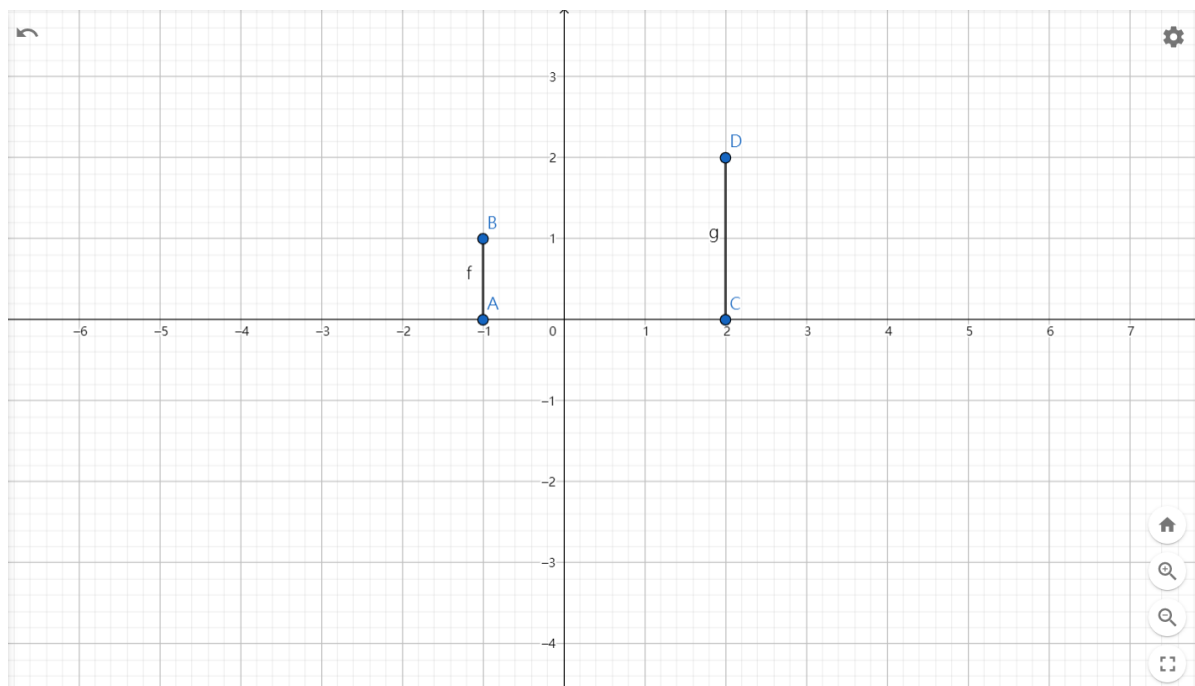


HW 2

1-7(4)

$$f(t)[\delta(t+1) + \delta(t-2)]$$

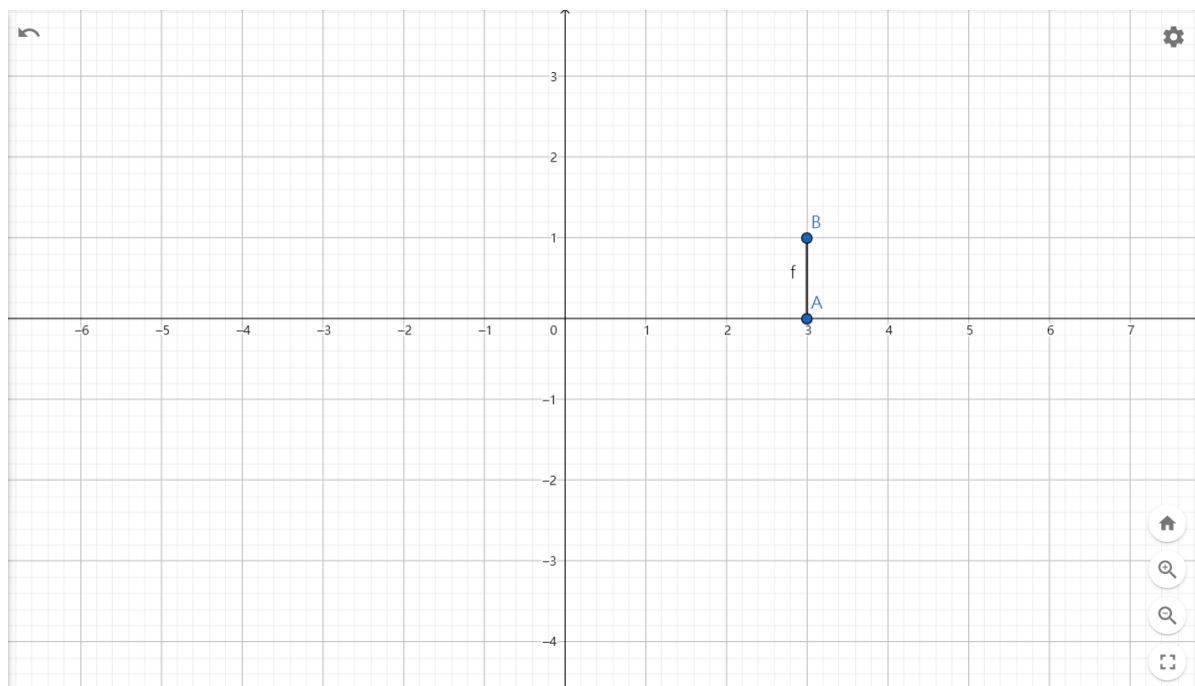
当 $t=-1$ 或 $t=2$ 时, $\delta(t+1) + \delta(t-2) = 1$,其余时刻等于0, 故图像如下:



