \alpha, T) = \frac{V^2}{R_0(1 + \alpha(T - T_0))}$$

Modellierung kann extrem
aufwändig sein
Identifizierung und
Erforschung einzelner Terme
kann jahrelange Forschung
bedeuten
Messunsicherheits-budget

Beispiel Laser-Doppler-Vibrometer

Ishikawa-Diagramm für eine Laser-Doppler-Vibrometer-Kalibrierung

H.-J. von Maartens, Evaluation of measurement uncertainty in calibrations of laser vibrometers, AIP 1600, 123 (2018).



Modellbildung der Messung

- Praxis benötigt einfachere Methode.
- Modell muss keinen physikalischen Bezug haben.
- GUM erlaubt z.B. Vergleich mit Normal, um die Messunsicherheit zu bestimmen.
- Oder das gesamte Messsystem und alle Störeinflüsse wird mit Monte Carlo Methoden simuliert
- Nach Korrektur der systematischen Messabweichung erhält man dann ganz einfach:

$$\begin{aligned}
 Y &= X_1 + X_2 + X_3 \\
 &= Y_0 + \Delta Y + \Delta X_N
 \end{aligned}$$

Messwert Wert Messabweichung Abweichung Normal

- ΔY kann man statistisch auswerten, ΔX_N nicht.
- Ermittlungsmethoden A und B

Ermittlungsmethode A

- Schätzen des Erwartungswertes μ mit dem Mittelwert von n Beobachtungen q_k

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k$$

- Empirische Standardunsicherheit

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}$$

- Standardabweichung des Mittelwertes

$$s(\bar{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{n}}$$

Normalverteilung:
 $u = t s(\bar{q})$

\Rightarrow Unsicherheit des Mittelwerts in Bezug auf Erwartungswert

Der Parameter t kann aus der Student-t-Verteilung berechnet werden und hängt von der Anzahl der Messungen ab:

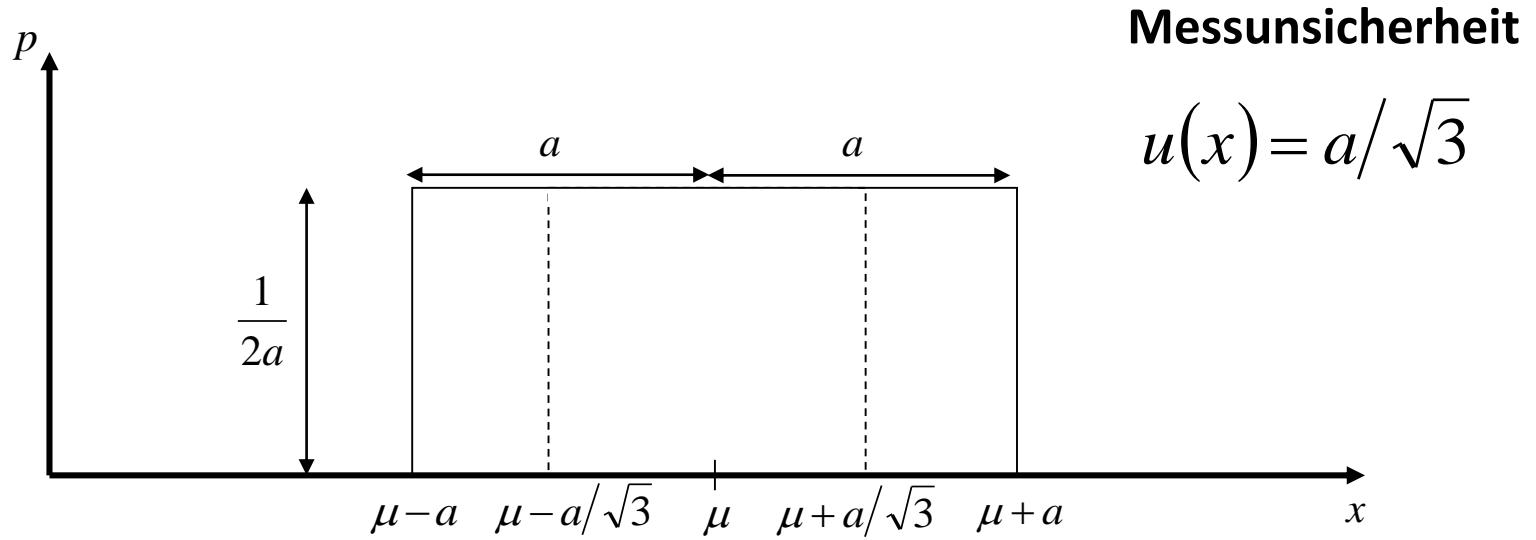
$t = 1$	für	$n = \infty$
$t = 1.01$	für	$n = 50$
$t = 1.05$	für	$n = 10$
$t = 1.32$	für	$n = 2$

Ermittlungsmethode B

- Unsicherheiten, die nicht aus statistischen Auswertungen gewonnen werden
 - Daten aus früheren Messungen
 - Angaben des Herstellers (Handbücher)
 - Kalibrierscheine
 - Erfahrungen und allgemeine Kenntnisse
- Eingangsgröße wird in der Regel eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zugeordnet, mit der die Unsicherheit bestimmt wird.

Ermittlungsmethode B

- Für die Eingangsgröße kann ein Bereich möglicher Werte angegeben werden.
- In der Regel: Annahme Gleichverteilung (Dreiecksverteilung, wenn Werte um den Mittelwert wahrscheinlicher sind)



Kombinierte Standardunsicherheit

Annahme: Lineare Abhängigkeit der Messgröße von den unkorrelierten Eingangsgrößen.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

c_i : Empfindlichkeitskoeffizienten

$$= \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i)$$

Typische Übungsaufgabe: Bestimme die kombinierte Standardunsicherheit von

$$P = f(V, R_0, \alpha, T) = \frac{V^2}{R_0(1 + \alpha(T - T_0))}$$

für bestimmte Werte und Unsicherheiten von den Eingangsgrößen.

Erweiterte Unsicherheit

Soweit wurde die zur Standardunsicherheit gehörende Überdeckungswahrscheinlichkeit (Normalverteilung 68%, Rechteckverteilung 58%) verwendet.

Für viele Einflussgrößen oder für dominante normalverteilte Einflussgrößen kann die erweiterte Unsicherheit mit einem Erweiterungsfaktor k bestimmt werden.

$$U = k u_c(y)$$

Es gibt 4 Möglichkeiten eine Verzögerung τ von 0.133 s mit einer Unsicherheit von ± 14 ms anzugeben:

- $\tau = 0.133$ s mit einer kombinierten Standardunsicherheit von $u_c = 14$ ms bei einem Erweiterungsfaktor $k = 1$.
- $\tau = 0.133(14)$ s bei einem Erweiterungsfaktor $k = 1$
- $\tau = 0.133(0.014)$ s bei einem Erweiterungsfaktor $k = 1$
- $\tau = (0.133 \pm 0.014)$ s bei einem Erweiterungsfaktor $k = 1$

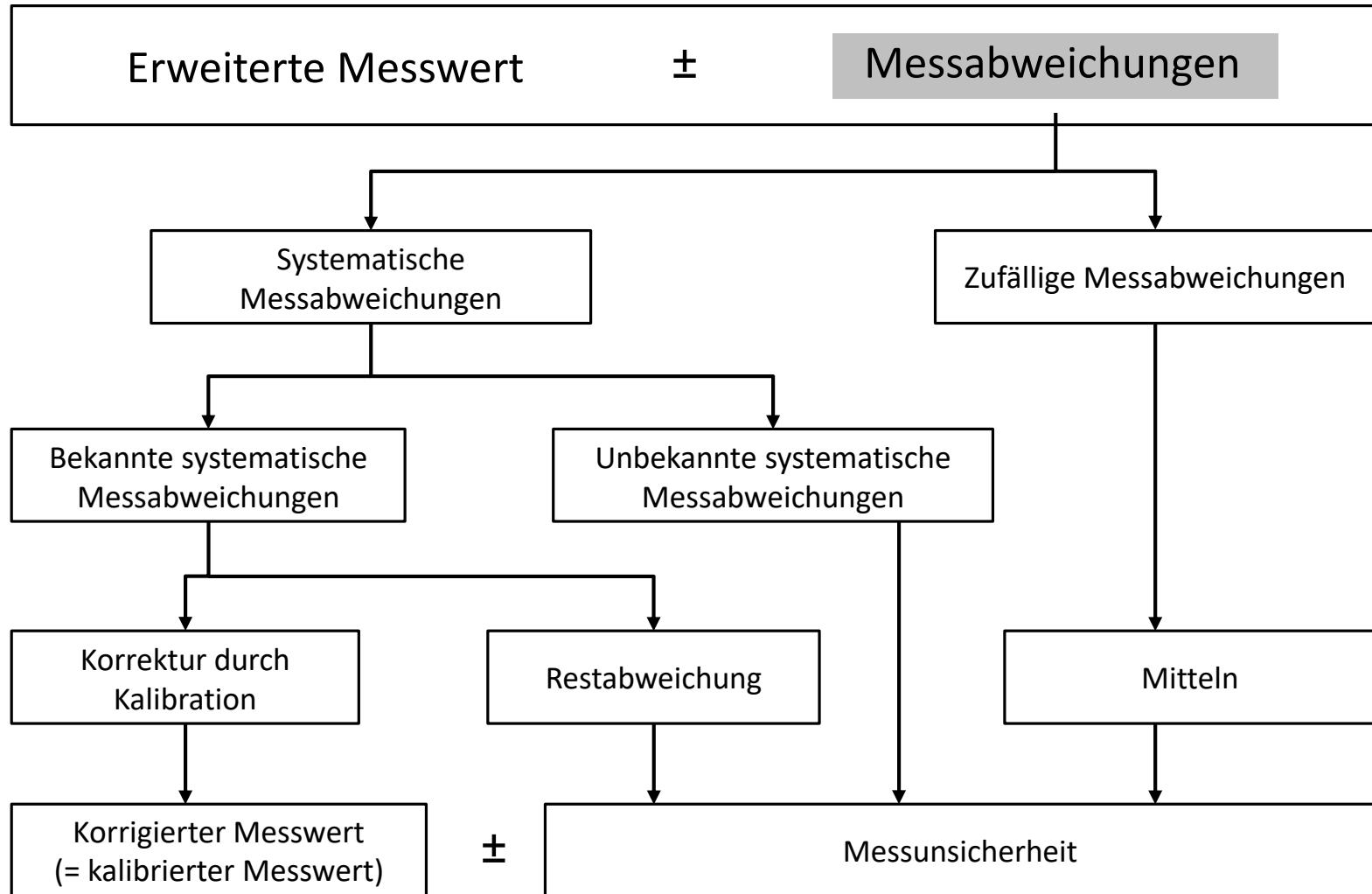
Häufig wird auch eine relative Unsicherheit angegeben:

- $\tau = 0.133$ s $\pm 10.5\%$ bei einem Erweiterungsfaktor $k = 1$

Zusammenfassung GUM

- Ein Messwert ist erst vollständig mit einer nach-vollziehbaren Angabe der Messunsicherheit.
- Der GUM ist eine weltweit akzeptierte Richtlinie zur Bestimmung von Messunsicherheit.
- Zuerst muss man nach einer Beziehung zwischen der Messgröße und den Eingangsgrößen suchen.
- Protokollieren Sie, welche Quereinflüsse Sie berücksichtigen und welche nicht.
- Ermitteln Sie die Schätzwerte der Eingangsgrößen mit Standardunsicherheiten.
- Bestimmen Sie die kombinierte und die erweiterte Unsicherheit.
- Protokollieren Sie Ihre Ergebnisse nach den Vorgaben des GUM.

Zusammenfassung



Die Wahrscheinlichkeit p nennt man Grad des Vertrauens oder Überdeckungswahrscheinlichkeit.

Messunsicherheitsintervall
in dem der (wahre) Wert
mit einer Wahrscheinlichkeit p liegt



- Die Messunsicherheit u ist eine reelle Zahl größer Null in der gleichen Einheit wie der Messwert.
- Messunsicherheitsgrenzen können auch unsymmetrisch zu dem Messwert liegen.

9. Signalverarbeitung

FOURIER-TRANSFORMATION



1807 reichte der französische Mathematiker Joseph Fourier (1768-1830) einen Aufsatz bei der französischen Akademie der Wissenschaft in Paris ein.

In diesem Aufsatz behandelte er eine mathematische Beschreibung der Wärmeleitung. Zur Lösung dieses Problems entwickelte Fourier in dem Aufsatz ein Rechenverfahren, das einen wichtigen Bereich der Mathematik begründete und heute ihm zu Ehren „Fouriertransformation“ genannt wird.

Dieses Rechenverfahren hatte unter anderem die erstaunliche Konsequenz, dass sich eine Vielzahl von gebräuchlichen Funktionen in unendlichen Folgen und Integralen von trigonometrischen Funktionen entwickeln lassen.

Der Aufsatz wurde von den größten und bekanntesten französischen Mathematikern seiner Zeit (Laplace, Poisson und Biot) begutachtet und abgelehnt.



Fourier, Jean Baptiste Joseph, * 1768 in Auxerre, +1830 in Paris.

Er führte ein bewegtes Leben in der Zeit der französischen Revolution, der napoleonischen Herrschaft und der Restauration.

Fourier war der Sohn eines armen Schneiders, besuchte zuerst eine Militär-, dann eine Ordensschule. Während der Revolution in Auxerre war er abwechselnd Gefangener und Präsident des Revolutionskomitees.

Mit Napoleon ging er nach Ägypten, wurde nach Napoleons plötzlichem und heimlichem Rückzug von den Engländern gefangen gehalten, konnte aber mit den Expeditionsberichten nach Frankreich zurückkehren und wurde 1802 in Grenoble Präfekt des Departement Isère. Dort vollendete er die lange vergeblich versuchte Trockenlegung der Sümpfe bei Lyon und rottete dadurch dort die Malaria aus.

Er verfasste die historische Einleitung zum Expeditionsbericht „Description de l'Egypte“. Die Absetzung und die vorübergehende Rückkehr Napoleons stürzten ihn in neue Schwierigkeiten. 1816 erhob Ludwig 18. bei Fouriers Wahl in die Académie des Sciences zunächst Einspruch. Schließlich aber wurde Fourier 1822 ständiger Sekretär der Académie.

Seit 1807 beschäftigte sich Fourier mit dem Problem der Wärmeleitung. 1822 erschien seine „Théorie analytique de la chaleur“.

Anfangs hatte Fourier Schwierigkeiten, seine Theorie gegen Einwände von Laplace, Poisson und Biot zu behaupten. Außer Franz Neumann und Lord Kelvin waren später Heaviside und Hamilton von Fouriers Buch begeistert, Hamilton stellte ihn über Lagrange, Laplace, Cauchy und Poisson (Whittaker, 1951). Heutzutage werden Fouriertechniken in allen Zweigen der Naturwissenschaften angewandt.



Fourier

- Die **Fourier-Transformation**, bzw. **Fourier-Reihe** zerlegt eine Funktion $x(t)$ in ihre spektralen Anteile (d.h. in Sinus-/Cosinus-Schwingungen mit unterschiedlicher Frequenz f).
Das Ergebnis dieser Zerlegung, die Funktion $X(f)$, heißt **Spektrum**
- **Periodische Funktionen** haben meist unendliche Energie, aber endliche Leistung.
Sie werden mittels der **Fourier-Reihe** transformiert.
- **Nicht-periodische Funktionen** mit endlicher Energie werden mittels der **Fourier-Transformation** transformiert.

periodische Funktion \Rightarrow **diskretes Spektrum**

aperiodische Funktion \Rightarrow **kontinuierliches Spektrum**

- **Nichtperiodische Funktionen** mit endlicher Energie werden mittels der **Fourier-Transformation** transformiert.
- Die FT liefert eine kontinuierliche Überlagerung von harmonischen Schwingungen, wobei das Spektrum $X(f)$ als **Dichtefunktion** der in $x(t)$ enthaltenen harmonischen Teilschwingungen aufgefasst werden kann.
- **Fourier-Transformation:**

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

- **Inverse Fourier-Transformation:**

$$x(t) \circ - \bullet X(f)$$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- Mathematisch saubere Formulierung:

Ist $x: R \rightarrow C$ absolut integrierbar ($\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$) und in jedem endlichen Intervall stückweise stetig differenzierbar, dann gilt für alle t in R ,

$$\frac{1}{2} [x(t-) + x(t+)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \quad \text{mit} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

- **Periodische Funktionen** mit endlicher Leistung lassen sich mittels der **Fourier-Reihe** als Linearkombination von Sinus- und Cosinusschwingungen ausdrücken.
- Es sei $x(t)$ eine periodische Funktion mit der Periode T_0 . Die zu $x(t)$ gehörige Fourier-Reihe ist definiert durch

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)]$$

mit $f_0 = 1/T_0$. Die Fourier-Koeffizienten a_k , b_k werden durch eine Integration über eine Periode bestimmt:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$$

- Schwingungen der Frequenz $f = k f_0$ nennt man k -te Harmonische.
 - $k = 1$: Grundschwingung ($f = f_0$)
 - $k = 2 (n)$: zweite (n -te) Harmonische mit $f = 2 f_0$ ($f = n f_0$)
 - $a_0/2$: Gleichanteil (DC-Anteil)

Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe

- Ersetzt man die Cosinus- und Sinusschwingungen durch die Ausdrücke

$$\cos(2\pi k f_0 t) = \frac{1}{2} \cdot \exp(j 2\pi k f_0 t) + \frac{1}{2} \cdot \exp(-j 2\pi k f_0 t)$$

$$\text{bzw. } \sin(2\pi k f_0 t) = \frac{1}{2j} \cdot \exp(j 2\pi k f_0 t) - \frac{1}{2j} \cdot \exp(-j 2\pi k f_0 t)$$

so erhält man die mathematisch eleganste Form der Fourier-Reihe

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [c_k e^{j 2\pi k f_0 t}]$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j 2\pi k f_0 t} dt$$

- Eine periodische Funktion kann demnach auch als gewichtete Summe von komplexen Schwingungen aufgefasst werden.

- Es gelten die Umrechnungsformeln:

$$c_0 = a_0/2$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

$$a_0 = 2c_0$$

$$a_k = c_k + c_{-k}$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k})$$

- Für reelle Funktionen $x_p(t)$ gilt:
$$c_k = c_{-k}^*$$
- In der Praxis ist es oft mühsam, die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k über eine Integration zu bestimmen.
Mit der FFT liegt mittlerweile in jedem Signalverarbeitungsprogramm eine viel einfachere und effizientere Methode zur Berechnung der Koeffizienten vor.

Fourier-Transformation

Theoreme der Fourier-Transformation

Linearität: $ax(t) + by(t)$ ◦ - • $aX(f) + bY(f)$

Zeitverschiebung: $x(t - T)$ ◦ - • $X(f) \cdot e^{-j2\pi fT}$

Modulation: $x(t) \cdot e^{j2\pi f_c t}$ ◦ - • $X(f - f_c)$

Ähnlichkeitssatz: $x(at)$ ◦ - • $\frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$

Differentiation im Zeitbereich: $\frac{d}{dt} x(t)$ ◦ - • $j \cdot 2\pi f \cdot X(f)$

Faltung: $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$ ◦ - • $X(f) \cdot Y(f)$
..... $x(t) \cdot y(t)$ ◦ - • $X(f) * Y(f)$

Konjugation: $x^*(t)$ ◦ - • $X^*(-f)$

Dualität: $X(t)$ ◦ - • $x(-f)$

Theorem von Parseval: $W = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) \cdot dt = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \cdot d\omega$

Da die Theoreme schon aus der Mathematik bekannt sind, habe ich eine Wiederholung ihrer Herleitung aufs Netz gestellt: **Wiederholung 3-Theoreme_der_Fouriertransformation**

Beispiele Linearität:

$$a \cdot x(t) + b \cdot y(t) \circ -\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} [a \cdot x(t) + b \cdot y(t)] \cdot e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt + b \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

→ $ax(t) + by(t) \circ -\bullet aX(f) + bY(f)$

Existenz des Fourier-Integrals

Schon Zeitgenossen von Fourier bemerkten, dass zwar
eine **periodische Funktion** in eine **Fourier-Reihe** zerlegt werden kann und
eine **nichtperiodische Funktion** endlicher Energie **Fourier-transformiert** werden kann,
jedoch eine **Summe** aus einer periodischen und einer nichtperiodischen Funktion
endlicher Energie weder in eine Fourier-Reihe zerlegt werden kann, noch Fourier-
transformiert werden kann.

Existenz des Fourier-Integrals



Dirichlet zeigte, dass eine Reihe mathematischer Probleme bei der Fourier-Transformation auftreten. Er zeigte, dass die Signale keine Fourier-Transformierte besitzen, wenn sie:

- eine unendliche Menge von lokalen Maxima und Minima innerhalb eines endlichen Intervall aufweisen,
- eine unendliche Menge von Sprungstellen innerhalb eines endlichen Intervall aufweisen, oder
- Nicht absolut integrierbar sind.

Die ersten beiden Einschränkungen stören für eine praktische Anwendung kaum, da sie nur einige verrückte Funktionen ausschließen, wie

$$x(t) = \sin(1/t),$$

oder
$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für irrationale } t \\ 1 & \text{für rationale } t \end{cases}$$

Existenz des Fourier-Integrals



Die dritte **Dirichlet** Bedingung verursacht jedoch große Probleme. Sie fordert, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Die dritte **Dirichlet** Bedingung fordert, dass Summe der Amplituden eines gleichgerichteten Signals eine endliche Zahl ergibt. Diese Einschränkung ist fast das gleiche wie die Forderung, dass das Signal eine endliche Energie oder eine mittlere Leistung von Null besitzt.

Dadurch werden eine Menge von Signalen ausgeschlossen, wie DC-, Sinus-Funktionen, Stufen, Rampen, e-Funktionen, und so weiter.

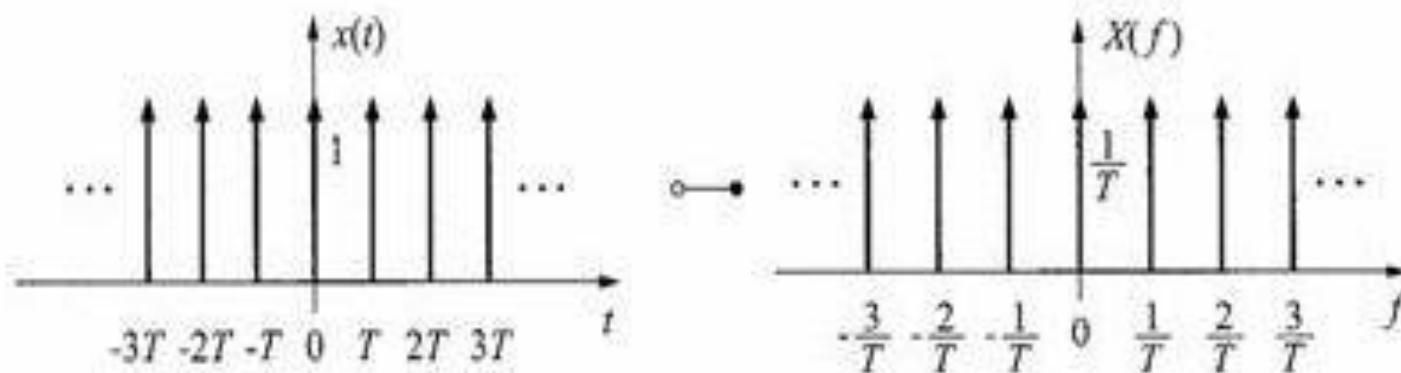
Die Erweiterung mit dem Dirac-Puls löst das Problem für einige Funktionen, aber nicht für alle.

Die dritte **Dirichlet**-Bedingung verursachte kaum Probleme, solange man sich auf passive Systeme beschränkte.

Allerdings stört sie dramatisch, wenn Sie aktive Filter, Regler, Filter mit Rückkopplung oder Systeme mit Schaltern entwickeln. In diesem Fall müssen Sie eine erweiterte Transformation (Laplace-Transformation oder z-Transformation) einsetzen.

Transformation einfacher Zeitfunktionen

- Abtastfunktion / Dirac-Kamm:



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad X(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k \frac{1}{T_s})$$

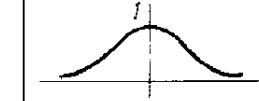
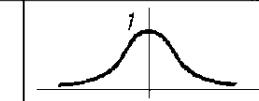
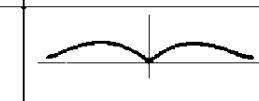
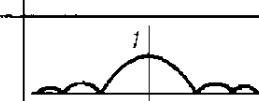
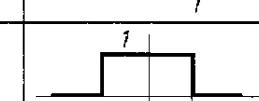
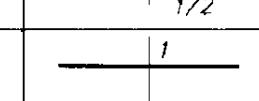
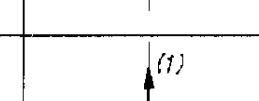
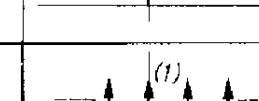
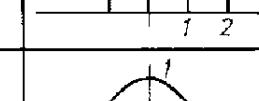
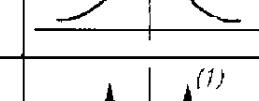
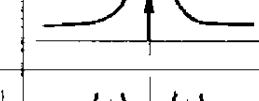
Das Spektrum eines periodischen Dirac-Impulses ist wiederum ein periodischer Dirac-Impuls, wobei folgende Unterschiede zu beachten sind:

1. Die Periode im Zeitbereich ist T_s , im Frequenzbereich $f_s = 1/T_s$.
2. Das Gewicht der einzelnen Dirac-Impulse im Zeitbereich ist 1, im Frequenzbereich $1/T_s$.

Häufig wird der periodische Dirac-Impuls im Zeitbereich mit $d_T(t)$ und im Frequenzbereich mit $D_T(f)$ bezeichnet, oder $\mathbb{W}(t)$ und $\mathbb{W}(f)$.

Transformation einfacher Zeitfunktionen

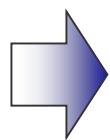
Tabelle mit elementaren Funktionen und deren Transformierten:

$s(t)$	$S(f)$	$ S(f) $
$\frac{1}{T} e^{-t/T}$ Exponentielles Zeitimpuls	$\frac{1}{1+j2\pi Tf}$	
$\frac{1}{2T} e^{- t /T}$ Doppel-exponentielles Zeitimpuls	$\frac{1}{1+(2\pi Tf)^2}$	
$\frac{1}{2T} \operatorname{sgn}(t) e^{- t /T}$	$-j \frac{2\pi Tf}{1+(2\pi Tf)^2}$	
$\operatorname{rect}(t)$ Rechteckimpuls	$\operatorname{si}(\pi f)$	
$\operatorname{si}(\pi t)$ Si-Funktion	$\operatorname{rect}(f)$	
$\delta(t)$ Dirac-Stoß	1	
1 Gleichstrom	$\delta(f)$	
$\cdots \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \cdots$ $1 \quad 2$ Dirac-Stoßfolge	$\cdots \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \cdots$ $1 \quad 2$ $\operatorname{III}(f)$	
$e^{-\pi t^2}$ Gauß-Impuls	$e^{-\pi f^2}$	
$2 \cos(2\pi F t)$ cos-Funktion	$\delta(f+F) + \delta(f-F)$	
$\epsilon(t)$ Sprungfunktion	$\frac{1}{2} \delta(f) - j \frac{1}{2\pi f}$	
$4 \epsilon(t) \cdot \cos(2\pi F t)$ geschaltete cos-Funktion	$\frac{-j}{\pi} \frac{2f}{f^2 - F^2}$	

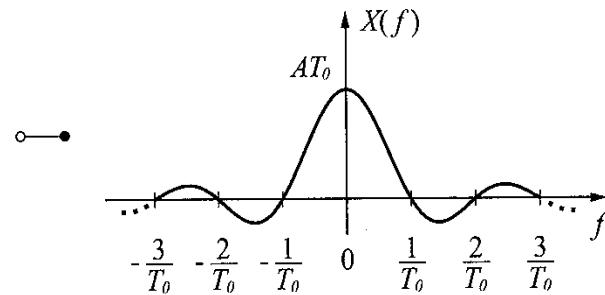
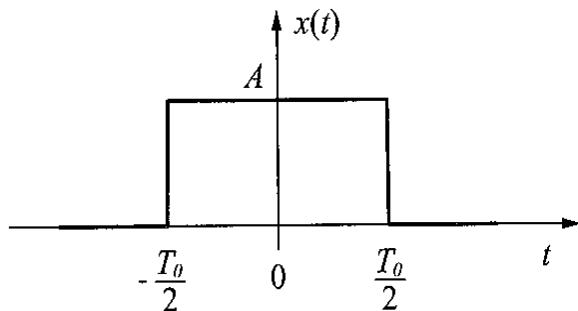
Fourier-Transformation der Rechteckfunktion

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) \circ -\bullet \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f} \left(e^{-j\pi f T_0} - e^{j\pi f T_0} \right) = \frac{1}{\pi f} \sin(\pi f T_0) \quad \text{wg. } \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$



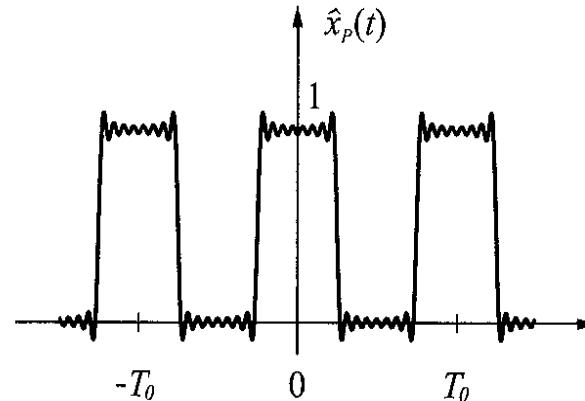
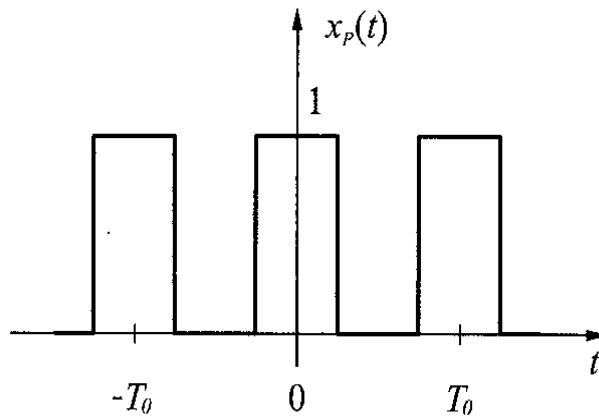
$$x(t) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) \circ -\bullet X(f) = A \cdot T_0 \cdot \text{si}(\pi f T_0) \quad \text{mit si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$



Fourier-Reihe - Beispiel

Die unten gezeigte Rechteckschwingung kann wie folgt in eine Fourier-Reihe zerlegt werden:

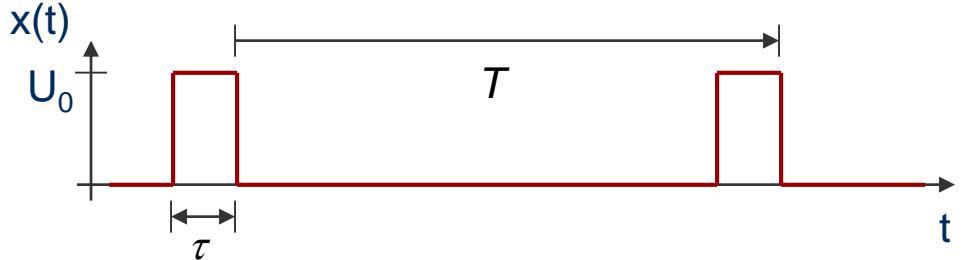
$$x_p(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{1 \cdot \pi} \cos(2\pi f_0 t) - \frac{2}{3 \cdot \pi} \cos(2\pi 3f_0 t) + \frac{2}{5 \cdot \pi} \cos(2\pi 5f_0 t) + \dots$$



- In anderen Worten: Die Rechteckschwingung setzt sich zusammen aus einem DC-Anteil von 0.5, einer cosinusförmigen Grundschwingung mit der Amplitude $2/(\pi)$, etc. Bemerkenswert ist, dass (außer $\cos(2\pi 0f_0 t)=1$) alle geraden Harmonischen des Signals, $\cos(2\pi 2f_0 t)$, $\cos(2\pi 4f_0 t)$, ... Null sind.
- Rechts ist die Approximation der Rechteckschwingung durch die ersten 15 Harmonischen dargestellt. Das Überschwingen bei den Flanken um ca. 9% wird als Gibbsches Phänomen bezeichnet.

Fourier-Reihendarstellung – Beispiel

Beispiel: periodischer Rechteckpuls ($\tau/T = 10$)

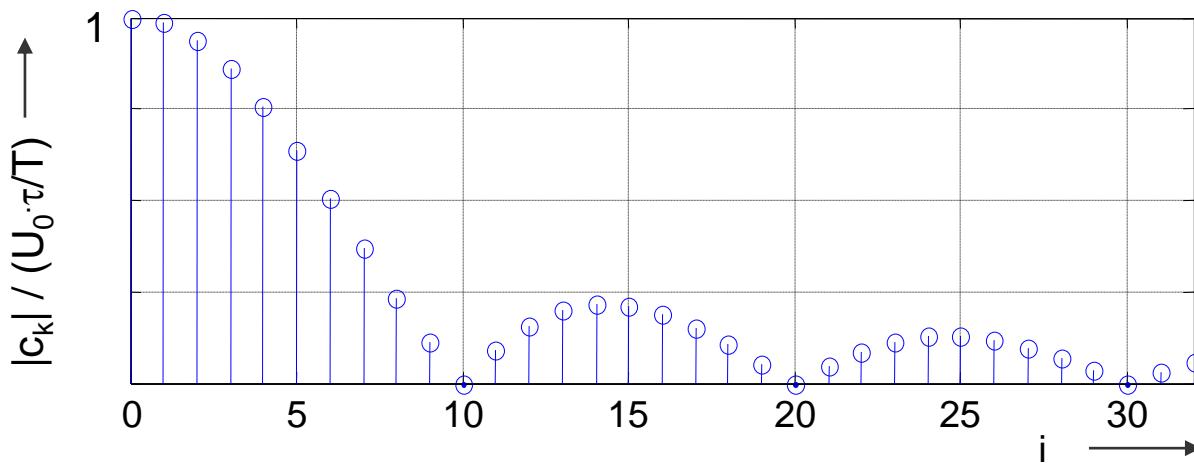


$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U_0 \cdot e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$c_k = \frac{-U_0}{j2\pi k f_0 T} \cdot \left(e^{-\frac{1}{2}j2\pi k f_0 \tau} - e^{\frac{1}{2}j2\pi k f_0 \tau} \right)$$

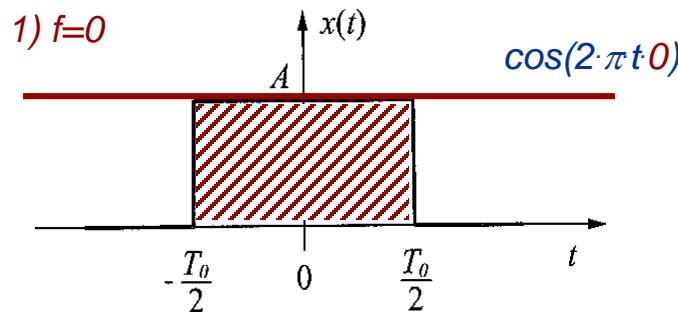
$$|c_k| = U_0 \cdot \frac{\tau}{T} \cdot \left| \text{si} \left(\pi \cdot k \cdot \frac{\tau}{T} \right) \right| \quad \text{mit} \quad \text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\text{mit } \sin(x) = \frac{e^{-jx} - e^{jx}}{2j} \text{ folgt}$$



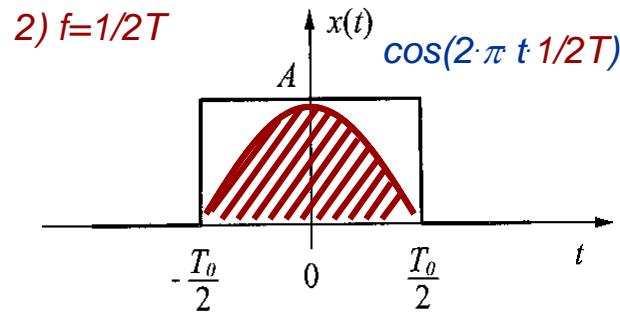
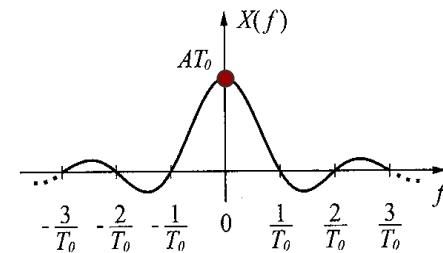
Fourier-Transformation „zu Fuß“

FT der Rechteckfunktion für ausgewählte Frequenzpunkte

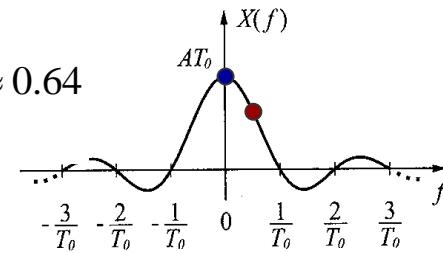


$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot 1 \cdot dt = A \cdot T_0$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$



$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t \cdot \frac{1}{2 \cdot T}\right) dt \approx 0.64$$

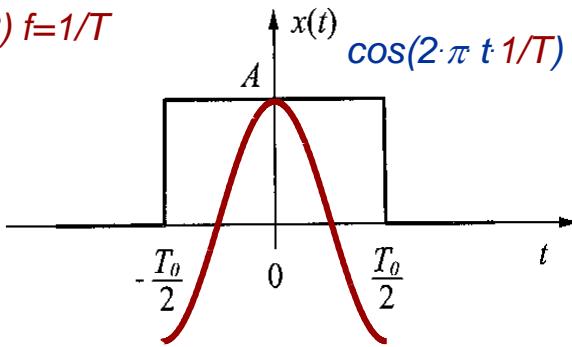


Fourier-Transformation „zu Fuß“

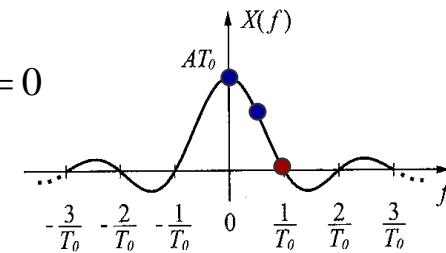
FT der Rechteckfunktion für ausgewählte Frequenzpunkte

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

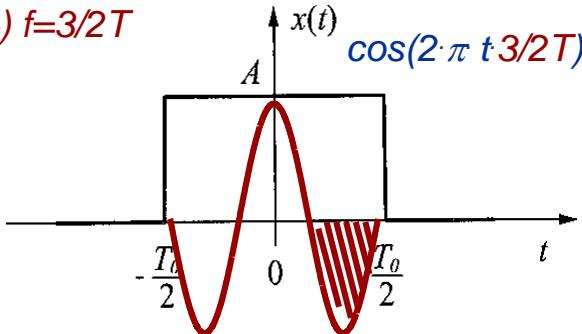
3) $f=1/T$



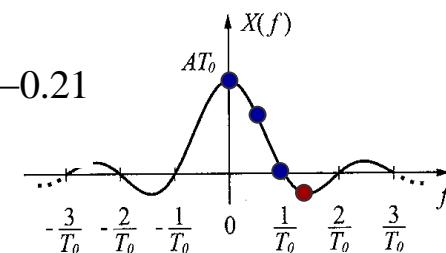
$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t \cdot \frac{1}{T}\right) dt = 0$$



4) $f=3/2T$



$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(2 \cdot \pi \cdot t \cdot \frac{3}{2T}\right) dt = -0.21$$



9.2 Signalverarbeitung

DISKRETE FOURIER TRANSFORMATION DFT

Motivation

- Bisher: analytische Berechnung der Fourier-Reihe und Fourier-Transformation
- Jetzt: Numerische Ermittlung des Spektrums, d. h. des Frequenzinhalts eines (analogen oder zeitdiskreten) Signals
- Hierzu muss das Signal im Zeit- und Frequenzbereich in abgetasteter Form vorliegen. Dies bedeutet jedoch auch, dass das Signal in beiden Bereichen periodisch ist.
- Anwendungen:
 - Ermittlung des Spektrums eines Messsignals
 - Schwingungsanalyse von mechanischen Objekten
 - Bestimmung der Oberschwingungen am Ausgang eines nichtlinearen Verstärkers
 - Suchen von Sinussignalen im Rauschen
 - Berechnung der Faltung bzw. der Korrelation zweier Signale
- Die DFT kann mit Hilfe der FFT (Fast Fourier-Transform) sehr effizient berechnet werden

Diskrete Fourier-Transformation (DFT) - Einführung

- Fourier-Transformation (Allgemeines Spektrum)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

• -○

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

- Fourier-Reihe (Linienspektrum eines periodischen Signal mit den Fourier-Koeffizienten)

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)e^{-j2\pi kf_0 t} dt$$

• -○

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kf_0 t}$$

- Zeitdiskrete Fourier-Transformation (Periodisches Spektrum eines zeitdiskreten Signals)

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi nT_s f}$$

• -○

$$x[n] = \frac{1}{f_S} \int_{-f_S/2}^{f_S/2} X_s(f)e^{j2\pi nT_s f} df$$

Herleitung der diskreten Fourier-Transformation

Der spektrale Gehalt $X[n]$ der (periodischen) Reihe $x[n]$ soll über die diskrete Fourier-Transformation bestimmt werden:

Fourier-Reihe:
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \frac{2\pi k}{T} \cdot t} \quad \text{mit der Periode } T=N \cdot T_s$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_C^{C+T} x(t) \cdot e^{-j \frac{2\pi k}{T} \cdot t} dt = \frac{1}{N \cdot T_s} \int_C^{C+T} x(t) \cdot e^{-j \frac{2\pi k}{N \cdot T_s} \cdot t} dt = \frac{1}{N \cdot T_s} \int_C^{C+T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - n \cdot T_s) \cdot e^{-j \frac{2\pi k}{N \cdot T_s} \cdot t} dt \\ &= \frac{1}{N \cdot T_s} \sum_{k=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi k n T_s}{N \cdot T_s}} \cdot T_s = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k} \end{aligned}$$

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

$$X[k] = N \cdot c_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j 2\pi k n / N}$$

Inverse DFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j 2\pi k n / N}$$

$x[n]$ und $X[k]$ bilden ein Transformationspaar; das heißt wenn $x[n]$ bekannt ist, so kann über die DFT die Frequenzbereichsfolge $X[k]$ berechnet werden; wenn $X[k]$ bekannt ist, so kann über die IDFT $x[n]$ berechnet werden.

