第11章 电路的频率响应

本章重点

●重点

1. 网络函数

2. 串、并联谐振的概念；

11.1 网络函数

当电路中激励源的频率变化时，电路中的感抗、容抗将跟随频率变化，从而导致电路的工作状态亦跟随频率变化。因此，分析研究电路和系统的频率特性就显得格外重要。

频率特性 →

电路和系统的工作状态跟随频率而变化的现象，称为电路和系统的频率特性，又称频率响应。

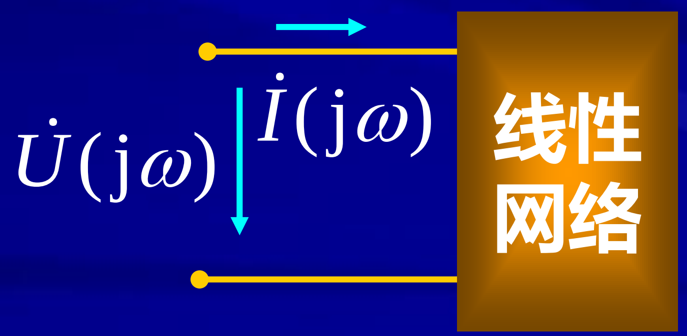
1. 网络函数H（jω）的定义

在线性正弦稳态网络中，当只有一个独立激励源作用时，网络中某一处的响应（电压或电流）与网络输入之比，称为该响应的网络函数。

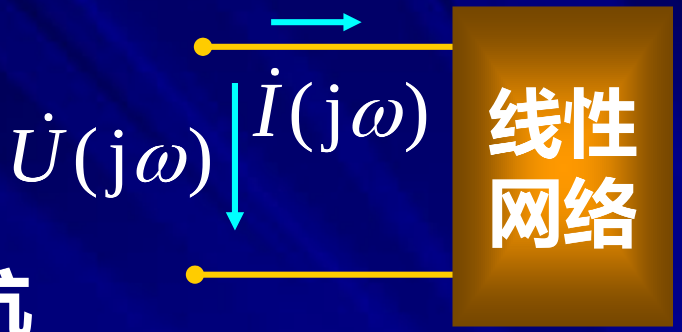
$$H(\mathrm{j}\omega) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\dot{R}(\mathrm{j}\omega)}{\dot{E}(\mathrm{j}\omega)}$$

2. 网络函数$H(\mathrm{j}\omega)$的物理意义

- **驱动点函数**



激励是电流源，响应是电压

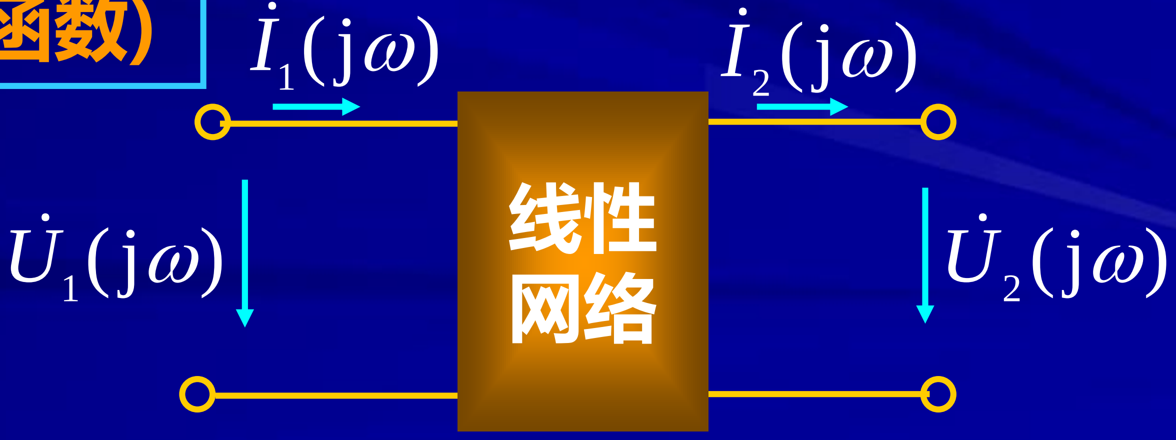


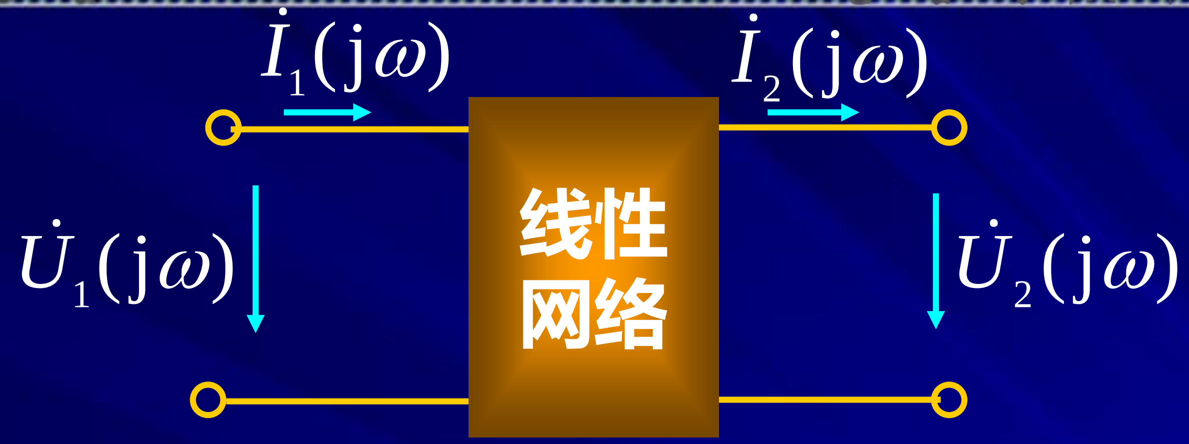
$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}(j\omega)}{\dot{I}(j\omega)}$$ → 策动点阻抗

激励是电压源，响应是电流

$$H(j\omega)=\frac{\dot{I}(j\omega)}{\dot{U}(j\omega)}$$ → 策动点导纳

- **转移函数(传递函数)**





激励是电压源

$$H(j\omega)=\frac{\dot{I}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)}$$ 转移导纳

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{U}_1(j\omega)}$$ 转移电压比

激励是电流源

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_2(j\omega)}{\dot{I}_1(j\omega)}$$ 转移阻抗

$$H(j\omega)=\frac{\dot{I}_2(j\omega)}{\dot{I}_1(j\omega)}$$ 转移电流比

注意

① $H(\mathrm{j}\omega)$与网络的结构、参数值有关，与输入、输出变量的类型以及端口对的相互位置有关，与输入、输出幅值无关。因此网络函数是网络性质的一种体现。

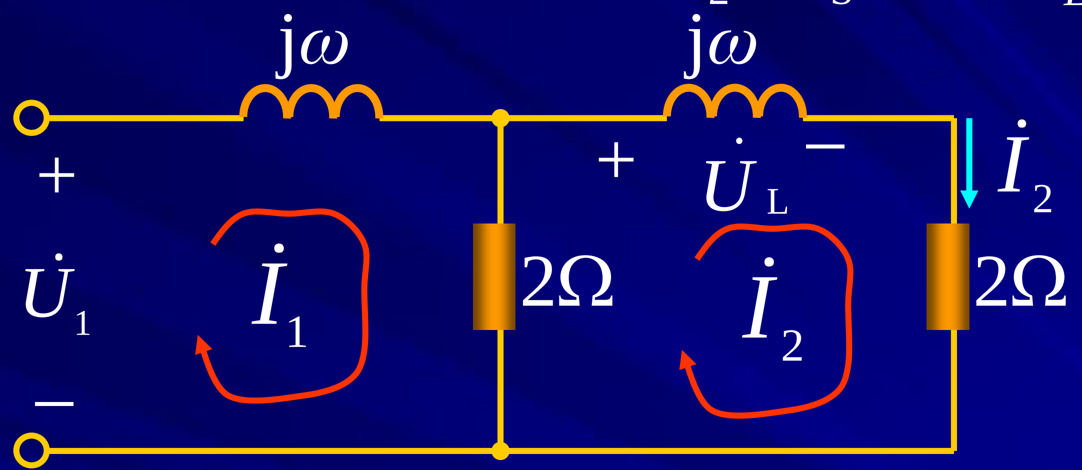
② $H(\mathrm{j}\omega)$ 是一个复数，它的频率特性分为两个部分：

幅频特性 ⟶ 模与频率的关系 $|H(\mathrm{j}\omega)| \sim \omega$

相频特性 ⟶ 幅角与频率的关系 $\varphi(\mathrm{j}\omega) \sim \omega$

③ 网络函数可以用相量法中任一分析求解方法获得。

例　**求图示电路的网络函数 $\dot{I}_2/\dot{U}_S$ 和 $\dot{U}_L/\dot{U}_S$**



解　列网孔方程解电流 $\dot{I}_2$

$$\begin{cases}(2+\mathrm{j}\omega)\dot{I}_1-2\dot{I}_2=\dot{U}_S\\-2\dot{I}_1+(4+\mathrm{j}\omega)\dot{I}_2=0\end{cases}$$

$$\dot{I}_2=\frac{2\dot{U}_S}{4+(\mathrm{j}\omega)^2+\mathrm{j}6\omega}$$

$$\dot{I}_2/\dot{U}_S=\frac{2}{4-\omega^2+\mathrm{j}6\omega}$$

转移导纳

$$\dot{U}_L/\dot{U}_S=\frac{\mathrm{j}2\omega}{4-\omega^2+\mathrm{j}6\omega}$$

转移电压比

注意 ①以网络函数中jω的最高次方的次数定义网络函数的阶数。

②由网络函数能求得网络在任意正弦输入时的端口正弦响应，即有

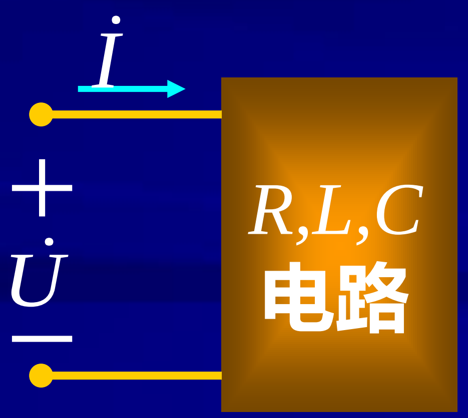
$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{R}(\mathrm{j}\omega)}{\dot{E}(\mathrm{j}\omega)} \longrightarrow \dot{R}(\mathrm{j}\omega)=H(\mathrm{j}\omega)\dot{E}(\mathrm{j}\omega)$$

11.2 *RLC*串联电路的谐振

谐振是正弦电路在特定条件下产生的一种特殊物理现象。谐振现象在无线电和电工技术中得到广泛应用，研究电路中的谐振现象有重要实际意义。

1. 谐振的定义

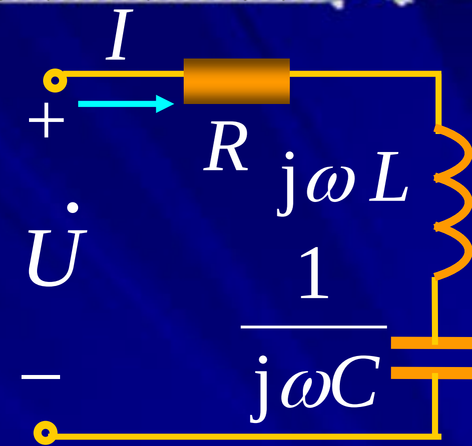
含*R*、*L*、*C*的一端口电路，在特定条件下出现端口电压、电流同相位的现象时，称电路发生了谐振。



