

# Die Stärke von Lokalität: Welche Rolle spielt Randomisierung in verteilten Graphalgorithmen?

Yannic Maus<sup>1</sup>

**Abstract:** Wir untersuchen verteilte Graphalgorithmen für klassische Probleme, wie zum Beispiel das Kanten- und das Knotenfärbungsproblem. Viele dieser Probleme sind randomisiert effizient lösbar, wohingegen die besten bekannten deterministischen Algorithmen exponentiell langsamer sind. Im ersten Teil der Dissertation nutzen wir einen komplexitätstheoretischen Ansatz und zeigen, dass einige Probleme im folgenden Sinn vollständig sind: Ein effizienter deterministischer Algorithmus für ein vollständiges Problem würde einen effizienten deterministischen Algorithmus für alle randomisiert effizient lösbaren Probleme implizieren. Unter den vollständigen Problemen ist ein scheinbar einfaches natürliches Graphenfärbungsproblem, welches randomisiert trivial und ohne Kommunikation lösbar ist. In den weiteren Teilen der Dissertation entwickeln wir effiziente Kanten- und Knotenfärbungsalgorithmen, und wir beweisen eine untere Schranke für die Laufzeit von Knotenfärbungsalgorithmen in einer abgeschwächten Version des Standardmodells für verteilte Graphalgorithmen.

## 1 Einführung

Netzwerke spielen eine immer größere Rolle in unserer Welt. Viele moderne Systeme, wie das Internet, bauen auf riesigen Netzwerken auf. Auch in der Natur findet man zahlreiche Netzwerke wie das menschliche Gehirn oder unsere Gesellschaft mit ihren sozialen Verknüpfungen. In all diesen Netzwerken gibt es viele Knoten, wie zum Beispiel die Neuronen im Gehirn, die miteinander kommunizieren und obwohl einzelne Knoten nur mit ihren direkten Nachbarn im Netzwerk sprechen können, soll das System eine Art *globale Lösung* berechnen. Eine der Kernfragen in dieser Dissertation lautet:

*Welche globalen Ziele können auf lokalen Informationen basierend erreicht werden?*

Das Gebiet, in welchem Knoten mit ihren Nachbarn Nachrichten austauschen, um ein (globales) Problem zu lösen, heißt *verteilte Graphalgorithmen*. Ursprünglich wurden solche Algorithmen mit der Absicht untersucht, um die Probleme, die beim Routing in Netzwerken auftreten, zu verstehen und zu beheben. Heutzutage spielen Netzwerke in fast jedem Bereich des Lebens eine immense Bedeutung und es einen klaren Trend, der zeigt, dass immer mehr Algorithmen dezentralisiert statt klassisch zentralisiert sind. Daher besteht die Notwendigkeit, dass wir dezentralisierte und verteilte Algorithmen besser verstehen.

In all den oben genannten Netzwerken kann jedes Individuum nur mit wenigen anderen Teilnehmern des Netzwerkes kommunizieren, zum Beispiel kann man in einem sozialen

---

<sup>1</sup> Department of Computer Science, Technion, Haifa, Israel, yannic.maus@cs.uni-freiburg.de

Netzwerk nur mit seinen Freunden und Bekannten kommunizieren. Wegen dieser lokalen Kommunikation und der schieren Größe der Netzwerke<sup>2</sup> beruht die Rolle eines einzelnen Knotens in einer (globalen) Lösung nur auf lokalen Informationen. Dabei nennt man die Entfernung aus welchem ein Knoten auf Informationen im Netzwerk zugreifen kann die *Lokalität* eines Algorithmus.

## 1.1 Das LOCAL-Modell für verteilte Algorithmen

Um das Konzept der Lokalität formal zu untersuchen benutzen wir das gängige *message-passing* Modell für verteilte Graphalgorithmen, das LOCAL-Modell [Li92]: Das Netzwerk wird als ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten abstrahiert und jeder Knoten hat eine eindeutige ID (wie zum Beispiel seine IP-Adresse). In einem Algorithmus können die Knoten in **synchronen Runden unbeschränkte lokale Berechnungen** durchführen und Nachrichten von **unbeschränkter Größe** zu ihren Nachbarn schicken. Es gibt keine Fehler in der Kommunikation oder in den Berechnungen. Die *Komplexität*, die *Laufzeit* oder auch die *Lokalität* eines Algorithmus ist die Anzahl an synchronen Runden bis jeder Knoten seine Ausgabe, wie beispielsweise seine eigene Farbe in einer Graphenfärbung, berechnet hat. Dieses Modell ermöglicht es die Lokalität von verteilten Algorithmen auf eine präzise und mathematische Art und Weise zu untersuchen, da Informationen von einem Knoten  $v$  einen anderen Knoten  $u$  in Abstand  $r$  nur erreichen können, wenn der Algorithmus mindestens  $r$  Runden läuft. Umgekehrt kann ein Knoten  $v$  wegen der unbegrenzten Nachrichtengröße in  $r$  Runden auch alle Informationen in seiner  $r$ -Nachbarschaft lernen. Ein  $r$ -Runden Algorithmus ist also nichts Anderes als eine Funktion von der Menge der möglichen  $r$ -Nachbarschaften. Abbildung 1 zeigt dies an einem Beispiel.