Diskrete Fourier-Transformation (DFT) – Einführung

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k n / N}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi k n / N}$$

Bemerkungen

- Die Werte $X[k]$, die i.a. komplex sind, nennt man häufig auch *DFT-Koeffizienten*.
 n ist die diskrete Zeitvariable oder der Zeitindex.
Analog dazu heißt k diskrete Frequenzvariable.
- Die Folge der DFT-Koeffizienten $X[k]$ ist periodisch mit der Periode N .
- Üblicherweise wird $X[k]$ allerdings nur für eine Periode, nämlich für $k = 0, 1, \dots, N-1$ ausgewertet.
- Üblicherweise (allerdings nicht ausschließlich) wird die DFT auf Zeitsignale endlicher Länge angewendet.
- Nach der Rücktransformation kann die Folge als periodisches Signal mit der Periode N interpretiert werden. Die Grundperiode für $n = 0, 1, \dots, N-1$ stimmt wieder mit dem ursprünglichen Signal $x[n]$ überein.

Diskrete Fourier-Transformation (DFT) – Einführung

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k n / N}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi k n / N}$$

Bemerkungen

- Die Schrittweite im Zeitbereich T_s wird zur Periode $F=f_s$ im Frequenzbereich und die Schrittweite im Frequenzbereich Δf wird zur Periode T im Zeitbereich. Sie stehen somit in einem inversen Zusammenhang.

$$T_s = 1/f_s$$

$$T = NT_s$$

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T}$$

- Die Schrittweite im Zeitbereich ist $1 / (\text{Periode im Frequenzbereich})$
- Die Schrittweite im Frequenzbereich ist $1 / (\text{Periode im Zeitbereich})$.
- $(\text{Periode im Zeitbereich}) \cdot (\text{Periode im Frequenzbereich}) = N$

Diskrete Fourier-Transformation

Matrix-Schreibweise

- Mit der Einführung der n -ten Einheitswurzel

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

kann man die DFT bzw. IDFT auch wie folgt schreiben:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{k \cdot n} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-k \cdot n} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

- Wie bereits vorher erwähnt werden DFT bzw. IDFT meist nur über eine Periode ausgewertet: $k = 0, 1, \dots, N-1$ bzw. $n = 0, 1, \dots, N-1$
- Beweis für die Rücktransformation:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-k \cdot n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] \cdot W_N^{k \cdot n'} \cdot W_N^{-k \cdot n} = \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k \cdot (n'-n)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] \cdot N \cdot \delta_{n,n'} = x[n] \end{aligned}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k n / N}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi k n / N}$$

Matrix-Schreibweise

- Mit den Vektoren

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

und der sogenannten DFT-Matrix

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

kann die N-Punkte –DFT mit Hilfe einer Matrix-Multiplikation geschrieben werden:

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N$$

Matrix-Schreibweise

- Die IDFT ergibt sich daraus einfach zu

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}_N$$

- Dabei ist \mathbf{W}_N^{-1} die Inverse der DFT-Matrix. Man kann zeigen, dass gilt:

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^*$$

Dabei bedeutet *, dass die Elemente der Matrix konjugiert komplex genommen werden müssen.

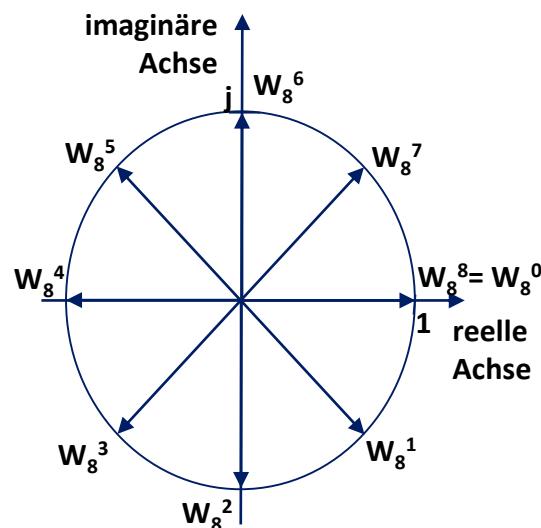
N-te Einheitswurzel

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$(W_N)^{n \cdot N} = e^{-j2\pi n} = 1 \quad W_N \text{ ist periodisch in } n \text{ und } k \text{ mit der Periode } N.$$

Darstellung von W_N als Phasor in der Gaußschen Zahlenebene:

Beispiel: W_8



- Linearität

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \circ -\bullet \alpha X_1[k] + \beta X_2[k]$$

- Periodizität

$$X[k] = X[k + N]$$

$$x[n] = x[n + N]$$

- Parseval-Theorem

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Die Energie eines Abtastsignals kann sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich berechnet werden.

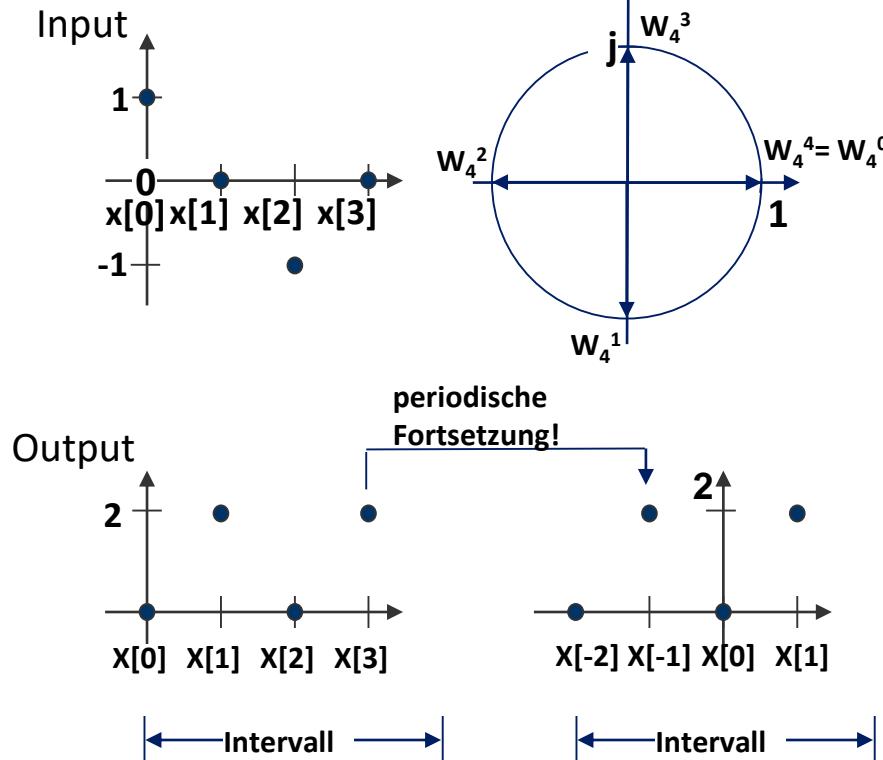
- Symmetrie (für ein reelles Zeitsignal):

$$X\left[\frac{N}{2} + l\right] = X^*\left[\frac{N}{2} - l\right], \quad l = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & N \text{ gerade} \\ 0.5, 1.5, \dots & N \text{ ungerade} \end{cases}$$

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Beispiel 2

$$x[0] = 1, \ x[1] = 0, \ x[2] = -1, \ x[3] = 0, \ N = 4; \text{ "Kosinus"}$$



Erwartung: bei der kontinuierlichen Fourier-Transformation $\Rightarrow \delta(f) + \delta(-f)$

Wir erhalten:

$$X[0] = 0 \quad (\text{Mittelwert / Summe})$$

$$X[1] = \underbrace{1 \cdot W_4^{1,0}}_{\text{"3Uhr"}} + \underbrace{(-1) \cdot W_4^{1,2}}_{\text{"9Uhr"}} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2$$

$$X[2] = \underbrace{1 \cdot W_4^{2,0}}_{\text{"3Uhr"}}, \underbrace{(-1) \cdot W_4^{2,2}}_{\text{"15Uhr"}} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$$

$$X[3] = \underbrace{1 \cdot W_4^{3,0}}_{\text{"3Uhr"}}, \underbrace{(-1) \cdot W_4^{3,2}}_{\text{"21Uhr"}}, \dots = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2$$

Bei reellem und geradem Input steht in der rechten Hälfte genau das gleiche wie in der linken: $X[N-k] = X[k]$

Bei reellem und ungeradem Input steht in der rechten Hälfte das konjugiert komplexe wie in der linken Hälfte: $X[N-k] = X[k]^*$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{k \cdot n}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-k \cdot n}$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

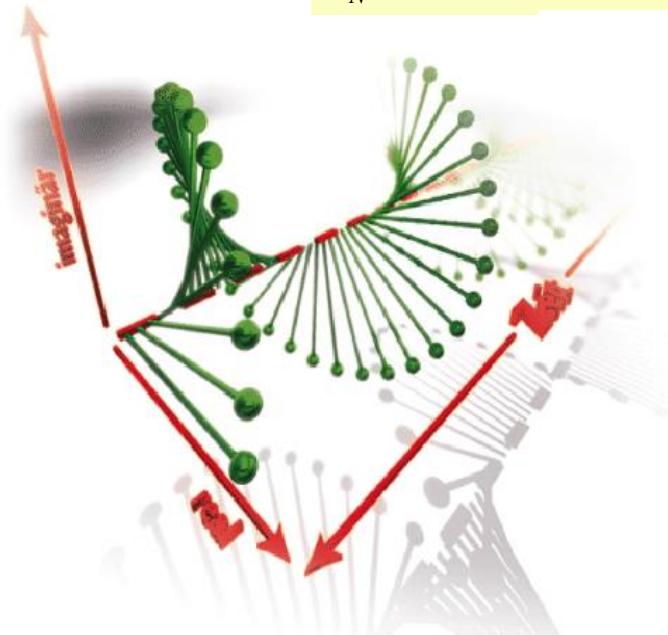
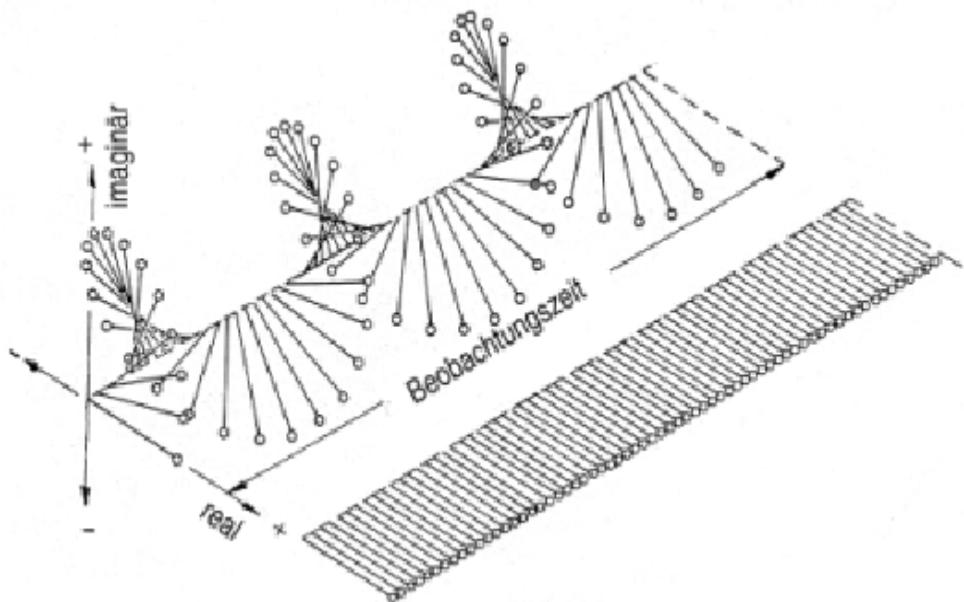
Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Der Algorithmus dreht die Zeiger zurück!

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{k \cdot n}$$
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-k \cdot n}$$
$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

Komplexe Exponentialfunktion:

Pro Frequenzpunkt dreht der Algorithmus jeweils eine weitere Drehung aus dem Datensatz heraus und summiert dann alle Zeiger auf.



Räumliches Modell für drei Perioden eines komplexen Signals
oben: Ausgangszustand;
links: nach entsprechender Rückdrehung
(in diesem Fall $X[3]!$)

Die DFT als zeitdiskrete Approximation der Fourier-Transformation

- Die DFT stellt im Bereich 0 bis $f_s/2$ eine Approximation der Fourier-Transformation dar.
- Den Abstand

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT_s}$$

zweier Frequenzpunkte nennt man **Frequenzauflösung der DFT**, die Dauer NT_s heißt **Messdauer**

→ die Frequenzauflösung, d.h. der minimalen Frequenzabstand, den zwei Sinusschwingungen haben müssen, damit man sie im DFT Spektrum erkennen und unterscheiden kann, ist also gleich dem Inversen der Messdauer.

- Durch Zero-Padding kann die graphische Darstellung des Spektrums durch zusätzliche Frequenzpunkte im DFT Spektrum verbessert werden. Durch Zero-Padding kann jedoch nicht die Frequenzauflösung erhöht werden, da wir ja keine zusätzliche Information zufügen. Diese kann nur durch Verlängerung der Messdauer erhöht werden.

Die DFT als zeitdiskrete Approximation der Fourier-Transformation

- Die DFT bildet ein periodisches zeitdiskretes Signal in ein periodisches Linienspektrum ab.
- Nun ist unser zu analysierendes Signal in den seltensten Fällen periodisch – und schon gar nicht mit der Periode der Messdauer $N \cdot T_s$
- Ein zeitlich begrenztes Signal hingegen besitzt immer ein unendlich ausgedehntes Spektrum und verletzt daher immer – hoffentlich nur wenig - das Abtasttheorem!
- Analog korrespondiert ein bandbegrenztes Signal zu einem unendlich langen Zeitbereich.
- Daher treten bei der Verwendung der DFT immer Aliasingeffekte auf; **die DFT stellt im Bereich 0 bis $f_s/2$ eine Approximation der Fourier-Transformation dar.**
- Daher gilt für den Zusammenhang zwischen DFT und der analogen Fourier-Transformation:

$$X[k] \approx \frac{1}{T_s} X\left(k \frac{f_s}{N}\right) \quad \text{für } k = -N/2, \dots, N/2 - 1$$
- Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Aliasingeffekte möglichst klein zu halten!

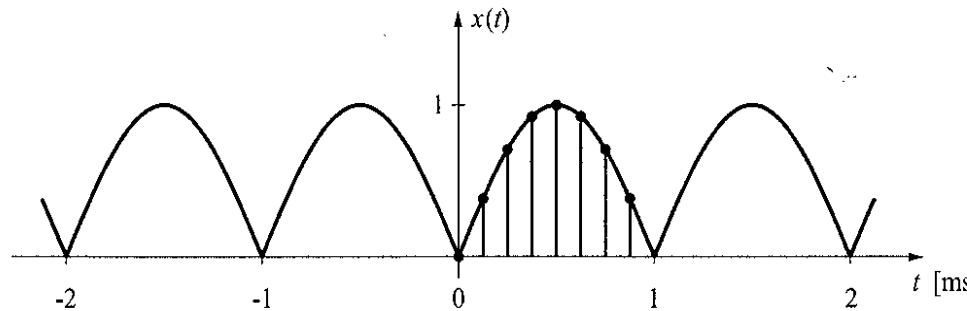
Die DFT als zeitdiskrete Approximation der Fourier-Reihe

- Unter der Voraussetzung, dass genau eine Periode eines periodischen Signals abgetastet wird, berechnen sich die Fourier-Koeffizienten nach folgender Formel:

$$c_k \approx \frac{1}{N} X[k] \quad \text{für } k = -N/2, \dots, N/2-1$$

(gilt für gerade N , ähnlich für ungerade N)

- Es gilt sogar Gleichheit in obiger Formel, wenn das periodische Signal bandbegrenzt ist und das Abtasttheorem eingehalten wird.
- Zur korrekten Abtastung sind folgende Punkte zu beachten:
 - **Die Länge des Messfensters** muss gleich einem ganzzahligen Vielfachen der **Periodendauer** des Signals sein.
 - Der Wert am linken Rand wird abgetastet.
 - Der Wert am rechten Rand wird nicht mehr abgetastet.



- Zur Analyse eines Signals mit Hilfe der DFT (FFT) gilt es, die folgenden Parameter sinnvoll zu wählen:
 - f_sAbtastfrequenz
 - T_s ...Abtastzeit
 - NAnzahl der Samples
 - TMessdauer
 - Δf ...Abstand zwischen zwei Frequenzpunkten nach der Transformation
- Es gelten die folgenden Zusammenhänge

$$T_s = 1/f_s$$

$$T = NT_s$$

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T}$$

- Daraus lässt sich erkennen, dass immer nur 2 Parameter frei wählbar sind, alle weiteren Parameter ergeben sich unmittelbar daraus.

- **Wahl der Abtastfrequenz f_s**

- Die richtige Wahl ist hauptsächlich durch das **Abtasttheorem** vorgegeben. Es muss gelten:

$$f_s > 2f_{\max}$$

Dabei ist f_{\max} die höchste im Signal vorkommende Frequenz.

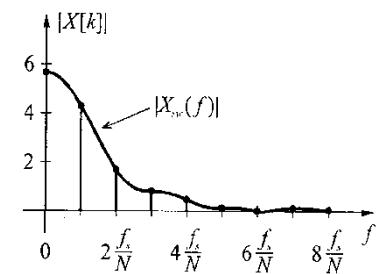
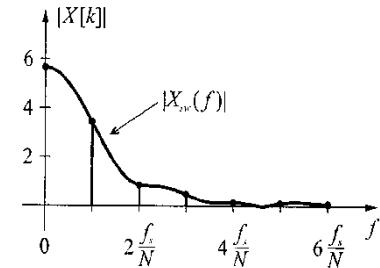
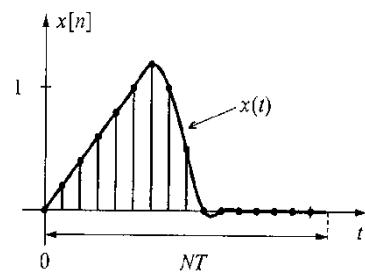
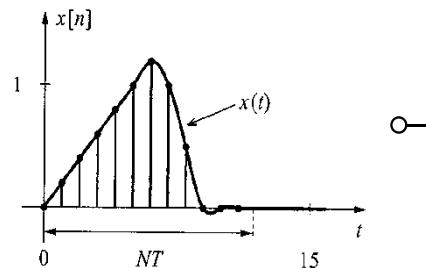
- Ist das zu analysierende Signal **nicht bandbegrenzt**, so ist ein **Anti-Aliasingfilter** voranzuschalten, welches die Bandbegrenzung vornimmt.
- Üblicherweise sind Nutzsignale durch Rauschen gestört (also mit additivem Rauschen überlagert). Rauschsignale haben i.a. ein sehr breites Spektrum.
→ selbst wenn das Nutzsignal bandbegrenzt ist, empfiehlt es sich ein Anti-Aliasingfilter einzusetzen um die Rauschstörungen bandzubegrenzen.

- **Hilfestellungen bei Wahl der Anzahl N der Abtastwerte**

- Die **Messdauer $T = NT_s$** muss gleich lang oder länger als die **Signaldauer** sein.
- N soll, wenn möglich, eine **Zweierpotenz** sein, damit die DFT mit Hilfe der FFT berechnet werden kann.
- Bei der DFT ist der **Abstand Δf** zwischen zwei Auswertefrequenzen **gleich $f_s/N=1/T$** . Legt der Anwender den maximalen Abstand Δf_{\max} zwischen zwei Auswertefrequenzen fest, dann muss N demnach folgender Ungleichung genügen:

$$N \geq \frac{f_s}{\Delta f_{\max}}$$

- D.h., je besser die spektrale Auflösung sein soll, desto größer muss N gewählt werden
- Wird ein periodisches Signal analysiert und ist die **Periodendauer T_0** des Signals bekannt, so soll die Messdauer als ein Vielfaches der Periodendauer gewählt werden.



- **Beispiel:**

- Gegeben sei die gedämpfte (zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltete) Sinusschwingung

$$x(t) = U_0 \sin(2\pi f_0 t) \cdot e^{-t/\tau} \sigma(t)$$

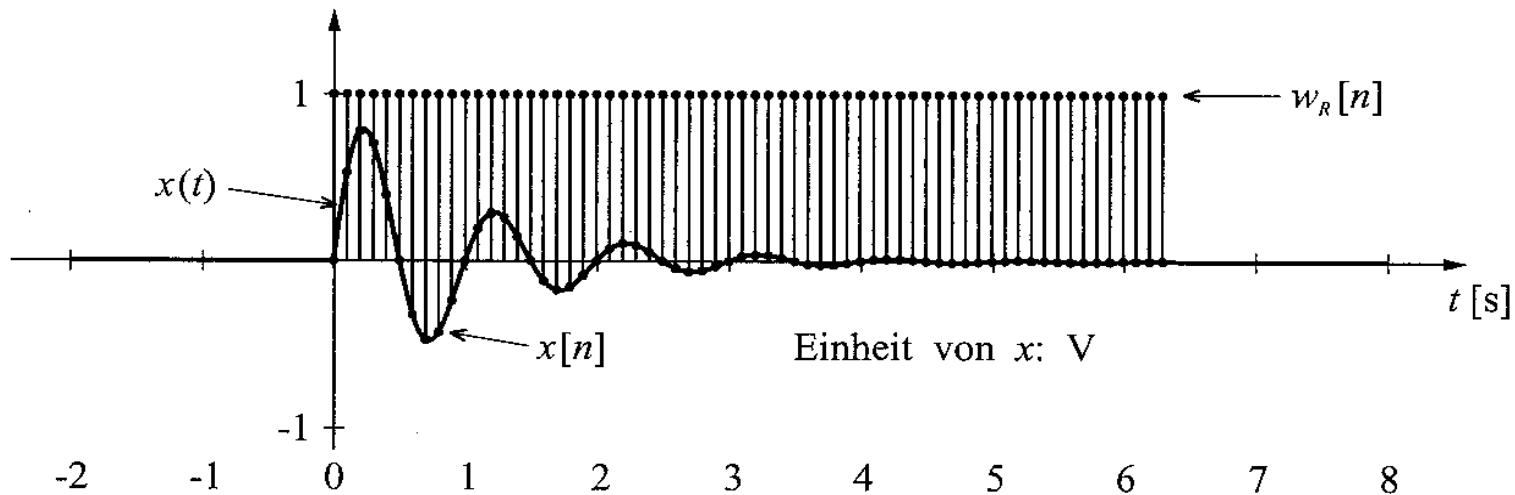
mit der Zeitkonstanten $\tau = 1s$, $U_0 = 1V$ und der Frequenz $f_0 = 1 \text{ Hz}$.

- Für die Fourier-Transformierte dieser Funktion gilt

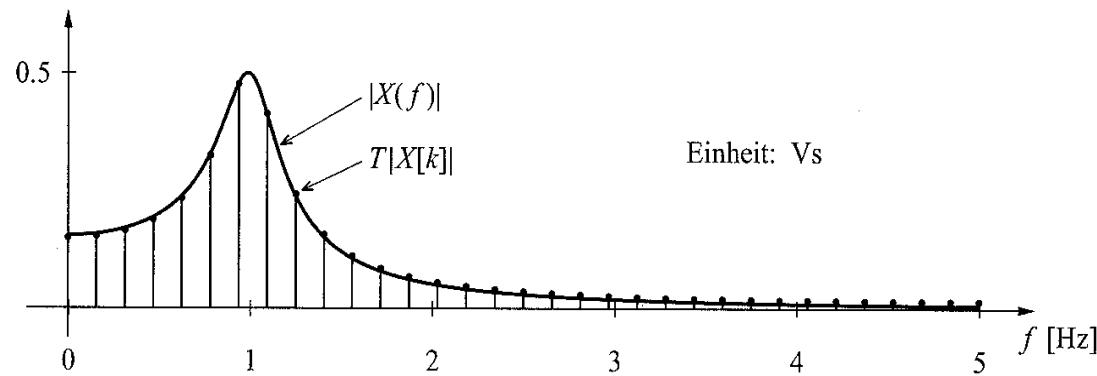
$$X(f) = \frac{2\pi f_0 U_0}{(j2\pi f + 1/\tau)^2 + (2\pi f_0)^2}$$

- Es soll nun mit Hilfe einer DFT-Analyse eine Approximation der Fourier-Transformierten bestimmt werden.
- Wahl der Parameter:
 - Die Frequenz des Signals beträgt $f_0 = 1 \text{ Hz}$, wir wählen für die Abtastfrequenz daher einen Wert, der um ein Vielfaches höher ist: $f_s = 10 \text{ Hz} (\rightarrow T_s = 0.1s)$.
 - Das Signal ist nach $5t$ praktisch abgeklungen, wir wählen daher eine Messdauer von $T = 6.4s$ (damit wird $N = 64$, also eine Zweierpotenz)
 $\rightarrow N = 64, T = 6.4s, \Delta f = 0.156\text{Hz}$

- Input: gedämpfte Sinusschwingung, Abtastkamm, abgetastete Funktion



- Ergebnis der Analyse



- **Gleichwert, Effektivwert und Klirrfaktor einer verzerrten Sinusschwingung**

- In der Messtechnik interessiert man sich vielfach für die folgenden Größen eines periodischen Signals
 - Gleichwert (DC-Wert, linearer Mittelwert)
 - Effektivwert (RMS-Wert)
 - Effektivwert des Wechselanteils (AC-Anteil)
 - Klirrfaktor (Oberschwingungsgehalt)
- Diese Größen lassen sich einfach mit Hilfe einer DFT-Analyse ermitteln
 - Abtasten einer Periode des Signals ($N \dots$ Anzahl der Abtastwerte)
 - Durchführen der DFT $\rightarrow X[k]$
 - Gleichwert
$$X_{DC} \approx \frac{1}{N} X[0]$$
 - Effektivwert der k-ten Harmonischen

$$X_k \approx \frac{\sqrt{2}}{N} |X[k]| \quad \text{für } k = 1, \dots, N/2-1 \text{ (wenn } N \text{ gerade)}$$

■ Gleichwert, Effektivwert und Klirrfaktor einer verzerrten Sinusschwingung

- Effektivwert des Wechselanteils

$$X_{AC} \approx \sqrt{\sum_{k=1}^{N/2-1} X_k^2} \quad (\text{für gerade } N)$$

- Effektivwert X_{RMS} des periodischen Signals $x(t)$

$$X_{RMS} \approx \sqrt{X_{DC}^2 + X_{AC}^2}$$

- Klirrfaktor K

$$K \approx \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{N/2-1} X_k^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N/2-1} X_k^2}} \quad (\text{für gerade } N)$$

Der Klirrfaktor ist somit definiert als das Verhältnis des Effektivwerts der Oberwellen bezogen auf den Effektivwert des gesamten Wechselanteils (also inklusive der Grundwelle). Er ist damit ein Maß für die Abweichung von der Sinusform.

9.3 Signalverarbeitung

FENSTERFUNKTION UND SPEKTRALANALYSE

Fensterung und Spektralanalyse:

Wie werde ich die Probleme mit der periodischen Fortsetzung los?

- Zur Anwendung der DFT (FFT) ist eine zeitlich begrenzte Abtastfolge erforderlich
- Häufig möchte man allerdings die Spektralanalyse eines kontinuierlichen Abtastsignals durchführen
- Dazu ist es notwendig, die kontinuierliche Folge zeitlich zu begrenzen, man spricht dann von der Fensterung des Abtastsignals

Fenstereffekte bei der DFT

Messsignale liegen nie über einen unendlichen Zeitraum vor.

Gegeben sei z.B. ein harmonisches Signal:

$$f(t) = e^{-j \cdot \omega_c \cdot t}$$

Dieses Signal $f(t)$ wird über ein definiertes Zeitintervall von a bis b aufgezeichnet. Mathematisch gesehen wird das unendliche Signal also mit einer Fensterfunktion $g(t)$ multipliziert.

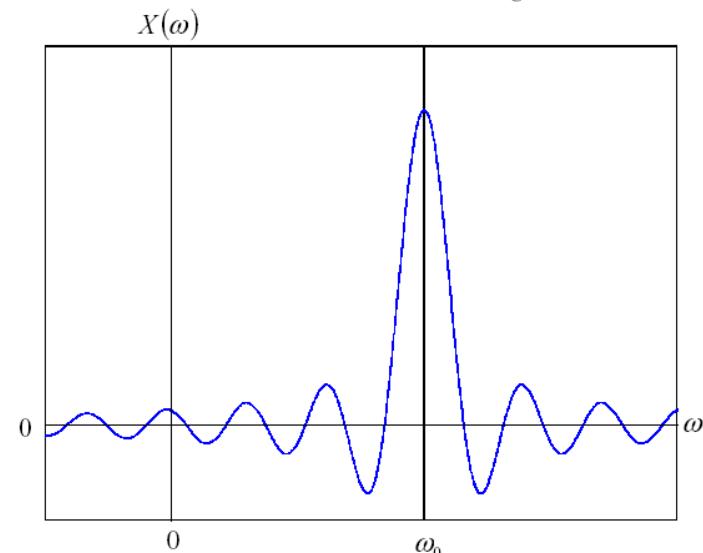
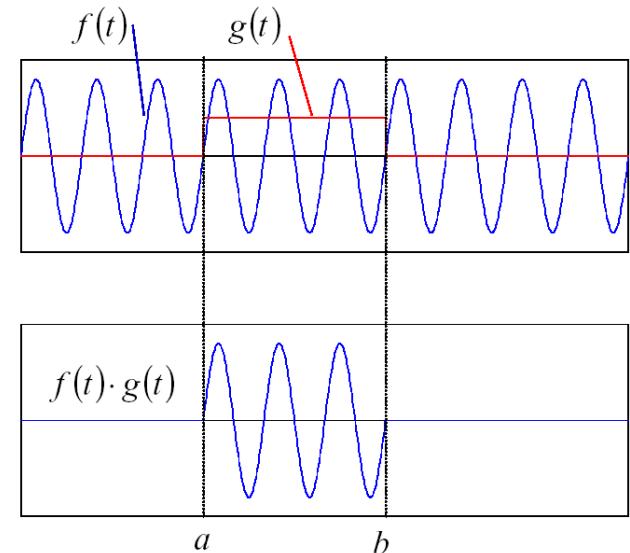
→ $x(t) = f(t) \cdot g(t)$

Im Frequenzbereich wird $F(\omega)$ folglich mit $G(\omega)$ gefaltet
„verschmiert“

→ $X(\omega) = F(\omega) * G(\omega)$

Bei einem Rechteckfenster ist $G(\omega)$ eine Si-Funktion

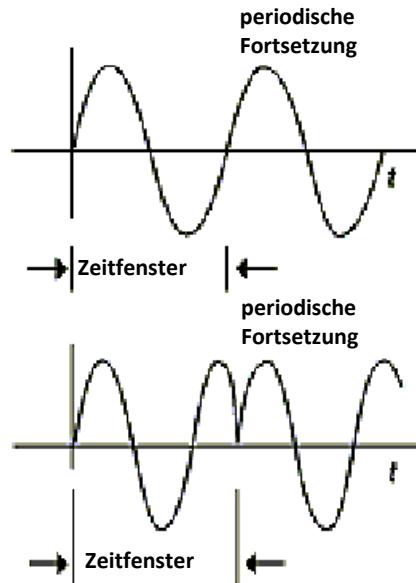
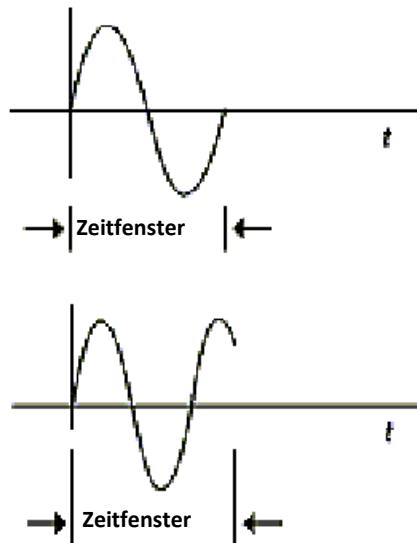
Abhilfe: bessere Fensterfunktionen:
(Hamming, von Hann, etc.)



- Die DFT geht von einer periodischen Fortsetzung des Signals aus.
Es wäre jedoch ausgesprochenes Glück, wenn die zu untersuchende Funktion eine ganze Zahl an kompletten Signalperioden im untersuchten Zeitfenster aufweisen würde.

Nur dann stimmt die periodische Fortsetzung des untersuchten Zeitfensters mit der ursprünglichen Funktion überein.

Nur in diesem Fall ist die DFT eine gute Näherung an die Fourier-Transformation!



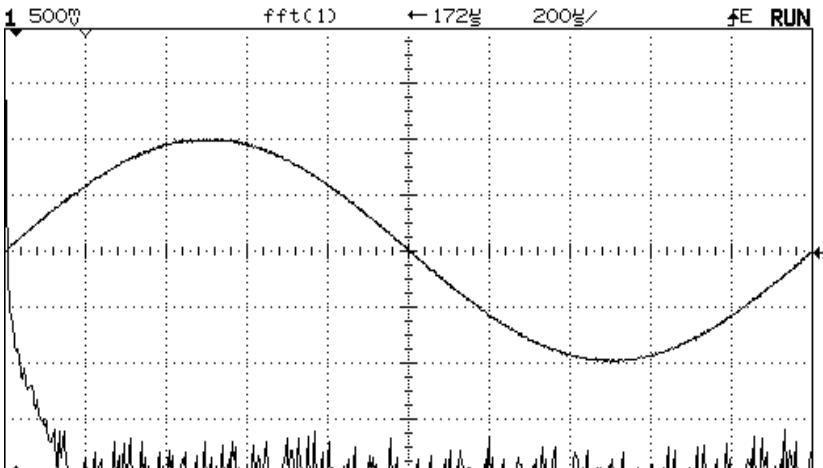
Die zu analysierende Funktion und das abgetastete Zeitfenster passen zusammen
→DFT ist eine gute Näherung an die Fourier-Transformation.

Die zu analysierende Funktion und das abgetastete Zeitfenster passen **nicht** zusammen
→
DFT ist **keine** gute Näherung an die Fourier-Transformation.

Fensterung und Spektralanalyse

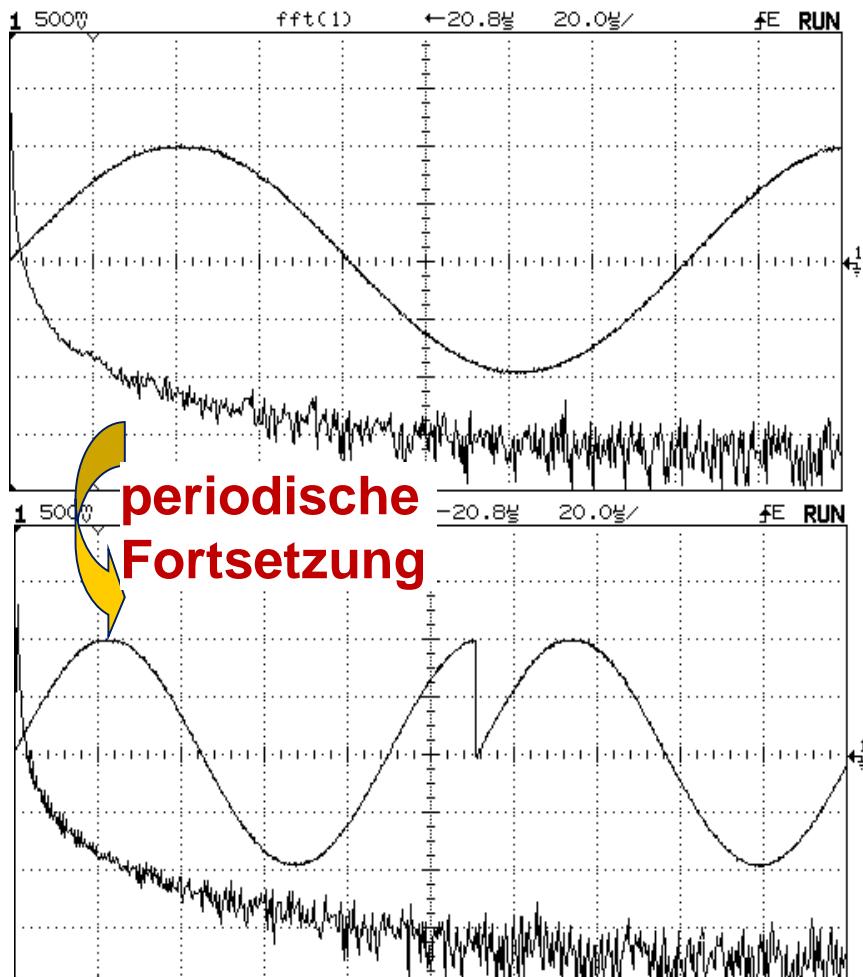
Die zu analysierende Funktion und das abgetastete Zeitfenster **passen zusammen**

→ DFT ist eine **gute Näherung** an die Fourier-Transformation.



SS 2019

Die zu analysierende Funktion und das abgetastete Zeitfenster passen **nicht** zusammen →
DFT ist **keine** gute Näherung an die Fourier-Transformation.



Wir wollen nun betrachten, was passiert, wenn man eine Funktion $x(t)$ irgendwo – wenn möglich dort, wo sie nicht mehr groß ist – abschneidet und dann Fourier-transformiert.

- **Beispiel 2:**

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-\lambda - j2\pi f} [e^{-\lambda t} \cdot e^{-j2\pi f t}]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda + j2\pi f} \quad (\text{Lorenz-kurve})$$

Nun wird abgeschnitten:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

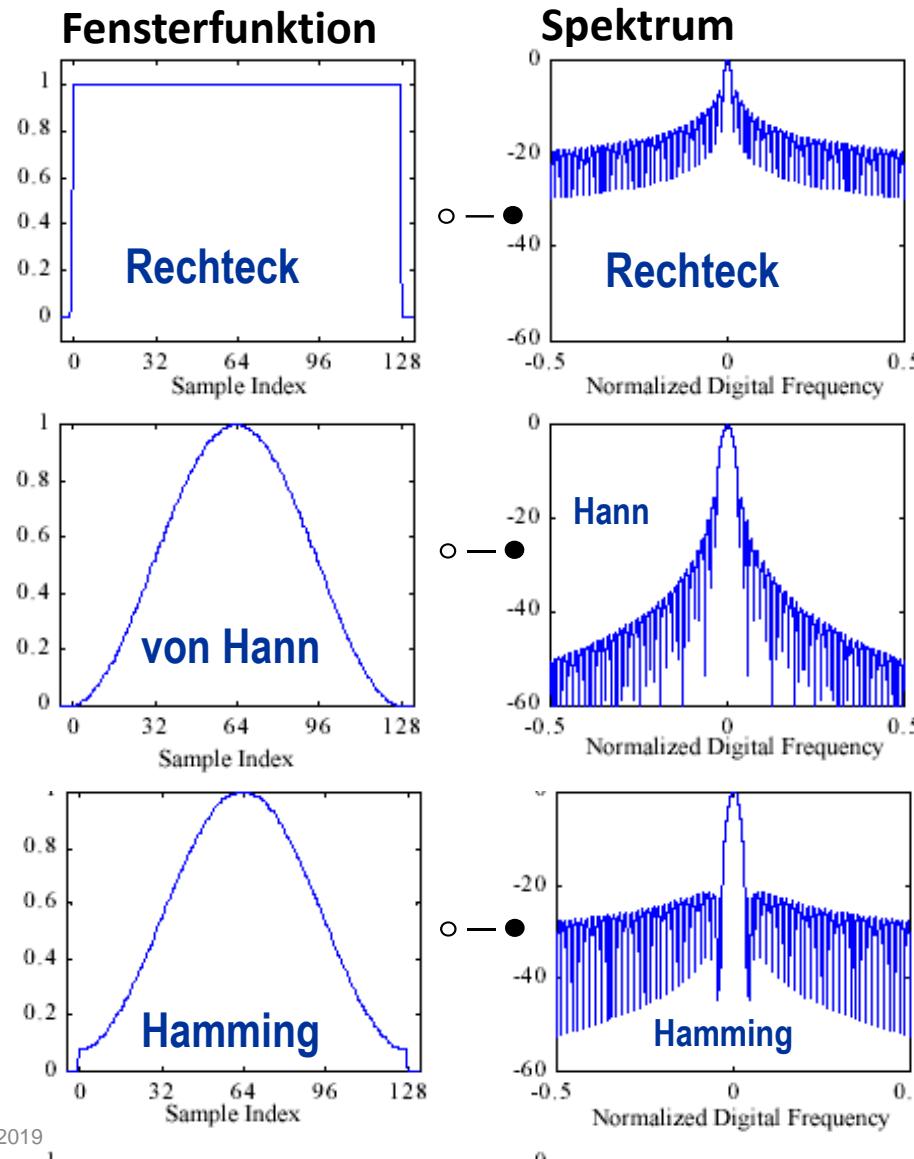
$$X(f) = \int_0^T e^{-\lambda t} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-\lambda - j2\pi f} [e^{-\lambda t} \cdot e^{-j2\pi f t}]_0^T = \frac{1 - e^{-\lambda T - j2\pi f T}}{\lambda + j2\pi f}$$

Gegenüber der unabgeschnittenen Funktion haben wir uns den Zusatzterm $\frac{-e^{-\lambda T - j2\pi f T}}{\lambda + j2\pi f}$ eingehandelt. Für große T ist er nicht sonderlich groß, aber er hat die unangenehme Eigenschaft zu oszillieren. Auf der glatten Lorenzkurve haben wir uns durch das Abschneiden kleine Oszillationen (engl. Ripples) eingehandelt!

- **Folgerung:** Man soll nicht ohne Not abschneiden, schon gar nicht so unsanft!
 - **Statt dessen:** sanft auf Null wichteten!
-
- Das harte Abschneiden der Funktion (im Beispiel 1 bei 20ms) bedeutet, dass die Funktion $x[n]$ mit einer (hier rechteckförmigen) **Fensterfunktion $w[n]$** (bestehend aus N_w Abtastwerten) **multipliziert** wurde:
$$x_w[n] = x[n] \cdot w[n]$$
 - Im **Frequenzbereich** entspricht dieser Multiplikation die **Faltungsoperation**:
$$X_{ws}(\Omega) = X_s(\Omega) * W_s(\Omega)$$
 - **Leckeffekt:** Durch diese Faltung werden Teile der spektralen Energie des Signals über einen weiten Frequenzbereich verteilt.

- Das Rechteckfenster ist für viele Anwendungen aufgrund der sehr hohen Sidelobes ungeeignet
 - Tritt beispielsweise im Signal eine zweite Frequenz mit wesentlich kleinerer Amplitude in der Nähe des starken Peaks auf, so könnte diese möglicherweise durch die Sidelobes des starken Peaks völlig zugedeckt sein und somit gar nicht erkannt werden
- Empfehlungen zur DFT
 - Viele Nullen tun gut!
 - Wählen Sie Ihr Samplingintervall Δt fein genug, so dass Sie stets eine deutlich höhere Nyquistfrequenz haben, als Sie spektrale Intensität erwarten, d.h. Sie benötigen $X[j]$ nur für $j < N$. Damit werden Sie die Konsequenzen der periodischen Fortsetzung des Spektrums näherungsweise los.
 - Verwenden Sie Fensterfunktionen. Damit werden Sie die Konsequenzen der periodischen Fortsetzung im Zeitbereich näherungsweise los!

