SPINOR（暫定）

2021 年 5 月 30 日

計算ノート。以下の計算は基本的には九後さんの本 [1] を参考にしている、つもりだったが大幅に脱線している。

末尾の参考文献はこの文章をまとめる過程で目にした文献で、少しでも関連してると思ったものをとりあえず入れた程度のものである。

第 1 章　座標の変換

1.1　Lorentz 変換

1.1.1　内積と計量

4 次元 Minkowski 時空は時空上の 2 点を 4 元ベクトル x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ と y^μ とで表すことができる実ベクトル空間であり[1)]、その内積は

$$(x, y) = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^{3} x^i y^i \tag{1.1.1}$$

で与えられる。文脈から明らかなときは $(x, y) = xy$ と書くこともある。この内積は（不定）計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ $(\mathrm{val}\,[\eta_{\mu\nu}] = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1))$ を用いて

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \tag{1.1.2}$$

とも表わされる[2)]。通常は $(\,\cdot\,)$ で行列の表記と等号で結ぶが、ここではもう少し値を扱っていることを明示的にしたい気持ちがあったので $\mathrm{val}\,[\,\cdot\,]$ で引数の行列表記と等号を結ぶことにする。上下で同じ添字があれば和をとるものとする[3)]。$\eta_{\mu\nu}$ は対角成分しか含んでおらず対称である（$\mathrm{val}\,[\eta_{\mu\nu}] = \mathrm{val}\,[\eta_{\nu\mu}]$）。これを用いて

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \tag{1.1.3}$$

のように添字を下げる記法を導入しておく。これより式 (1.1.2) は $x_\mu y^\mu$ と書けることになる。

$\eta_{\mu\nu}$ を用いて上添字の量から下添字の量を表わす記法を導入したので、同様に下添字の量で上添字の量を表わす記法も導入しておくのが便利である。それは

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \qquad \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \delta^\mu_\nu \tag{1.1.4}$$

となるように $\eta^{\mu\nu}$ を導入すれば満たされる。ここで δ^μ_ν は $\mathrm{val}\,[\delta^\mu_\nu] = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1, 1)$ を満たす量である。δ^μ_ν は対称で添字の左右の区別が必要ないので、上下にある添字はそのまま縦に並べている。

1)　ここで書かれているのは正確には成分だが、添字の値は定まっていないが添字が走る範囲が明示されている成分を書いてベクトルと呼ぶ慣習が物理にはある。基底が明示的でないが、簡単のためこの省略法を用いる。

2)　適当な変換 A が y に作用されていれば $(x, Ay) = x^\mu \eta_{\mu\nu} A^\nu{}_\rho y^\rho$ と書ける。また同じ量を転置を含むように書けば $({}^t\!Ax, y) = ({}^t\!A)^\nu{}_\mu x^\mu \eta_{\nu\rho} y^\rho$、つまり転置による添字の扱いは $({}^t\!A)^\mu{}_\nu = A_\mu{}^\nu$ ということになる。

3)　このような添字はダミーと呼ばれる。

自身との内積は

$$x^2 = (x, x) = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu x^\mu \tag{1.1.5}$$

で与えられる。正定値性が無いので正確にはノルムにはなっていないが、ここではノルムと呼ぶことにする[4)]。この計量テンソルの符号のとり方では値が正のときを time-like 、負のときを space-like と呼ぶ。ノルムの値がゼロのときは light-like あるいは null と呼ばれる。

$\eta_{\mu\nu}$ は Minkowski 時空（平坦な時空）の計量テンソルであり、曲がった時空を考える際は Minkowski 時空を接空間として含むように拡張される。曲がった時空上の適当な点 x^μ での計量は曲がった時空の計量テンソル $g(x)_{\mu\nu}$ に対して

$$\mathrm{d}s^2 = g(x)_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{1.1.6}$$

で与えられる。これは式 (1.1.5) で示されるノルムを局所化したものとも考えられる。曲がった時空上の点 x^μ は大域的には 4 元ベクトルと見なせず、局所的なベクトル空間を指定するパラメータとなる。その局所的なベクトル空間において $\{\partial_\mu\}$ が接空間の基底であり、$\{\mathrm{d}x^\mu\}$ は余接空間の基底である。平坦なときは $g(x)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ であり、局所座標で展開された時空点 $x = x^\mu \partial_\mu$ に対して $\mathrm{d}x^\mu \partial_\nu = \delta^\mu_\nu$ よりノルム (1.1.5) と計量 (1.1.6) とが一致することが確認できる。

1.1.2 擬直交群

Lorentz 変換はこの Minkowski 時空上のノルム（計量）を不変に保つ座標変換として導入される[5)]。つまり転置をとると逆変換になる変換の集合、擬直交群 $\mathrm{O}(1,3)$[6)] の要素である。その変換を ${\Lambda^\mu}_\nu$ で表わすことにすると

$$x^\mu \to x'^\mu = {\Lambda^\mu}_\nu x^\nu \tag{1.1.8}$$

と書ける。不変性の要請より

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \to \eta_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu = \eta_{\mu\nu} {\Lambda^\mu}_\rho x^\rho {\Lambda^\nu}_\tau y^\tau = \eta_{\rho\tau} x^\rho y^\tau, \tag{1.1.9}$$

すなわち Lorentz 変換は

$$\eta_{\mu\nu} {\Lambda^\mu}_\rho {\Lambda^\nu}_\tau = \eta_{\rho\tau} \tag{1.1.10}$$

---

4) 素朴な内積、あるいはノルムの条件を満たしていないので単に線型汎函数と述べたほうが良いかもしれない。

5) ノルムを異なる 2 つの 4 元ベクトル間の内積に置き換えても実質的に同じである。座標変換において個々の 4 元ベクトルは別々に動くわけではなく、同じ慣性系（同じ座標で扱われている局所空間）に含まれる 4 元ベクトルはすべて同じ変換を受ける、という気持ち。

6) N 次擬直交群 $\mathrm{O}(p,q)$ は

$$\{O = ({O^\alpha}_\beta) \mid |\eta^{\alpha\mu} {({}^t O)_\mu}^\nu \eta_{\nu\beta} = {(O^{-1})^\alpha}_\beta,\ \mathrm{val}\,[\eta_{\alpha\beta}] = \mathrm{val}\left[\eta^{\alpha\beta}\right] = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{q}),\ p+q=N\} \tag{1.1.7}$$

で定義される。この定義は $\eta_{\alpha\beta} {O^\alpha}_\mu {O^\beta}_\nu = \eta_{\mu\nu}$ の変形である (η-直交 (η-orthogonal) と呼ばれることもあるかもしれない。)。

を満たすものとして定義される。変形すると

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda_{\mu}{}^{\tau}=\delta_{\rho}^{\tau} \tag{1.1.11}$$

になる。ところで適当な変換 T に対して逆変換 T^{-1} が存在すれば $T^{\mu}{}_{\nu}\left(T^{-1}\right)^{\nu}{}_{\rho}=\delta_{\rho}^{\mu}$ と書けるはずであるから、式 (1.1.11) と見比べると

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\tau}{}_{\mu}=\Lambda_{\mu}{}^{\tau}=\left({}^{t}\Lambda\right)^{\tau}{}_{\mu} \tag{1.1.12}$$

より転置が逆変換になっている。以上が Lorentz 変換の定義の確認である。

下添字の量の Lorentz 変換は

$$x_{\mu}\to\Lambda_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu}=x_{\nu}\left({}^{t}\Lambda\right)^{\nu}{}_{\mu}=x_{\nu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu} \tag{1.1.13}$$

に従う。

これまでの計算では計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$（あるいは $\eta^{\mu\nu}$）は一見 Lorentz 変換を受けないものとして扱われている。これは Lorentz 変換がそもそも Minkowski 時空上のノルムを不変に保つように導入された変換であり、計量テンソルが不変に保たれるのは定義そのものだからである。機械的に変換すると

$$\eta_{\mu\nu}\to\Lambda_{\mu}{}^{\rho}\Lambda_{\nu}{}^{\tau}\eta_{\rho\tau}=\eta_{\mu\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}\Lambda_{\nu}{}^{\tau}=\eta_{\mu\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{\tau}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\tau}{}_{\nu}=\eta_{\mu\sigma}\delta_{\nu}^{\sigma}=\eta_{\mu\nu} \tag{1.1.14}$$

ではあるが、これは定義の確認で出てきた式 (1.1.10) そのものである。$\eta^{\mu\nu}$ と δ_{ν}^{μ} とについても定義上不変である。

定数で Lorentz 変換に対して" 不変" な量はもうひとつあり、それは完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ である。$\mathrm{val}\left[\epsilon^{0123}\right]=1$ と定義しておけば、この偶置換は同じ値をもち奇置換は符号が反転する。また添字に重複があればゼロになる。添字の上げ下げはこれまでと同じく計量テンソルを用いてなされるので、添字をすべて下ろせば $\mathrm{val}\left[\epsilon_{0123}\right]=-1$ となることに注意する。完全反対称テンソルは

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\to\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^{0}{}_{\alpha}\Lambda^{1}{}_{\beta}\Lambda^{2}{}_{\gamma}\Lambda^{3}{}_{\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\det\Lambda \tag{1.1.15}$$

のように変換される。$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ がくくり出せてるのは

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}&=-\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\epsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}&&(\text{完全反対称テンソルの添字 }\alpha,\beta\text{ の入れ替え})\\&=-\Lambda^{\nu}{}_{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}&&(\alpha\leftrightarrow\beta\text{ のダミー書き換え})\end{aligned}$$

より添字 $\mu\nu\rho\sigma$ の関係が完全反対称になっているからである。また 4 次元 Minkowski 時空から自身への適当な変換 A の det が

$$\det A=\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A^{0}{}_{\mu}A^{1}{}_{\nu}A^{2}{}_{\rho}A^{3}{}_{\sigma}=-\frac{1}{n!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}A^{\alpha}{}_{\mu}A^{\beta}{}_{\nu}A^{\gamma}{}_{\rho}A^{\delta}{}_{\sigma} \tag{1.1.16}$$

であることを使った。$\det\Lambda$ の値は

$$1=\det{}^t\Lambda\Lambda=(\det\Lambda)^2 \tag{1.1.17}$$

より $\det\Lambda=\pm1$ である。したがって $\det\Lambda=1$ のときは不変であり、そうでなければ符号が反転する。このような変換則のテンソルを擬テンソルと呼ぶ。$\det\Lambda=1$ に含まれる Lorentz 変換は proper Lorentz 変換（$\det\Lambda=-1$ のときは improper Lorentz 変換）と呼ばれる。det の値はプラスかマイナスかの二値であり、パラメータを連続的に変えても一方から他方へは移り得ない。

また、それとは別に式 (1.1.10) において $\rho=\tau=0$ とおくと

$$1=\left(\Lambda^0{}_0\right)^2-\sum_{j=1}^{3}\left(\Lambda^j{}_0\right)^2\geq\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 \tag{1.1.18}$$

から $\Lambda^0{}_0\gtreqless\pm1$ という不連続性も持っていることが分かる。$\Lambda^0{}_0\geq1$ を満たす Lorentz 変換を orthochronous Lorentz 変換、$\Lambda^0{}_0\leq-1$ を満たす Lorentz 変換は anti-orthochronous Lorentz 変換と呼ばれる。以下では基本的に proper-orthochronous Lorentz 変換を扱い、単に Lorentz 変換と書くことにする。proper な時は特殊擬直交群 $\mathrm{SO}(1,3)$ であり、orthochronous か anti-orthochronous かの区別は $\mathrm{SO}^{\pm}(1,3)$ のように添字 $\pm$ で区別する。つまり以下で基本的に扱うのは $\mathrm{SO}^{+}(1,3)$ である。Lorentz 変換のなす群を Lorentz 群と呼ぶ。