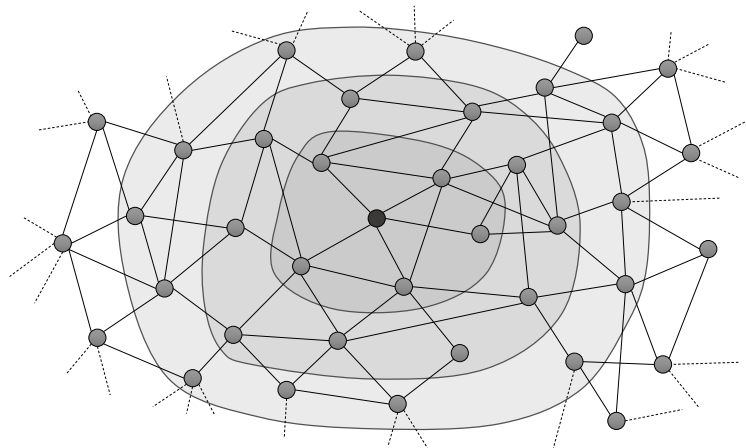


Abb. 1: Lokale Informationen: In einem LOCAL-Algorithmus mit Laufzeit  $r$  kann ein Knoten nur Informationen aus seiner  $r$ -Nachbarschaft erhalten. Die schattierten Bereiche zeigen die Informationen, die der schwarze Knoten in einer, zwei oder drei Runden erhalten kann.

<sup>2</sup> Oft sind Netzwerke so groß, dass sie zusammen mit all ihren Eingabedaten nicht in einem einzelnen Computer gespeichert werden können.

Unbeschränkte lokale Berechnungen werden oft dadurch motiviert, dass die Laufzeit von verteilten Algorithmen in der Realität meist durch die Kommunikationszeit dominiert ist. Obwohl die meisten veröffentlichten Algorithmen keine aufwändigen lokalen Berechnungen benutzen, wird das Modell oft für diese *kostenlosen* lokalen Berechnungen kritisiert. Es ist klar, dass sie jenseits jeglicher Realität liegen — so können Knoten zum Beispiel intern NP-vollständige Probleme lösen, jedoch sind sie unerlässlich für einige Teile dieser Dissertation um das Konzept der Lokalität getrennt von der Berechnungskomplexität eines Problems zu untersuchen. Klassischerweise nennt man einen verteilten Algorithmus im LOCAL-Modell *effizient*, falls seine Rundenkomplexität polylogarithmisch in der Anzahl der Knoten des Netzwerkes ist.

## 1.2 Verteilte Graphenprobleme

Wir untersuchen primär *klassische* Probleme, wie zum Beispiel das Knotenfärbungsproblem. Oft kommen diese Probleme in der Realität zur Anwendung: so lässt sich zum Beispiel das Berechnen eines Ablaufplanes von in Konflikt stehenden Prozessen als Graphenfärbungsproblem modellieren; häufig sind die resultierenden Graphenfärbungsprobleme verteilt gegeben, etwa beim Verteilen von Frequenzen an Mobiltelefone [Sm13]. Formal besteht ein *verteiltes Graphenproblem*  $\mathcal{P}$  aus einer Menge von Tupeln  $(G, \vec{x}, \vec{y})$ , wobei  $G$  ein einfacher ungerichteter Graph ist; der *Eingabevektor*  $\vec{x}$  und der *Ausgabevektor*  $\vec{y}$  sind jeweils Vektoren mit Einträgen  $x_v$  und  $y_v$  für jeden Knoten  $v \in V$ . Ein Tupel  $(G, \vec{x})$  ist eine *Instanz* eines Problems  $\mathcal{P}$ , falls ein *Ausgabevektor*  $\vec{y}$  mit  $(G, \vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{P}$  existiert. Ein verteilter Algorithmus *löst* ein Problem  $\mathcal{P}$ , falls er für alle Instanzen  $(G, \vec{x})$  einen Ausgabevektor  $\vec{y}$  berechnet, so dass  $(G, \vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{P}$  gilt; hierbei muss jeder Knoten *seinen Teil der Ausgabe* berechnen, d.h., Knoten  $v$  berechnet nur  $y_v$ . Meist ist die formelle Definition eines Graphenproblems implizit gegeben, wie zum Beispiel bei den für diese Dissertation zentralen Knoten- und Kantenfärbungsproblemen. Beide sogenannten *symmetry breaking Probleme* werden von Panconesi und Rizzi explizit als zwei der vier wichtigsten Probleme des Gebiets bezeichnet [PR01]. Für einen Graphen  $G = (V, E)$  sind sie wie folgt definiert:

- **C-Knotenfärbung:** Eine (*gültige*) *C-Knotenfärbung* ist eine Funktion  $\phi : V \rightarrow \{1, \dots, C\}$ , so dass  $\phi(v) \neq \phi(w)$  für alle  $\{v, w\} \in E$  gilt.
- **C-Kantenfärbung:** Eine (*gültige*) *C-Kantenfärbung* ist eine Funktion  $\psi : E \rightarrow \{1, \dots, C\}$ , so dass  $\psi(e) \neq \psi(f)$  für alle adjazenten Kanten  $e$  und  $f$  gilt.