Vergleich üblicher Fensterfunktionen



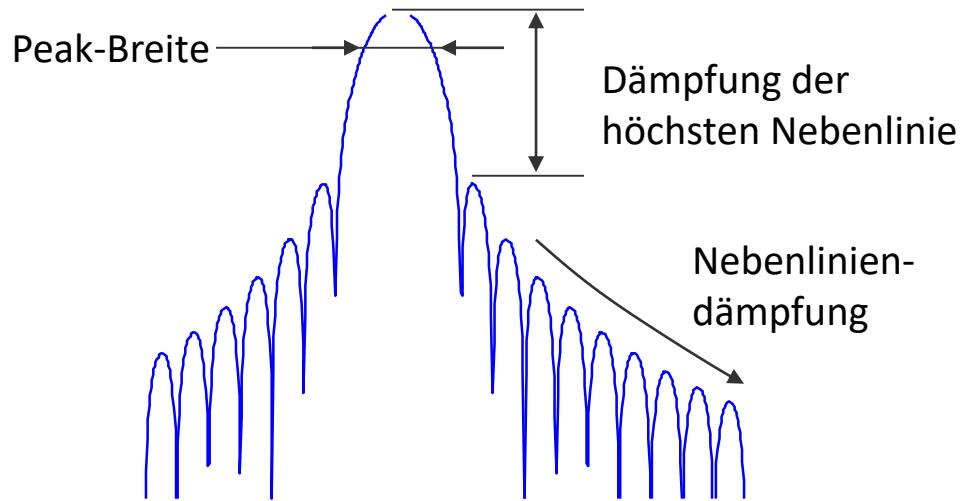
Beispiel:

Messsignal mit 128 Punkten und Berechnung des Spektrum mit verschiedenen Fensterfunktionen

- Rechteck
 - von Hann
 - Hamming
- berechnet

Sonst noch häufig in der Messtechnik verwendet:
Kaiser-Bessel-,
Turkey-Fenster und
Blackman-Fenster

Vergleich üblicher Fensterfunktionen



Auswahl stets Kompromiss:

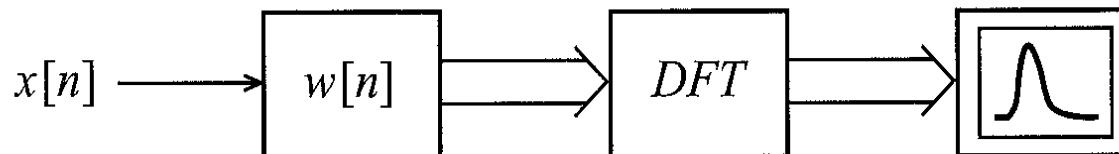
Je höher die Nebenliniendämpfung ist, desto breiter wird der Haupt-Peak.

In der Messtechnik-Praxis von Hann, Hamming und für Spezialanwendungen Kaiser-Bessel oder ggf. Blackmann-Fenster nahezu immer ok.
Sonstige Fenster i.A. maßgeblich von „akademischem“ Interesse!

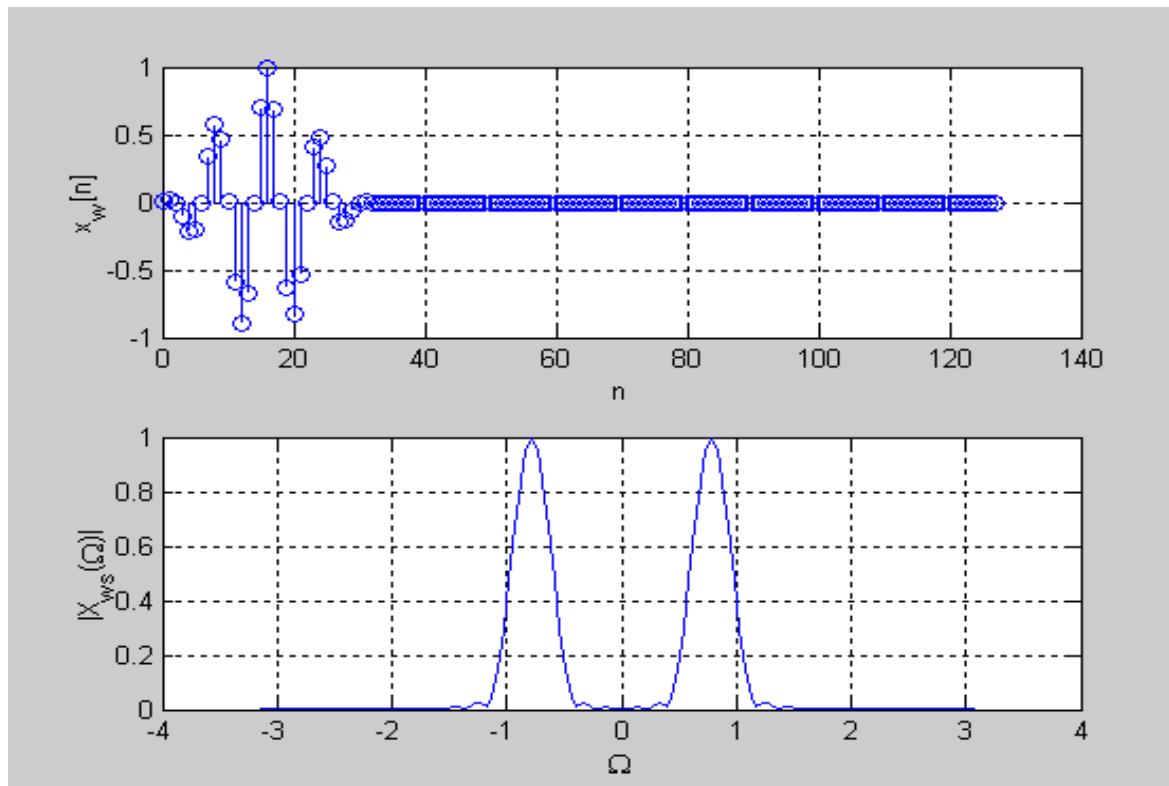
Fenster-Funktion	Dämpfung der höchsten Nebenlinie in dB	Nebenliniendämpfung (dB/Oct)	6 dB-Peak-Breite (bins = $2\pi f_s/N$)
Rechteck	-13	-6	1.21
von Hann	-32	-18	2.00
Hamming	-43	-6	1.81
Blackman	-58	-18	2.35

Verwenden Sie nie eine Fourier-Transformation ohne vorherige Fensterung!!!!

- Typische Signalverarbeitungskette der Spektralanalyse:



- Beispiel: Cosinussignal von vorher, Verwendung des Hanning-Fensters anstelle des Rechteckfensters



Man erkennt im Vergleich
zur
Auswertung mit Hilfe
des Rechteckfensters:

- Sidelobes sind wesentlich kleiner
- Der Hauptpeak wird allerdings breiter

Fensterung und Spektralanalyse – Detektion von Sinussignalen

- Beispiel: Gegeben sei das folgende Signal (Überlagerung zweier Sinusschwingungen):

$$x(t) = U_1 \cos(2\pi f_1 t) + U_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

- wobei die beiden Frequenzen f_1 und f_2 zu messen, also unbekannt sind (im Beispiel wird $U_1 = 1V$, $U_2 = 0.4 V$, $f_1 = 996 \text{ Hz}$, $f_2 = 1032 \text{ Hz}$ gewählt).
- Für die erfolgreiche Anwendung einer FFT ist es wichtig eine "grobe Vorstellung" des zu analysierenden Signals zu haben und diese Fragen in etwa beantworten können:
 - in welchem Frequenzbereich liegen die Signalkomponenten?
 - wie nahe liegen die beiden Frequenzen beieinander?
 - wie groß sind ihre Amplituden?
 - ist Rauschen überlagert?

Fensterung und Spektralanalyse – Detektion von Sinussignalen

- Zu wählende Parameter
 - FFT-Parameter: f_s , T_s , N , T , Δf
 - Fenstertyp, Fensterbreite N_w
- Die Breite des Hauptpeaks im Frequenzbereich ist für alle Fenstertypen wesentlich von der Fensterbreite N_w im Zeitbereich abhängig (je größer N_w desto schmäler der Hauptpeak im Frequenzbereich)
- Mit der Wahl des Fenstertyps lassen sich folgende Eigenschaften steuern
 - Breite des Hauptpeaks im Frequenzbereich (diese unterscheidet sich bei gleichem N_w für unterschiedliche Fenstertypen)
 - Höhe der Nebenzipfel

Fensterung und Spektralanalyse – Detektion von Sinussignalen

- Annahme

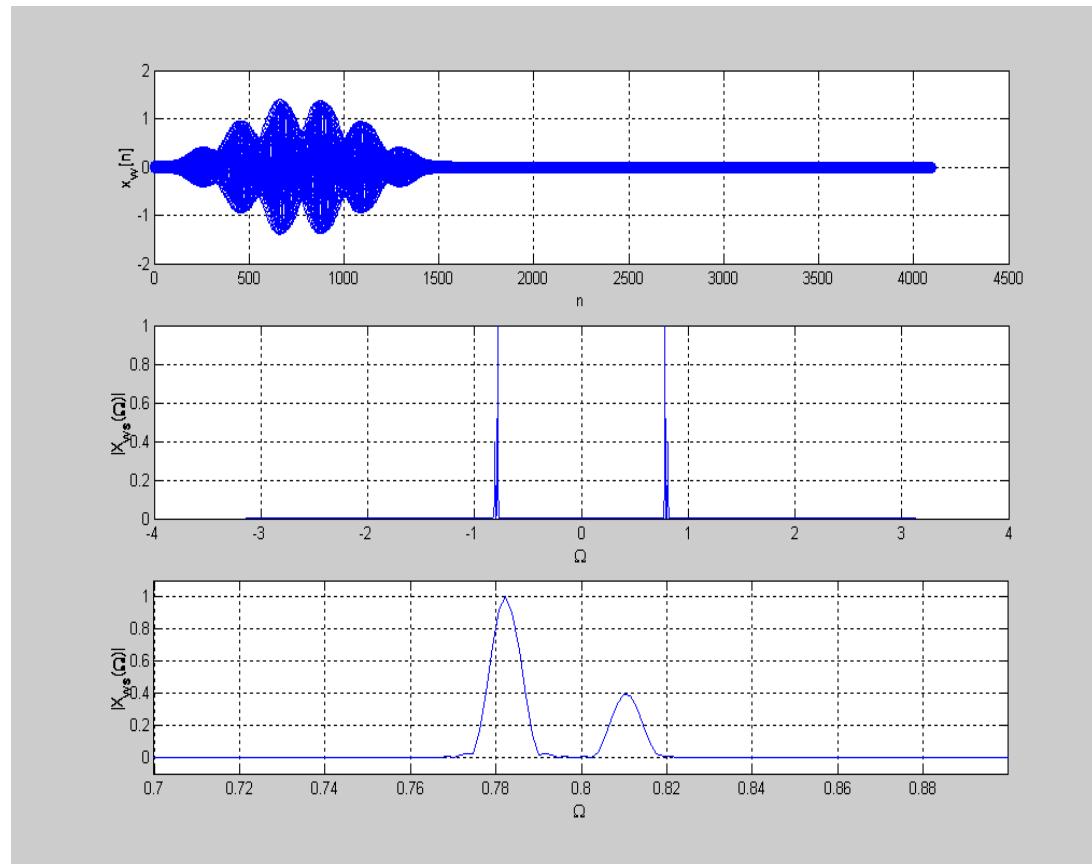
- die zu messenden Frequenzen sind etwa im kHz Bereich
- der Abstand der beiden Frequenzen beträgt mindestens 20 Hz

- Mögliche Wahl der Parameter

- $f_s = 8 \text{ kHz}$ (Abtasttheorem)
- $T_s = 1/f_s = 125 \mu\text{s}$
- Damit die beiden Frequenzen nach der DFT unterscheidbar sind, dürfen sich die beiden Hauptpeaks nicht überlappen und die Sidelobes müssen stark unterdrückt sein → z.B. Hann Fenster → Sidelobeunterdrückung: 31.5 dB
- Breite des Hauptpeaks $B_w \leq 20 \text{ Hz}$; $B_{w,norm} = 2\pi B_w / f_s = 0.0157$
- $B_{w,norm} = 7.8\pi / N_w \leq 0.0157$
→ Wahl: $N_w = 1560$
- Wunsch: $\Delta f \leq 2 \text{ Hz}$ (damit sind ca. 10 Samples pro Hauptpeak darstellbar)
→ $T \geq 1/\Delta f = 0.5 \text{ s}$
→ $N = T / T_s \geq 0.5 \text{ s} / 125 \mu\text{s} = 4000$
→ Wahl: $N = 4096$

Fensterung und Spektralanalyse – Detektion von Sinussignalen

- Ergebnis der Spektralanalyse



Zeitbereich

Frequenzbereich

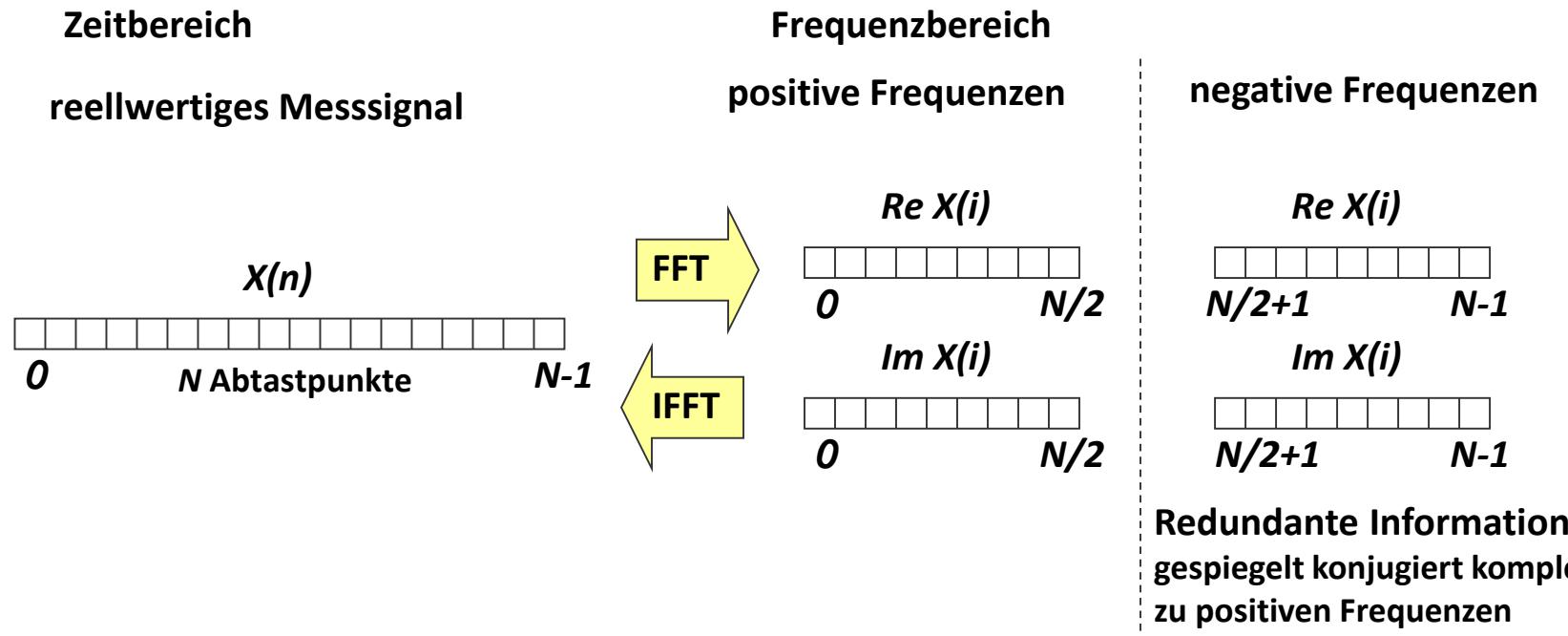
Frequenzbereich (ZOOM)

- Man erkennt deutlich zwei Peaks unterschiedlicher Amplitude bei $\Omega_1 = 0.782$, $\Omega_2 = 0.811$. Dies entspricht den Frequenzen $f_1 = 996$ Hz, $f_2 = 1033$ Hz. Das Amplitudenverhältnis beträgt 1 : 0,4.

9.4 Signalverarbeitung

HILBERT-TRANSFORMATION

Diskrete Fourier-Transformation von reellen Signalen



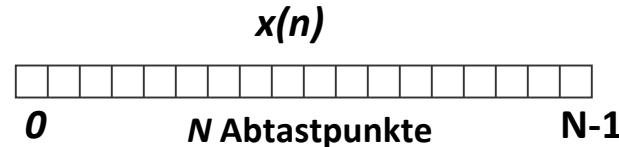
Für reellwertige Signale kann eine spezielle reelle FFT verwendet werden, bei der nur die positiven Frequenzwerte von 0 bis $N/2$ berechnet werden
→ weitere Verminderung des Rechenaufwandes

diskrete Hilbert-Transformation

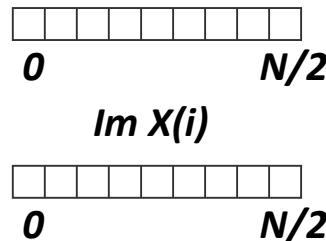
Problemstellung:

Gemessen: reellwertiges Abtastsignal \rightarrow gesucht: Phasenverlauf des Signals

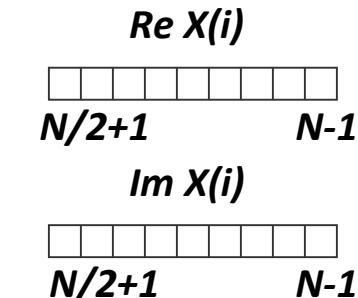
reellwertiges Messsignal



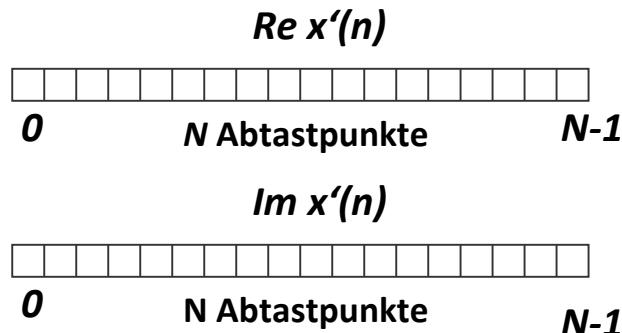
positive Frequenzen
 $Re X(i)$



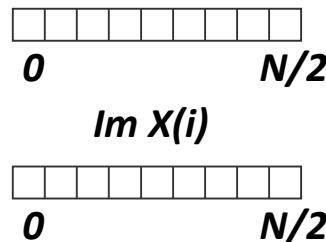
negative Frequenzen



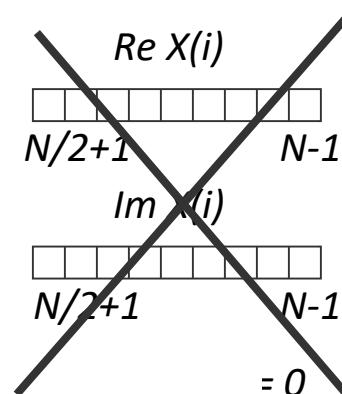
komplexwertig erweitertes Signal



$Re X(i)$



alle Werte zu Null setzen



$x'(n)$ ist das analytische Signal zu $x(n)$
es gilt $x(n) = Re x'(n)$

Achtung!

Störungen durch Fenstereffekte

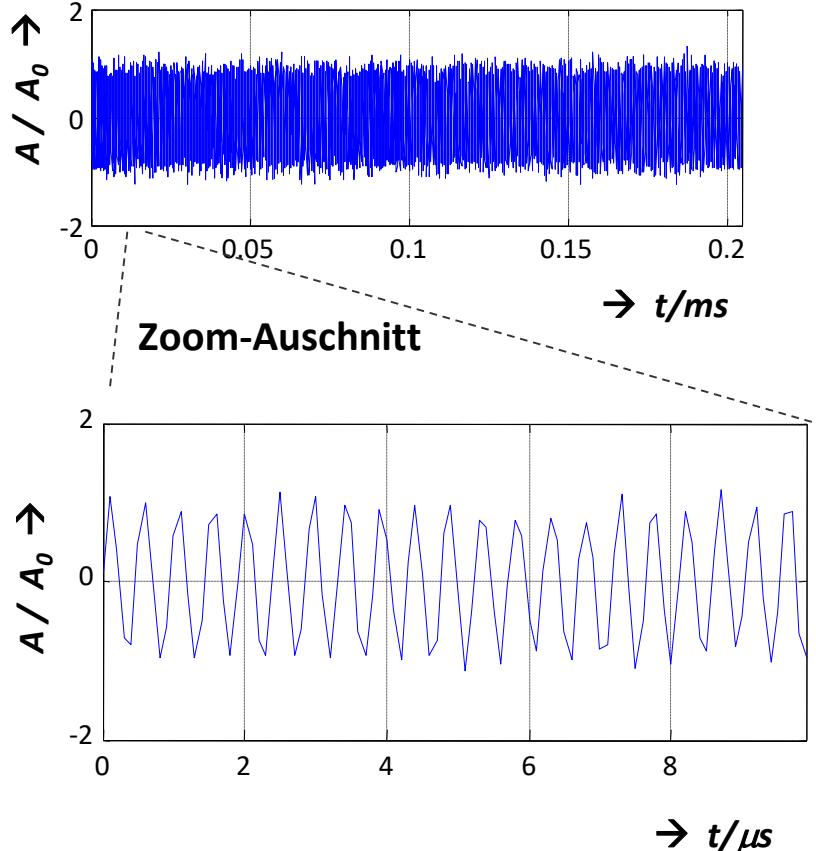
Anwendung der Hilbertransformation

Problemstellung:

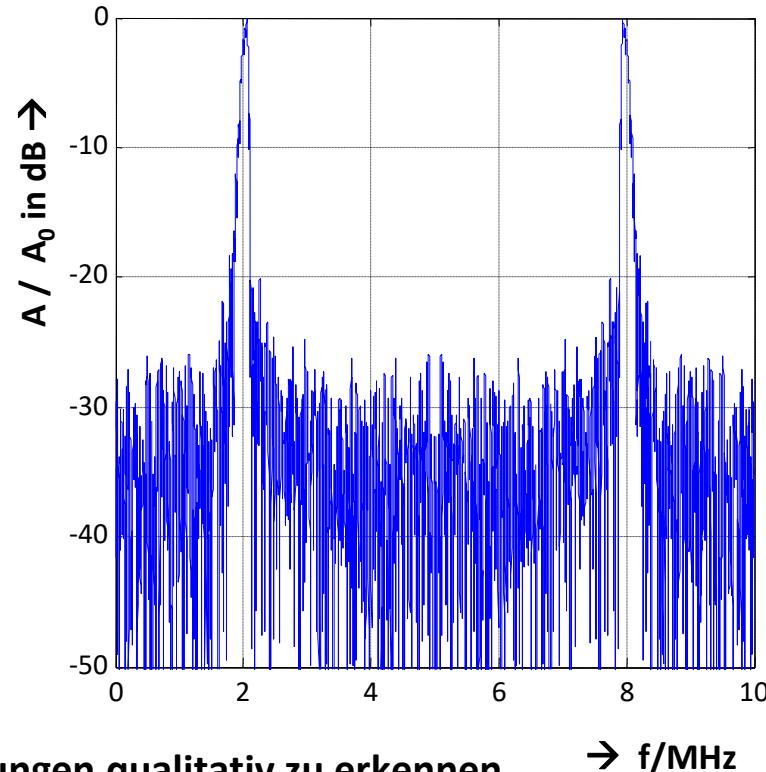
Gemessen: Signal einer Quelle (Oszillator) bei 2 MHz

Frage: Was für Eigenschaften hat die Quelle

reellwertiges Messsignal ($f_{\text{Tast}} = 10 \text{ MHz}$)



Spektrum (Betrag dargestellt)

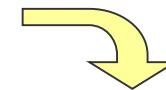
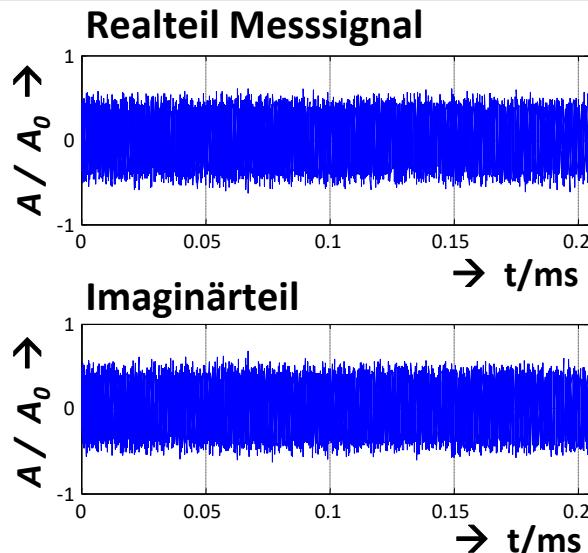


**Störungen qualitativ zu erkennen
Aber keine quantitativen Aussagen
über die Art der Störung möglich**

Fensterung und Spektralanalyse – Anwendung der Hilbertransformation

Komplexes Spektrum IFFT

negative Frequenzen
zuvor zu Null gesetzt

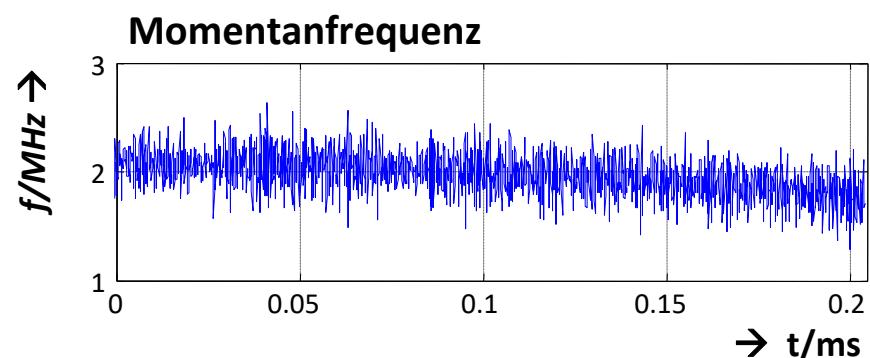
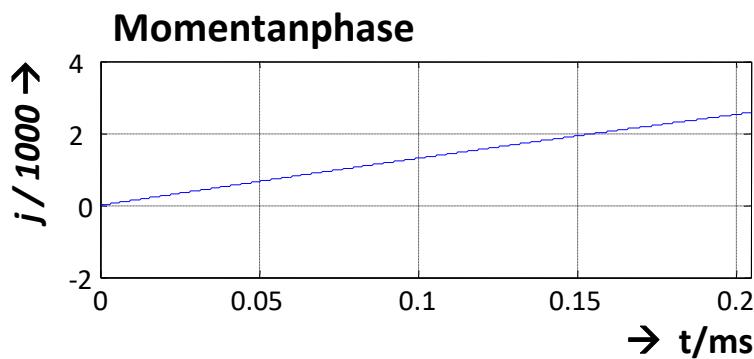


Momentan-Phase berechnen:

$$\varphi_i(t) = \arctan(\text{Im} / \text{Re})$$

Momentanfrequenz berechnen:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}$$



Ergebnis: Oszillator driftet (Trendanalyse z.B. durch Ausgleichspolynom) und er besitzt hohes Phasenrauschen (zufällige Fehler z.B. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus den Abweichungen von der Trend-Kurve)

Anmerkung:

Die FFT zeigt sehr anschaulich, wie durch geschickte Umsortierung der Multiplikationen und Additionen der Rechenaufwand zur Berechnung einer Fourier Transformation von n^2 auf nur noch $n \cdot \log_2(n)$ reduziert werden kann. Für Interessierte habe ich eine kurze Zusammenfassung auf das Netz gestellt:

→ [Vertiefung_FFT](#)

9.5 Signalverarbeitung

FAST FOURIER TRANSFORMATION FFT

Anmerkung:

Sehr viele Messsignale ändern ihre spektrale Zusammensetzung über die Zeit. Zur spektralen Analyse zeitveränderlicher Signale muss das Messsignal in viele kleine zeitliche Einheiten zerlegt werden, die sodann jeweils für sich Fourier transformiert werden.

Für Interessierte habe ich eine kurze Zusammenfassung auf das Netz gestellt:

→ [Vertiefung_Spektralanalyse_von_nichtstationären_Signalen](#)

9.5 Signalverarbeitung

SPEKTRALANALYSE VON NICHTSTATIONÄREN SIGNALEN

10. Digitale Filter

DIGITALE FILTER

z-Transformation

- Die beiden wichtigsten Typen von digitalen Filtern sind FIR (finite impuls response) und IIR (infinite impuls response) Filter
- Zum Entwurf von FIR-Filtern reicht die Kenntnis der Fourier-Transformation völlig aus, für IIR-Filter benötigt man jedoch ein anderes mathematisches Werkzeug – die **z-Transformation**.
- Die z-Transformation wird für die Beschreibung diskreter Signale und Systeme, in der Filtertheorie und in der digitalen Reglertheorie benötigt.
- Es gibt zeitdiskrete Signale (z.B. der Einheitssprung) und Systeme, die keine Fourier-Transformierte haben, da die Summen bei der Berechnung der zeitdiskreten Fourier-Transformation nicht konvergieren.
Mit Hilfe der z-Transformation und den entsprechenden Methoden können i.a. auch Signale und Systeme beschrieben werden, die keine Fourier-Transformierte haben.

Da der Entwurf von IIR Filter die z-Transformation benötigt, habe ich für Interessierte eine Zusammenfassung auf das Netz gestellt:

→ [Vertiefung_IIR-Filter](#)

Digitale Filter

Digitale Filter haben in weiten Bereichen die analogen Filter abgelöst.

Im Gegensatz zu analogen Filter bieten sie die Vorteile:

- leichte Implementierung
- schnelle Änderung
- Steile Flanken

Analoge Filter werden oft noch als Antialiasing-Filter bei der A/D-Wandlung und als Smoothing-Filter bei der D/A-Wandlung eingesetzt..

Digitale (LTI-) Filter können in Finite Impuls Response (FIR) Filter ohne Rückkopplung und in Infinite Impulse Response (IIR) Filter (mit Rückkopplung) unterteilt werden.

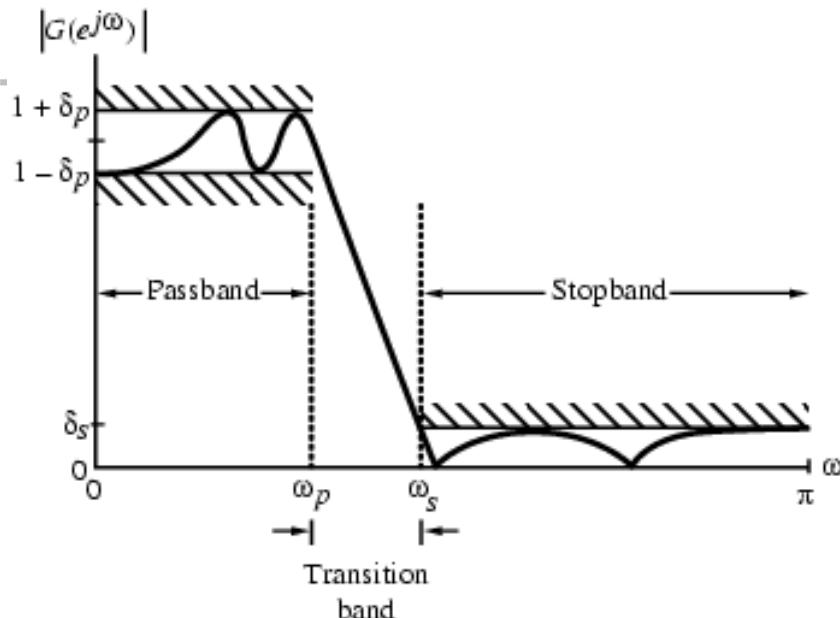
- FIR-Filter Differenzengleichung:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k]$$

- IIR-Filter Differenzengleichung:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k y[n-k]$$

Digitale Filter – Filterspezifikationen



Beispiel für Tiefpassspezifikation:

- Im Durchlassbereich $0 \leq \omega \leq \omega_{pass}$ fordern wir $|H(\omega)| \cong 1$ mit einer maximal zulässigen Abweichung von $\pm \delta_p$
- $$1 - \delta_p \leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta_p, \quad |\omega| \leq \omega_{pass}$$

- Im Sperrbereich $\omega_{stop} \leq \omega \leq \pi$ fordern wir $|H(\omega)| \cong 0$ mit einer maximal zulässigen Abweichung von δ_s

$$|H(\omega)| \leq \delta_s, \quad \omega_{stop} \leq |\omega| \leq \pi$$

Die Filterspezifikation enthält somit

- ω_{pass} - Eckfrequenz des Durchlassbereichs
- ω_{stop} - Eckfrequenz des Sperrbereichs
- δ_p - zulässige Welligkeit im Durchlassbereich (meist in dB)
- δ_s - minimale Sperrdämpfung im Sperrbereich (meist in dB)

Digitale Filter – FIR oder IIR?

Vorteile von FIR-Filter:

- können mit **linearem Phasengang** entworfen werden
(→ das Signal wird im Nutzband unverzerrt übertragen!)
- Betrag und Phase des Durchlassbereichs können unabhängig voneinander gewählt werden
- können für nahezu jeden beliebigen Frequenzgang mit vertretbarem Mehraufwand entworfen werden
- hat immer BIBO-Stabilität
- kann mittels DFT entworfen werden
- sind stabil und robust gegenüber Quantisierungsfehlern

Nachteile von FIR-Filter:

- benötigt für die gleiche Spezifikation eine **viel höhere Ordnung**, d.h. mehr Koeffizienten als ein IIR-Filter
(→ benötigt eine **deutlich höhere Rechenleistung** als ein vergleichbares IIR-Filter)
- benötigt ein komplexeres Entwurfsverfahren
- benötigt mehr Iterationen bis die Spezifikation getroffen wird.

Vorteile von IIR-Filter:

- Üblicherweise kann ein gegebenes Toleranzschema mit IIR-Filtern **wesentlich geringerer Ordnung** verglichen mit FIR-Filtern erfüllt werden.
(→ benötigt eine **deutlich niedrigere Rechenleistung** als ein vergleichbares FIR-Filter)
- können evtl. einfacher entworfen werden

Nachteile von IIR-Filter:

- Der **Phasengang** ist im Gegensatz zu symmetrischen FIR-Filtern üblicherweise **nichtlinear** im Durchlassbereich
→ es kommt dann zu Signalverzerrungen im Durchlassbereich
- Betrag und Phase des Durchlassbereichs können nicht unabhängig voneinander gewählt werden
- IIR-Filter können auch durch die Quantisierung der Koeffizienten instabil werden
- IIR-Filter weisen üblicherweise bei Realisierung in Fixed-Point Arithmetik stärkeres Rundungsrauschen auf

Digitale Filter – FIR oder IIR?

Daumenregel:

- Benutzen Sie ein **IIR-Filter** wenn die einzigen Anforderungen **scharfe Flanken** (=schmaler Übergangsbereich zwischen Durchlass- und Sperrbereich) und **hohe Datenraten** sind
- Benutzen Sie **FIR-Filter** wenn ein **linearer Phasengang** (=konstante Gruppenlaufzeit, =verzerrungsfreie Übertragung) benötigt wird.

Digitale Filter

Eigenschaften von FIR-Filtern

Differenzengleichung:

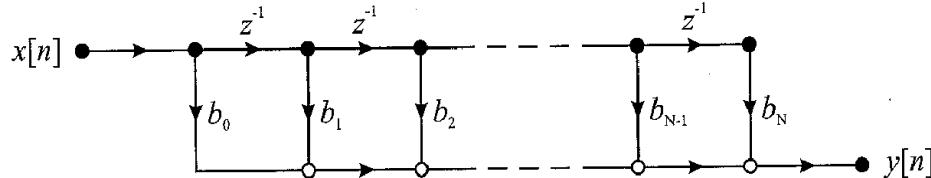
$$y[n] = \sum_{i=0}^N b_i x[n-i]$$

$$y[n] = b_0 \cdot x[n] + b_1 \cdot x[n-1] + b_2 \cdot x[n-2] + \dots + b_N \cdot x[n-N]$$

Impulsantwort

$$h[n] = \{h_0, h_1, \dots, h_N\} = \{b_0, b_1, \dots, b_N\}$$

- Die Impulsantwort eines nichtrekursiven LTI-Systems N -ter Ordnung ist gleich den Koeffizienten der Differenzengleichung
- Die Länge der Impulsantwort eines FIR-Systems N -ter Ordnung ist gleich $N+1$.



Übertragungsfunktion

$$H_z(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}$$

- Durch Erweiterung mit z^N kann die Übertragungsfunktion umgeformt werden:

$$H_z(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N}{z^N}$$

- Daraus geht hervor, dass alle Pole im Ursprung liegen und dass FIR-Filter somit immer stabil sind.

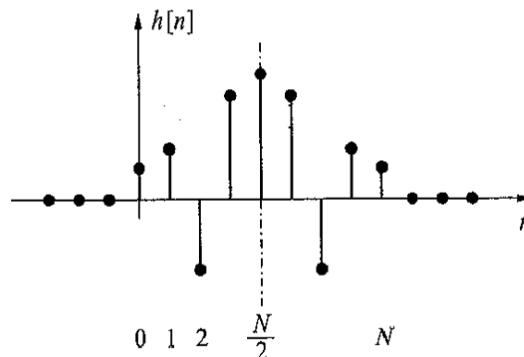
Digitale Filter

Eigenschaften von FIR-Filtern

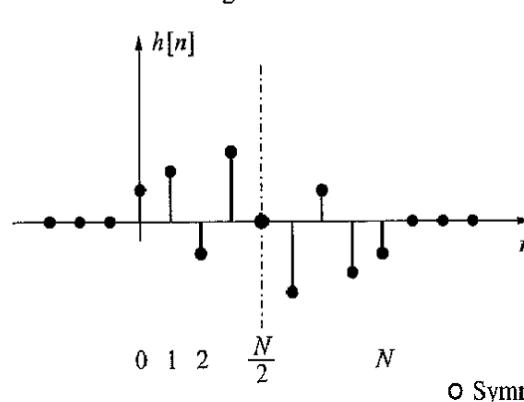
Eigenschaften von symmetrischen FIR-Filtern

- Sämtliche Entwurfsverfahren für FIR-Filter, die wir in der Folge kennen lernen werden, liefern symmetrische FIR-Filter.

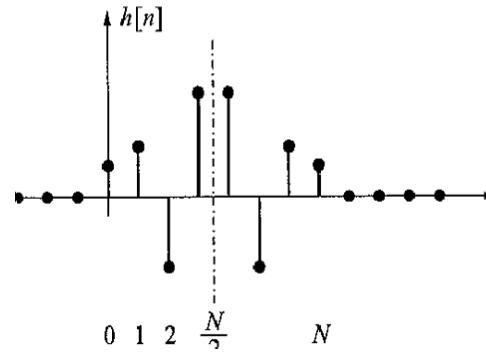
Typ 1: - Spiegelsymmetrisch
- N gerade



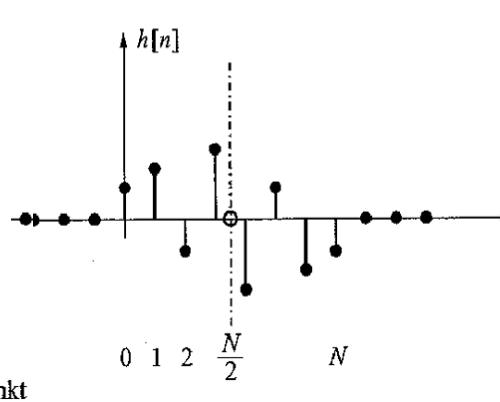
Typ 3: - Punktsymmetrisch
- N gerade



Typ 2: - Spiegelsymmetrisch
- N ungerade



Typ 4: - Punktsymmetrisch
- N ungerade



- Unter einem symmetrischen FIR-Filter versteht man ein Filter, das eine spiegel- oder punktsymmetrische Impulsantwort besitzt:
- Symmetrische FIR-Filter haben – abgesehen von 180° -Phasensprüngen – einen linearen Phasengang.
- Sie werden daher auch als linearphasige Filter bezeichnet.
- Symmetrische Filter gehen aus einer achsen- oder punktsymmetrischen Zeitfunktion durch Verschiebung (Modulation) um $N \cdot T_s/2$ hervor.
- Die Gruppenlaufzeit $t_g(f)$ symmetrischer FIR-Filter ist konstant und ihr Wert gleich $N \cdot T_s/2$.

Digitale Filter

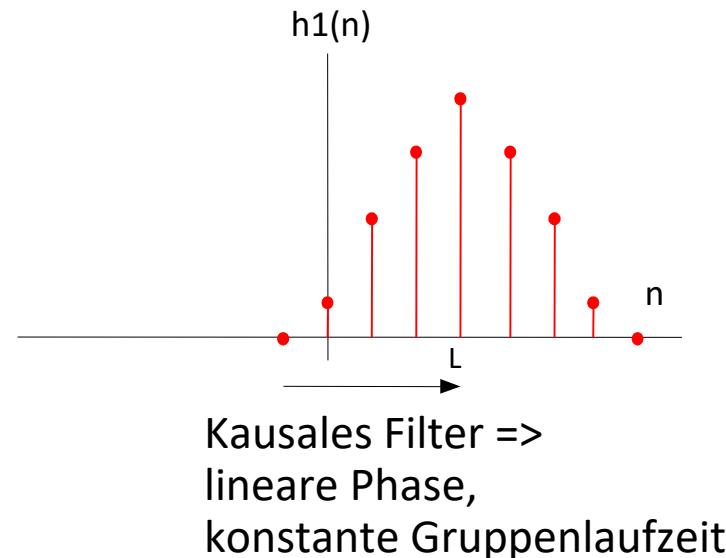
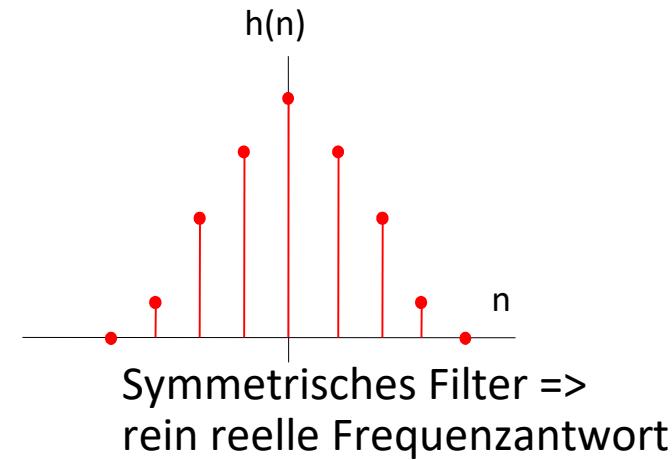
Eigenschaften von FIR-Filtern

■ Symmetrische FIR-Filter:

Ein linearphasiges Filter geht aus einem symmetrischen Filter hervor, indem die Impulsantwort um die halbe Filterlänge verzögert wurde.