$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z = R$$

发生谐振

2.串联谐振的条件



$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + \mathrm{j}(X_L + X_C)$$

$$= R + \mathrm{j}X$$

当 $X = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}}$ 时，电路发生谐振。

谐振条件

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$ 谐振角频率

仅与电路参数有关

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$ 谐振频率

串联电路实现谐振的方式：

(1) $L\ C$ 不变，改变 ω

ω_0由电路参数决定，一个$R\ L\ C$串联电路只有一个对应的ω_0，当外加电源频率等于谐振频率时，电路发生谐振。

(2)电源频率不变，改变 L 或 C（常改变C）。

3. RLC串联电路谐振时的特点

阻抗的频率特性

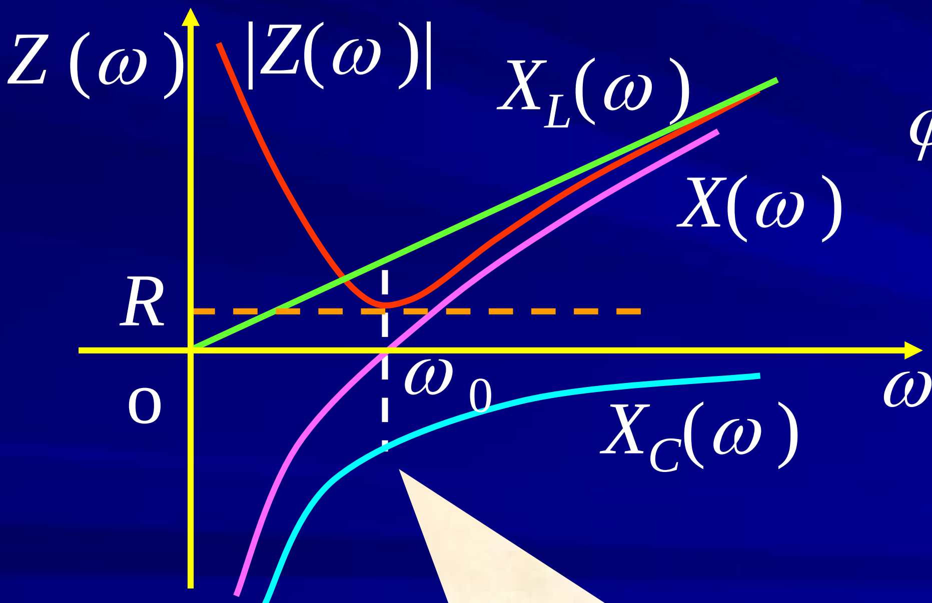
$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = |Z(\omega)| \angle \varphi(\omega)$$

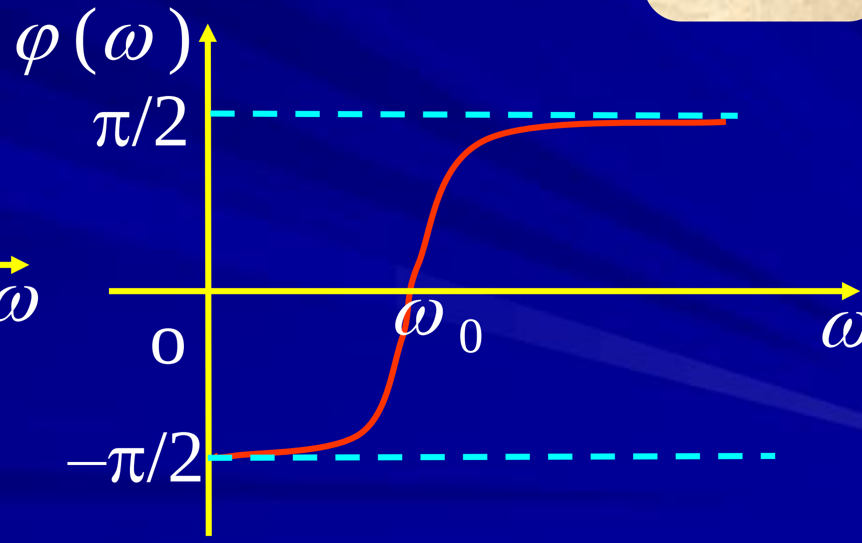
$$|Z(\omega)|=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}=\sqrt{R^2+(X_L+X_C)^2}=\sqrt{R^2+X^2}$$

幅频特性

$$\varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{X_L+X_C}{R}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{X}{R}$$

相频特性





Z(jω)频响曲线

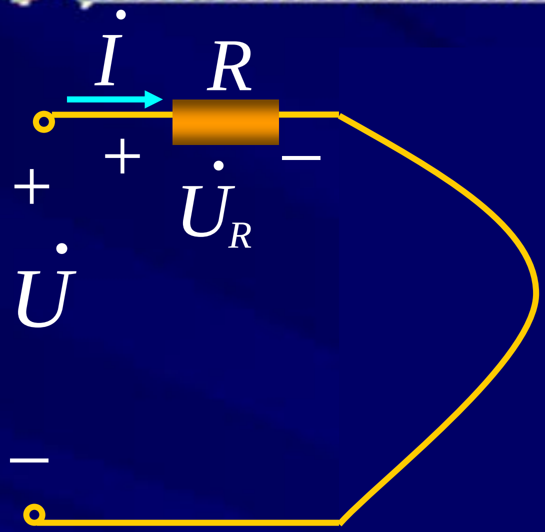
Z(jω)频响曲线表明阻抗特性可分三个区域描述：

容性区	电阻性	感性区
$\omega < \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega > \omega_0$
$X(\mathrm{j}\omega) < 0$	$X(\mathrm{j}\omega) = 0$	$X(\mathrm{j}\omega) > 0$
$\varphi(\mathrm{j}\omega) < 0$	$\varphi(\mathrm{j}\omega) = 0$	$\varphi(\mathrm{j}\omega) > 0$
$R < \lvert Z(\mathrm{j}\omega) \rvert$	$Z(\mathrm{j}\omega_0) = R$	$R < \lvert Z(\mathrm{j}\omega) \rvert$
$\lim\limits_{\omega\to 0}\lvert Z(\mathrm{j}\omega) \rvert = \infty$		$\lim\limits_{\omega\to 0}\lvert Z(\mathrm{j}\omega) \rvert = \infty$

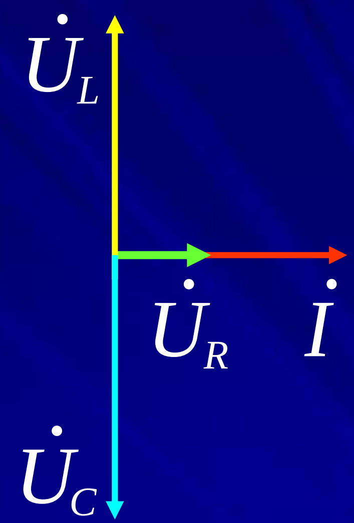
(1). 谐振时 $\dot{U}$ 与 $\dot{I}$ 同相.

入端阻抗为纯电阻，即 $Z=R$，阻抗值 $|Z|$ 最小。

电流 I 和电阻电压 U_R 达到最大值 $I_0=U/R$ (U 一定)。



$$\left.\begin{aligned}&\dot{U}_L+\dot{U}_C=0\\&X=0\end{aligned}\right\}$$



(2)　LC上的电压大小相等，相位相反，串联总电压为零，也称电压谐振，即

$\dot{U}_L+\dot{U}_C=0$, LC相当于短路

电源电压全部加在电阻上, $\dot{U}_R=\dot{U}$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega_0 L\dot{I} = \mathrm{j}\omega_0 L\frac{\dot{U}}{R} = \mathrm{j}Q\dot{U}$$

$$\dot{U}_C = -\mathrm{j}\frac{\dot{I}}{\omega_0 C} = -\mathrm{j}\omega_0 L\frac{\dot{U}}{R} = -\mathrm{j}Q\dot{U}$$

$$\left|\dot{U}_L\right| = \left|\dot{U}_C\right| = QU$$

特性阻抗

品质因数

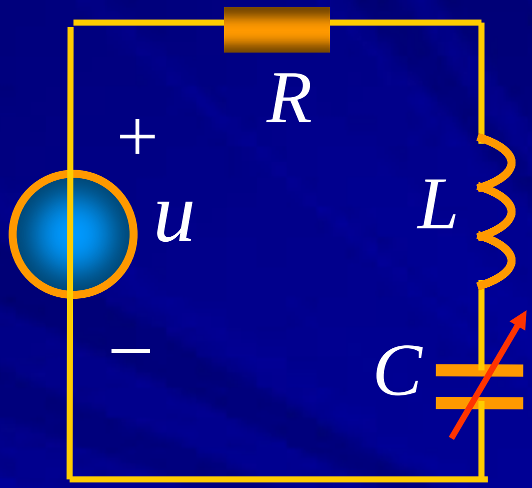
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R}$$

(3) 谐振时出现过电压

当 $\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) >> R$ **时，** $Q >> 1$

$U_L = U_C = QU >> U$

例　某收音机输入回路 L=0.3mH，R=10Ω，为收到中央电台560kHz信号，求：(1)调谐电容C值；(2) 如输入电压为1.5μV,求谐振电流和此时的电容电压。



解

(1)　$$C=\frac{1}{(2\pi f)^2 L}=269\,\text{pF}$$

(2)　$$I_0=\frac{U}{R}=\frac{1.5}{10}=0.15\,\mu\text{A}$$

$$U_C=I_0X_C=158.5\,\mu\text{V}>>1.5\,\mu\text{V}$$

or　$$U_C=QU=\frac{\omega_0 L}{R}U$$

(4) 谐振时的功率

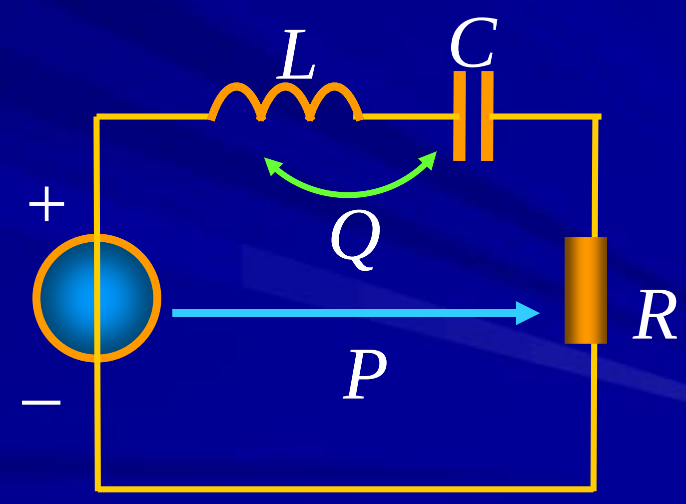
$$P=UI\cos\varphi=UI=RI_0^2=U^2/R,$$

电源向电路输送电阻消耗的功率，电阻功率达最大。

$$Q=UI\sin\varphi=Q_L+Q_C=0$$

$$Q_L=\omega_0 LI_0^2,\quad Q_C=-\frac{1}{\omega_0 C}I_0^2=-\omega_0 LI_0^2$$

注意 **电源不向电路输送无功。电感中的无功与电容中的无功大小相等，互相补偿，彼此进行能量交换。**



(5) 谐振时的能量关系

设 $u = U_{\mathrm{m}} \sin \omega_0 t$ 　则 $i = \dfrac{U_{\mathrm{m}}}{R} \sin \omega_0 t = I_{\mathrm{m}} \sin \omega_0 t$

$$u_C = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\omega_0 C} \sin(\omega_0 t - 90^\circ) = -\sqrt{\frac{L}{C}} I_{\mathrm{m}} \cos \omega_0 t$$

$$w_C = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} L I_{\mathrm{m}}^2 \cos^2 \omega_0 t \rightarrow \text{电场能量}$$

$$w_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L I_{\mathrm{m}}^2 \sin^2 \omega_0 t \rightarrow \text{磁场能量}$$