Eine optimale Kantenfärbung, das heißt mit der minimal möglichen Anzahl an Farben, zu berechnen ist eines von Karps 21 NP-vollständigen Problemen [Ka72]. Daher haben verteilte Algorithmen meist das Ziel lediglich eine  $(\Delta + 1)$ -Knotenfärbung oder eine  $(2\Delta - 1)$ -Kantenfärbung zu berechnen, wobei  $\Delta$  der Maximalgrad des Netzwerkes ist [BE13]. Wenn man sich auf so viele oder mehr Farben beschränkt, dann können beide Färbungen sehr leicht von sequentiellen *Greedyalgorithmen* gelöst werden: Um zum Beispiel einen Graphen mit  $(\Delta + 1)$  Farben zu färben, ist es ausreichend in einer beliebigen Reihenfolge durch die Knoten zu iterieren und einen Knoten mit einer beliebigen Farbe

in der Menge  $\{1, \dots, \Delta + 1\}$  zu färben, die noch keiner seiner bereits gefärbten Nachbarn hat. Weiter kann man bei beiden Problemen eine korrekte Teillösung der Probleme, ergo einen gültigen gefärbten Teilgraphen, immer zu einer Lösung auf dem gesamten Graphen vervollständigen und die Gültigkeit einer Ausgabe im LOCAL-Modell kann in nur einer Runde verifiziert werden.<sup>3</sup>

### 1.3 Inhalte der Dissertation

Viele verteilte Graphenprobleme, wie auch das Knotenfärbungsproblem, lassen sich randomisiert effizient und einfach lösen, wohingegen deterministische Algorithmen exponentiell langsamer sind. Im ersten Teil der vorliegenden Dissertation [Ma18] nutzen wir einen komplexitätstheoretischen Ansatz und zeigen, dass einige Probleme im folgenden Sinn vollständig sind: Ein effizienter deterministischer Algorithmus für ein vollständiges Problem würde einen effizienten deterministischen Algorithmus für alle randomisiert effizient lösbaren Probleme implizieren. Unter den vollständigen Problemen ist ein scheinbar einfaches natürliches Graphenfärbungsproblem, welches randomisiert trivial ohne Kommunikation lösbar ist; deterministisch können wir es (bisher) nicht in polylogarithmischer Zeit lösen. Daher zeigt dieses Problem wie Randomisierung hilft und zeigt auf, was wir deterministisch (bisher) nicht effizient durchführen können.

In den weiteren Teilen der Dissertation verbessern wir die Laufzeit für einige der bekanntesten und wichtigsten verteilten Graphenprobleme. Wir präsentieren den aktuell schnellsten effizienten deterministischen Algorithmus für Kantenfärbungen mit  $(2 + \varepsilon)\Delta$  Farben, den ersten effizienten deterministischen Kantenfärbungsalgorithmus mit  $(1 + \varepsilon)\Delta$  Farben und die aktuell schnellsten randomisierten und deterministischen  $\Delta$ -Knotenfärbungsalgorithmen. Im letzten Kapitel der Dissertation beweisen wir eine untere Schranke für die Lokalität zur Berechnung von Knotenfärbungen in einer abgeschwächten Version des LOCAL-Modells. Die Dissertation beginnt mit einem ausführlichen Überblick über verwandte Forschungsergebnisse und ihrer Einbettung in die aktuelle Forschung; die Dissertation schließt mit einer Vielzahl an konkreten offenen Fragen.

## 2 Welche Rolle spielt Randomisierung in verteilten Graphalgorithmen?

Um die Ergebnisse dieses vor allem konzeptuellen Teiles zu verstehen, schauen wir uns zunächst an, was wir unter einem verteilten randomisierten Algorithmus verstehen. In einem *verteilten randomisierten Algorithmus* stehen jedem Knoten private Zufallsbits zur Verfügung, wobei die Zufallsbits verschiedener Knoten unabhängig sind und es keine globalen von allen Knoten geteilten Zufallsbits gibt. Jedoch können die Zufallsbits an Nach-

---

<sup>3</sup> Fast alle Probleme, die wir in dieser Dissertation anschauen, haben die Eigenschaft, dass eine Ausgabe im LOCAL-Modell mit polylogarithmischer Lokalität verifiziert werden kann; einige Aussagen in dieser Zusammenfassung gelten nur für Probleme mit dieser Eigenschaft; wir erwähnen diese Voraussetzung im Rahmen dieser Zusammenfassung nicht immer explizit.