Dadurch wird die Kausalität gewährleistet.

Die Verschiebung im Zeitbereich (=Faltung mit Dirac-Stoß bei $N \cdot T_s / 2$) entspricht im Frequenzbereich eine Multiplikation mit $e^{j2\pi f N \cdot T_s / 2}$

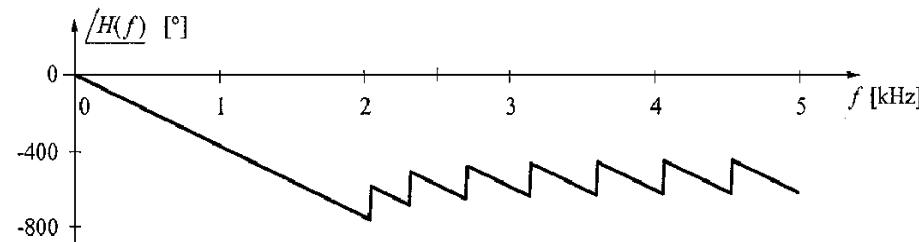
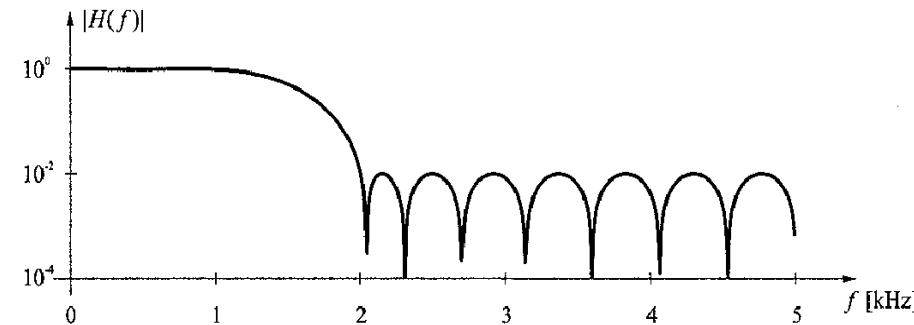


Digitale Filter

Eigenschaften von FIR-Filtern

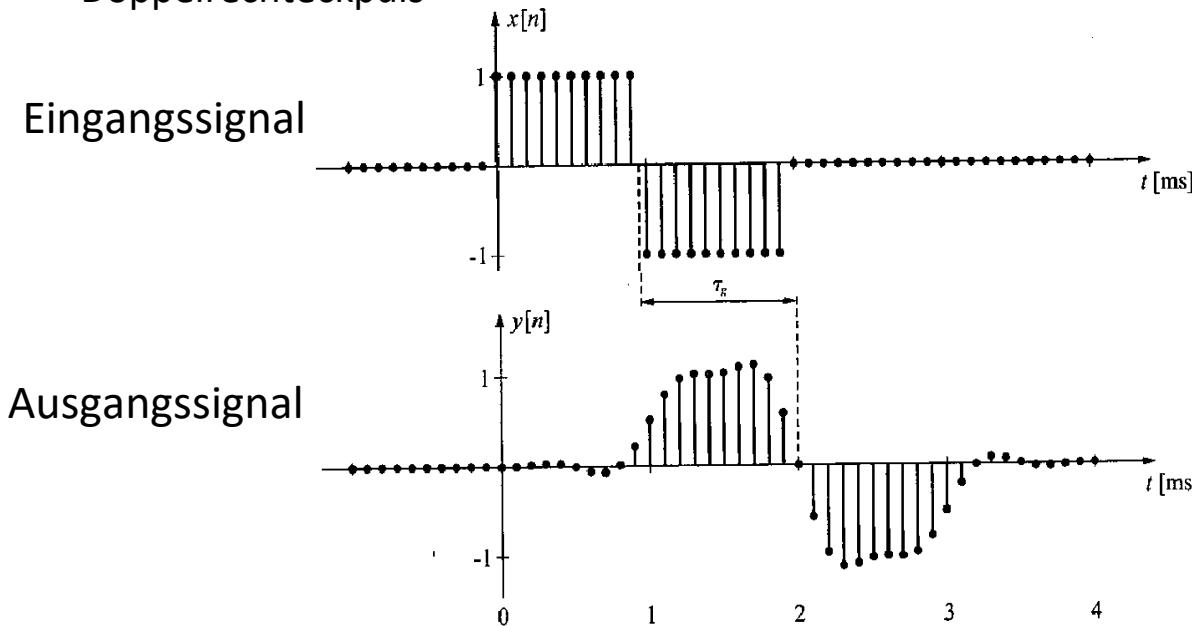
- Filter mit konstanter Gruppenlaufzeit haben die angenehme Eigenschaft, dass sie Signale im Durchlassbereich nicht verzerrern, sondern nur verzögern. Zudem bleibt die Symmetrie symmetrischer Pulse erhalten, was für viele Anwendungen vorteilhaft ist.
- Beispiel: Linearphasiges Tiefpass-Filter

- Frequenzgang



■ Zum obigen Beispiel:

- Ein- Ausgangsverhalten im Zeitbereich bei Anregung mit einem punktsymmetrischen Doppelrechteckpuls

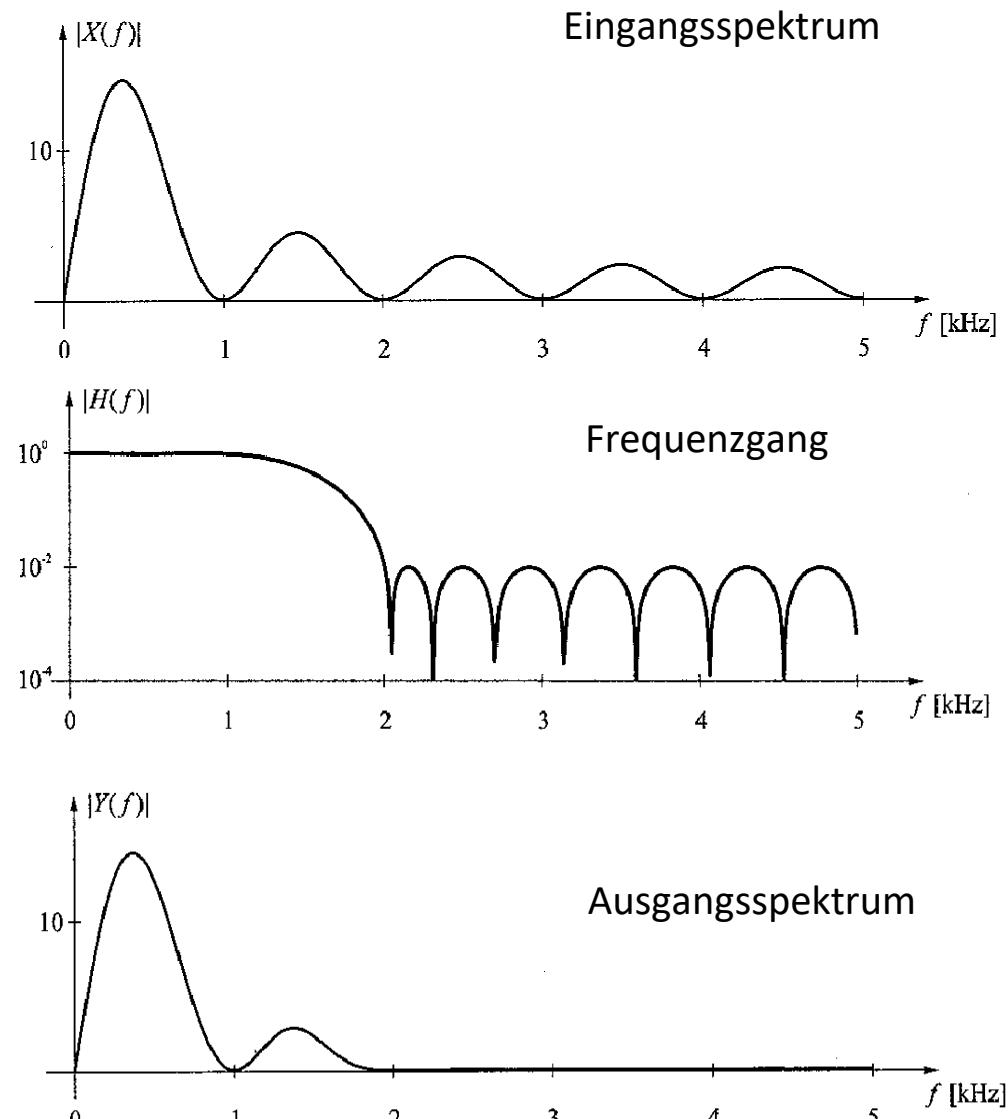


- Der tiefpassgefilterte Rechteckpuls ist erwartungsgemäß an seinen Ecken abgerundet, ist aber immer noch punktsymmetrisch.
- Der Schwerpunkt des Ausgangs-Pulses ist gegenüber dem Schwerpunkt des Eingangs-Rechteckpulses um die Gruppenlaufzeit $\tau_g = 1.05\text{ms}$ (10,5 Abtastpunkte T_S) verzögert.

Digitale Filter

Eigenschaften von FIR-Filtern

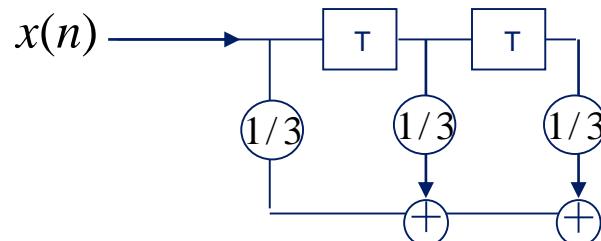
- Zum obigen Beispiel:
Ein- Ausgangs-verhalten
im Frequenzbereich bei
Anregung mit einem
punktsymmetrischen
Doppelrechteckpuls



FIR und IIR Filter: Übertragungsfunktion von FIR-Systemen

- Beispiel 2 für Differenzengleichung einer kausalen FIR-Systems

$$y[n] = \frac{1}{3}x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] + \frac{1}{3}x[n-2]$$



gleitender Mittelwert

$$x[n] = y[n] = 0 \quad \text{für } n = -1, -2, -3, \dots$$

Impulsantwort: Erregung mit einem Impuls:

→ $y[0] = \frac{1}{3}x[0] + \frac{1}{3}x[-1] + \frac{1}{3}x[-2]$

$$y[0] = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} \quad n = 0$$

$$y[1] = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} \quad n = 1$$

$$y[2] = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \quad n = 2$$

$$y[3] = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 \quad n = 3$$

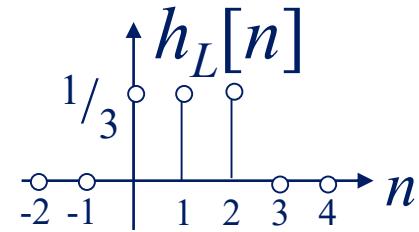
Übertragungsfunktion:

$$H_z(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N} = \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{3}z^{-3}$$

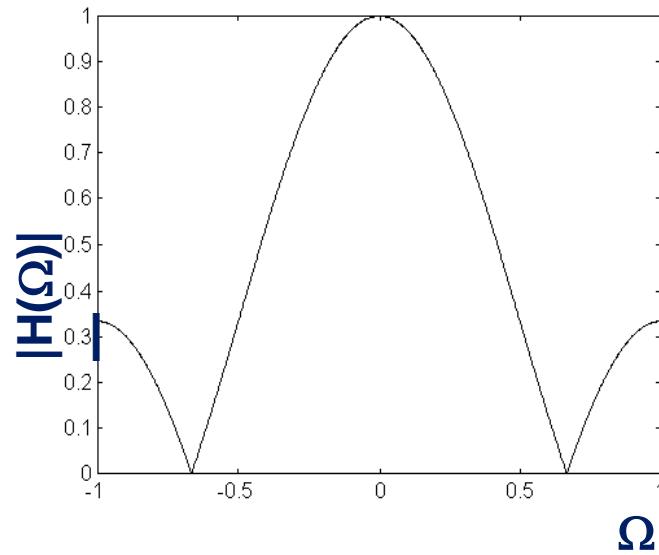
- Beispiel eines FIR-Tiefpassfilters 2. Ordnung

$$y[k] = \frac{x[k] + x[k-1] + x[k-2]}{3}$$

(gleitender Mittelwert)



Frequenzgang:

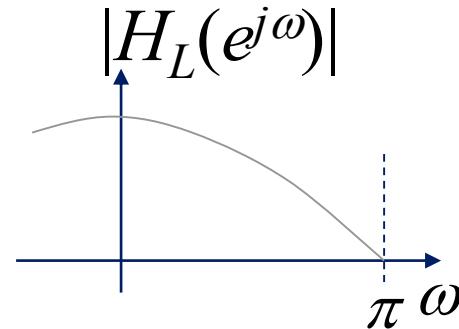
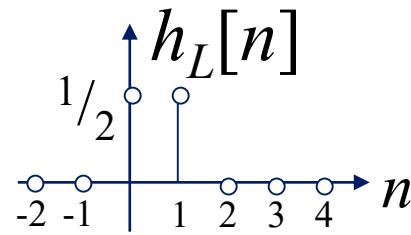


Digitale Filter

Eigenschaften von FIR-Filtern

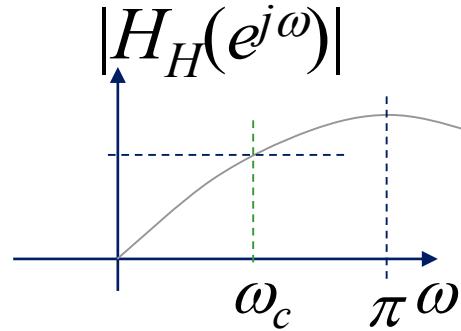
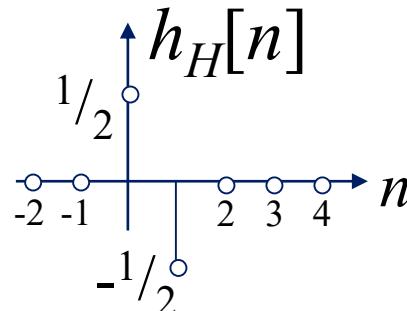
Beispiel 2 (gleitender Mittelwert über 2 Punkte):

$$y[k] = \frac{x[k] + x[k - 1]}{2}$$



Beispiel 3 (einfacher Hochpass):

$$y[k] = \frac{x[k] - x[k - 1]}{2}$$

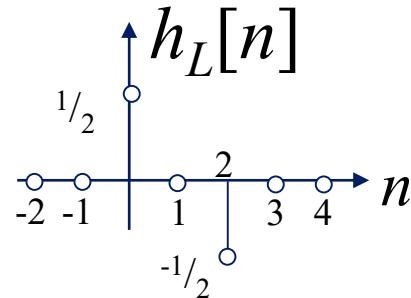


Digitale Filter

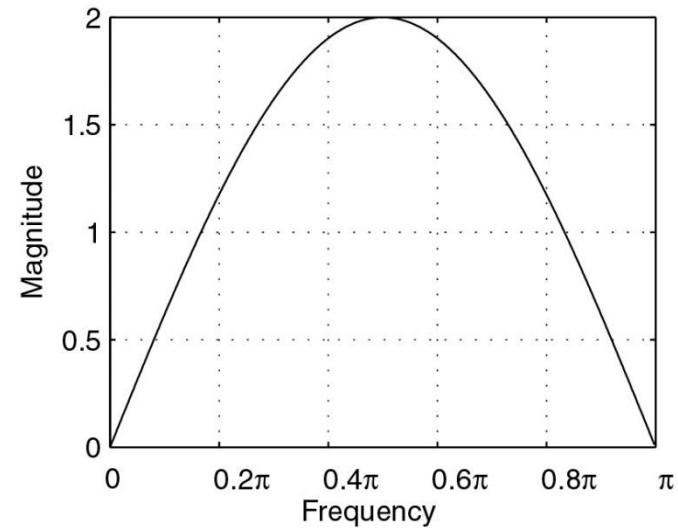
Eigenschaften von FIR-Filtern

Beispiel 4 (Bandpassfilter über 3 Punkte):

$$y[k] = \frac{x[k] - x[k-2]}{2}$$



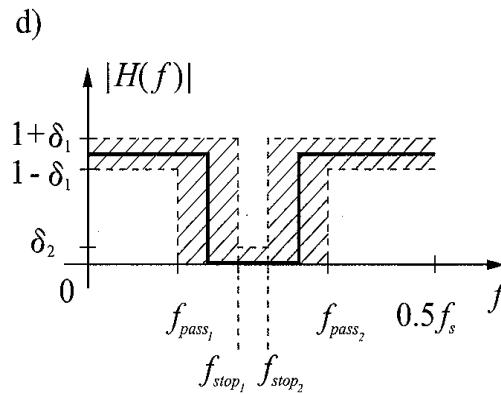
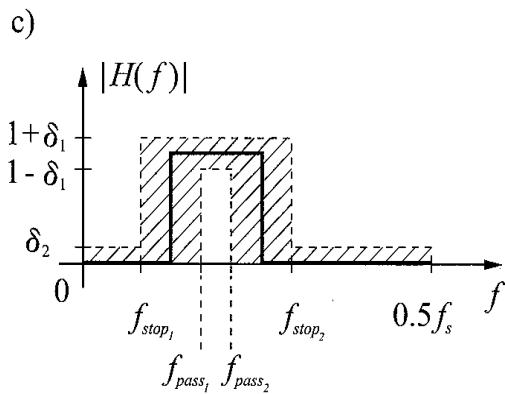
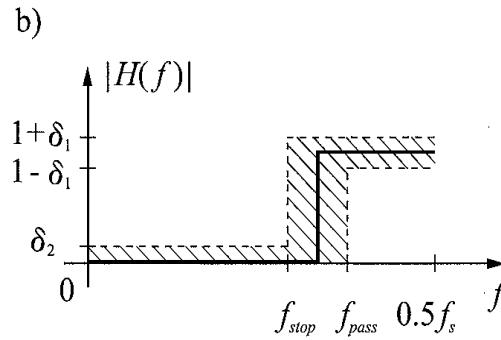
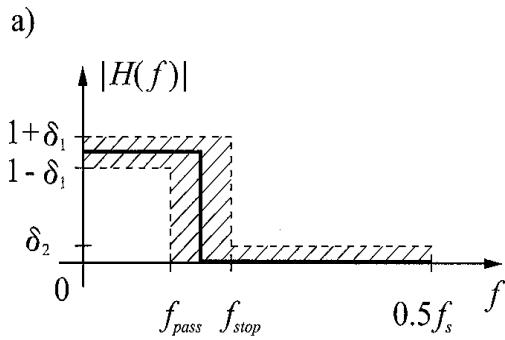
Frequenzgang:



Digitale Filter

Entwurf von FIR-Filtern

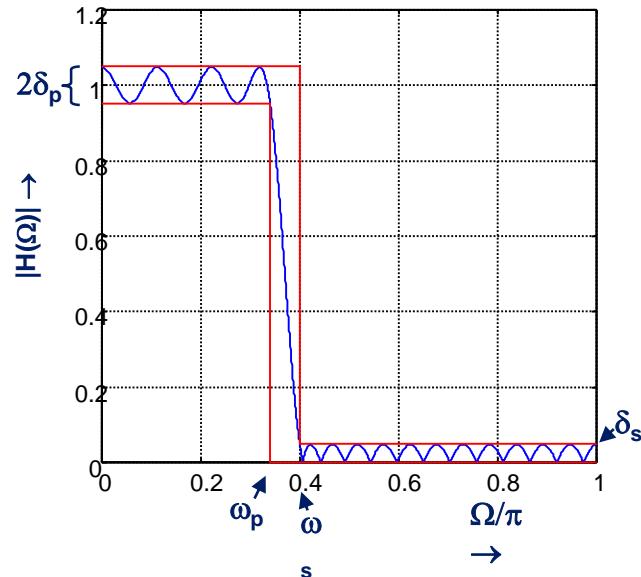
- **Vorgabe:** Spezifikation der grundlegenden Filterfunktionen mit Hilfe des Toleranzschemas des Amplitudengangs



- **Gesucht:** Filterordnung N , Filterkoeffizienten b_0, \dots, b_N

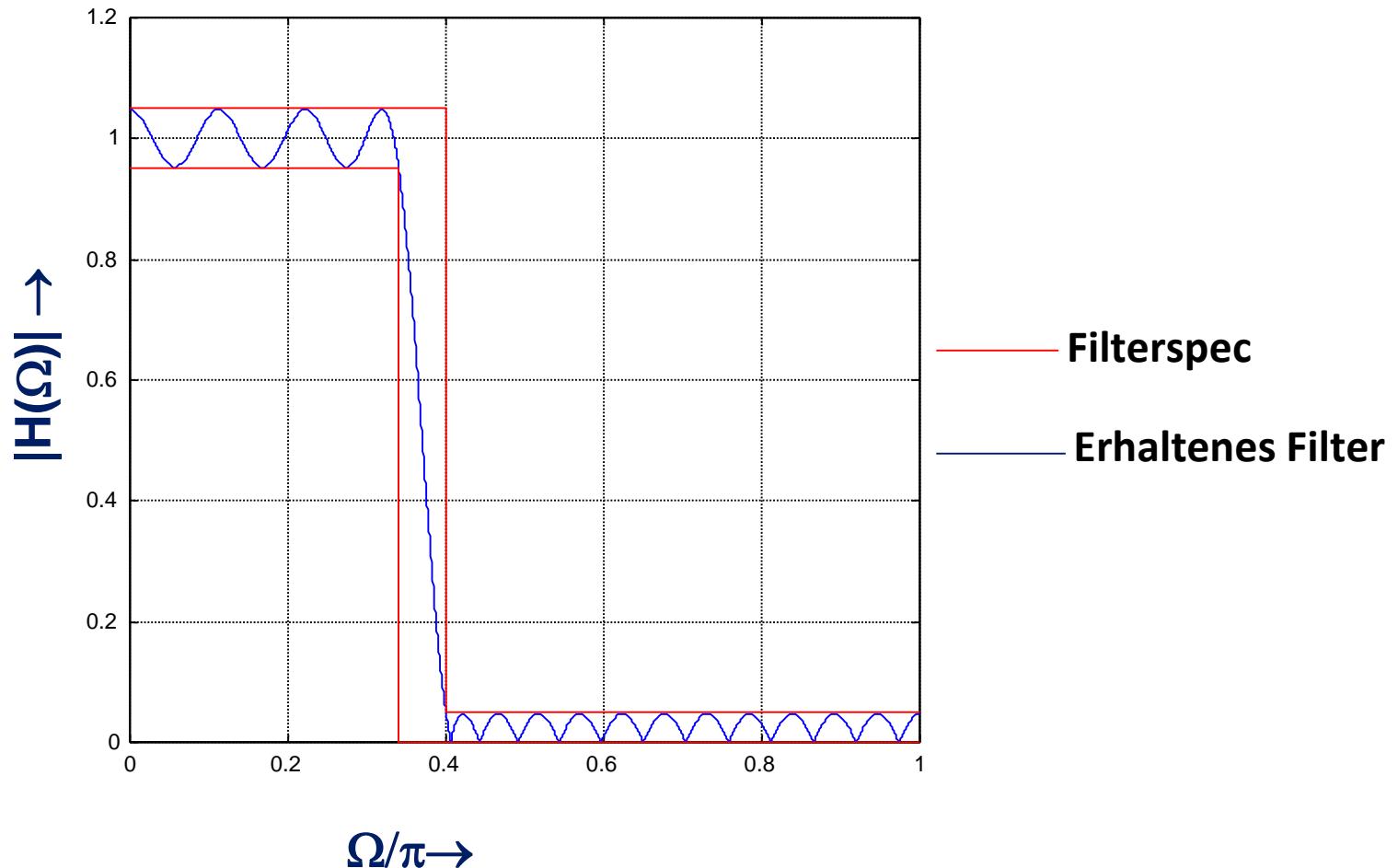
- Optimalmethode (Remez-Entwurf, Equiripple-Verfahren, Chebychev-Approximation)
 - Die benötigte Ordnung der Optimalmethode ergibt sich zu

$$N_e = \frac{2}{3} \log\left(\frac{1}{10 \delta_p \delta_s}\right) \frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_p}$$



- ✓ Unabhängig von der Bandbreite!
- ✓ Schwache (logarithmische) Abhängigkeit von der erlaubten Welligkeit (Rippel) im Durchlassbereich und von der Sperrbereichsunterdrückung
- ✓ Lineare Abhängigkeit von der rel. Übergangsbandbreite!

■ Beispiel zur Optimalmethode



■ Entwurfsüberprüfung

- Ein Entwurf muss immer auch auf Tauglichkeit überprüft werden, indem im Zeitbereich Nullen angehängt werden (zero-padding) und dann mittels FFT in den Frequenzbereich transformiert wird.
- Die FFT Algorithmen nehmen immer an, dass der Zeitbereich bei $t=0$ beginnt. Eventuelle andere Grundlaufzeiten müssen daher „von Hand“ korrigiert werden.
- Die Impulsantwort eines Entwurfs sollte gegen Ende des Filters langsam gegen Null gehen. Sollte diese Bedingung verletzt sein, so stimmt etwas mit dem Entwurf nicht. Ein scharfes Ende im Zeitbereich bedingt immer große Rippel im Frequenzbereich.

Gegenmaßnahmen:

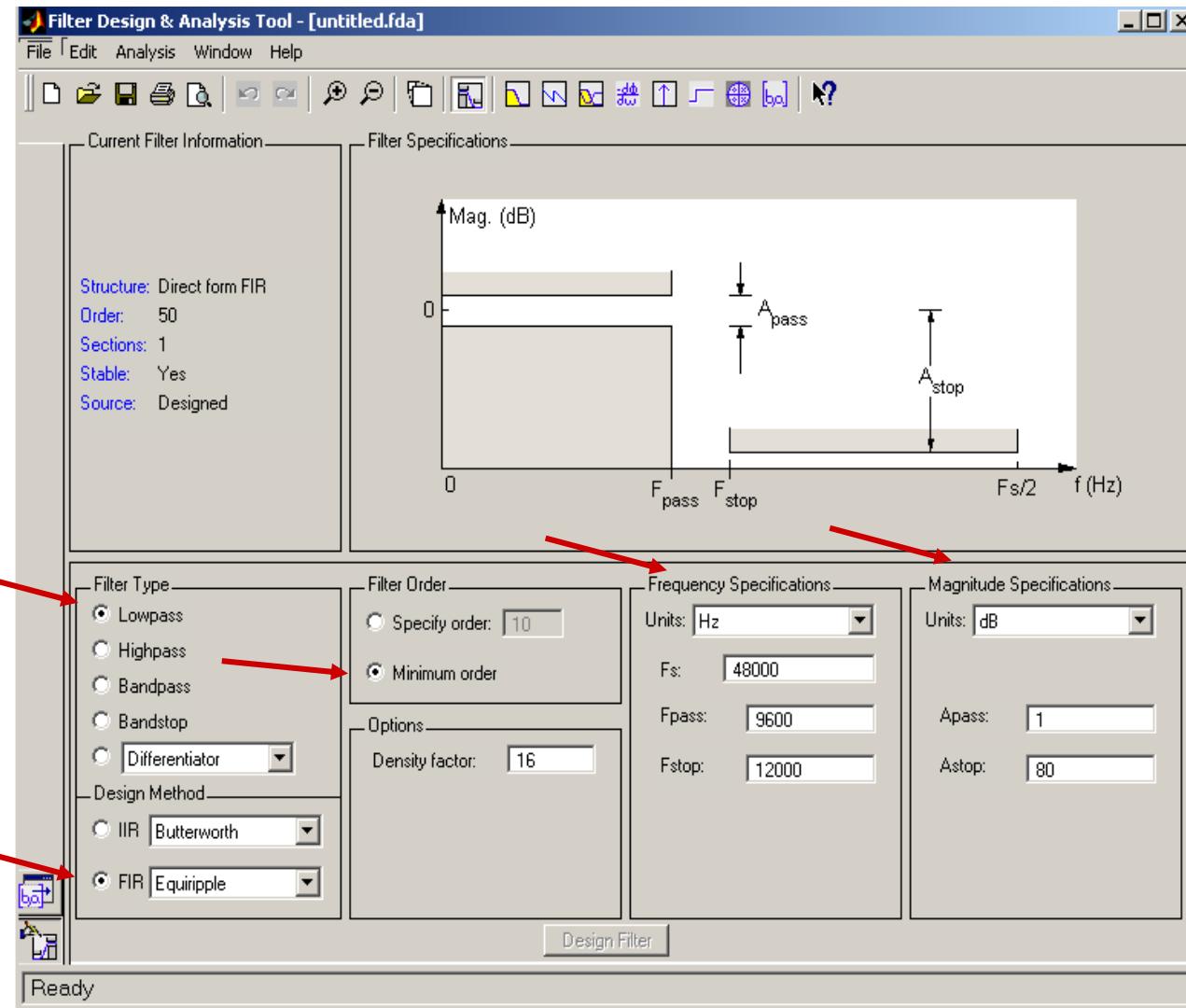
- Zeitlänge erhöhen,
- Übergänge im Frequenzbereich glätten,
- sanfteres Fenster im Zeitbereich verwenden.

■ MATLAB®: Signal Processing Toolbox

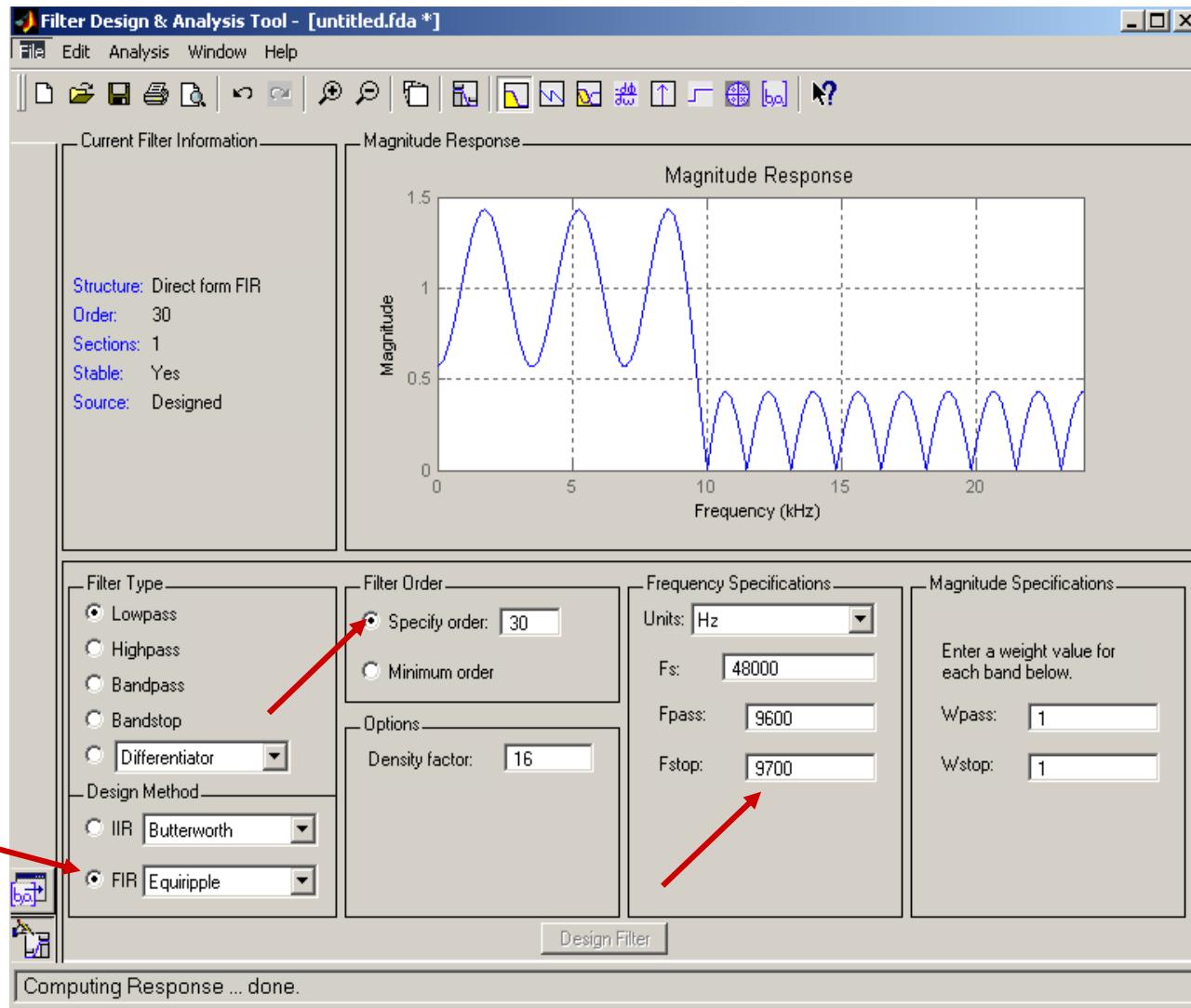
Die Signal Processing Toolbox von MATLAB ist eine Sammlung von äußerst nützlichen Routinen, die auf die Rechenumgebung von MATLAB® aufbauen. Die Toolbox bietet eine große Auswahl von Programmen zur Signalverarbeitung:

- Filterentwurf und Implementation
- Fensterfunktionen
- Transformationen
- statistische Signalverarbeitung und Spektralanalyse
- Wellenformdesign
- usw...

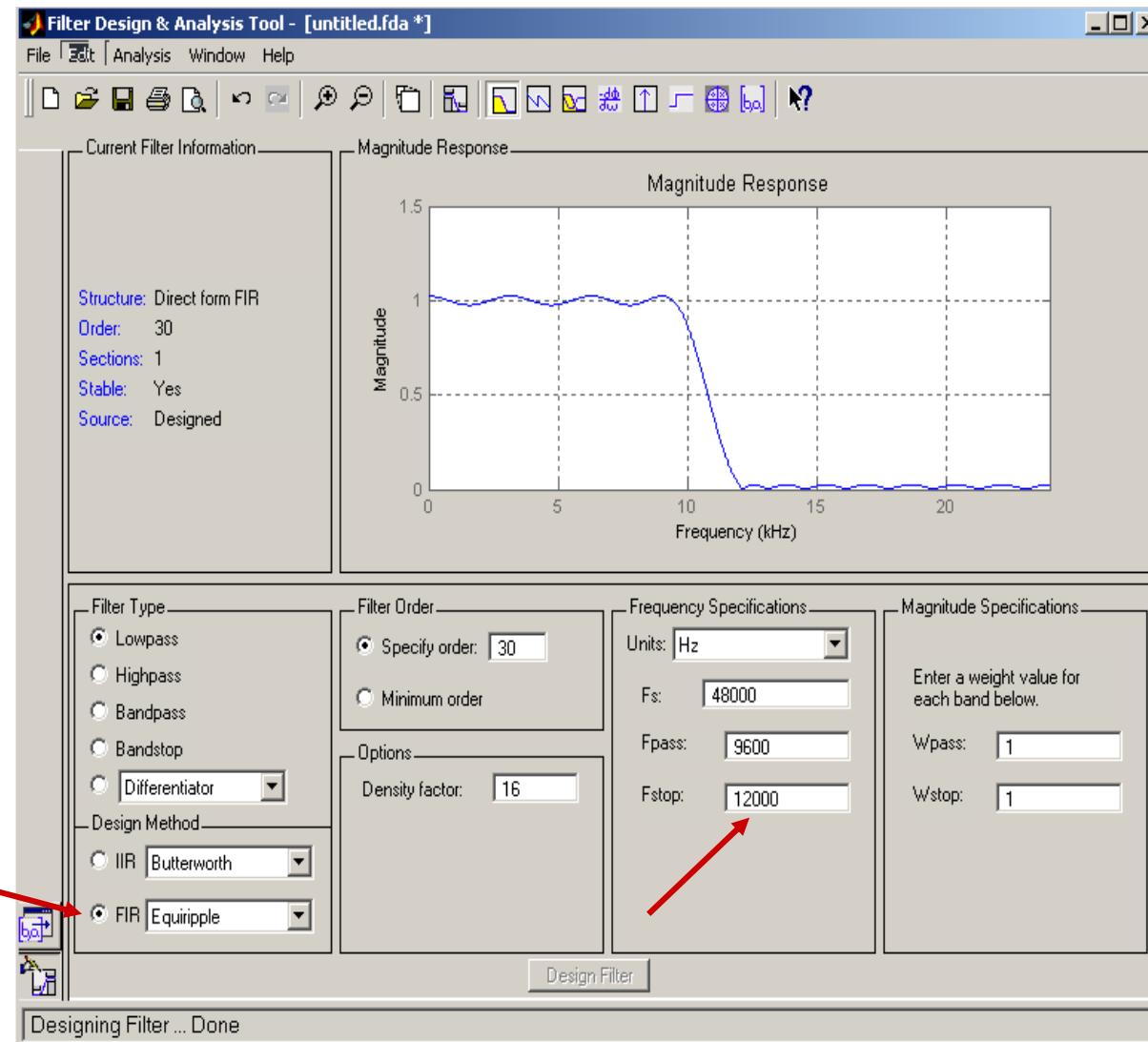
Entwurf von FIR-Filtern: MATLAB FD&A-tool



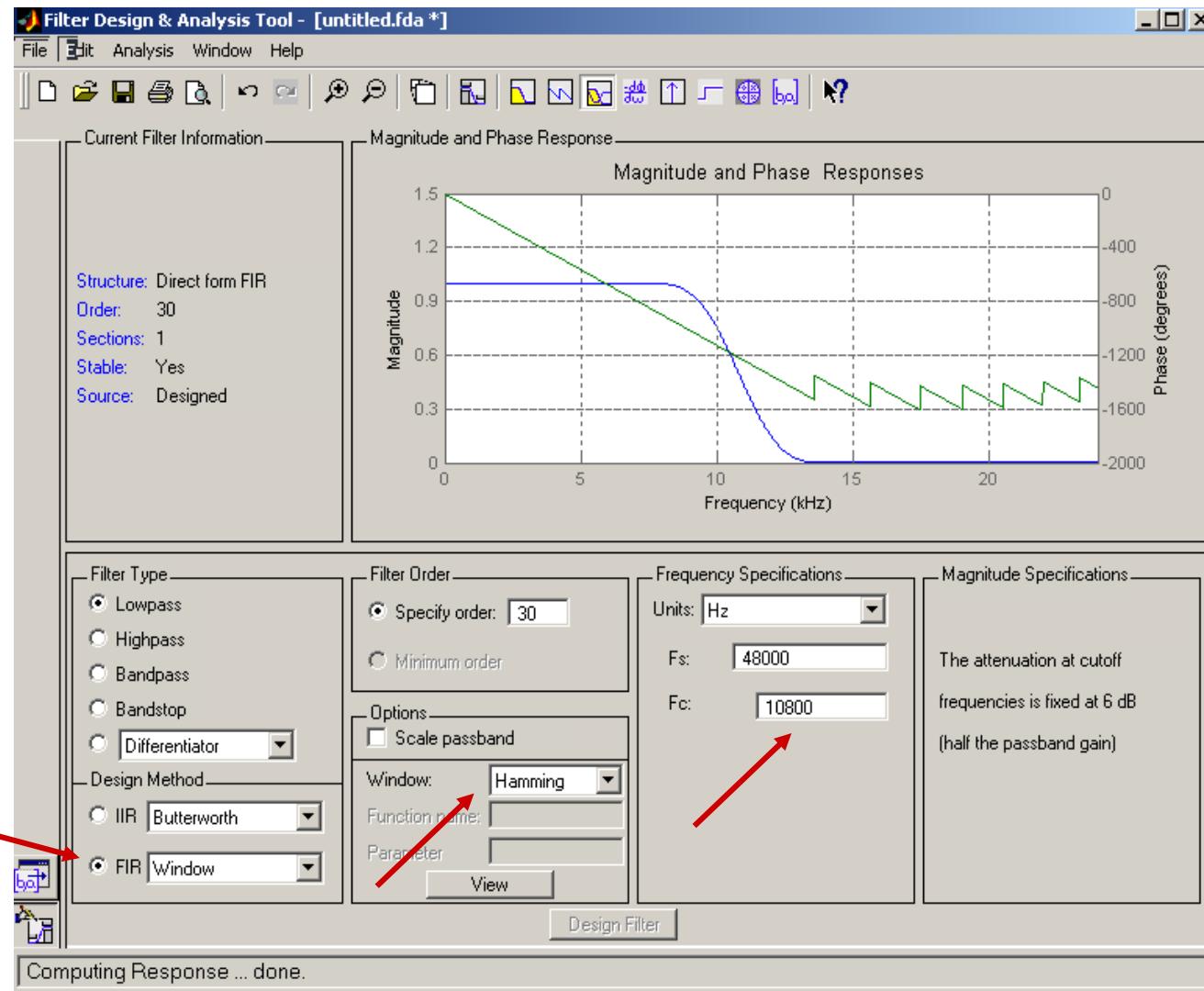
Entwurf von FIR-Filtern: MATLAB FD&A-tool