表明

①电感和电容能量按正弦规律变化，最大值相等 $W_{Lm}=W_{Cm}$。L、C的电场能量和磁场能量作周期振荡性的交换，而不与电源进行能量交换。

②总能量是不随时间变化的常量，且等于最大值。

$$w_{总} = w_L + w_C = \frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}CU_{C\mathrm{m}}^2 = CQ^2U^2$$

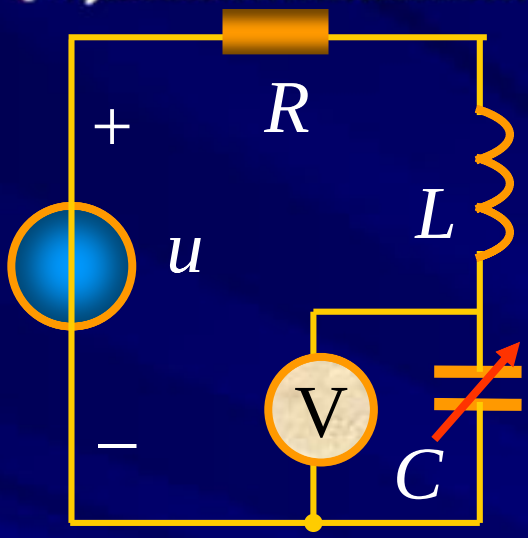
电感、电容储能的总值与品质因数的关系：

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \omega_0 \cdot \frac{LI_0^2}{RI_0^2} = 2\pi \cdot \frac{LI_0^2}{RI_0^2 T_0}$$

$$= 2\pi \frac{\text{谐振时电路中电磁场的总储能}}{\text{谐振时一周期内电路消耗的能量}}$$

Q是反映谐振回路中电磁振荡程度的量，Q越大，总能量就越大，维持振荡所消耗的能量愈小，振荡程度越剧烈。则振荡电路的“品质”愈好。一般在要求发生谐振的回路中希望尽可能提高Q值。

例



一接收器的电路参数为：U=10V ω=5×10^3 rad/s，**调**C**使电路中的电流最大，**I_{max}=200mA，**测得电容电压为**600V，**求**R、L、C**及**Q。

解

$$R=\frac{U}{I_0}=\frac{10}{200\times10^{-3}}=50\Omega$$

$$U_C=QU\Rightarrow Q=\frac{U_C}{U}=\frac{600}{10}=60$$

$$L=\frac{RQ}{\omega_0}=\frac{50\times60}{5\times10^3}=60\text{mH}\quad \text{C}=\frac{1}{\omega_0^2L}=6.67\mu\text{F}$$

11.3 *RLC*串联电路的频率响应

研究物理量与频率关系的图形（谐振曲线）可以加深对谐振现象的认识。

① $H(\mathrm{j}\omega)=\dot{U}_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\omega)/\dot{U}_{\mathrm{S}}(\mathrm{j}\omega)$ **的频率响应**

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\dot{U}_{\mathrm{R}}(\mathrm{j}\omega)}{\dot{U}_{\mathrm{S}}(\mathrm{j}\omega)}=\frac{R}{R+\mathrm{j}(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}$$

为比较不同谐振回路，令

$$\omega\rightarrow\frac{\omega}{\omega_0}=\eta$$

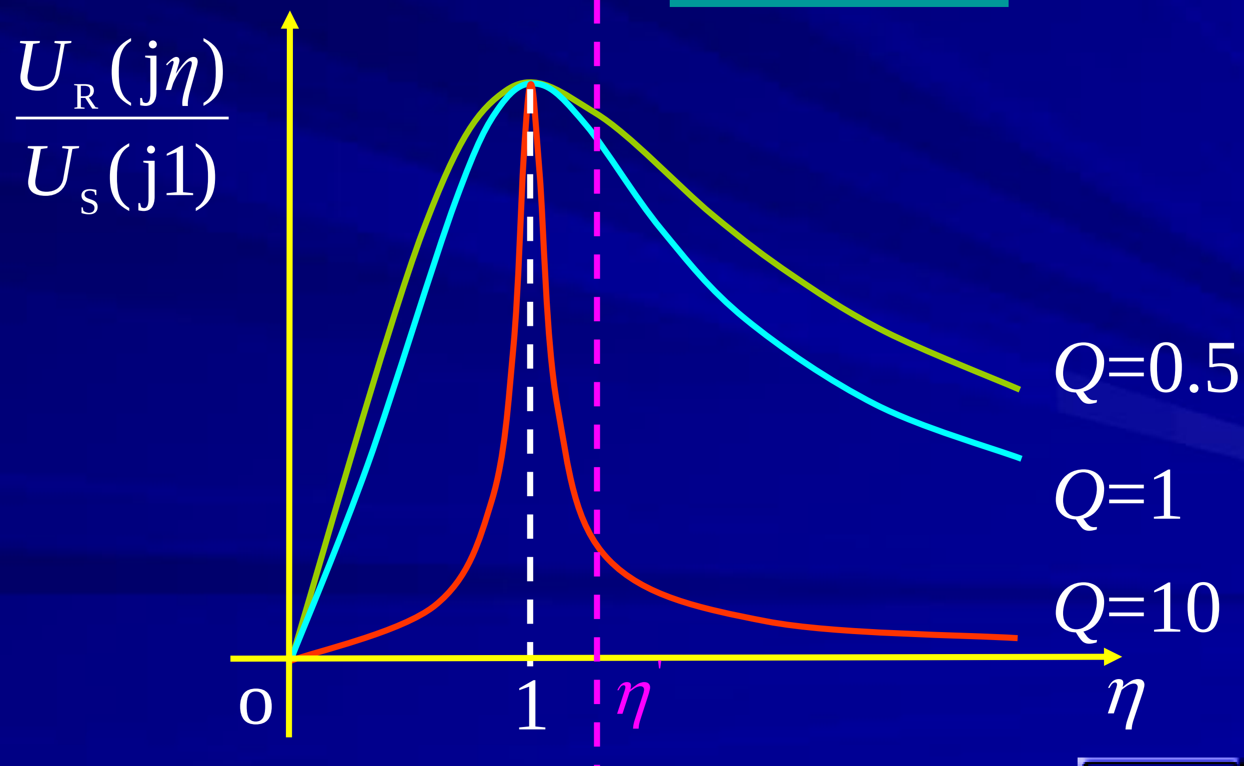
$$H_R(\mathrm{j}\eta)=\frac{\dot{U}_R(\mathrm{j}\omega)}{\dot{U}_S(\mathrm{j}\omega)}=\frac{R}{R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})}=\frac{1}{1+\mathrm{j}Q(\eta-\frac{1}{\eta})}$$

$$\phi(\mathrm{j}\eta)=-\arctan[Q(\eta-\frac{1}{\eta})]$$

相频特性

$$|H_R(\mathrm{j}\eta)|=\cos\phi(\mathrm{j}\eta)$$

幅频特性



表明

①谐振电路具有选择性

在谐振点响应出现峰值，当ω偏离ω_0时，输出下降。即串联谐振电路对不同频率信号有不同的响应，对谐振信号最突出(响应最大)，而对远离谐振频率的信号具有抑制能力。这种对不同输入信号的选择能力称为“选择性”。

②谐振电路的选择性与Q成正比

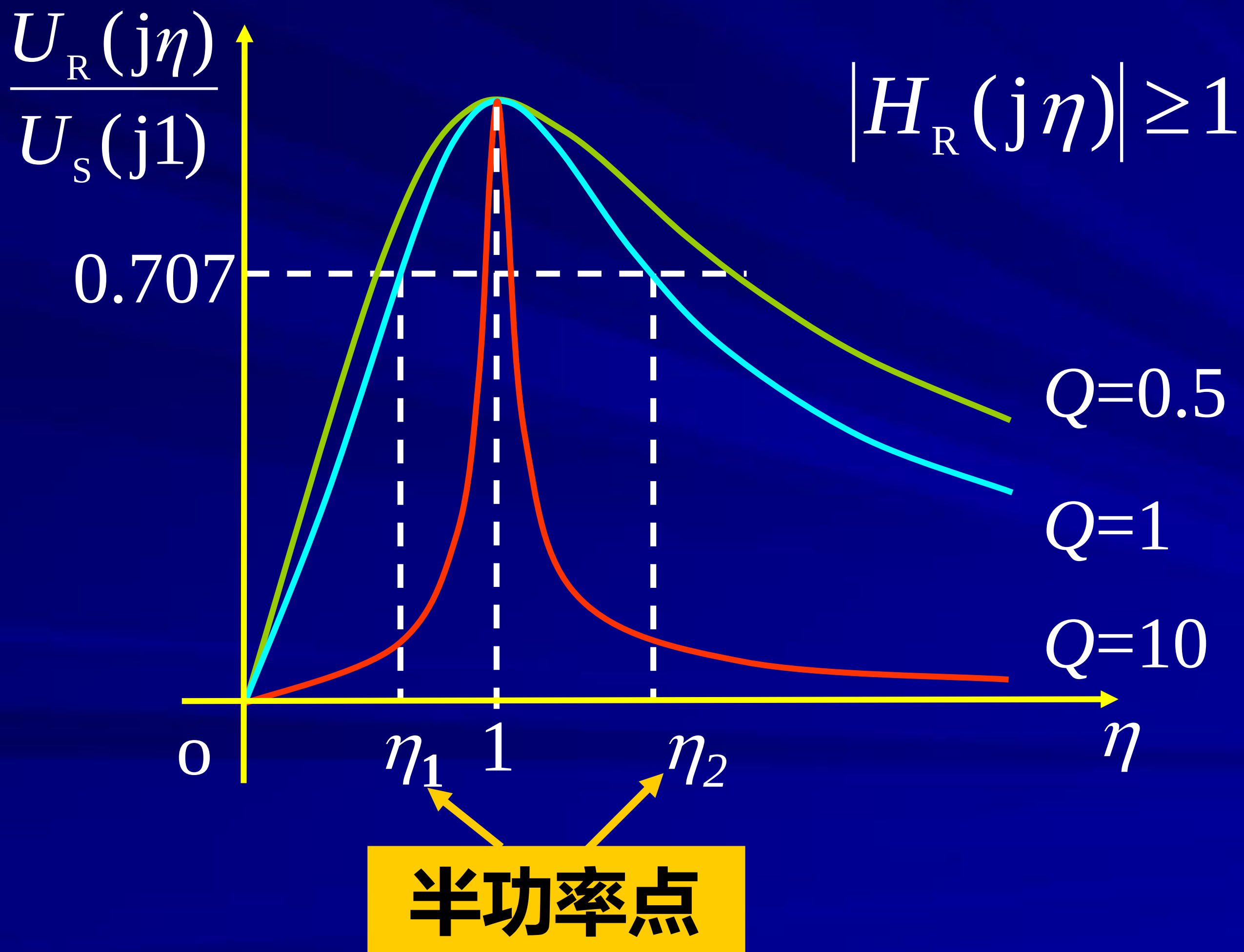
Q越大，谐振曲线越陡。电路对非谐振频率的信号具有强的抑制能力，所以选择性好。因此Q是反映谐振电路性质的一个重要指标。

③谐振电路的有效工作频段

半功率点

声学研究表明，如信号功率不低于原有最大值一半，人的听觉辨别不出。

$$|H_R(j\eta)| \geq 1/\sqrt{2} = 0.707$$



$$\eta_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$$

$$\eta_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$$

$$\omega_2 > \omega_1.$$

通频带 → $\omega_2-\omega_1$　3分贝频率

可以证明： $Q=\dfrac{1}{\eta_2-\eta_1}=\dfrac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}=\dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}.$

