

第4章 电路定理

本章重点

- | | |
|------|------------|
| 4.1 | 叠加定理 |
| 4.2 | 替代定理 |
| 4.3 | 戴维宁定理和诺顿定理 |
| 4.4 | 最大功率传输定理 |
| 4.5* | 特勒根定理 |
| 4.6* | 互易定理 |
| 4.7* | 对偶原理 |

- **重点:**

**熟练掌握各定理的内容、适用范围
及如何应用。**

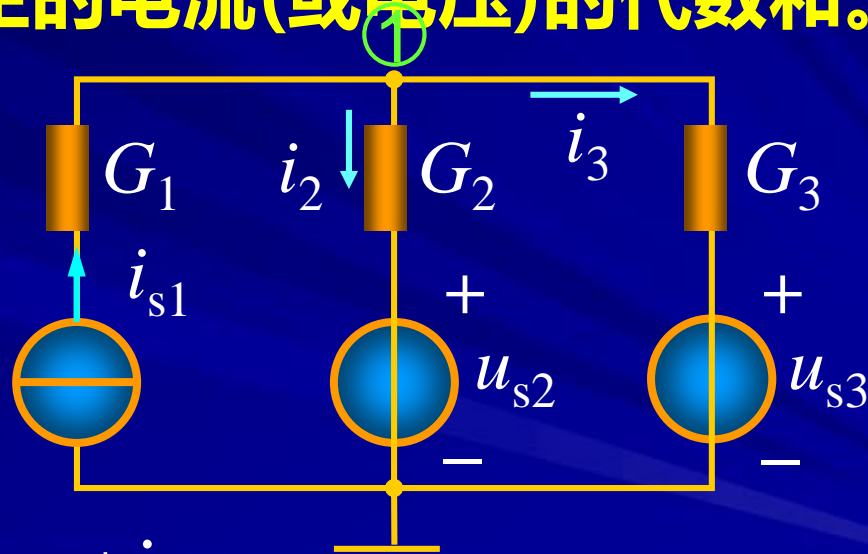
4.1 叠加定理

1. 叠加定理

在线性电路中，任一支路的电流(或电压)可以看成是电路中每一个独立电源单独作用于电路时，在该支路产生的电流(或电压)的代数和。

2. 定理的证明

应用结点法：

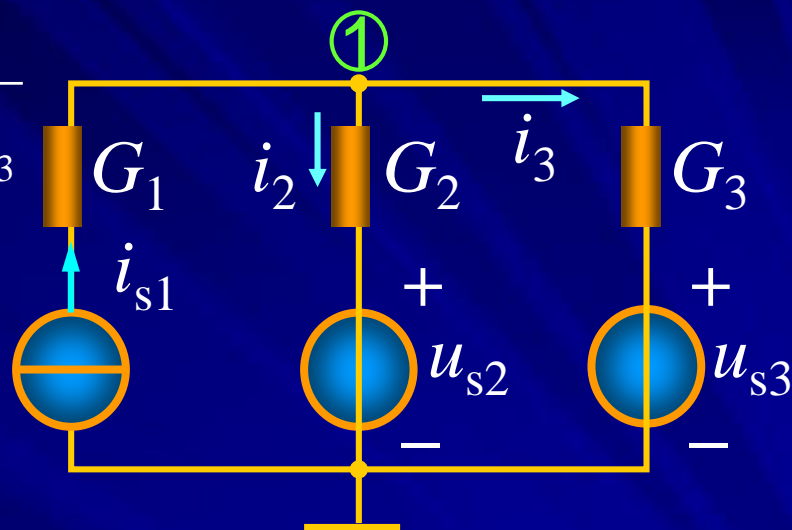


$$(G_2 + G_3)u_{n1} = G_2 u_{s2} + G_3 u_{s3} + i_{s1}$$

$$u_{n1} = \frac{G_2 u_{s2}}{G_2 + G_3} + \frac{G_3 u_{s3}}{G_2 + G_3} + \frac{i_{s1}}{G_2 + G_3}$$

或表示为:

$$\begin{aligned} u_{n1} &= a_1 i_{s1} + a_2 u_{s2} + a_3 u_{s3} \\ &= u_{n1}^{(1)} + u_{n1}^{(2)} + u_{n1}^{(3)} \end{aligned}$$



支路电流为:

$$\begin{aligned} i_2 &= (u_{n1} - u_{s2})G_2 = \left(\frac{-G_3 G_2}{G_2 + G_3} \right) u_{s2} + \frac{G_3 G_2 u_{s3}}{G_2 + G_3} + \frac{G_2 i_{s1}}{G_2 + G_3} \\ &= b_1 i_{s1} + b_2 u_{s2} + b_3 u_{s3} = i_2^{(1)} + i_2^{(2)} + i_2^{(3)} \end{aligned}$$

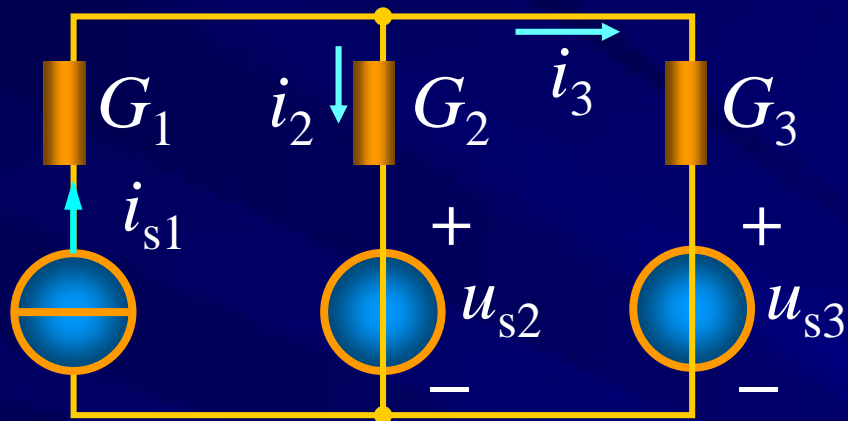
$$\begin{aligned} i_3 &= (u_{n1} - u_{s3})G_3 = \left(\frac{G_3 G_2}{G_2 + G_3} \right) u_{s2} + \left(\frac{-G_2 G_3}{G_2 + G_3} \right) u_{s3} + \frac{G_3 i_{s1}}{G_2 + G_3} \\ &= i_3^{(1)} + i_3^{(2)} + i_3^{(3)} \end{aligned}$$

**结论**

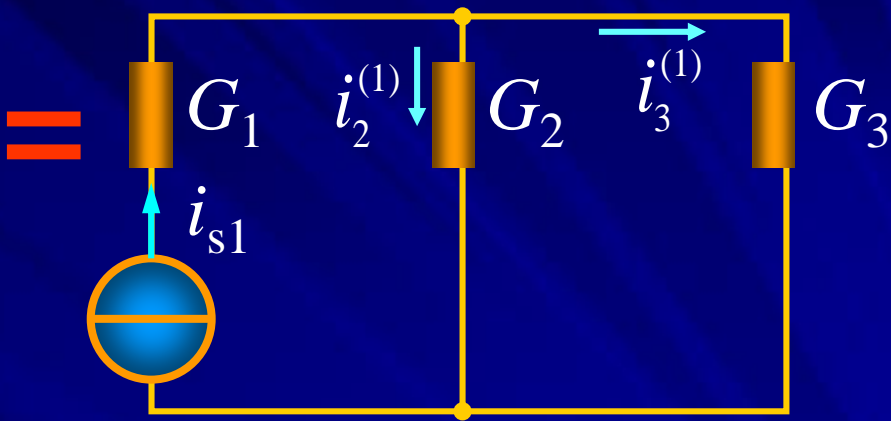
结点电压和支路电流均为各电源的一次函数，均可看成各独立电源单独作用时，产生的响应之叠加。

3. 几点说明

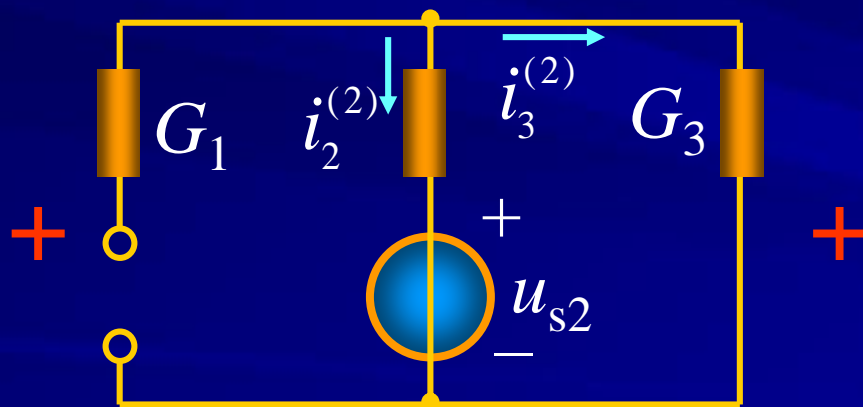
- ① 叠加定理只适用于线性电路。
- ② 一个电源作用，其余电源为零
电压源为零 — 短路。
电流源为零 — 开路。



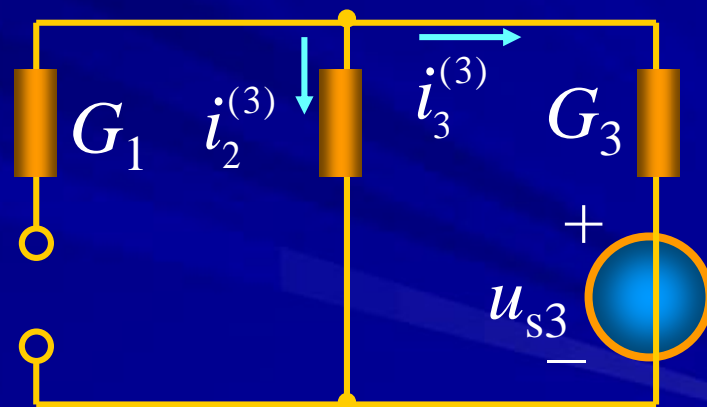
三个电源共同作用



i_{s1} 单独作用



u_{s2} 单独作用



u_{s3} 单独作用

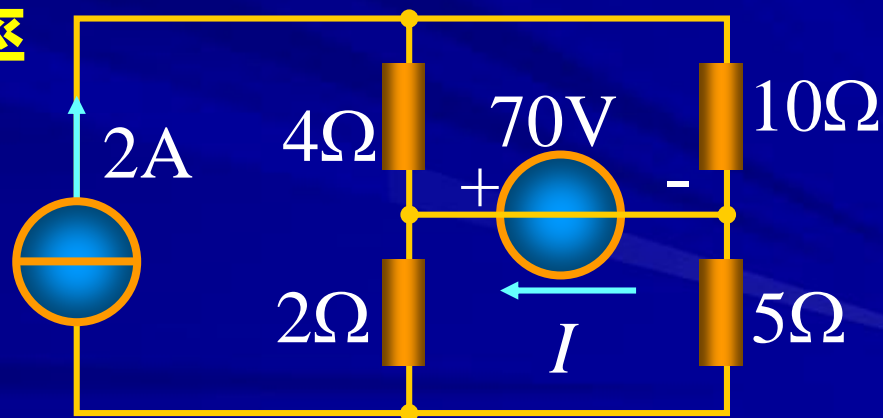
- ③功率不能叠加(功率为电压和电流的乘积, 为电源的二次函数)。
- ④ u , i 叠加时要注意各分量的参考方向。
- ⑤含受控源(线性)电路亦可用叠加, 但受控源应始终保留。

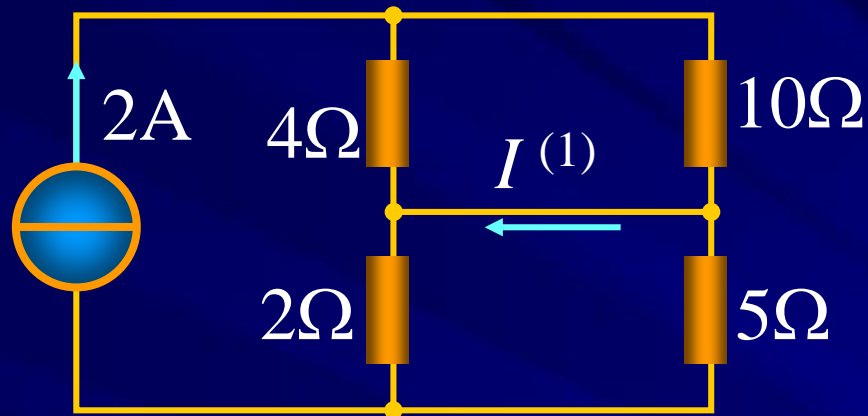
4. 叠加定理的应用

例1 求电压源的电流及功率

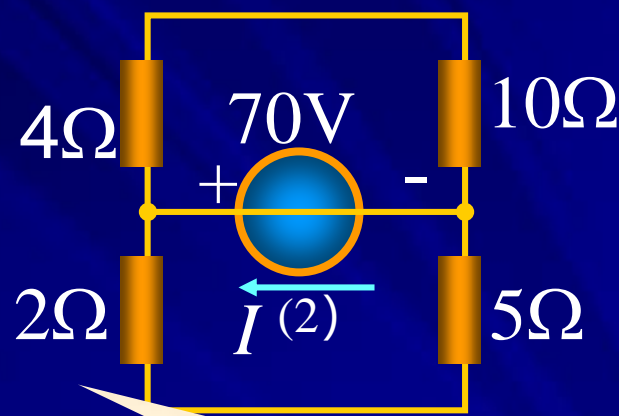
解

画出分电路图





+



两个简单电路

2A **电流源**作用，电桥平衡：

$$I^{(1)} = 0$$

70V **电压源**作用： $I^{(2)} = 70/14 + 70/7 = 15\text{A}$

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} = 15\text{A} \quad P = 70 \times 15 = 1050\text{W}$$

应用叠加定理使计算简化

例2 计算电压 u

解 画出分电路图

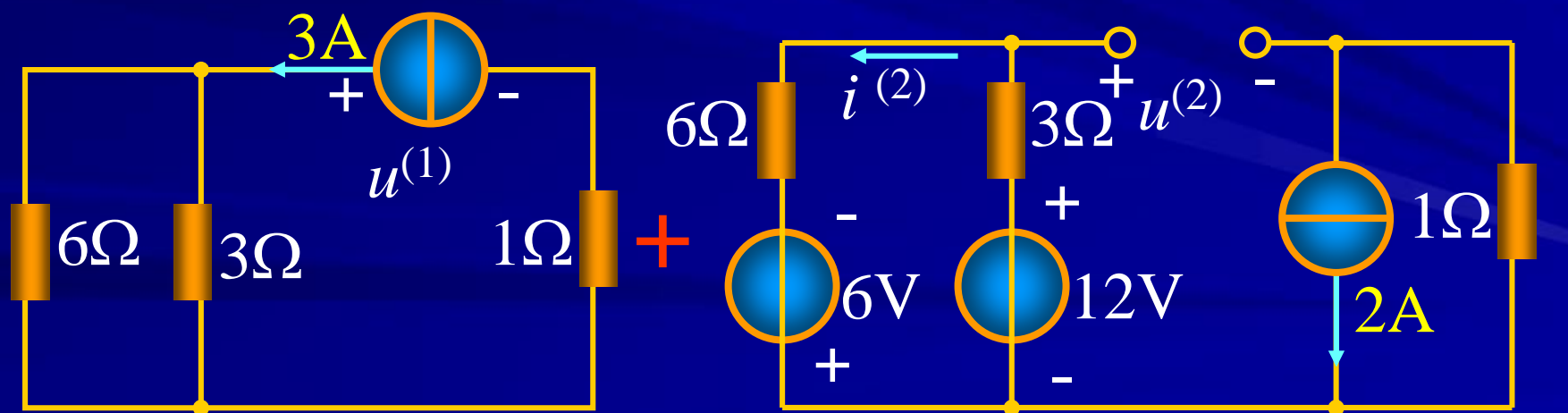
3A电流源作用:

$$u^{(1)} = (6//3 + 1) \times 3 = 9V$$

其余电源作用:

$$i^{(2)} = (6 + 12)/(6 + 3) = 2A$$

$$u^{(2)} = 6i^{(2)} - 6 + 2 \times 1 = 8V \quad u = u^{(1)} + u^{(2)} = 9 + 8 = 17V$$

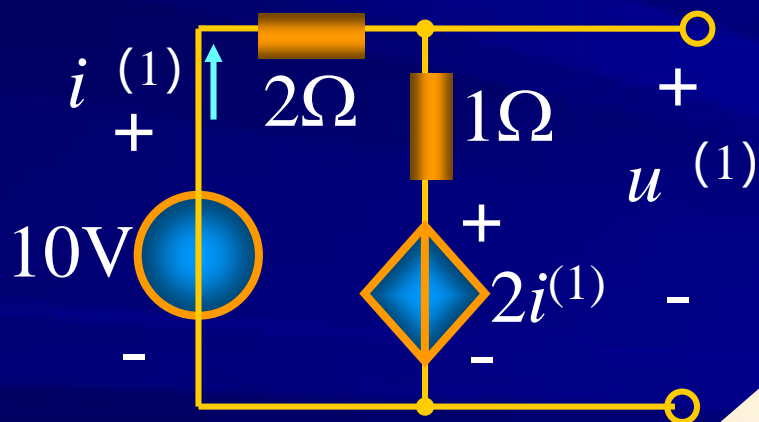




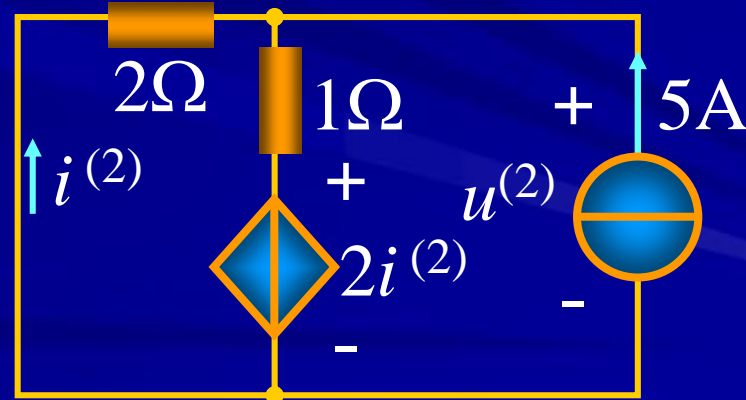
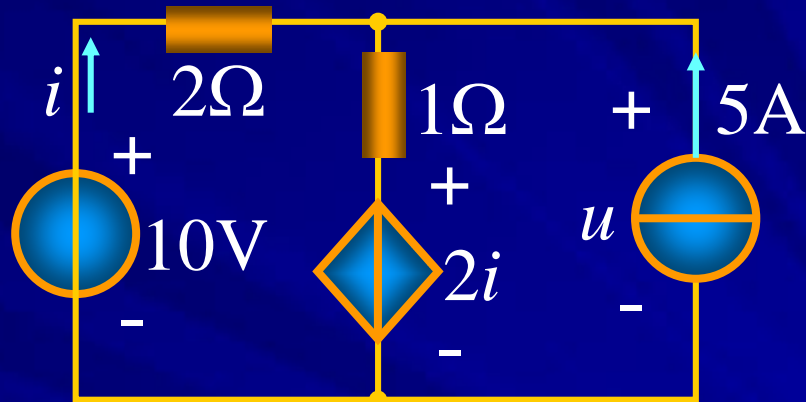
注意 叠加方式是任意的，可以一次一个独立源单独作用，也可以一次几个独立源同时作用，取决于使分析计算简便。