1-10(4)

$$x[n-3]\delta[n-3]$$

当且仅当 $n=3$ 时, $\delta[n-3] = 1$



1-20

(1):

$$\begin{aligned}
& \int_{-4}^4 (t^2 + 3t + 2)[\delta(t) + \delta(t-1)]dt \\
& \text{由于有 } x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t), \text{ 原式等于} \\
& \Rightarrow (t^2 + 3t + 2)[\delta(t)] = 2\delta(t) \\
& [(t-1)^2 + 5(t-1) + 6]\delta(t-1) = 6\delta(t-1) \\
& \int_{-4}^4 (t^2 + 3t + 2)[\delta(t) + \delta(t-1)]dt \\
& = \int_{-4}^4 2\delta(t) + 6\delta(t-1)dt \\
& = 8
\end{aligned}$$

(2):

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos t)\delta(t - \frac{\pi}{2})dt \\
& -\cos t \cdot \delta(t - \frac{\pi}{2}) = \sin(t - \frac{\pi}{2})\delta(t - \frac{\pi}{2}) = 0 \\
& \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos t)\delta(t - \frac{\pi}{2})dt \\
& = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t - \frac{\pi}{2})dt = 1
\end{aligned}$$

(3):

$$\begin{aligned}
& \int_{-2\pi}^{2\pi} (1+t)\delta(\cos t)dt \\
& \text{当 } t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \text{ 时, } \delta(\cos t) = 0 \\
& \int_{-2\pi}^{2\pi} (1+t)\delta(\cos t)dt \\
& = 1 + \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{3\pi}{2} + 1 + -\frac{\pi}{2} + 1 + -\frac{3\pi}{2} \\
& = 4
\end{aligned}$$

1-22

输入 $x(t) = u(t)$ 时, $y(t) = e^{-t}u(t) + u(-1-t)$

图1-71的输入是 $x_1(t) = u(t-1) - u(t-2)$

$$x_1(t) = x(t-1) - x(t-2)$$

$$y_1(t) = y(t-1) - y(t-2)$$

$$y_1(t) = e^{-t+1}u(t-1) + u(-t) - e^{-t-2}u(t-2) - u(1-t)$$

1-28

$$x_1(t) = u(t), y_1(t) = e^{-at}u(t)$$

$$x_2(t) = \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt}$$

$$y_2(t) = \frac{dy_1(t)}{dt} = e^{-at}\delta(t) - ae^{-at}u(t)$$

2-2

$$x[n] * h[n] = \sum x[k]h[n-k]$$

(1):

$$\begin{aligned} x[n] &= nu[n], h[n] = \delta[n-2] \\ y[n] &= x[n] * h[n] = \sum x[k]h[n-k] \\ &= \sum ku[k]\delta[n-2-k] \\ \text{当 } k &= n-2 \text{ 时, } \delta[n-2-k] = 1 \\ y[n] &= (n-2)u[n-2] \end{aligned}$$

(2):

$$\begin{aligned} x[n] &= 2^n u[n], h[n] = u[n] \\ y[n] &= x[n] * h[n] = \sum x[k]h[n-k] \\ &= \sum 2^k u[k]u[n-k] \\ \text{当 } k &\in [0, n] \text{ 时, } u[k]u[n-k] = 1 \\ y[n] &= \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