Entwurf von FIR-Filtern: MATLAB FD&A-tool

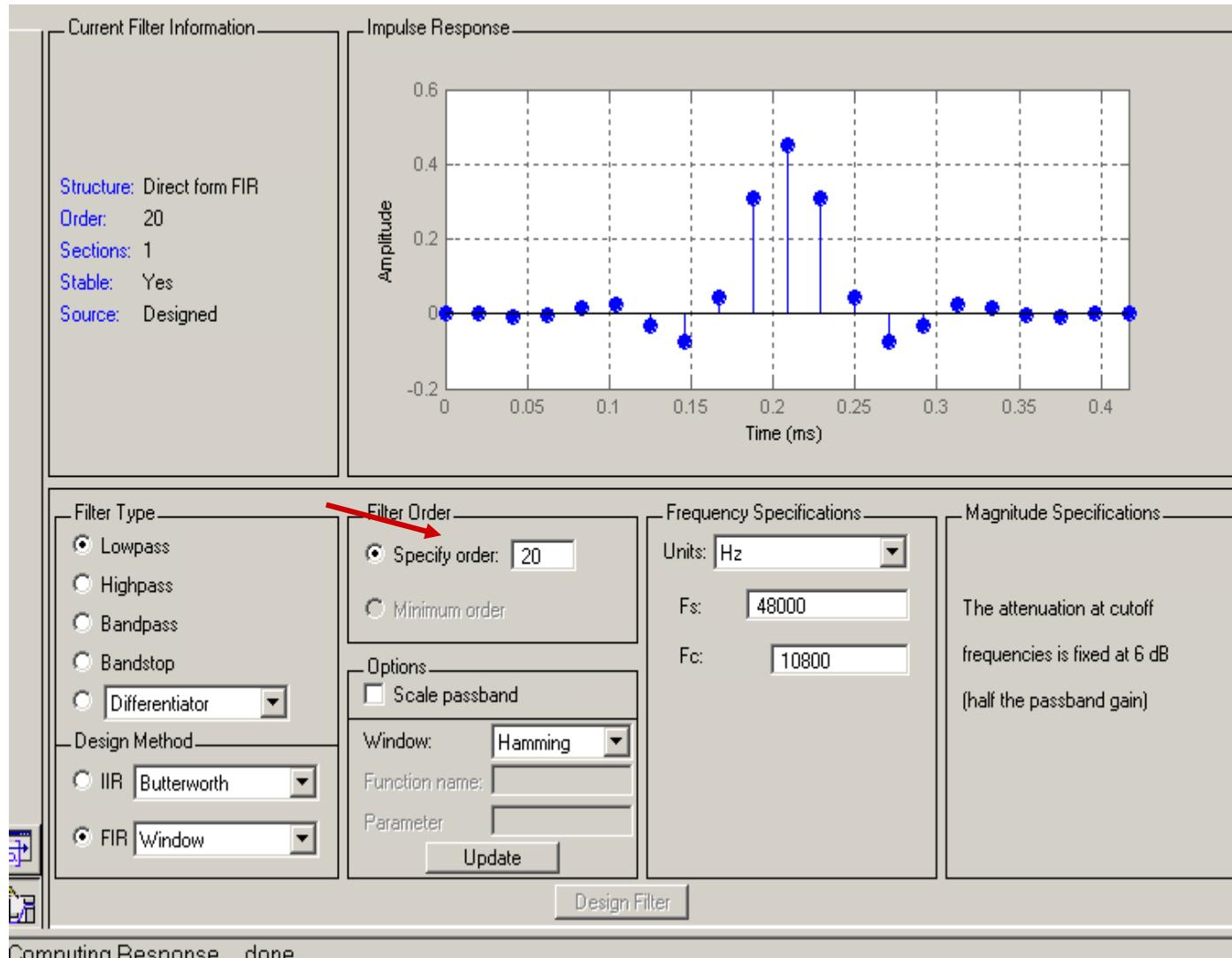


Entwurf von FIR-Filtern: MATLAB FD&A-tool

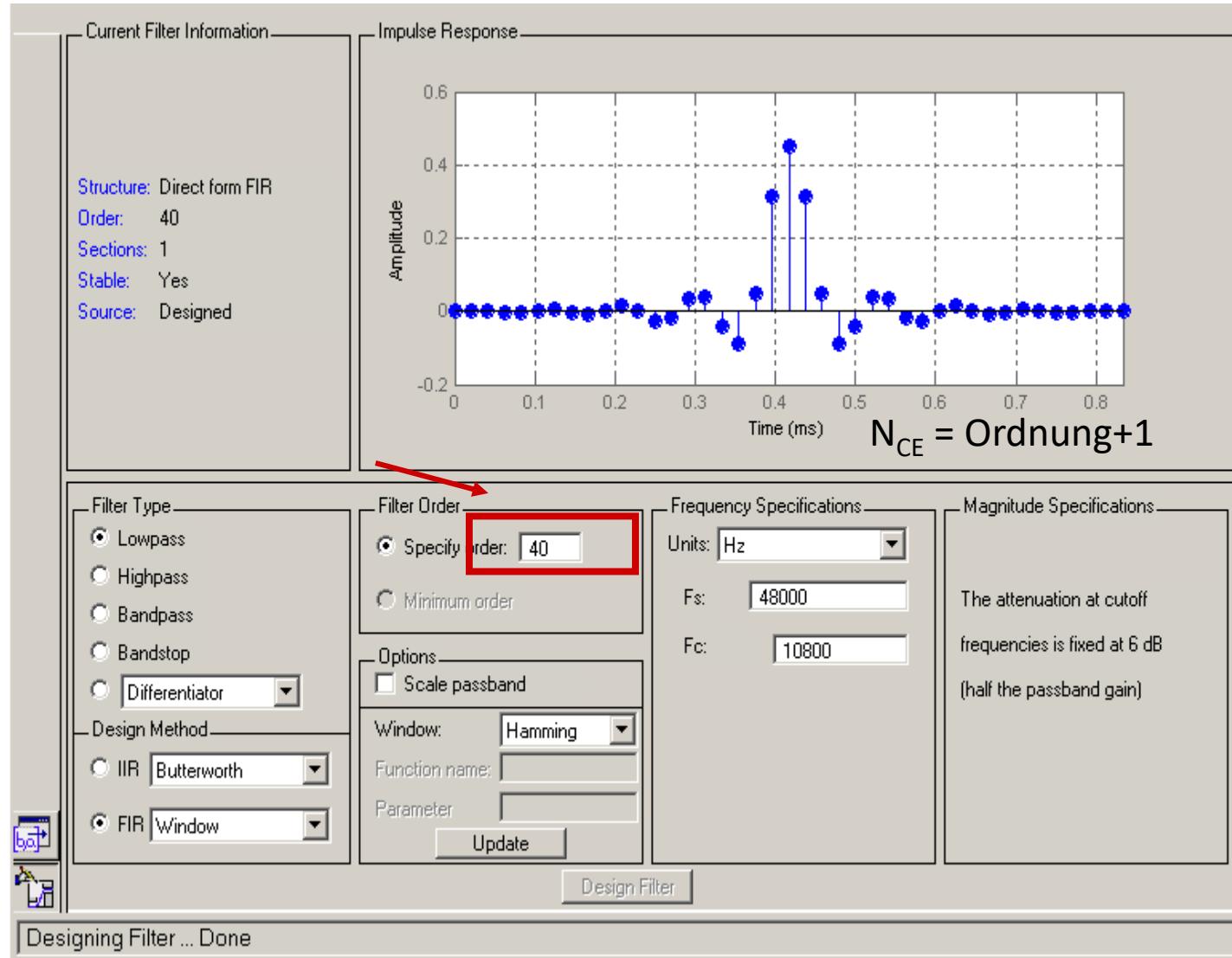


Entwurf von FIR-Filtern: MATLAB FD&A-tool

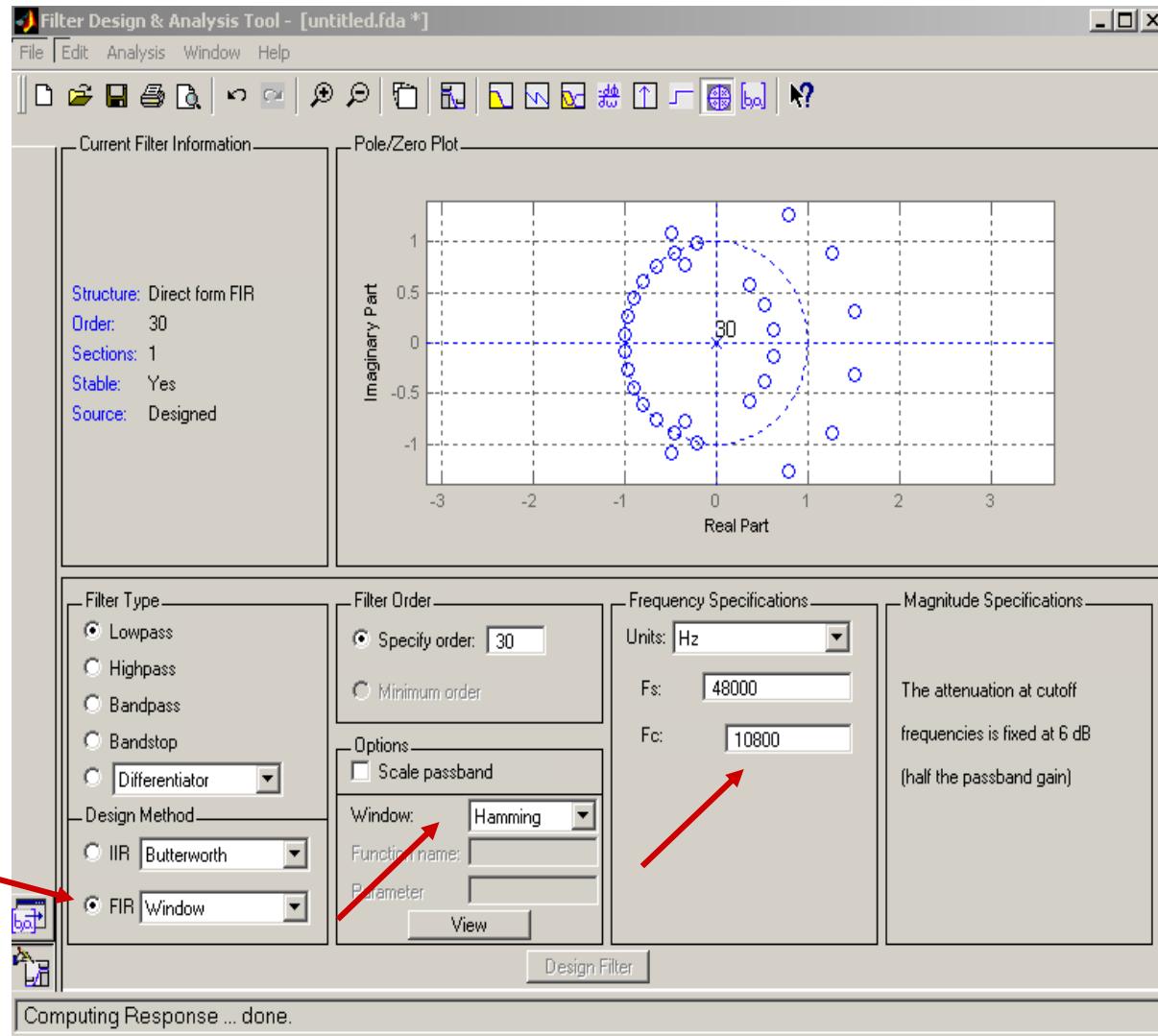
Impulsantwort eines Hamming-Filters der Ordnung 20



Impulsantwort eines Hamming-Filters der Ordnung 40



Entwurf von FIR-Filtern: MATLAB FD&A-tool



11. Kalman Filter

EINFÜHRUNG

A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems¹

R. E. KALMAN

Research Institute for Advanced Study,²
Baltimore, Md.

The classical filtering and prediction problem is re-examined using the Bode-Shannon representation of random processes and the "state transition" method of analysis of dynamic systems. New results are:

(1) The formulation and methods of solution of the problem apply without modification to stationary and nonstationary statistics and to growing-memory and infinite-memory filters.

(2) A nonlinear difference (or differential) equation is derived for the covariance matrix of the optimal estimation error. From the solution of this equation the coefficients of the difference (or differential) equation of the optimal linear filter are obtained without further calculations.

(3) The filtering problem is shown to be the dual of the noise-free regulator problem.

The new method developed here is applied to two well-known problems, confirming and extending earlier results.

The discussion is largely self-contained and proceeds from first principles; basic concepts of the theory of random processes are reviewed in the Appendix.

Introduction

AN IMPORTANT class of theoretical and practical problems in communication and control is of a statistical nature. Such problems are: (i) Prediction of random signals; (ii) separation of random signals from random noise; (iii) detection of signals of known form (pulses, sinusoids) in the presence of random noise.

In his pioneering work, Wiener [1]³ showed that problems (i) and (ii) lead to the so-called Wiener-Hopf integral equation; he also gave a method (spectral factorization) for the solution of this integral equation in the practically important special case of stationary statistics and rational spectra.

Many extensions and generalizations followed Wiener's basic work. Zadeh and Ragazzini solved the finite-memory case [2]. Concurrently and independently of Bode and Shannon [3], they also gave a simplified method [2] of solution. Botonin discussed the nonstationary Wiener-Hopf equation [4]. These results are now in standard texts [5-6]. A somewhat different approach along these main lines has been given recently by Darlington [7]. For extensions to sampled signals, see, e.g., Franklin [8], Lees [9]. Another approach based on the eigenfunctions of the Wiener-Hopf equation (which applies also to nonstationary problems whereas the preceding methods in general don't), has been pioneered by Davis [10] and applied by many others, e.g., Shinnibrot [11], Blum [12], Pugachev [13], Solodovnikov [14].

In all these works, the objective is to obtain the specification of a linear dynamic system (Wiener filter) which accomplishes the prediction, separation, or detection of a random signal.⁴

¹ This research was supported in part by the U. S. Air Force Office of Scientific Research under Contract AF 49 (638)-382.

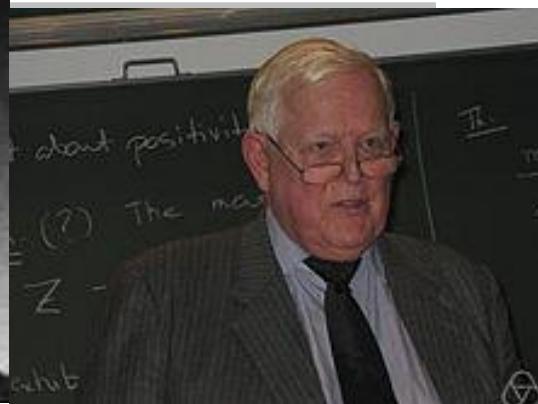
² 7212 Bellona Ave.

³ Numbers in brackets designate References at end of paper.

⁴ Of course, in general these tasks may be done better by nonlinear filters. At present, however, little or nothing is known about how to obtain (both theoretically and practically) such filters.

Contributed by the Instruments and Regulators Division and presented at the Instruments and Regulators Conference, March 29-April 1, 1959, of THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS.

NOTE: Statements and opinions advanced in papers are to be understood as individual expressions of their authors and not those of the Society. Manuscript received at ASME Headquarters, February 24, 1959. Paper No. 59-IRD-11.



Rudolf Emil Kálmán (ungarisch Kálmán Rudolf Emil, * 19. Mai 1930 in Budapest) ist ein ungarisch-US-amerikanischer Mathematiker. Er entwickelte 1960 das nach ihm benannte Kalman-Filter.

Knapp daneben ist auch vorbei “Near a miss is still a miss.”

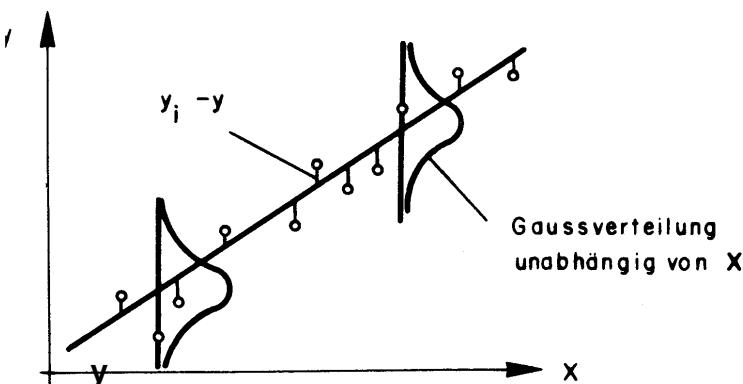


Kalman- Filter wurden popular, als die NASA für die Apollo Missionen Kalman- Filter zur Kontrolle der Flugbahn einsetzte.

Gliederung

- Motivation
- Wiederholung: Wahrscheinlichkeitsdichte
- Der Kalman Filter
- The Extended Kalman Filter (EKF)
- Examples
 - Distance measurement
 - GPS position filtering
 - Estimating a Random Constant

- Signalverarbeitungsroutinen sollen meist das Signal erhalten oder auswerten und dabei das Rauschen und Störungen unterdrücken.
- Nachdem eine Messreihe abgeschlossen ist, kann durch Analyse der Messdaten oft entschieden werden, welcher Anteil das Signal und welcher Rauschen darstellt.
- Wenn das erwartete Signal eine Tiefpasscharakteristik aufweist, können wir das Signal tiefpassfiltern oder über N Punkte mitteln.
- Dadurch verringert sich die Standardabweichung σ des Ergebnisses um \sqrt{N} oder die Varianz σ^2 um N. Allerdings verringert sich gleichzeitig die Signalbandbreite und damit das dynamische Verhalten des Signals um den Faktor N.



SS 2019

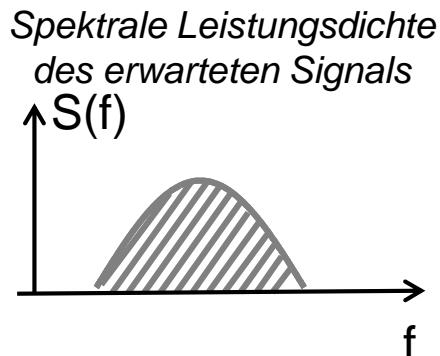
Ausgleichsgerade

Messtechnik – Prof. Dr. L. M. Reindl

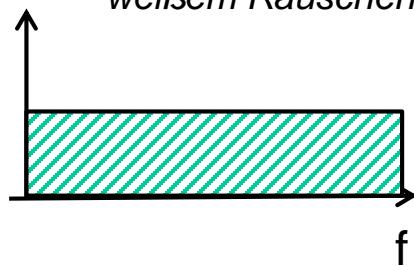
Tiefpassfilter

- 640 -

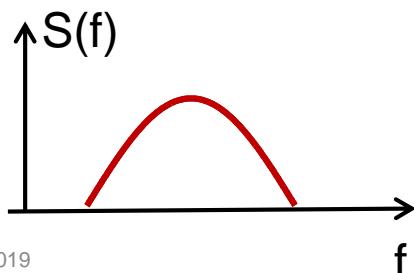
Signal zu Rausch-Verhältnis



Spektrale Leistungsdichte von weißem Rauschen

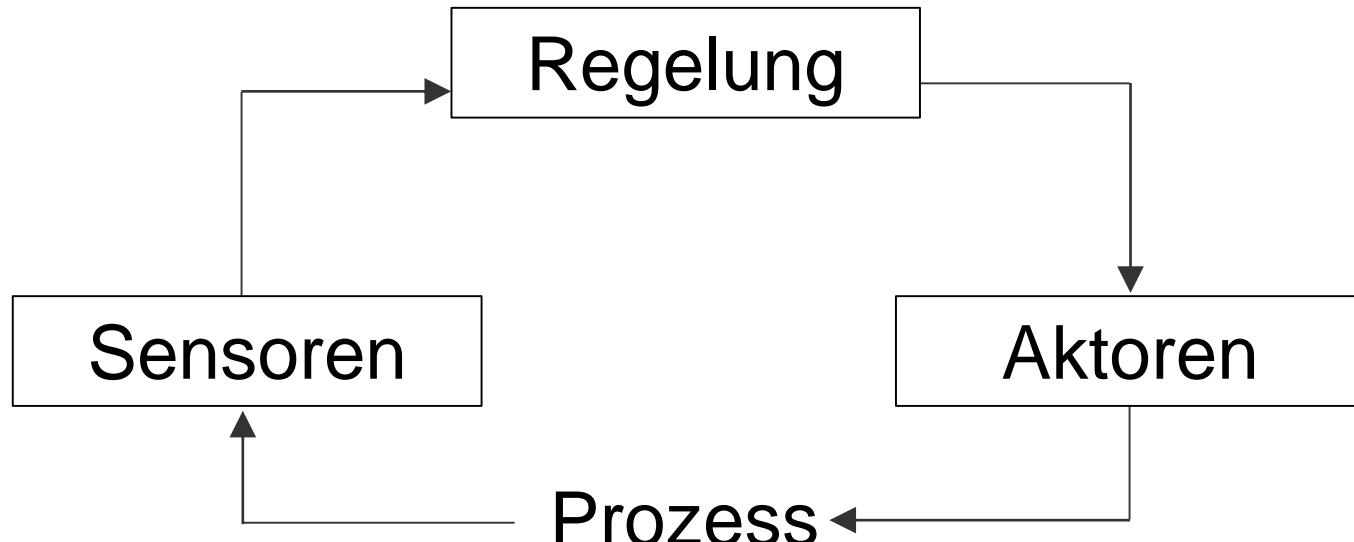


Frequenzgang des signalangepassten Filters

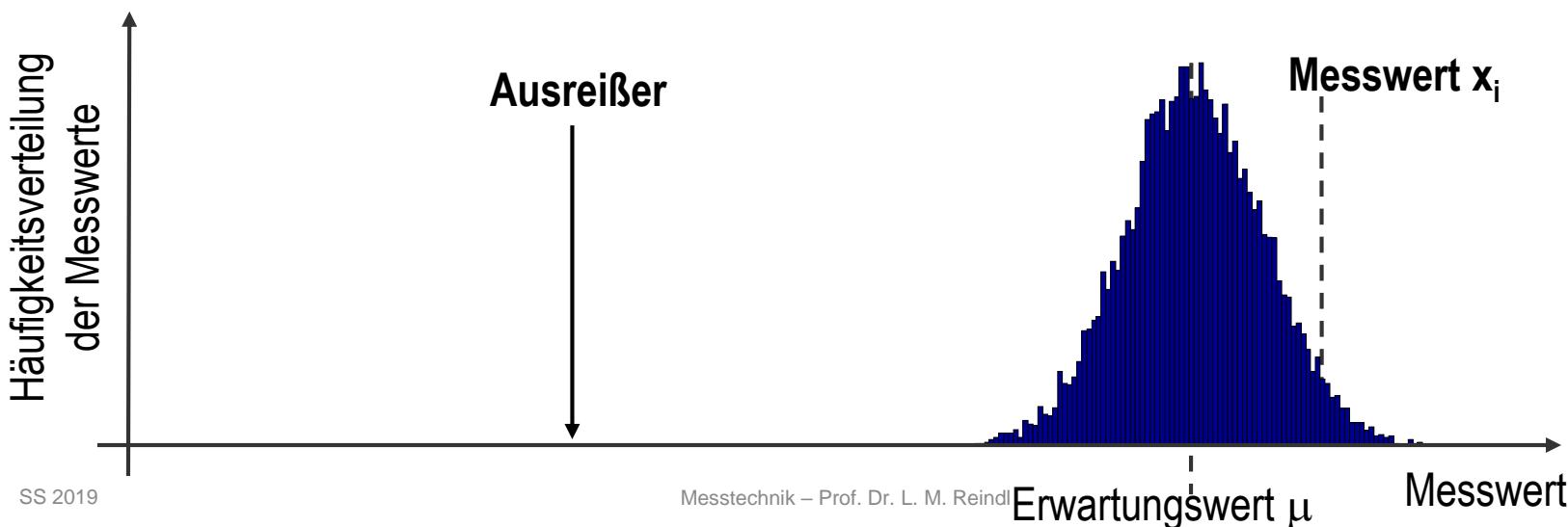


- Wenn wir wissen, dass unser erwartetes Signal eine Bandpasscharakteristik aufweist, kann es entsprechend gefiltert werden. Dadurch werden gleichzeitig Drift und Offsetfehler eliminiert.
- Wenn wir die spektrale Verteilung genau kennen, so können wir das Signal zu Rauschverhältnis durch ein sogenanntes signalangepasstes Filter optimieren.
- Der Frequenzgang des signalangepassten Filters ist (außer einer Verzögerung) konjugiert komplex zum erwarteten Signalspektrum.
- Für derartige Routinen muss jedoch das gesamte Signal vollständig vorliegen.

- Üblicherweise werden Sensoren jedoch zur Regelung eines Prozesses eingesetzt.
- Für eine Regelung benötigen wir jedoch eine Echtzeitfunktionalität.
- Ein Kalman Filter bietet eine Echtzeitfunktionalität.
- Zusätzlich erlaubt ein Kalman Filter, unsere Kenntnisse über den Prozess im Filter zu berücksichtigen. Und er ermöglicht eine Filterung ohne Beschränkung der dynamischen Bandbreite des Signals.
- Man kann zeigen, dass für lineare Systeme ein Kalman Filter das optimale Filter darstellt.



- Messwerte enthalten üblicherweise Rauschen, das sich in einer charakteristischen Verteilung der Messwerte auswirkt.
- Vor der Berechnung des Erwartungswertes μ oder der Varianz σ^2 sollten Ausreißer eliminiert werden, da sie viel zusätzliches Rauschen in die Varianz einbringen würden. Die Frage ist jedoch, was ist ein Ausreißer und was ein regulärer Messpunkt?



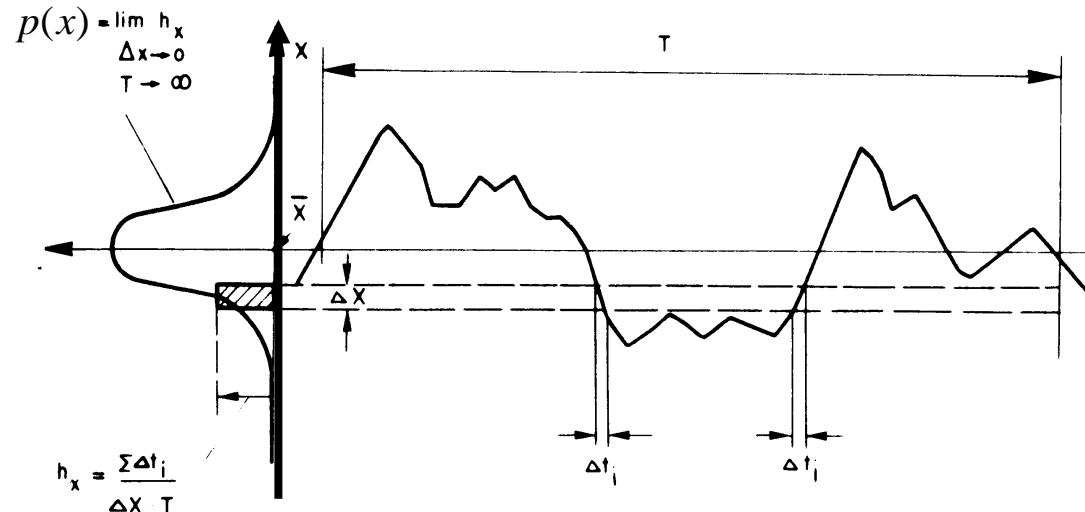
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x)$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x)$:

Gibt die durchschnittliche Häufigkeit für das Auftreten bestimmter Amplitudenwerte in einem stationären stochastischen Signal, oder den Rauschanteil $n(t)$ in einem zeitlich veränderlichen Signal.

Es wird näherungsweise bestimmt durch die Summe der Zeitintervalle, in der die Amplitude des stochastischen Signals innerhalb dieses spezifischen Amplitudenintervall liegt, normiert auf die gesamte zeitliche Länge des analysierten Signals.

$$p(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta x \cdot T} \sum_{i=1}^n \Delta t_i$$



Für diskrete Zufallsvariablen ergibt sich für jeden Amplitudenwert x_i die Wahrscheinlichkeit p_i . Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten p_i ist wieder auf 1 normiert.

Wiederholung: Mittelwert, Erwartungswert, Varianz, Standard Abweichung

Für eine Stichprobe mit N Werten einer diskreten Zufallsvariable X ergibt sich der Mittelwert \bar{X} zu

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$$

Der Erwartungswert $\mu(X)$ der diskreten Zufallsvariablen x_i mit der Dichtefunktion p_i ergibt sich zu

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot xi$$

Die Varianz σ^2 von X beträgt

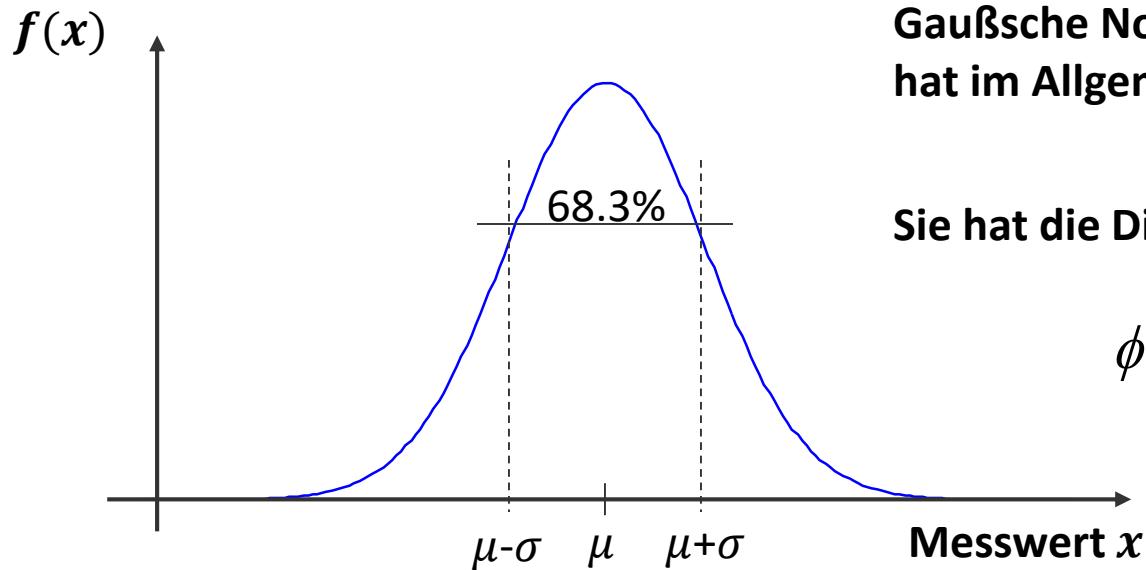
$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

Die Standardabweichung berechnet sich daraus zu σ

Normalverteilung oder Gaußverteilung

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Gaußsche Verteilungsfunktion



**Gaußsche Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$
hat im Allgemeinen $\mu \neq 0$ und $\sigma \neq 1$**

Sie hat die Dichte $f(x)$

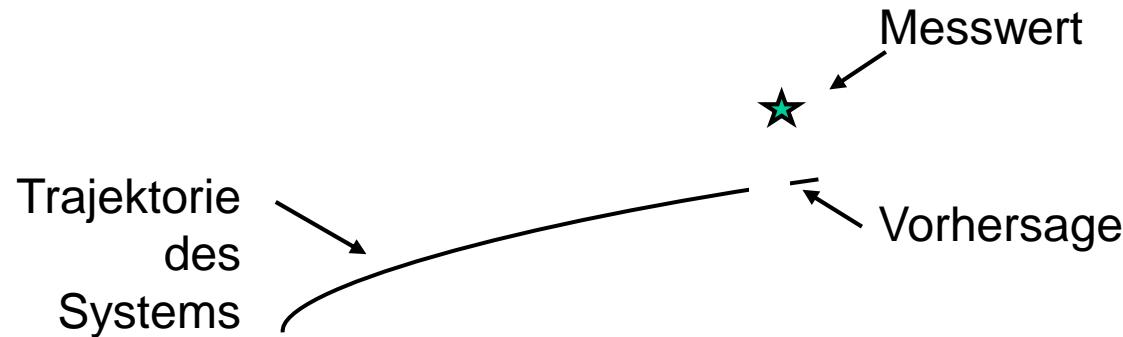
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Da die Gaußverteilung symmetrisch zu μ ist, fallen Erwartungswert und Mittelwert zusammen.

Um entlang der Trajektorie Systems filtern zu können benötigen wir eine Vorhersage für den nächsten Messwert.

Eine Ableitung zur Berechnung der aktuellen Tangente führt jedoch zu sehr großem Rauschen, da kleine Messfehler in der Ableitung zu einer starken Streuung der Vorhersage führen.

Daher benötigen wir ein Modell, mit dem wir die Entwicklung des Systems für den nächsten Abtastzeitpunkt vorhersagen können. Dieses Modell nennen wir Zustandsmodell.



Im Rahmen der mathematischen Schätztheorie nennt man das Kalman Filter deshalb einen Bayes'schen Minimum-Varianz-Schätzer für lineare stochastische Systeme in Zustandsraumdarstellung.

Vorhersage für den nächsten Messwert

Wir beginnen mit einem im Zeitbereich mit Δt abgestasteten Modell eines linearen dynamischen Systems im Zustandsraum.

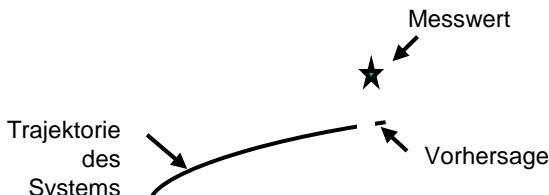
Zur Beschreibung unseres Systems benötigen wir eine endlichen Anzahl von n sogenannte interne Zustände \vec{x}_t : In diesem Fall wird das System durch den Zustandsvektor \vec{x}_t beschrieben, der n Komponenten enthält. Das Formelzeichen t bezeichnet den Laufindex. \vec{x}_t ist damit eine Abkürzung für den Zustandsvektor \vec{x} zum Zeitpunkt $t \cdot \Delta t$

Interne Zustände sind oftmals nicht direkt messbar, jedoch daraus abgeleitete Größen \vec{z}_t : dieser Vektor habe m Komponenten. Wir nennen \vec{z}_t den Messvektor oder den Ausgangsvektor des Systems.

Insgesamt entsteht hieraus in einer allgemeinen Form die Modellbeschreibung:

$$\vec{x}_t = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t + \vec{w}_{t-1}$$

$$\vec{z}_t = \mathbf{H}\vec{x}_t + \vec{v}_t$$



Da n die Anzahl der Zustände bezeichnet, ist die Systemmatrix \mathbf{A} eine quadratische $n \times n$ -Matrix, die erlaubt, den nachfolgenden Zustand \vec{x}_t aus dem vorhergehenden Zustand \vec{x}_{t-1} zu berechnen. Meist sind fast alle Matrixelemente von \mathbf{A} gleich Null.

Vorhersage für den nächsten Messwert

$$\vec{x}_t = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t + \vec{w}_{t-1}$$

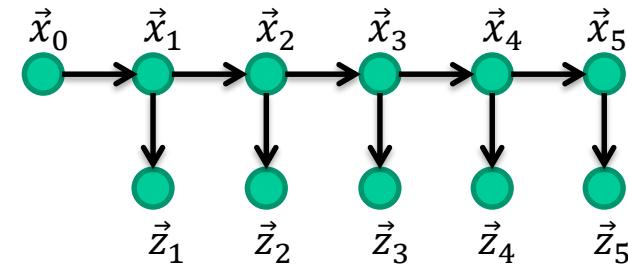
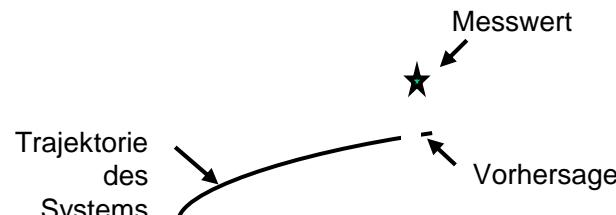
$$\vec{z}_t = \mathbf{H}\vec{x}_t + \vec{v}_t$$

\mathbf{H} wird Messmatrix oder Ausgangsmatrix genannt und hat die Dimension $m \times n$, wobei m die Anzahl der Komponenten des Ausgangsvektors \vec{z}_t ist.

Ein Spezialfall liegt dann vor, wenn \mathbf{H} die Einheitsmatrix ist, d.h., jeder Zustand kann dann wirklich direkt gemessen.

Oft hat man jedoch weniger Messwerte als Zustände (manchmal aber auch mehr) und die Messwerte sind Linearkombinationen bestimmter Zustände.

Liegt die Zahl der Messwerte unter der Anzahl der unabhängigen Variablen des Zustandsvektors, so wird das System unbestimmt. Die Frage ist jedoch, ob man auf Grundlage dieser Messungen das System vollständig regeln kann.



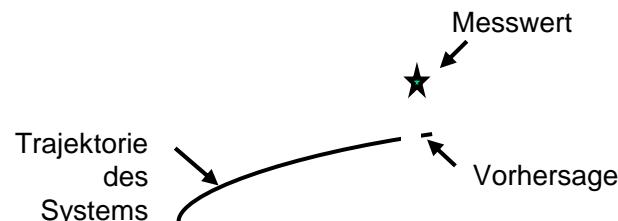
$$\vec{x}_t = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t + \vec{w}_{t-1}$$

$$\vec{z}_t = \mathbf{H}\vec{x}_t + \vec{v}_t$$

Die $n \times p$ -Matrix \mathbf{B} steht für die Auswirkung einer steuernden Einflussnahme \vec{u}_t . \mathbf{B} wird Eingangsmatrix genannt. Der Eingangsvektor \vec{u}_t habe p Komponenten, oft ist $p = 1$.

In praktischen Anwendungen sind die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{C} nur selten wirklich genau bekannt. In obiger Formel treten jedoch noch zwei weitere Rauschterme, die Vektoren \vec{w}_t und \vec{v}_t auf.

\vec{w}_t steht für Einflussnahmen aller Art, die die internen Zustände betreffen. Wir nennen \vec{w}_t Systemrauschen. Für einen erfolgreichen Einsatz des Kalman-Filters muss man zumindest einige Informationen über die Statistik von \vec{w}_t kennen, die genaue Ermittlung der Komponenten des Vektors \vec{w}_t ist von vornherein aussichtslos und wird auch nicht benötigt.



Vorhersage für den nächsten Messwert

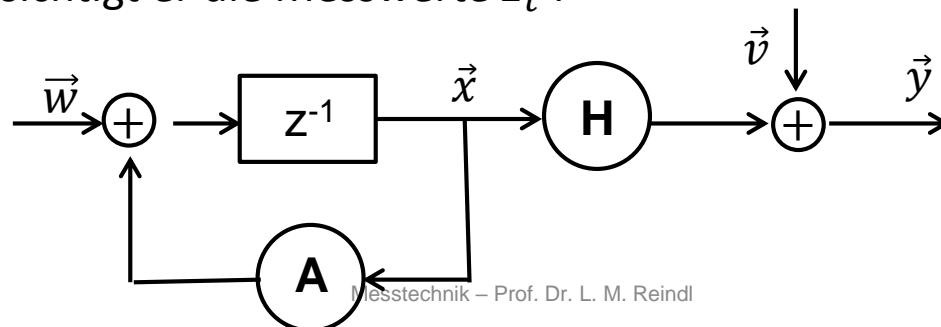
$$\vec{x}_t = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t + \vec{w}_{t-1}$$

$$\vec{z}_t = \mathbf{H}\vec{x}_t + \vec{\nu}_t$$

$\vec{\nu}_t$ beschreibt die Streuung der Messwerte \vec{z}_t ; $\vec{\nu}_t$ ist daher unser Messrauschen oder Ausgangsrauschen.

Sowohl \vec{w}_t als auch $\vec{\nu}_t$ werden beim Standardmodell des Kalman-Filters als Gaußsches Rauschen modelliert, wobei der Mittelwert als Null angenommen wird und die Varianz bekannt sei.

Der wahre Systemzustand \vec{x}_t kann nicht direkt beobachtet werden. Das Kalman Filter liefert uns einen Algorithmus zur Berechnung einer Schätzung des Systemzustandes (Mittelwert und Varianz) unter Berücksichtigung der zeitlichen Entwicklung des Systems entsprechend unseren Kenntnissen des Systemzustandes zum Zeitpunkt t-1 und des Eingangsvektors \vec{u}_t , sowie der Kenntnis der Systemmatrix **A** und Eingangsmatrix **B**. Zusätzlich berücksichtigt er die Messwerte \vec{z}_t .



Vorhersage für den nächsten Messwert

$$\vec{x}_t = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t + \vec{w}_{t-1}$$
$$\vec{z}_t = \mathbf{H}\vec{x}_t + \vec{v}_t$$

Hierzu rechnen wir im Kalman Filter nicht mehr nur mit den Werten der Vorhersage und Messung, sondern betrachten immer die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen (pdf). Im Kalman Filter gehen wir von Gaußverteilungen aus, je eine für die Vorhersage und eine für die Messung. Diese Voraussetzung ist wesentlich, wie wir im weiteren Verlauf sehen werden.

Zur vollständigen Charakterisierung der Gaußschen Verteilungsfunktionen benötigen wir die Angabe der Mittelwerte und der Streuungen, bzw. Varianzen. \vec{x}_t und \vec{z}_t bilden unsere Mittelwerte, während \vec{w}_{t-1} und \vec{v}_t zur Varianz beitragen.

Aus Gründen, die später genauer erklärt werden, bezeichnen wir den Mittelwert der Vorhersage des Zustandsvektors mit $\vec{x}_{t|t-1}$. Dies soll ausdrücken, dass wir den Systemzustand zum Zeitpunkt t aus der Kenntnis des Systems zum Zeitpunkt t-1 berechnen. Wurde jedoch zusätzlich die Messung zum Zeitpunkt t oder t-1 berücksichtigt, so bezeichnen wir den Vektor des Systemzustandes mit $\vec{x}_{t|t}$, bzw. $\vec{x}_{t-1|t-1}$. Die Gleichung für den Mittelwert der Vorhersage für den Systemzustand $\vec{x}_{t|t-1}$ lautet damit:

$$\vec{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t$$

$$\vec{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t$$

$\vec{x}_{t|t-1}$ ist somit der Mittelwert unserer Schätzung des Systemzustandes zum Zeitpunkt t auf Grundlage unserer Kenntnis des Zustands zum Zeitpunkt t-1.

Nun zur Streuung des Zustandsvektors. Da unser Zustandsvektor \vec{x} in n Komponenten vorliegt, benötigen wir n Varianzen σ^2 . Zusätzlich müssen wir mögliche Abhängigkeiten der Streuungen der einzelnen Komponenten untereinander berücksichtigen. Diese werden durch die sogenannten Kovarianzen beschrieben.

Varianzen und Kovarianzen des Zustandsvektors werden in der sogenannten Kovarianzmatrix \mathbf{P} abgelegt. \mathbf{P} ist daher eine nxn Matrix. Auf der Hauptdiagonalen befinden sich an der i-ten Stelle die Einträge der Varianzen σ^2 der i-ten Komponente des Systemvektors. Die übrigen Elemente werden durch die Kovarianzen aufgefüllt.

Vorhersage für den nächsten Systemzustand



Im weiteren Verlauf werden wir 3 verschiedene Kovarianzmatrizen unterscheiden müssen:

Die Kovarianz $\mathbf{P}_t[n \times n]$: Die Streuung der Vorhersage $\vec{x}_{t|t}$ des Zustandsvektors \vec{x}_t
("Wie genau kennen wir den aktuellen Zustand?")

Die Kovarianz $\mathbf{Q}_t[n \times n]$: Die Streuung des Prozessrauschens \vec{w}_t
("Wie genau beschreibt die Systemmatrix die Entwicklung des Systems?")
Bemerkung: Wir werden bei jedem Vorhersageschritt des nächsten Systemzustandes die Kovarianz \mathbf{Q}_t zur projektierten Streuung \mathbf{P}_t des neuen Zustandsvektors addieren.

Die Kovarianz $\mathbf{R}[m \times m]$ des Messrauschens: Die Messgenauigkeit
("Wie genau ist unser Messwert?")

Kovarianzmatrix

Beispiel für die Bestimmung der Kovarianzmatrix **K** für einen Vektor mit zwei Spalten:
 Gegeben seien die beiden skalaren Zufallsgrößen a und b, deren Erwartungswerte verschwinden. a und b werden jeweils q Mal gemessen. a_i und b_i bezeichnen den i-ten Messwert. Die Kovarianzmatrix **K** besteht dann aus vier Elementen:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & c_{12} \\ c_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$k_{11} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q a_i \cdot a_i = \sigma_1^2 \text{ (= Varianz von a)}$$

$$k_{22} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q b_i \cdot b_i = \sigma_2^2 \text{ (= Varianz von b)}$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q a_i \cdot b_i = c_{12} = c_{21} \quad (= \text{Erwartungswert von } a \cdot b, \text{ auch Kovarianz genannt})$$

Kovarianzmatrix

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \quad k_{11} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q a_i \cdot a_i \quad k_{22} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q b_i \cdot b_i \quad k_{12} = k_{21} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q a_i \cdot b_i$$

Die Kovarianz ist somit die Varianz unterschiedlicher Komponenten eines Vektors, wobei auch statistische Abhängigkeiten zwischen den Elementen untereinander zugelassen sind.