例3 计算电压 u 、电流 i 。

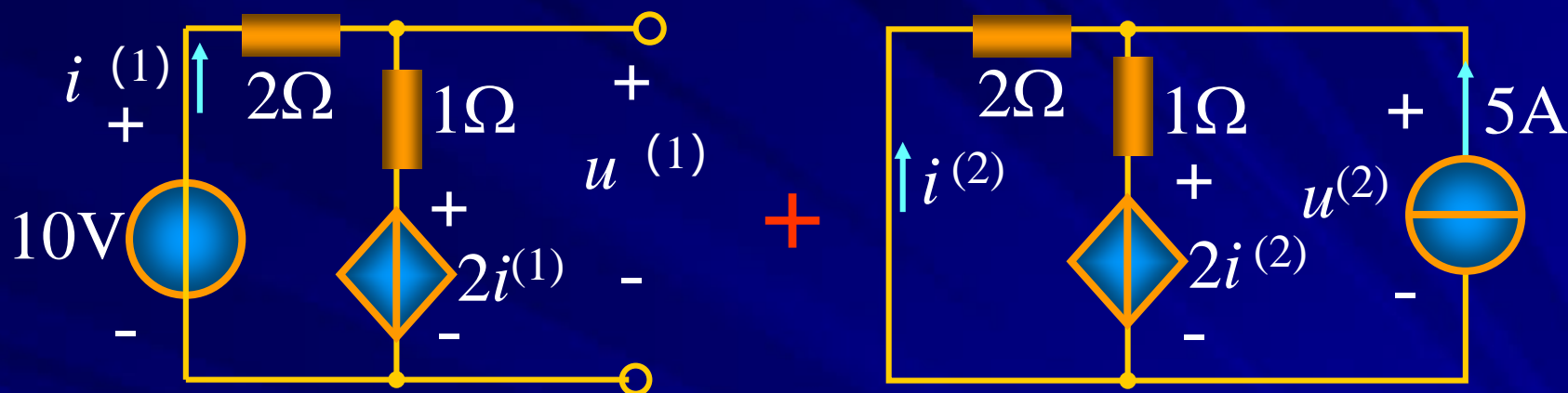
解 画出分电路图



+



受控源始终保留



10V电源作用: $i^{(1)} = (10 - 2i^{(1)}) / (2 + 1)$ $i^{(1)} = 2\text{A}$

$$u^{(1)} = 1 \times i^{(1)} + 2i^{(1)} = 3i^{(1)} = 6\text{V}$$

5A电源作用: $2i^{(2)} + 1 \times (5 + i^{(2)}) + 2i^{(2)} = 0$

$$i^{(2)} = -1\text{A} \quad u^{(2)} = -2i^{(2)} = -2 \times (-1) = 2\text{V}$$

$$u = 6 + 2 = 8\text{V} \quad i = 2 + (-1) = 1\text{A}$$

例4 封装好的电路如图，已知下列实验数据：

当 $u_s = 1\text{V}$, $i_s = 1\text{A}$ 时，响应 $i = 2\text{A}$

当 $u_s = -1\text{V}$, $i_s = 2\text{A}$ 时，响应 $i = 1\text{A}$

求 $u_s = -3\text{V}$, $i_s = 5\text{A}$ 时，响应 $i = ?$

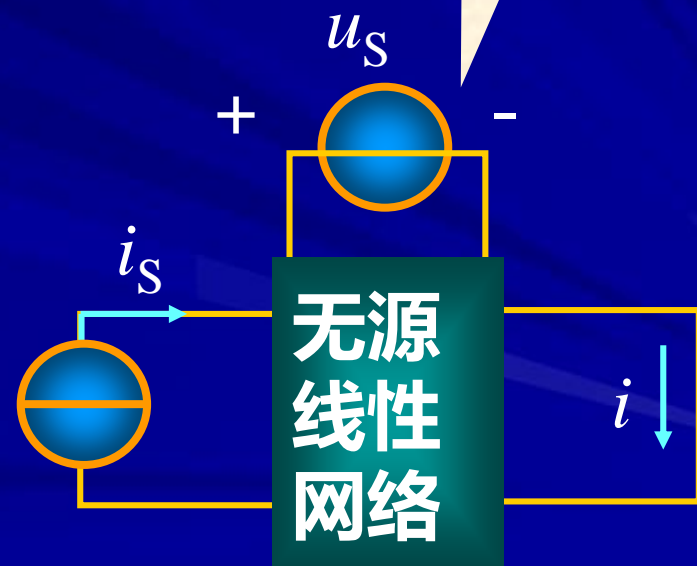
研究激励和响应关系的实验方法

解 根据叠加定理 $i = k_1 i_s + k_2 u_s$

代入实验数据：

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ 2k_1 - k_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

$$i = u_s + i_s = -3 + 5 = 2\text{A}$$



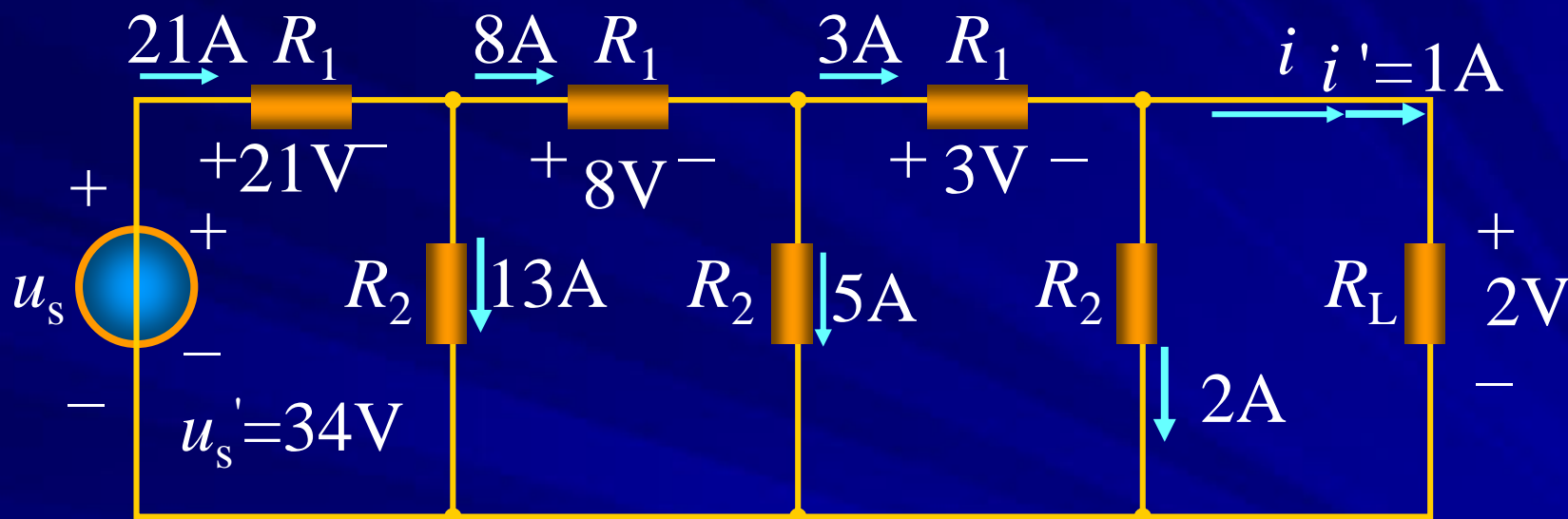
5. 齐性原理

线性电路中，所有激励(独立源)都增大(或减小)同样的倍数，则电路中响应(电压或电流)也增大(或减小)同样的倍数。



- ①当激励只有一个时，则响应与激励成正比。
- ②具有可加性。

例 $R_L=2\Omega$ $R_1=1\Omega$ $R_2=1\Omega$ $u_s=51V$, 求电流 i



解

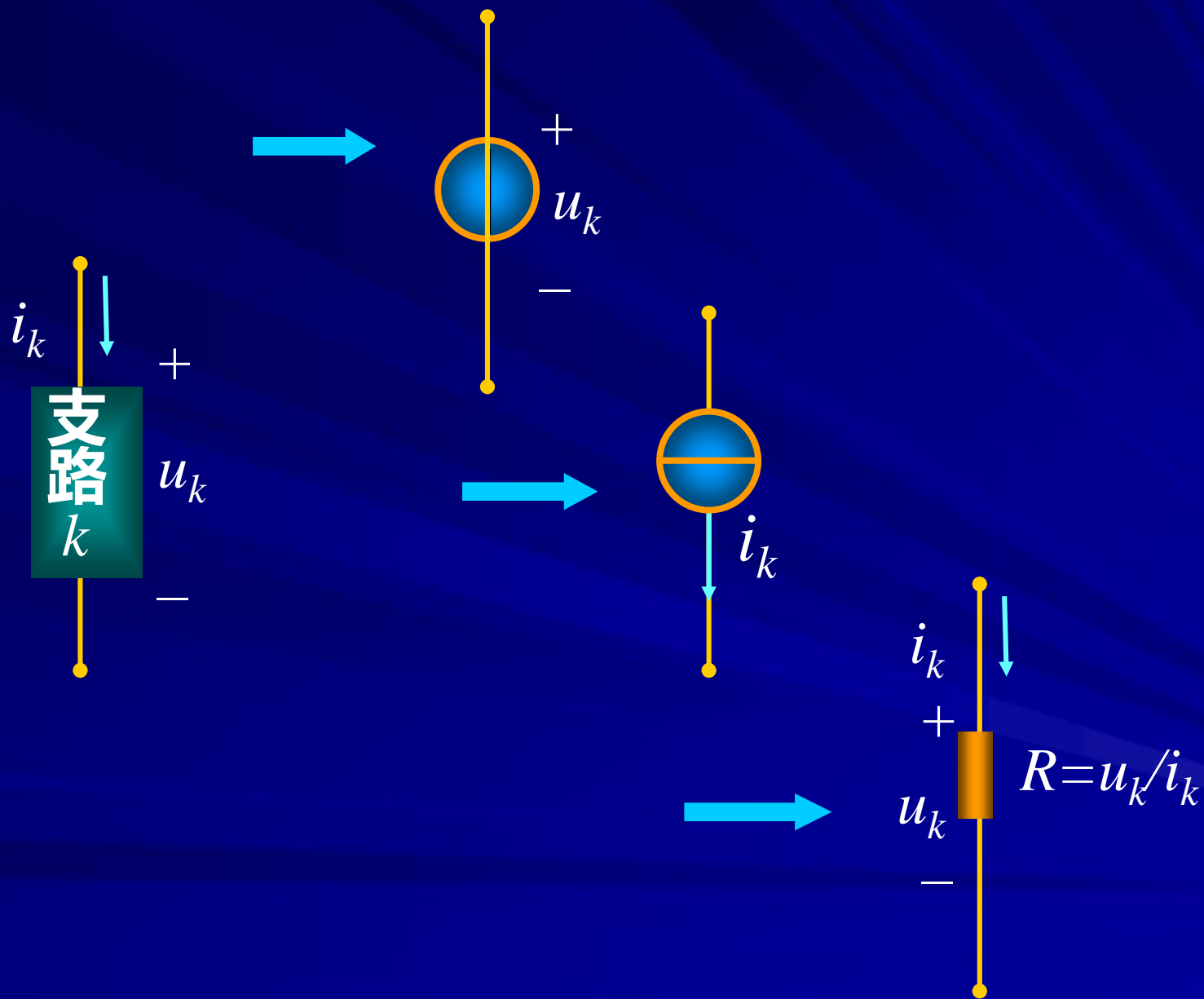
采用倒推法：设 $i'=1A$

则 $\frac{i}{i'} = \frac{u_s}{u_s'}$ 即 $i = \frac{u_s}{u_s'} i' = \frac{51}{34} \times 1 = 1.5A$

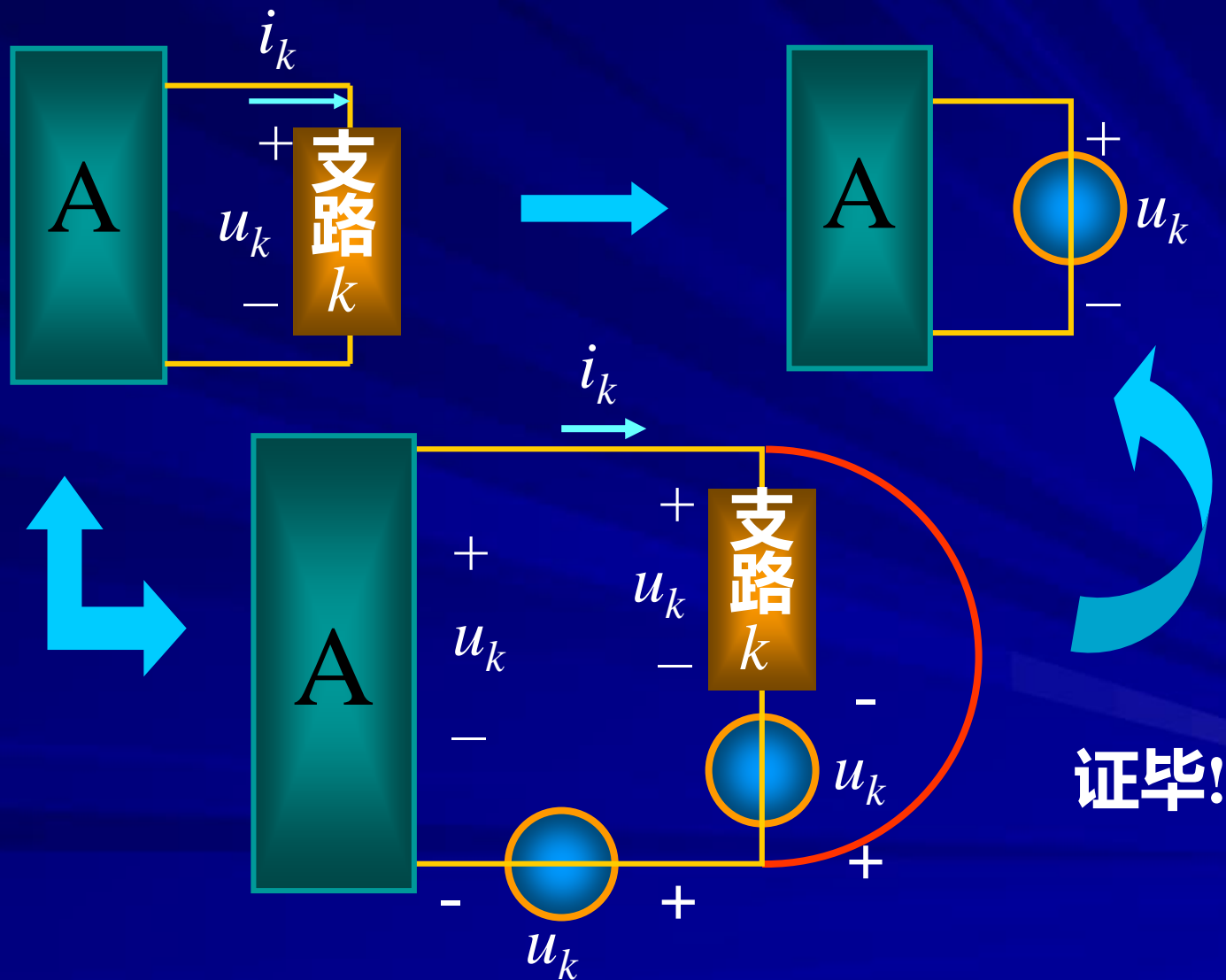
4.2 替代定理

1. 替代定理

对于给定的任意一个电路，若某一支路电压为 u_k 、电流为 i_k ，那么这条支路就可以用一个电压等于 u_k 的独立电压源，或者用一个电流等于 i_k 的独立电流源，或用 $R=u_k/i_k$ 的电阻来替代，替代后电路中全部电压和电流均保持原有值(解答唯一)。



2. 定理的证明



例 求图示电路的支路电压和电流

解

$$i_1 = 110 / [5 + (5 + 10) // 10] = 10\text{A}$$

$$i_2 = 3i_1 / 5 = 6\text{A}$$

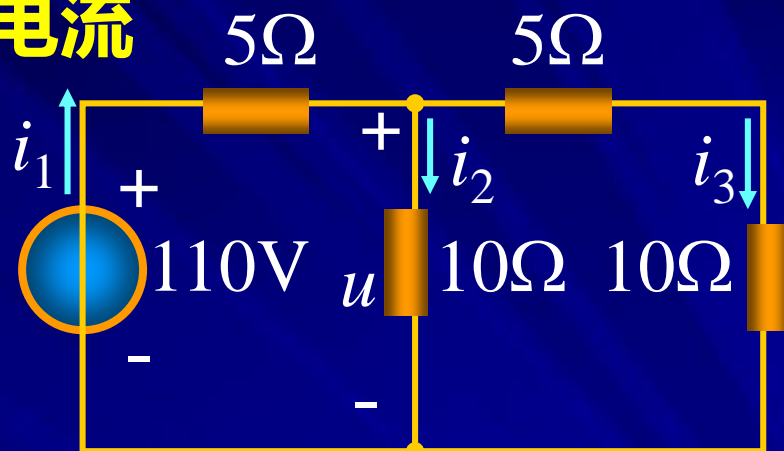
$$i_3 = 2i_1 / 5 = 4\text{A}$$

$$u = 10i_2 = 60\text{V}$$

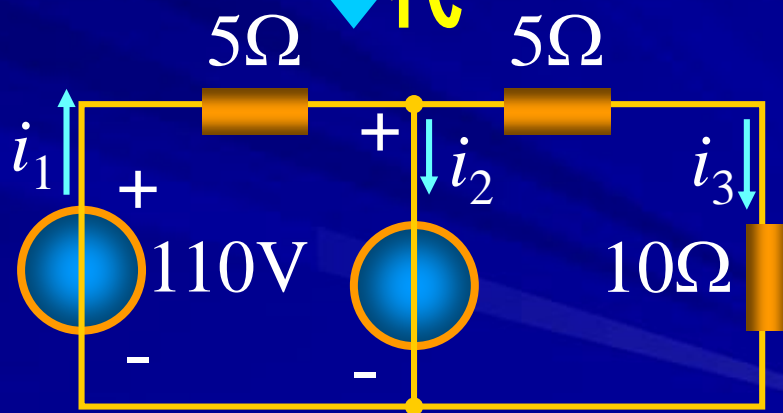
替代以后有：

$$i_1 = (110 - 60) / 5 = 10\text{A}$$

$$i_3 = 60 / 15 = 4\text{A}$$



替代



注意 替代后各支路电压和电流完全不变。

原因 代前后KCL,KVL关系相同, 其余支路的 u 、 i 关系不变。用 u_k 替代后, 其余支路电压不变(KVL), 其余支路电流也不变, 故第 k 条支路 i_k 也不变(KCL)。用 i_k 替代后, 其余支路电流不变(KCL), 其余支路电压不变, 故第 k 条支路 u_k 也不变(KVL)。

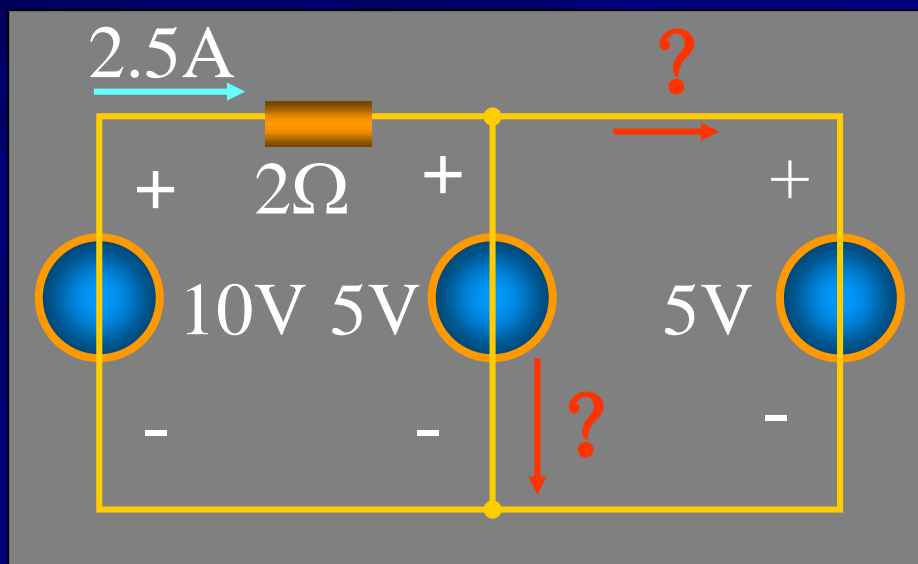


注意

① 替代定理既适用于线性电路, 也适用于非线性电路。

**注意****②替代后电路必须有唯一解。**

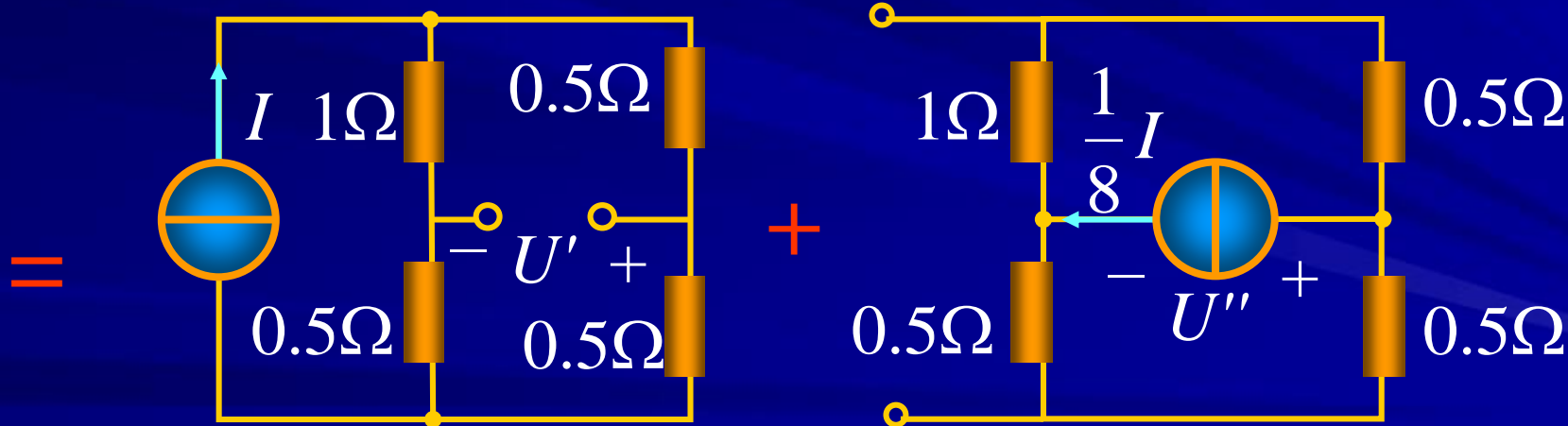
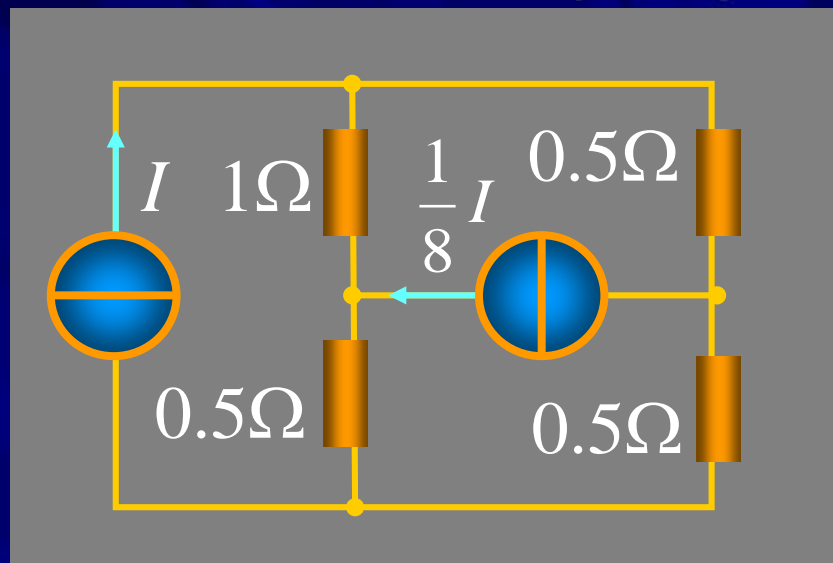
**无电压源回路；
无电流源结点(含广义结点)。**