上述のように Lorentz 変換は連続的にはつながっていない 4 つの部分に分かれている。proper-orthochronous な場合（$\det\Lambda=1$ かつ $\Lambda^0{}_0\geq1$）は恒等変換 $\mathrm{diag}\,(1,1,1,1)$ を含んでいる。他の 3 つ部分は恒等変換を含んでいない。improper-orthochronous な場合（$\det\Lambda=-1$ かつ $\Lambda^0{}_0\geq1$）で物理的に意味が明確なのは空間成分の符号がすべて反転された $\mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$ であり、空間反転（パリティ変換）を含む。improper-anti-orthochronous な場合（$\det\Lambda=-1$ かつ $\Lambda^0{}_0\leq-1$）で意味が明確なのは時間成分のみの符号が反転された $\mathrm{diag}\,(-1,1,1,1)$ で、時間反転を含む。proper-anti-orthochronous な場合（$\det\Lambda=1$ かつ $\Lambda^0{}_0\leq-1$）は時間と空間との全成分を反転させる $\mathrm{diag}\,(-1,-1,-1,-1)$ を含む。

基本的にダミー添字は変換性に関わらないので、ダミー添字になっていない添字の数に気をつける。ひとつもなければスカラー、1 つであればベクトル（極性ベクトル)、と言う具合であり、それぞれ $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を含んでいれば擬スカラー、擬ベクトル（軸性ベクトル）と呼ばれる。

1.1.3　微小変換

Lorentz 変換のパラメータを ω で表わすことにすると、その低次の項は

$$\Lambda^\mu{}_\nu=\delta^\mu_\nu+\omega^\mu{}_\nu+O\left(\omega^2\right) \tag{1.1.19}$$

と書くことができる。式 (1.1.11) より

$$\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda_\mu{}^\tau=\left(\delta^\mu_\rho+\omega^\mu{}_\rho+O\left(\omega^2\right)\right)\left(\delta^\tau_\mu+\omega_\mu{}^\tau+O\left(\omega^2\right)\right)=\delta^\tau_\rho+\omega^\tau{}_\rho+\omega_\rho{}^\tau+O\left(\omega^2\right)=\delta^\tau_\rho \tag{1.1.20}$$

であるから、パラメータの 1 次までで満たすべき条件は

$$\omega^{\tau}{}_{\rho} + \omega_{\rho}{}^{\tau} = 0 \tag{1.1.21}$$

となる。$\omega^{\mu}{}_{\nu}$ は反対称になっており、Lorentz 変換の自由度は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ になっている。この反対称なパラメータは

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}(\omega^{\mu}{}_{\nu} - \omega_{\nu}{}^{\mu}) = \frac{1}{2}(\delta^{\mu}_{\rho}\omega^{\rho\sigma}\eta_{\sigma\nu} - \eta_{\nu\rho}\omega^{\rho\sigma}\delta^{\mu}_{\sigma}) = \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}(\delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\sigma\nu} - \delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\nu\rho}) \tag{1.1.22}$$

と変形できるので、

$$\left(\tilde{M}_{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\nu\sigma} - \delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\nu\rho} \tag{1.1.23}$$

とおけば[7]Lorentz 変換の 1 次近似は

$$x'^{\mu} \simeq \left(\delta^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\left(\tilde{M}_{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu}\right)x^{\nu} \tag{1.1.24}$$

で与えられる。$(\tilde{M}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}$ は添字のペア $\rho\sigma$ と $\mu\nu$ とにおいてそれぞれ反対称で Lorentz 群の生成子（代数 $\mathfrak{so}^{+}(1,3)$ の要素）であり[8]、その行列表示は

$$\mathrm{val}\left[\left(\tilde{M}_{k0}\right)^{\mu}{}_{\nu}\right] = \begin{pmatrix} 0 & \delta^k_1 & \delta^k_2 & \delta^k_3 \\ \delta^k_1 & 0 & & \\ \delta^k_2 & & 0 & \\ \delta^k_3 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{val}\left[\left(\tilde{M}_{jk}\right)^{\mu}{}_{\nu}\right] = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -\delta^j_1\delta^2_k & \delta^j_3\delta^1_k \\ & \delta^j_1\delta^2_k & 0 & -\delta^j_2\delta^3_k \\ & -\delta^j_3\delta^1_k & \delta^j_2\delta^3_k & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1.25}$$

となる。生成子の積は式 (1.1.23) より

$$\begin{aligned} \left(\tilde{M}_{\mu\nu}\right)^{\alpha}{}_{\gamma}\left(\tilde{M}_{\rho\sigma}\right)^{\gamma}{}_{\beta} &= (\delta^{\alpha}_{\mu}\eta_{\gamma\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}\eta_{\gamma\mu})(\delta^{\gamma}_{\rho}\eta_{\beta\sigma} - \delta^{\gamma}_{\sigma}\eta_{\beta\rho}) \\ &= \delta^{\alpha}_{\mu}\eta_{\rho\nu}\eta_{\beta\sigma} - \delta^{\alpha}_{\mu}\eta_{\sigma\nu}\eta_{\beta\rho} - \delta^{\alpha}_{\nu}\eta_{\rho\mu}\eta_{\beta\sigma} + \delta^{\alpha}_{\nu}\eta_{\sigma\mu}\eta_{\beta\rho} \\ &= -\left(\eta_{\mu\rho}\delta^{\alpha}_{\nu}\eta_{\beta\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\delta^{\alpha}_{\nu}\eta_{\beta\rho} - \eta_{\nu\rho}\delta^{\alpha}_{\mu}\eta_{\beta\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\delta^{\alpha}_{\mu}\eta_{\beta\rho}\right) \end{aligned} \tag{1.1.26}$$

に分解できるので、添字の交換（$\mu \leftrightarrow \rho$ と $\nu \leftrightarrow \sigma$）に気をつければ特に追加の計算をすることなく Lorentz 変換の生成子の満たす交換関係

$$[\tilde{M}_{\mu\nu}, \tilde{M}_{\rho\sigma}] = -\left(\eta_{\mu\rho}\tilde{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\tilde{M}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\tilde{M}_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\tilde{M}_{\mu\rho}\right) \tag{1.1.27}$$

7) 物理の慣習に従うのであれば実内積においてさえ生成子にはエルミート性を課すが、ここではとりあえず反対称性だけに留めている。エルミートな定義にするには例えば $\omega^{\rho\sigma} \to -i\omega^{\rho\sigma}$ かつ $(\tilde{M}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} \to i(\tilde{M}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}$ とすれば良い。ここではチルダをつけることで通常の本とノーテーションが違うことを明示しているつもりで、たとえば $(M_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} = i(\tilde{M}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}$。

8) ここでの $\omega^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}(\tilde{M}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}$ はパラメータ $\omega^{\mu\nu}$（数）と生成子 $(\tilde{M}_{\sigma\rho})^{\mu}{}_{\nu}$（演算子）とを分離している。言い換えると変換則を担う添字 $({}^{\mu}{}_{\nu})$ と単に縮約のための添字 $({}^{\rho\sigma}$ or ${}_{\rho\sigma})$ との分離を行なっている。

が得られる。同じことだが行列表示 (1.1.25) を用いた計算からもこの関係式は確認できる。生成子の指数写像を考えれば Lorentz 変換の一般形が得られるので

$$\Lambda(\omega)^{\mu}{}_{\nu} = \exp\left(\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\tilde{M}_{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu} \tag{1.1.28}$$

であることが分かる。指数函数の形なので転置をとれば $(\tilde{M}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu}$ の反対称性から逆変換になっていることが具体的に確認できる。

式 (1.1.25) で Lorentz 変換の独立な生成子を 6 つ全てを行列で表わしたことになる。この表わし方からも分かるように添字に時間成分を含むか空間成分のみを含むかで似た形になっている。そこで

$$\tilde{J}_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\epsilon_{ijk}\tilde{M}_{jk}, \qquad \tilde{K}_i = \tilde{M}_{i0}\left(= -\tilde{M}_{0i}\right), \qquad (i,j,k = 1,2,3) \tag{1.1.29}$$

のように回転生成子 $\tilde{J}_i$ とブースト生成子 $\tilde{K}_i$ とを導入して明示的に区別する。ただし ϵ_{ijk} は $\mathrm{val}\left[\epsilon_{123}\right] = 1$ を満たす空間成分における完全反対称テンソルであり（Minkowski 時空上で定義されてる $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ と全く別の量で、添字の上下による区別は無い）、回転生成子とブースト生成子とにおいては添字の上下の区別は無いものとする。たとえば回転生成子とブースト生成子との第 1 成分は

$$\tilde{J}_1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{M}_{23} - \tilde{M}_{32}\right) = \tilde{M}_{23}, \qquad \tilde{K}_1 = \tilde{M}_{10} \tag{1.1.30}$$

となる。両生成子は交換関係

$$[\tilde{J}_i, \tilde{J}_j] = \epsilon_{ijk}\tilde{J}_k, \quad [\tilde{J}_i, \tilde{K}_j] = \epsilon_{ijk}\tilde{K}_k, \quad [\tilde{K}_i, \tilde{K}_j] = -\epsilon_{ijk}\tilde{J}_k \tag{1.1.31}$$

を満たすことが上で示した行列表示の計算から分かる。これは交換関係 (1.1.27) を分解したもので、とくにひとつ目の交換関係から $\mathfrak{so}(3)$ が $\mathfrak{so}^{+}(1,3)$ の部分代数を成していることが分かる。ここで独立な実パラメータを $\theta_i = (\omega^{23}, \omega^{31}, \omega^{12})$ と $\tau_i = (\omega^{01}, \omega^{02}, \omega^{03})$ のように書き換えると Lorentz 変換は

$$\Lambda(\theta,\tau)^{\mu}{}_{\nu} = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\omega^{jk}\tilde{M}_{jk} + \sum_{i=1}^{3}\omega^{i0}\tilde{M}_{i0}\right)^{\mu}{}_{\nu} = \exp\left(\sum_{i=1}^{3}\theta_i\tilde{J}_i - \sum_{i=1}^{3}\tau_i\tilde{K}_i\right)^{\mu}{}_{\nu} \tag{1.1.32}$$

と書き直せる。式 (1.1.30) にある生成子について計算すると

$$\mathrm{val}\left[\left(e^{\theta_1\tilde{J}_1}\right)^{\mu}{}_{\nu}\right] = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{val}\left[\left(e^{-\tau_1\tilde{K}_1}\right)^{\mu}{}_{\nu}\right] = \begin{pmatrix} \cosh\tau_1 & -\sinh\tau_1 & & \\ -\sinh\tau_1 & \cosh\tau_1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.33}$$

になることが確認できる。

Lorentz 変換は任意のパラメータにおいて $\det(\Lambda(\theta,\tau)) = 1$ を満たすので

$$1 = \det(\Lambda(\theta,\tau)) = \exp\left(\sum_{i=1}^{3}\theta_i \mathrm{tr}\,\tilde{J}_i - \sum_{i=1}^{3}\tau_i \mathrm{tr}\,\tilde{K}_i\right), \tag{1.1.34}$$

すなわち生成子は $\mathrm{tr}\,\tilde{J}_i = \mathrm{tr}\,\tilde{K}_i = 0$（トレースレス）であることが要請される[9)]。回転生成子同士の交換関係は閉じているがブースト生成子と可換ではないことから、両者を書き分けたところで指数関数で表わされた Lorentz 変換の扱いが簡単になるわけではない。ただし交換関係の議論で確認したように回転変換のみを考えれば閉じている、つまり回転群 SO(3) が Lorentz 群 $\mathrm{SO}^+(1,3)$ の部分群になっている。この表記法によって物理的なイメージはつかみやすくなると思われる。

