如何学习数学

数学方法浅论

whwh

South China University of Technology

英伦国际教育, 2024.7.30

目录

1 可视化

2 抽象

目录

1 可视化

2 抽象

可视化

初等数学大致可以分为以下几个部分：

- 代数
- 几何
- 数值计算
- 组合

可视化是我们理解数学最初级的方式，甚至可以说是不属于数学的数学，因为越高等的数学知识越无法与直观产生任何关系，这便是现代数学的主流观点——形式主义。但是，它是我们学习数学的最好的入口。

可视化

那初等数学中哪些能够可视化呢？

可视化

那初等数学中哪些能够可视化呢?

- 所有初等几何知识

可视化

那初等数学中哪些能够可视化呢?

- 所有初等几何知识
- 所有初等函数知识

可视化

那初等数学中哪些能够可视化呢?

- 所有初等几何知识
- 所有初等函数知识
- 一部分初等代数知识

可视化

那初等数学中哪些能够可视化呢?

- 所有初等几何知识
- 所有初等函数知识
- 一部分初等代数知识
- 一部分初等组合知识

目录

1 可视化

2 抽象

抽象

什么是抽象？

抽象

什么是抽象?

- 难以与图像产生关联

抽象

什么是抽象?

- 难以与图像产生关联
- 纯粹的符号系统

抽象

什么是抽象？

- 难以与图像产生关联
- 纯粹的符号系统
- 逻辑是各个定理之间唯一的关系

抽象

什么是抽象?

- 难以与图像产生关联
- 纯粹的符号系统
- 逻辑是各个定理之间唯一的关系
- 无法用自然语言描述

抽象

抽象的数学知识有哪些?

抽象

抽象的数学知识有哪些?

- 群论

抽象

抽象的数学知识有哪些?

- 群论
- 拓扑学

抽象

抽象的数学知识有哪些?

- 群论
- 拓扑学
- 集合论

抽象

抽象的数学知识有哪些?

- 群论
- 拓扑学
- 集合论
- 数学分析等

定理 (乌雷松引理)

引理： 设 X 是一个正规拓扑空间，且 A 和 B 是 X 中不相交的闭子集。那么存在一个连续函数 $f\colon X \to [0,1]$，使得 $f(A) = 0$ 且 $f(B) = 1$。

证明.

- 对每个 $r \in [0,1]$ 的有理数，定义开集 U_r 和 V_r 使得 $A \subseteq U_r$，$B \subseteq V_r$，且 $U_r \cap V_r = \emptyset$。
- 设 $U_0 = X \setminus B$，$V_1 = X \setminus A$。
- 对 $0 < r < 1$，逐步构造 U_r 和 V_r，满足 $A \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq V_r^c \subseteq V_r \subseteq B^c$。
- 定义函数 $f(x) = \sup\{r \mid x \in U_r\}$，由于每个 x 属于某个 U_r，且 U_r 是开集，所以 f 是连续的。
- 验证：对 $x \in A$，$f(x) = 0$；对 $x \in B$，$f(x) = 1$。

抽象数学一览之集合学中康托尔定理

定理： 对任何集合 X，其幂集 $\mathcal{P}(X)$ 的势（即基数）严格大于 X 的势，即 $|\mathcal{P}(X)| > |X|$。

证明：

- 设 $f: X \to \mathcal{P}(X)$ 是任意函数。我们需要证明 f 不是满射，即存在 $S \in \mathcal{P}(X)$ 使得 $S \notin \mathrm{Im}(f)$。
- 构造集合 $S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$。
- 假设存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = S$。则 $x \in S \iff x \notin f(x)$，矛盾。因此，$S \notin \mathrm{Im}(f)$。
- 因此，不存在满射 $f: X \to \mathcal{P}(X)$，即 $|\mathcal{P}(X)| > |X|$。

结论： 康托尔定理表明，对于任何集合 X，其幂集 $\mathcal{P}(X)$ 的基数严格大于 X 的基数。这是集合论中的一个重要结果，对理解无限集合的大小和比较基数有着深远的影响。

抽象数学一览之群论中拉格朗日定理

定理：设 G 是一个有限群，而 H 是 G 的一个子群。那么 $|H|$ 整除 $|G|$。
证明：

- 定义等价关系 $x \sim y$ 当且仅当 $xH = yH$。这是一个等价关系，因为它是自反的、对称的和传递的。
- 由于 G 是有限的，所以等价类 xH 的个数是有限的。这些等价类构成了 G 的一个划分。
- 由于每个等价类的大小都是 $|H|$，所以 $|G|$ 是 $|H|$ 的倍数。

结论：拉格朗日定理表明，对于有限群 G 和其子群 H，$|H|$ 整除 $|G|$。这是群论中的一个重要结果，对于研究群的结构和性质有着深远的影响。

备注

我们要庆幸初等数学尚且大部分是可视化的，因为抽象数学的学习是一件非常困难的事情。但是，抽象数学的学习是我们学习数学的必经之路，因为它是数学的精髓所在。我们要学会抽象数学，就要学会用符号系统思考，这是一种非常重要的思维方式。

如何学习抽象数学呢?