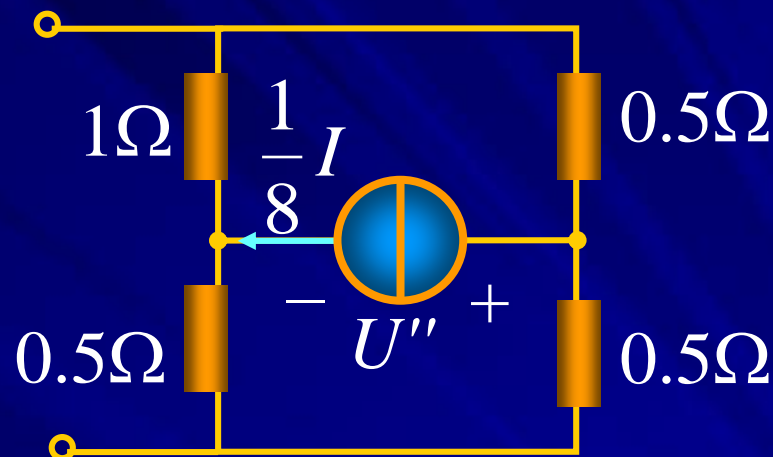
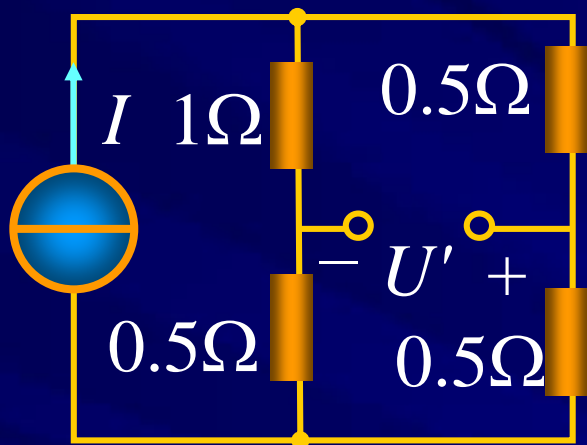
**③替代后其余支路及参数不能改变。**

3. 替代定理的应用

例1 若使 $I_x = \frac{1}{8}I$, 试求 R_x

解 用替代:





$$U' = \frac{1}{2.5} I \times 1 - \frac{1.5}{2.5} I \times 0.5 = 0.1I$$

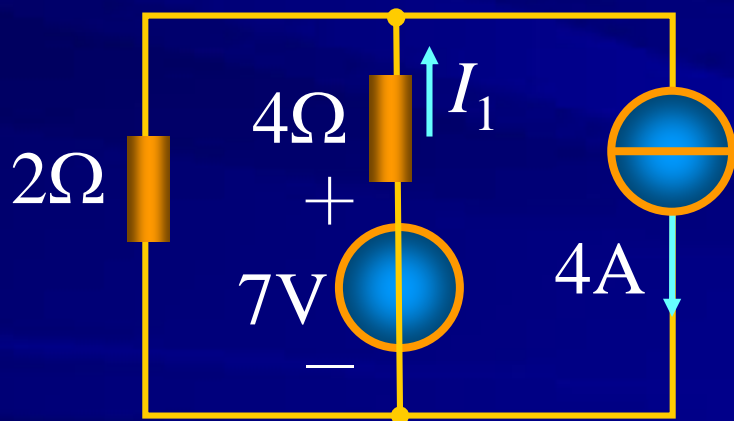
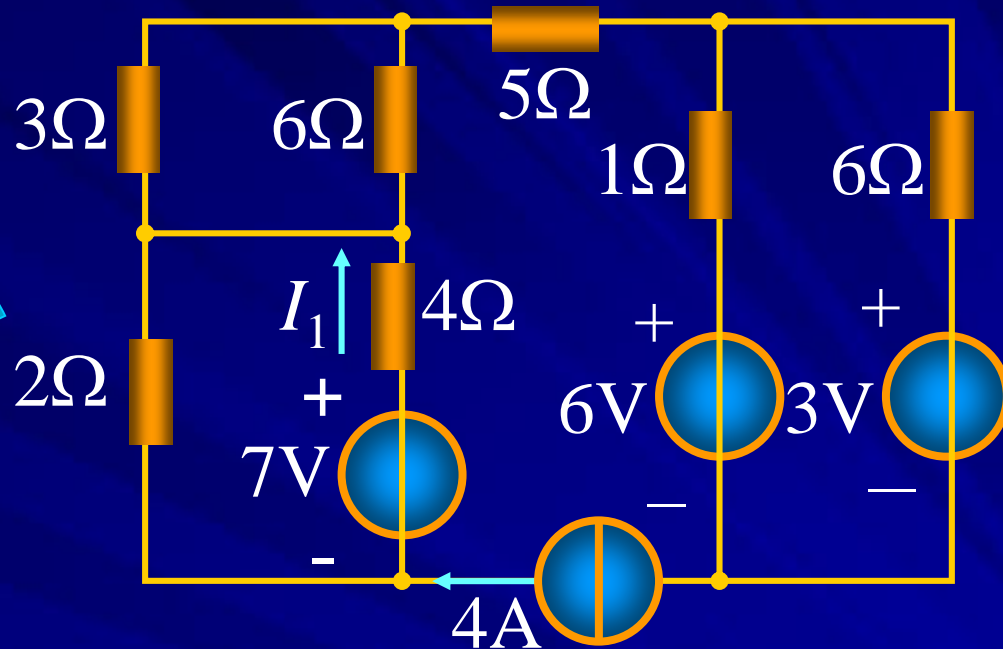
$$U'' = -\frac{1.5}{2.5} \times \frac{1}{8} I \times 1 = -0.075I$$

$$U = U' + U'' = (0.1 - 0.075)I = 0.025I$$

$$R_x = U / 0.125I = 0.025I / 0.125I = 0.2\Omega$$

例2 求电流 I_1

解 用替代:



$$I_1 = \frac{7}{6} + \frac{2 \times 4}{2 + 4} = \frac{15}{6} = 2.5\text{A}$$

例3 已知: $u_{ab}=0$, 求电阻 R

解 用替代:

$$u_{ab} = -3I + 3 = 0$$

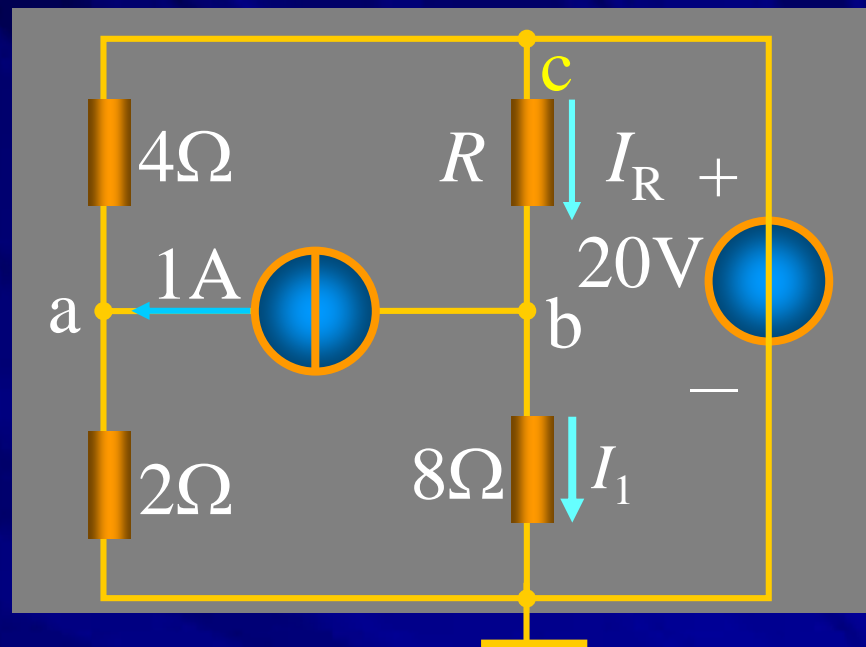
$$\Rightarrow I = 1A$$

用结点法:

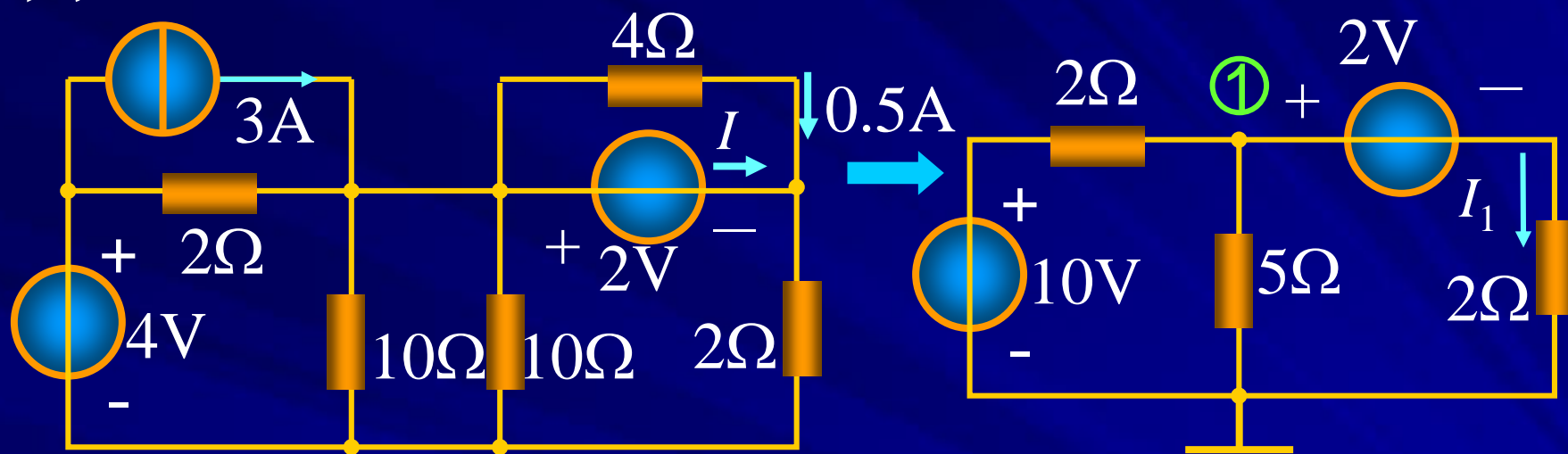
$$\text{a点} \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)u_a - \frac{1 \times 20}{4} = 1$$

$$\rightarrow u_a = u_b = 8V \quad I_1 = 1A \quad I_R = I_1 + 1 = 2A$$

$$u_R = u_C - u_b = 20 - 8 = 12V \quad R = \frac{12}{2} = 6\Omega$$



例4 用多大电阻替代2V电压源而不影响电路的工作



解 应求电流I，先化简电路。应用结点法得：

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)u_1 = \frac{10}{2} + \frac{2}{2} = 6 \rightarrow u_1 = 6/1.2 = 5V$$

$$I_1 = (5 - 2)/2 = 1.5A$$

$$I = 1.5 - 0.5 = 1A$$

$$R = 2/1 = 2\Omega$$

例5 已知: $u_{ab}=0$, 求电阻 R

解 $u_{ab} = 0$

$$\Rightarrow i_{ab} = i_{cd} = 0$$

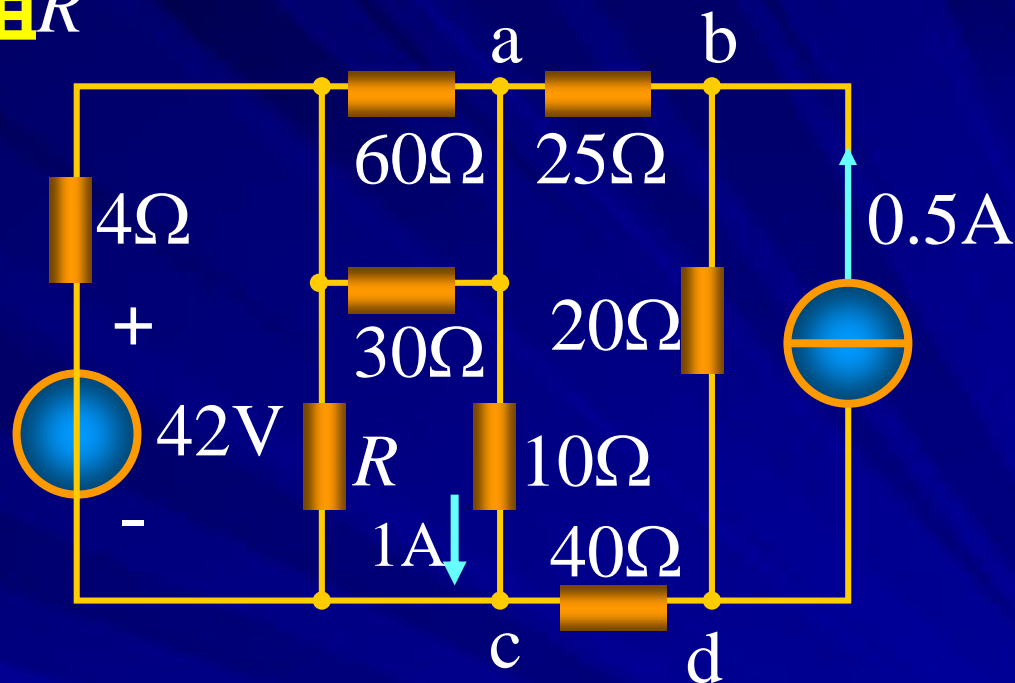
用开路替代, 得:

$$u_{bd} = 20 \times 0.5 = 10V$$

短路替代 $u_{ac} = 10V$

$$u_R = 20 \times 1 + 10 = 30V \quad i_R = (42 - 30) / 4 - 1 = 2A$$

$$R = \frac{u_R}{i_R} = \frac{30}{2} = 15\Omega$$

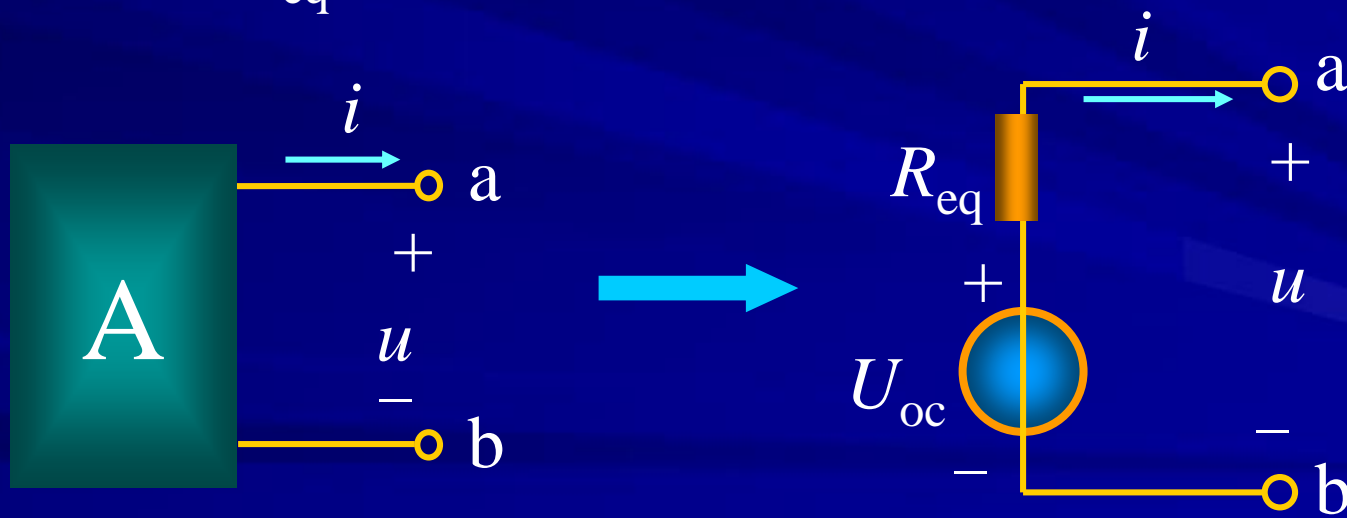


4.3 戴维宁定理和诺顿定理

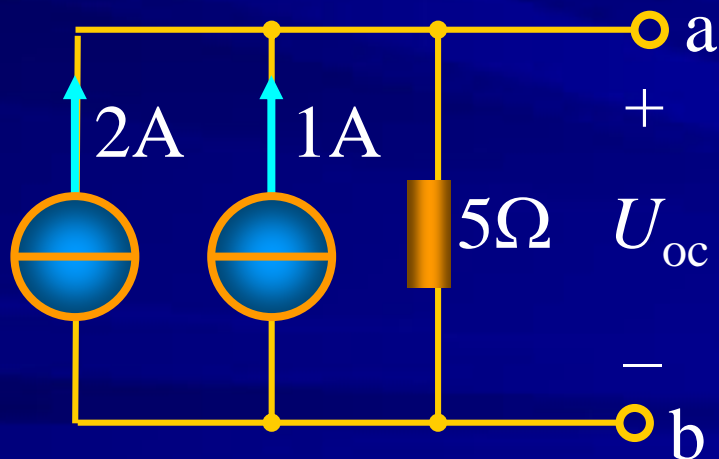
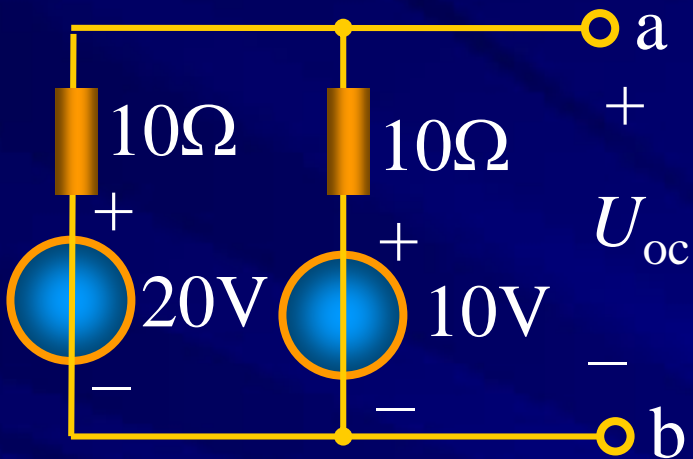
工程实际中，常常碰到只需研究某一支路的电压、电流或功率的问题。对所研究的支路来说，电路的其余部分就成为一个有源二端网络，可等效变换为较简单的含源支路(电压源与电阻串联或电流源与电阻并联支路)，使分析和计算简化。戴维宁定理和诺顿定理正是给出了等效含源支路及其计算方法。

1. 戴维宁定理

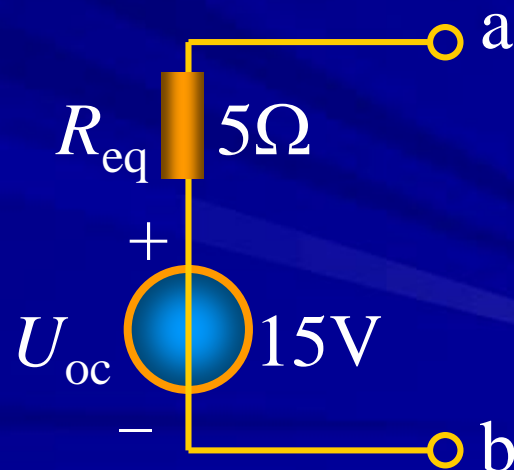
任何一个线性含源一端口网络，对外电路来说，总可以用一个电压源和电阻的串联组合来等效置换；此电压源的电压等于外电路断开时端口处的开路电压 U_{oc} ，而电阻等于一端口的输入电阻（或等效电阻 R_{eq} ）。



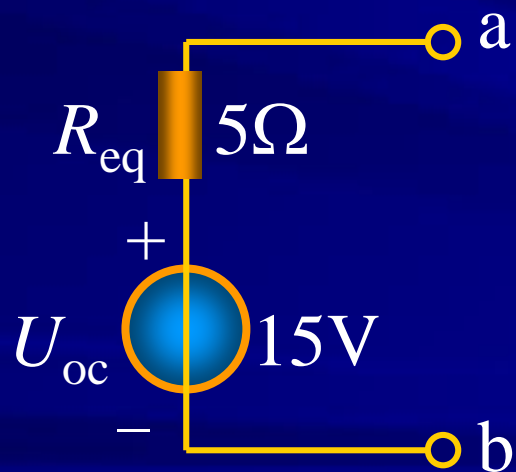
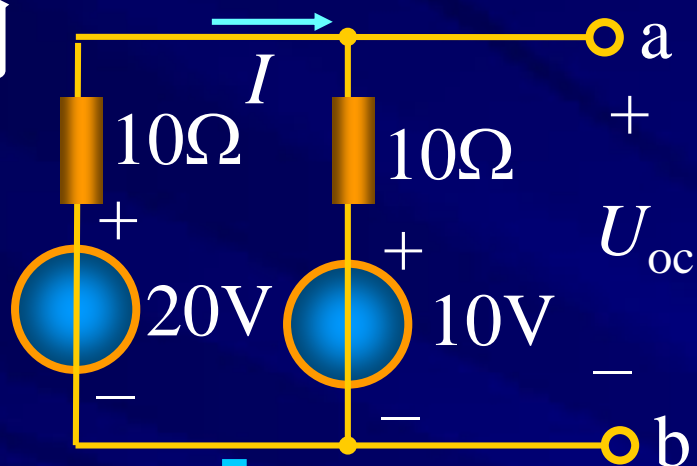
例