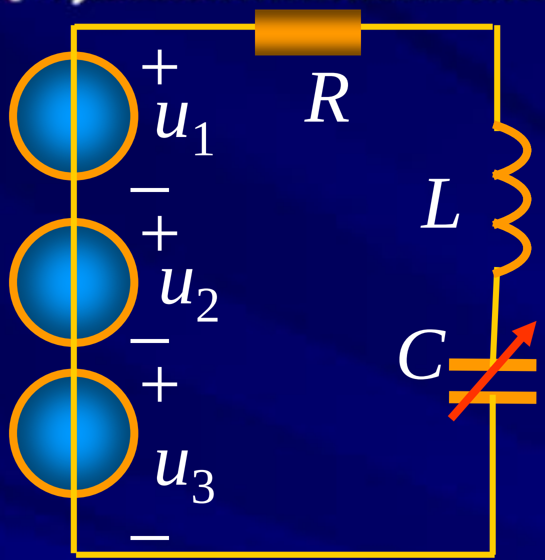
定义：

$H_{dB}=20\log_{10}[U_R（j\eta）/U_S（j1）]$

$20\lg 0.707=-3\ \mathrm{dB}$

通频带规定了谐振电路允许通过信号的频率范围。是比较和设计谐振电路的指标。

例1



一接收器的电路参数为：

L=250μH，R=20Ω，

U_1=U_2=U_3=10μV，

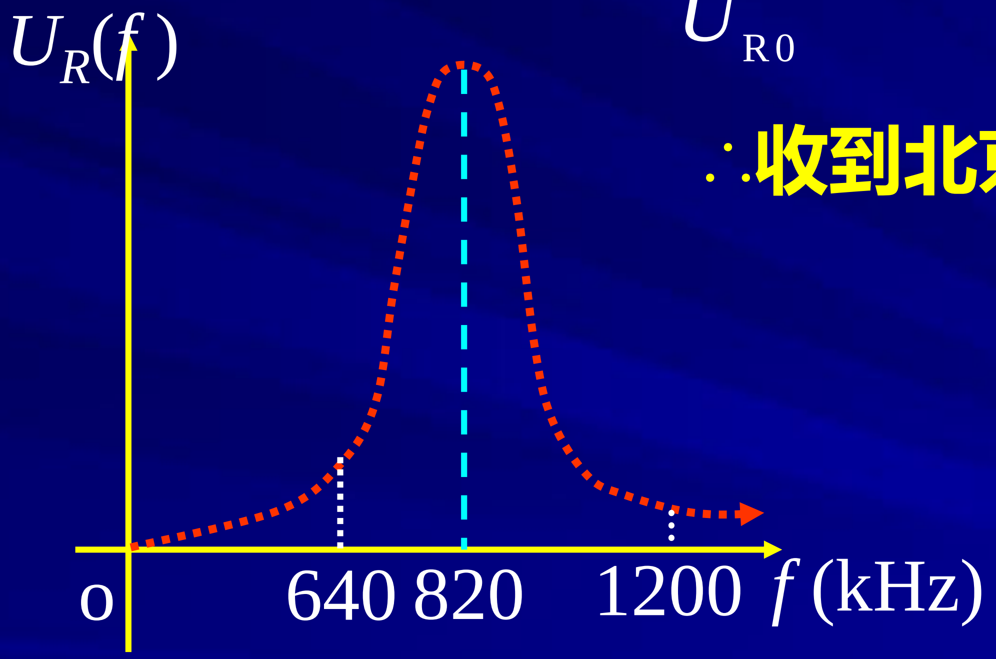
当电容调至 C=150pF**时谐振**

ω_0=5.5×10^{6}rad/s，　f_0=820 kHz

	北京台	中央台	北京经济台
f (kHz)	820	640	1026
ωL	1290	1000	1611
$\dfrac{1}{\omega C}$	−1290	–1660	−1034
X	0	– 660	577
$U_R=UR/\lvert Z\rvert$	U_{R0}=10	U_{R1}=0.304	U_{R2}=0.346

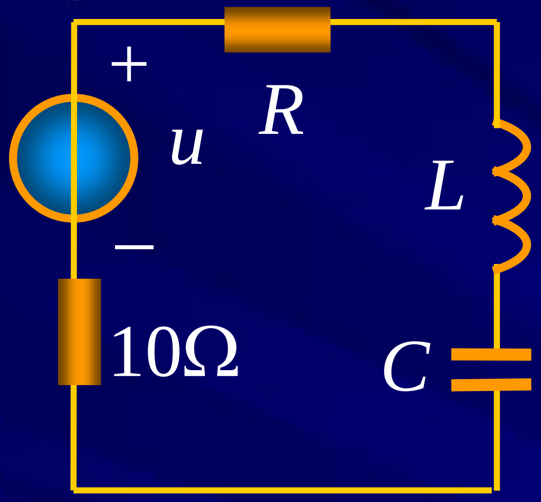
$U_R = UR/|Z|$ (μA)　$U_{R0}=10$　$U_{R1}=0.304$　$U_{R2}=0.346$

$$\frac{U_{R1}}{U_{R0}} = 3.04\% \qquad \frac{U_{R2}}{U_{R0}} = 3.46\%$$



∴**收到北京台820kHz的节目。**

例2



一信号源与R、L、C**电路串联，要求** $f_0=10^4\text{Hz}$，$\Delta f=100\text{Hz}$，$R=15\Omega$，**请设计一个线性电路。**

解

$$Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=\frac{f_0}{\Delta f}=\frac{10^4}{100}=100$$

$$L=\frac{RQ}{\omega_0}=\frac{100\times 15}{2\pi\times 10^4}=39.8\text{mH}$$

$$C=\frac{1}{\omega_0^2 L}=6360\,\text{pF}$$

② 以$U_L(\omega)$与$U_C(\omega)$为输出的$H(\omega)$频率特性

$$H_{\mathrm{L}}(\omega)=\frac{U_L(\omega)}{U(\omega)}=\frac{\omega L}{|Z|}=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$H_{\mathrm{L}}(\eta)=\frac{Q}{\sqrt{\frac{1}{\eta^2}+Q^2(1-\frac{1}{\eta^2})^2}}$$

$$H_{\mathrm{C}}(\omega)=\frac{U_C(\omega)}{U(\omega)}=\frac{1}{\omega C|Z|}=\frac{1}{\omega C\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$H_{\mathrm{C}}(\eta)=\frac{QU}{\sqrt{\eta^2+Q^2(\eta^2-1)^2}}$$

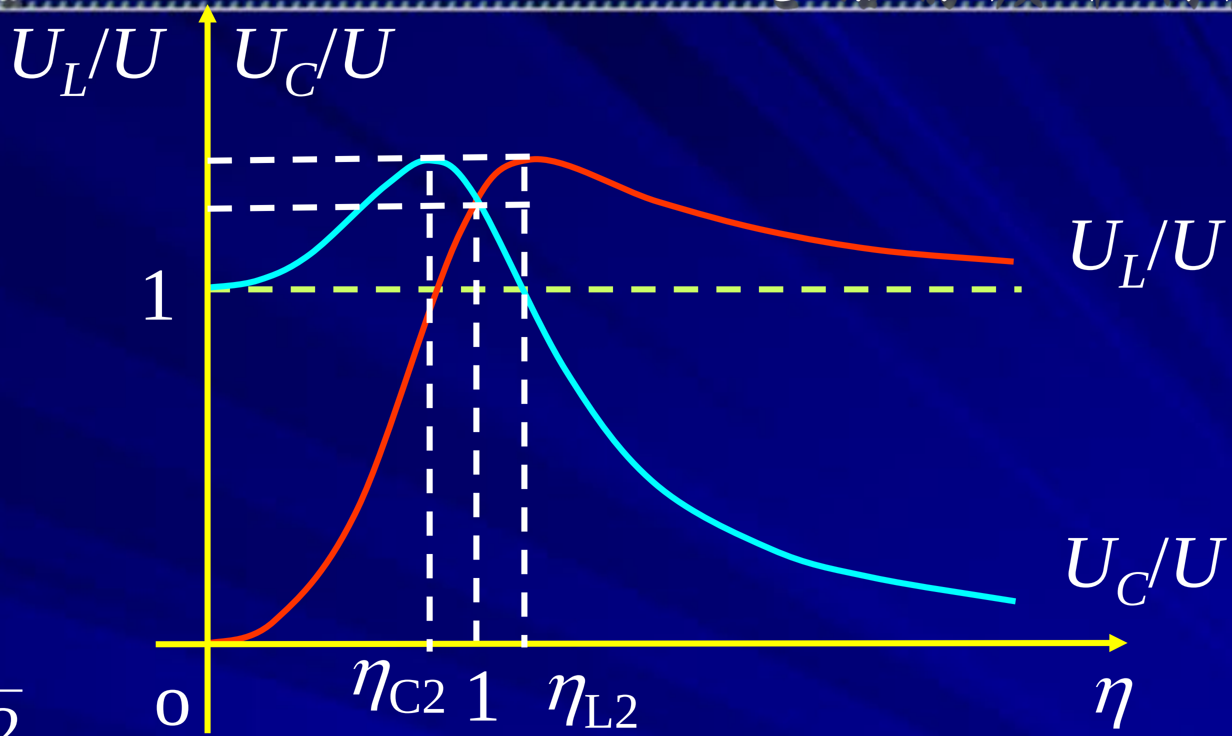
$H_L(\eta)$与$H_C(\eta)$的极值点：令 $\dfrac{\mathrm{d}H_{\mathrm{L}}(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=0$ $\dfrac{\mathrm{d}H_{\mathrm{C}}(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=0$

$$\eta_{\mathrm{C1}}=0 \qquad H_{\mathrm{C}}(\eta_{\mathrm{C1}})=1 \qquad \eta_{\mathrm{C3}}=\infty \qquad H_{\mathrm{C}}(\eta_{\mathrm{C3}})=0$$

$$\eta_{\mathrm{C2}}=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \qquad H_{\mathrm{C}}(\eta_{\mathrm{C2}})=\frac{Q}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}>Q(Q>0.707)$$

$$\eta_{\mathrm{L1}}=\frac{1}{\eta_{\mathrm{C3}}}=0 \qquad H_{\mathrm{L}}(\eta_{\mathrm{L1}})=0 \qquad \eta_{\mathrm{L3}}=\frac{1}{\eta_{\mathrm{C1}}}=\infty \qquad H_{\mathrm{L}}(\eta_{\mathrm{L3}})=1$$

$$\eta_{\mathrm{L2}}=\frac{1}{\eta_{\mathrm{C2}}}=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \qquad H_{\mathrm{L}}(\eta_{\mathrm{L2}})=H_{\mathrm{C}}(\eta_{\mathrm{C2}})$$