(3):

$$\begin{aligned} x[n] &= 2^n u[-n-1], h[n] = \frac{1}{2^n} u[n-1] \\ y[n] &= \sum 2^k u[-k-1] \cdot \frac{1}{2^{n-k}} u[n-k-1] \\ \text{当 } k < \min(-1, n-1) &\text{ 时, } u[-k-1]u[n-k-1] = 1 \\ y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{k=\min(-1, n-1)} 2^{2k-n} \\ y[n] &= \frac{2^{-|n|}}{3} \end{aligned}$$

(4):

$$\begin{aligned} x[n] &= a^n u[n], h[n] = \beta^n u[n] \\ y[n] &= \sum a^k u[k]\beta^{n-k} u[n-k] \\ \text{当 } k &\in [0, n] \text{ 时, } u[k] \cdot u[n-k] = 1 \\ y[n] &= \sum_{k=0}^{k=n} a^k \beta^{n-k} \\ y[n] &= \frac{\beta^{n+1} - a^{n+1}}{\beta - a} u[n] \end{aligned}$$

(5):

$$\begin{aligned}
x[n] &= (-1)^n(u[-n] - u[-n-8]), h[n] = u[n] - u[n-8] \\
y[n] &= \sum (-1)^k(u[-k] - u[-k-8])(u[n-k] - u[n-k-8]) \\
y[n] &= \sum (-1)^k(u[-k]u[n-k] - u[-k]u[n-k-8] - u[-k-8]u[n-k] + u[-k-8]u[n-k-8]) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{k=\min(0,n)} (-1)^k u[n] - \sum_{k=-\infty}^{k=\min(0,n-8)} (-1)^k u[n-8] - \sum_{k=-\infty}^{k=\min(n,-8)} (-1)^k u[n+8] + \sum_{k=-\infty}^{k=\min(n-8,-8)} (-1)^k u[n] \\
&= \frac{1 - (-1)^n}{2} (2u[n-1] - u[n+7] - u[n-9])
\end{aligned}$$

选做题

1.

1-1 证明 $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

$$\begin{aligned}
&\text{由于 } \int x(t)\delta(t)dt = x(0) \\
&\int x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \\
&\int x(t_0)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \int \delta(t-t_0)dt = x(t_0) \\
&\int x(t)\delta(t-t_0)dt = \int x(t_0)\delta(t-t_0)dt \\
&x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)
\end{aligned}$$

1-2 证明 $\delta(at+b) = x = \frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$

$$\begin{aligned}
&\text{由于有 } \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \\
&\int y(t+\frac{b}{a})\delta(at+b)dt = \int y(\frac{at+b}{a})\delta(at+b)d(\frac{at}{a}) \\
&= \frac{1}{|a|} \int y(\frac{at+b}{a})\delta(at+b)d(at+b) \\
&= \frac{1}{a}y(0) \\
&\int \frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})y(t+\frac{b}{a})d(t+\frac{b}{a}) \\
&= \frac{1}{|a|}y(0) \\
&\int \delta(at+b) = \int \frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a}) \\
&\Rightarrow \delta(at+b) = x = \frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})
\end{aligned}$$