应用电源等效变换



例



应用戴维宁定理

(1) 求开路电压 U_{oc}

$$I = \frac{20 - 10}{20} = 0.5\text{A}$$

$$U_{oc} = 0.5 \times 10 + 10 = 15\text{V}$$

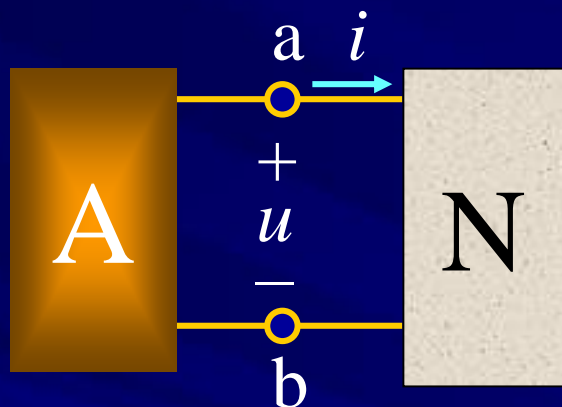
(2) 求输入电阻 R_{eq}

$$R_{eq} = 10 // 10 = 5\Omega$$

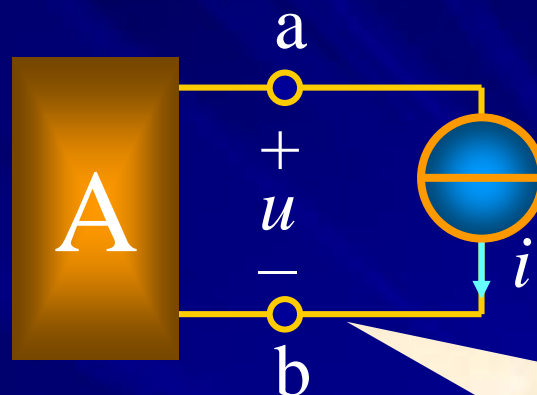


注意两种解法结果一致，戴维宁定理更具普遍性。

2. 定理的证明

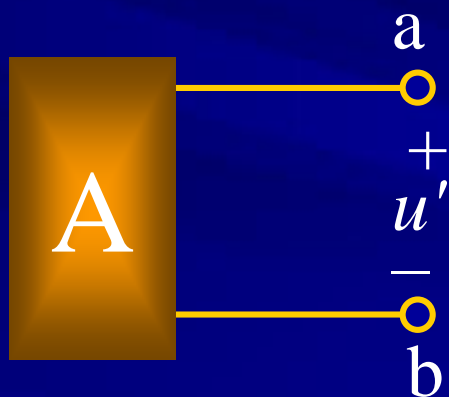


替代



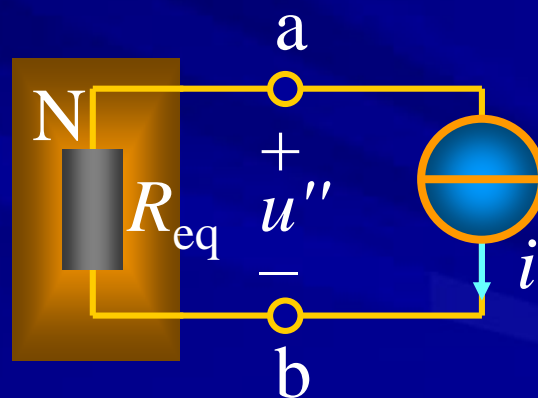
A中
独立源
置零

叠加



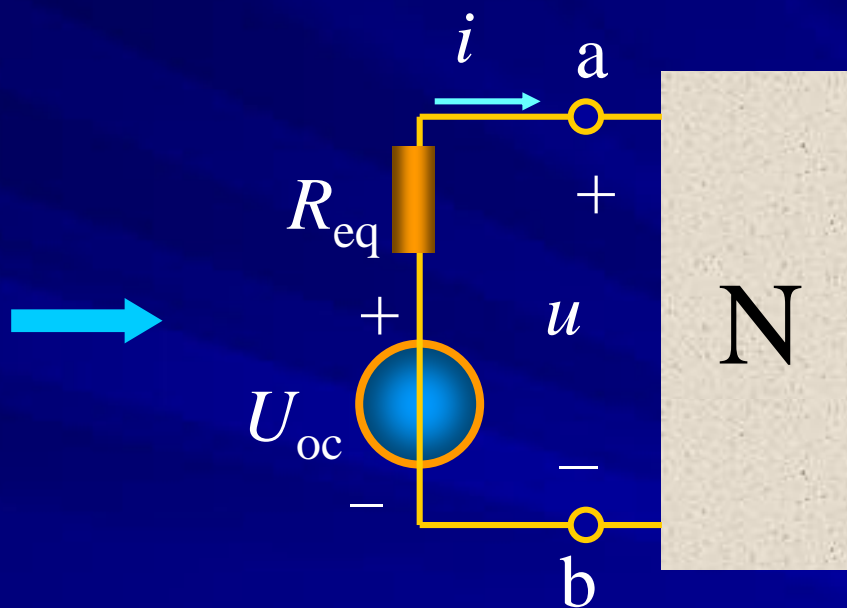
$$u' = u_{oc}$$

+



$$u'' = -R_{eq} i$$

$$u = u' + u'' = u_{oc} - R_{eq}i$$



3.定理的应用

(1) 开路电压 U_{oc} 的计算

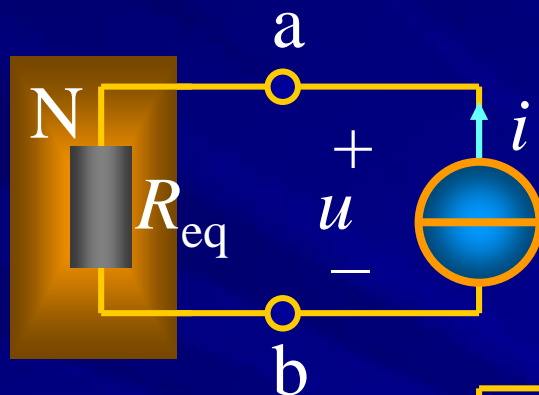
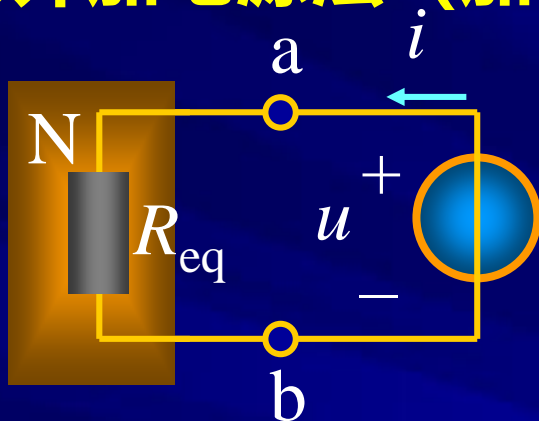
戴维宁等效电路中电压源电压等于将外电路断开时的开路电压 U_{oc} ，电压源方向与所求开路电压方向有关。计算 U_{oc} 的方法视电路形式选择前面学过的任意方法，使易于计算。

(2) 等效电阻的计算

等效电阻为将一端口网络内部独立电源全部置零(电压源短路，电流源开路)后，所得无源一端口网络的输入电阻。常用下列方法计算：

①当网络内部不含有受控源时可采用电阻串并联和 $\Delta - Y$ 互换的方法计算等效电阻；

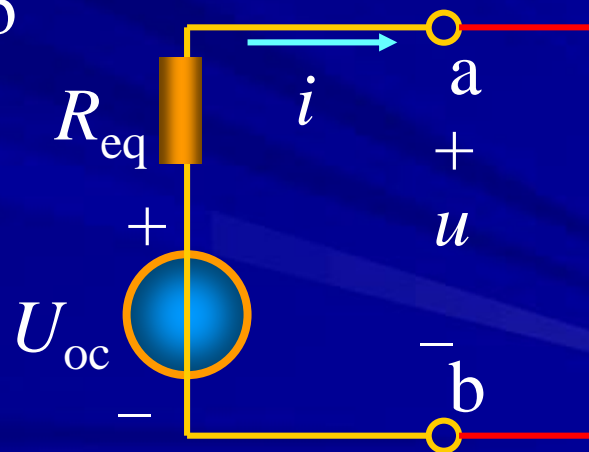
②外加电源法（加电压求电流或加电流求电压）；



$$R_{eq} = \frac{u}{i}$$

③开路电压，短路电流法。

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}}$$



② ③

方法更有一般性。

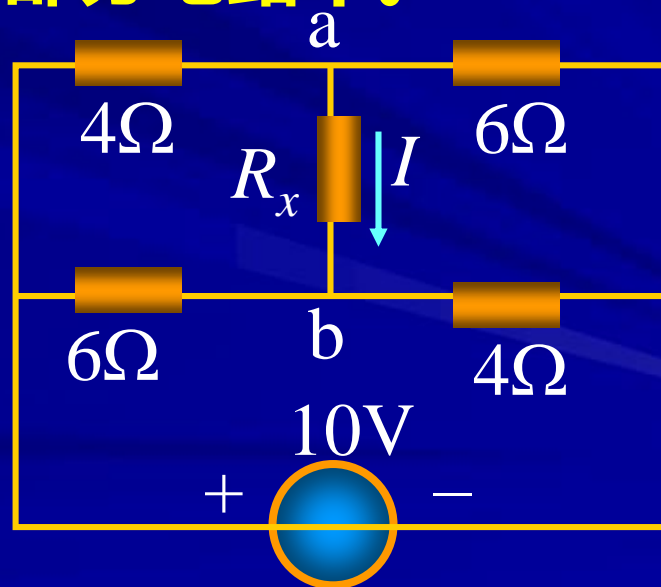
**注意**

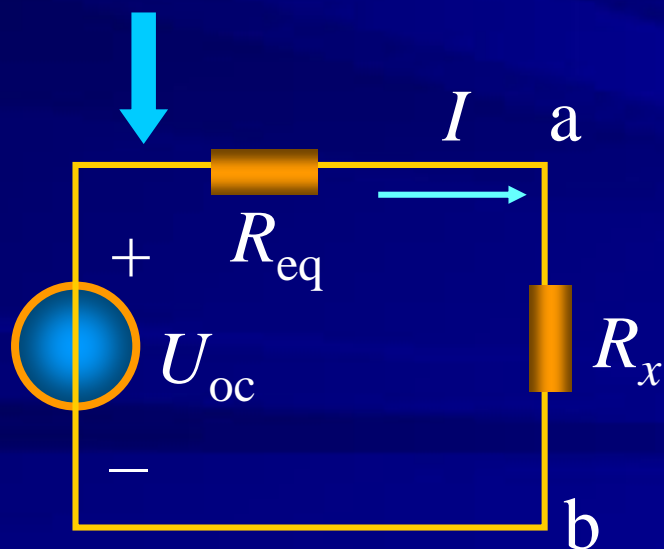
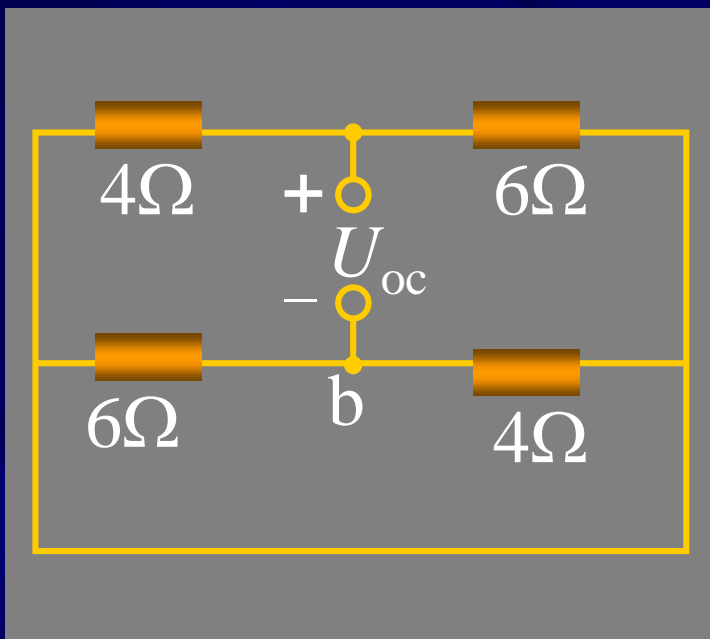
- ① 外电路可以是任意的线性或非线性电路，外电路发生改变时，含源一端口网络的等效电路不变(伏-安特性等效)。
- ② 当一端口内部含有受控源时，控制电路与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中。

例1 计算 R_x 分别为 1.2Ω 、 5.2Ω 时的电流/

解

断开 R_x 支路，将剩余一端口网络化为戴维宁等效电路：





①求开路电压

$$\begin{aligned} U_{oc} &= U_1 - U_2 \\ &= -10 \times 4 / (4 + 6) + 10 \times 6 / (4 + 6) \\ &= 6 - 4 = 2V \end{aligned}$$

②求等效电阻 R_{eq}

$$R_{eq} = 4 // 6 + 6 // 4 = 4.8\Omega$$

③ $R_x = 1.2\Omega$ 时,

$$I = U_{oc} / (R_{eq} + R_x) = 0.333A$$

$R_x = 5.2\Omega$ 时,

$$I = U_{oc} / (R_{eq} + R_x) = 0.2A$$

例2 求电压 U_o 解 ①求开路电压 U_{oc}

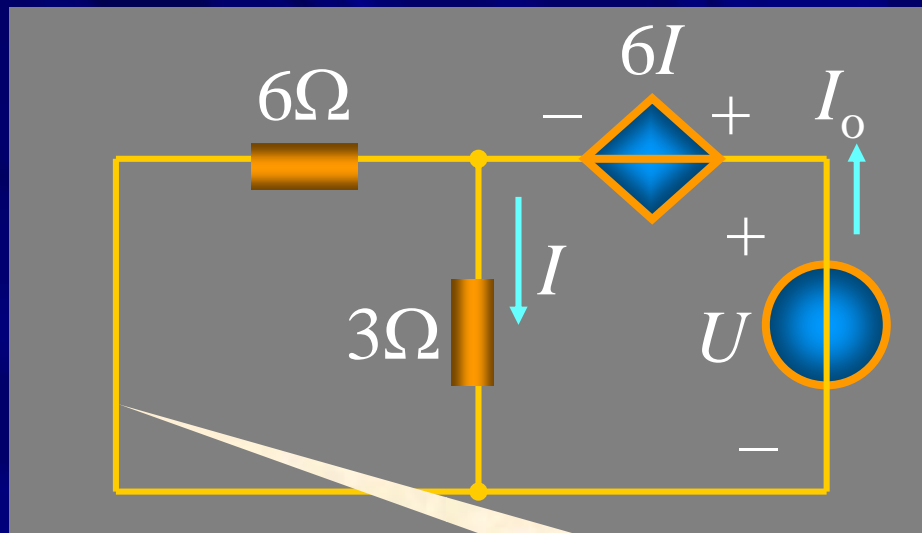
$$\begin{cases} U_{oc} = 6I + 3I \\ I = 9/9 = 1A \end{cases}$$

$$\longrightarrow U_{oc} = 9V$$

②求等效电阻 R_{eq}

方法1：加压求流

$$\begin{cases} U = 6I + 3I = 9I \\ I = I_o \times 6 / (6 + 3) = (2/3)I_o \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} U = 9 \times (2/3)I_o = 6I_o \\ R_{eq} = U / I_o = 6 \Omega \end{cases}$$



独立源置零

方法2：开路电压、短路电流

$$(U_{oc}=9V)$$

$$6I_1 + 3I = 9$$

$$6I + 3I = 0$$

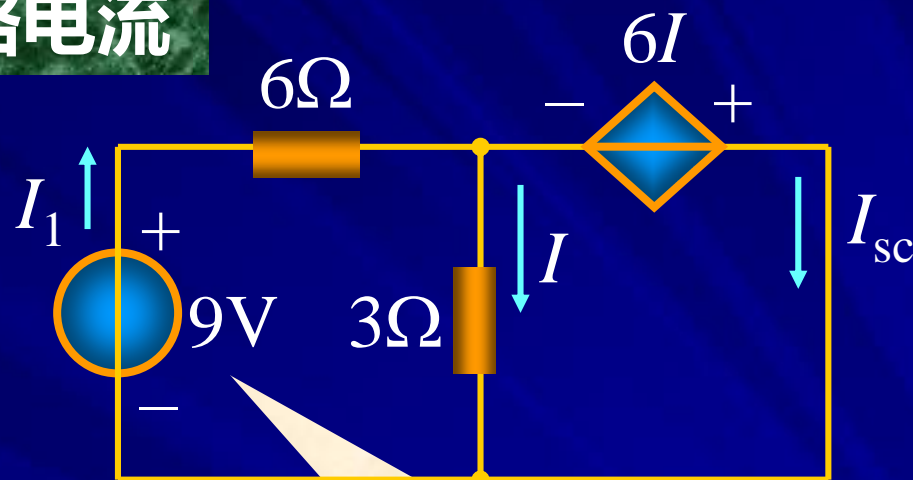
$$\rightarrow I = 0$$

$$I_{sc} = I_1 = 9/6 = 1.5A$$

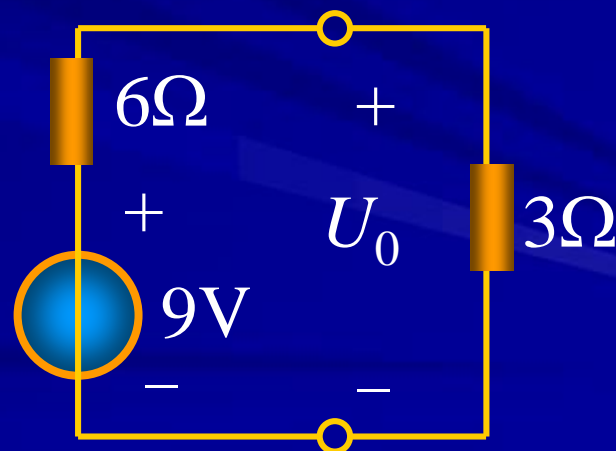
$$R_{eq} = U_{oc} / I_{sc} = 9/1.5 = 6 \Omega$$

③等效电路

$$U_0 = \frac{9}{6+3} \times 3 = 3V$$



独立源保留



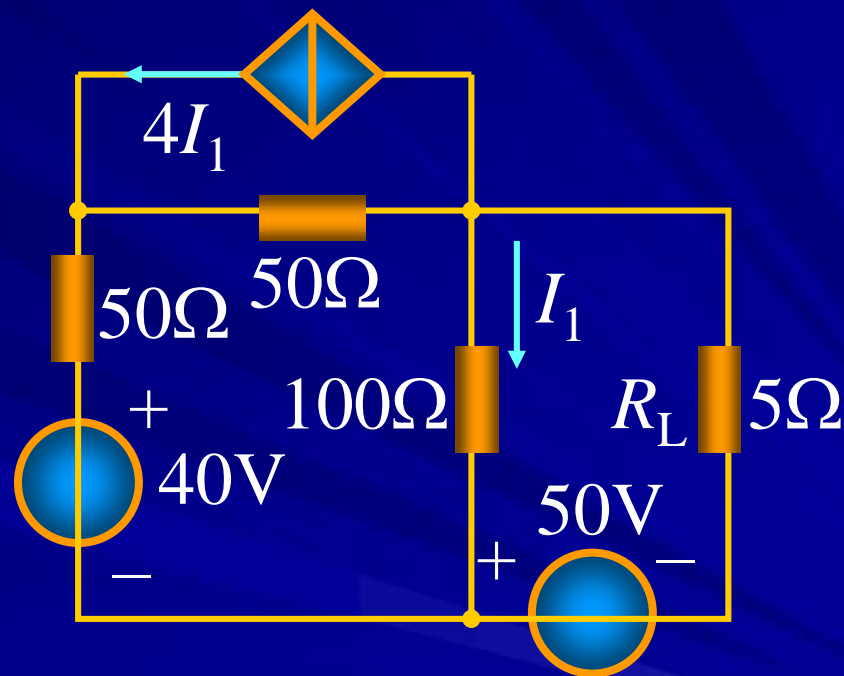
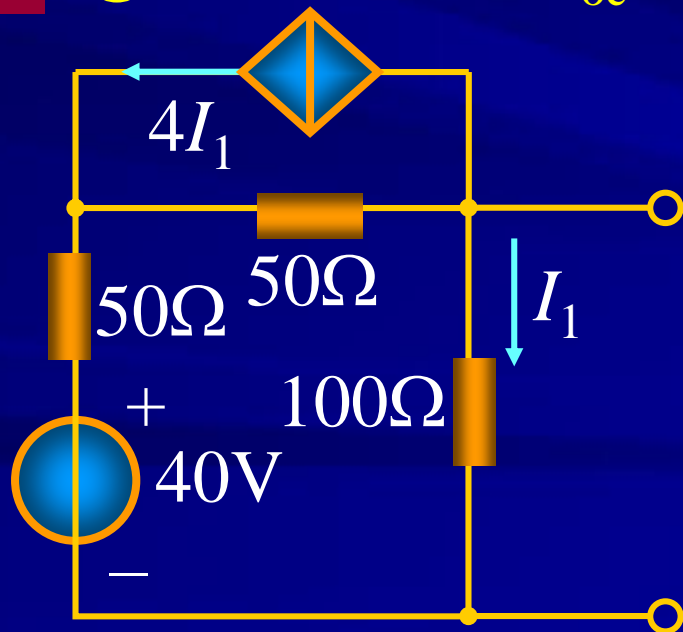