1.1.4 まとめ

座標の (proper-orthochronous) Lorentz 変換 (1.1.8) は Minkowski 時空でのノルム（計量）を不変に保つ変換 (1.1.10)、つまり $\mathrm{SO}^+(1,3)$ の要素であり、微小変換の議論からパラメータを 6 つもつ指数写像 (1.1.28) として表わされる。添字に時間成分を含むかどうか（あるいは空間成分のみかどうか）で生成子を整理すると、物理的に意味の明確なブーストと空間回転とに区別された式 (1.1.32) の形でも表わされる。

1.1.5 補: 特殊線型群との関係

ここで

$$\tilde{L}_j = \frac{1}{2}\left(\tilde{J}_j - i\tilde{K}_j\right), \qquad \tilde{R}_j = \frac{1}{2}\left(\tilde{J}_j + i\tilde{K}_j\right) \tag{1.1.35}$$

のように生成子を $\tilde{L}_j$ と $\tilde{R}_j$ とで書き直してみる。$\tilde{L}_j, \tilde{R}_j$ は複素数に拡張されているが、内積は引き続き実内積として考える[10)]。$\tilde{L}_j$ と $\tilde{R}_j$ とは転置で ${}^t\tilde{L}_j = -\tilde{R}_j$、複素共役で $\tilde{L}_j^* = \tilde{R}_j$ のように互いに変換し合うので、エルミート共役は

$$\tilde{L}_j^\dagger = -\tilde{L}_j, \quad \tilde{R}_j^\dagger = -\tilde{R}_j \tag{1.1.36}$$

を満たす。つまりそれぞれ反エルミートである。また $\tilde{J}_i$ と $\tilde{K}_i$ との線型和なのでトレースレスでもある。交換関係は

$$[\tilde{L}_i, \tilde{L}_j] = \epsilon_{ijk}\tilde{L}_k, \quad [\tilde{L}_i, \tilde{R}_j] = 0, \quad [\tilde{R}_i, \tilde{R}_j] = \epsilon_{ijk}\tilde{R}_k \tag{1.1.37}$$

で示されるように、それぞれ独立な形で SU(2) の代数 $\mathfrak{su}(2)$ と同じ交換関係を満たしている。

式 (1.1.35) を Lorentz 変換 (1.1.32) に代入すると

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{3}\theta_i\tilde{J}_i - \sum_{i=1}^{3}\tau_i\tilde{K}_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{3}\xi_i\tilde{L}_i\right)\exp\left(\sum_{i=1}^{3}\xi_i^*\tilde{L}_i^*\right), \qquad \xi_i = \theta_i - i\tau_i \tag{1.1.38}$$

9) 文章の流れ上 $\tilde{J}_i$, $\tilde{K}_i$ の段階でトレースレスについて述べているが、$(M^\sigma{}_\rho)^\mu{}_\nu$ もトレースレスである。

10) 座標の Lorentz 変換において複素内積は考えないが、既に述べられている転置かつ複素共役をとる操作としてエルミート共役 † は考える。

となる。$\exp\left(\sum_{i=1}^{3}\xi_i\tilde{L}_i\right)$ のエルミート共役は

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{3}\xi_i\tilde{L}_i\right)^{\dagger}=\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}\xi_i^*\tilde{L}_i\right) \tag{1.1.39}$$

であるから、一般には逆変換になっておらず SU(2) に属しているとは言えない。一方で

$$\det\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{3}\xi_i\tilde{L}_i\right)\right]=\exp\left(\sum_{i=1}^{3}\xi_i\mathrm{tr}\,\tilde{L}_i\right)=1 \qquad \because\ \mathrm{tr}\,\tilde{J}_i=\mathrm{tr}\,\tilde{K}_i=0 \tag{1.1.40}$$

は満たすので $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に属していることは分かる。つまり関係式 (1.1.37) は $\mathfrak{so}^+(1,3)$ の交換関係であると同時に $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の交換関係でもあり[11)]、Lorentz 群 $\mathrm{SO}^+(1,3)$ と特殊線型群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ とをつなぐ上で基本となる。

ブーストがゼロ $\tau=0$ の変換の集合が SO(3)（$\mathrm{SO}^+(1,3)$ の部分群）であるように、パラメータが実 $\xi^*=\xi$ な変換の集合が SU(2)（$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の部分群）になっている。これが非相対論で見るスピンに相当する。

1.2 スピノルの導入

1.2.1 特殊線型群

ここで一度 Lorentz 群そのものからは離れて特殊線型群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ について述べる。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上の線型変換: $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ のうち行列式が 1 になるもののなす群である[12)]。変換 ${M^a}_b\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ $(a,b=0,1)$[13)]は定義から

$$1=\det M=\frac{1}{2!}\epsilon_{ab}\epsilon^{cd}{M^a}_c{M^b}_d=\epsilon_{ab}{M^a}_0{M^b}_1=-\epsilon_{ab}{M^a}_1{M^b}_0 \tag{1.2.1}$$

と書ける。ここで ϵ_{ab} と ϵ^{ab} は完全反対称な量で

$$\mathrm{val}\left[\epsilon_{ab}\right]=\mathrm{val}\left[\epsilon^{ab}\right]=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

と表わされるものとする。これは $\epsilon_{ac}{}^t\epsilon^{cb}=\epsilon_{ac}\epsilon^{bc}=\delta^a_b$ を満たすことが確認できる。これより $\det M=1$ は

$$\begin{cases}\epsilon_{ab}{M^a}_0{M^b}_1=1\\ \epsilon_{ab}{M^a}_1{M^b}_0=-1\end{cases}\quad\longrightarrow\quad\epsilon_{ab}{M^a}_c{M^b}_d=\epsilon_{cd} \tag{1.2.3}$$

のように変形できる。

11） $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上で考えている点が $\mathfrak{su}(2)$ と違う。式 (1.1.39) にあるように、係数が複素数なのでエルミート共役をとっても一般には逆変換にならない。

12） 複素数としての自由度は $2^2-1=3$（行列式が 1 となる拘束条件が 1 つ）である。実数としての自由度は 6 である。

13） 変換 M が $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の要素で ${M^a}_b$ はその成分で $\mathbb{C}$ の要素と述べたほうより正確だが、1.1.1 章の冒頭で述べたベクトルの表記と同じく、ここでは略記としてこの書き方を用いる。

1.2.2 不変量

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が作用する線型空間の任意の 2 要素 u^a, v^b[14] との縮約は

$$\epsilon_{cd} M^c{}_a M^d{}_b u^a v^b = \epsilon_{ab} u^a v^b \tag{1.2.4}$$

になるので、

$$u'^a = M^a{}_b u^b, \qquad v'^a = M^a{}_b v^b \tag{1.2.5}$$

なる線形空間の要素 u'^a, v'^b を考えれば

$$\epsilon_{cd} u'^c v'^d = \epsilon_{ab} u^a v^b \tag{1.2.6}$$

と書ける。これより u^a と v^b とが共に同じ $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の変換を受けると $\epsilon_{ab}u^a v^b$ は不変な量（スカラー量）になっていることが確認できる。ここで

$$u_a = u^b \epsilon_{ba} \tag{1.2.7}$$

のように下添字の記法を導入すると $\epsilon_{ab}u^a v^b = u_b v^b = -u^a v_a$ とも表わせる。計量テンソルは対称なので縮約を取る際に添字の位置を気にする必要は特になかったが、これは反対称なので添字の位置に気をつける必要がある。この $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が作用する線形空間の要素 u^a あるいは u_a のことをスピノル（スピナー）と言う。2 つのスピノルに対して $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の下で不変な量を与える写像（スピノルにおける内積のようなもの）として $\{u, v\} = \epsilon_{ab}u^a v^b$ を与えておく。この写像において同じスピノル同士の値はゼロになる。

1.2.3 反傾表現（双対表現）

$\det M = 1$ と同義な式 (1.2.3) に ${}^t M^{-1}{}_e{}^c$ と ${}^t\epsilon^{df}$ を作用させると[15]

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ab} {}^t M^{-1}{}_e{}^c {}^t M_c{}^a M^b{}_d {}^t\epsilon^{df} &= {}^t M^{-1}{}_e{}^c \epsilon_{cd} \epsilon^{fd} \\
\epsilon_{ab} \delta^a_e M^b{}_d {}^t\epsilon^{df} &= {}^t M^{-1}{}_e{}^c \delta^f_c \\
\epsilon_{eb} M^b{}_d {}^t\epsilon^{df} &= {}^t M^{-1}{}_e{}^f
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

が得られる。つまり $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ において完全反対称な量で挟んだ変換は、その転置を取った逆変換に等しい。下添字の量の変換は $u'_a = u'^b \epsilon_{ba}$ で与えられるので

$$u'_a = M^b{}_c u^c \epsilon_{ba} = \epsilon_{ba} M^b{}_d \epsilon_{ec} \epsilon^{ed} u^c = (-\epsilon_{ab})\, M^b{}_d {}^t\epsilon^{de} \,(-u^c \epsilon_{ce}) = {}^t M^{-1}{}_a{}^e u_e = u_e M^{-1e}{}_a \tag{1.2.9}$$

に従う。この式 (1.2.9) が上添字の変換則 (1.2.5) に対応する下添字での変換則である。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は群なので、上添字の変換 $M_1, M_2 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して $M_1 M_2 = M_3$ なる $M_3 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が存在する

14） 九後さんの本 [1] では下添字の量が標準的に扱われているがここでは高崎さんの本 [3] と同じく上添字を標準的な表記としている。

15） $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は行列式が 1 の集合なので逆変換が必ず存在する。

ように、下添字の変換も ${}^tM_1{}^{-1}\,{}^tM_2{}^{-1} = {}^tM_3{}^{-1}$ のように同値なものとして存在している。下添字の量は反傾表現、あるいは双対表現と呼ばれる。

1.2.4　複素共役表現

複素共役表現も $M_1^* M_2^* = M_3^*$ のように考えられる。変換則は $(u'^a)^* = (M^a{}_b)^*\,(u^b)^*$ のように複素共役を取ることで得られる。これも一つの表現になっていることを明示するため、複素共役を

$$u^{*\dot{a}} = (u^a)^* \tag{1.2.10}$$

のように添字の上に点を付けて区別する記法を導入する。これより上の変換則は

$$u'^{*\dot{a}} = M^{*\dot{a}}{}_{\dot{b}}\, u^{*\dot{b}} \tag{1.2.11}$$

と表わされる。またここでは点無しスピノルの複素共役をとって複素共役表現を導入しているが、例えば $w^{\dot{a}} = u^{*\dot{a}}$ のように複素共役記号が露わに書かれていない

$$w'^{\dot{a}} = M^{*\dot{a}}{}_{\dot{b}}\, w^{\dot{b}} \tag{1.2.12}$$

のような表記もありうる。この場合は $w^{\dot{a}}$ が複素共役表現の要素になっているので、その複素共役を取れば

$$w'^{*a} = M^a{}_b\, w^{*b} \tag{1.2.13}$$

ということになる。下添字にも同様にして点付き添字の記法が導入される。スカラー量は点無しでの上下添字での縮約、あるいは点付きでの上下添字での縮約によって得られる。

1.2.5　まとめ

まとめると、変換 $M^a{}_b \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して

$$\begin{tikzcd} u'^a = M^a{}_b u^b \arrow[r, "\text{complex conjugate}"] \arrow[d, "\text{contragradient (dual)}"'] & u'^{*\dot{a}} = M^{*\dot{a}}{}_{\dot{b}}\, u^{*\dot{b}} \arrow[d] \\ u'_a = {}^tM^{-1}{}_a{}^b u_b \arrow[r] & u'^*{}_{\dot{a}} = M^{-1\dagger}{}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\, u^*{}_{\dot{b}} \end{tikzcd} \tag{1.2.14}$$