barn gesendet werden. Meist wollen wir, dass ein Algorithmus mit hoher Wahrscheinlichkeit funktioniert, d.h., die Wahrscheinlichkeit, dass die Ausgabe das Problem nicht löst ist höchstens  $1/n^c$  für ein konstantes  $c \geq 2$ . Die Welt der Komplexitäten von randomisierten Algorithmen unterscheidet sich drastisch von denen bekannter deterministischer Algorithmen: Einfache randomisierte polylogarithmische Algorithmen für Kanten- sowie Knotenfärbungen und für viele andere eng verwandte Probleme, wie z.B. für das *Maximal Independent Set Problem (MIS)*, kennt man seit den 80er Jahren [Lu86], wohingegen für viele wichtige verteilte Graphenprobleme (unter anderem für das MIS und das Knotenfärbungsproblem) die schnellsten deterministischen Algorithmen bis heute exponentiell langsamer sind.<sup>4</sup> Es gilt als eine der wesentlichsten, bedeutensten und ältesten offenen Fragen des Bereiches, zu Verstehen, ob diese *exponentielle Lücke* inhärent ist [BE13, Li92].<sup>5</sup> Allein die ersten fünf offenen Fragen im viel zitierten und wichtigen Monolog [BE13] über verteiltes Graphenfärben beschäftigen sich alle mit der Frage, ob Randomisierung für effiziente Algorithmen für das Graphenfärbungs- und verwandte Probleme notwendig ist. Selbst als Linial das LOCAL-Modell einführte stellte er ganz explizit die Frage nach einem effizienten deterministischen Algorithmus für das MIS Problem. Intuitiv überrascht es nicht, dass randomisierte Algorithmen für diese Probleme so schnell sind: Im Knotenfärbungsproblem müssen beispielsweise benachbarte Knoten, deren Sicht auf den Graphen symmetrisch ist, unterschiedliche Farben ausgeben. Daher muss es irgendeine *lokale Koordination* bzw. ein sogenanntes *Aufbrechen der Symmetrien/symmetry breaking* zwischen benachbarten Knoten geben. Es ist sehr natürlich, dass Randomisierung hierbei immens helfen kann: Wenn zum Beispiel jeder ungefärbte Knoten einfach zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Farbe als Kandidat wählt, mit der keiner seiner schon gefärbten Nachbarn gefärbt ist, und diese Farbe behält, falls kein ungefärbter Nachbar die gleiche Kandidatenfarbe gewählt hat, so hat der Knoten eine konstante Wahrscheinlichkeit gefärbt zu werden. Iteriert man diesen sehr einfachen Prozess, so erhält man einen  $O(\log n)$ -Runden Knotenfärbungsalgorithmus. Es ist nicht klar, wie und ob man diese lokale Koordination überhaupt effizient mit deterministischen Algorithmen erreichen kann.

Der erste Teil dieser Dissertation kann diese (schwierige) Frage zwar nicht beantworten, aber er trägt zu ihrem Verständnis bei, indem er die folgenden informell gestellten Fragen beantwortet: *Welche Rolle spielt Randomisierung beim effizienten Lösen von Problemen, wie Knotenfärbungen oder MIS? Was haben diese Probleme gemeinsam und gibt es noch mehr als die bekannten Probleme mit solch einer exponentiellen Lücke? Was ist die Hauptschwierigkeit für deterministische Algorithmen? Welche Probleme müssen wir uns anschauen, um die Lücke zu schließen oder zumindest um sie zu verkleinern?* Um all diese Fragen zu beantworten, benutzen wir einen komplexitätstheoretischen Ansatz und definieren eine Klasse von Problemen, die wir P-SLOCAL nennen. Die Definition dieser Klasse lässt sich leicht verstehen, wenn wir uns daran erinnern, dass das Knotenfärbungsproblem

<sup>4</sup> Für das  $(2\Delta - 1)$ -Kantenfärbungsproblem wurde erst im Jahre 2017 von Fischer, Ghaffari und Kuhn der erste effiziente deterministische Algorithmus gefunden [FGK17].