编程作业

一维卷积

使用 cov_1d.py 中的代码进行卷积，得到如下结果

```
[Running] python -u "f:\桌面\一些文件\主修课程\大二下\信号与系统\作业\HW2\conv_1d.py"
numpy time: 0.0007526874542236328
my time: 0.8509213924407959
第 0 个元素,numpy的结果是 0.005777867000019169 ,自己写的结果是 0.005777867000019169 ,是否一样: True
第 1 个元素,numpy的结果是 0.12118223842678257 ,自己写的结果是 0.12118223842678257 ,是否一样: True
第 2 个元素,numpy的结果是 0.5071408407683046 ,自己写的结果是 0.5071408407683046 ,是否一样: True
第 3 个元素,numpy的结果是 1.1944543917842558 ,自己写的结果是 1.1944543917842558 ,是否一样: True
第 4 个元素,numpy的结果是 1.807656496860982 ,自己写的结果是 1.807656496860982 ,是否一样: False
第 5 个元素,numpy的结果是 2.0899745818550937 ,自己写的结果是 2.0899745818550937 ,是否一样: True
第 6 个元素,numpy的结果是 2.351250310463726 ,自己写的结果是 2.351250310463726 ,是否一样: True
第 7 个元素,numpy的结果是 2.7254312516758716 ,自己写的结果是 2.725431251675871 ,是否一样: False
第 8 个元素,numpy的结果是 3.446597626943367 ,自己写的结果是 3.4465976269433676 ,是否一样: False
第 9 个元素,numpy的结果是 3.5252638271854044 ,自己写的结果是 3.525263827185405 ,是否一样: False
第 10 个元素,numpy的结果是 4.025089047830223 ,自己写的结果是 4.025089047830224 ,是否一样: False
第 11 个元素,numpy的结果是 4.034094572447601 ,自己写的结果是 4.034094572447601 ,是否一样: True
第 12 个元素,numpy的结果是 5.15427766281292 ,自己写的结果是 5.1542776628129205 ,是否一样: False
第 13 个元素,numpy的结果是 5.392656741635786 ,自己写的结果是 5.392656741635786 ,是否一样: True
第 14 个元素,numpy的结果是 5.3969378741525915 ,自己写的结果是 5.396937874152592 ,是否一样: False
第 15 个元素,numpy的结果是 6.423911894864483 ,自己写的结果是 6.423911894864483 ,是否一样: True
第 16 个元素,numpy的结果是 6.260237722827601 ,自己写的结果是 6.2602377228276 ,是否一样: False
第 17 个元素,numpy的结果是 6.912484663867389 ,自己写的结果是 6.912484663867389 ,是否一样: True
第 18 个元素,numpy的结果是 6.721744624435563 ,自己写的结果是 6.721744624435562 ,是否一样: False
第 19 个元素,numpy的结果是 7.194443887944279 ,自己写的结果是 7.194443887944277 ,是否一样: False
第 20 个元素,numpy的结果是 7.88507905736184 ,自己写的结果是 7.88507905736184 ,是否一样: True
第 21 个元素,numpy的结果是 7.49087456214628 ,自己写的结果是 7.49087456214628 ,是否一样: True
第 22 个元素,numpy的结果是 8.301143446446444 ,自己写的结果是 8.301143446446446 ,是否一样: False
第 23 个元素,numpy的结果是 8.42236355529945 ,自己写的结果是 8.42236355529945 ,是否一样: True
第 24 个元素,numpy的结果是 9.996781567347247 ,自己写的结果是 9.996781567347247 ,是否一样: True
第 25 个元素,numpy的结果是 9.522569883541573 ,自己写的结果是 9.522569883541573 ,是否一样: True
第 26 个元素,numpy的结果是 9.415522426874489 ,自己写的结果是 9.415522426874489 ,是否一样: True
第 27 个元素,numpy的结果是 10.76154172295739 ,自己写的结果是 10.76154172295739 ,是否一样: True
第 28 个元素,numpy的结果是 10.553703510915723 ,自己写的结果是 10.553703510915723 ,是否一样: True
第 29 个元素,numpy的结果是 10.985934241717088 ,自己写的结果是 10.985934241717088 ,是否一样: True
第 30 个元素,numpy的结果是 10.546796624817535 ,自己写的结果是 10.546796624817535 ,是否一样: True
第 31 个元素,numpy的结果是 11.342530302100052 ,自己写的结果是 11.342530302100052 ,是否一样: True
第 32 个元素,numpy的结果是 11.719323991869356 ,自己写的结果是 11.719323991869354 ,是否一样: False
第 33 个元素,numpy的结果是 11.43388073200367 ,自己写的结果是 11.43388073200367 ,是否一样: True
```

由于精度的问题，部分结果与使用 numpy 自带的卷积函数得到的结果不同

运行时间复杂度

运行结果如下：

```
[Running] python -u "f:\桌面\一些文件\主修课程\大二下\信号与系统\作业\HW2\conv_1d.py"
numpy time: 0.018175840377807617
my time: 597.8405010700226
```

python自带的卷积函数运行速度远远快于自己编写的卷积函数，部分原因如下

- python的numpy库底层使用c编写
- python自带的卷积函数使用的算法的时间复杂度是 $O(n \log n)$
- python自带的卷积函数采取了并行化加速

二维卷积

运行 conv_2d_tmp.py 中的文件，得到如下结果

```
[Running] python -u "f:\桌面\一些文件\主修课程\大二下\信号与系统\作业\HW2\conv_2d_tmp.py"
自带卷积的结果: [[ 19  28  32  36  29]
 [ 30  40  40  40  30]
 [ 30  40  40  40  30]
 [ 30  40  40  40  30]
 [-49 -68 -72 -76 -59]]
自己写的卷积的结果: [[-19. -28. -32. -36. -29.]
 [-30. -40. -40. -40. -30.]
 [-30. -40. -40. -40. -30.]
 [-30. -40. -40. -40. -30.]
 [ 49.  68.  72.  76.  59.]]
```

图片卷积

使用第一个卷积核得到的图片如下



使用第二个卷积核得到的图片如下，有一定的边缘提取的效果