のように 3 つの変換則が別途与えられる。$\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ と $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ とは点無しと変わらず

$$\mathrm{val}\left[\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\right] = \mathrm{val}\left[\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.15}$$

で与えられる。これは例えば $\mathrm{val}\left[(\epsilon_{ab})^*\right] = \mathrm{val}\left[\epsilon^*{}_{\dot{a}\dot{b}}\right] = \mathrm{val}\left[\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\right]$ のように下付き添字の量で確認すれば問題ないことが分かる。

1.3　スピノルと Lorentz 変換

再び Lorentz 変換の議論に戻る。Lorentz 群 $\mathrm{SO}^+(1,3)$ を考える際に見ていたのは Minkowski 時空上での座標の足 $\mu\ (=0,1,2,3)$ に対する縮約のルールだったが、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ では $a\ (=0,1)$ のように別の縮約の足を見ていた。したがって両者をつなげるにはその足の変換を行なう必要がある。

1.3.1　座標のスピノル表示

Minkowski 時空の計量は $\mathrm{d}s^2=\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ で与えられる[16)]が、これを変形すると

$$\mathrm{d}s^2=\left(\mathrm{d}x^0+\mathrm{d}x^3\right)\left(\mathrm{d}x^0-\mathrm{d}x^3\right)-\left(\mathrm{d}x^1-i\mathrm{d}x^2\right)\left(\mathrm{d}x^1+i\mathrm{d}x^2\right)=\det\begin{pmatrix}\mathrm{d}x^0+\mathrm{d}x^3 & \mathrm{d}x^1-i\mathrm{d}x^2\\ \mathrm{d}x^1+i\mathrm{d}x^2 & \mathrm{d}x^0-\mathrm{d}x^3\end{pmatrix} \tag{1.3.1}$$

のように det で表わすことが出来る。ここで物理でよく用いる Pauli 行列 $\{\sigma_\mu\}$[17)]を用いれば

$$\mathrm{d}s^2=\det\left(\mathrm{d}x^\mu{\sigma_\mu}^{a\dot{a}}\right)=\frac{1}{2!}\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}{\sigma_\mu}^{a\dot{a}}{\sigma_\nu}^{b\dot{b}}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{1.3.4}$$

とも表わされる[18)]。ここでは $\mathrm{SO}^+(1,3)$ の足が下付きのときは $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の足はどちらも上付きかつ点なしを左、点付きを右（添字が ${\sigma_\mu}^{a\dot{a}}$）で表わされるものを基準とし、Pauli 行列の成分とそのまま対応するように決めている。σ_i のように $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の足が明記されていない場合は Pauli 行列そのものとして扱っている。また $\mathrm{SO}^+(1,3)$ の足が上付きの Pauli 行列 σ^μ は計量テンソルとの縮約によって与えられるものである ($\sigma^\mu=\eta^{\mu\nu}\sigma_\nu$)。これより計量テンソルは

$$\eta_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}{\sigma_\mu}^{a\dot{a}}{\sigma_\nu}^{b\dot{b}}=\frac{1}{2}{\sigma_\mu}^{a\dot{a}}\sigma_{\nu a\dot{a}} \tag{1.3.6}$$

のように分解されることが確認できる。

ここで導入されている点無しと点付きと両方の足が付いてる量は（2 階）混合スピノルと呼ばれる。標準表現として変換される足と複素表現として変換される足と両方が含まれていることで、式

16） ここで扱っているのは平坦な時空なので d をつけてもつけなくても同じである。

17） Pauli 行列は

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix} & -i\\ i & \end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

で表わされるエルミートかつユニタリな行列である。相対論の文脈では単位行列を σ_0 として含めることがあり、ここではそれに従っている。基本的には SU(2) の生成子と関連する行列として（トレースレスではないので）σ_0 を除いたものとして扱われる。

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}\sigma_0+i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{1.3.3}$$

を満たす。

18）

$$\frac{1}{2!}\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}{\sigma_\mu}^{a\dot{a}}{\sigma_\nu}^{b\dot{b}}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu=\frac{1}{2!}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\left({\sigma_\mu}^{0\dot{a}}{\sigma_\nu}^{1\dot{b}}-{\sigma_\mu}^{1\dot{a}}{\sigma_\nu}^{0\dot{b}}\right)\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu=\left({\sigma_\mu}^{0\dot{0}}{\sigma_\nu}^{1\dot{1}}-{\sigma_\mu}^{1\dot{0}}{\sigma_\nu}^{0\dot{1}}\right)\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{1.3.5}$$

(1.1.38) で示される（生成子 $\tilde{L}_k$ とその複素共役とが共に作用する）変換則との対応がつく。4 つの実パラメータで指定される Minkowski 時空上の点は 2 次のエルミートな量に置き換えられている[19]。Minkowski 時空上の点に対して

$$x^{a\dot{a}} = x^{\mu}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}} \tag{1.3.7}$$

という記法を導入すれば、両者の成分の対応は

$$\begin{cases} x^{0\dot{0}} = x^0 + x^3 \\ x^{0\dot{1}} = x^1 - ix^2 \\ x^{1\dot{0}} = x^1 + ix^2 \\ x^{1\dot{1}} = x^0 - x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^0 = \dfrac{1}{2}\left(x^{0\dot{0}} + x^{1\dot{1}}\right) \\ x^1 = \dfrac{1}{2}\left(x^{0\dot{1}} + x^{1\dot{0}}\right) \\ x^2 = \dfrac{i}{2}\left(x^{0\dot{1}} - x^{1\dot{0}}\right) \\ x^3 = \dfrac{1}{2}\left(x^{0\dot{0}} - x^{1\dot{1}}\right) \end{cases} \tag{1.3.8}$$

となっている。計量は

$$\mathrm{d}s^2 = \det\left(\mathrm{d}x^{a\dot{a}}\right) = \frac{1}{2!}\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\mathrm{d}x^{a\dot{a}}\mathrm{d}x^{b\dot{b}} \tag{1.3.9}$$

と表わされる。

式 (1.3.6) の両辺に計量テンソルを乗じると

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}}\sigma^{\nu}{}_{a\dot{a}} = \delta^{\nu}_{\mu} \tag{1.3.10}$$

が得られる[20]。また

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}}\sigma^{\mu}{}_{b\dot{b}} = \delta^a_b\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} \tag{1.3.12}$$

のように $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の足の縮約を取っていない関係式も成り立つ。これらの基本的な関係式を使えばエルミートな 2 階混合スピノル $x^{a\dot{a}}$ から Minkowski 時空の座標が

$$x^{\mu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}x^{a\dot{a}} \tag{1.3.13}$$

で得られる。

点無し添字と点付き添字はそれぞれ式 (1.2.14) に示される変換則に従う。例えば 3 階混合スピノルの変換則は

$$\psi^{a\dot{a}}{}_{\dot{b}} \longrightarrow \psi'^{a\dot{a}}{}_{\dot{b}} = N^a{}_c N^{*\dot{a}}{}_{\dot{c}} N^{-1\dagger}{}_{\dot{b}}{}^{\dot{d}}\psi^{c\dot{c}}{}_{\dot{d}} = N^a{}_c\psi^{c\dot{c}}{}_{\dot{d}}N^{\dagger}{}_{\dot{c}}{}^{\dot{a}}N^{-1*\dot{d}}{}_{\dot{b}} \qquad \left(N^a{}_b \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\right) \tag{1.3.14}$$

のように表わされる。複数の添字があっても基本的には添字 1 つの場合の繰り返しである。具体的な確認を 2 階混合スピノルの場合で行なっていく。

19） 混合スピノルでなければ、例えば x^{ab} と $(x^{\dagger})^{ab} = x^{\dot{b}\dot{a}}$ との比較で、値として一致するかどうか以前に明示的に閉じた表わされ方になっていない。混合スピノルであれば $x^{a\dot{b}}$ と $(x^{\dagger})^{a\dot{b}} = x^{b\dot{a}}$ となって閉じている。

20） 時空座標の添字が上付きで、混合スピノルの添字が下付きの場合を明示的に書けば

$$\mathrm{val}\left[\sigma^{\mu}{}_{a\dot{a}}\right] = \mathrm{val}\left[\eta^{\mu\nu}\sigma_{\nu}{}^{b\dot{b}}\epsilon_{ba}\epsilon_{\dot{b}\dot{a}}\right] = {}^t\sigma_{\mu} = \sigma^*_{\mu} \qquad \left(\mathrm{val}\left[\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}}\right] = \sigma_{\mu}\right) \tag{1.3.11}$$

で与えられる。まとめると $\mathrm{val}\left[\sigma^{\mu}{}_{\dot{a}a}\right] = \sigma_{\mu} = \mathrm{val}\left[\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}}\right]$ かつ $\mathrm{val}\left[\sigma_{\mu\dot{a}a}\right] = \sigma^{\mu} = \mathrm{val}\left[\sigma^{\mu a\dot{a}}\right]$。

1.3.2 Lorentz 変換とスピノルの変換

スピノルの足で表わされた座標の変換は、Lorentz 変換 (1.1.8) より

$$x'^{a\dot{a}} = \sigma_\mu{}^{a\dot{a}} x'^\mu = \sigma_\mu{}^{a\dot{a}} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = \sigma_\mu{}^{a\dot{a}} \Lambda^\mu{}_\nu \frac{1}{2} \sigma_\rho{}^{b\dot{b}} \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} x^\rho = \left(\frac{1}{2}\sigma_\mu{}^{a\dot{a}} \Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu{}_{b\dot{b}}\right)\left(\sigma_\rho{}^{b\dot{b}} x^\rho\right) = \Lambda^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}} x^{b\dot{b}} \tag{1.3.15}$$

と書ける。ここでは便宜的に

$$\Lambda^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}} = \frac{1}{2}\sigma_\mu{}^{a\dot{a}} \Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} \tag{1.3.16}$$

で示される略記（$\mu \to a\dot{a}$）を使っている。これは式 (1.3.10) と (1.3.11) とからも分かるように相似変換になっており、Lorentz 変換が式 (1.1.38) と書けることより

$$\Lambda^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}} = \frac{1}{2}\sigma_\mu{}^{a\dot{a}} \exp\left(\xi_k \tilde{L}_k + \xi_k^* \tilde{L}_k^*\right)^\mu{}_\nu \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} = \delta^a_b \delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} + \frac{1}{2}\sigma_\mu{}^{a\dot{a}} \left(\xi_k \tilde{L}_k + \xi_k^* \tilde{L}_k^*\right)^\mu{}_\nu \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} + \cdots \tag{1.3.17}$$

となる。

次に 2 項目を $\tilde{L}_k$, $\tilde{R}_k = \tilde{L}_k^*$ の $k = 1, 2$ の場合について具体的に計算する。それぞれ行列で表示すると

$$\mathrm{val}\left[\tilde{L}_1{}^\mu{}_\nu\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & & \\ -i & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{val}\left[\tilde{L}_2{}^\mu{}_\nu\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & & -i & \\ & 0 & & 1 \\ -i & & 0 & \\ & -1 & & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.18}$$

である。まず $k = 1$ について添字が上下された混合スピノル (1.3.11) に注意して計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_\mu{}^{a\dot{0}} \tilde{L}_1{}^\mu{}_\nu \sigma^\nu{}_{b\dot{0}} &= \frac{1}{4}\left(-i\sigma_0{}^{a\dot{0}}\sigma^1{}_{b\dot{0}} - i\sigma_1{}^{a\dot{0}}\sigma^0{}_{b\dot{0}} - \sigma_2{}^{a\dot{0}}\sigma^3{}_{b\dot{0}} + \sigma_3{}^{a\dot{0}}\sigma^2{}_{b\dot{0}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-i\delta^a_0\delta^1_b - i\delta^a_1\delta^0_b - i\delta^a_1\delta^0_b - i\delta^a_0\delta^1_b\right) \\ &= -\frac{i}{2}\left(\delta^a_0\delta^1_b + \delta^a_1\delta^0_b\right) \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