<sup>5</sup> Selbst falls man nur an randomisierten Algorithmen interessiert ist, ist es nötig ihre deterministischen Gegenstücke detailliert zu verstehen, denn Chang, Kopelowitz und Pettie haben gezeigt, dass die Komplexität des besten randomisierten Algorithmus nicht besser sein kann als sein deterministisches Gegenstück auf exponentiell kleineren Instanzen [CKP16]; bisher wurde das Resultat nur für Graphen mit konstantem Grad gezeigt. Dieses Ergebnis zeigt sich in allen aktuell schnellsten randomisierten Algorithmen, die stets einen Term  $T(\sqrt{\log n})$  in ihrer Komplexität haben, wobei  $T(\cdot)$  die Laufzeit des besten deterministischen Algorithmus ist.

durch einen trivialen sequentiellen Greedyalgorithmus lösbar ist. In diesem iteriert man in beliebiger Reihenfolge durch die Knoten. Dabei hängt die ausgegebene Farbe eines Knoten nur davon ab, wie seine bereits durchlaufenen Nachbarn gefärbt sind. Das SLOCAL-Modell, welches in dieser Dissertation definiert wird, erweitert dieses Konzept. In einem SLOCAL-Algorithmus oder einem *generalisierten sequentiellen Greedyalgorithmus* mit Lokalität  $r$  iteriert man in beliebiger Reihenfolge durch die Knoten und die Ausgabe eines Knotens hängt nur vom aktuellen Zustand seiner Nachbarn in seiner  $r$ -Nachbarschaft ab. Der vorgestellte Greedyalgorithmus für das Knotenfärbungsproblem ist ein SLOCAL-Algorithmus mit Lokalität 1. Die Klasse P-SLOCAL besteht aus den Problemen, die *effizient* durch einen generalisierten sequentiellen Greedyalgorithmus gelöst werden können, d.h., mit polylogarithmischer Lokalität. Zunächst zeigen wir, dass alle Probleme in der Klasse P-SLOCAL effizient im LOCAL-Modell lösbar sind, wenn man Randomisierung erlaubt. Weiter enthält Klasse alle klassischen in der Literatur studierten Probleme und sie enthält insbesondere die genannten Probleme mit der exponentiellen Laufzeitlücke.<sup>6</sup> Daraus ergibt sich eine formale Version der Frage, ob die exponentielle Lücke tatsächlich inhärent ist: *Ist die Klasse der im SLOCAL-Modell effizient lösbaren Probleme identisch mit der Klasse der im LOCAL-Modell deterministisch effizient lösbaren Probleme?* Auch diese Frage können wir nicht beantworten, jedoch finden wir eine Hand voll im folgenden Sinne P-SLOCAL-vollständiger Probleme: Kann man auch nur ein einziges dieser Probleme effizient mit einem deterministischen Algorithmus im LOCAL-Modell lösen, so lassen sich alle Probleme in der Klasse P-SLOCAL deterministisch effizient lösen. Randomisierung wird also nur benötigt, um ein vollständiges Problem zu lösen. Unter den vollständigen Problemen sind zwei eng verwandte Probleme besonders hervorzuheben, das Local Splitting Problem und das Weak Local Splitting Problem: Sei  $B = (U \cup V, E)$  ein bipartiter Graph, wobei der Grad von jedem Knoten in  $U$  mindestens  $\log^c n$  für eine ausreichend große Konstante  $c \geq 2$  ist. Ziel ist es, jeden Knoten in  $V$  rot oder blau zu färben, so dass ungefähr die Hälfte der Nachbarn von jedem Knoten in  $U$  rot bzw. blau gefärbt ist. Genauer, für  $\lambda \in (0, 1/2]$ , ist eine 2-Färbung der Knoten in  $V$  ein  $\lambda$ -Local Splitting, falls jeder Knoten  $u \in U$  mindestens  $\lfloor \lambda \cdot d(u) \rfloor$  Nachbarn von jeder Farbe hat, wobei  $d(u)$  der Grad von  $u$  ist. Eine 2-Färbung der Knoten in  $V$  ist ein Weak Local Splitting, falls jeder Knoten  $u \in U$  mindestens 1 Nachbarn von jeder Farbe hat. Wir zeigen:

**Theorem 1** ([GKM17]). *Sei  $\lambda = \frac{1}{\text{poly} \log n}$ . In bipartiten Graphen  $H = (U \cup V, E)$ , in denen alle Knoten in  $U$  mindestens Grad  $c \ln^2 n$  für eine ausreichend große Konstante  $c$  haben, ist das  $\lambda$ -Local Splitting Problem P-SLOCAL-vollständig. Falls sich zusätzlich der Grad von allen Knoten in  $U$  maximal um einen konstanten Faktor unterscheidet, so ist auch das Weak Local Splitting Problem P-SLOCAL-vollständig.*

Mit Randomisierung kann man beide Probleme durch einen trivialen 0-Runden Algorithmus lösen, indem man jeden Knoten in  $V$  mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  rot oder blau färbt. Falls wir jeden Knoten auch mit mehreren Farben jeweils anteilig färben dürften, so wären beide Probleme gelöst, wenn jeder Knoten in  $V$  zur Hälfte rot und zur Hälfte

<sup>6</sup> Die Klasse P-SLOCAL wurde weiter von Ghaffari, Harris und Kuhn untersucht und sie zeigten, dass die Klasse P-SLOCAL genau mit der Klasse der randomisiert effizient im LOCAL-Modell lösbaren Problemen übereinstimmt, sofern man nur *locally-checkable* Probleme betrachtet [GHK18].