注意 算含受控源电路的等效电阻是用外加电源法还是开路、短路法，要具体问题具体分析，以计算简便为好。

例3 求负载 R_L 消耗的功率

解

①求开路电压 U_{oc}



$$100I_1 + 200I_1 + 100I_1 = 40$$

$$\rightarrow I_1 = 0.1\text{A}$$

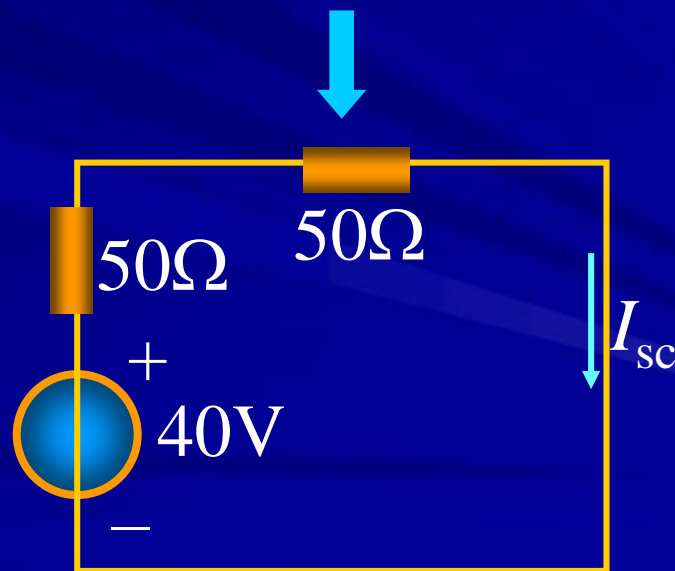
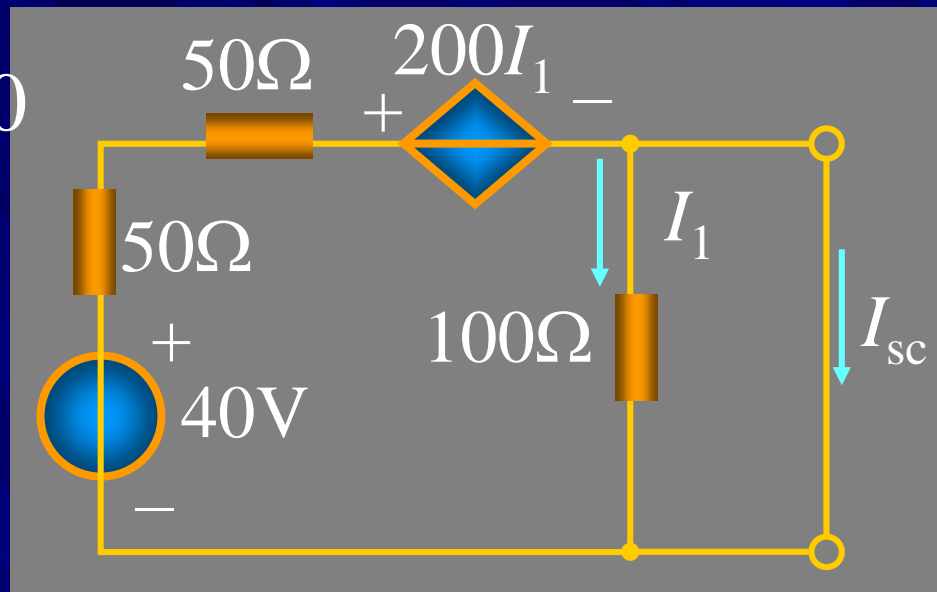
$$U_{oc} = 100I_1 = 10\text{V}$$

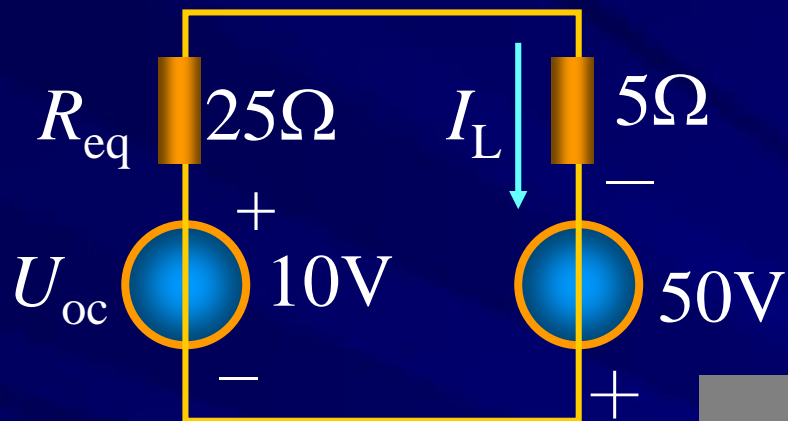
②求等效电阻 R_{eq}

用开路电压、短路电流法

$$I_{sc} = 40/100 = 0.4\text{A}$$

$$R_{eq} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = 10/0.4 = 25\Omega$$





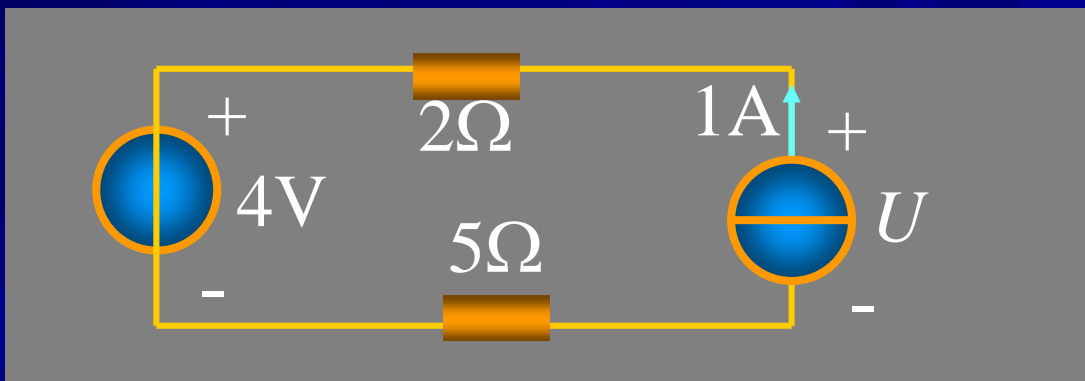
$$I_L = \frac{U_{oc} + 50}{25 + 5} = \frac{60}{30} = 2A$$

$$P_L = 5I_L^2 = 5 \times 4 = 20W$$

例4 已知开关S

→ 1 $\text{A} = 2A$

→ 2 $\text{V} = 4V$ 求开关S打向3, 电压 U 等于多少。



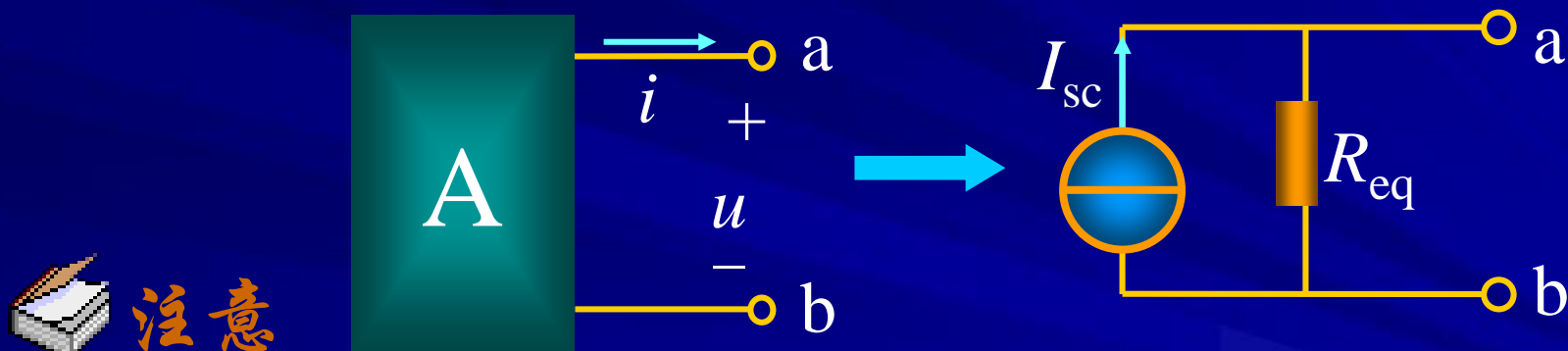
解

$$i_{Sc} = 2A \quad U_{oc} = 4V \rightarrow R_{eq} = 2\Omega$$

$$U = (2 + 5) \times 1 + 4 = 11V$$

4. 诺顿定理

任何一个含源线性一端口电路，对外电路来说，可以用一个电流源和电阻的并联组合来等效置换；电流源的电流等于该一端口的短路电流，电阻等于该一端口的输入电阻。



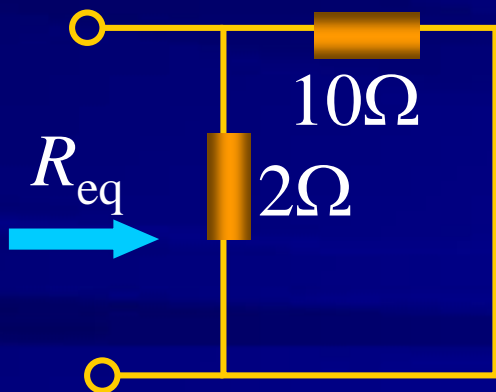
一般情况，诺顿等效电路可由戴维宁等效电路经电源等效变换得到。诺顿等效电路可采用与戴维宁定理类似的方法证明。

例1 求电流 I 解 ①求短路电流 I_{sc}

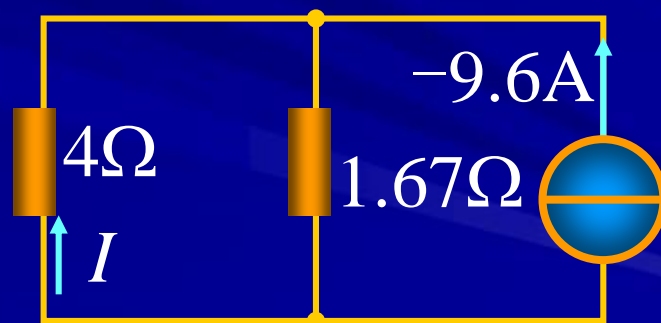
$$I_1 = 12/2 = 6A$$

$$I_2 = (24 + 12)/10 = 3.6A$$

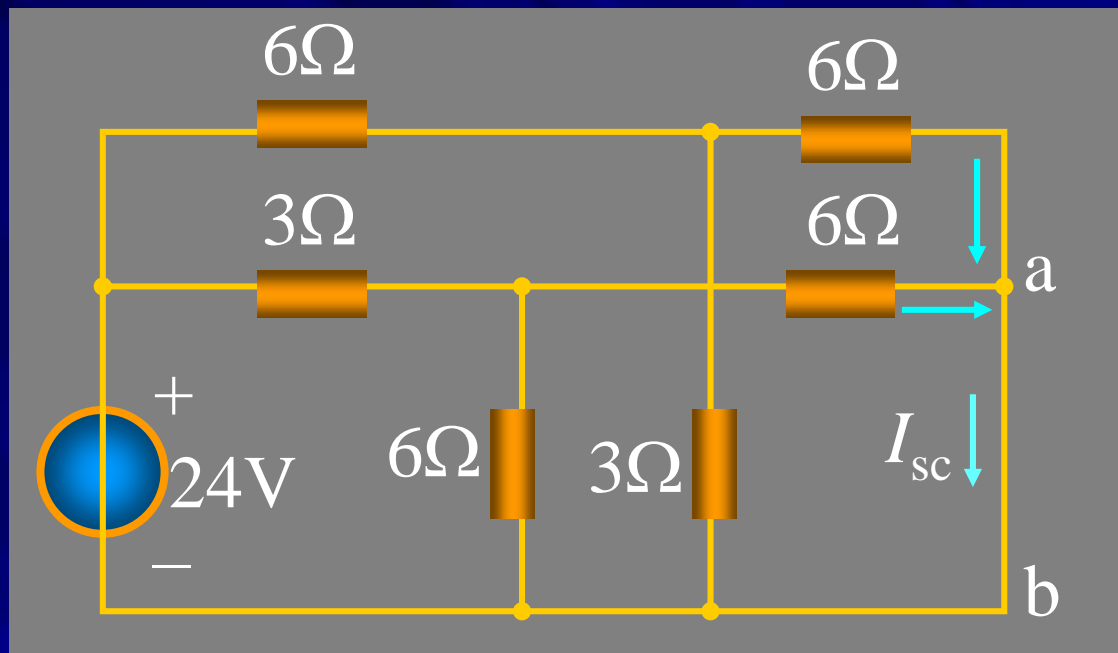
$$I_{sc} = -I_1 - I_2 = -3.6 - 6 = -9.6A \quad R_{eq} = 10 // 2 = 1.67 \Omega$$

②求等效电阻 R_{eq} 应用分
流公式

③诺顿等效电路:



$$I = 2.83A$$

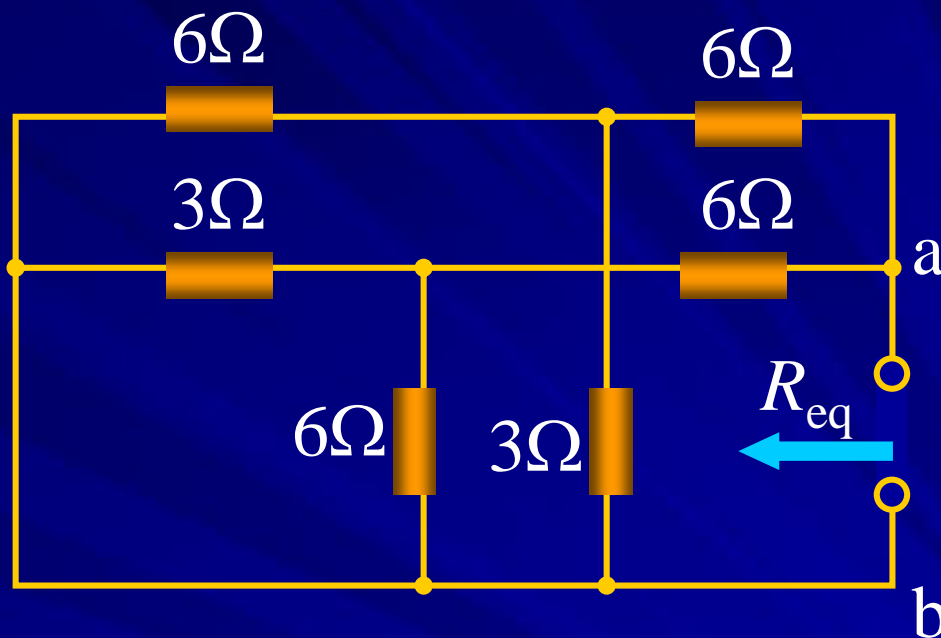
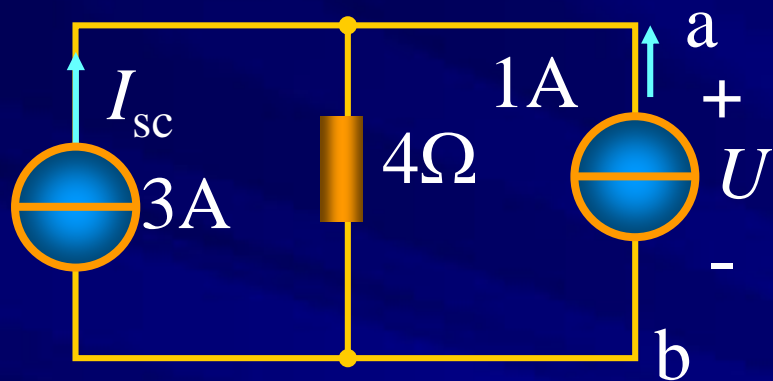
例2 求电压 U 

解 本题用诺顿定理求比较方便。因a、b处的短路电流比开路电压容易求。

①求短路电流 I_{sc}

$$I_{sc} = \frac{24}{6//6+3} \times \frac{1}{2} + \frac{24}{3//6+6} \times \frac{3}{3+6} = 3A$$

②求等效电阻 R_{eq}



$$R_{eq} = [6 // 3 + 6] // [3 // 6 + 6] = 4\Omega$$

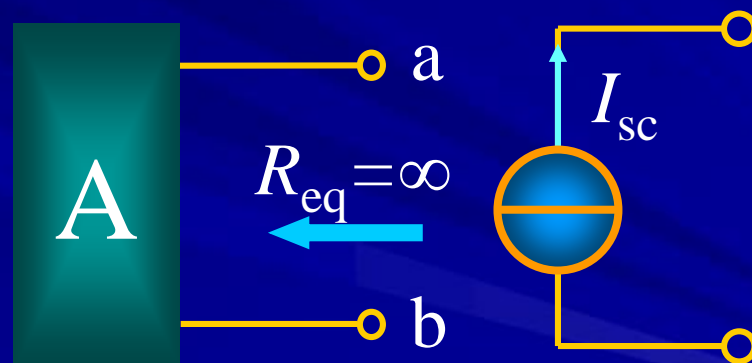
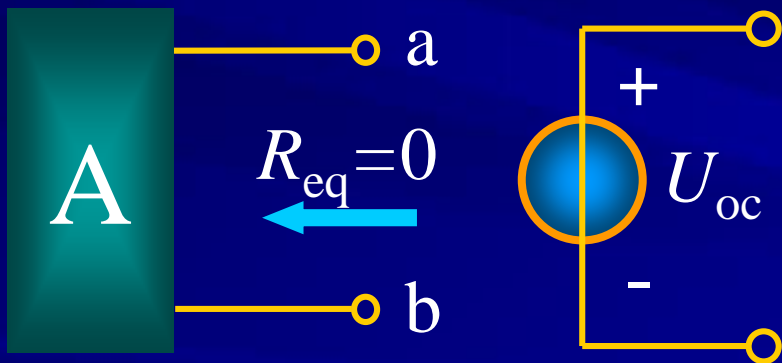
③诺顿等效电路:

$$U = (3 + 1) \times 4 = 16V$$



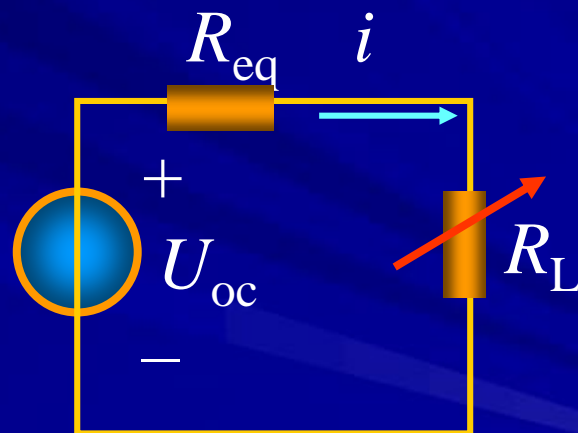
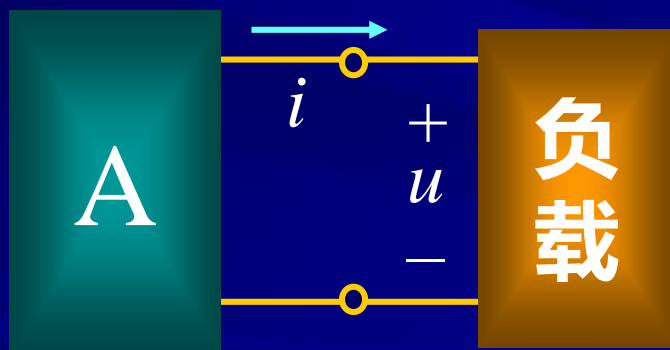
注意

- ①若一端口网络的等效电阻 $R_{eq}=0$ ，该一端口网络只有戴维宁等效电路，无诺顿等效电路。
- ②若一端口网络的等效电阻 $R_{eq}=\infty$ ，该一端口网络只有诺顿等效电路，无戴维宁等效电路。