かつ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_\mu{}^{a\dot{0}} \tilde{L}_1{}^\mu{}_\nu \sigma^\nu{}_{b\dot{1}} &= \frac{1}{4}\left(-i\sigma_0{}^{a\dot{0}}\sigma^1{}_{b\dot{1}} - i\sigma_1{}^{a\dot{0}}\sigma^0{}_{b\dot{1}} - \sigma_2{}^{a\dot{0}}\sigma^3{}_{b\dot{1}} + \sigma_3{}^{a\dot{0}}\sigma^2{}_{b\dot{1}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-i\delta^a_0\delta^0_b - i\delta^a_1\delta^1_b + i\delta^a_1\delta^1_b + i\delta^a_0\delta^0_b\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

より、他の成分も同様に計算すると

$$\frac{1}{2}\sigma_\mu{}^{a\dot{a}} \tilde{L}_1{}^\mu{}_\nu \sigma^\nu{}_{b\dot{b}} = -\frac{i}{2}\left(\delta^a_0\delta^1_b + \delta^a_1\delta^0_b\right) \times \delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} \tag{1.3.21}$$

が求まる。$\tilde{R}_1{}^{\mu}{}_{\nu} = \tilde{L}_1^{*\mu}{}_{\nu}$ については

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{0\dot{a}}\tilde{L}_1^{*\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{0\dot{b}} = \frac{1}{4}\left(i\sigma_0{}^{0\dot{a}}\sigma^1{}_{0\dot{b}} + i\sigma_1{}^{0\dot{a}}\sigma^0{}_{0\dot{b}} - \sigma_2{}^{0\dot{a}}\sigma^3{}_{0\dot{b}} + \sigma_3{}^{0\dot{a}}\sigma^2{}_{0\dot{b}}\right) = \frac{i}{2}\left(\delta^{\dot{a}}_{\dot{0}}\delta^{\dot{1}}_{\dot{b}} + \delta^{\dot{a}}_{\dot{1}}\delta^{\dot{0}}_{\dot{b}}\right) \tag{1.3.22}$$

かつ

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{0\dot{a}}\tilde{L}_1^{*\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{1\dot{b}} = \frac{1}{4}\left(i\sigma_0{}^{0\dot{a}}\sigma^1{}_{1\dot{b}} + i\sigma_1{}^{0\dot{a}}\sigma^0{}_{1\dot{b}} - \sigma_2{}^{0\dot{a}}\sigma^3{}_{1\dot{b}} + \sigma_3{}^{0\dot{a}}\sigma^2{}_{1\dot{b}}\right) = 0 \tag{1.3.23}$$

と計算され、同様に他の成分も計算することで

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}}\tilde{L}_1^{*\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{b}} = \delta^a_b \times \frac{i}{2}\left(\delta^{\dot{a}}_{\dot{0}}\delta^{\dot{1}}_{\dot{b}} + \delta^{\dot{a}}_{\dot{1}}\delta^{\dot{0}}_{\dot{b}}\right) \tag{1.3.24}$$

が得られる。$k = 2$ は

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{0}}\tilde{L}_2{}^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{0}} = \frac{1}{4}\left(-i\sigma_0{}^{a\dot{0}}\sigma^2{}_{b\dot{0}} - i\sigma_2{}^{a\dot{0}}\sigma^0{}_{b\dot{0}} + \sigma_1{}^{a\dot{0}}\sigma^3{}_{b\dot{0}} - \sigma_3{}^{a\dot{0}}\sigma^1{}_{b\dot{0}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\delta^a_0\delta^1_b + \delta^a_1\delta^0_b\right), \tag{1.3.25}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{0}}\tilde{L}_2{}^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{1}} = \frac{1}{4}\left(-i\sigma_0{}^{a\dot{0}}\sigma^2{}_{b\dot{1}} - i\sigma_2{}^{a\dot{0}}\sigma^0{}_{b\dot{1}} + \sigma_1{}^{a\dot{0}}\sigma^3{}_{b\dot{1}} - \sigma_3{}^{a\dot{0}}\sigma^1{}_{b\dot{1}}\right) = 0 \tag{1.3.26}$$

より

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}}\tilde{L}_2{}^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{b}} = -\frac{i}{2}\left(-i\delta^a_0\delta^1_b + i\delta^a_1\delta^0_b\right) \times \delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} \tag{1.3.27}$$

が得られる。同様に複素共役についても計算すると

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{0\dot{a}}\tilde{L}_2^{*\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{0\dot{b}} = \frac{1}{4}\left(i\sigma_0{}^{0\dot{a}}\sigma^2{}_{0\dot{b}} + i\sigma_2{}^{0\dot{a}}\sigma^0{}_{0\dot{b}} + \sigma_1{}^{0\dot{a}}\sigma^3{}_{0\dot{b}} - \sigma_3{}^{0\dot{a}}\sigma^1{}_{0\dot{b}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\delta^{\dot{a}}_{\dot{0}}\delta^{\dot{1}}_{\dot{b}} + \delta^{\dot{a}}_{\dot{1}}\delta^{\dot{0}}_{\dot{b}}\right), \tag{1.3.28}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{0\dot{a}}\tilde{L}_2^{*\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{1\dot{b}} = \frac{1}{4}\left(i\sigma_0{}^{0\dot{a}}\sigma^2{}_{1\dot{b}} + i\sigma_2{}^{0\dot{a}}\sigma^0{}_{1\dot{b}} + \sigma_1{}^{0\dot{a}}\sigma^3{}_{1\dot{b}} - \sigma_3{}^{0\dot{a}}\sigma^1{}_{1\dot{b}}\right) = 0 \tag{1.3.29}$$

より

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}}\tilde{L}_2^{*\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{b}} = \delta^a_b \times \frac{i}{2}\left(i\delta^{\dot{a}}_{\dot{0}}\delta^{\dot{1}}_{\dot{b}} - i\delta^{\dot{a}}_{\dot{1}}\delta^{\dot{0}}_{\dot{b}}\right) \tag{1.3.30}$$

が得られる。ここで

$$\mathrm{val}\left[\tilde{\Sigma}_k{}^a{}_b\right] = -\frac{i}{2}\sigma_k \qquad \left(\mathrm{val}\left[\tilde{\Sigma}_k^{*\dot{a}}{}_{\dot{b}}\right] = \frac{i}{2}\sigma_k^*\right) \tag{1.3.31}$$

を満たす $\tilde{\Sigma}_k{}^a{}_b$ を導入しておけば、これまでの計算は

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}}\tilde{L}_k{}^{\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{b}} = \tilde{\Sigma}_k{}^a{}_b \times \delta^{\dot{a}}_{\dot{b}}, \qquad \frac{1}{2}\sigma_{\mu}{}^{a\dot{a}}\tilde{L}_k^{*\mu}{}_{\nu}\sigma^{\nu}{}_{b\dot{b}} = \delta^a_b \times \tilde{\Sigma}_k^{*\dot{a}}{}_{\dot{b}} \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1.3.32}$$

の形にまとめられる。具体的に計算することで複素共役表現の点付き添字のルールが満たされていることが確認できる。したがって便宜的に Lorentz 変換の足をスピノルの足で書いた式 (1.3.17) は

$$\Lambda(\xi)^{a\dot{a}}{}_{b\dot{b}} = \delta^a_b\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} + \left(\xi_k\tilde{\Sigma}_k{}^a{}_b\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} + \delta^a_b\xi_k^*\tilde{\Sigma}_k^{*\dot{a}}{}_{\dot{b}}\right) + \cdots = \exp\left(\xi_k\tilde{\Sigma}_k\right)^a{}_b \exp\left(\xi_k^*\tilde{\Sigma}_k^*\right)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \tag{1.3.33}$$

となる。簡単のため $S(\xi)^a{}_b = \exp\left(\xi_k \tilde{\Sigma}_k\right)^a{}_b$ とすると、座標の Lorentz 変換 (1.1.8) と対応する SL(2, ℂ) の変換 (1.3.15) は

$$x'^{a\dot{a}} = S(\xi)^a{}_b\, S(\xi)^{*\dot{a}}{}_{\dot{b}}\, x^{b\dot{b}} = S(\xi)^a{}_b\, x^{b\dot{b}} S(\xi)^\dagger{}_{\dot{b}}{}^{\dot{a}} \tag{1.3.34}$$

となることが分かる。これと $\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}$ との和をとれば

$$x'^\mu = \frac{1}{2}\sigma^\mu{}_{a\dot{a}} S(\xi)^a{}_b\, S(\xi)^{*\dot{a}}{}_{\dot{b}}\, \sigma_\nu{}^{b\dot{b}} x^\nu \tag{1.3.35}$$

が得られる。つまり Lorentz 変換は

$$\Lambda(\xi)^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\sigma^\mu{}_{a\dot{a}}\sigma_\nu{}^{b\dot{b}} S(\xi)^a{}_b\, S(\xi)^{*\dot{a}}{}_{\dot{b}} = \frac{1}{2}{}^t\sigma^\mu{}_{\dot{a}a} S(\xi)^a{}_b\, \sigma_\nu{}^{b\dot{b}} S(\xi)^\dagger{}_{\dot{b}}{}^{\dot{a}} \tag{1.3.36}$$

のように分解できることが分かる。

1.3.3 スピノル表示の 2 価性

これまでに得られた SL(2, ℂ) の変換を具体的に計算してみる。 第 1 成分は

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}\left[\exp\left(\xi_1\tilde{\Sigma}_1\right)^a{}_b\right] &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \frac{\xi_1}{2}\begin{pmatrix} & -i \\ -i & \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\xi_1}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\xi_1}{2}\right)^3\begin{pmatrix} & -i \\ -i & \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\xi_1}{2} & -i\sin\frac{\xi_1}{2} \\ -i\sin\frac{\xi_1}{2} & \cos\frac{\xi_1}{2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{1.3.37}$$

第 2 成分は

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}\left[\exp\left(\xi_2\tilde{\Sigma}_2\right)^a{}_b\right] &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \frac{\xi_2}{2}\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\xi_2}{2}\right)^2\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\xi_2}{2}\right)^3\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\xi_2}{2} & -\sin\frac{\xi_2}{2} \\ \sin\frac{\xi_2}{2} & \cos\frac{\xi_2}{2} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{1.3.38}$$

最後に第 3 成分は

$$\begin{aligned}
\mathrm{val}\left[\exp\left(\xi_3\tilde{\Sigma}_3\right)^a{}_b\right] &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \frac{\xi_3}{2}\begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\xi_3}{2}\right)^2\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\xi_3}{2}\right)^3\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\xi_3}{2}} & \\ & e^{i\frac{\xi_3}{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.3.39}$$

が得られる。

式 (1.1.38) で示しているようにパラメータ $\xi_k = \theta_k - i\tau_k$ は複素数である。ちゃんと実部と虚部と

で分解すると

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{\xi_k}{2} &= \cos\frac{\theta_k}{2}\cosh\frac{\tau_k}{2} + i\sin\frac{\theta_k}{2}\sinh\frac{\tau_k}{2}, \\
\sin\frac{\xi_k}{2} &= \sin\frac{\theta_k}{2}\cosh\frac{\tau_k}{2} - i\cos\frac{\theta_k}{2}\sinh\frac{\tau_k}{2}, \\
e^{i\frac{\xi_k}{2}} &= e^{i\frac{\theta_k}{2}} e^{\frac{\tau_k}{2}}
\end{aligned}
\tag{1.3.40}
$$