blau gefärbt wäre. Von dieser Färbung mit anteiligen Farben zu einer richtigen Färbung zu kommen, kann als ein einfaches Rundungsproblem von rationalen Zahlen zu ganzen Zahlen unter der Beachtung von schwachen Randbedingungen interpretiert werden. Da dieses *Rundungsproblem* randomisiert ohne Kommunikation gelöst werden kann, aber deterministisch bisher nicht effizient gelöst werden kann, zeigt es genau auf, welche Schritte wir ohne Randomisierung nicht effizient lösen können. Wir fassen zusammen:

*Das Einzige, was wir deterministisch im LOCAL-Modell nicht mit  $\text{polylog } n$  Lokalität können, ist das grobe Runden (unter der Beachtung von Randbedingungen) von rationalen Zahlen zu ganzen Zahlen. Falls  $\text{polylog } n$  Lokalität ausreicht, um deterministisch runden zu können, so können wir alle klassischen Probleme im LOCAL-Modell mit  $\text{polylog } n$  Lokalität lösen.*

Da wir in diesem Teil auch zeigen, dass man SLOCAL-Algorithmen in LOCAL Algorithmen übersetzen kann — mit geringer Vergrößerung der Lokalität in randomisierte LOCAL-Algorithmen und unter erheblicher Vergrößerung der Lokalität auch in deterministische LOCAL-Algorithmen —, dient das Modell auch als Werkzeug, um neue Algorithmen im LOCAL-Modell zu entwickeln. In der Dissertation wird dies genutzt, um Approximationsalgorithmen für gewisse verteilt gegebene lineare Programme zu entwickeln. Mittlerweile haben auch andere Autoren das Modell aufgegriffen, was zu zahlreichen verbesserten Algorithmen in verschiedenen Bereichen geführt hat, unter anderem die Kantenfärbungsalgorithmen und die Algorithmen für das Lovász Local Lemma in [GHK18].

### 3 Knoten- und Kantenfärbungen

In den weiteren Teilen der Dissertation untersuchen wir die Komplexität verschiedener Varianten des verteilten Graphenfärbungsproblems.

#### 3.1 Kantenfärbungsalgorithmen

Alle unsere Kantenfärbungsalgorithmen nutzen als Subroutine schnelle Methoden zum Degree Splitting. Das Ziel im *Degree Splitting Problem* ist es, die Kanten eines Graphen in zwei Mengen zu unterteilen, so dass der Grad jedes Knotens in beiden Mengen ungefähr die Hälfte seines Originalgrades ist. Dabei nennt man die Differenz zwischen der Anzahl inzidenter Kanten eines Knotens in den beiden Mengen die *Diskrepanz* des Knotens im Degree Splitting; Ziel ist es also für jeden Knoten eine möglichst kleine Diskrepanz zu erhalten. Um die Kanten eines Graphen zu färben, benutzen wir diese Degree Splittings für eine Divide-and-Conquer Lösung. Wir teilen den Graphen rekursiv in  $\Delta/d$  Graphen, wobei jeder Graph Maximalgrad  $\approx d$  für ein  $d$  in polylogarithmischer Größenordnung hat. Danach färben wir jeden dieser Teilgraphen mit einer unterschiedlichen Farbmenge, der Größe  $(1 + o(1))d$  falls unser Ziel  $(1 + o(1))\Delta$  Farben sind, und mit  $(2d - 1)$  Farben falls wir mit  $(2 + o(1))\Delta$  Farben färben wollen. So erhalten wir effiziente Laufzeiten für allgemeine Graphen, obwohl die Laufzeit der Algorithmen zum Färben mit  $1 + (o(1))d$  oder

$(2d - 1)$  Farben polynomiell im Maximalgrad des jeweiligen Graphen sind. Im folgenden Theorem zeigen wir, dass wir Degree Splittings effizient berechnen können.

**Theorem 2** ([Gh17]). *Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein deterministischer Algorithmus mit Laufzeit  $O(\varepsilon^{-1} \cdot \log \varepsilon^{-1} \cdot (\log \log \varepsilon^{-1})^{1.71} \cdot \log n)$ , um ein Degree Splitting zu berechnen, in dem die Diskrepanz von Knoten  $v$  höchstens  $\varepsilon \cdot d(v) + 4$  ist.*

Durch rekursives Anwenden von Theorem 2 und Färben der Kanten der resultierenden Teilgraphen erhalten wir den folgenden effizienten Färbungsalgorithmus.