Liegen keine Abhängigkeiten der Komponenten vor, nimmt die Kovarianzmatrix \mathbf{K} eine Diagonalform an. Bei zahlreichen Anwendungen ist die Kovarianzmatrix einfach strukturiert. Es liegt dann eine reine Diagonalform vor, d.h., die verschiedenen Komponenten sind vollständig unabhängig voneinander. Auf der Hauptdiagonalen stehen die Varianzen der einzelnen Komponenten.

In jedem Fall muss man gute Anhaltspunkte über die Form der auftretenden Kovarianzmatrizen haben, um die Methodik des Kalman-Filters erfolgreich einsetzen zu können.

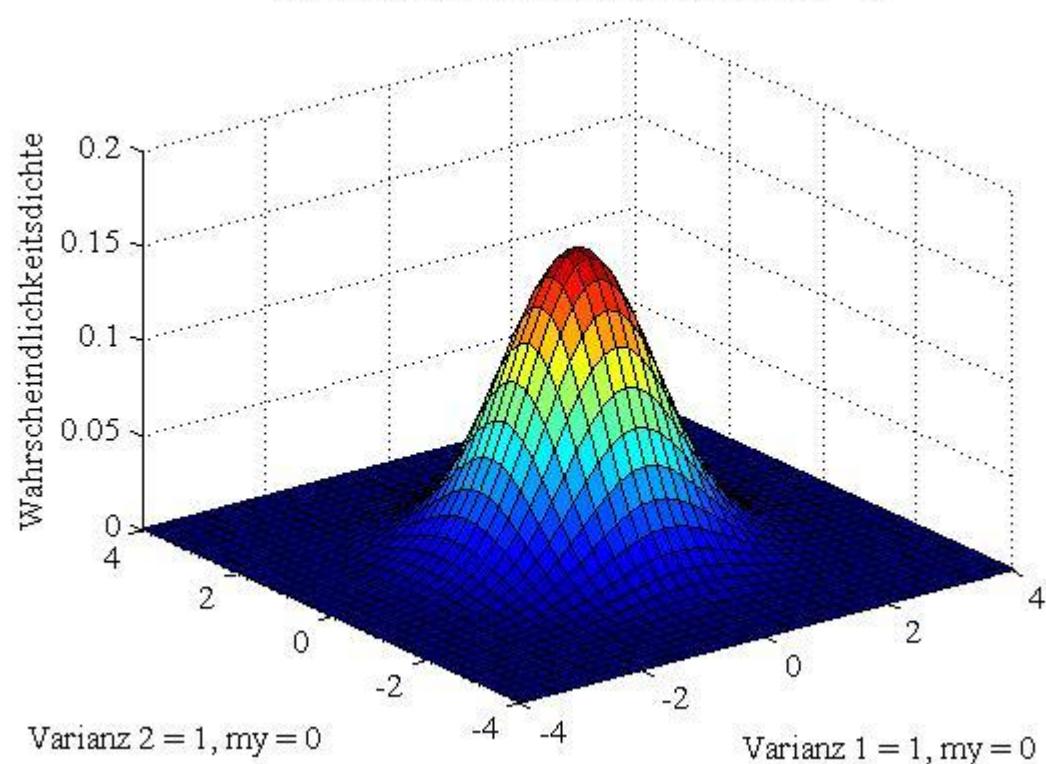
Die Kovarianz des Prozessrauschen \vec{w}_t werde im folgenden mit \mathbf{Q}_t bezeichnet und diejenige des Messrauschen $\vec{\nu}_t$ mit \mathbf{R}_t .

Im übrigen müssen die Kovarianzmatrizen \mathbf{P} , \mathbf{Q} und \mathbf{R} untereinander, sowie zu allen x- und z-Komponenten statistisch unabhängig sein. Wenn das nicht der Fall ist, muss man die Abhängigkeit in die ursprüngliche Modellgleichung implementieren.

Beispiele für 2-D Gaußverteilungen

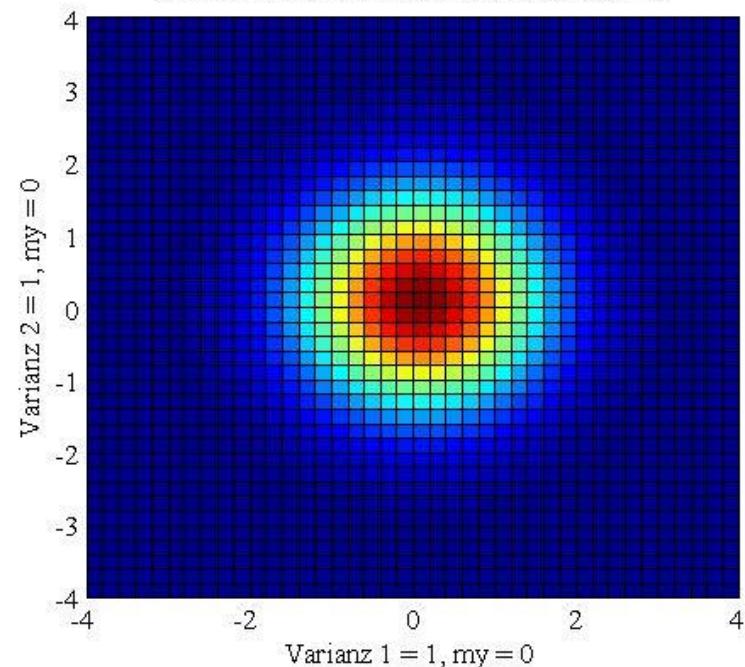
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in 2 Dimensionen mit Kovarianz = 0, $\sigma_1^2 = 1$ und $\sigma_2^2 = 1$

Wahrscheinlichkeitsdichte bei Kovarianz = 0



$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

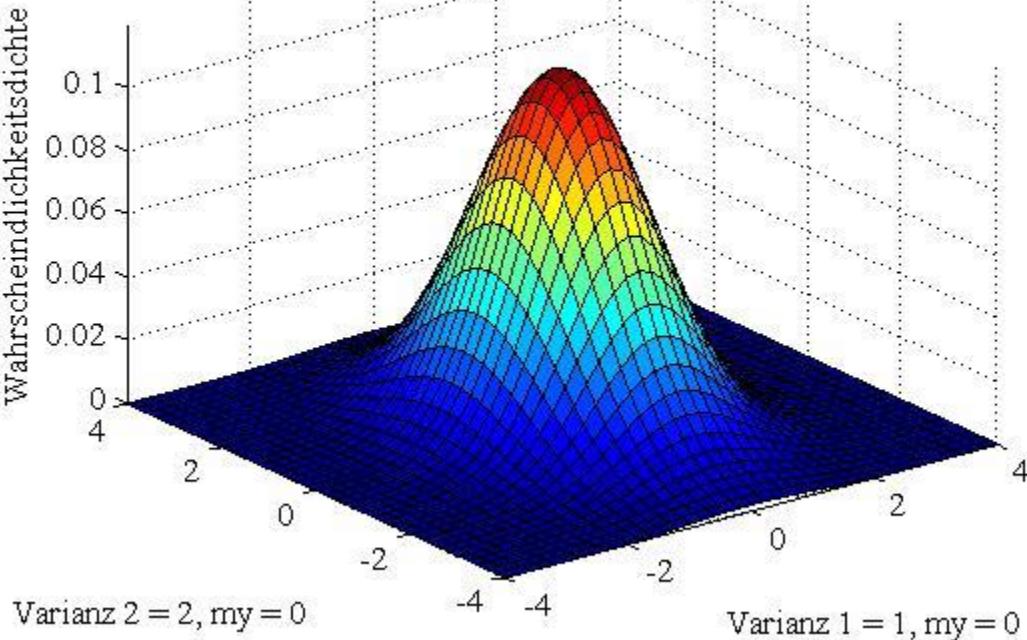
Wahrscheinlichkeitsdichte bei Kovarianz = 0



Beispiele für 2-D Gaußverteilungen

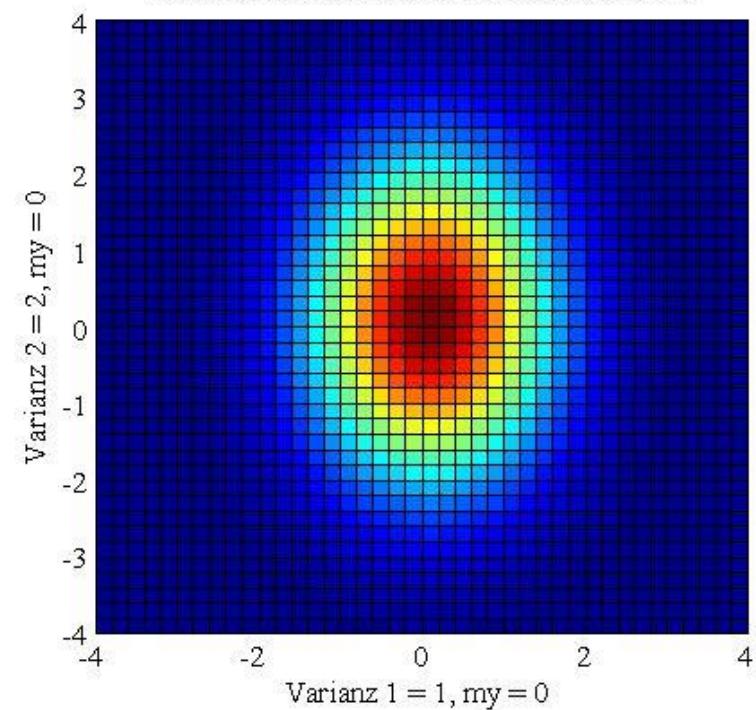
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in 2 Dimensionen mit Kovarianz = 0, $\sigma_1^2 = 1$ und $\sigma_2^2 = 2$

• Wahrscheinlichkeitsdichte bei Kovarianz = 0



$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

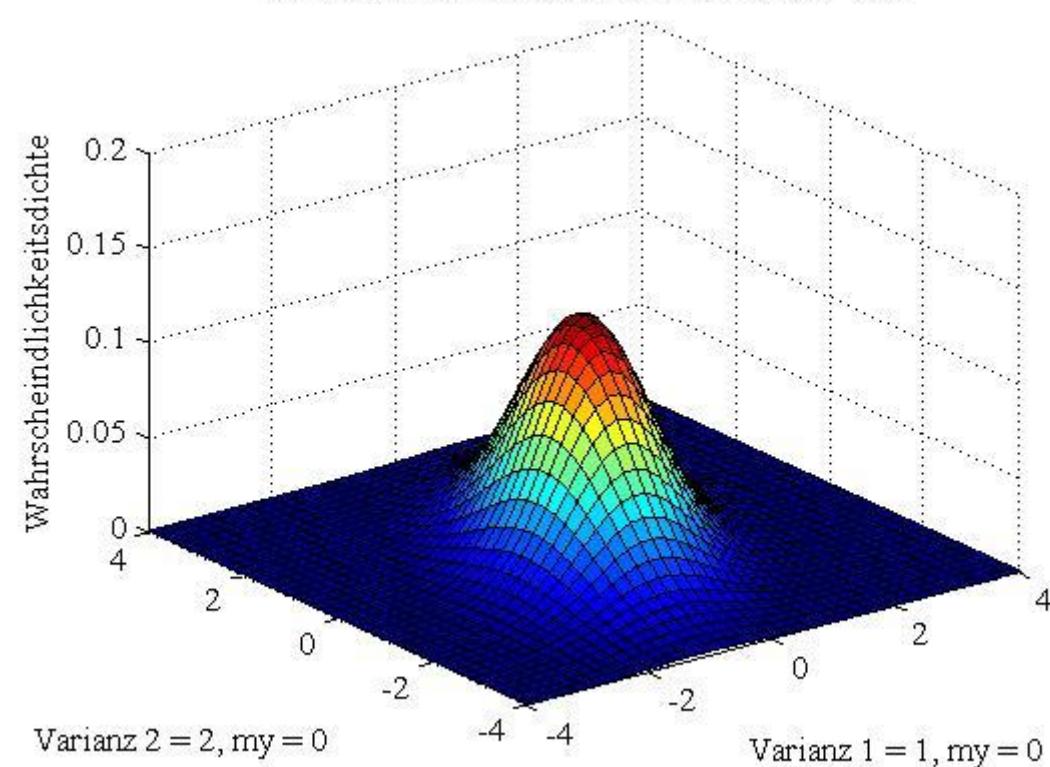
Wahrscheinlichkeitsdichte bei Kovarianz = 0



Beispiele für 2-D Gaußverteilungen

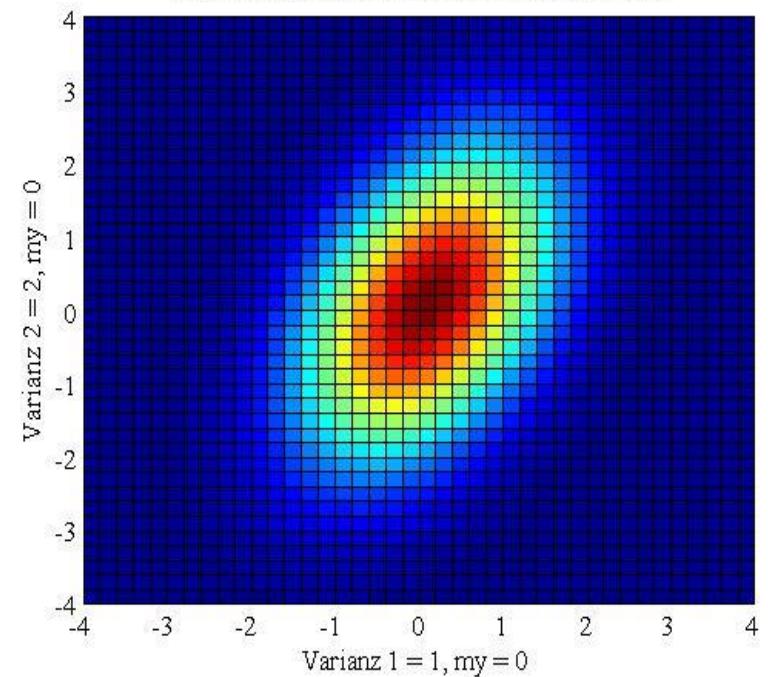
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in 2 Dimensionen mit Kovarianz = 0,6, $\sigma_1^2 = 1$ und $\sigma_2^2 = 2$

Wahrscheinlichkeitsdichte bei Kovarianz = 0,6



$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,6 & 2 \end{pmatrix}$$

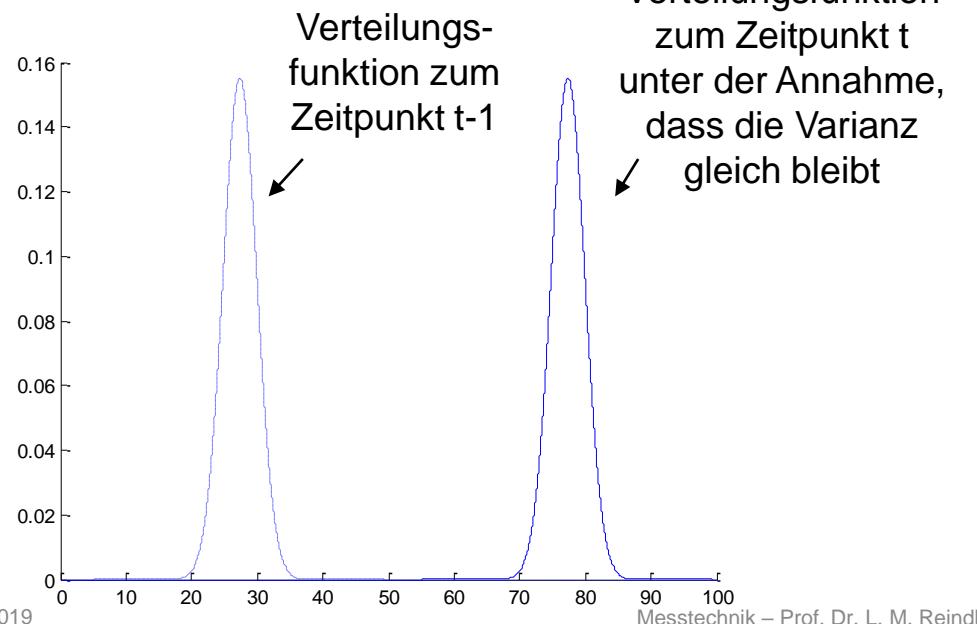
Wahrscheinlichkeitsdichte bei Kovarianz = 0,6



Wir haben bereits die Vorhersage für den Mittelwert $\vec{x}_{t|t-1}$ der Verteilungsfunktion, die den nächsten Systemzustand beschreibt, berechnet:

$$\vec{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t$$

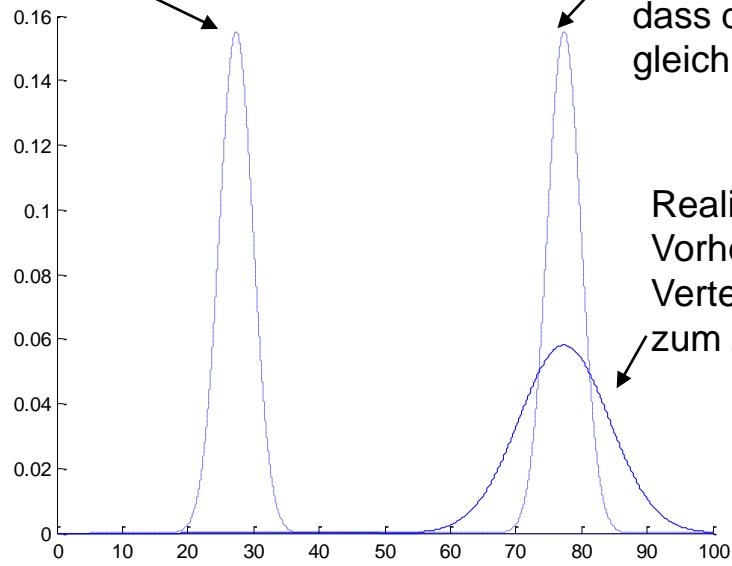
Es verbleibt noch die Aufgabe, die zu erwartenden Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{t|t-1}$ aus einer bekannten Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{t-1|t-1}$ zu berechnen. Eine naheliegende Annahme könnte sein, dass die Breite der Verteilung sich nicht ändert, sondern nur der Lage.



Dies würde voraussetzen dass unsere Systembeschreibung perfekt wäre. Da wir nie von einer perfekten Beschreibung des Systems ausgehen können, werden wir für die Vorhersage die Verteilungsfunktion verbreitern müssen. Unser Wissen nimmt ab.

Vorhersage für den nächsten Systemzustand

Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt t-1



Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt t unter der Annahme, dass die Varianz gleich bliebe

Realistische Vorhersage der Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt t

Die Varianz ergibt sich aus dem Erwartungswert des unbekannten Zustandswertes \vec{x}_t und unserer Vorhersage $\vec{x}_{t|t-1}$.

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = E[(\vec{x}_t - \vec{x}_{t|t-1}) \cdot (\vec{x}_t - \vec{x}_{t|t-1})^T]$$

Indem wir die bisherigen Gleichungen einsetzen erhalten wir

$$\vec{x}_t - \vec{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}) + \vec{w}_t$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{P}_{t|t-1} &= E[(\mathbf{A}(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}) + \vec{w}_t) \cdot (\mathbf{A}(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}) + \vec{w}_t)^T] \\ &= \mathbf{A}E[(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}) \cdot (\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1})^T] \mathbf{A}^T + \\ &\quad \mathbf{A}E[(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}) \cdot \vec{w}_t^T] \mathbf{A}^T + \mathbf{A}E[\vec{w}_t \cdot (\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1})^T] \mathbf{A}^T + E[\vec{w}_t \vec{w}_t^T] \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}E\left[\left(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}\right) \cdot \left(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}\right)^T \mathbf{A}^T\right] + \\ \mathbf{A}E\left[\left(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}\right) \cdot \vec{w}_t^T\right] \mathbf{A}^T + \mathbf{A}E\left[\vec{w}_t \cdot \left(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}\right)^T\right] \mathbf{A}^T + E\left[\vec{w}_t \vec{w}_t^T\right]$$

Da der Fehler in der Schätzung des Zustandsvektors $(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1})$ und das Prozessrauschen \vec{w}_t unkorreliert sind, folgt:

$$E\left[\left(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}\right) \cdot \vec{w}_t^T\right] = E\left[\vec{w}_t \cdot \left(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}\right)^T\right] = 0$$

→ $\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}E\left[\left(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}\right) \cdot \left(\vec{x}_{t-1} - \vec{x}_{t-1|t-1}\right)^T \mathbf{A}^T\right] + E\left[\vec{w}_t \vec{w}_t^T\right]$

→ $\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{t-1|t-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_t$

Damit haben wir alle Formeln zur Berechnung des nächsten Zustandes aufgrund der Kenntnis des letzten Systemzustandes hergeleitet.

Für den Start des Kalman Filters benötigen wir noch die Startbedingungen \vec{x}_1 und $\mathbf{P}_{1|1}$. Es zeigt sich, dass das Kalman Filter gegenüber Fehler in den Startbedingungen recht „tolerant“ ist, da das Filter relativ schnell auf den tatsächlichen Systemzustand konvergiert.

Zusammenfassung der Vorhersage für den nächsten Messwert

$$\vec{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_t$$

$$\vec{z}_t = \mathbf{H}\vec{x}_t + \vec{\nu}_t$$

Zustandsvektor $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{pmatrix}$ mit n: Anzahl der Zustände

Eingangssvektor $\vec{u}_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ \vdots \\ u_{pt} \end{pmatrix}$ mit p: Anzahl der Eingänge

Ausgangssvektor/ Messvektor $\vec{z}_t = \begin{pmatrix} z_{1t} \\ \vdots \\ z_{mt} \end{pmatrix}$ mit m: Anzahl der Ausgänge / Messgrößen

Systemmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Eingangsmatrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$p(\vec{w}) = N(0, \mathbf{Q})$$

Ausgangsmatrix / Messmatrix $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{pmatrix}$

Messrauschen

$$p(\vec{v}) = N(0, \mathbf{R})$$

Zusammenfassung der Vorhersage der Verteilungsfunktionen im Kalman Filter

$$\vec{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_t$$

$$\vec{z}_t = \mathbf{H}\vec{x}_t + \vec{\nu}_t$$

Vorhergesagter
Mittelwert der
Verteilungs-
funktion des
Zustandsvektors

$$\vec{x}_{t|t-1} = \begin{pmatrix} x_{1t|t-1} \\ x_{2t|t-1} \\ \vdots \\ x_{nt|t-1} \end{pmatrix}$$

Letzter berichtigter
Mittelwert der
Verteilungs-
funktion des
Zustandsvektors

$$\vec{x}_{t-1|t-1} = \begin{pmatrix} x_{1t-1|t-1} \\ x_{2t-1|t-1} \\ \vdots \\ x_{nt-1|t-1} \end{pmatrix}$$

Vorhergesagte
Varianz der
Verteilungs-
funktion des
Zustandsvektors

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{1t|t-1}^2 & c_{12t|t-1} & \cdots & c_{1nt|t-1} \\ c_{21t|t-1} & \sigma_{2t|t-1}^2 & \cdots & c_{2nt|t-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1t|t-1} & c_{n2t|t-1} & \cdots & \sigma_{nt|t-1}^2 \end{pmatrix}$$

Letzter berichtigte
Varianz der
Verteilungs-
funktion des
Zustandsvektors

$$\mathbf{P}_{t-1|t-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{1t-1|t-1}^2 & c_{12t-1|t-1} & \cdots & c_{1nt-1|t-1} \\ c_{21t-1|t-1} & \sigma_{2t-1|t-1}^2 & \cdots & c_{2nt-1|t-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1t-1|t-1} & c_{n2t-1|t-1} & \cdots & \sigma_{nt-1|t-1}^2 \end{pmatrix}$$

Prozess-
rauschen

$$\mathbf{Q}_t = \begin{pmatrix} q_{11t} & q_{12t} & \cdots & q_{1nt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1t} & q_{n1t} & \cdots & q_{nnt} \end{pmatrix}$$

Prozessrauschen $p(\vec{w}) = N(0, \mathbf{Q})$

Messrauschen $p(\vec{v}) = N(0, \mathbf{R})$

Mess-
rauschen

$$\mathbf{R}_t = \begin{pmatrix} r_{11t} & r_{12t} & \cdots & r_{1mt} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1t} & r_{m1t} & \cdots & r_{mmt} \end{pmatrix}$$

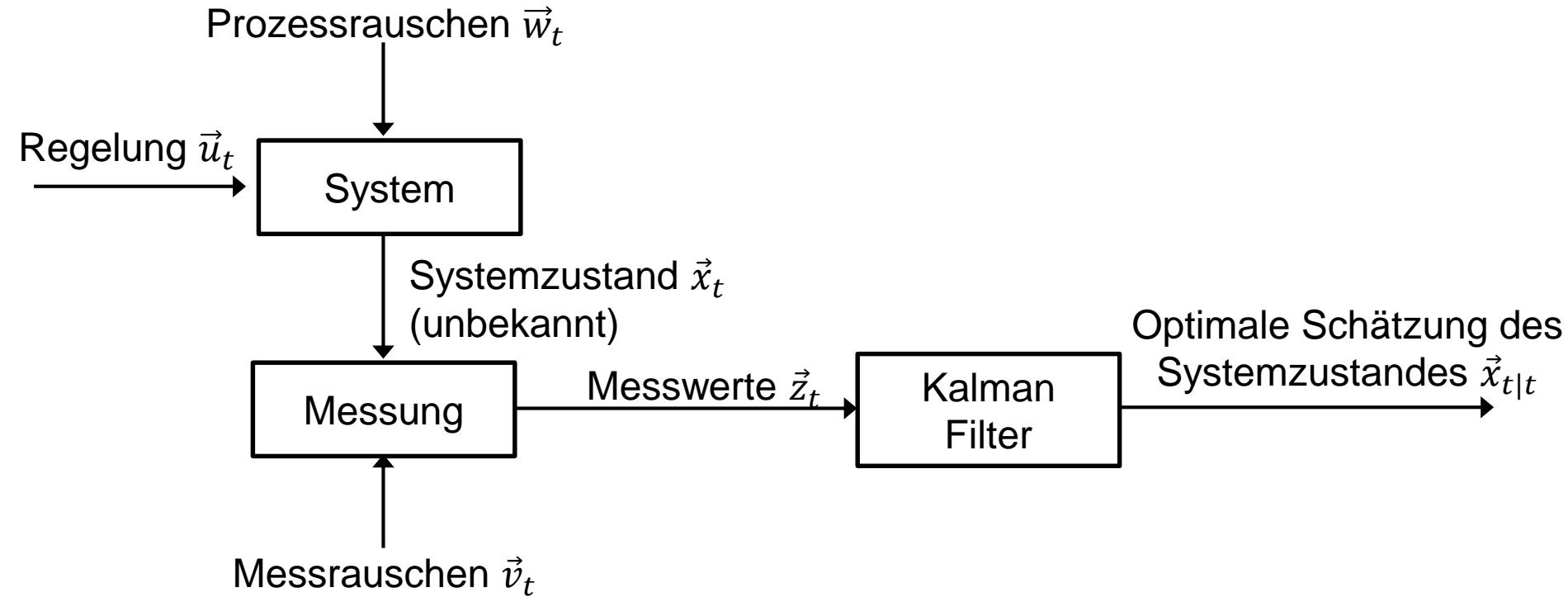
Rauschen des
Zustandsvektors $N(0, \mathbf{P})$

Zusammenfassung der Vorhersage für den nächsten Messwert

$$\vec{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1|t-1} + \mathbf{B}\vec{u}_t$$

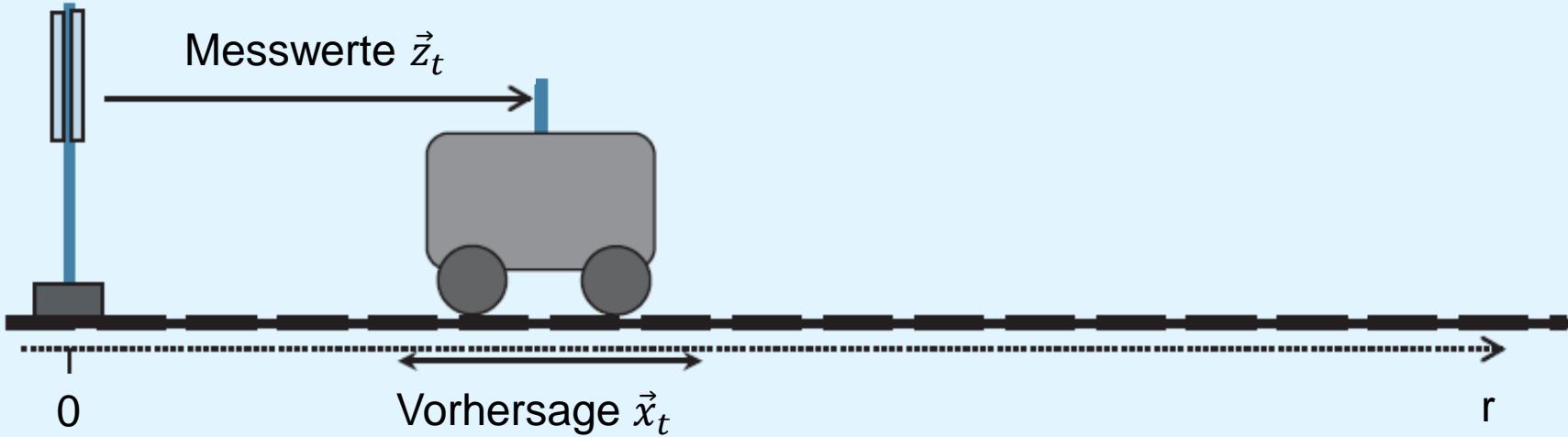
$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{t-1|t-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}_t$$

$$\vec{z}_t = \mathbf{H}\vec{x}_t + \vec{\nu}_t$$



Der Kalman-Filter liefert eine Schätzung der internen Zustände eines gegebenen Systems. Auf dieses System wirken sowohl externe Kräfte (Regelungen) als auch interne Störeinflüsse ein. Der Kalman-Filter versucht aus den verrauschten Messdaten diese internen Zustände möglichst exakt zu rekonstruieren.

Beispiel für die Vorhersage für den nächsten Messwert

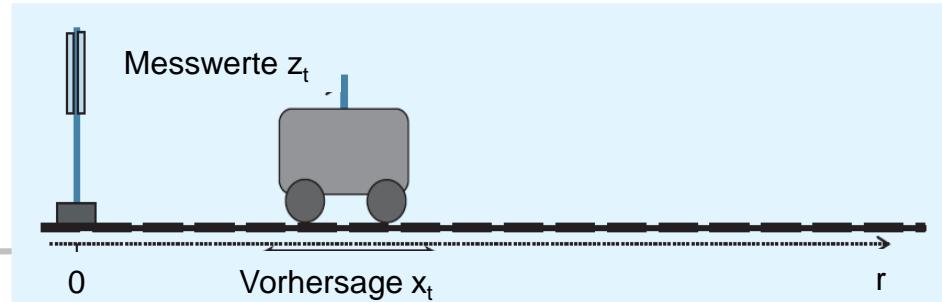


Die folgende Ableitung der Formeln des Kalman Filters wird nun anhand einer einfachen eindimensionalen Bahnverfolgung erläutert.

Ein Zug bewege sich entlang der Schienen. In diesem Fall können wir die zugehörigen Matrizen und Vektoren einfach aufstellen: Der Zustandsvektor \vec{x}_t enthält den Ort x_t und die Geschwindigkeit v_t des Zuges zum Zeitpunkt t:

$$\vec{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix}$$

Beispiel für die Vorhersage für den nächsten Messwert



Der Zugführer kann den Zug abbremsen oder beschleunigen, was wir hier mit der eingeleiteten Kraft f_t und der Masse des Zuges m beschreiben wollen. Die Regeldaten werden im Eingangsvektor \vec{u}_t abgelegt.

$$\vec{u}_t = \frac{f_t}{m}$$

Die durch die Bremsung oder Beschleunigung im Zeitintervall Δt eingeleiteten Kraft f_t wirkt auf den Ort x_t und der Geschwindigkeit v_t :

$$x_t = x_{t-1} + (v_{t-1} \cdot \Delta t) + \frac{f_t \cdot (\Delta t)^2}{2m}$$

$$v_t = v_{t-1} + \frac{f_t \cdot \Delta t}{m}$$

Diese linearen Gleichungen können auch in Matrixform geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\Delta t)^2 \\ \frac{2}{\Delta t} \end{bmatrix} \cdot \frac{f_t}{m}$$

Damit erhalten wir:

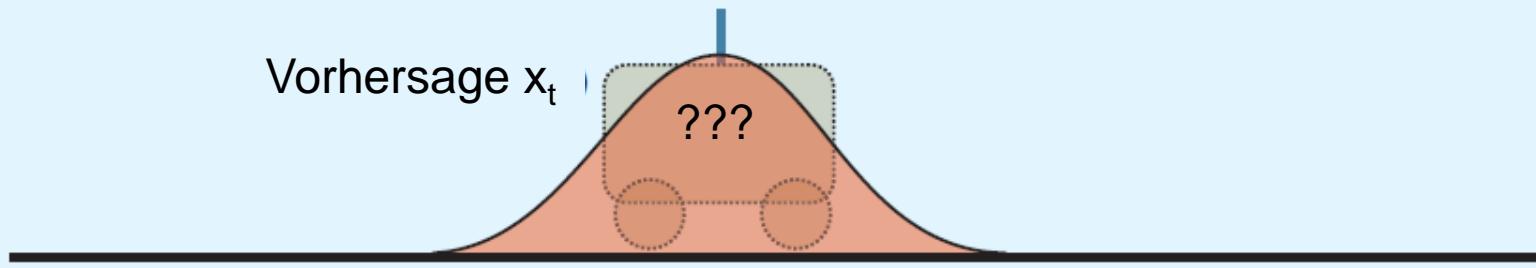
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\Delta t)^2 \\ \frac{2}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

Messtechnik – Prof. Dr. L. M. Reindl

Beispiel für die Vorhersage für den nächsten Messwert

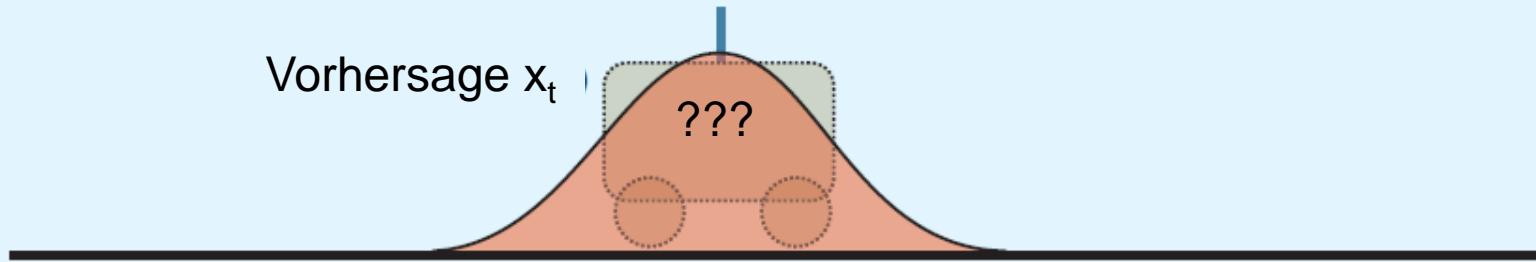


Obiges Bild zeige die ursprüngliche Information des Systems zum Zeitpunkt $t-1$. Die rote Gaußverteilung entspreche der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (pdf) für den Ort des Zuges. Der Pfeil nach rechts zeigt die Geschwindigkeit v_{t-1} .



Obiges Bild zeigt die Vorhersage für den Ort und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zum Zeitpunkt t . Das Vertrauen in die Ortsinformation hat abgenommen und die zugehörige Varianz hat sich vergrößert, da der Zug ja im Intervall von $(t-1)$ bis t beschleunigt oder gebremst haben könnte.

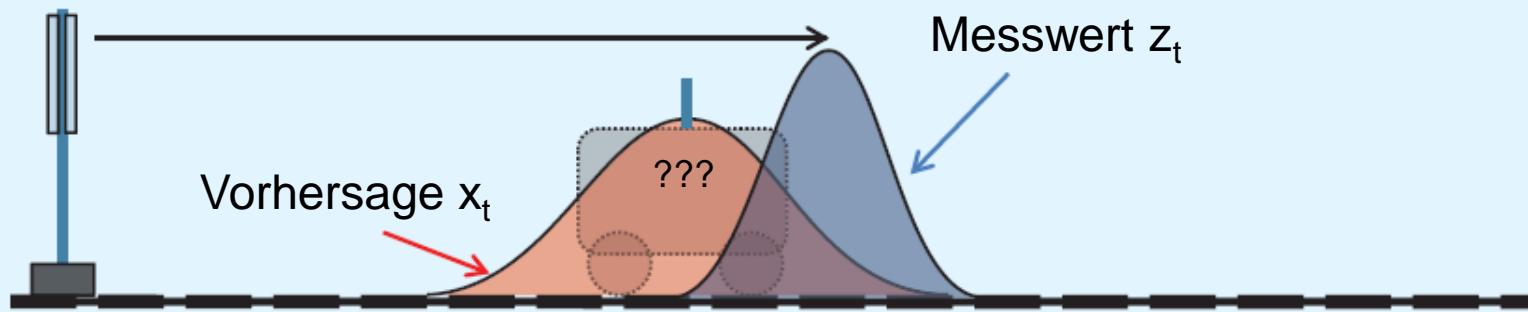
Beispiel für die Vorhersage für den nächsten Messwert



Üblicherweise kennen wir den Eingangsvektor / Regelvektor \vec{u}_t und damit die beabsichtigte Beschleunigung oder Bremsung.

Zudem haben meist auch eine Vorstellung, wie stark der Zug im Zeitintervall Δt zusätzlich beschleunigen oder bremsen könnte. Diese Information ist im Prozessrauschen \vec{w}_{t-1} abgelegt.

Messung

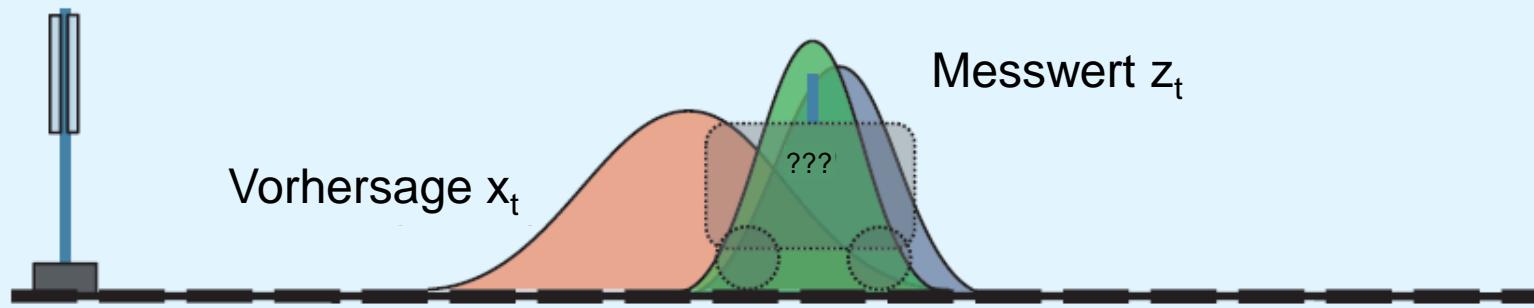


Zum Zeitpunkt t führen wir eine Messung z_t der Zugposition durch. Der Messwert wird durch das Maximum und das Messrauschen durch die Verteilungsfunktion der blauen Gaußverteilung wiedergegeben. Nun haben wir zwei gültige Verteilungsfunktionen für die selbe Größe. Die beste Schätzung des Ortes des Zuges erhalten wir durch eine Kombination der Vorhersage und der Messung.

Dies erreichen wir durch Multiplikation der beiden Verteilungsfunktionen.

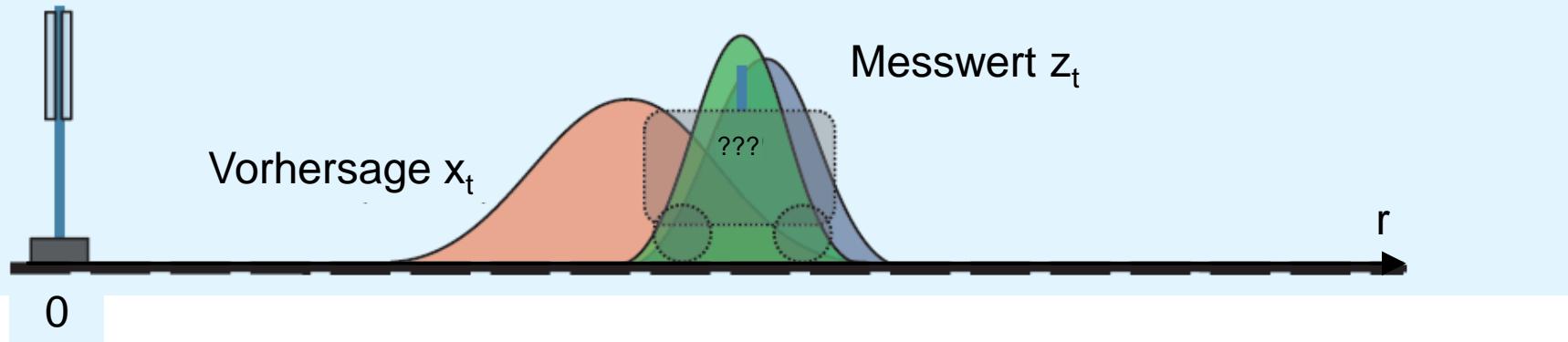


Verbesserung (update)



Hier kommt eine wichtige Eigenschaft der Gaußverteilung zum Tragen: Das Produkt von zwei Gaußverteilungen ist wieder eine Gaußverteilung. Das ist entscheidend für den Kalman Filter, da wir in jedem Iterationsschritt die Gaußverteilung der Vorhersage und die Gaußverteilung der Messung miteinander multiplizieren, ohne dass dadurch die Verteilungsfunktionen immer komplizierter werden.