当$Q>1/\sqrt{2}$

$\eta=\eta_{C2}$，$U_C(\eta)$**获最大值；** $\eta=\eta_{L2}$，$U_L(\eta)$**获最大值。**

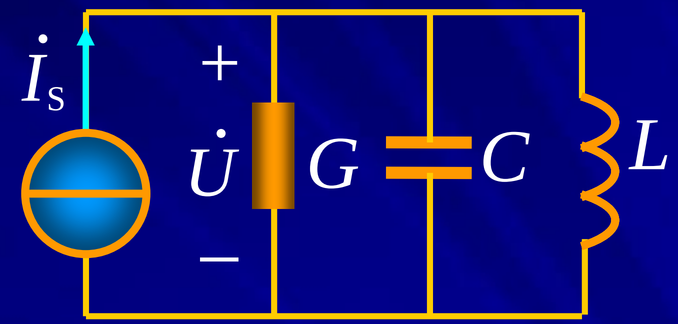
且$U_C(\eta_{C2})$=$U_L(\eta_{L2})$。

注意　$H_C(\mathrm{j}\eta)$ **为低通函数，** $H_L(\mathrm{j}\eta)$ **为高通函数；**

Q**越高，** η_{L2}**和**η_{C2} **越靠近**η=1，**同时峰值增高。**

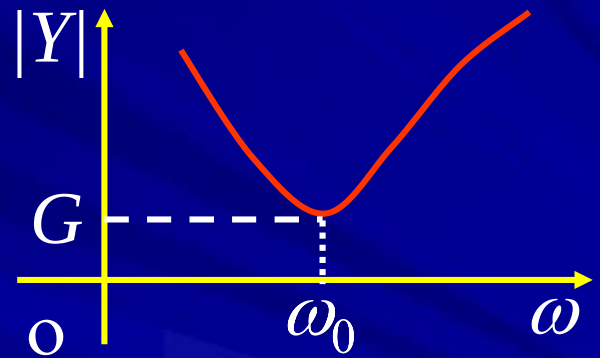
11.4 *RLC*并联谐振电路

1. *G*、*C*、*L* 并联电路



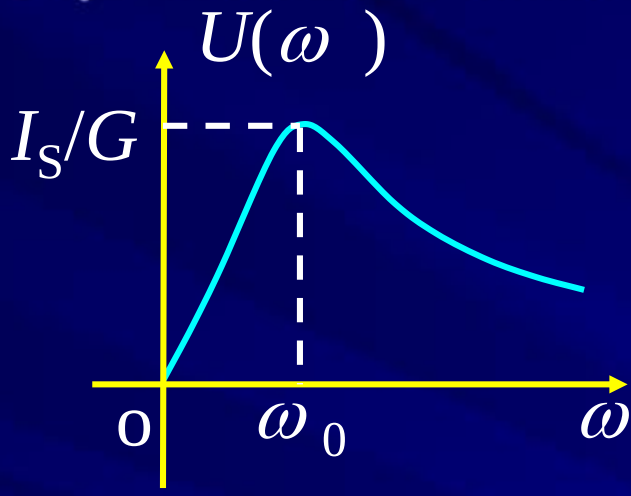
$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

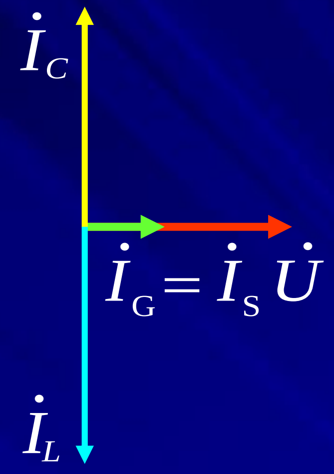
谐振角频率 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



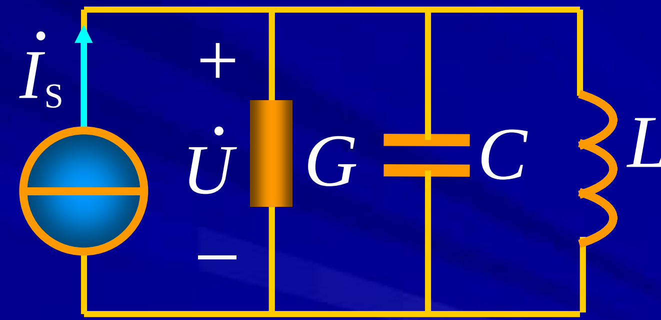
谐振特点:

①入端导纳为纯电导，导纳值$|Y|$最小，端电压达最大。





② LC上的电流大小相等，相位相反，并联总电流为零，也称电流谐振，即



$$\dot I_C = \dot U \mathrm{j}\omega_0 C = \mathrm{j}\omega_0 C\frac{\dot I_S}{G} = \mathrm{j}Q\dot I_S$$

$$\dot I_L = \dot U / \mathrm{j}\omega_0 L = -\mathrm{j}\omega_0 C\frac{\dot I_S}{G} = -\mathrm{j}Q\dot I_S$$

$$I_L(\omega_0) = I_C(\omega_0) = QI_S$$

品质因数
$$Q=\frac{\omega_0 C}{G}=\frac{1}{\omega_0 GL}=\frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

③谐振时的功率

$$P=UI=U^2/G$$

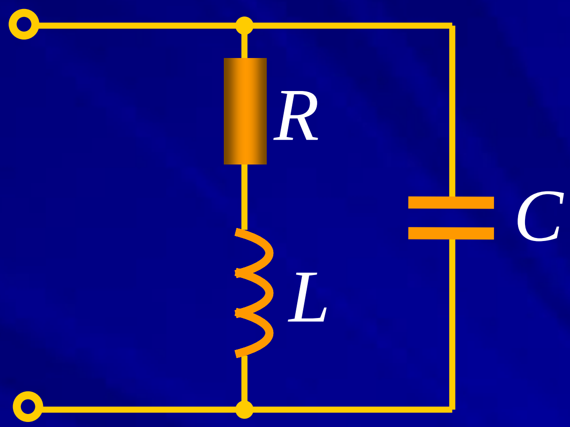
$$|Q_L|=|Q_C|=\omega_0 CU^2=\frac{U^2}{\omega_0 L}\qquad Q_L+Q_C=0$$

④谐振时的能量

$$W(\omega_0)=W_L(\omega_0)+W_C(\omega_0)=LQ^2I_S^2$$

2.电感线圈与电容器的并联谐振

实际的电感线圈总是存在电阻，因此当电感线圈与电容器并联时，电路如图：



（1）谐振条件

$$Y = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

$$= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right) = G + \mathrm{j}B$$

$$\omega_0 C - \frac{\omega_0 L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0 \rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}}$$

注意 ① 电路发生谐振是有条件的，在电路参数一定时，满足：

$$\frac{1}{LC}-(\frac{R}{L})^2>0,\ 即\ R<\sqrt{\frac{L}{C}}$$ 时，可以发生谐振

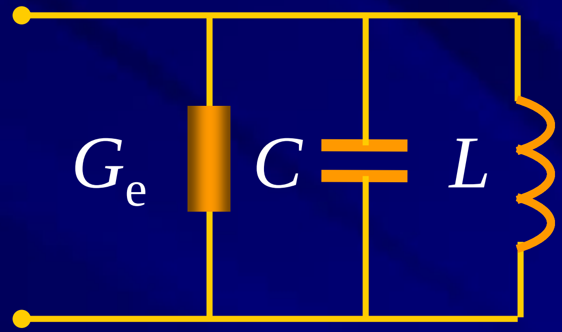
② 一般线圈电阻$R<<\omega L$，则等效导纳为：

$$Y=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+\mathrm{j}(\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2})$$

$$\approx\frac{R}{(\omega L)^2}+\mathrm{j}(\omega C-\frac{1}{\omega L})$$

谐振角频率 → $\omega_0\approx\frac{1}{\sqrt{LC}}$

等效电路



$$R_e=\frac{1}{G_e}\approx\frac{(\omega_0 L)^2}{R}$$

品质因数

$$Q=\frac{\omega_0 C}{G}=\frac{\omega_0 C}{R/(\omega_0 L)^2}=\frac{\omega_0^3 C L^2}{R}=\frac{\omega_0 L}{R}$$

线圈的品质因数

(2) 谐振特点

①电路发生谐振时，输入阻抗很大；

$$Z(\omega_0)=R_0=\frac{R^2+(\omega_0 L)^2}{R}\approx\frac{(\omega_0 L)^2}{R}=\frac{L}{RC}$$

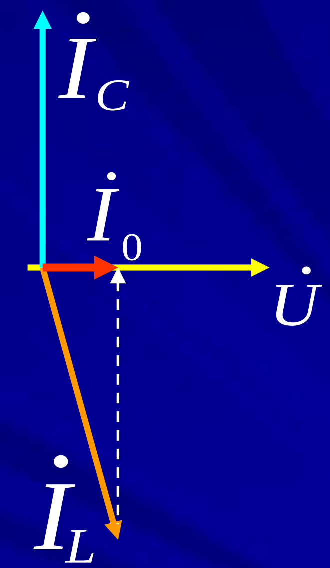
②电流一定时，端电压较高 $U_0 = I_0 Z = I_0 \dfrac{L}{RC}$

③支路电流是总电流的Q**倍，设**$R << \omega L$

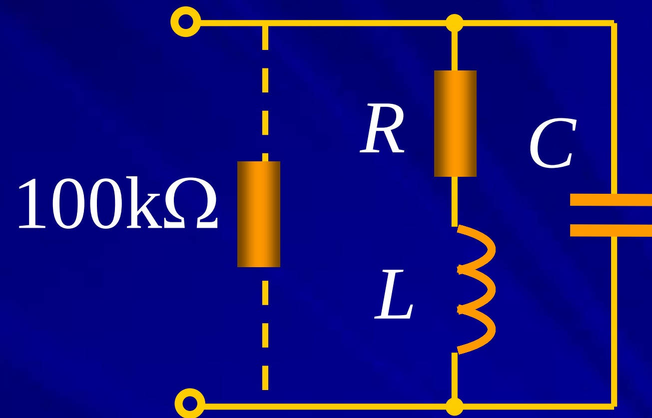
$$I_L \approx I_C \approx \frac{U}{\omega_0 L} = U\omega_0 C$$

$$\frac{I_L}{I_0} = \frac{I_C}{I_0} = \frac{U/\omega_0 L}{U(RC/L)} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q$$

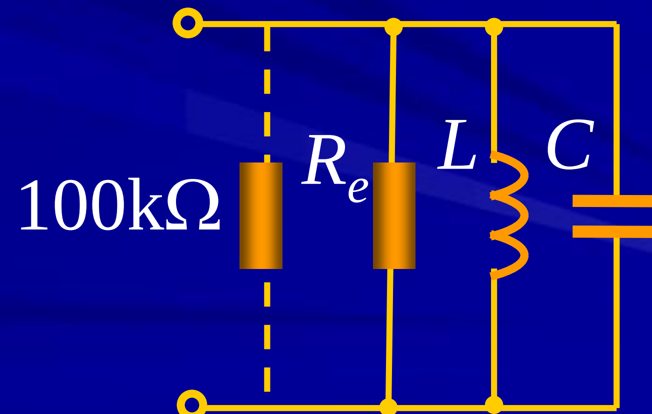
$$\rightarrow \quad I_L \approx I_C = QI_0 >> I_0$$



例1 **如图**R=10Ω**的线圈其**Q_L=100，**与电容接成并联谐振电路，如再并联上一个**100kΩ**的电阻，求电路的**Q.