**Corollary 3** ([Gh17]). *Für jedes  $\varepsilon > 1/\log \Delta$ , existiert ein deterministischer Algorithmus, der eine  $(2 + \varepsilon)\Delta$ -Kantenfärbung in  $O(\log^2 \Delta \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \log \log \Delta \cdot (\log \log \log \Delta)^{1.71} \cdot \log n)$  Runden berechnet.*

Klassisch färben verteilte Algorithmen mit  $2\Delta - 1$  oder mehr Farben. Corollary 3 ist der schnellste Algorithmus, wenn man leicht über dieser Schranke bleibt. Jedoch weiß man schon seit 1964 durch Vizings berühmtes Theorem, dass Kantenfärbungen mit  $\Delta + 1$  Farben immer existieren [Vi64]. In [FGK17] wurde das  $(2\Delta - 1)$ -Kantenfärbungsproblem erstmals effizient deterministisch gelöst und die Frage aufgeworfen, *wie nah man mit einem deterministischen und effizienten Algorithmus an Vizings Schranke kommen (könne)?* Als Antwort geben wir den ersten effizienten deterministischen verteilten Algorithmus überhaupt, der deutlich weniger als  $(2\Delta - 1)$  Farben benutzt.

**Theorem 4** ([Gh18b]). *Es existiert eine Konstante  $c > 0$ , so dass für jedes  $\varepsilon > 0$  deterministische Algorithmen existieren, die die Kanten jedes Graphen mit  $n$  Knoten und Maximalgrad  $\Delta$  mit*

- a)  $(1 + \varepsilon)\Delta$  Farben in  $O(\varepsilon^{-9} \log^3 n \log^4 \Delta \log \varepsilon^{-1})$  Runden färbt, falls  $\Delta \geq c \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \log \varepsilon^{-1} \cdot \log n$  gilt, oder mit
- b)  $3\Delta/2$  Farben in  $O(\Delta^9 \log^8 n \log^5 \Delta)$  Runden färbt (für alle  $\Delta$ ).

Der Beweis von Vizings Theorem benutzt globale Argumente und es existieren keine trivialen Greedyalgorithmen, um die Kanten eines Graphen mit weniger als  $2\Delta - 1$  Farben zu färben. Sprich, das  $C$ -Kantenfärbungsproblem mit  $C \ll 2\Delta - 1$  hat eine völlig andere Natur als das Färbungsproblem mit  $2\Delta - 1$  oder mehr Farben. Daher nutzt Theorem 4 andere Techniken als bisherige Kantenfärbungsalgorithmen.

### 3.2 Knotenfärbungen

Im vorletzten Kapitel der Dissertation präsentieren wir  $\Delta$ -Knotenfärbungsalgorithmen. Die Existenz solcher Färbungen für zusammenhängende Graphen (solange der Graph nicht vollständig und kein Ring mit ungerader Knotenanzahl ist) geht auf ein sehr bekanntes Resultat von Brooks [Br41] zurück. Wir zeigen das folgende Theorem.



**Theorem 5** ([Gh18a]). *Es existiert ein randomisierter Algorithmus, der jeden nicht vollständigen Graphen mit Maximalgrad  $\Delta \geq 3$ , mit hoher Wahrscheinlichkeit mit  $\Delta$  Farben färbt und  $O(\sqrt{\Delta \log \Delta} \cdot \log^* \Delta \cdot \log^2 \log n)$  Runden benötigt. Gilt  $\Delta \geq 4$  ist die Laufzeit  $O(\log \Delta) + 2^{O(\sqrt{\log \log n})}$ .*

Man beachte, dass die Bedingung  $\Delta \geq 3$  notwendig ist, da eine 2-Färbung eines Graphen mit  $\Delta = 2$  ein globales Problem ist und  $\Omega(n)$  Runden benötigt. Neben den randomisierten Algorithmen aus Theorem 5 enthält dieser Teil auch neue deterministische  $\Delta$ -Knotenfärbungsalgorithmen. Die in dieser Dissertation enthaltenen  $\Delta$ -Knotenfärbungsalgorithmen verbessern 25 Jahre alte Resultate von Panconesi und Srinivasan [PS95].

Im letzten Kapitel, das auf der Publikation [He16] basiert, präsentieren wir für das verteilte  $(\Delta + 1)$ -Knotenfärbungsproblem eine untere Schranke von  $\Omega(\Delta^{\frac{1}{3}})$  Runden in einer abgeschwächten Version des LOCAL-Modells. Dieses Resultat ist, trotz intensiver Forschung, die einzige untere Schranke für die Laufzeit des verteilten Graphenfärbungsproblems seit über 30 Jahren.

### 3.3 Die Zentralität von Splittingproblemen

Wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, nutzen unsere schnellen Kantenfärbungsalgorithmen Degree Splitting Methoden, die deterministisch effizient lösbar sind. Diese Degree Splitting Methoden sind auf dem Kantengraphen definiert. Dahingegen zeigt der erste Teil der Arbeit, dass ähnliche Splitting Probleme auf allgemeinen Graphen P-SLOCAL-vollständig sind und wir nicht wissen, wie wir diese effizient lösen können. Daher enthält die Dissertation auch einen kurzen Teil, der die zentrale Bedeutung von Splittingalgorithmen für verteilte Graphalgorithmen herausstellt und kurz zusammenfasst, in welchen anderen wichtigen Resultaten Splitting Probleme eine zentrale Rolle spielen. Die Dissertation schließt mit konkreten offenen Fragen.

