第五次作业

1. (二维信号的傅里叶级数)

课程中提到，二维平面的热传导方程为:

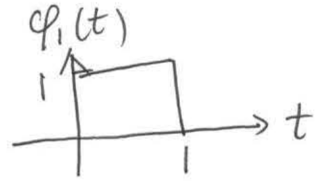
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} = K\left[\dfrac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f(x,y,t)}{\partial y^2}\right] \\
f(x,y,0) = f(x,y)
\end{cases}
$$

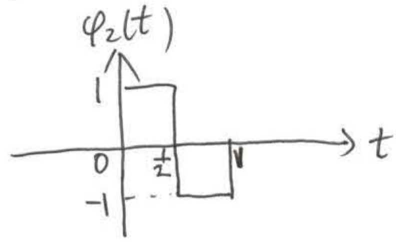
① 请用解一维热传导方程思路解以上二维热传导方程。

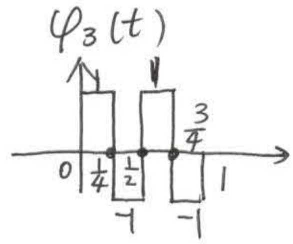
② 由此推出二维信号的傅里叶级数表达式。

2. (哈尔小波分解)

哈尔小波是一组正交基，它的前三个正交基函数为:
$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$

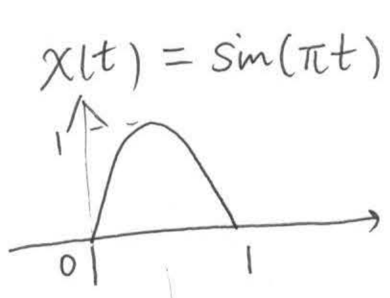






① 请利用上述正交基，将以下信号 $x(t)$ 分解为这3个正交基的线性组合，即 $x(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + a_3\varphi_3(t)$

$x(t) = \sin(\pi t)$ 在 $[0,1]$ 上的值



求 a_1, a_2, a_3

3.（施密特正交化）

假设一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N\}$ 不是正交基，则可以对它们进行施密特正交化变换为一组正交基，其过程如下：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_N = \alpha_N - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\langle \alpha_N, \beta_i \rangle}{\langle \beta_i, \beta_i \rangle} \beta_i$$

请用数学归纳法证明，$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N\}$ 是一组正交基，

即 $\langle \beta_i, \beta_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$

（提示：需要用到内积 $\langle \cdot \rangle$ 的4个性质）

4.（用施密特正交化将非正交基化为正交基）

① 已知 $a_1(t)=1$，$a_2(t)=t$，$a_3(t)=t^2$，$a_4(t)=t^3$ 在 $[0,1]$ 上依照内积运算 $\langle x(t),y(t)\rangle=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$ 是非正交基，请用施密特正交化将 $\{a_i\}_{i=1\sim4}$ 化为正交基 $\{\beta_i\}_{i=1\sim4}$

② 请基于①中求出的正交基 $\beta_1(t)$，$\beta_2(t)$，$\beta_3(t)$，$\beta_4(t)$ 将 $x(t)=t^5$ 进行正交分解，即

$$x(t)\approx b_1\beta_1(t)+b_2\beta_2(t)+b_3\beta_3(t)+b_4\beta_4(t)$$

求 b_1，b_2，b_3，b_4

③ (Matlab编程)：请在一张图上用不同颜色画出 $x(t)$ 和 $b_1\beta_1(t)+b_2\beta_2(t)+b_3\beta_3(t)+b_4\beta_4(t)$，看一下区别。

（提示：由于计算机只能处理离散，所以连续信号要转化为离散处理）

t = [0 : 0.001 : 2];（0到2每隔0.001取一个点）

y = x(t);（你可以写一个 Function y = x(t)）

plot (x, y, 'k-');（可用 help 查看plot函数介绍）

k：黑色　-：实线

5.(有限长离散信号的傅里叶级数)(书上4.1节)

假设有一个有限长序列 $x[n]$ 只在 $n=0,1,2,\ldots,(N-1)$ 这 N个点上不为 0，我们构造一串序列 $\{a_k\}_{k=0,1,2,\ldots(N-1)}$ 使得:

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad ①$$

请证明:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad ②$$

提示：请你首先证明 $\left\{e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right\}_{k=0,1,2,\ldots,(N-1)}$ ~~是一组~~ 在 $\langle x[n],y[n]\rangle=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\overline{y[n]}$ 下是一组正交基，即

$$\left\langle e^{j\frac{2\pi}{N}nk},e^{j\frac{2\pi}{N}nl}\right\rangle=\begin{cases}0, & \text{当 } k\neq l \text{ 时}\\ N, & \text{当 } k=l \text{ 时}\end{cases}$$

然后将 ① 代入 ② 即得。

6.(傅里叶变换的非复数形式)

对非周期函数 $x(t)$，构造傅里叶变换的非复数形式如下:

$$X_{\cos}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cos(wt)\,dt$$

$$X_{\sin}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\sin(wt)\,dt$$

① 请证明:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[X_{\cos}(w)\cos(wt)+X_{\sin}(w)\sin(wt)\right]dw$$

扫描全能王 创建

② 书上的傅里叶变换复数形式为：

$$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt$$

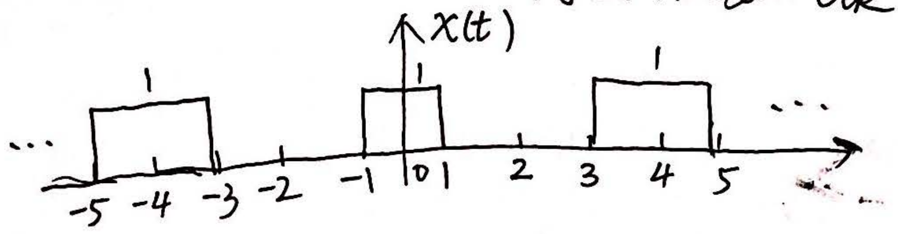
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)e^{jwt}dw$$

请用 $X_{cos}(w)$ 和 $X_{sin}(w)$ 表示 $X(jw)$，也请用 $X(jw)$ 表示 $X_{cos}(w)$ 和 $X_{sin}(w)$。

③（只想不做）：①和②说明，$X_{cos}(w)$ 和 $X_{sin}(w)$ 表述的思想内涵与 $X(jw)$ 完全相同。请思考，如果用 $X_{cos}(w)$ 和 $X_{sin}(w)$ 来代替 $X(jw)$，则第三章3.4节中傅里叶变换的性质将会怎样被改写？从中体会傅里叶变换复数形式的方便。

7.（Matlab 编程 吉布斯现象）

① 求下列周期方波的傅里叶级数 a_k



② 请基于① 请证明：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jkw_0t} \qquad \left(w_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}e^{jk\frac{\pi}{2}t}$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}\cos(k\frac{\pi}{2}t)$$

扫描全能王 创建

我们假设 $x_N(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\frac{2\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}\cos(k\frac{\pi}{2}t)$

请用Matlab画出 $N=5, 10, 100, 1000$ 时的 $x_N(t)$ 图，并与 $x(t)$ 的图对比，观察吉布斯现象。

扫描全能王 创建