等效电路



解

$$Q_L = 100 = \frac{\omega_0 L}{R}$$

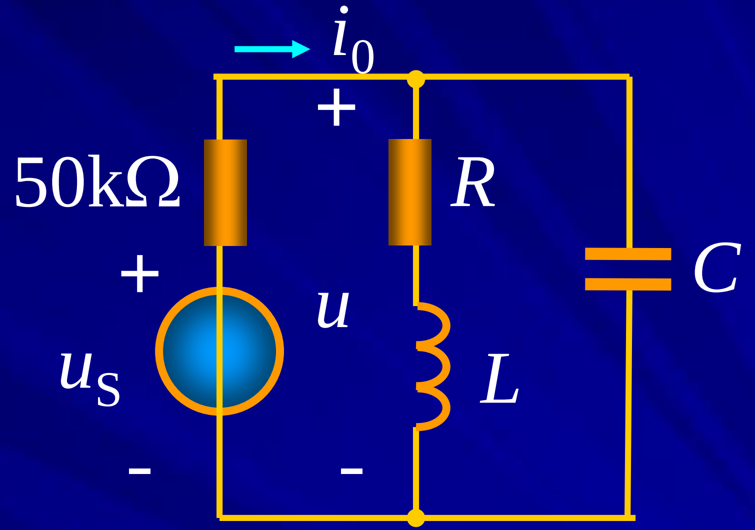
$$\omega_0 L = RQ_L = 1000\Omega >> R$$

$$R_e \approx \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = \frac{10^6}{10} = 100k\Omega$$

$$R_{eq} = 100 // 100 = 50k\Omega$$

$$Q = \frac{R_{eq}}{\omega_0 L} = \frac{50 \times 10^3}{1000} = 50$$

例2 **如图**R_S=50kΩ，U_S=100V，$\omega_0=10^6$，Q=100，**谐振时线圈获取最大功率，求**L、C、R**及谐振时**I_0、U**和**P**。**



解

$$\begin{cases} Q_L = \dfrac{\omega_0 L}{R} = 100 \\ R_e = \dfrac{(\omega_0 L)^2}{R} = R_S = 50k\Omega \\ \omega_0 \approx \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

$$I_0 = \frac{U_S}{2R_S} = \frac{100}{2\times 50\times 10^3} = 1\text{mA}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = 5\Omega \\ L = 0.5\text{mH} \\ C = 0.002\mu\text{F} \end{cases}$$

$$U = \frac{U_S}{2} = 50\text{V}$$

$$P = UI_0 = 0.05\text{W}$$

11.5 波特图

对电路和系统的频率特性进行分析时，为了直观地观察频率特性随频率变化的趋势和特征，工程上常采用对数坐标来作频响曲线，这种用对数坐标描绘的频率响应图就称为频响波特图。

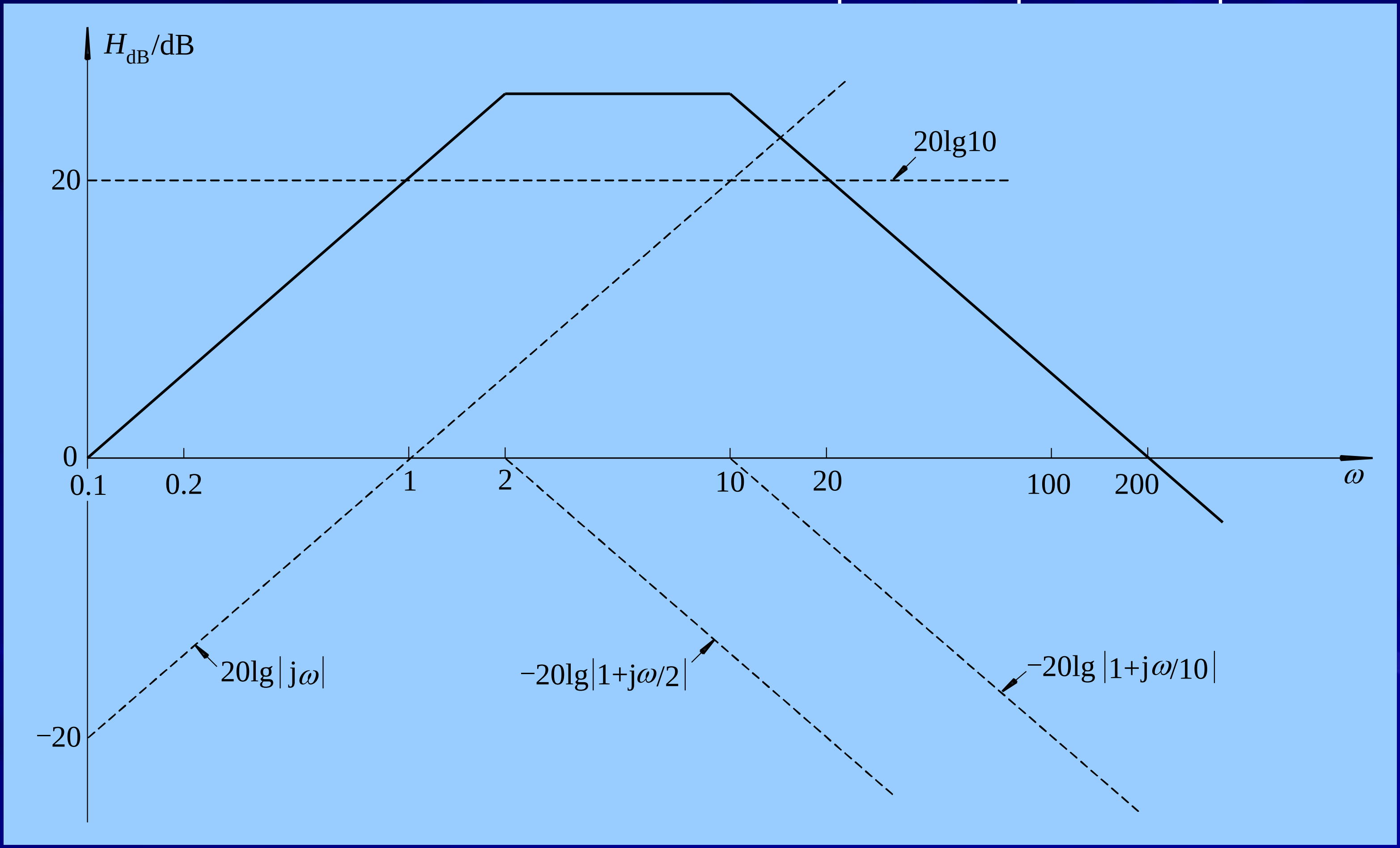
例 画出网络函数的波特图。$H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{200\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega+2)(\mathrm{j}\omega+10)}$

解 改写网络函数为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{10\left|\mathrm{j}\omega\right|}{\left|1+\mathrm{j}\omega/2\right|\cdot\left|1+\mathrm{j}\omega/10\right|}\quad 90^\circ-\tan^{-1}(\omega/2)-\tan^{-1}(\omega/10)$$

因此对数模（单位分贝）

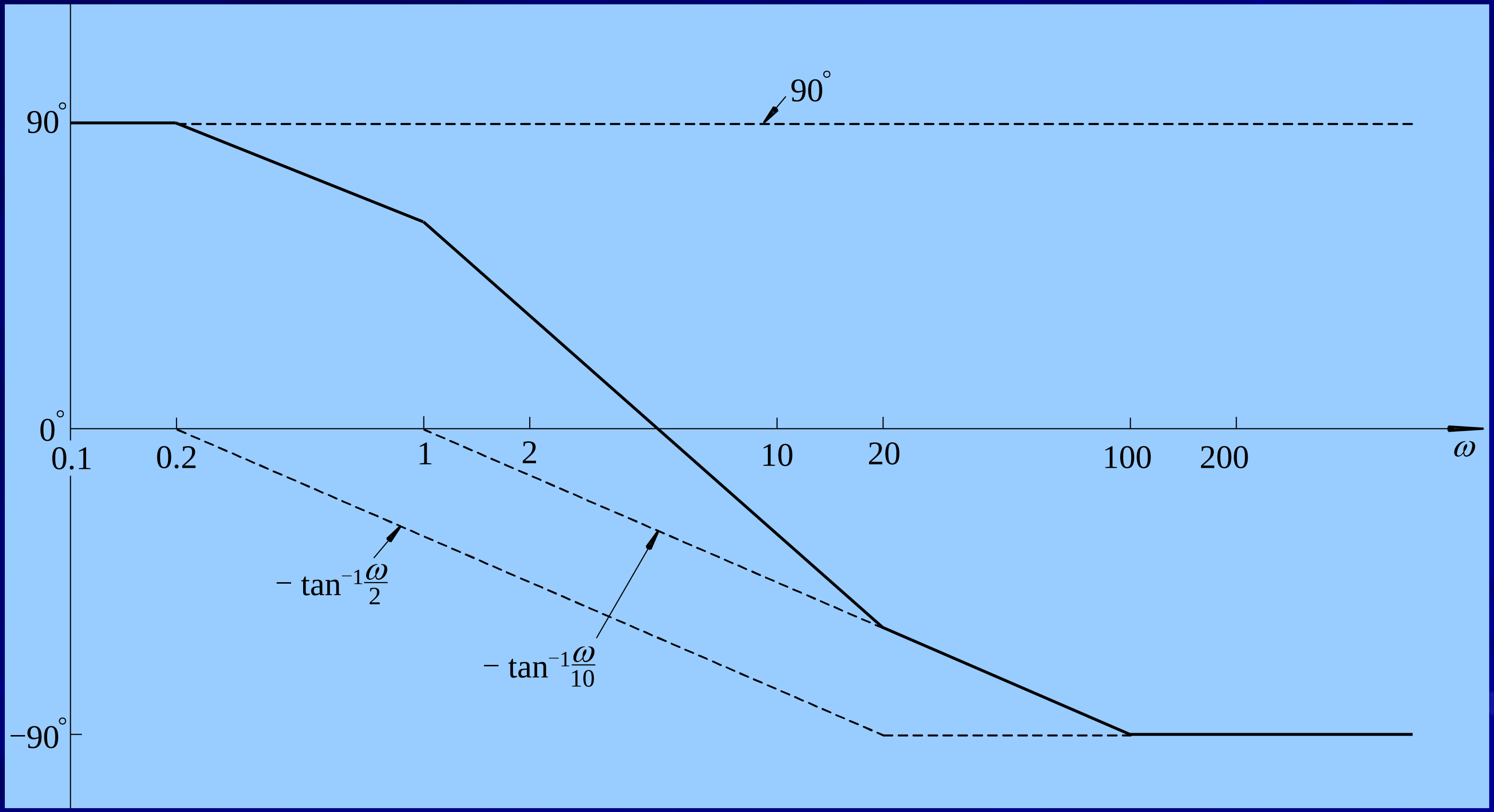
$$H_{\mathrm{dB}}=20\lg 10+20\lg\left|\mathrm{j}\omega\right|-20\lg\left|1+\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\right|-20\lg\left|1+\mathrm{j}\frac{\omega}{10}\right|$$



幅频波特图

相位（单位度）

$$\phi = 90^\circ - \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - \tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$



相频波特图

11.6 滤波器简介

● 滤波器

工程上根据输出端口对信号频率范围的要求，设计专门的网络，置于输入—输出端口之间，使输出端口所需要的频率分量能够顺利通过，而抑制或削弱不需要的频率分量，这种具有选频功能的中间网络，工程上称为滤波器。

● 有源滤波器

利用有源元件运算放大器构成的滤波器称为有源滤波器。

● 滤波电路的传递函数定义

$$U_i \rightarrow \boxed{\text{滤波电路}} \rightarrow U_o \qquad H(\omega)=\frac{U_o(\omega)}{U_i(\omega)}$$