## Literaturverzeichnis

- [BE13] Barenboim, L.; Elkin, M.: Distributed Graph Coloring: Fundamentals and Recent Developments. Morgan & Claypool Publishers, 2013.
- [Br41] Brooks, R. L.: On Colouring the Nodes of a Network. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 37(2):194–197, 1941.
- [CKP16] Chang, Y. J.; Kopelowitz, T.; Pettie, S.: An Exponential Separation between Randomized and Deterministic Complexity in the LOCAL Model. In: Proceedings of the Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). S. 615–624, 2016.
- [FGK17] Fischer, M.; Ghaffari, M.; Kuhn, F.: Deterministic Distributed Edge-Coloring via Hypergraph Maximal Matching. In: Proceedings of the Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE Computer Society, S. 180–191, 2017.
- [Gh17] Ghaffari, M.; Hirvonen, J.; Kuhn, F.; Maus, Y.; Suomela, J.; Uitto, J.: Improved Distributed Degree Splitting and Edge Coloring. In: Proc. Int. Symp. on Distributed Computing (DISC). S. 19:1–19:15, 2017.

- [Gh18a] Ghaffari, M.; Hirvonen, J.; Kuhn, F.; Maus, Y.: Improved Distributed  $\Delta$ -Coloring. In: Proc. ACM Symp. on Principles of Distributed Computing (PODC). 2018.
- [Gh18b] Ghaffari, M.; Kuhn, F.; Maus, Y.; Uitto, J.: Deterministic Distributed Edge-Coloring with Fewer Colors. In: Proc. ACM Symp. on Theory of Computing (STOC). ACM, 2018.
- [GHK18] Ghaffari, M.; Harris, D. G.; Kuhn, F.: On Derandomizing Local Distributed Algorithms. In: Proc. Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS). S. 662–673, 2018.
- [GKM17] Ghaffari, M.; Kuhn, F.; Maus, Y.: On the Complexity of Local Distributed Graph Problems. In: Proc. ACM Symp. on Theory of Computing (STOC). ACM, S. 784–797, 2017.
- [He16] Hefetz, D.; Maus, Y.; Kuhn, F.; Steger, A.: A Polynomial Lower Bound for Distributed Graph Coloring in a Weak LOCAL Model. In: Proc. Int. Symp. on Distributed Computing (DISC). S. 99–113, 2016.
- [Ka72] Karp, R. M.: Reducibility among Combinatorial Problems. In: Symposium on Complexity of Computer Computations. S. 85–103, 1972.
- [Li92] Linial, N.: Locality in Distributed Graph Algorithms. SIAM Journal on Computing, 21(1):193–201, 1992.
- [Lu86] Luby, M.: A Simple Parallel Algorithm for the Maximal Independent Set Problem. SIAM Journal on Computing, 15(4):1036–1053, 1986.
- [Ma18] Maus, Y.: The Power of Locality: Exploring the Limits of Randomness in Distributed Computing. Dissertation, University of Freiburg, Freiburg im Breisgau, Germany, 2018.
- [PR01] Panconesi, A.; Rizzi, R.: Some Simple Distributed Algorithms for Sparse Networks. Distributed Computing, 14(2):97–100, 2001.
- [PS95] Panconesi, A.; Srinivasan, A.: The Local Nature of  $\Delta$ -Coloring and its Algorithmic Applications. Combinatorica, 15(2):255–280, Jun 1995.
- [Sm13] Smorodinsky, S.: Conflict-Free Coloring and its Applications. In (Bárány, Imre; Böröczky, Károly J.; Tóth, Gábor Fejes; Pach, János, Hrsg.): Geometry — Intuitive, Discrete, and Convex: A Tribute to László Fejes Tóth. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, S. 331–389, 2013.
- [Vi64] Vizing, V.: On an Estimate of the Chromatic Class of a p-Graph. Diskret analiz, 3:25–30, 1964.



**Yannic Maus** studierte an der *RWTH Aachen* und der *National University of Singapore* sowohl Mathematik (Bachelor und Master) als auch Informatik (Bachelor). Für seine mit Auszeichnung abgeschlossenen Studiengänge wurde er unter anderem mit der Springorum-Denkmünze der RWTH Aachen geehrt. Im Anschluss promovierte er am Lehrstuhl für Algorithmen & Komplexität der *Albert-Ludwigs-Universität Freiburg* unter der Betreuung von Professor Dr. Fabian Kuhn. Seine Promotion über verteilte Algorithmen schloss er im Oktober 2018 mit dem Gesamtprädikat *summa cum laude* ab. Danach zog es ihn als Post-

doktorand in das Land mit der höchsten Dichte an Forschern im Bereich der verteilten Algorithmen, genauer gesagt ans Technion (הטכניון) in Haifa, Israel. In seiner Freizeit fährt er leidenschaftlich (Renn-)rad oder ist im Winter auf der Loipe beim Langlaufen anzutreffen.