となる。これより空間回転 $\theta_k \to \theta_k + 2\pi$（1 回転）に対して、スピノルの変換は符号が反転し元に戻らず、$\theta_k \to \theta_k + 4\pi$ で（2 回転）で元に戻ることが確認できる。式 (1.1.28) あるいは (1.1.32) で示される Lorentz 変換の空間回転（2π の周期性）とは違う性質を示している。これはスピノル表示の 2 価性を示したもので、式 (1.3.34) と (1.3.35)、(1.3.36) にあるようにスピノル表示では複素共役とペアで出てくることから陽には現れない。

あるいは以下のようにも述べられる。計量をスピノルで表わすと式 (1.3.1) で示されるように det の形になる。したがってベクトル表示での計量不変は 2 階混合スピノルにおいて det 不変に置き換えられる、

$$
\det\left(x^{a\dot{a}}\right) \longrightarrow \det\left(x'^{a\dot{a}}\right) = \det\left(S\left(\xi\right)^{a}{}_{b}\right)\det\left(S\left(\xi\right)^{*\dot{a}}{}_{\dot{b}}\right)\det\left(x^{b\dot{b}}\right) = \det\left(x^{b\dot{b}}\right). \tag{1.3.41}
$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に含まれる任意の変換はこの条件を満たすので、その要素を 1 つ定めて関係式 (1.3.36) に基づいて計算すれば対応する $\mathrm{SO}^+(1,3)$ としての変換が一意に定まる。つまり任意の $h^a{}_b \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して適当な $\lambda^\mu{}_\nu \in \mathrm{SO}^+(1,3)$ が 1 つ定まる。逆を考えると式 (1.3.36) からも分かるように、1 つの $\lambda^\mu{}_\nu \in \mathrm{SO}^+(1,3)$ に対して $\pm h^a{}_b \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ が対応する[21]。したがって $\mathrm{SO}^+(1,3)$ と $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ との対応関係は $1:2$ になっており、スピノル表示は 2 価表現になっている。Lorentz 群 $\mathrm{SO}^+(1,3)$ と $1:1$ で対応するのは $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ではなく $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ である[22][23]。

1.3.4 まとめ

Lorentz 変換は通常実空間・実パラメータのみで扱われるが、複素数を許容することで式 (1.1.38) の形に分解できる。分解された 2 つの指数写像は互いに複素共役の関係にあり、3 つの複素パラメータをもつ $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の変換になっている。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の変換に従うスピノルを導入することで、Minkowski 時空の座標は 2 階混合スピノル (1.3.7) として表わすことができ、その変換は式 (1.3.34)

21） $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の恒等変換 δ^a_b に対して $\det\left(\delta^a_b\right) = \det\left(-\delta^a_b\right) = 1$。

22） 整数全体からなる加法群 $\mathbb{Z}$ において、そのすべての要素を $n \in \mathbb{Z}$ 倍して得られる加法群を $n\mathbb{Z}$ とする。このとき

$$
\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, 2 + n\mathbb{Z}, \ldots, n - 1 + n\mathbb{Z}\}. \tag{1.3.42}
$$

簡単に代表元で表わせば $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ である。具体的に $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の元で $\mathbb{Z}_2$ を表わせば $\{\pm\delta^a_b\}$ である。

23） $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は 2 次射影特殊線型群を指す。N 次複素射影空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ は $\mathbb{C}^{N+1} - \{0\}$ を複素数定数倍の同値関係で割ることで得られる。これはもともと特殊線型群が行列式が 1 を満たすことによって与えられ、複素数定数倍としては $\{\pm 1\}$ しか許されないからである。正則な変換のなす群（行列式が 0 でない変換のなす群、一般線型群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$）を経由するほうが射影空間の雰囲気をより感じられるかもしれない。2 次射影一般線型群 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{C}$ によって与えられるので、これは $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ の得方そのものである。その中で行列式が 1 となるものに制限することで $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ が得られるので、先述の通りである。

で表わされる。Lorentz 変換 (1.1.8) は式 (1.3.35) のように分解して表わすこともできる。ひとつのスピノルの変換に対してひとつの Lorentz 変換が定まる一方、ひとつの Lorentz 変換に対して正負のスピノルの変換が対応する。このことからスピノル表示は 2 価表現と呼ばれる。

1.4 Poincaré 変換

1.4.1 Lorentz 変換と時空並進

はじめに Lorentz 変換を Minkowski 時空上でのノルムを不変に保つ変換として導入したが、改めて計量 $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ を不変に保つ変換として考えることにする。計量を不変に保つ変換としては実定数 a^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ に対する時空並進 $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ も許される。時空並進のもとで $\mathrm{d}x^\mu$ は不変なので計量も不変である。Lorentz 変換に時空並進も含めた変換を Poincaré 変換と呼び、

$$x^\mu \to \Lambda(\theta, \tau)^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1.4.1}$$

なる 4 元ベクトルの変換として表わされる。時空並進の 4 と空間回転の 3、ブーストの 3 で合計 10 のパラメータがある。Poincaré 変換の集合は演算として閉じており Poincaré 群と呼ばれる。Poincaré 群は非斉次 Lorentz 群とも呼ばれ、群としては $\mathrm{ISO}^+(1,3)$ と表記されることもある。I は Inhomogeneous （非斉次）の I である。

Poincaré 変換 $x^\mu \to {x_{(1)}}^\mu = {\Lambda_1}^\mu{}_\nu x^\nu + {a_1}^\mu$ と ${x_{(1)}}^\mu \to {x_{(2)}}^\mu = {\Lambda_2}^\mu{}_\nu x^\nu_{(1)} + {a_2}^\mu$ とを考えると

$${x_{(2)}}^\mu = \left({\Lambda_2}^\mu{}_\nu {\Lambda_1}^\nu{}_\rho\right) x^\rho + \left({\Lambda_2}^\mu{}_\nu {a_1}^\nu + {a_2}^\mu\right) \tag{1.4.2}$$

が得られる。Poincaré 変換を (Λ, a) で表わし、その合成を単に結合させて表わすことにすれば

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \tag{1.4.3}$$

と書ける。逆変換は

$$(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \tag{1.4.4}$$

である。時空並進のみの場合は可換であり、可換群になっている。つまり Poincaré 群は Lorentz 群と時空並進からなる可換群との半直積群である。

1.4.2 微小変換と交換関係

ここで一度座標変換に限らない形で Poincaré 変換の微小変換について考えてみる。Lorentz 変換の微小変換の議論に基づいて Poincaré 変換の 1 次近似を

$$\mathcal{A}(\Lambda, a) \simeq 1 + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\mathcal{M}_{\rho\sigma} + a^\mu \mathcal{P}_\mu \tag{1.4.5}$$

で与えることにする[24)]。$\mathcal{M}_{\rho\sigma}$ と $\mathcal{P}_\mu$ とがそれぞれ時空並進と Lorentz 変換との生成子（代数 $\mathfrak{iso}(1,3)$ の要素）である。引数内部ではこれまでの Lorentz 変換の計算で得られた $\Lambda^\mu{}_\nu \simeq \delta^\mu_\nu + \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\left(\tilde{M}_{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu$ を用い、式 (1.4.3) に基づいて変換の合成を考える。引数内部での係数 $\omega^{\rho\sigma}, a^\mu$ が $\mathcal{M}_{\rho\sigma}$ と $\mathcal{P}_\mu$ の係数として引数の外部に出る。

各パラメータの 1 次近似の範囲では

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\Lambda,0)\,\mathcal{A}(1,a)\,\mathcal{A}(\Lambda,0)^{-1}\,\mathcal{A}(1,a)^{-1} \\
\simeq&\left(1+\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\mathcal{M}_{\rho\sigma}\right)\left(1+a^\mu\mathcal{P}_\mu\right)\left(1-\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\mathcal{M}_{\rho\sigma}\right)\left(1-a^\mu\mathcal{P}_\mu\right) \\
=&\left(1+a^\mu\mathcal{P}_\mu+\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\mathcal{M}_{\rho\sigma}+\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}a^\mu\mathcal{M}_{\rho\sigma}\mathcal{P}_\mu\right)\left(1-a^\mu\mathcal{P}_\mu-\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\mathcal{M}_{\rho\sigma}+\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}a^\mu\mathcal{M}_{\rho\sigma}\mathcal{P}_\mu\right) \\
\simeq&1+\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}a^\mu\left[\mathcal{M}_{\rho\sigma},\mathcal{P}_\mu\right]
\end{aligned}
\tag{1.4.6}
$$

と

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\Lambda,0)\,\mathcal{A}(1,a)\,\mathcal{A}(\Lambda,0)^{-1}\,\mathcal{A}(1,a)^{-1} = \mathcal{A}(1,(\Lambda-1)a) &\simeq \mathcal{A}\left(1,\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\tilde{M}_{\rho\sigma}a\right) \\
&\simeq 1+\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\left(\tilde{M}_{\rho\sigma}\right)^\nu{}_\mu a^\mu\mathcal{P}_\nu \\
&= 1+\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}a^\mu\left(\eta_{\sigma\mu}\mathcal{P}_\rho-\eta_{\rho\mu}\mathcal{P}_\sigma\right)
\end{aligned}
\tag{1.4.7}
$$

とが得られる。前者 (1.4.6) は合成する前に一次近似し、後者 (1.4.7) は合成したあとに一次近似を行っている。前者と後者は等しいので Lorentz 変換の生成子と時空並進の生成子との交換関係

$$
\left[\mathcal{M}_{\rho\sigma},\mathcal{P}_\mu\right] = -\left(\eta_{\rho\mu}\mathcal{P}_\sigma-\eta_{\sigma\mu}\mathcal{P}_\rho\right)
\tag{1.4.8}
$$

が確認できる[25)]。上述の計算 (1.4.7) を途中で止めた $\left[\mathcal{M}_{\rho\sigma},\mathcal{P}_\mu\right] = \left(\tilde{M}_{\rho\sigma}\right)^\alpha{}_\mu\mathcal{P}_\alpha$ の方が明確かもしれないが、$\mathcal{P}_\mu$ は $\mathcal{M}_{\rho\sigma}$ との交換関係をとることで（座標と同様に）微小 Lorentz 変換されることを表わしている。

同様に $\mathcal{A}(\Lambda,0)\,\mathcal{A}(\Lambda',0)\,\mathcal{A}(\Lambda,0)^{-1}\,\mathcal{A}(\Lambda',0)^{-1} = \mathcal{A}\left(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1}\Lambda'^{-1},0\right)$ の計算を行えば、左辺の

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\Lambda,0)\,\mathcal{A}(\Lambda',0)\,\mathcal{A}(\Lambda,0)^{-1}\,\mathcal{A}(\Lambda',0)^{-1} \\
\simeq&\left(1+\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\mathcal{M}_{\rho\sigma}\right)\left(1+\frac{1}{2}\omega'^{\alpha\beta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\right)\left(1-\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\mathcal{M}_{\rho\sigma}\right)\left(1-\frac{1}{2}\omega'^{\alpha\beta}\mathcal{M}_{\alpha\beta}\right) \\
\simeq&1+\frac{1}{4}\omega^{\rho\sigma}\omega'^{\alpha\beta}\left[\mathcal{M}_{\rho\sigma},\mathcal{M}_{\alpha\beta}\right]
\end{aligned}
\tag{1.4.9}
$$

24） 明言はしていなかったが、これまでの座標変換の議論は標準表現に基づいている。ここでは標準表現に限らない表示であることを明示する気持ちの下、式 (1.4.3) 周辺で述べている Poincaré 変換 (Λ,a) に $\mathcal{A}$ をつけている。表現については 2.1.1 章で述べる。