● 滤波电路分类

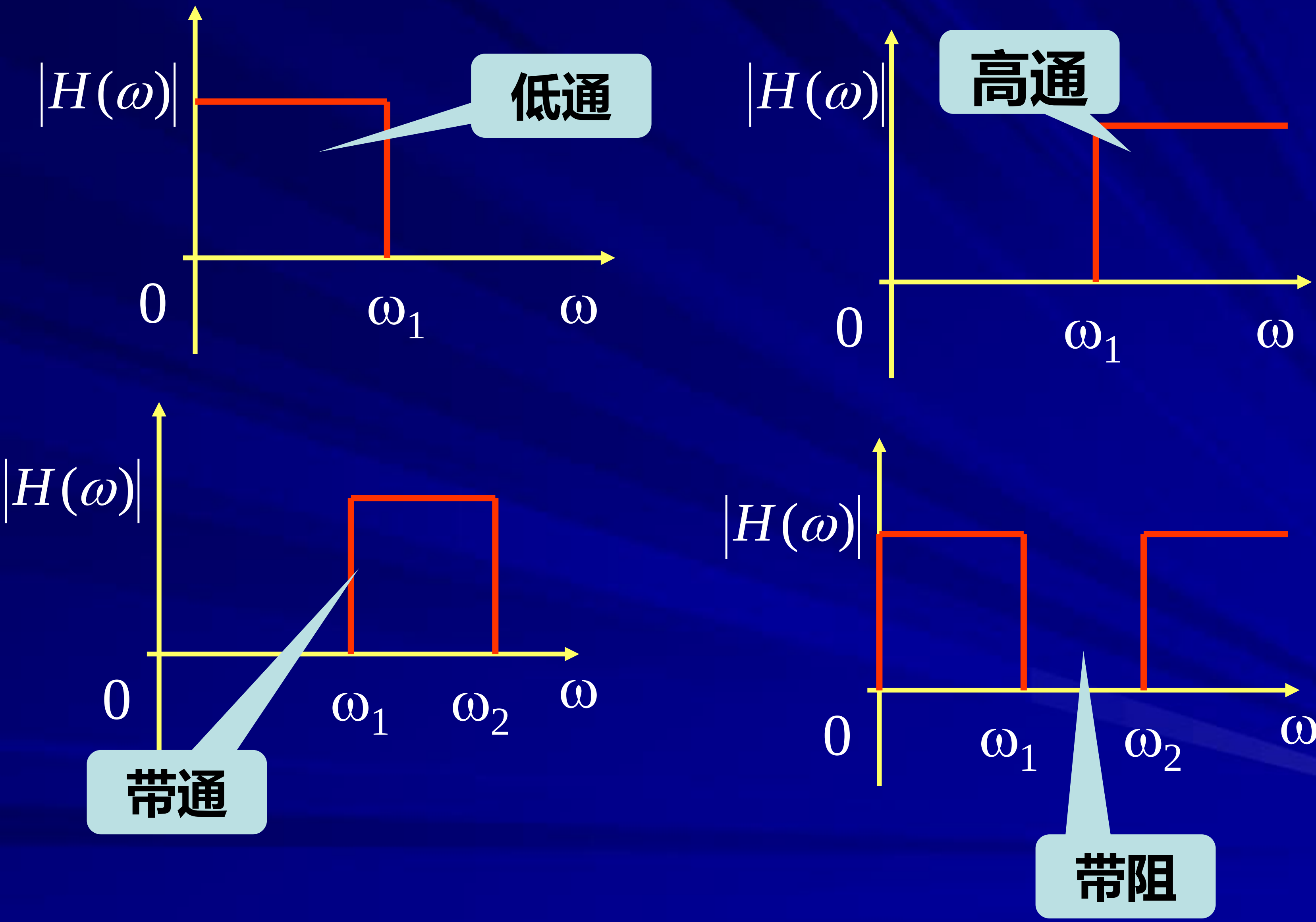
①按所处理信号分 ⟶ 模拟和数字滤波器

②按所用元件分 ⟶ 无源和有源滤波器

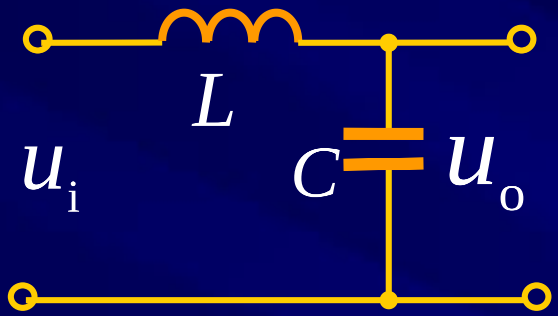
③按滤波特性分 ⟶ 低通滤波器（LPF）

高通滤波器（HPF） 带通滤波器（BPF）

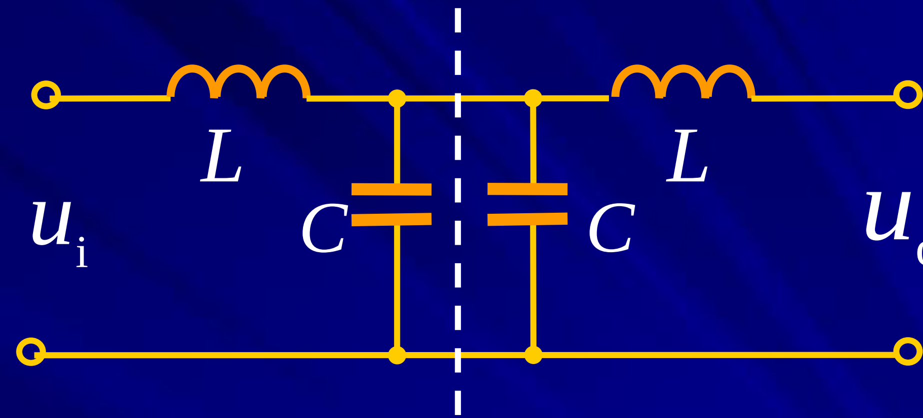
带阻滤波器（BEF） 全通滤波器（APF）



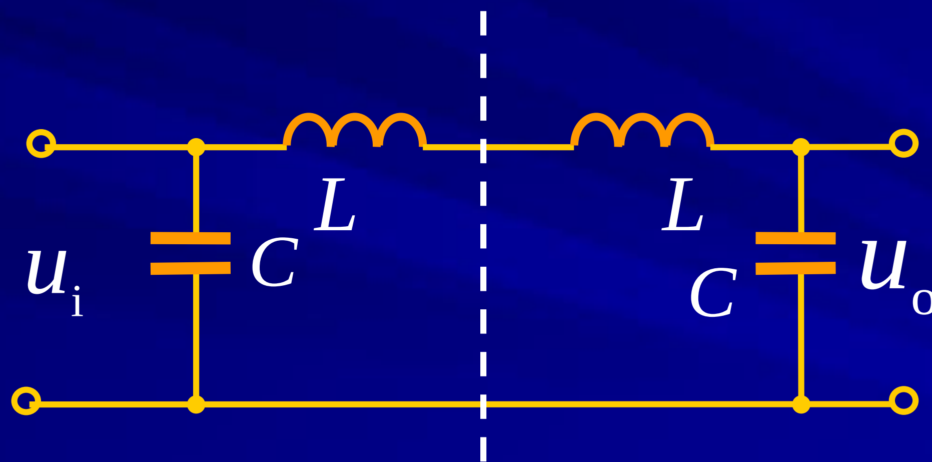
$|H(\omega)|$
低通
0
ω_1
ω
$|H(\omega)|$
高通
0
ω_1
ω
$|H(\omega)|$
0
ω_1
ω_2
ω
带通
$|H(\omega)|$
0
ω_1
ω_2
ω
带阻