如何学习抽象数学呢?

- 从易到难，从简单的抽象数学开始学习

如何学习抽象数学呢?

- 从易到难，从简单的抽象数学开始学习
- 多做题，多思考

如何学习抽象数学呢?

- 从易到难，从简单的抽象数学开始学习
- 多做题，多思考
- 认真推导每一个定理，理清它与其它定理的逻辑关系

如何学习抽象数学呢?

- 从易到难，从简单的抽象数学开始学习
- 多做题，多思考
- 认真推导每一个定理，理清它与其它定理的逻辑关系
- 每一个例题都是一个重要的练习，要认真对待

如何应对中高考数学呢？

如何应对中高考数学呢?

- 听课

如何应对中高考数学呢?

- 听课
- 刷题

如何应对中高考数学呢?

- 听课
- 刷题
- 总结

如何应对中高考数学呢?

- 听课
- 刷题
- 总结
- 刷题

数学中的公理化思想

备注

数学的公理化思想是数学的一种重要思维方式，它是数学的基础。数学的公理化思想是指数学家在研究数学问题时，首先要建立一个公理系统，然后在这个公理系统的基础上推导出数学定理。这种思维方式是数学家们在研究数学问题时所遵循的一种基本原则。

例题

例

证明：$\sqrt{2}$ 是无理数。

例题

例

证明：$\sqrt{2}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b\neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $2=\frac{a^2}{b^2}$。

例题

例

证明：$\sqrt{2}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b\neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $2=\frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2=2b^2$。

例题

例

证明：$\sqrt{2}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b\neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $2=\frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2=2b^2$。
- 这意味着 a^2 是偶数，因此 a 也是偶数（因为偶数的平方才是偶数）。

例题

例

证明：$\sqrt{2}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b \neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $2 = \frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2 = 2b^2$。
- 这意味着 a^2 是偶数，因此 a 也是偶数（因为偶数的平方才是偶数）。
- 设 $a = 2k$，代入得到 $(2k)^2 = 2b^2$，即 $4k^2 = 2b^2$，进一步得出 $b^2 = 2k^2$。

例

证明：$\sqrt{2}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b \neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $2 = \frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2 = 2b^2$。
- 这意味着 a^2 是偶数，因此 a 也是偶数（因为偶数的平方才是偶数）。
- 设 $a = 2k$，代入得到 $(2k)^2 = 2b^2$，即 $4k^2 = 2b^2$，进一步得出 $b^2 = 2k^2$。
- 这意味着 b^2 也是偶数，因此 b 也是偶数。

例题

例

证明：$\sqrt{2}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b \neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $2 = \frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2 = 2b^2$。
- 这意味着 a^2 是偶数，因此 a 也是偶数（因为偶数的平方才是偶数）。
- 设 $a = 2k$，代入得到 $(2k)^2 = 2b^2$，即 $4k^2 = 2b^2$，进一步得出 $b^2 = 2k^2$。
- 这意味着 b^2 也是偶数，因此 b 也是偶数。
- 由于 a 和 b 都是偶数，这与它们互质的假设矛盾。

例

证明：$\sqrt{2}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b \neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $2 = \frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2 = 2b^2$。
- 这意味着 a^2 是偶数，因此 a 也是偶数（因为偶数的平方才是偶数）。
- 设 $a = 2k$，代入得到 $(2k)^2 = 2b^2$，即 $4k^2 = 2b^2$，进一步得出 $b^2 = 2k^2$。
- 这意味着 b^2 也是偶数，因此 b 也是偶数。
- 由于 a 和 b 都是偶数，这与它们互质的假设矛盾。
- 因此，假设不成立，$\sqrt{2}$ 是无理数。

例题

例

证明：$\sqrt{3}$ 是无理数。

例题

例

证明：$\sqrt{3}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{3}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b \neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $3 = \frac{a^2}{b^2}$。

例题

例

证明：$\sqrt{3}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{3}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b \neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $3 = \frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2 = 3b^2$。

例题

例

证明：$\sqrt{3}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{3}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b \neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $3 = \frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2 = 3b^2$。
- 这意味着 a^2 是 3 的倍数，因此 a 也是 3 的倍数（因为如果一个数的平方是 3 的倍数，那么这个数本身也必须是 3 的倍数）。

例题

例

证明：$\sqrt{3}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{3}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b\neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $3=\frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2=3b^2$。
- 这意味着 a^2 是 3 的倍数，因此 a 也是 3 的倍数（因为如果一个数的平方是 3 的倍数，那么这个数本身也必须是 3 的倍数）。
- 设 $a=3k$，代入得到 $(3k)^2=3b^2$，即 $9k^2=3b^2$，进一步得出 $b^2=3k^2$。