25） 交換関係を得るために計算している $(\Lambda,0)\,(1,a)\,(\Lambda,0)^{-1}\,(1,a)^{-1}$ の補足。もしある群 G の要素 $g,h\in G$ に対して、両者が互いに可換かどうかを確認したいときは $gh=hg \Leftrightarrow ghg^{-1}=h \Leftrightarrow ghg^{-1}h^{-1}=I$（$I$ は単位元）を満たすかを確認すればよい。一方非可換の場合も同様に $ghg^{-1}h^{-1}$ を計算すれば、単位元からの違いとして非可換の度合いが分かることになる。計算 (1.4.6) と (1.4.7) とはこれを実際に行ったものである。

と、右辺の

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\left(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1}\Lambda'^{-1},0\right) =& \mathcal{A}\left(\exp\left(\frac{1}{4}\omega^{\rho\sigma}\omega'^{\alpha\beta}\left[\tilde{M}_{\rho\sigma},\tilde{M}_{\alpha\beta}\right]+\cdots\right),0\right) \\
=& \mathcal{A}\left(\exp\left(-\frac{1}{4}\omega^{\rho\sigma}\omega'^{\alpha\beta}\left(\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\beta\eta_{\rho\alpha}+\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\alpha\eta_{\rho\beta}-\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\beta\eta_{\sigma\alpha}+\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\alpha\eta_{\sigma\beta}\right)\tilde{M}_{\mu\nu}+\cdots\right),0\right) \\
\simeq& 1-\frac{1}{4}\omega^{\rho\sigma}\omega'^{\alpha\beta}\left(\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\beta\eta_{\rho\alpha}+\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\alpha\eta_{\rho\beta}-\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\beta\eta_{\sigma\alpha}+\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\alpha\eta_{\sigma\beta}\right)\mathcal{M}_{\mu\nu} \\
=& 1-\frac{1}{4}\omega^{\rho\sigma}\omega'^{\alpha\beta}\left(\eta_{\rho\alpha}\mathcal{M}_{\sigma\beta}+\eta_{\rho\beta}\mathcal{M}_{\sigma\alpha}-\eta_{\sigma\alpha}\mathcal{M}_{\rho\beta}+\eta_{\sigma\beta}\mathcal{M}_{\rho\alpha}\right)
\end{aligned}
\tag{1.4.10}
$$

とが得られる。ただし右辺の計算 (1.4.10) の 1 行目の変形は Baker–Campbell–Hausdorff の関係式

$$
\exp A \exp B = \exp\left(A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A-B,[A,B]]+\cdots\right) \tag{1.4.11}
$$

を用いた。ただし A, B は互いに可換とは限らない変換。また同じく右辺の計算の 1 行目から 2 行目への計算は、引数内の計算なので式 (1.1.27) を用いて計算されている。したがって交換関係は既に得られている式 (1.1.27) と同じく

$$
[\mathcal{M}_{\mu\nu},\mathcal{M}_{\rho\sigma}] = -\left(\eta_{\mu\rho}\mathcal{M}_{\nu\sigma}-\eta_{\mu\sigma}\mathcal{M}_{\nu\rho}-\eta_{\nu\rho}\mathcal{M}_{\mu\sigma}+\eta_{\nu\sigma}\mathcal{M}_{\mu\rho}\right) \tag{1.4.12}
$$

である。この関係式も添字 $\mu\nu$ のペアに注目して変形すれば $[\mathcal{M}_{\mu\nu},\mathcal{M}_{\rho\sigma}] = (\tilde{M}_{\mu\nu})^\alpha{}_\rho\mathcal{M}_{\alpha\sigma} + (\tilde{M}_{\mu\nu})^\alpha{}_\sigma\mathcal{M}_{\rho\alpha}$ が得られ、交換関係をとることで $\mathcal{M}_{\rho\sigma}$ が微小 Lorentz 変換されていることが確認できる。

時空並進は実際に計算するまでもなく、時空並進のみの場合は可換であることが近似をしなくても分かるので、交換関係は

$$
[\mathcal{P}_\mu,\mathcal{P}_\nu] = 0 \tag{1.4.13}
$$

ということになる。

1.4.3 生成子と指数写像

Lorentz 変換の生成子とその指数写像とは具体的に (1.1.23) と (1.1.28) とで得られている。時空並進も同様に表わすことができる。時空並進の生成子 $\mathcal{P}_\mu$ をより具体的に表わしたもののひとつが微分演算子 ∂_μ であり[26)27)]、指数写像は $\exp(a^\mu\partial_\mu)$ となる。

$$
x^\mu \to \exp(a^\nu\partial_\nu)x^\mu = \left(1+a^\nu\partial_\nu+\frac{1}{2}(a^\nu\partial_\nu)^2+\ldots\right)x^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.4.14}
$$

で時空並進が記述できていることが確認できる。この指数写像の積が可換であること、逆方向の時空並進が逆変換になっていることは普通の数の指数函数と同様に確認できる。

26） 例えば 4 元ベクトルに常に値 1 を持つ成分を付け足した量 $x^{\bar\mu}$ （上線付きの添字を 0 から 4 までを走るものとして $x^{\bar\mu} = x^\mu$ for $\bar\mu = 0,\ldots,3$ かつ $x^4 = 1$）に対して $\left(\tilde{P}_{\bar\mu}\right)^{\bar\rho}{}_{\bar\sigma} = \delta^{\bar\rho}_{\bar\mu}\bar\delta^4_{\bar\sigma}$ とすれば $\tilde{P}_{\bar\mu}$ も条件を満たす。ただし $\delta^{\bar\rho}_{\bar\sigma}$ は $\delta^4_4 = 0$ を、$\bar\delta^{\bar\rho}_{\bar\sigma}$ は $\bar\delta^4_4 = 1$ を満たすものとする。2 次以上の項は $\bar\delta^4_{\bar\lambda}\delta^{\bar\lambda}_{\bar\nu} = \delta^4_{\bar\nu} = 0$ を含むため、指数写像は $\exp(a^{\bar\mu}\tilde{P}_{\bar\mu})^{\bar\rho}{}_{\bar\sigma} = \bar\delta^{\bar\rho}_{\bar\sigma} + a^{\bar\mu}\delta^{\bar\rho}_{\bar\mu}\bar\delta^4_{\bar\sigma}$ となる。

27） Lorentz 変換を座標成分の 1 次の範囲で混ぜるようなこれまでの表示の仕方からすると、微分演算子をもってくるのは一種の飛躍である。座標変換を考える限りにおいて微分演算子をもってくる必然性は無い。

Lorentz 変換 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ ($\Leftrightarrow x^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu} = x'^{\nu}\Lambda_{\nu}{}^{\mu}$) において微分 ∂_{μ} の変換性は

$$\partial_{\mu} \to \partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\rho}{}^{\nu} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \Lambda_{\rho}{}^{\nu} \delta^{\rho}_{\mu} \partial_{\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu} = \partial_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \tag{1.4.15}$$

である。したがって Poincaré 変換は時空並進を指数写像で表わした式 (1.4.14) で x^{μ} と ∂_{μ} とを共に Lorentz 変換した

$$x^{\mu} \to \exp(a^{\alpha}(\Lambda\partial)_{\alpha})(\Lambda x)^{\mu} = \exp(a^{\alpha}\Lambda_{\alpha}{}^{\beta}\partial_{\beta})\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu} \tag{1.4.16}$$

で表わすことができる。下添字と上添字との Lorentz 変換がそれぞれ互いに逆変換になっているため、この結果が得られる。

時空並進を微分演算子で表わした一方、Lorentz 変換は具体的な表示が得られてはいるが微分演算子で表わされていない。言い換えれば、先の Poincaré 変換の式 (1.4.16) を見て分かるように、時空並進の生成子の表示と Lorentz 変換の生成子の表示とが対等になっていない。Lorentz 変換も微分演算子で表わすことはできて、それは Lorentz 変換の 1 次近似式 (1.1.24) において $\delta^{\mu}_{\nu} = \partial_{\nu} x^{\mu}$ を用いて

$$(\tilde{M}_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = (\delta^{\mu}_{\rho}\eta_{\nu\sigma} - \delta^{\mu}_{\sigma}\eta_{\nu\rho})x^{\nu} = -(x_{\rho}\partial_{\sigma} - x_{\sigma}\partial_{\rho})x^{\mu}, \tag{1.4.17}$$

したがって

$$x'^{\mu} \simeq \left(1 - \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}\right)x^{\mu}, \qquad \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} = x_{\rho}\partial_{\sigma} - x_{\sigma}\partial_{\rho} \tag{1.4.18}$$

である[28]。この Lorentz 変換の生成子の表記に合わせて時空並進の生成子も $\tilde{\mathcal{P}}_{\mu} = \partial_{\mu}$ と表わすことにする[29]。

これらの微分演算子を用いた表示で計算することで直接的に

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}, \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}] &= -\left(\eta_{\mu\rho}\tilde{\mathcal{M}}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\tilde{\mathcal{M}}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\tilde{\mathcal{M}}_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\tilde{\mathcal{M}}_{\mu\rho}\right), \\ [\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}_{\mu}] &= -\left(\eta_{\rho\mu}\tilde{\mathcal{P}}_{\sigma} - \eta_{\sigma\mu}\tilde{\mathcal{P}}_{\rho}\right), \\ [\tilde{\mathcal{P}}_{\mu}, \tilde{\mathcal{P}}_{\nu}] &= 0 \end{aligned} \tag{1.4.19}$$

が求まる。

以上の交換関係を満たす生成子の指数写像によって Poincaré 変換は与えられるので

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} + a^{\mu}\tilde{\mathcal{P}}_{\mu}\right]. \tag{1.4.20}$$

1.4.4　まとめ

計量 (1.1.6) を不変に保つ変換群を考えるとき、とくに（離散変換も含めて）Lorentz 群 $\mathrm{SO}^{+}(1,3)$ に限る必要もなく、時空並進変換を加えても不変に保つ。時空並進変換を含めた変換群は Poincaré

28） $\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} x^{\mu} = (\eta_{\rho\nu}\delta^{\mu}_{\sigma} - \eta_{\sigma}\delta^{\mu}_{\rho})x^{\nu} = -\left(\tilde{M}_{\rho\sigma}\right)^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$ になっているので符号に注意。

29） $\left\{\tilde{M}_{\rho\sigma}, \tilde{P}_{\mu}\right\}$ と $\{\mathcal{M}_{\rho\sigma}, \mathcal{P}_{\mu}\}$、$\left\{\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}_{\mu}\right\}$ はそれぞれ違う表示であるため別々の記号で表わしているが、全て同じ交換関係を満たす。

群 $\mathrm{ISO}^+(1,3)$ と呼ばれる。Poincaré 変換 (1.4.1) を指定するパラメータは Lorentz 変換の 6（回転の 3 とブーストの 3）と時空並進の 4 で合計 10 である。時空並進変換の集合自体は可換群をなしており、Poincaré 群は Lorentz 群と時空並進群との半直積群 (1.4.3) になっている。Poincaré 変換の微小変換 (1.4.5) の計算により、Lorentz 変換の生成子 $\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}$ と時空並進変換の生成子 $\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ との交換関係が得られる。

Lorentz 変換がその生成子の指数写像として表わされたように、Poincaré 変換もその生成子の指数写像で表わすことができる。時空並進変換の生成子は具体的には微分 ∂_μ で表わされ、その指数写像によって有限な量だけ時空並進できることが式 (1.4.14) から確認できる。Lorentz 変換の指数写像も式 (1.1.28) で既に具体的に得られているが、これは時空並進変換 $\exp(a^\mu\partial_\mu)$ と同格な表示になっていない。既に得られていた Lorentz 変換の生成子 (1.1.23) は $\partial_\nu x^\mu = \delta^\mu_\nu$ を用いることで、時空並進変換と同格な表示 $-(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho)$ に変形できる。このことを確認したのが式 (1.4.17) である。座標と微分とで表わした生成子をそれぞれ $\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ と $\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}$ とで表わすと、直接的に $\mathfrak{iso}^+(1,3)$ の交換関係 (1.4.19) が得られる。以上より Poincaré 変換は式 (1.4.20) として得られることが確認できたことになる。