L型

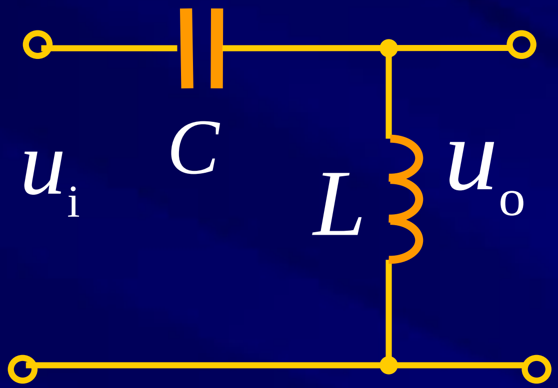


T型

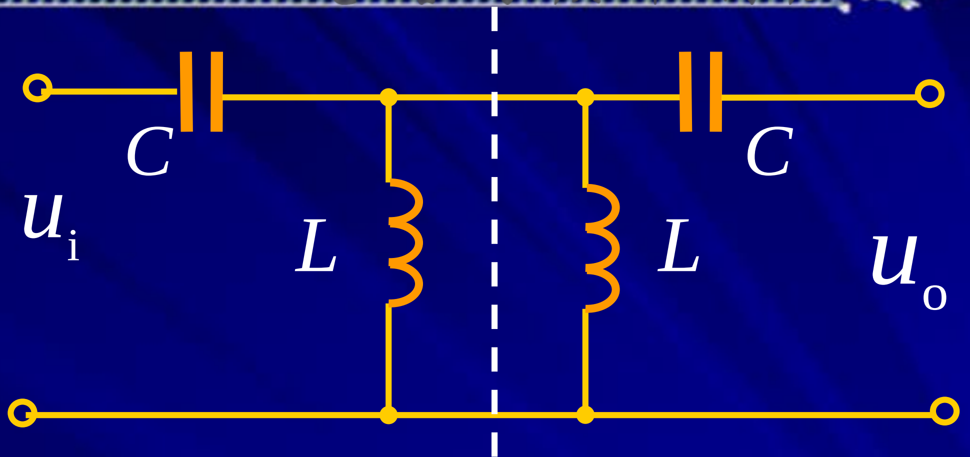


π型

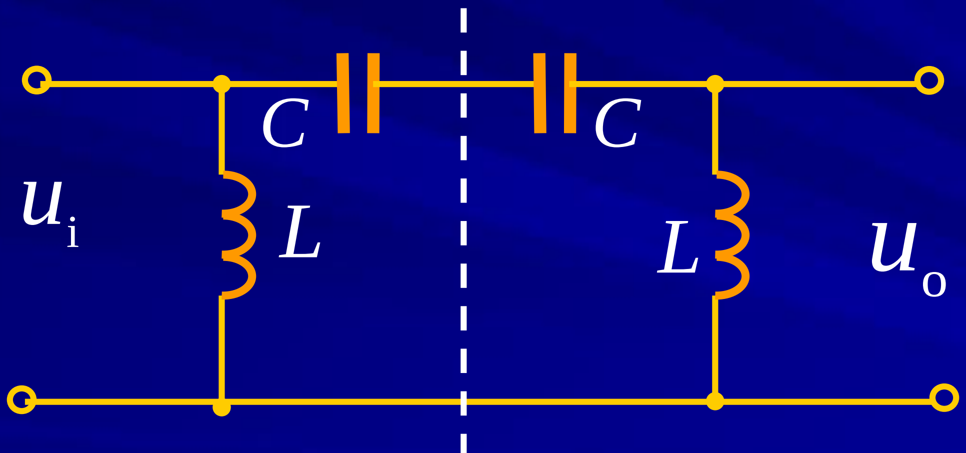
低通滤波器的单元电路



L型

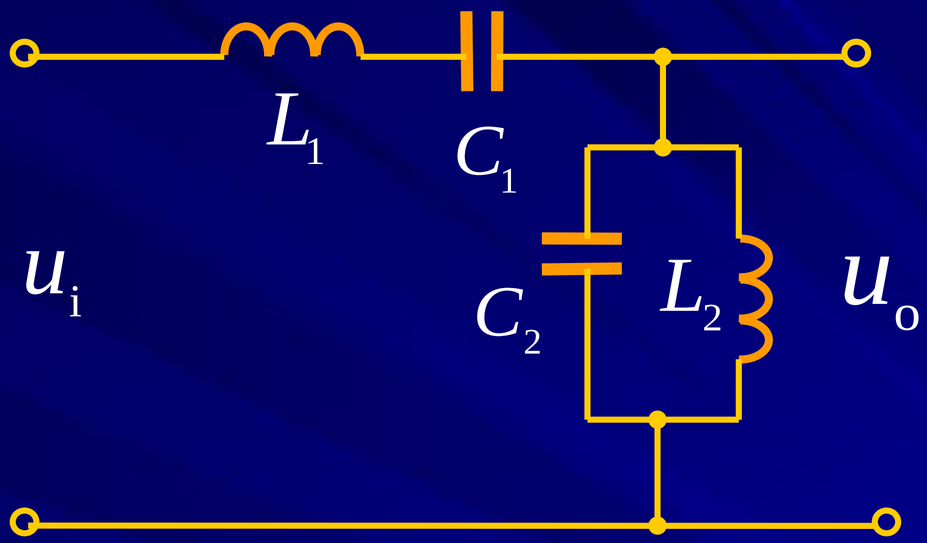


T型



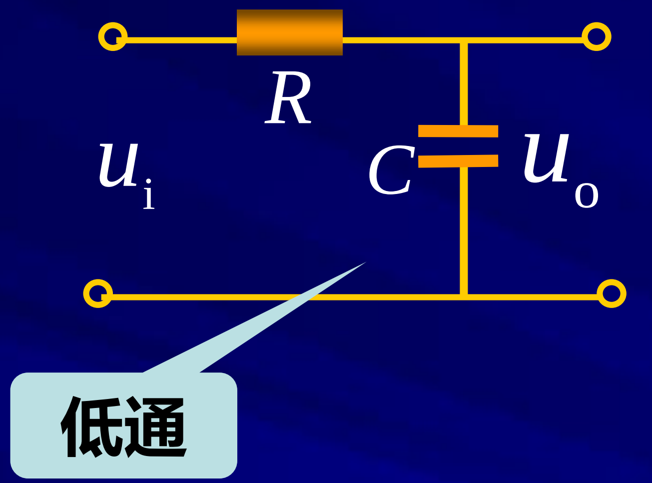
π型

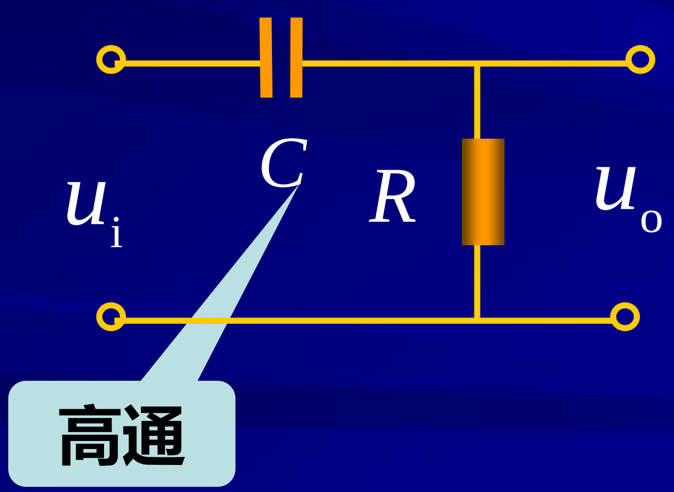
高通滤波器的单元电路



带通滤波器

例1 一阶RC无源低通滤波器





传递函数，设：

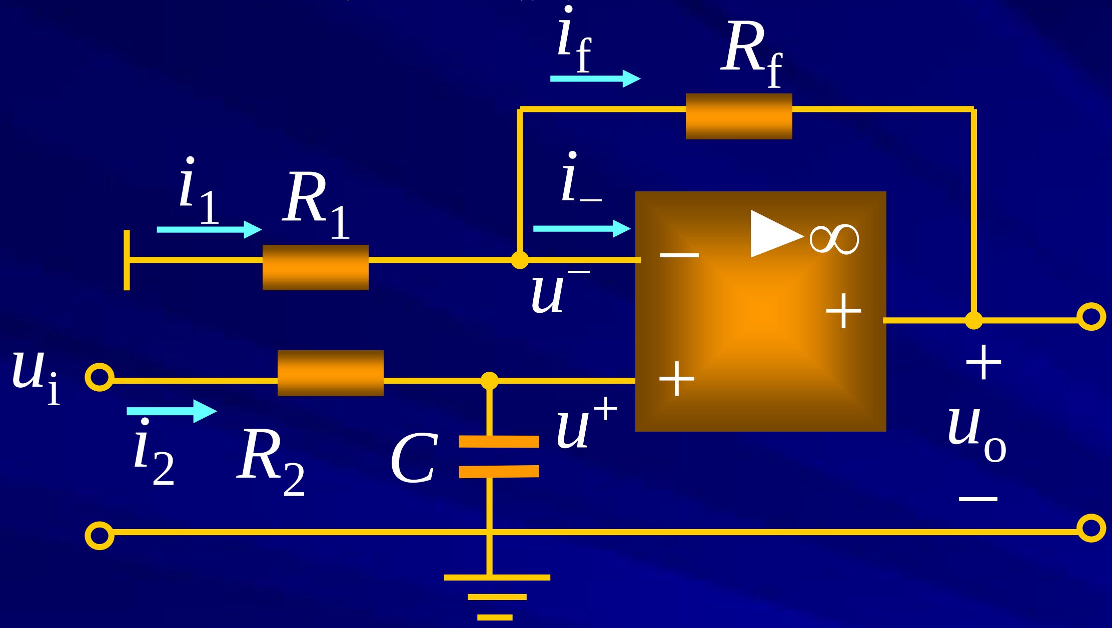
$$u_i = u_m \cos(\omega t)$$

$$u_i = Ri + u_C = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$$

$$u_C = u_o = \frac{u_m \sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}$$

$$|H(\omega)| = \frac{U_o}{U_i} = \left|\frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}\right|$$

例2 **有源滤波器**



$$\begin{cases} u^+ = u^- = u_C \\ i^- = i^+ = 0 \end{cases}$$

$$i_1 = i_f$$

$$\frac{-u^+}{R_1} = \frac{u^+ - u_o}{R_f}$$

$$u_o = (1 + \frac{R_f}{R_1})u^+$$

$$i_2 = \frac{u_i - u_C}{R_2} = C\frac{du_C}{dt} \quad \rightarrow \quad R_2C\frac{du_C}{dt} + u_C = u_i$$

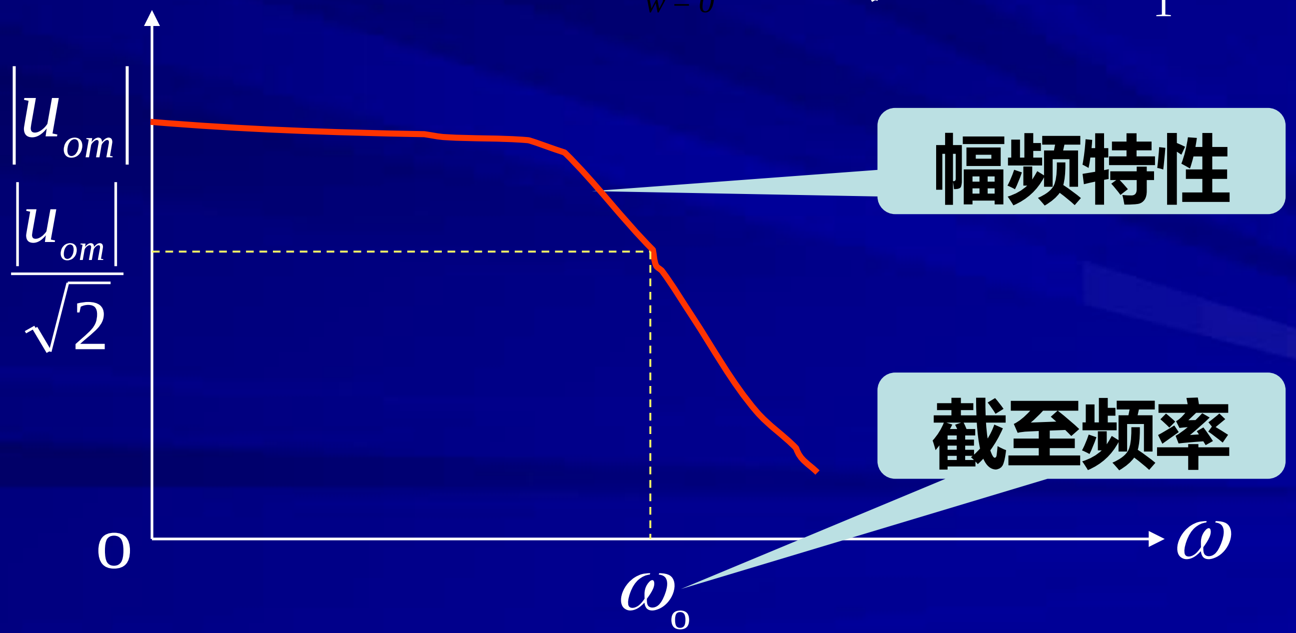
设： $u_i = \cos\omega t$　　**解得：** $u_C = u^+ = \dfrac{\cos(\omega t - 90^0 + \theta)}{\sqrt{(R_2C\omega)^2 + 1}}$

$$u_o = (1+\frac{R_f}{R_1})\frac{\cos(\omega t - 90^0 + \theta)}{\sqrt{(R_2 C\omega)^2 + 1}}$$

当 $\omega = 0 \rightarrow |u_{om}| = (1+\frac{R_f}{R_1})$

当 $\omega = \frac{1}{R_2 C} = \omega_0 \rightarrow |u_{om0}| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\frac{R_f}{R_1}) = \frac{|u_{om}|}{\sqrt{2}}$

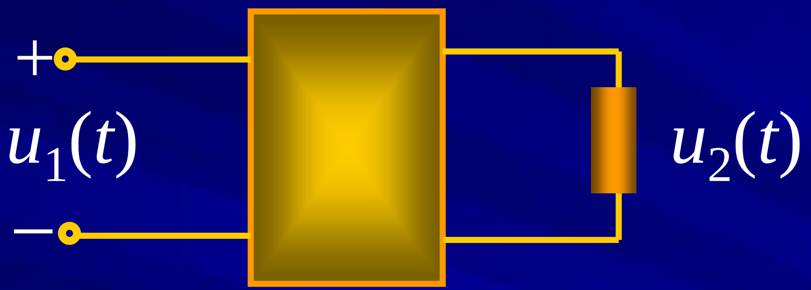
w = 0



例3　激励 $u_1(t)$，包含两个频率ω_1、ω_2分量 $(\omega_1<\omega_2)$：

$$u_1(t) = u_{11}(\omega_1) + u_{12}(\omega_2)$$

要求响应$u_2(t)$只含有ω_1频率电压。如何实现？



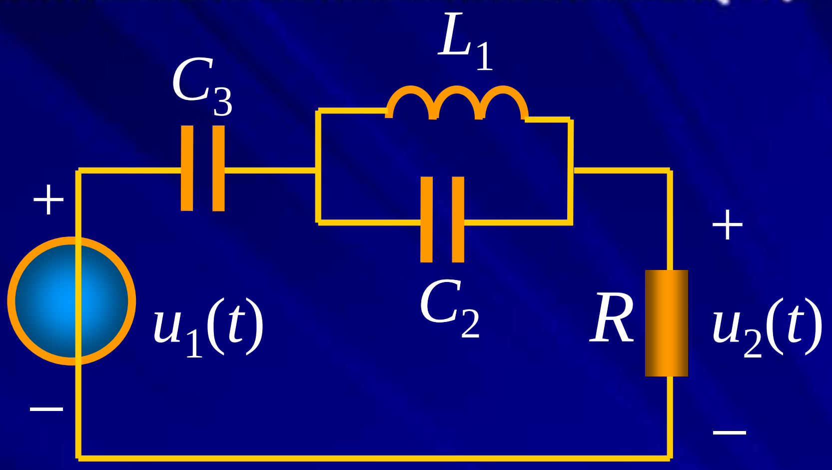
解　设计下列滤波电路实现：

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$$

并联谐振，开路

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 (C_2 + C_3)}}$$

串联谐振，短路



ω_1 信号短路直接加到负载上。

该电路 $\omega_2 > \omega_1$，滤去高频，得到低频。

注意　滤波器利用谐振电路的频率特性，只允许谐振频率邻域内的信号通过