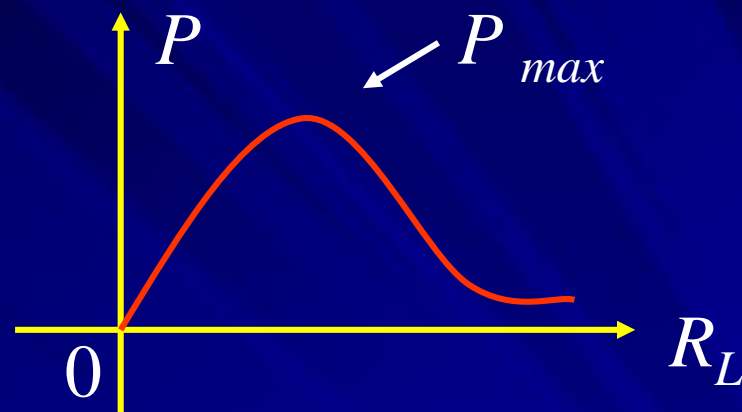
4.4 最大功率传输定理

一个含源线性一端口电路，当所接负载不同时，一端口电路传输给负载的功率就不同，讨论负载为何值时能从电路获取最大功率，及最大功率的值是多少的问题是有工程意义的。



应用戴维宁定理

$$P = R_L \left(\frac{u_{oc}}{R_{eq} + R_L} \right)^2 \quad \longrightarrow$$



对 P 求导:

$$P' = u_{oc}^2 \frac{(R_{eq} + R_L)^2 - 2R_L(R_{eq} + R_L)}{(R_{eq} + R_L)^4} = 0$$

$$\longrightarrow R_L = R_{eq}$$

$$\longrightarrow P_{\max} = \frac{u_{oc}^2}{4R_{eq}}$$

最大功率匹配条件

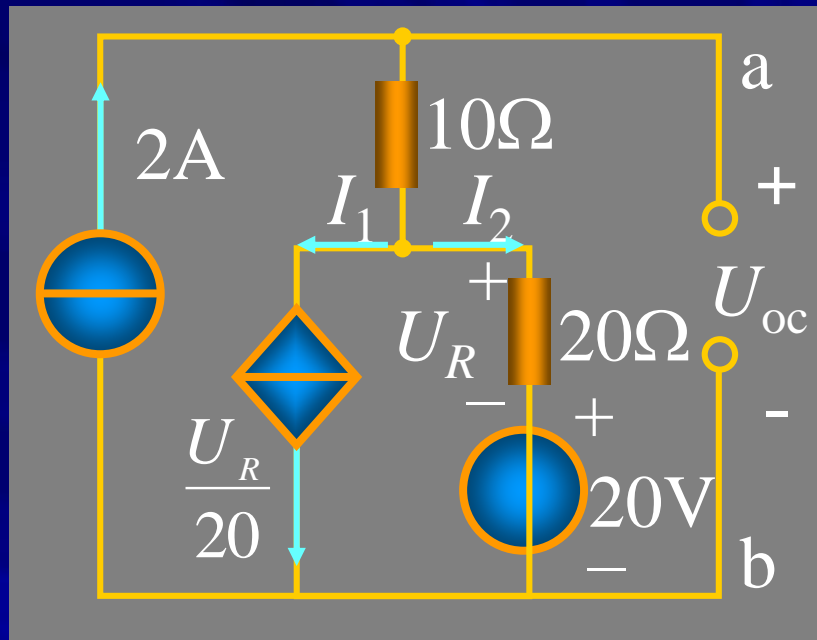
例 R_L 为何值时能获得最大功率，并求最大功率

解 ①求开路电压 U_{oc}

$$I_1 = I_2 = U_R / 20$$

$$I_1 + I_2 = 2A$$

→ $I_1 = I_2 = 1A$



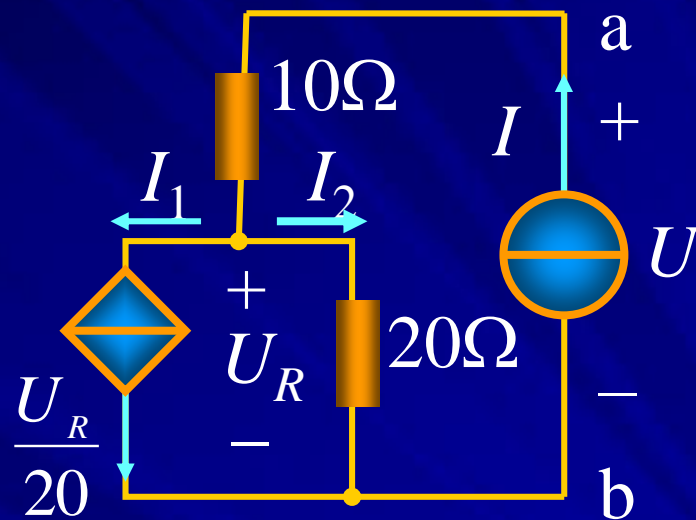
$$U_{oc} = 2 \times 10 + 20I_2 + 20 = 60V$$

②求等效电阻 R_{eq}

$$I_1 = I_2 = I/2$$

$$U = 10I + 20 \times I/2 = 20I$$

$$R_{eq} = \frac{U}{I} = 20\Omega$$



③由最大功率传输定理得:

$R_L = R_{eq} = 20\Omega$ 时其上可获得最大功率

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{60^2}{4 \times 20} = 45\text{W}$$



注意

- ① 最大功率传输定理用于一端口电路给定, 负载电阻可调的情况;
- ② 一端口等效电阻消耗的功率一般并不等于端口内部消耗的功率, 因此当负载获取最大功率时, 电路的传输效率并不一定是50%;
- ③ 计算最大功率问题结合应用戴维宁定理或诺顿定理最方便.

4.5* 特勒根定理

1. 特勒根定理1

任何时刻，一个具有 n 个结点和 b 条支路的集总电路，在支路电流和电压取关联参考方向下，满足：

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0$$

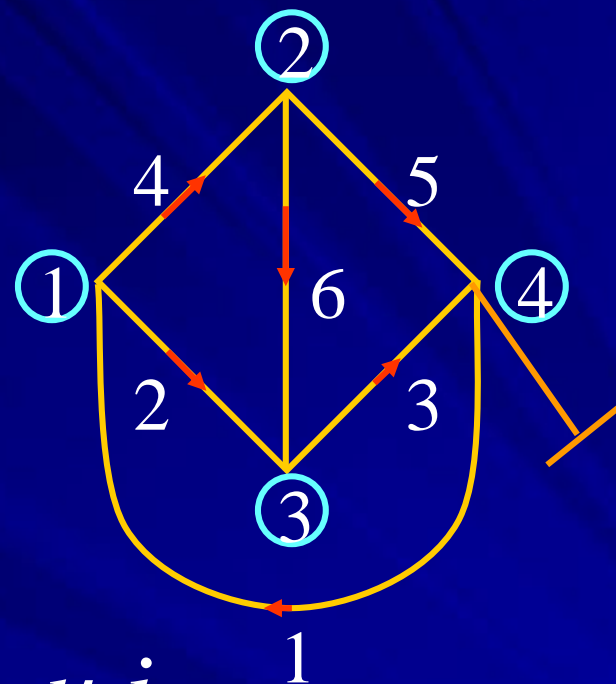
功率守恒



表明 任何一个电路的全部支路吸收的功率之和恒等于零。

定理证明: 应用KCL:

$$\begin{cases} \textcircled{1} & -i_1 + i_2 + i_4 = 0 \\ \textcircled{2} & -i_4 + i_5 + i_6 = 0 \\ \textcircled{3} & -i_2 + i_3 - i_6 = 0 \end{cases}$$



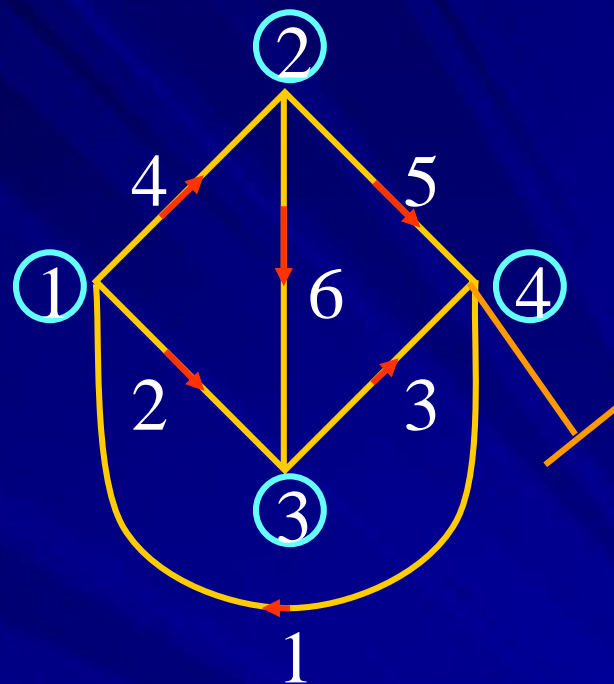
$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = u_1 i_1 + u_2 i_2 + \cdots + u_6 i_6$$

$$= -u_{n1} i_1 + (u_{n1} - u_{n3}) i_2 + u_{n3} i_3 +$$

$$(u_{n1} - u_{n2}) i_4 + u_{n2} i_5 + (u_{n2} - u_{n3}) i_6$$

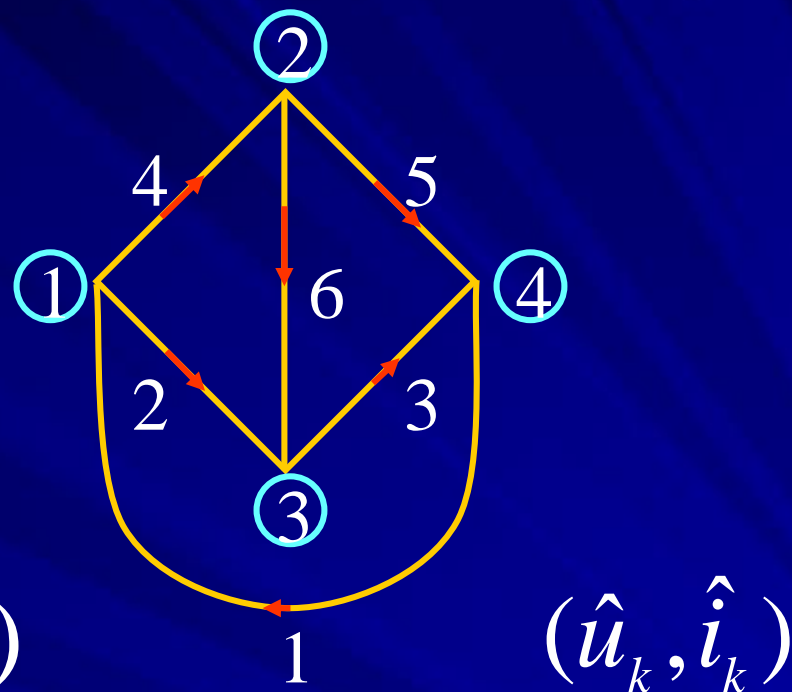
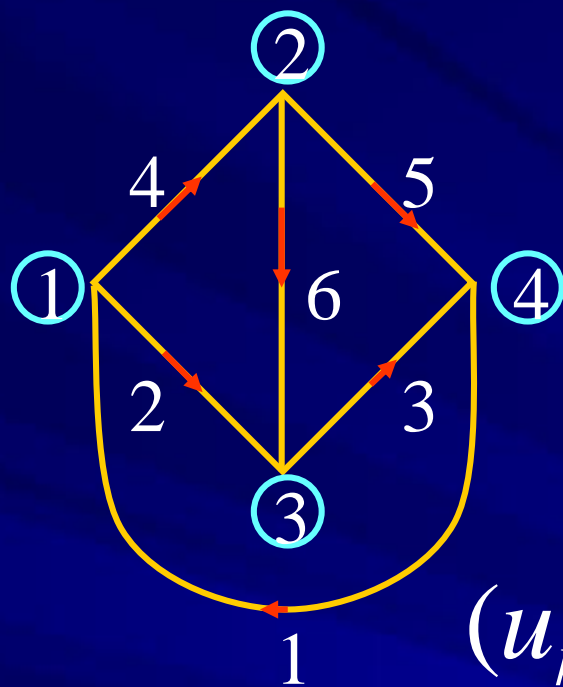
支路电压用结点电压表示

$$\begin{aligned}
 &= u_{n1}(-i_1 + i_2 + i_4) \\
 &\quad + u_{n2}(-i_4 + i_5 + i_6) \\
 &\quad + u_{n3}(-i_2 + i_3 - i_6) = 0
 \end{aligned}$$



2. 特勒根定理2

任何时刻，对于两个具有 n 个结点和 b 条支路的集总电路，当它们具有相同的图，但由内容不同的支路构成，在支路电流和电压取关联参考方向下，满足：



$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = 0$$

拟功率定理

$$\sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = 0$$

定理证明:

对电路2应用KCL:

$$\begin{cases} \textcircled{1} & -\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_4 = 0 \\ \textcircled{2} & -\hat{i}_4 + \hat{i}_5 + \hat{i}_6 = 0 \\ \textcircled{3} & -\hat{i}_2 + \hat{i}_3 - \hat{i}_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k &= u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \cdots + u_6 \hat{i}_6 \\ &\stackrel{=}{=} -u_{n1} \hat{i}_1 + (u_{n1} - u_{n3}) \hat{i}_2 + u_{n3} \hat{i}_3 + \\ &\quad (u_{n1} - u_{n2}) \hat{i}_4 + u_{n2} \hat{i}_5 + (u_{n2} - u_{n3}) \hat{i}_6 \\ &\stackrel{=}{=} u_{n1} (-\hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_4) + u_{n2} (-\hat{i}_4 + \hat{i}_5 + \hat{i}_6) \\ &\quad + u_{n3} (-\hat{i}_2 + \hat{i}_3 - \hat{i}_6) = 0 \end{aligned}$$

例1 ① $R_1=R_2=2\Omega$, $U_s=8V$ 时, $I_1=2A$, $U_2=2V$

② $R_1=1.4\Omega$, $R_2=0.8\Omega$, $U_s=9V$ 时, $I_1=3A$, 求此时的 U_2

解 把两种情况看成是结构相同, 参数不同的两个电路, 利用特勒根定理2

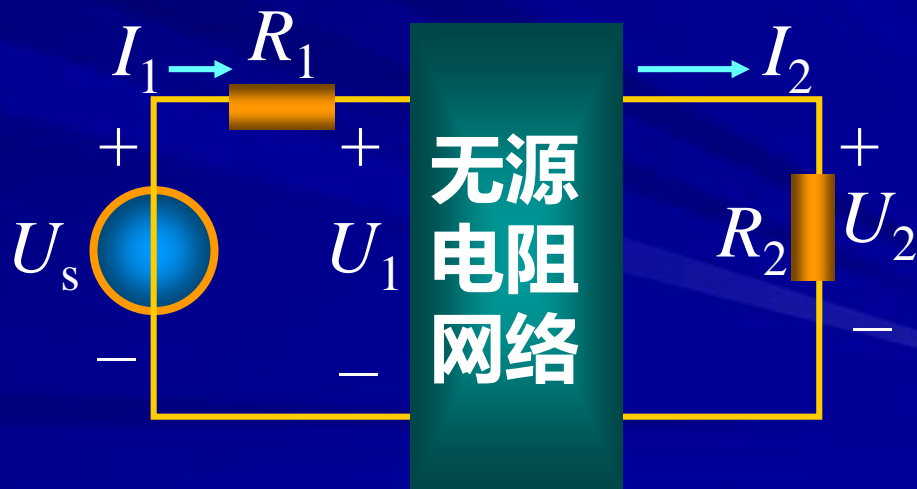
由(1)得: $U_1=4V$, $I_1=2A$, $U_2=2V$, $I_2=U_2/R_2=1A$

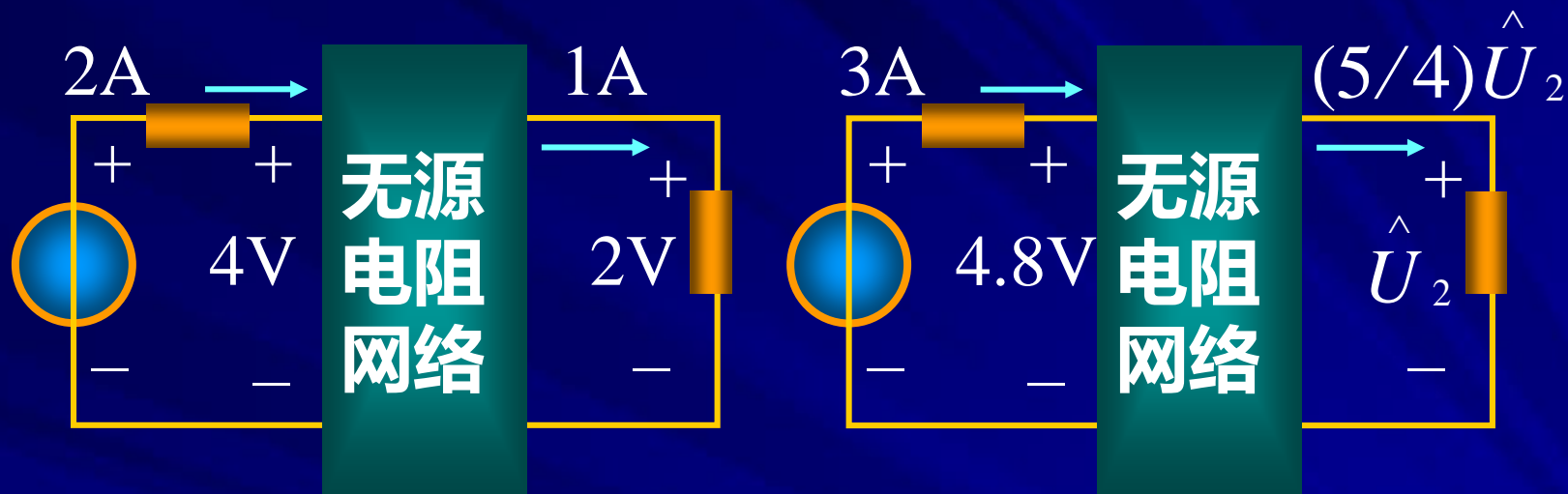
由(2)得:

$$\hat{U}_1 = 9 - 3 \times 1.4 = 4.8V$$

$$\hat{I}_1 = 3A$$

$$\hat{I}_2 = \hat{U}_2 / R_2 = (5/4)\hat{U}_2$$





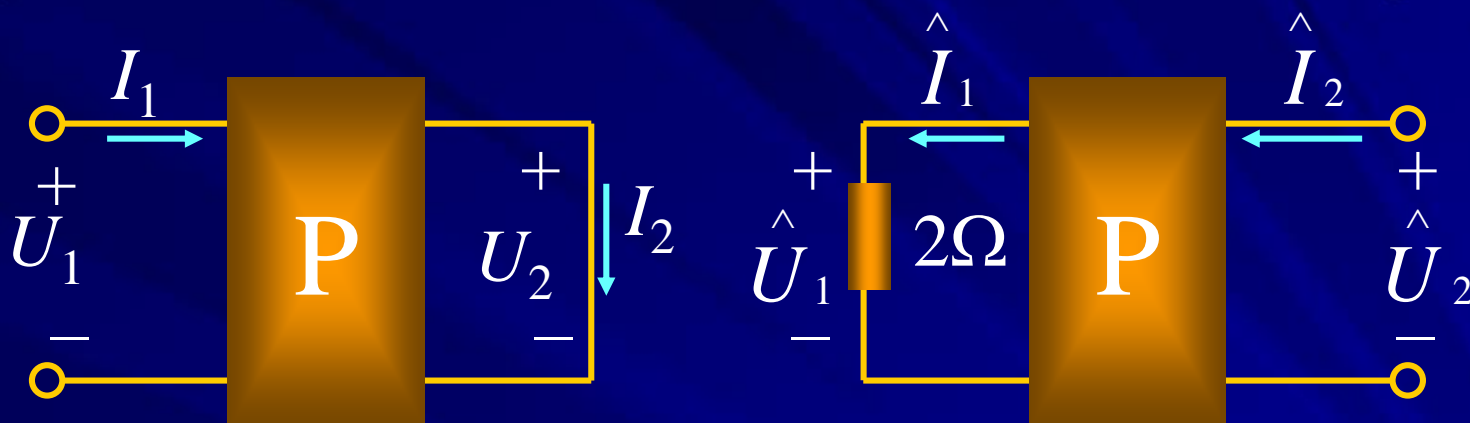
$$U_1(-\hat{I}_1) + U_2 \hat{I}_2 + \sum_{k=3}^b R_k \hat{I}_k I_k = \hat{U}_1(-I_1) + \hat{U}_2 I_2 + \sum_{k=3}^b R_k \hat{I}_k I_k$$

(负号是因为 U_1, I_1 的方向不同)

$$-4 \times 3 + 2 \times 1.25 \hat{U}_2 = -4.8 \times 2 + \hat{U}_2 \times 1$$

$$\hat{U}_2 = 2.4 / 1.5 = 1.6 \text{V}$$

例2



已知: $U_1=10\text{V}, I_1=5\text{A}, U_2=0, I_2=1\text{A}$ $\hat{U}_2=10\text{V}$ 求 \hat{U}_1 .