例题

例

证明：$\sqrt{3}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{3}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b\neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $3=\frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2=3b^2$。
- 这意味着 a^2 是 3 的倍数，因此 a 也是 3 的倍数（因为如果一个数的平方是 3 的倍数，那么这个数本身也必须是 3 的倍数）。
- 设 $a=3k$，代入得到 $(3k)^2=3b^2$，即 $9k^2=3b^2$，进一步得出 $b^2=3k^2$。
- 这意味着 b^2 也是 3 的倍数，因此 b 也是 3 的倍数。

例题

例

证明：$\sqrt{3}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{3}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b \neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $3 = \frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2 = 3b^2$。
- 这意味着 a^2 是 3 的倍数，因此 a 也是 3 的倍数（因为如果一个数的平方是 3 的倍数，那么这个数本身也必须是 3 的倍数）。
- 设 $a = 3k$，代入得到 $(3k)^2 = 3b^2$，即 $9k^2 = 3b^2$，进一步得出 $b^2 = 3k^2$。
- 这意味着 b^2 也是 3 的倍数，因此 b 也是 3 的倍数。
- 由于 a 和 b 都是 3 的倍数，这与它们互质的假设矛盾。

例

证明：$\sqrt{3}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{3}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b \neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $3 = \frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2 = 3b^2$。
- 这意味着 a^2 是 3 的倍数，因此 a 也是 3 的倍数（因为如果一个数的平方是 3 的倍数，那么这个数本身也必须是 3 的倍数）。
- 设 $a = 3k$，代入得到 $(3k)^2 = 3b^2$，即 $9k^2 = 3b^2$，进一步得出 $b^2 = 3k^2$。
- 这意味着 b^2 也是 3 的倍数，因此 b 也是 3 的倍数。
- 由于 a 和 b 都是 3 的倍数，这与它们互质的假设矛盾。
- 因此，假设不成立，$\sqrt{3}$ 是无理数。

例题

例

证明：$\sqrt{5}$ 是无理数。

例

证明：$\sqrt{5}$ 是无理数。

证明：假设 $\sqrt{5}$ 是有理数，则可以表示为两个互质整数 a 和 b 的比，即 $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$，其中 a 和 b 互质且 $b \neq 0$。

- 对等式两边平方，得到 $5 = \frac{a^2}{b^2}$。
- 进一步得出 $a^2 = 5b^2$。
- 这意味着 a^2 是 5 的倍数，因此 a 也是 5 的倍数（因为如果一个数的平方是 5 的倍数，那么这个数本身也必须是 5 的倍数）。
- 设 $a = 5k$，代入得到 $(5k)^2 = 5b^2$，即 $25k^2 = 5b^2$，进一步得出 $b^2 = 5k^2$。
- 这意味着 b^2 也是 5 的倍数，因此 b 也是 5 的倍数。
- 由于 a 和 b 都是 5 的倍数，这与它们互质的假设矛盾。
- 因此，假设不成立，$\sqrt{5}$ 是无理数。

例题

例

将平面上的 $z = x^2$ 绕 z 轴旋转一周，求形成的曲面方程。

解

1. 原方程：

$$z = x^2$$

2. 旋转变换：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. 替换变量：

$$z = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$$

4. 简化方程：

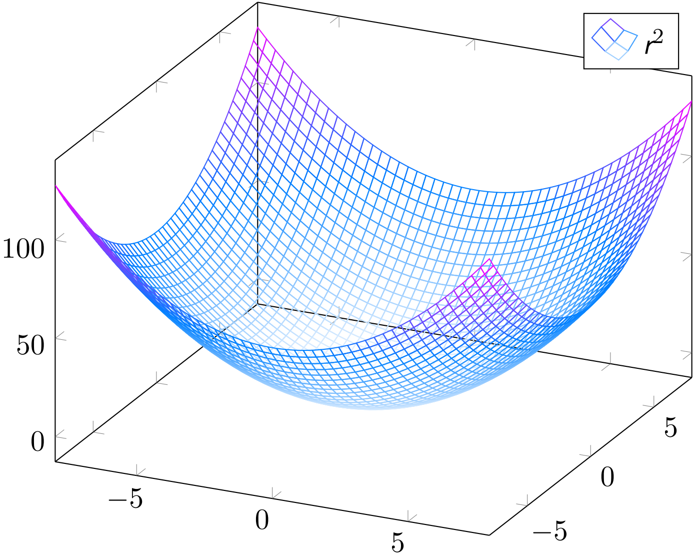
$$z = x^2 + y^2$$

因此，旋转后的曲面方程为：

$$z = x^2 + y^2$$

英伦 yinglun

旋转曲面 $z = x^2 + y^2$



作业

如何证明某个根号下的正整数是无理数呢？

作业

如何证明某个根号下的正整数是无理数呢?

课外扩展知识：为什么 π 是无理数呢