Verbesserung (update)



Die oben rot dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Vorhersage y_1 kann mit dem Mittelwert x_t und der Varianz σ_x^2 als Gaußfunktion geschrieben werden, mit:

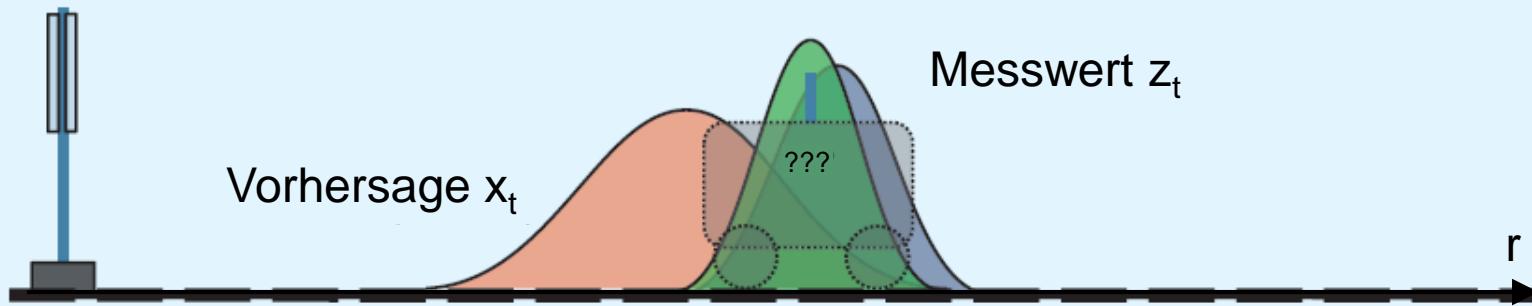
$$y_1(r, x_t, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(r-x_t)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Die oben blau dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Messung y_2 kann mit dem Messwert z_t und zugehörigen Varianz des Messfehlers σ_z^2 als Gaußfunktion geschrieben werden:

$$y_2(r, z_t, \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} e^{-\frac{(r-z_t)^2}{2\sigma_z^2}}$$

Die oben grün dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion y_{fused} fasst die beiden Informationen zusammen ("Informationsfusion"). Der beste Schätzwert der aktuellen Position ergibt sich daher aus dem Produkt der beiden Verteilungsfunktionen.

Verbesserung (update)



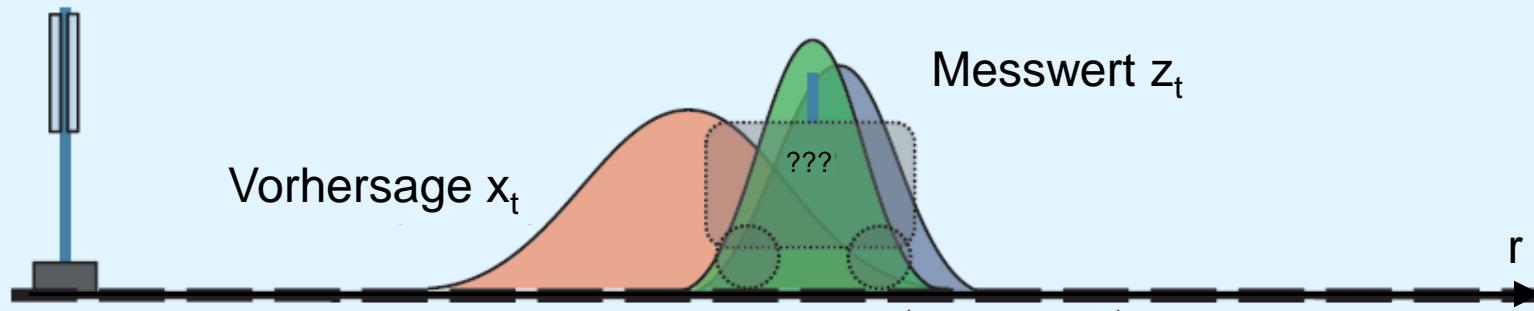
$$y_1(r, x_t, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(r-x_t)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$y_2(r, z_t, \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} e^{-\frac{(r-z_t)^2}{2\sigma_z^2}}$$

Die oben grün dargestellte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion y_{fused} ergibt sich als Produkt der beiden Gaußverteilungen zu:

$$\begin{aligned} y_{\text{fused}}(r, x_t, \sigma_x, z_t, \sigma_z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(r-x_t)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} e^{-\frac{(r-z_t)^2}{2\sigma_z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2\sigma_z^2}} e^{-\left(\frac{(r-x_t)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(r-z_t)^2}{2\sigma_z^2}\right)} \end{aligned}$$

Verbesserung (update)



$$y_{fused}(r, x_t, \sigma_x, z_t, \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2\sigma_z^2}} e^{-\left(\frac{(r-x_t)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(r-z_t)^2}{2\sigma_z^2}\right)}$$

Die quadratischen Terme im Exponenten können ausmultipliziert werden und sodann zusammengefasst werden zu:

$$y_{fused}(r, \mu_{fused}, \sigma_{fused}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{fused}^2}} e^{-\frac{(r-\mu_{fused})^2}{2\sigma_{fused}^2}}$$

mit

$$\mu_{fused} = \frac{x_t\sigma_z^2 + z_t\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_z^2} = x_t + \frac{\sigma_x^2(z_t - x_t)}{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}$$

und

$$\sigma_{fused}^2 = \frac{\sigma_x^2 \cdot \sigma_z^2}{\sigma_x^2 + \sigma_z^2} = \sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^4}{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}$$

Die letzten beiden Gleichungen bilden die sogenannten "update"-Gleichungen des Kalman Filters. Zuvor müssen wir unsere Gleichungen jedoch noch verallgemeinern.

Messmatrix

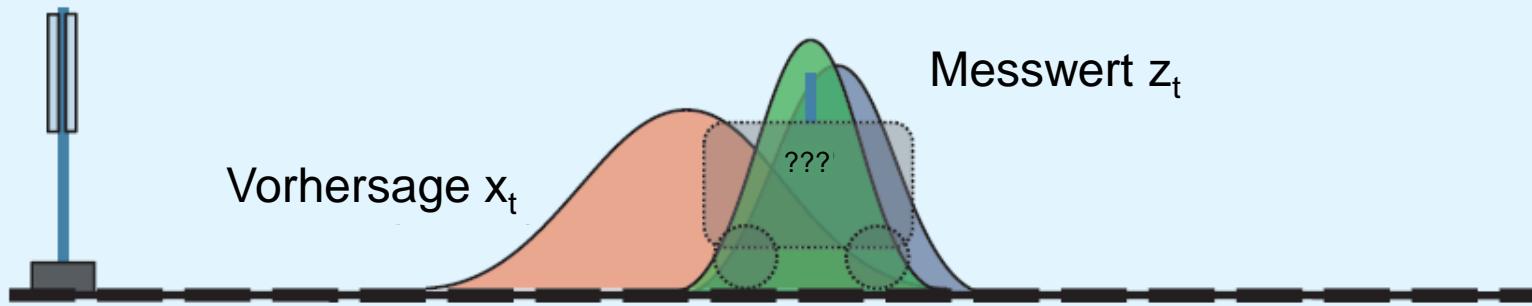


In unserem Beispiel haben wir bisher angenommen, dass die Vorhersage und die Messung auf dem gleichen Größen durchgeführt wurden. Die Messmatrix \mathbf{H} bestand daher aus der Zahl “1”.

Interne Zustände \vec{x}_t sind jedoch oftmals nicht direkt messbar, jedoch daraus abgeleitete Größen \vec{z}_t . Als Erweiterung unseres Beispiels könnten wir betrachten, dass der interne Zustand \vec{x}_t des Zuges entlang der Schienen in Meter angegeben wird, die Messung jedoch durch eine Laufzeitmessung eines Funksignals durchgeführt wird und das Ergebnis \vec{z}_t daher in Sekunden vorliegt.

Um die beiden Verteilungsfunktionen der Vorhersage und der Messung multiplizieren zu können, müssen diese jedoch im selben Bereich vorliegen. Man wählt hierzu den Messbereich und transformiert dazu den Systemzustand \vec{x}_t mit Hilfe der Matrix \mathbf{H} in den Messbereich.

Messmatrix



In diesem Fall müssen wir die beiden Gleichungen für die Verteilungsfunktionen der Vorhersage y_1 und der Messung y_2 im Zeitbereich ausdrücken:

$$y_1(t, x_t, \sigma_x, c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2}} e^{-\frac{\left(t - \frac{x_t}{c}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2}}$$

$$y_2(t, z_t, \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} e^{-\frac{(r - z_t)^2}{2\sigma_z^2}}$$

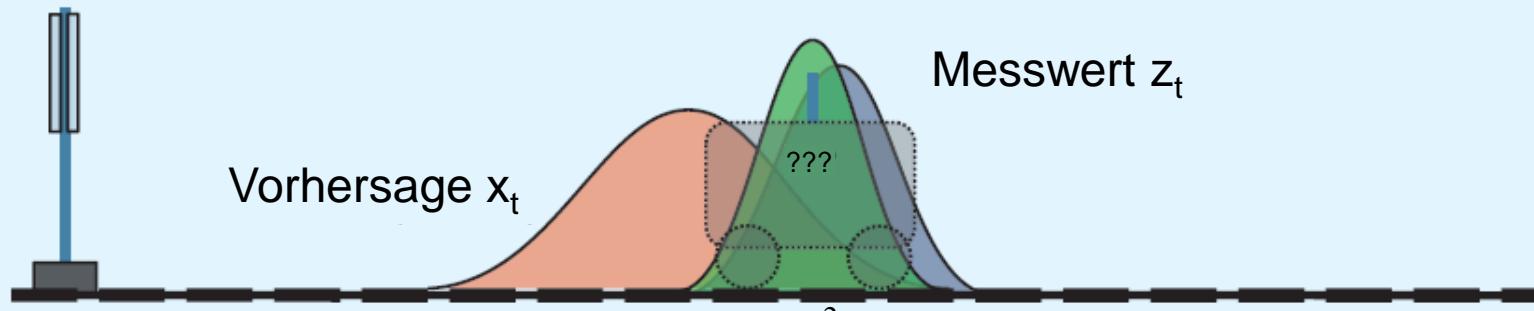
Durch eine analoge Ableitung wie soeben erhalten wir die Mittelwert der fusionierten Verteilungsfunktion zu:

$$\frac{\mu_{fused}}{c} = \frac{x_t}{c} + \frac{\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2 \left(z_t - \frac{x_t}{c}\right)}{\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2 + \sigma_z^2}$$

→

$$\mu_{fused} = x_t + \frac{\frac{\sigma_x}{c}^2}{\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2 + \sigma_z^2} \left(z_t - \frac{x_t}{c}\right)$$

Messmatrix



$$\mu_{fused} = x_t + \frac{\frac{\sigma_x}{c}}{\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2 + \sigma_z^2} \left(z_t - \frac{x_t}{c} \right)$$

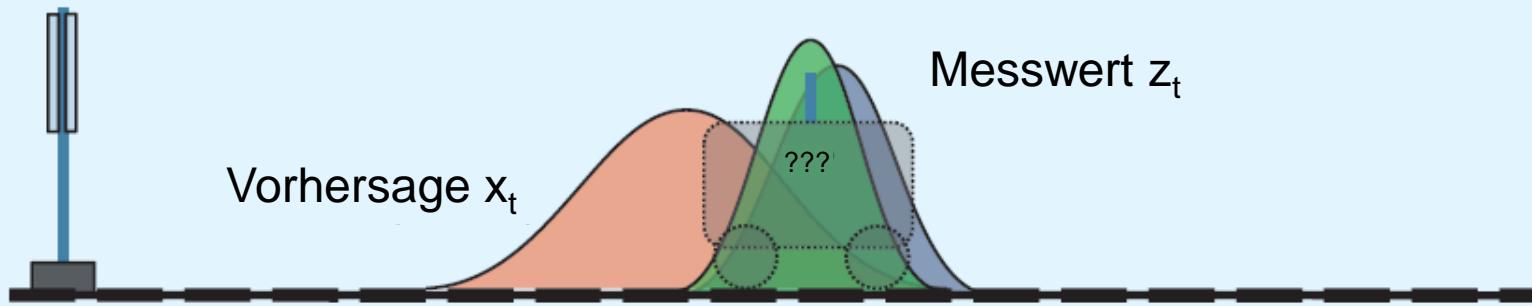
Mit Hilfe der Substitutionen $H = \frac{1}{c}$ und $K = \frac{H\sigma_x^2}{H^2\sigma_x^2 + \sigma_z^2}$

Erhalten wir:

$$\mu_{fused} = x_t + K \cdot (z_t - Hx_t)$$

Messmatrix

$$\mu_{fused} = x_t + \frac{\frac{\sigma_x}{c}^2}{\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2 + \sigma_z^2} \left(z_t - \frac{x_t}{c} \right)$$



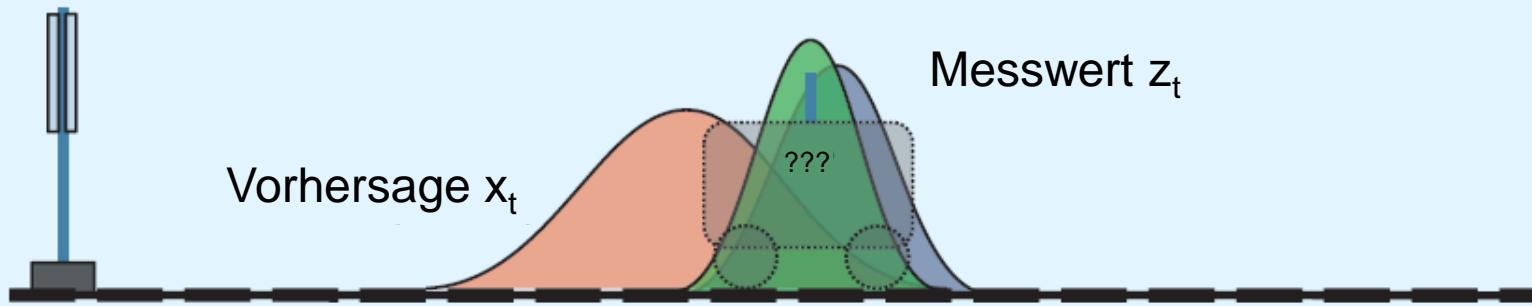
$$\mu_{fused} = x_t + K \cdot (z_t - Hx_t) \quad \text{mit} \quad H = \frac{1}{c} \quad \text{und} \quad K = \frac{H\sigma_x^2}{H^2\sigma_x^2 + \sigma_z^2}$$

Der Ausdruck $(z_t - Hx_t)$ wird Innovation genannt. Er beschreibt, wie genau der vorhergesagte Mittelwert den aktuellen Messwert mittels der Beobachtungsgleichung zu beschreiben in der Lage ist.

Für eine schlechte Vorhersage wird die dazugehörige Innovation groß, für eine genaue Vorhersage dagegen klein sein. Entsprechende Korrekturen müssen dann groß bzw. nur gering ausfallen. Die durchzuführende Korrektur kann demnach als zur Größe der Innovation proportional angesehen werden.

Messmatrix

$$\mu_{fused} = x_t + \frac{\frac{\sigma_x}{c}^2}{\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2 + \sigma_z^2} \left(z_t - \frac{x_t}{c} \right)$$

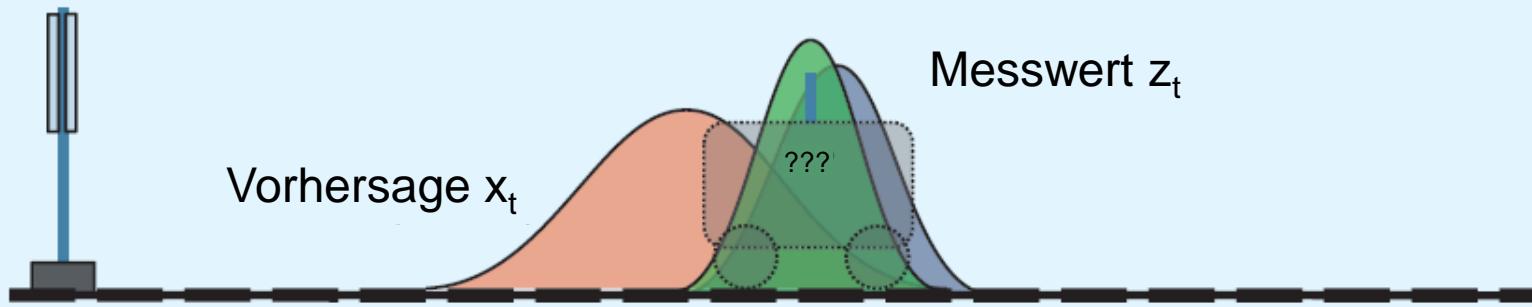


$$\mu_{fused} = x_t + K \cdot (z_t - Hx_t) \quad \text{mit} \quad H = \frac{1}{c} \quad \text{und} \quad K = \frac{H\sigma_x^2}{H^2\sigma_x^2 + \sigma_z^2}$$

Zudem sollen Innovationen von Messwerten, die mit größerer Unsicherheit als ihre Schätzungen behaftet sind, mit weniger Gewicht in die Korrektur eingehen als solche bei denen das Gegenteil der Fall ist.

Diese Eigenschaften werden vom Kalmanfaktor K (später Kalman-Matrix \mathbf{K}) erfüllt, da er/sie das Verhältnis der Unsicherheiten der Vorhersagen zu den zugehörigen Messunsicherheiten wiedergibt. .

Messmatrix



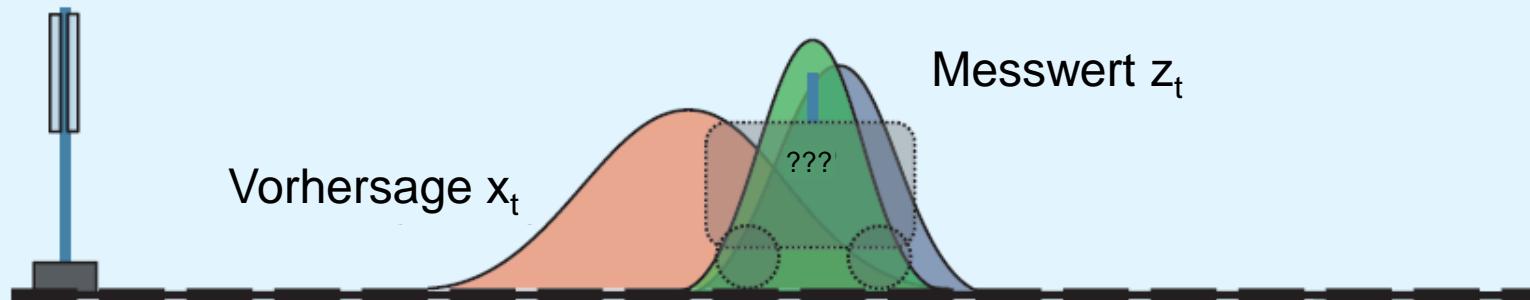
Analog erhalten wir für die fusionierte Varianz:

$$\frac{\sigma_{fused}^2}{c^2} = \left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2 - \frac{\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^4}{\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2 + \sigma_z^2}$$

➡

$$\begin{aligned} \sigma_{fused}^2 &= \sigma_x^2 - \left(\frac{\frac{\sigma_x^2}{c}}{\left(\frac{\sigma_x}{c}\right)^2 + \sigma_z^2} \right) \frac{\sigma_x^2}{c} \\ &= \sigma_x^2 - KH\sigma_x^2 \end{aligned}$$

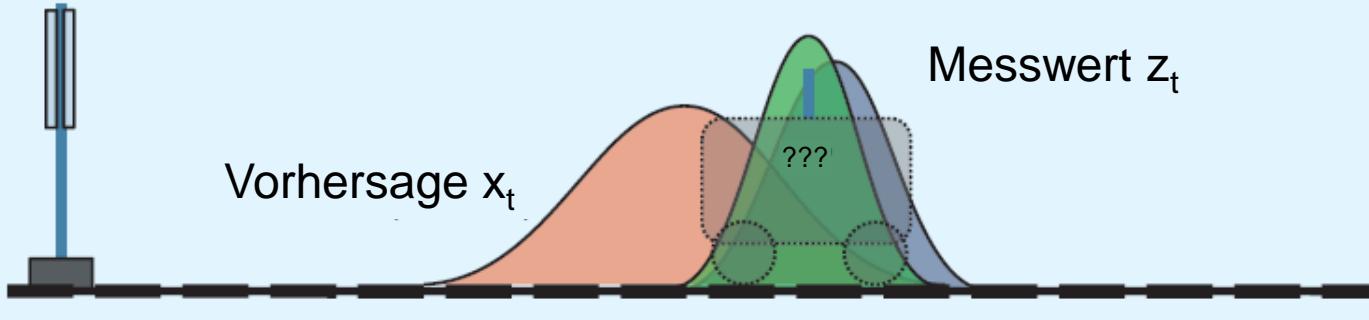
Allgemeine Darstellung des Kalman Filters mit Vektoren und Matrizen



Nun müssen wir nur noch unsere Ergebnisse aus dem skalaren Beispiel auf die Vektoren und Matrizen des allgemeinen Kalman Filter Algorithmus übertragen. Da wir nun zwei Zustandsvektoren und zwei zugehörige Rauschmatrizen, jeweils vor und nach der Datenfusion, unterscheiden müssen, benennen wir sie durch $\vec{x}_{t|t-1}$, bzw. $\vec{x}_{t|t}$, und $\mathbf{P}_{t|t-1}$ bzw. $\mathbf{P}_{t|t}$

■	$\mu_{fused} \rightarrow \vec{x}_{t t}$	Zustandsvektor nach Datenfusion
■	$x_t \rightarrow \vec{x}_{t t-1}$	Zustandsvektor vor Datenfusion, d.h. Vorhersage
■	$\sigma_{fused}^2 \rightarrow \mathbf{P}_{t t}$	Kovarianzmatrix des Zustandsvektors nach Datenfusion
■	$\sigma_x^2 \rightarrow \mathbf{P}_{t t-1}$	Kovarianzmatrix des Zustandsvektors vor Datenfusion
■	$z_t \rightarrow \vec{z}_t$	Messvektor
■	$\sigma_z^2 \rightarrow \mathbf{R}_t$	Messrauschen
■	$H \rightarrow \mathbf{H}_t$	Ausgangsmatrix / Messmatrix

Allgemeine Darstellung des Kalman Filters mit Vektoren und Matrizen



$\mu_{fused} \rightarrow \vec{x}_{t t}$
$x_t \rightarrow \vec{x}_{t t-1}$
$\sigma_{fused}^2 \rightarrow \mathbf{P}_{t t}$
$\sigma_x^2 \rightarrow \mathbf{P}_{t t-1}$
$z_t \rightarrow \vec{z}_t$
$\sigma_z^2 \rightarrow \mathbf{R}_t$
$H \rightarrow \mathbf{H}_t$

Mit diesen Ersetzungen erhalten wir für die sogenannte Kalman-Verstärkung \mathbf{K} :

$$K = \frac{H\sigma_x^2}{H^2\sigma_x^2 + \sigma_z^2} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1}\mathbf{H}_t^T \left(\mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t \right)^{-1}$$

Analog erhalten wir für den Zustandsvektor und das Prozessrauschen nach der Datenfusion

$$\mu_{fused} = x_t + K \cdot (z_t - Hx_t) \quad \longrightarrow \quad \vec{x}_{t|t} = \vec{x}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t \cdot (\vec{z}_t - \mathbf{H}_t \vec{x}_{t|t-1})$$

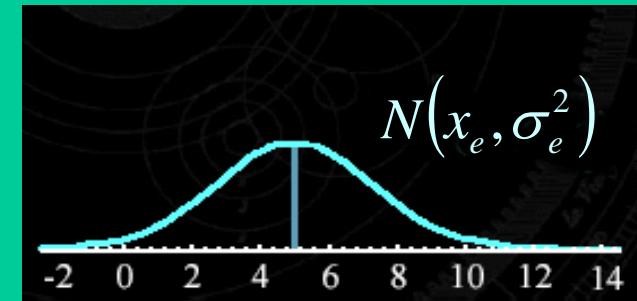
$$\sigma_{fused}^2 = \sigma_x^2 - KH\sigma_x^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P}_{t|t} = \mathbf{P}_{t|t-1} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t|t-1}$$

$\mathbf{H}_t \vec{x}_{t|t-1}$ ist die Vorhersage des nächsten Messwertes und wird manchmal mit $\vec{z}_{t|t-1}$ abgekürzt.

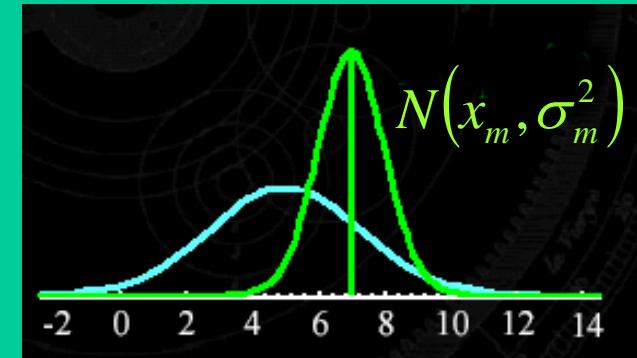
- Beispiel mit nur einer Variable
Alle Fehler seien Gauss-verteilt

- Vorhersage

$$x_e, \sigma_e^2$$



- Messwert



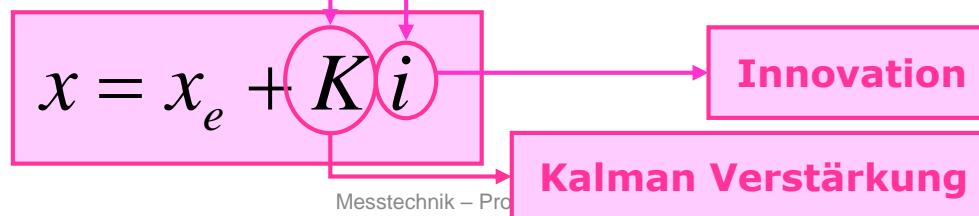
- Beispiel mit nur einer Variable
- Verbesserte Varianz

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_e^2} + \frac{1}{\sigma_m^2}$$

- Verbesserter Mittelwert

$$x = \left[\frac{\sigma_m^2}{\sigma_e^2 + \sigma_m^2} \right] x_e + \left[\frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2 + \sigma_m^2} \right] x_m$$
$$x = x_e + \left[\frac{\sigma_e^2}{\sigma_e^2 + \sigma_m^2} \right] (x_m - x_e)$$

$$N(x, \sigma^2)$$



Der vorhergesagte Prozess

- **Prozess**

$$\vec{x}_k = \mathbf{A}\vec{x}_{k-1} + \mathbf{B}\vec{u}_{k-1} + \vec{w}_{k-1} \xrightarrow{\text{Zustand}} \sim N(0, \mathbf{Q})$$

Prozessauschen

- **Messwert**

$$\vec{z}_k = \mathbf{H}\vec{x}_{k-1} + \vec{v}_k \xrightarrow{\text{Messwert}} \sim N(0, \mathbf{R})$$

Messrauschen

- **Schätzfehler vor der Verbesserung (“Priori”)**

$$\vec{e}_{k|k-1} = \vec{x}_k - \boxed{\vec{x}_{k|k-1}} \longrightarrow \mathbf{P}_{k|k-1} = E[\vec{e}_{k|k-1} \vec{e}_{k|k-1}^T]$$

vorhergesagter Zustand

- **Verbesserter Schätzfehler (“Posteriori”)**

$$\vec{e}_{k|k} = \vec{x}_k - \boxed{\vec{x}_{k|k}} \longrightarrow \mathbf{P}_{k|k} = E[\vec{e}_{k|k} \vec{e}_{k|k}^T]$$

verbesserte Zustandsschätzung

Zusammenfassung des Kalman Filters

- **Kalman Gewinn**

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \right)^{-1}$$

- **Verbesserte Zustandsschätzung**

$$\vec{x}_{k|k} = \vec{x}_{k|k-1} + \mathbf{K} \left(\vec{z}_k - \mathbf{H} \vec{x}_{k|k-1} \right)$$

Innovation

Ablauf

- **Time Update (“Vorhersage”)**

$$\vec{x}_{k|k-1} = \mathbf{A}\vec{x}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}\vec{u}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}$$

- **Measurement Update (“Verbesserung”)**

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T \left(\mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R} \right)^{-1}$$

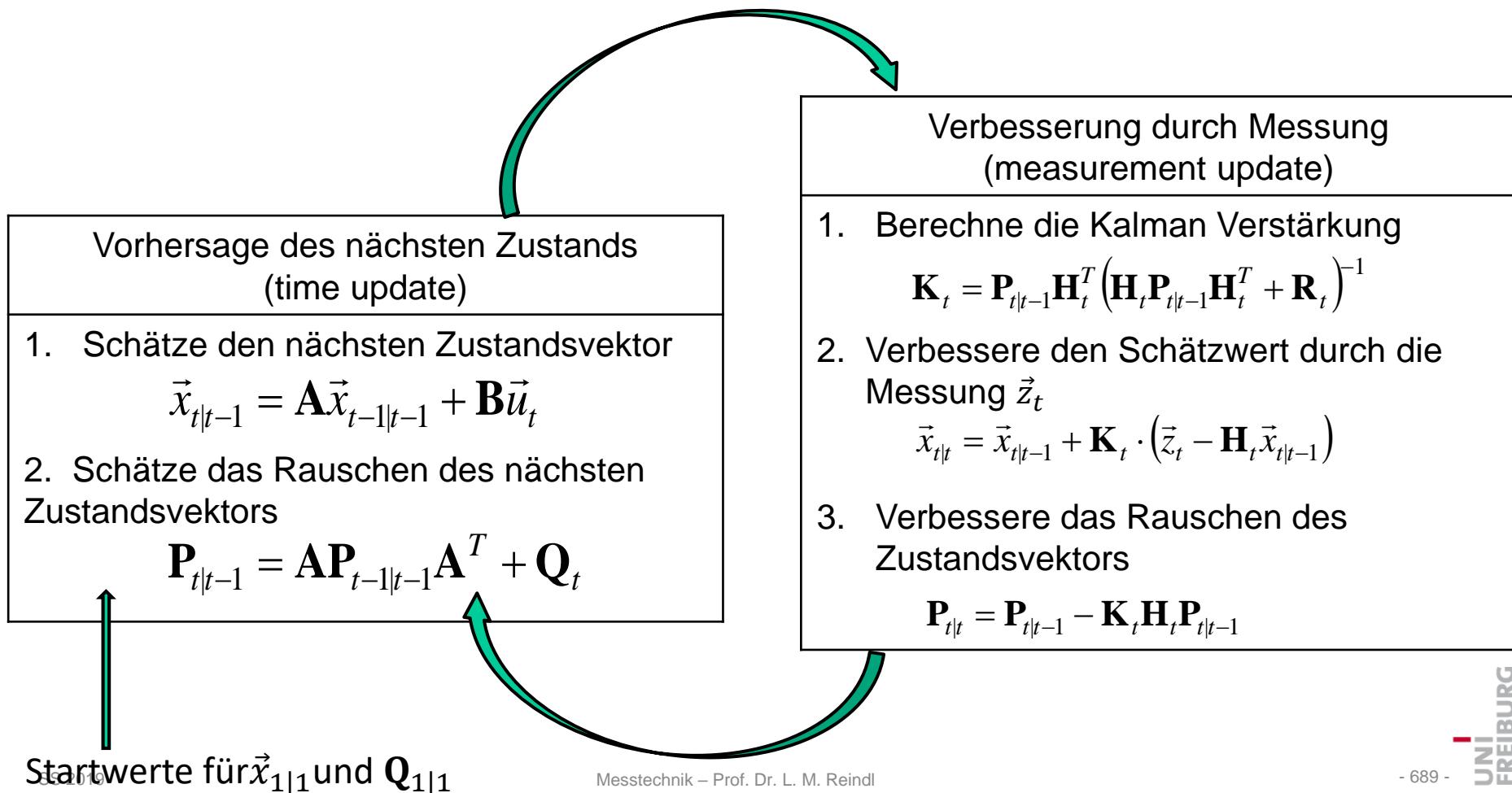
$$\vec{x}_{k|k} = \vec{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left(\vec{z}_k - \mathbf{H}\vec{x}_{k|k-1} \right)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})\mathbf{P}_{k|k-1} \quad (\mathbf{I}: \text{Einheitsmatrix})$$

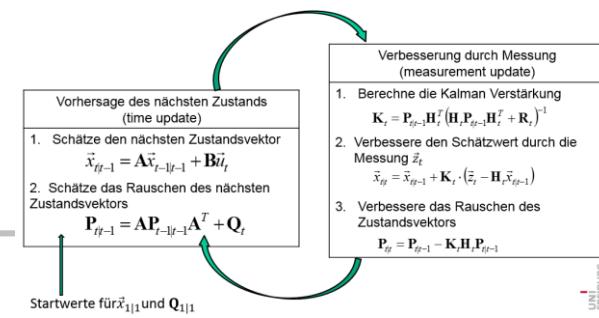
Blockdiagramm des Kalman-Filters

$$\vec{z}_t = \mathbf{H} \vec{x}_t + \vec{\nu}_t$$

Damit können wir folgendes Flussdiagramm des Kalman Filters aufstellen:



Blockdiagramm des Kalman-Filters



Bevor dieser Ablauf anhand eines Beispiels demonstriert wird, sind noch zwei Bemerkungen angebracht. Zum einen ist die Kombination der obigen Gleichungen nichts anderes als die Produktion von Paaren $(\vec{x}_{t|t}, P_{t|t})$ unter Nutzung von Daten über $(\vec{x}_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1})$ sowie Messwerten \vec{z}_t .

Eine Hinzunahme einer weiter zurückliegenden Vergangenheit ist unnötig. Alles, was an Information vorliegt, ist sozusagen in den Werten $(\vec{x}_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1})$ bereits eingearbeitet worden. Dieser Umstand erweist sich als äußerst nützlich, da hieraus eine exzellente Echtzeit-Fähigkeit resultiert.

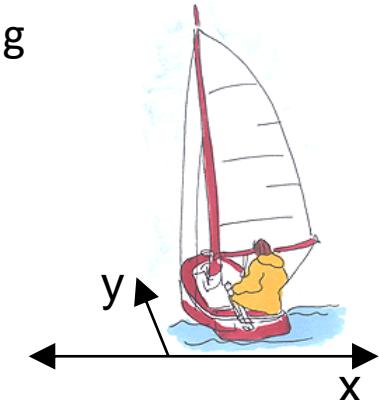
Die Ermittlung neuer Werte von $(\vec{x}_{t|t}, P_{t|t})$ benötigt nur die Berechnung von einigen Matrizenmultiplikationen, die für eine CPU keine Herausforderung sein sollte. Das trifft auch dann zu, wenn der Zustandsvektor mehrere Dimensionen hat.

Insbesondere ist keine Invertierung der Messmatrix erforderlich.

Beispiel 1 – Verfolgung eines Schiffes mit einem Sensor

In der Folge werden ausführlich drei einfache Beispiele zur Berechnung eines Kalman Filter Algorithmus vorgestellt.

Beispiel 1 – Verfolgung eines Schiffes mit einem Sensor.

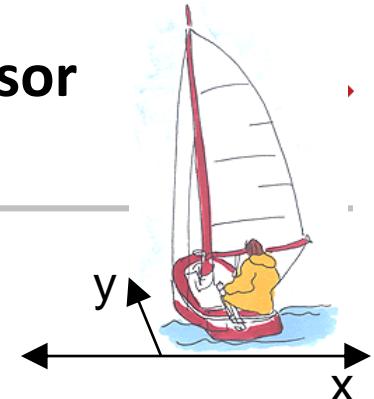


Betrachtet wird ein zweidimensionales Zielverfolgungsproblem, zum Beispiel die Verfolgung eines Schiffes, das mit konstanter Geschwindigkeit auf See fährt, wobei das Gebiet klein genug ist, um die Erdkrümmung unberücksichtigt lassen zu können. Der Systemzustand soll durch folgende Variablen beschrieben werden

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

wobei x und y die x - und y -Koordinaten des Schiffes, \dot{x} und \dot{y} die entsprechenden Geschwindigkeiten in diese beiden Richtungen darstellen.

Beispiel 1 – Verfolgung eines Schiffes mit einem Sensor



Dies führt bei konstanter Geschwindigkeit ohne Steuerung ($\vec{u}_t = 0$) auf die folgenden zeitdiskrete Zustandsgleichung für das Prozessmodell

$$\vec{x}_{t|t-1} = \mathbf{A}\vec{x}_{t-1|t-1}$$

$$\begin{bmatrix} x_{t|t-1} \\ y_{t|t-1} \\ \dot{x}_{t|t-1} \\ \dot{y}_{t|t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{t-1|t-1} \\ y_{t-1|t-1} \\ \dot{x}_{t-1|t-1} \\ \dot{y}_{t-1|t-1} \end{bmatrix}$$

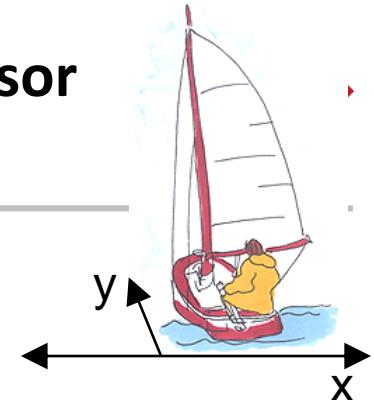
wobei das Zeitintervall zwischen den Abtastpunkten t_{t-1} und t_t mit T bezeichnet ist.
Als nächstes muss das Prozessrauschen \mathbf{Q} geschätzt werden.

Zuerst ist zu beachten, dass wegen der Abhängigkeit der Systemmatrix vom Zeitintervall T zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationen wahrscheinlich auch das Prozessrauschen von T abhängt. Da eine konstante Geschwindigkeit angenommen wird, ist es plausibel, dass die Abweichung in der Geschwindigkeit über das Zeitintervall direkt proportional zu T sein wird. Dann ist aber die Abweichung in der Position proportional zu $\frac{1}{2}T^2$. Unter diesen Annahmen sind die zugehörigen Varianzen proportional zu T^2 und $\frac{1}{4}T^4$ und die Kreuzkovarianz proportional zu $\frac{1}{2}T^3$.

Beispiel 1 – Verfolgung eines Schiffes mit einem Sensor

Diese Analyse führt auf die folgende Form für die Kovarianzmatrix des Prozessrauschen \mathbf{Q}_t :

$$\mathbf{Q}_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}T^4\sigma_{\dot{x}}^2 & 0 & \frac{1}{2}T^3\sigma_{\dot{x}}^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}T^4\sigma_{\dot{y}}^2 & 0 & \frac{1}{2}T^3\sigma_{\dot{y}}^2 \\ \frac{1}{2}T^3\sigma_{\dot{x}}^2 & 0 & T^2\sigma_{\dot{x}}^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^3\sigma_{\dot{y}}^2 & 0 & T^2\sigma_{\dot{y}}^2 \end{pmatrix}$$



Dabei ist $\sigma_{\dot{x}}$ die Standardabweichung pro Zeiteinheit für die Geschwindigkeit in x-Richtung und $\sigma_{\dot{y}}$ in y-Richtung. In diesem Beispiel werden dafür die Zahlenwerte

$$\sigma_{\dot{x}} = 0,3 \frac{m}{s}$$

$$\sigma_{\dot{y}} = 0,2 \frac{m}{s}$$

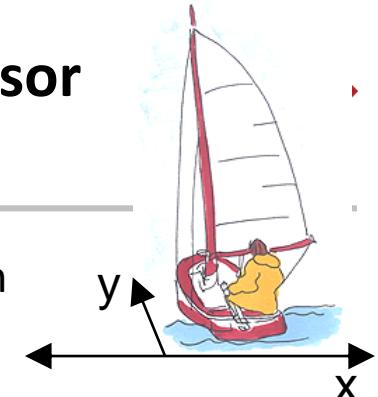
angenommen.

Beispiel 1 – Verfolgung eines Schiffes mit einem Sensor

Als nächstes wird ein Sensor betrachtet, der in der Lage ist, die Position des Schiffes zu detektieren, wie zum Beispiel ein GPS Empfänger.

Der Sensor liefert die x- und y-Koordinaten des Schiffes.

In der Zustandsbeschreibung führt dies auf die Messgleichung



$$\vec{z}_t = \mathbf{H} \vec{x}_t$$

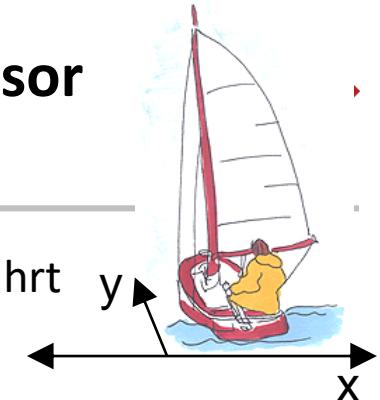
$$\begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Nun muss die Kovarianzmatrix des Messrauschen \mathbf{R}_t geschätzt werden. Als Beispiel wird angenommen, der GPS Empfänger liefere eine Messgenauigkeit für die Position mit einer konstanten Standardabweichung von 50 m in beiden Koordinatenrichtungen. Diese Abweichungen seien unkorreliert. Dies führt auf die konstante Kovarianzmatrix \mathbf{R}_t

$$\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix}$$

Beispiel 1 – Verfolgung eines Schiffes mit einem Sensor

Bevor ein vollständiger Zyklus des Kalman Filter Algorithmus durchgeführt werden kann, muss ein Anfangswert für den Zustandsvektor und seine zugehörige Kovarianzschätzung spezifiziert werden. Folgende Werte werden für dieses Beispiel angenommen

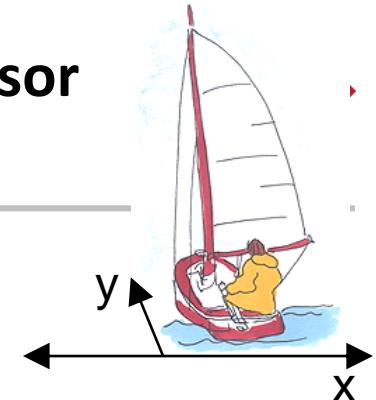


$$\vec{x}_{0|0} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{0|0} = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dies bedeutet, dass die Anfangsschätzung für die Schiffsposition bei den Koordinaten (1000,1000) (in Metern) mit einer Standardabweichung von 100 Metern in beiden Richtungen liegt und das Schiff eine Anfangsgeschwindigkeit von 0 m/s in der x-Richtung und von 6 m/s in der y-Richtung hat, wobei eine Standardabweichung von 2 m/s in beiden Richtungen angenommen wird.