解

$$\begin{cases} U_1 \hat{I}_1 + U_2 (-\hat{I}_2) = \hat{U}_1 (-I_1) + \hat{U}_2 I_2 \\ \hat{U}_1 = 2 \hat{I}_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} U_1 \times \frac{\hat{U}_1}{2} = \hat{U}_1 (-I_1) + \hat{U}_2 I_2 \\ 10 \times \frac{\hat{U}_1}{2} = \hat{U}_1 \times (-5) + 10 \times 1 \end{cases} & \rightarrow \hat{U}_1 = 1\text{V} \end{aligned}$$

**注意****应用特勒根定理：**

- ①电路中的支路电压必须满足KVL;
- ②电路中的支路电流必须满足KCL;
- ③电路中的支路电压和支路电流必须满足关联参考方向; (否则公式中加负号)
- ④定理的正确性与元件的特征全然无关。

4.6* 互易定理

互易性是一类特殊的线性网络的重要性质。一个具有互易性的网络在输入端（激励）与输出端（响应）互换位置后，同一激励所产生的响应并不改变。具有互易性的网络叫互易网络，互易定理是对电路的这种性质所进行的概括，它广泛的应用于网络的灵敏度分析和测量技术等方面。

1. 互易定理

对一个仅含电阻的二端口电路 N_R ，其中一个端口加激励源，一个端口作响应端口，在只有一个激励源的情况下，当激励与响应互换位置时，同一激励所产生的响应相同。

● 情况1

激励

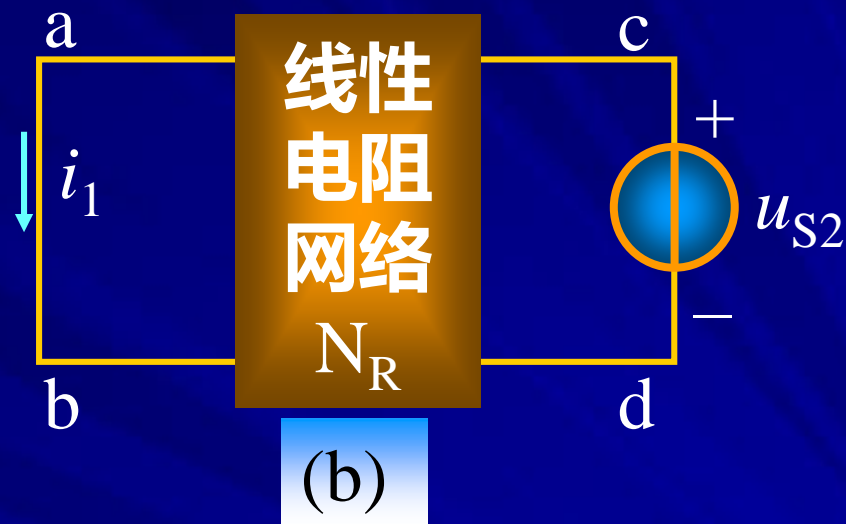
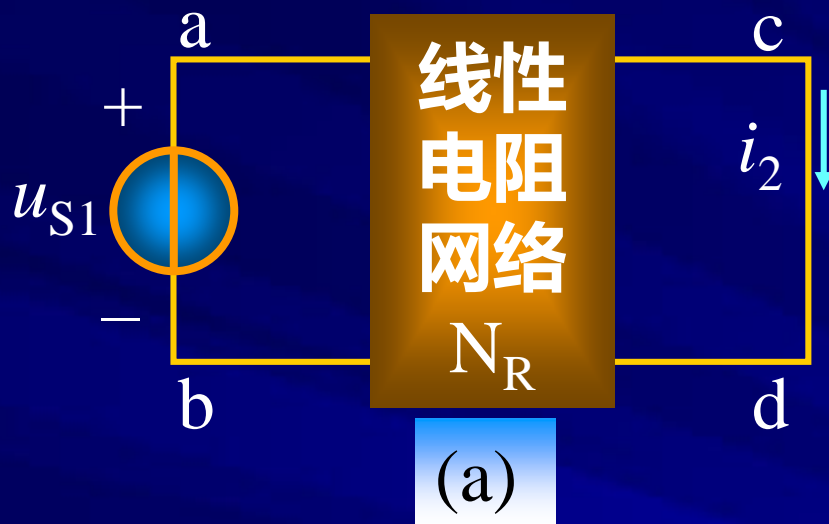


电压源

响应



电流



则端口电压电流满足关系:

$$\frac{i_2}{u_{S1}} = \frac{i_1}{u_{S2}} \quad \text{或} \quad u_{S1} i_1 = u_{S2} i_2$$



注意

当

$$u_{S1} = u_{S2}$$

时,

$$i_2 = i_1$$

证明: 由特勒根定理: $\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = 0$ 和 $\sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = 0$

即:
$$\sum_{k=1}^b u_k \hat{i}_k = u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^b u_k \hat{i}_k$$
$$= u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 + \sum_{k=3}^b R_k i_k \hat{i}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^b \hat{u}_k i_k = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^b \hat{u}_k i_k$$
$$= \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2 + \sum_{k=3}^b R_k i_k \hat{i}_k = 0$$

两式相减, 得: $u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$

将图(a)与图(b)中端口条件代入, 即:

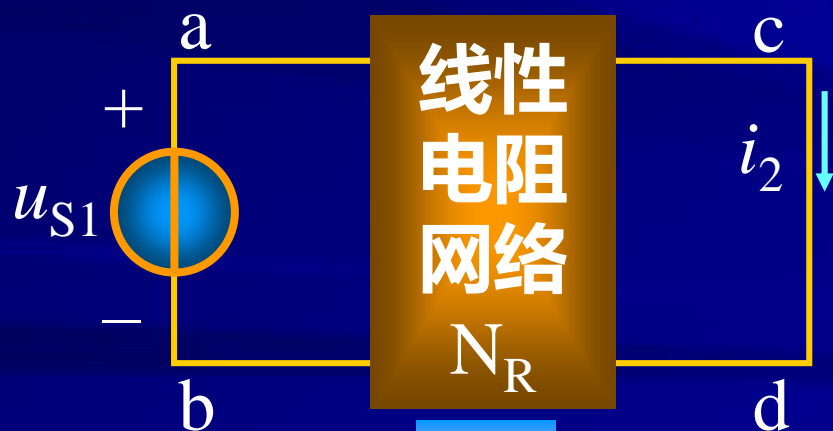
$$u_1 = u_{s1}, u_2 = 0, \quad u_1 = 0, u_2 = u_{s2}$$

$$u_{s1} i_1 + 0 \times \hat{i}_2 = 0 \times i_1 + u_{s2} i_2$$

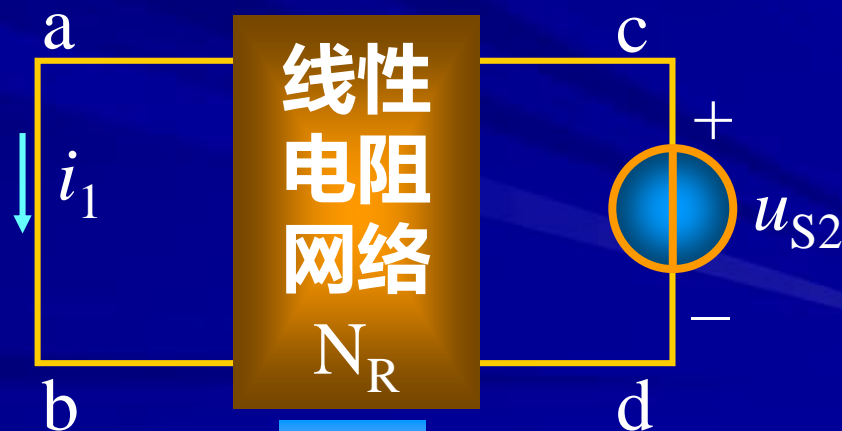
即:

$$\frac{i_2}{u_{s1}} = \frac{i_1}{u_{s2}} \quad \text{或} \quad u_{s1} i_1 = u_{s2} i_2$$

证毕!



(a)



(b)

● 情况2

激励



电流源

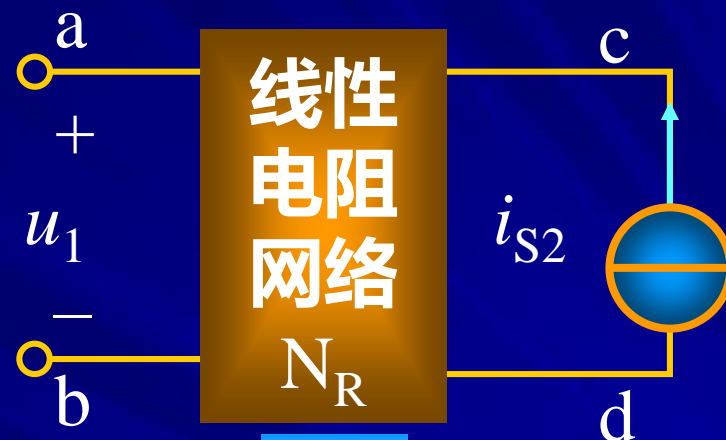
响应



电压



(a)



(b)

则端口电压电
流满足关系:

$$\frac{u_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{i_{S2}} \quad \text{或} \quad u_1 i_{S1} = u_2 i_{S2}$$



注意

当 $i_{S1} = i_{S2}$ 时, $u_2 = u_1$

● 情况3

激励

图a

图b

电流源

电压源

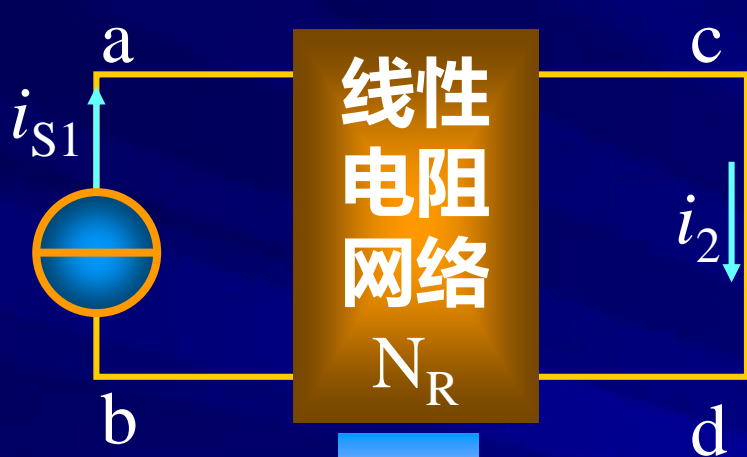
响应

图a

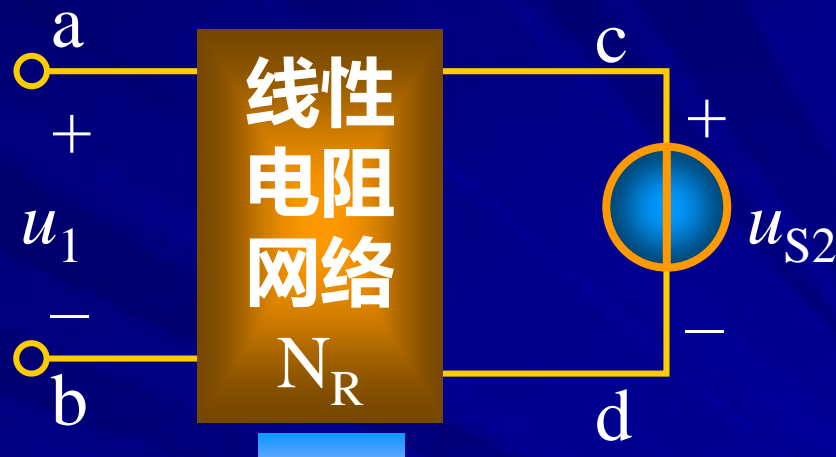
图b

电流

电压



(a)



(b)

则端口电压电流在数值上满足关系:

$$\frac{i_2}{i_{S1}} = \frac{u_1}{u_{S2}} \quad \text{或} \quad u_1 i_{S1} = u_{S2} i_2$$



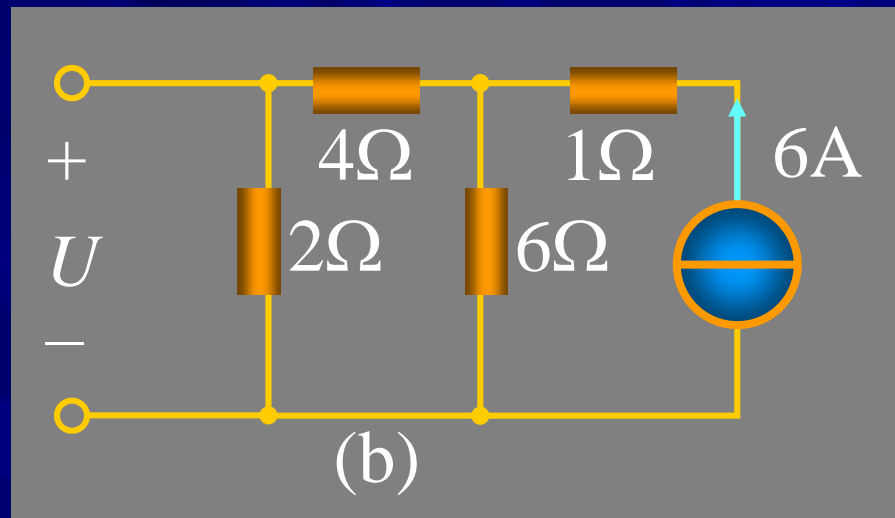
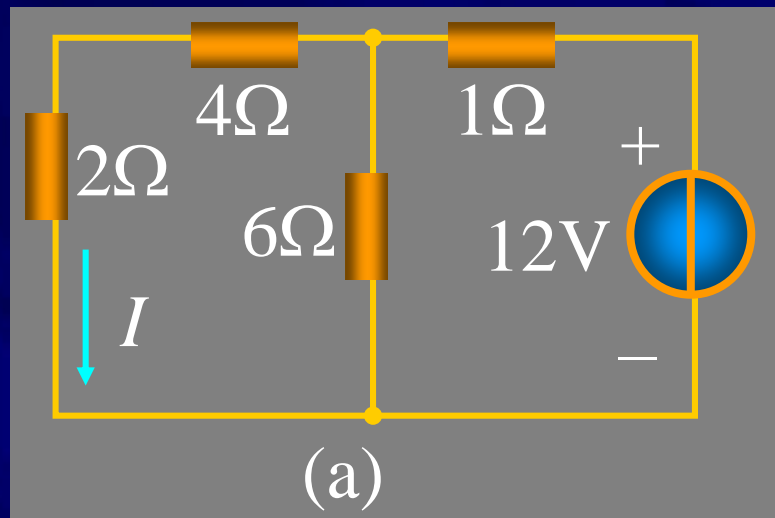
注意

当 $i_{S1} = u_{S2}$ 时, $i_2 = u_1$

应用互易定理分析电路时应注意：

- ① 互易前后应保持网络的拓扑结构不变，仅理想电源搬移；
- ② 互易前后端口处的激励和响应的极性保持一致（要么都关联，要么都非关联）；
- ③ 互易定理只适用于线性电阻网络在单一电源激励下，端口两个支路电压电流关系。
- ④ 含有受控源的网络，互易定理一般不成立。

例1 求(a)图电流 I , (b)图电压 U



解 利用互易定理

$$I = \frac{12}{1 + 6 // 6} \times \frac{1}{2} = 1.5 \text{ A}$$

$$U = 3 \times 2 = 6 \text{ V}$$

例2 求电流 I

解 利用互易定理

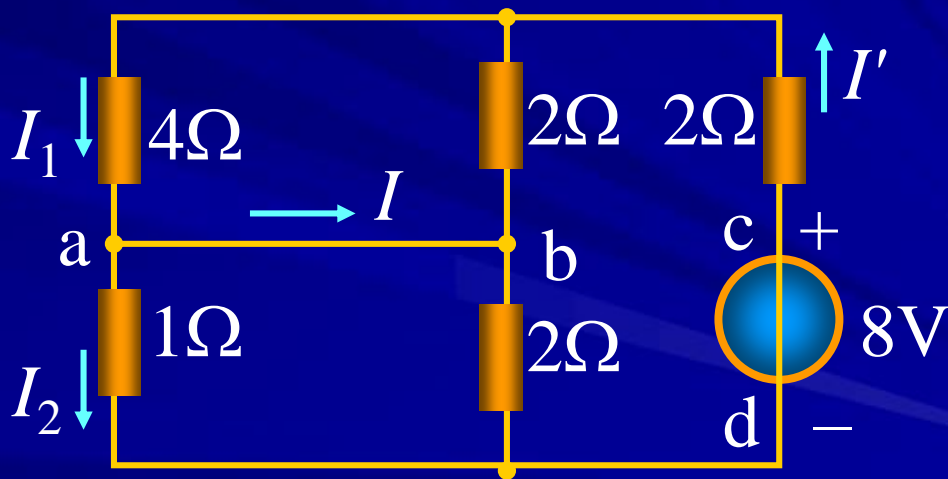
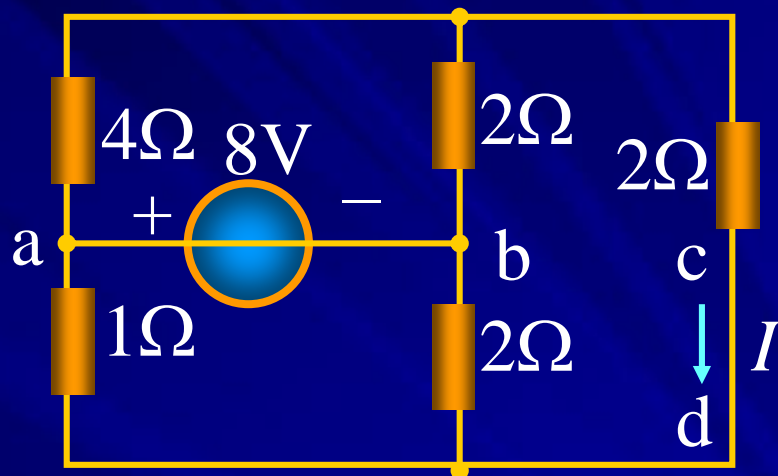
$$I' = \frac{8}{2 + 4 // 2 + 1 // 2}$$

$$= \frac{8}{4} = 2\text{A}$$

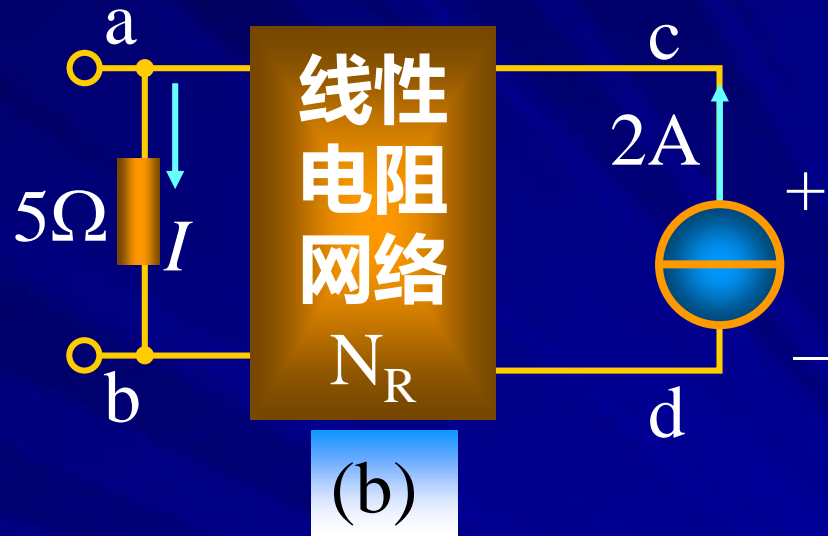
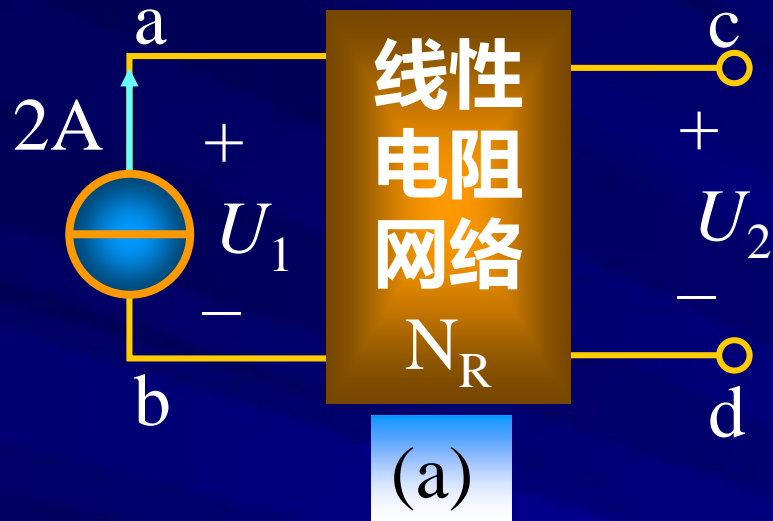
$$I_1 = I' \times 2 / (4 + 2) = 2/3\text{A}$$

$$I_2 = I' \times 2 / (1 + 2) = 4/3\text{A}$$

$$I = I_1 - I_2 = -2/3\text{A}$$



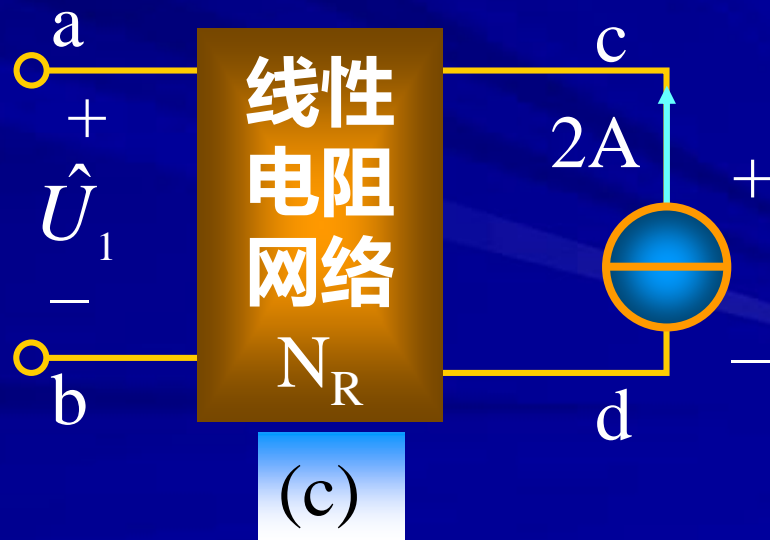
例3 测得a图中 $U_1=10V$, $U_2=5V$, 求b图中的电流 I

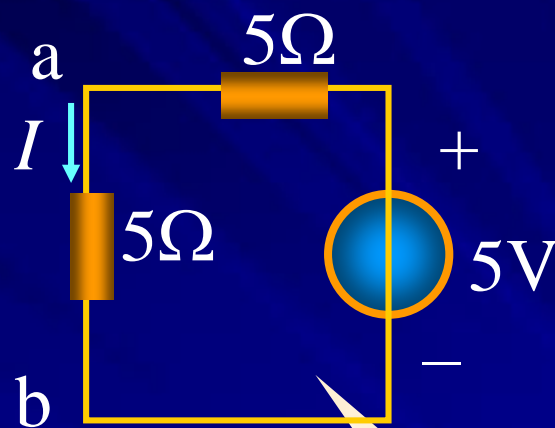
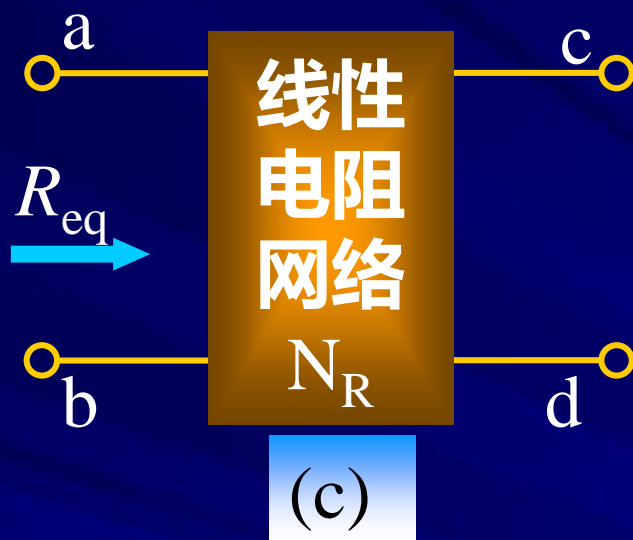