Beispiel 1 – Verfolgung eines Schiffes mit einem Sensor



Die erste Messung nach 10 Sekunden sei

$$\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 1015 \\ 1050 \end{bmatrix}$$

Da das erste Zeitintervall 10 Sekunden ist, gilt für die Systemmatrix \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Und für die Kovarianzmatrix des Prozessrauschen \mathbf{Q}_t :

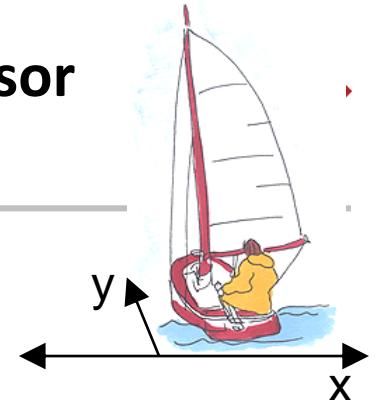
$$\mathbf{Q}_t = \begin{bmatrix} 225 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 20 \\ 45 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Nachdem nun die Werte für alle Matrizen festliegen, kann der erste Kalman Filter Zyklus berechnet werden

Beispiel 1 – Verfolgung eines Schiffes mit einem Sensor

Vorhersage:

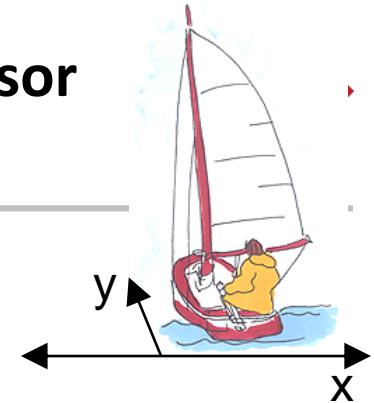
$$\vec{x}_{1|0} = \mathbf{A}_1 \vec{x}_{0|0} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1060 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{P}_{1|0} = \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_{0|0} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10625 & 0 & 85 & 0 \\ 0 & 10500 & 0 & 60 \\ 85 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}_{1|0} = \mathbf{H} \vec{x}_{1|0} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1060 \end{bmatrix}$$

Beispiel 1 – Verfolgung eines Schiffes mit einem Sensor



Verbesserung:

$$\mathbf{P}_{1|0} = \begin{bmatrix} 10625 & 0 & 85 & 0 \\ 0 & 10500 & 0 & 60 \\ 85 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

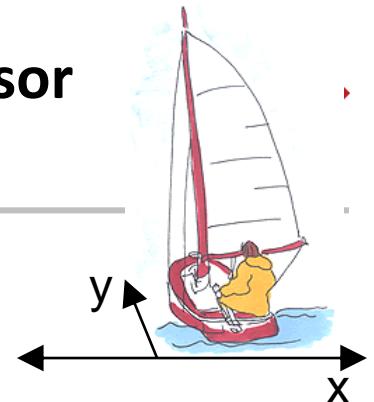
$$\mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 10625 & 0 \\ 0 & 10500 \\ 85 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 13125 & 0 \\ 0 & 13000 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_{1|1} = \vec{x}_{1|0} + \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \cdot \left(\vec{z}_1 - \vec{z}_{1|0} \right) = \begin{bmatrix} 1012,1 \\ 1051,9 \\ 0,1 \\ 5,9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{1|1} = \mathbf{P}_{1|0} - \mathbf{P}_{1|0} \mathbf{H}^T \cdot \left(\mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_{1|0} = \begin{bmatrix} 2023,8 & 0 & 16,2 & 0 \\ 0 & 2019,2 & 0 & 11,5 \\ 16,2 & 0 & 12,4 & 0 \\ 0 & 11,5 & 0 & 7,7 \end{bmatrix}$$

Beispiel 1 – Verfolgung eines Schiffes mit einem Sensor



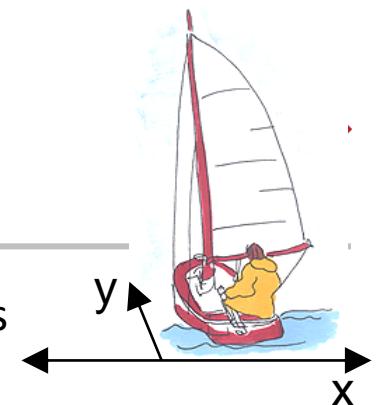
Aus obigen Berechnungen ist zu ersehen, dass die schließlich geschätzten Werte für die Position (gekennzeichnet durch x und y) zwischen den vorhergesagten Werten und den gemessenen Werten liegen, wie es von einer korrekten Filteroperation erwartet wird.

Allerdings liegt die geschätzte Position näher bei der gemessenen als bei der vorhergesagten. Dies liegt daran, dass die Unsicherheit für die Vorhersage $P_{1|0}$ größer ist, als für die Messung R , was aus dem Vergleich der entsprechenden Diagonalelemente zu ersehen ist.

Es ist ebenfalls zu beachten, dass die Unsicherheit in der Endschätzung $P_{1|1}$ geringer ist, als in der Vorhersage $P_{1|0}$ und in der Messung R . Auch dies ist konsistent mit der korrekten Operation eines Kalman Filters.

Beispiel 2 – Verfolgung eines Schiffes mit einem synchron arbeitenden Mehrsensorsystem

Die Möglichkeiten der Datenverschmelzung mit Hilfe des Kalman Filters bei Verwendung mehrerer Sensoren soll anhand desselben Prozessmodells betrachtet werden.

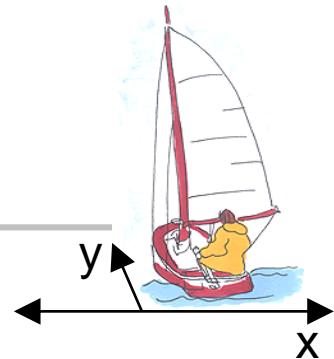


Dazu wird ein zusätzliches Sensormodell eingefügt. So kann man sich vorstellen, dass mit Hilfe eines Dopplerradars die Schiffsgeschwindigkeit gemessen wird. Dieser Sensor liefert gemessene Geschwindigkeiten für das Schiff in x- und y-Richtung. Dies kann in der Messgleichung berücksichtigt werden durch

$$\vec{z}_{vt} = \mathbf{H}_v \vec{x}_t$$
$$\begin{bmatrix} z_{\dot{x}} \\ z_{\dot{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Der Index v dient der Unterscheidung der Messungen des Geschwindigkeitssensors von der Positionsmessung.

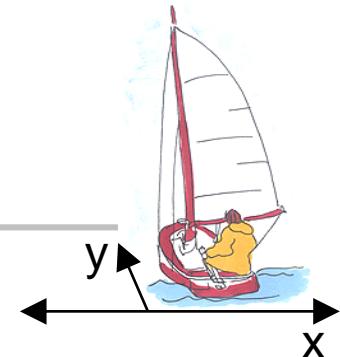
Beispiel 2 – Verfolgung eines Schiffes mit einem synchron arbeitenden Mehrsensorsystem



Als nächstes muss die Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{vt} geschätzt werden. Es wird angenommen, dass der Dopplerradarsensor Messungen mit einer konstanten Standardabweichung von 1 m/s jeweils in x- und y-Richtung liefert. Der Einfachheit wegen werden diese Messungen als unkorreliert angesetzt.
Dies führt auf die konstante Kovarianzmatrix $\mathbf{R}_{vt} = \mathbf{R}_v$

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2 – Verfolgung eines Schiffes mit einem synchron arbeitenden Mehrsensorsystem



Der Deutlichkeit wegen wird das erste Sensormodell nochmals mit dem Index p geschrieben

$$\vec{z}_{pt} = \mathbf{H}_p \vec{x}_t$$

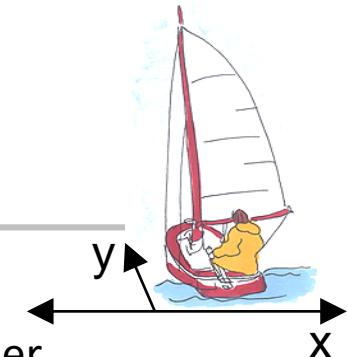
$$\begin{bmatrix} z_{xt} \\ z_{\dot{x}t} \\ z_{yt} \\ z_{\dot{y}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} 2500 & 0 \\ 0 & 2500 \end{bmatrix}$$

Die Anfangswerte für die Zustände und die zugehörigen geschätzten Kovarianzen werden wiederum wie in Beispiel 1 angesetzt.

Nun gibt es zwei unterschiedliche Methoden, mit dieser Multisensordatenfusion fortzufahren. Sie hängen davon ab, ob die Messungen synchron oder asynchron durchgeführt werden.

Beispiel 2 – Verfolgung eines Schiffes mit einem synchron arbeitenden Mehrsensorsystem



Zunächst wird angenommen, dass die Messungen synchron alle 10 s nach der Initialisierung vorgenommen werden und die Positionsmessung dieselbe wie in Beispiel 1 ist, also

$$\vec{z}_{p1} = \begin{bmatrix} 1015 \\ 1050 \end{bmatrix}$$

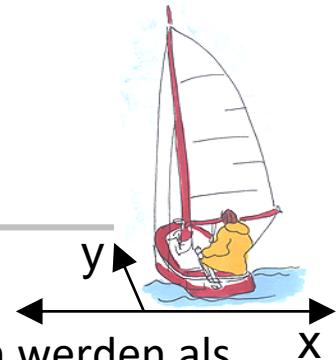
Für die Geschwindigkeitsmessung wird angenommen, sie liefere die Messwerte

$$z_{v1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Da die Beobachtungen synchron gemacht wurden, kann das folgende kombinierte Beobachtungsmodell definiert werden

$$\vec{z}_t = \mathbf{H}\vec{x}_t$$
$$\begin{bmatrix} \vec{z}_{pt} \\ \vec{z}_{vt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{pt} \\ \mathbf{H}_{vt} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_v \end{bmatrix}$$

Beispiel 2 – Verfolgung eines Schiffes mit einem synchron arbeitenden Mehrsensorsystem



In diesem Fall kann die kombinierte Beobachtungsmatrix \mathbf{H} , die Kovarianzmatrix \mathbf{R} und der kombinierte Beobachtungsvektor \vec{z}_1 geschrieben werden als

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 1015 \\ 1050 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Vorhersage:

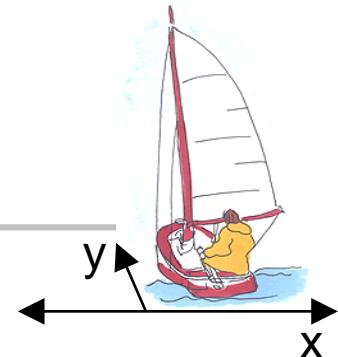
Wegen des gleichen Zeitintervalls, denselben Anfangszuständen und denselben Prozessmodellen wie im Beispiel 1 liefert der Vorhersagealgorithmus des Kalman Filters exakt dasselbe Ergebnis für den Schätzwert des Zustands $\vec{x}_{1|0}$ und die Kovarianz $\mathbf{P}_{1|0}$

$$\vec{x}_{1|0} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1060 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{1|0} = \begin{bmatrix} 10625 & 0 & 85 & 0 \\ 0 & 10500 & 0 & 60 \\ 85 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2 – Verfolgung eines Schiffes mit einem synchron arbeitenden Mehrsensorsystem

Die Vorhersage in der Messung ist jedoch verschieden von Beispiel 1 und kann berechnet werden zu



$$\mathbf{P}_{1|0} = \begin{bmatrix} 10625 & 0 & 85 & 0 \\ 0 & 10500 & 0 & 60 \\ 85 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

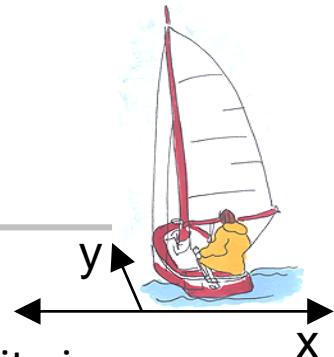
$$\mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 10625 & 0 & 85 & 0 \\ 0 & 10500 & 0 & 60 \\ 85 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 13125 & 0 & 85 & 0 \\ 0 & 13000 & 0 & 60 \\ 85 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_{1|1} = \vec{x}_{1|0} + \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \cdot (\vec{z}_1 - \vec{z}_{1|0}) = \begin{bmatrix} 1013,2 \\ 1050,7 \\ 0,9 \\ 5,1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{1|1} = \mathbf{P}_{1|0} - \mathbf{P}_{1|0} \mathbf{H}^T \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_{1|0} = \begin{bmatrix} 2004,3 & 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 2004,0 & 0 & 1,3 \\ 1,2 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0 & 1,3 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}$$

Beispiel 2 – Verfolgung eines Schiffes mit einem synchron arbeitenden Mehrsensorsystem

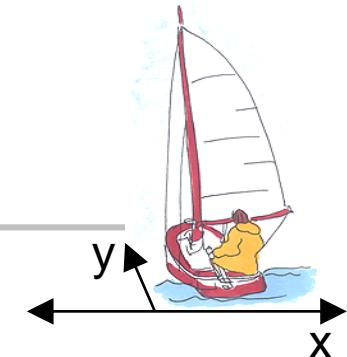


Vergleicht man diese Ergebnisse mit denjenigen aus Beispiel 1, erzielt nur mit einem Sensor, so wird deutlich, dass die Unsicherheit in der Geschwindigkeits-Schätzung geringer wurde, was auch aus der Tatsache zu erwarten war, dass hier ein Sensor vorhanden ist, der die Geschwindigkeit direkt gemessen hat.

Des weiteren ist auch die Unsicherheit in der Positionsschätzung geringer geworden, was ebenfalls durch die zusätzlichen Informationsquellen und der Beziehung zwischen Position und Geschwindigkeit wie sie im Prozessmodell enthalten ist, bewirkt wird.

Beispiel 3 – Verfolgung eines Schiffes mit einem asynchron arbeitenden Mehrsensorsystem

Schließlich soll die Datenverschmelzung bei einem asynchron arbeitenden Mehrsensorsystem mit Hilfe des Kalman Filters betrachtet werden.



Das betrachtete Szenario sieht vor, dass Geschwindigkeitsmessung alle 5 s nach der Initialisierung durchgeführt werden soll und die Positionsmessung alle 10 s.

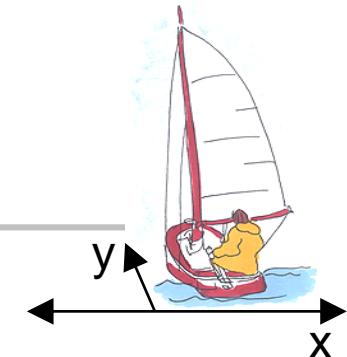
Die Anfangsbedingungen sollen erneut die gleichen sein wie bei Verwendung eines Sensors.

Natürlich sind nun zwei Iterationen des Kalman Filters nötig, um eine Schätzung des Zustands nach 10 s zu erhalten. Da das Zeitintervall für beide Zyklen gleich ist, sind auch die Systemmatrizen (Zustandsübergangsmatrizen) $\mathbf{A}(1)$ und $\mathbf{A}(2)$ gleich, d. h.

$$\mathbf{A}(1) = \mathbf{A}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3 – Verfolgung eines Schiffes mit einem asynchron arbeitenden Mehrsensorsystem

Die Kovarianzmatrix des Prozesses ist ebenfalls für beide Zyklen gleich, d. h.



$$\mathbf{Q}(1) = \mathbf{Q}(2) = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 5,6 & 0 \\ 0 & 6,3 & 0 & 2,5 \\ 5,6 & 0 & 2,3 & 0 \\ 0 & 2,5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vorhersage erster Zyklus:

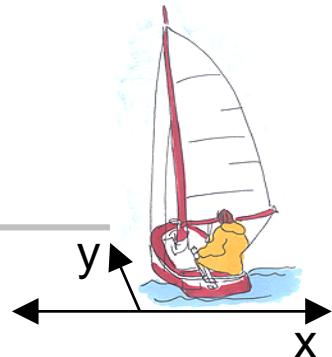
$$\vec{x}_{1|0} = \mathbf{A}(1)\vec{x}_{0|0} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1030 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{1|0} = \mathbf{A}(1)\mathbf{P}_{0|0}\mathbf{A}^T(1) + \mathbf{Q}(1) = \begin{bmatrix} 10114 & 0 & 26 & 0 \\ 0 & 10106 & 0 & 22 \\ 26 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 22 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}_{1|0} = \mathbf{H}(1)\vec{x}_{1|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3 – Verfolgung eines Schiffes mit einem asynchron arbeitenden Mehrsensorsystem

Verbesserung erster Zyklus:



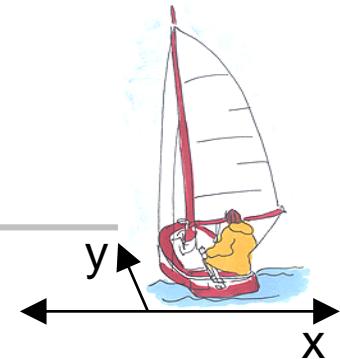
$$\mathbf{P}_{1|0} = \begin{bmatrix} 10114 & 0 & 26 & 0 \\ 0 & 10106 & 0 & 22 \\ 26 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 22 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T(1) = \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 0 & 22 \\ 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(1) \cdot \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T(1) + \mathbf{R}(1) = \begin{bmatrix} 7,3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_{1|1} = \vec{x}_{1|0} + \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T(1) \left(\mathbf{H}(1) \cdot \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T(1) + \mathbf{R}(1) \right)^{-1} \cdot (\vec{z}_1 - \vec{z}_{1|0}) = \begin{bmatrix} 1003,5 \\ 1026,3 \\ 0,9 \\ 5,2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{1|1} = \mathbf{P}_{1|0} - \mathbf{P}_{1|0} \mathbf{H}^T(1) \cdot \left(\mathbf{H}(1) \cdot \mathbf{P}_{1|0} \cdot \mathbf{H}^T(1) + \mathbf{R}(1) \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}(1) \cdot \mathbf{P}_{1|0}^T = \begin{bmatrix} 10024 & 0 & 3,5 & 0 \\ 0 & 10022 & 0 & 3,75 \\ 3,5 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0 & 3,75 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3 – Verfolgung eines Schiffes mit einem asynchron arbeitenden Mehrsensorsystem



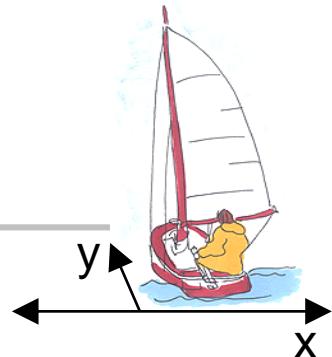
Vorhersage zweiter Zyklus:

$$\vec{x}_{2\parallel} = \mathbf{A}(2)\vec{x}_{1\parallel} = \begin{bmatrix} 1000,7 \\ 1052,1 \\ 0,9 \\ 5,2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{2\parallel} = \mathbf{A}(2)\mathbf{P}_{1\parallel}\mathbf{A}^T(2) + \mathbf{Q}(2) = \begin{bmatrix} 10095 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 10087 & 0 & 10 \\ 13 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z}_{2\parallel} = \mathbf{H}(2)\vec{x}_{1\parallel} = \begin{bmatrix} 1007,8 \\ 1052,1 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3 – Verfolgung eines Schiffes mit einem asynchron arbeitenden Mehrsensorsystem



Verbesserung zweiter Zyklus:

$$\mathbf{P}_{2|1} = \begin{bmatrix} 10095 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 10087 & 0 & 10 \\ 13 & 0 & 3,2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 1,8 \end{bmatrix}$$

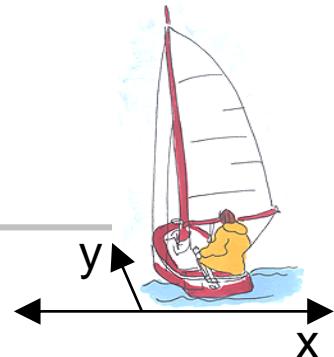
$$\mathbf{P}_{2|1} \cdot \mathbf{H}^T(2) = \begin{bmatrix} 10095 & 0 \\ 0 & 10087 \\ 13 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(2) \cdot \mathbf{P}_{2|1} \cdot \mathbf{H}^T(2) + \mathbf{R}(2) = \begin{bmatrix} 12595 & 0 \\ 0 & 12587 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_{2|2} = \vec{x}_{2|1} + \mathbf{P}_{2|1} \cdot \mathbf{H}^T(2) (\mathbf{H}(2) \cdot \mathbf{P}_{2|1} \cdot \mathbf{H}^T(2) + \mathbf{R}(2))^{-1} \cdot (\vec{z}_2 - \vec{z}_{2|1}) = \begin{bmatrix} 1013,6 \\ 1050,4 \\ 0,9 \\ 5,2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{2|2} = \mathbf{P}_{2|1} - \mathbf{P}_{2|1} \mathbf{H}^T(2) \cdot (\mathbf{H}(2) \cdot \mathbf{P}_{2|1} \cdot \mathbf{H}^T(2) + \mathbf{R}(2))^{-1} \cdot \mathbf{H}(2) \cdot \mathbf{P}_{2|1}^T = \begin{bmatrix} 2003,8 & 0 & 2,7 & 0 \\ 0 & 2003,4 & 0 & 2,1 \\ 2,7 & 0 & 3,1 & 0 \\ 0 & 2,1 & 0 & 1,7 \end{bmatrix}$$

Beispiel 3 – Verfolgung eines Schiffes mit einem asynchron arbeitenden Mehrsensorsystem



Ein Vergleich dieser asynchronen Datenfusionierung mit den beiden vorherigen Verfahren zeigt erneut eine Verringerung der Unsicherheit sowohl bei der Positions- als auch bei der Geschwindigkeitsschätzung.

Es ist besonders hervorzuheben, dass die Ergebnisse mit synchroner und asynchroner Messung nicht gleich sind.

Das Kalman-Filter in vielen Fällen nicht einsetzbar, da es auf lineare Zustandsraummodelle beschränkt ist. Selbst einfache Aufgabenstellungen der Navigationstechnik oder das wichtige Themengebiet der Parameterschätzung führen jedoch immer auf nichtlineare Zustands- oder Beobachtungsgleichungen.

Abhilfe schaffen hier nichtlineare Erweiterungen des Kalman-Filters wie das bereits in den 60er Jahren entwickelte Erweiterte Kalman-Filter (Abk. EKF) oder auch das neuere Unscented Kalman-Filter (Abk. UKF). Diese Kalman-Filter-Varianten nähern das nichtlineare Problem durch ein lineares, wobei entweder analytische (EKF) oder statistische Techniken (UKF) zum Einsatz kommen.

Im Sinne eines unkomplizierten Sprachgebrauchs werden diese Erweiterungen häufig abkürzend auch als Kalman-Filter bezeichnet, da sie ebenso über eine rekursive sowie eine Prädiktor-Korrektor-Struktur verfügen. Im Gegensatz zum einfachen Kalman-Filter ist die Kalman-Matrix nun eine Zufallsvariable und muss während des gesamten Filtereinsatzes mitgeschätzt werden, was wiederum die Anforderungen an die Technik erhöht.

Einsatz des Kalman Filters

Das Kalman-Filter ist heute der wohl am weitesten verbreitete Algorithmus zur Zustandsschätzung linearer und nichtlinearer Systeme.

Die wichtigsten Anwendungen sind:

- Beseitigung zufälliger und systematischer Fehler in Messungen.
- Bestimmung von internen Zuständen eines Systems, die nicht direkt messbar sind (z.B. Bestimmung der Temperatur aus der Spannung an einem Thermoelement).
- Vorhersage zukünftiger Zustände eines Systems.
- Optimale Filterung von Datenmaterial.

Vorteile von Kalman-Filtern gegenüber anderen Ansätzen sind:

- Annahmen über die Ungenauigkeiten von Messprozessen werden in die Modelle eingearbeitet.
- Messungen werden iterativ eingearbeitet, d.h., Kalman-Filter sind echtzeitfähig.
- Die Formeln sind, gemessen an der Leistungsfähigkeit heutiger Prozessoren, einfach und gut implementierbar.
- Vorher vorhandenes Zusatzwissen kann genutzt werden und verbessert die Qualität der Aussage.

Einsatz des Kalman Filters

Weite Verbreitung gefunden hat das Kalman-Filter in der Inertialnavigation beispielsweise von Flugzeugen: Während des Flugs werden Beschleunigungen und Drehraten des Flugzeugs von einer inertialen Messeinheit (IMU) mit hohen Frequenzen gemessen, um eine Kurzzeit-Navigation zu ermöglichen. Weitere Sensoren, insbesondere satellitengestützte Positionsbestimmung (z. B. GPS) liefern Stützdaten. Diese verschiedenen Messungen müssen verknüpft („fusioniert“) werden, um eine möglichst optimale Schätzung der aktuellen Position und Orientierung zu gewährleisten.

Zunehmend wird das Kalman-Filter im Automobilbereich eingesetzt. Sicherheits- oder Komfortanwendungen, die auf umfelderkennenden Systemen basieren, sind auf verlässliche Informationen (z. B. Position, Geschwindigkeit) bezüglich der Objekte in ihrem Umfeld angewiesen.

Eine ebenfalls oft verwendete Art eines Kalman-Filters, das PLL-Filter, hat heute weite Verbreitung gefunden in Radios, Funkgeräten, Computern und in fast allen anderen Arten von Video- und Kommunikationsgeräten.

In der Makroökonomik werden Kalman-Filter zur Schätzung von dynamisch-stochastischen Allgemeinen Gleichgewichtsmodellen eingesetzt.

Examples of Kalman Filtering

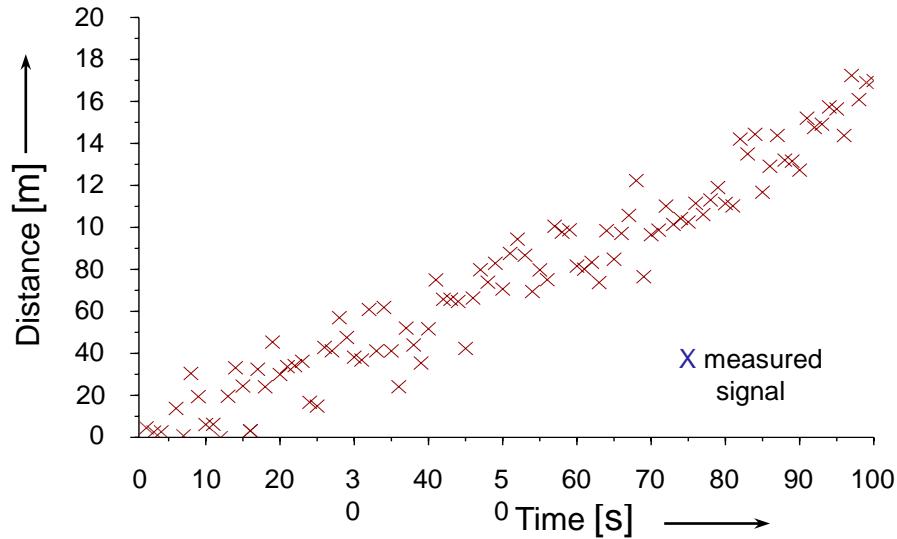
CRUISING ROBOT OBELIX

Examples 1: Cruising Robot Obelix



- Moving with a low and approximately constant speed
- Desired information about distance and speed
- 1D laser distance sensor assumed

Example 1: Simulated results



- Noisy measurement signal
- Robot slows down for reorientation
- No direct speed measurement

Example 1: SciLab-Code

```

1 //·signal·model
2 F = [1·1; -0·1];                                //·transition·matrix
3 G = [0; 1];                                     //·drive·vector
4 H = [1; 0];                                     //·observation·vector
5
6 //·filter·preset
7 Q = 0·2;                                         //·variance,·process·noise
8 R = 4;                                           //·variance,·measurement·noise
9 x_hat = [0; 0];                                  //·estimated·state·vector
10 C = [1·1; 1·1];                                 //·covariance·matrix
11 K = [1; 1];                                    //·Kalman·gain·matrix
12
13 //·simulation·params
14 N = 100;                                         //·sim·length
15 x1 = zeros(N);                                 //·plot·vector
16 x2 = zeros(N);                                 //·plot·vector
17
18 //·filter·update
19 for k = 1:N
20     C = F * (C - C * H * inv(H' * C * H + R) * H' * C) ...
21         * F + G * Q * G';                         //·Riccatio·equation
22     K = F * C * H * inv(H' * C * H + R);        //·Kalman·gain·update
23     x_hat = F * x_hat + ...
24         K * (z(k) - H' * x_hat);                //·estimation
25     x1(k) = x_hat(1);
26     x2(k) = x_hat(2);
27 end
28
29 //·plot
30 //·clf();
31 f = gcf();
32
33 subplot(2,1,1);                                //·plot·estimated·position
34 plot2d(x1,style=2,rect=[1·0·N·200]);
35 f.children(2).children(1).children.foreground = 2;
36 f.children(2).children(1).children.thickness = 2;
37 title('position')
38
39 subplot(2,1,2);                                //·plot·estimated·velocity
40 plot2d(x2,style=2,rect=[1·0·N·5]);
41 f.children(1).children(1).children.foreground = 2;
42 f.children(1).children(1).children.thickness = 2;
43 title('velocity')

```



Example 1: First calculation step

```
Scilab 5.5.0 Console
-->k = 1
k =
1.

-->C = F * (C - C * H * inv(H' * C * H + R) * H' * C) ...
-->           * F + G * Q * G'
C =
1.6      3.2
0.8      1.8

-->K = F * C * H * inv(H' * C * H + R)
K =
0.4285714
0.1428571

-->x_hat = F * x_hat + .:
-->           K * (z(k) - H' * x_hat)
x_hat =
- 4.5727016
- 1.5242339

-->x1(k) = x_hat(1);
-->     x2(k) = x_hat(2);
```



Example 1: Second calculation step

```
Scilab 5.5.0 Console
-->k = 2
k =
2.

-->C = F * (C - C * H * inv(H' * C * H + R) * H' * C) * F + G * Q * G'
C =
1.7142857 5.3428571
0.5714286 2.1142857

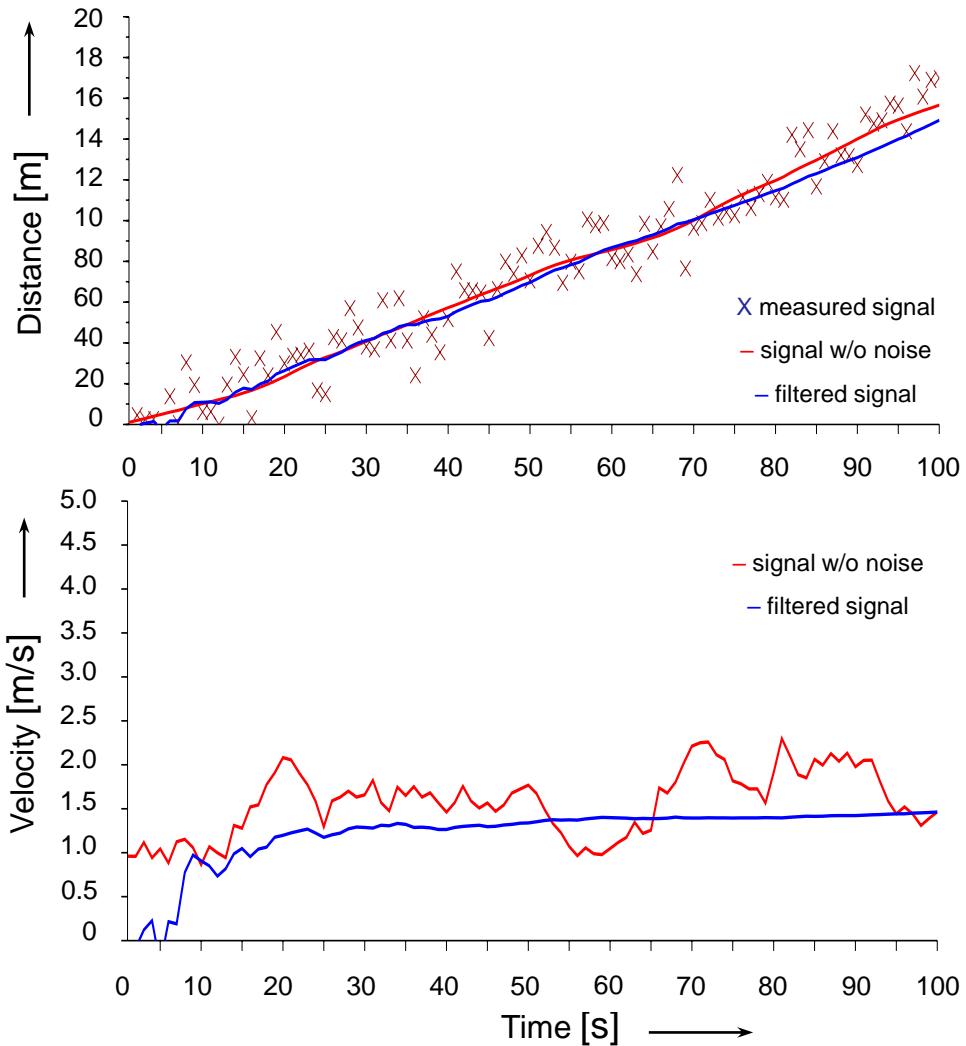
-->K = F * C * H * inv(H' * C * H + R)
K =
0.4
0.1

-->x_hat = F * x_hat + K * (z(k) - H' * x_hat)
x_hat =
3.106724
0.776681

-->x1(k) = x_hat(1);
--> x2(k) = x_hat(2);
```



Example 1: Filtered Signal



QUADROCOPTER FLIGHT OVER FREIBURG

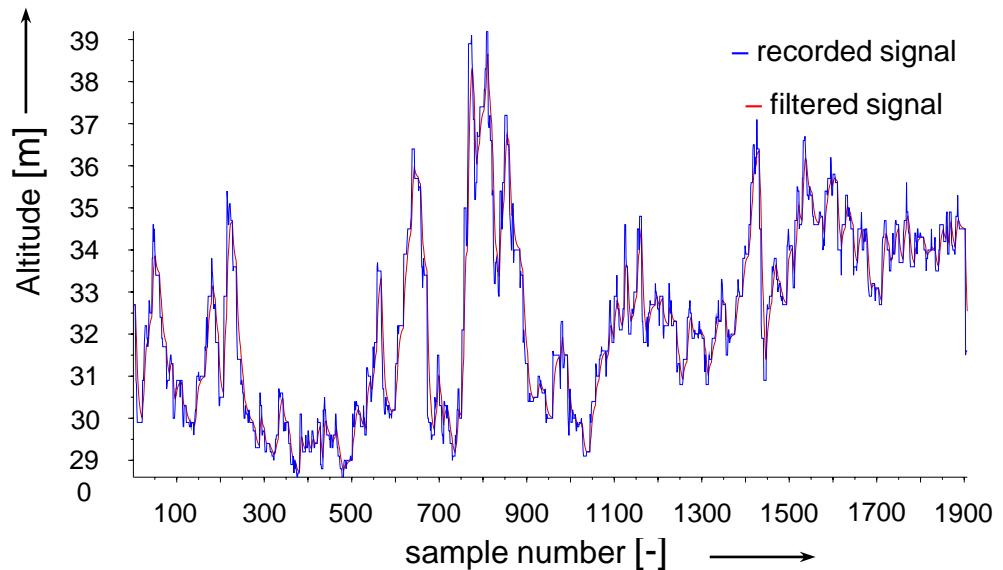
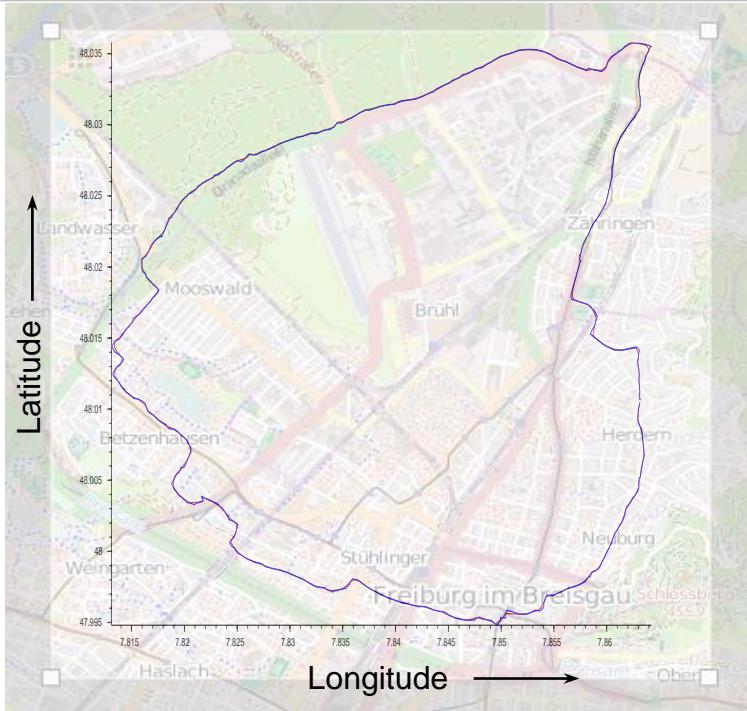
Example2: Quadrocopter flight over Freiburg



- Tracking of the GPS position
- Information about position (3D), velocity and acceleration desired
→ 9D system (9x9 matrices)

Bildquelle: <http://ira.informatik.uni-freiburg.de/~schubert/quadrocopter.pdf>

Example2: GPS Tracking (2)



- 3D positions + velocity and acceleration
→ 9D system (9x9 matrices)

Example: GPS Tracking (2)

```

0001 clear;
0002 clc;
0003 inpFName = "runtastic_20130228_1936_Laufen.csv";
0004 s = strtod(read_csv(inpFName));
0005
0006 // signal model
0007 F = [1 1 1 0 0 0 0 0; ...
0008 0 1 1 0 0 0 0 0; ...
0009 0 0 1 0 0 0 0 0; ...
0010 0 0 0 1 1 0 0 0; ...
0011 0 0 0 0 1 1 0 0 0; ...
0012 0 0 0 0 0 1 0 0 0; ...
0013 0 0 0 0 0 0 1 1; ...
0014 0 0 0 0 0 0 0 1; ...
0015 0 0 0 0 0 0 0 1]; // transition matrix
0016
0017 G = [1 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0018 0 1 0 0 0 0 0 0 0; ...
0019 0 0 1 0 0 0 0 0 0; ...
0020 0 0 0 1 0 0 0 0 0; ...
0021 0 0 0 0 1 0 0 0 0; ...
0022 0 0 0 0 0 1 0 0 0; ...
0023 0 0 0 0 0 0 1 0 0; ...
0024 0 0 0 0 0 0 0 1 0; ...
0025 0 0 0 0 0 0 0 0 1]; // noise selection matrix
0026
0027 H = [1 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0028 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0029 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0030 0 0 0 1 0 0 0 0 0; ...
0031 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0032 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0033 0 0 0 0 0 0 1 0 0; ...
0034 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0035 0 0 0 0 0 0 0 0 0]; // observation matrix
0036
0037 // filter preset
0038 Q = [0.2 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0039 0 0.2 0 0 0 0 0 0 0; ...
0040 0 0 0.4 0 0 0 0 0 0; ...
0041 0 0 0 0.2 0 0 0 0 0; ...
0042 0 0 0 0 0.2 0 0 0 0; ...
0043 0 0 0 0 0 0.4 0 0 0; ...
0044 0 0 0 0 0 0 0.2 0 0; ...
0045 0 0 0 0 0 0 0 0.2 0; ...
0046 0 0 0 0 0 0 0 0 0.4]; // variance, process noise
0047 R = [4 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0048 0 16 0 0 0 0 0 0 0; ...
0049 0 0 16 0 0 0 0 0 0; ...
0050 0 0 0 4 0 0 0 0 0; ...
0051 0 0 0 0 16 0 0 0 0; ...
0052 0 0 0 0 0 16 0 0 0; ...
0053 0 0 0 0 0 0 16 0 0; ...
0054 0 0 0 0 0 0 0 16 0; ...
0055 0 0 0 0 0 0 0 0 64]; // variance, measurement noise
0056
0057 x_hat = [s(1,2);0;0;s(1,3);0;0;s(1,4);0;0]; // estimated state vector
0058
0059 C = [1 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0060 0 1 0 0 0 0 0 0 0; ...
0061 0 0 1 0 0 0 0 0 0; ...
0062 0 0 0 1 0 0 0 0 0; ...
0063 0 0 0 0 1 0 0 0 0; ...
0064 0 0 0 0 0 1 0 0 0; ...
0065 0 0 0 0 0 0 1 0 0; ...
0066 0 0 0 0 0 0 0 1 0; ...
0067 0 0 0 0 0 0 0 0 1]; // covariance matrix
0068
0069 K = [1 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
0070 0 1 0 0 0 0 0 0 0; ...
0071 0 0 1 0 0 0 0 0 0; ...
0072 0 0 0 1 0 0 0 0 0; ...
0073 0 0 0 0 1 0 0 0 0; ...
0074 0 0 0 0 0 1 0 0 0; ...
0075 0 0 0 0 0 0 1 0 0; ...
0076 0 0 0 0 0 0 0 1 0; ...
0077 0 0 0 0 0 0 0 0 1]; // Kalman gain matrix
0078
0079 // simulation params
0080 N = size(s,"r"); // sim length
0081 x = zeros(N); // plot vector
0082 y = zeros(N); // plot vector
0083 z = zeros(N);
0084
0085 // filter update
0086 for k = 1:N
0087 C = F * (C - C * H * inv(H' * C * H + R) * H' * C) * F + ... // Riccati equation
0088 G * Q * G';
0089 K = F * C * H * inv(H' * C * H + R); // Kalman gain update
0090 x_hat = F * x_hat + K * ([s(k,2);0;0;s(k,3);0;0;s(k,4);0;0] - ... // estimation
0091 H' * z_hat);
0092 // graphical output vectors
0093 x(k) = x_hat(1);
0094 v_x(k) = x_hat(2);
0095 a_x(k) = x_hat(3);
0096 y(k) = x_hat(4);
0097 v_y(k) = x_hat(5);
0098 a_y(k) = x_hat(6);
0099 z(k) = x_hat(7);
0100 v_z(k) = x_hat(8);
0101 a_z(k) = x_hat(9);
0102 end
0103
0104 // plot
0105 clf();
0106
0107 subplot(2,1,1); // plot latitude and longitude
0108 plot2d(x,y,style=21, ...
0109 rect=[min(s(:,2)) min(s(:,3)) max(s(:,2)) max(s(:,3))]);
0110 plot2d(s(:,2),s(:,3),style=2, ...
0111 rect=[min(s(:,2)) min(s(:,3)) max(s(:,2)) max(s(:,3))]);
0112 title('Longitude and Latitude')
0113
0114 subplot(2,1,2); // plot altitude
0115 plot2d(z,style=21,rect=[1 min(s(:,4)) N max(s(:,4))]);
0116 plot2d(s(:,4),style=2,rect=[1 min(s(:,4)) N max(s(:,4))]);
0117 title('Altitude')

```

Reference for Kalman filter

R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *J. Basic Eng.*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, Mar. 1960.

G. Welch and G. Bishop, "An Introduction to the Kalman Filter", University of North Carolina at Chapel Hill, 2001.

www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001_CoursePack_08.pdf

D. Stranneby, W. Walker, "Digital Signal Processing and Applications", 2nd edition, Newnes, Elsevier 2004.

B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering*. New York: Dover, 2005.

P. D. Groves, *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*. Norwood, MA: Artech House, 2008.

S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "Unscented filtering and nonlinear estimation," *Proc. IEEE*, vol. 92, no. 3, pp. 401–422, 2004.

J. Bibby and H. Toutenburg, *Prediction and Improved Estimation in Linear Models*. New York: Wiley, 1977.

R. Faragher, „Understanding the basis of the Kalman filter via a simple and intuitive derivation“ IEEE Signal Processing Magazine, Sep. 2012, pp.128-132