解1

①利用互易定理知c图的

$\hat{u}_1 = 5V$ (开路电压)



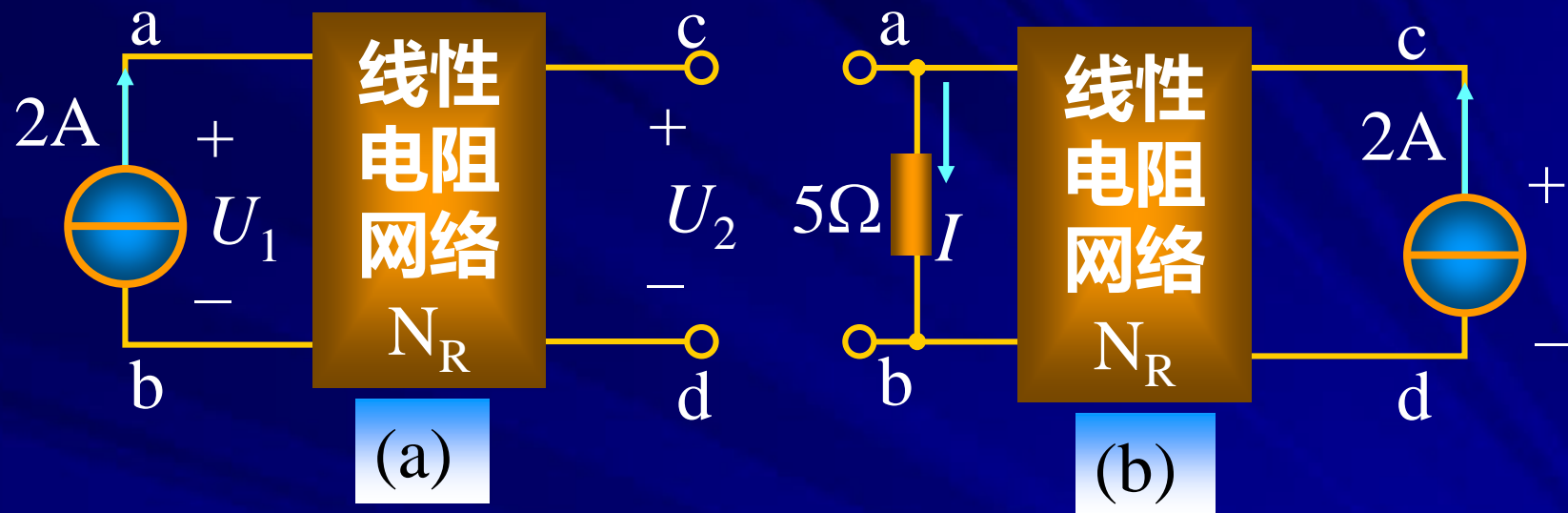


戴维宁等效电路

②结合a图，知c图的等效电阻：

$$R_{eq} = \frac{u_1}{2} = \frac{10}{2} = 5\Omega$$

$$\rightarrow I = \frac{5}{5+5} = 0.5A$$



解2 应用特勒根定理:

$$u_1 \hat{i}_1 + u_2 \hat{i}_2 = \hat{u}_1 i_1 + \hat{u}_2 i_2$$

$$10 \hat{i}_1 + 5 \times (-2) = 5 \hat{i}_1 \times (-2) + \hat{u}_2 \times 0$$

$$\longrightarrow \hat{i}_1 = I = 0.5A$$

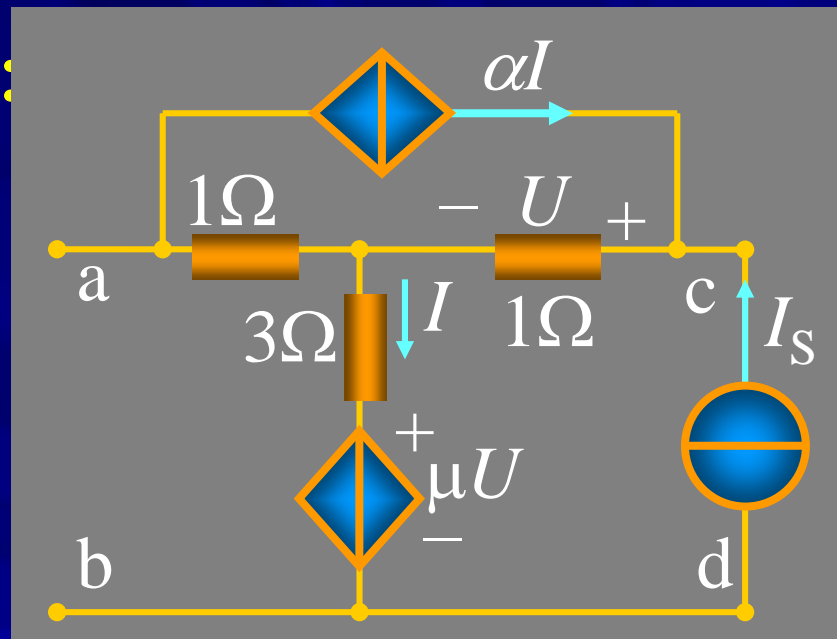
例4 问图示电路 α 与 μ 取何关系时电路具有互易性

解 在a-b端加电流源，解得：

$$\begin{aligned} U_{cd} &= U + 3I + \mu U \\ &= (\mu + 1)\alpha I + 3I \\ &= [(\mu + 1)\alpha + 3]I_s \end{aligned}$$

在c-d端加电流源，解得：

$$\begin{aligned} U_{ab} &= -\alpha I + 3I + \mu U = (3 - \alpha)I + \mu(I_s + \alpha I) \\ &= (\mu + 3 - \alpha + \mu\alpha)I_s \end{aligned}$$



如要电路具有互易性，则： $U_{ab} = U_{cd}$

$$\rightarrow [(\mu + 1)\alpha + 3] = (\mu + 3 - \alpha + \mu\alpha)$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{\mu}{2}$$



结论

一般有受控源的电路不具有互易性。

4.7* 对偶原理

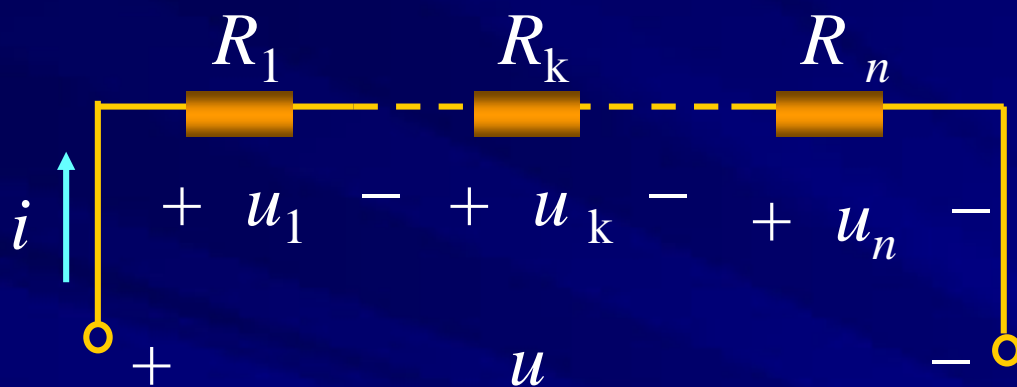
1. 对偶原理

在对偶电路中，某些元素之间的关系(或方程)可以通过对偶元素的互换而相互转换。对偶原理是电路分析中出现的大量相似性的归纳和总结。

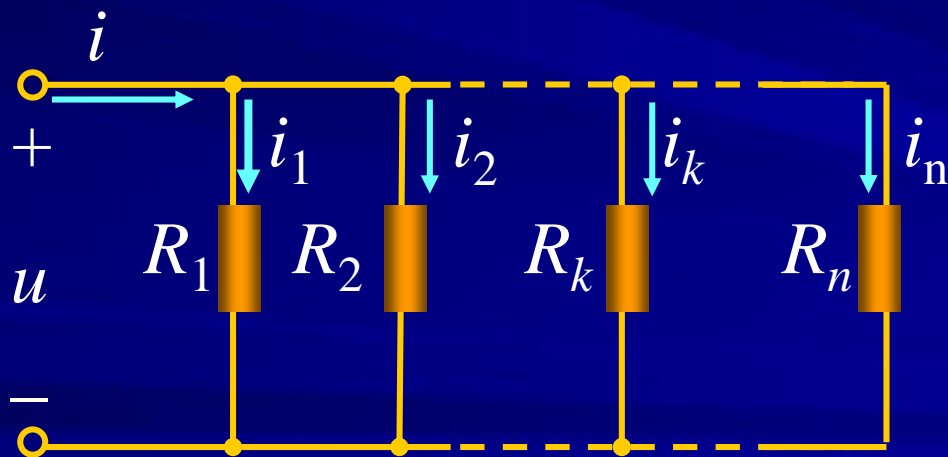
2. 对偶原理的应用

根据对偶原理，如果在某电路中导出某一关系式和结论，就等于解决了和它对偶的另一个电路中的关系式和结论。

例1 串联电路和并联电路的对偶



$$\left. \begin{array}{l} \text{总电阻} \quad R = \sum_{k=1}^n R_k \\ \text{电流} \quad i = \frac{u}{R} \\ \text{分压公式} \quad u_k = \frac{R_k}{R} u \end{array} \right\}$$



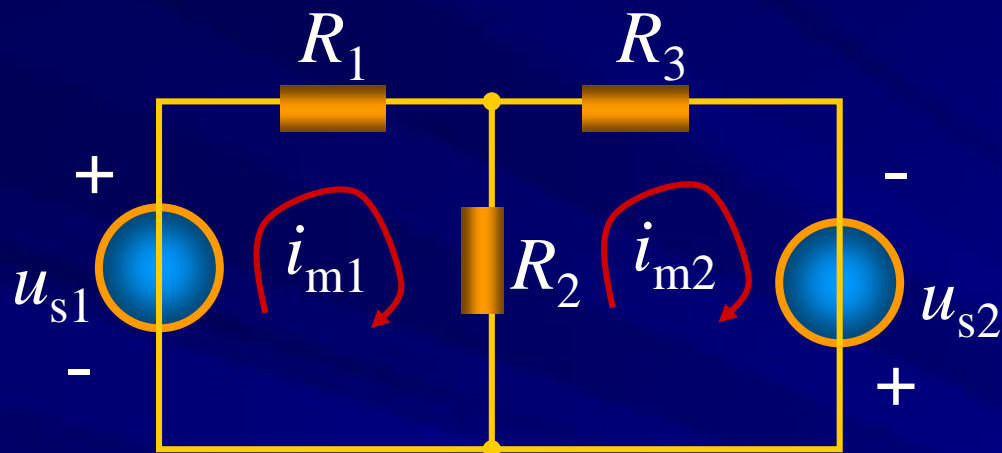
$$\left. \begin{array}{l} \text{总电导} \quad G = \sum_{k=1}^n G_k \\ \text{电压} \quad u = \frac{i}{G} \\ \text{分流公式} \quad i_k = \frac{G_k}{G} i \end{array} \right\}$$



结论

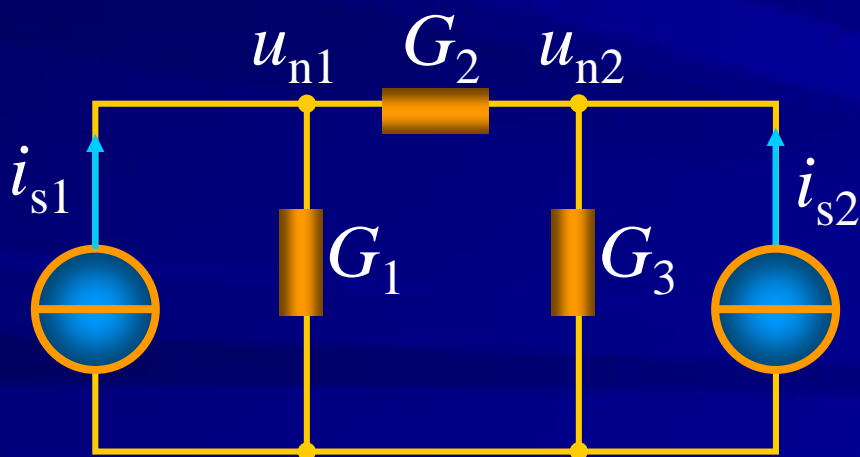
将串联电路中的电压 u 与并联电路中的电流 i 互换，电阻 R 与电导 G 互换，串联电路中的公式就成为并联电路中的公式。反之亦然。这些互换元素称为对偶元素。电压与电流；电阻 R 与电导 G 都是对偶元素。而串联与并联电路则称为对偶电路。

例2 网孔电流与结点电压的对偶



网孔电流方程

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + R_2)i_{m1} - R_2i_{m2} &= u_{s1} \\ -R_2i_{m1} + (R_2 + R_3)i_{m2} &= u_{s2} \end{aligned} \right\}$$



结点电压方程

$$\left. \begin{aligned} (G_1 + G_2)u_{n1} - G_2u_{n2} &= i_{s1} \\ -G_2u_{n1} + (G_2 + G_3)u_{n2} &= i_{s2} \end{aligned} \right\}$$



结论

把 R 和 G , u_s 和 i_s , 网孔电流和结点电压等对应元素互换, 则上面两个方程彼此转换。所以“网孔电流”和“结点电压”是对偶元素, 这两个平面电路称为对偶电路。

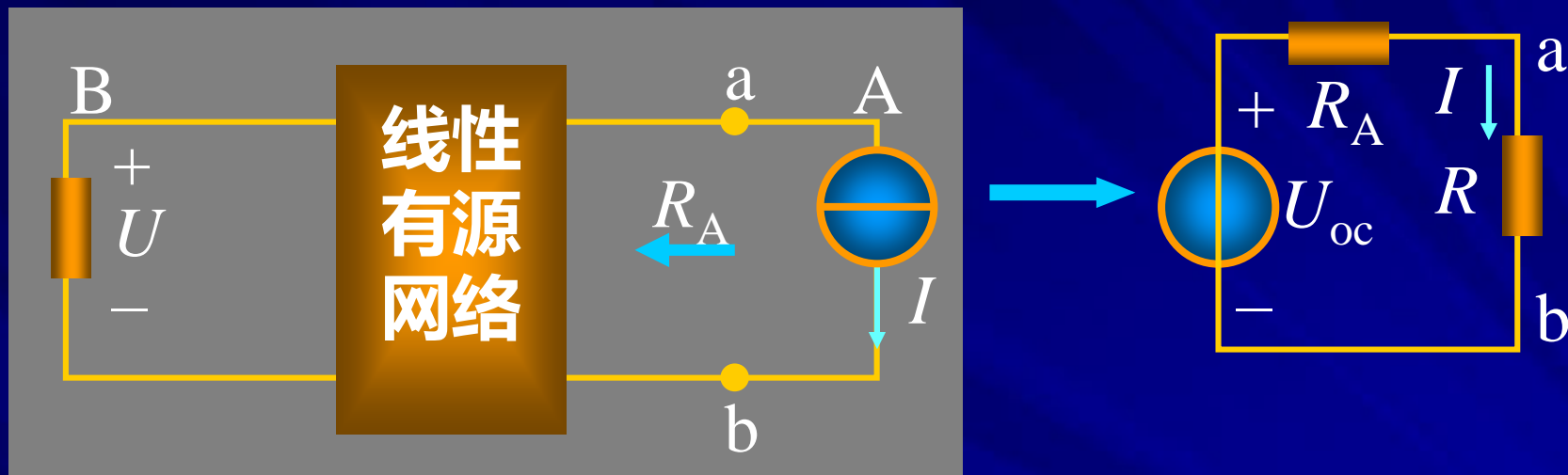
定理的综合应用

例1 图示线性电路，当A支路中的电阻 $R=0$ 时，测得B支路电压 $U=U_1$ ，当 $R=\infty$ 时， $U=U_2$ ，已知ab端口的等效电阻为 R_A ，求 R 为任意值时的电压 U



解

①应用戴维宁定理： ②应用替代定理：



③应用叠加定理：

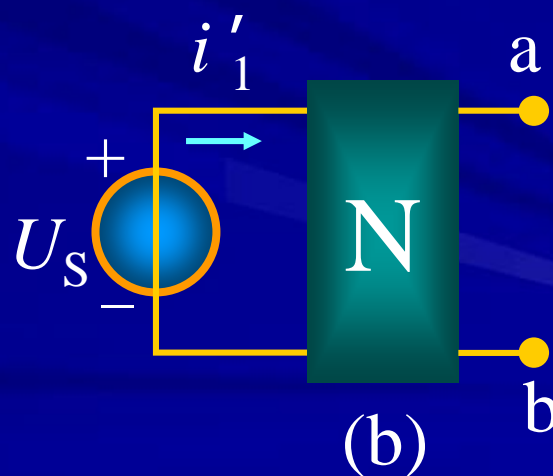
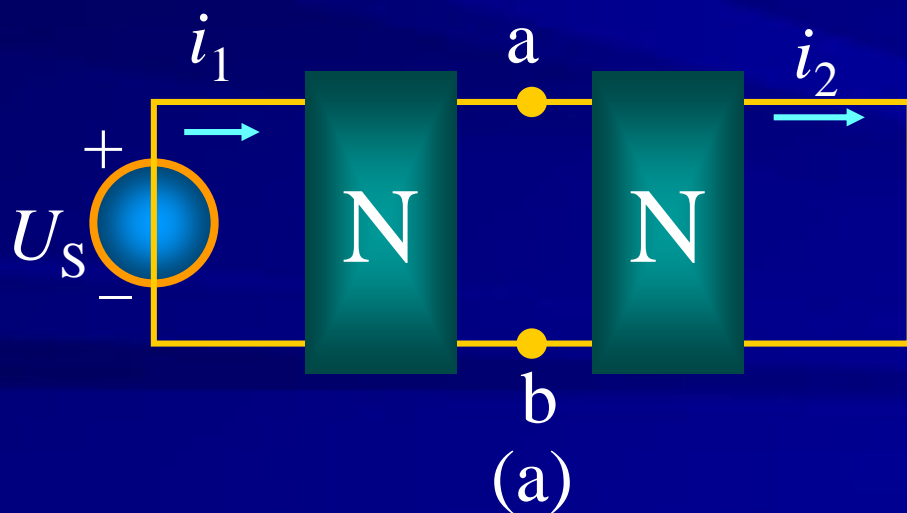
$$U = k_1 I + k_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \infty \rightarrow I = 0 \rightarrow U = k_2 = U_2 \\ R = 0 \rightarrow I = U_{oc} / R_A \\ \rightarrow U = U_1 = k_1 \frac{U_{oc}}{R_A} + k_2 \end{array} \right.$$

解得: $k_1 = \frac{U_1 - U_2}{U_{oc}} R_A \quad k_2 = U_2$

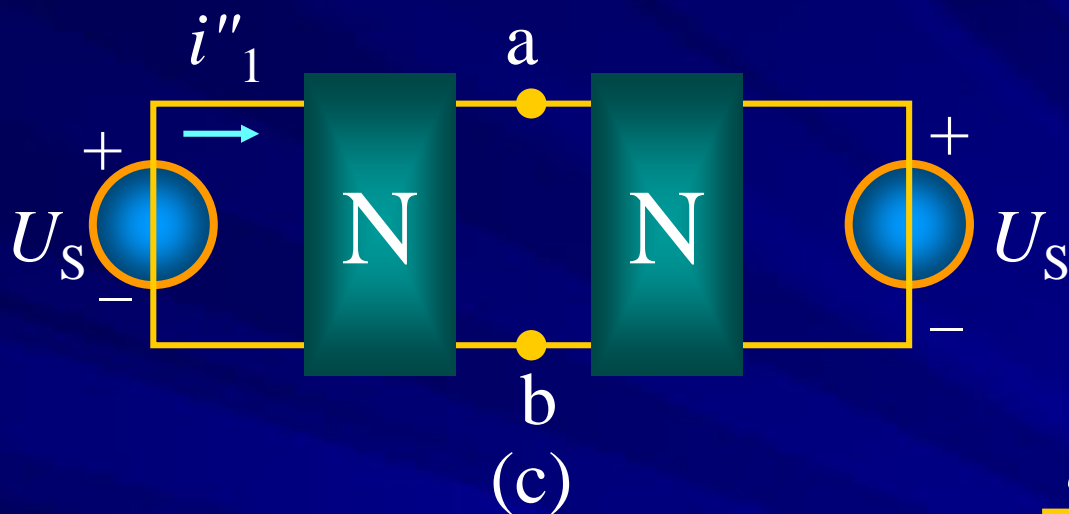
$$U = U_2 + \frac{U_1 - U_2}{U_{oc}} R_A \times \frac{U_{oc}}{R_A + R} = U_2 + \frac{U_1 - U_2}{R_A + R} R_A$$

例2 图a为线性电路, N为相同的电阻网络, 对称连接, 测得电流 $i_1 = I_1, i_2 = I_2$, 求b图中的 i'_1



解

对图(c)应用叠加和互易定理



$$i''_1 = I_1 - I_2$$

对图(c)应用戴维宁定理

$$i''_1 = i'_1 = I_1 - I_2$$