1.4.5　補: Casimir 不変量

ここまで Lorentz 群あるいは Poincaré 群の性質を調べるためにそれぞれの代数を調べてきた。群は大域的な対象で直接具体的に調べるのが難しい。そのため局所的な性質に対応する代数を調べることで目的の群を調べる。具体的には代数の構造を特徴づける交換関係の確認を行い、その代数の要素の指数写像によって群の要素を得る。これが群の性質を調べる常套手段になっている。

代数の構造を調べる上でまず重要なのがゼロでない交換関係である。その関係で結び付けられる最小の要素数は群・代数の次元に対応する。一方でその要素を組み合わせることで構成される、任意の要素との交換関係がゼロになる要素も重要である。それは Casimir 不変量（Casimir 演算子/作用素、Casimir 元/要素）と呼ばれる。ここでは Poincaré 群の代数 $\mathfrak{iso}^+(1,3)$ に存在する 2 つの Casimir 不変量の確認を行なう。

ここで確認することはこれまでに述べた交換関係だけから定まる内容である。ただし実際に使う段階になると 1.4.3 章で示した座標と微分演算子とで表わされた Poincaré 変換の生成子 $\{\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}_\mu\}$ を使うことが多いと思うので、使う記号としても交換関係 (1.4.19) から出発することにする。

一番簡単な Casimir 不変量は

$$\tilde{\mathcal{P}}^2 = \tilde{\mathcal{P}}^\mu\tilde{\mathcal{P}}_\mu = \eta_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{P}}^\mu\tilde{\mathcal{P}}^\nu \tag{1.4.21}$$

である。これは

$$
\begin{aligned}
[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{P}}^2] &= 0, \\
[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}^2] &= \tilde{\mathcal{P}}^\mu \left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}_\mu\right] + \left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}_\mu\right] \tilde{\mathcal{P}}^\mu \\
&= -\tilde{\mathcal{P}}^\mu \left(\eta_{\rho\mu}\tilde{\mathcal{P}}_\sigma - \eta_{\sigma\mu}\tilde{\mathcal{P}}_\rho\right) - \left(\eta_{\rho\mu}\tilde{\mathcal{P}}_\sigma - \eta_{\sigma\mu}\tilde{\mathcal{P}}_\rho\right) \tilde{\mathcal{P}}^\mu \\
&= -\tilde{\mathcal{P}}_\rho\tilde{\mathcal{P}}_\sigma + \tilde{\mathcal{P}}_\sigma\tilde{\mathcal{P}}_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_\sigma\tilde{\mathcal{P}}_\rho + \tilde{\mathcal{P}}_\rho\tilde{\mathcal{P}}_\sigma \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{1.4.22}
$$

で確認される。物理的には 4 元運動量のノルムに対応し、この量が Poincaré 変換に対して不変、つまり相対論的に不変な量であることを確認したことになる。

もうひとつの Casimir 不変量を確認するために

$$
\tilde{\mathcal{I}} = \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} \tag{1.4.23}
$$

という量を考える。$\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ との交換関係を計算すると

$$
\begin{aligned}
[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{I}}] &= \frac{1}{8}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\tilde{\mathcal{M}}_{\alpha\beta}\left[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{M}}_{\gamma\delta}\right] + \left[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{M}}_{\alpha\beta}\right]\tilde{\mathcal{M}}_{\gamma\delta}\right) \\
&= \frac{1}{8}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\tilde{\mathcal{M}}^{\alpha\beta}\delta^\gamma_\mu\tilde{\mathcal{P}}^\delta - \tilde{\mathcal{M}}^{\alpha\beta}\delta^\delta_\mu\tilde{\mathcal{P}}^\gamma + \delta^\alpha_\mu\tilde{\mathcal{P}}^\beta\tilde{\mathcal{M}}^{\gamma\delta} - \delta^\beta_\mu\tilde{\mathcal{P}}^\alpha\tilde{\mathcal{M}}^{\gamma\delta}\right) \\
&= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\left(\tilde{\mathcal{M}}^{\alpha\beta}\tilde{\mathcal{P}}^\delta + \tilde{\mathcal{P}}^\alpha\tilde{\mathcal{M}}^{\beta\gamma}\right) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\tilde{\mathcal{P}}^\alpha\tilde{\mathcal{M}}^{\beta\gamma}\left(= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\tilde{\mathcal{M}}^{\alpha\beta}\tilde{\mathcal{P}}^\delta\right)
\end{aligned}
\tag{1.4.24}
$$

になる。最後の行への変形は（対称な量と反対称な量との積はゼロであるから）$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\left[\tilde{\mathcal{M}}^{\alpha\beta}, \tilde{\mathcal{P}}^\gamma\right] = 0$ となることを使っている。この交換関係を 4 元ベクトル $\tilde{\mathcal{W}}_\mu$ の定義とする。つまり

$$
\tilde{\mathcal{W}}_\mu = [\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{I}}] = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{\mathcal{P}}^\nu\tilde{\mathcal{M}}^{\rho\sigma} \tag{1.4.25}
$$

とする。このベクトルは Pauli–Lubanski ベクトル（Pauli-Lubanski 演算子）と呼ばれ（これも対称と反対称との積がゼロになることから）

$$
\eta^{\mu\nu}\tilde{\mathcal{W}}_\mu\tilde{\mathcal{P}}_\nu = \tilde{\mathcal{W}}^\mu\tilde{\mathcal{P}}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{\mathcal{P}}_\nu\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}\tilde{\mathcal{P}}_\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{\mathcal{M}}_{\nu\rho}\tilde{\mathcal{P}}_\sigma\tilde{\mathcal{P}}_\mu = 0 \tag{1.4.26}
$$

を満たす。つまり Pauli–Lubanski ベクトル $\tilde{\mathcal{W}}_\mu$ は時空並進変換の生成子 $\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ と常に直交するように定義されている。順序を入れ替えても $\tilde{\mathcal{P}}^\mu\tilde{\mathcal{W}}_\mu = 0$ である。Poincaré 変換の生成子との交換関係は

$$
\begin{aligned}
[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{W}}_\nu] &= \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}\left[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{P}}^\lambda\tilde{\mathcal{M}}^{\rho\sigma}\right] = \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}\tilde{\mathcal{P}}^\lambda\left[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{M}}^{\rho\sigma}\right] = 0 \\
[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{W}}_\mu] &= -\left(\eta_{\rho\mu}\tilde{\mathcal{W}}_\sigma - \eta_{\sigma\mu}\tilde{\mathcal{W}}_\rho\right)
\end{aligned}
\tag{1.4.27}
$$

である。とくに後者は式 (1.4.26) を用いて

$$
\begin{aligned}
0 = \left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \eta^{\mu\nu}\tilde{\mathcal{W}}_\mu\tilde{\mathcal{P}}_\nu\right] &= \eta^{\mu\nu}\tilde{\mathcal{W}}_\mu\left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}_\nu\right] + \eta^{\mu\nu}\left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{W}}_\mu\right]\tilde{\mathcal{P}}_\nu \\
&= -\tilde{\mathcal{W}}_\rho\tilde{\mathcal{P}}_\sigma + \tilde{\mathcal{W}}_\sigma\tilde{\mathcal{P}}_\rho + \left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{W}}_\mu\right]\tilde{\mathcal{P}}^\mu \\
&= \left(\eta_{\rho\mu}\tilde{\mathcal{W}}_\sigma - \eta_{\sigma\mu}\tilde{\mathcal{W}}_\rho + \left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{W}}_\mu\right]\right)\tilde{\mathcal{P}}^\mu
\end{aligned}
\tag{1.4.28}
$$

と計算できることから確認できる。また Pauli–Lubanski ベクトル同士の交換関係は

$$[\tilde{\mathcal{W}}_\mu, \tilde{\mathcal{W}}_\nu] = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\tilde{\mathcal{P}}^\alpha \left[\tilde{\mathcal{M}}^{\beta\gamma}, \tilde{\mathcal{W}}_\nu\right] = \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{P}}^\alpha \left(-\epsilon_{\mu\alpha\nu\gamma}\tilde{\mathcal{W}}^\gamma + \epsilon_{\mu\alpha\beta\nu}\tilde{\mathcal{W}}^\beta\right) = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\tilde{\mathcal{P}}^\alpha\tilde{\mathcal{W}}^\beta \tag{1.4.29}$$

である。交換関係 (1.4.27) より、Poincaré 変換に対して $\tilde{\mathcal{W}}_\mu$ は $\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ と似た変換則を満たすことが確認できる。

2 つ目の Casimir 不変量は

$$\tilde{\mathcal{W}}^2 = \tilde{\mathcal{W}}^\mu\tilde{\mathcal{W}}_\mu = \eta_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{W}}^\mu\tilde{\mathcal{W}}^\nu \tag{1.4.30}$$

で与えられる。これは

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{W}}^2] &= \eta_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{W}}^\mu \left[\tilde{\mathcal{P}}^\mu, \tilde{\mathcal{W}}^\nu\right] + \eta_{\mu\nu}\left[\tilde{\mathcal{P}}^\mu, \tilde{\mathcal{W}}^\mu\right]\tilde{\mathcal{W}}^\nu = 0 \\ [\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{W}}^2] &= \tilde{\mathcal{W}}^\mu \left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{W}}_\mu\right] + \left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{W}}_\mu\right]\tilde{\mathcal{W}}^\mu = -\left[\tilde{\mathcal{W}}_\rho, \tilde{\mathcal{W}}_\sigma\right] + \left[\tilde{\mathcal{W}}_\rho, \tilde{\mathcal{W}}_\sigma\right] = 0 \end{aligned} \tag{1.4.31}$$

で確認される。対称と反対称と積がゼロであるから $[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{W}}^2] = 0$ かつ $[\tilde{\mathcal{W}}_\mu, \tilde{\mathcal{P}}^2] = 0$ になる。これより $\tilde{\mathcal{P}}^2$ と同様に $\tilde{\mathcal{W}}^2$ も Poincaré 変換のもとで不変、つまり相対論的に不変な量であることが分かる。こちらの Casimir 不変量はスピンに直接的に関わる。

この Casimir 不変量 (1.4.30) を $\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ と $\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}$ とで表わせば

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{W}}^2 &= \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau}\tilde{\mathcal{P}}^\alpha\tilde{\mathcal{M}}^{\beta\gamma}\tilde{\mathcal{P}}^\rho\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma\tau} \\ &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\mathcal{P}}_\rho\tilde{\mathcal{M}}_{\sigma\tau}\tilde{\mathcal{P}}^\rho\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma\tau} + \tilde{\mathcal{P}}_\sigma\tilde{\mathcal{M}}_{\tau\rho}\tilde{\mathcal{P}}^\rho\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma\tau} + \tilde{\mathcal{P}}_\tau\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}\tilde{\mathcal{P}}^\rho\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma\tau}\right) \\ &= \tilde{\mathcal{P}}^2\tilde{\mathcal{M}}^2 + \tilde{\mathcal{P}}_\sigma\tilde{\mathcal{M}}_{\tau\rho}\tilde{\mathcal{P}}^\rho\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma\tau} \qquad \left(\tilde{\mathcal{M}}^2 = \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{M}}^{\rho\sigma}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}\right) \end{aligned} \tag{1.4.32}$$

である[30)]。2 行目の 2 項目と 3 項目は見かけ上添字がが違うように見えるだけで整理すれば一致することが分かる。また同じく 2 行目の 1 項目は

$$\tilde{\mathcal{P}}_\rho\tilde{\mathcal{M}}_{\sigma\tau}\tilde{\mathcal{P}}^\rho\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma\tau} = \tilde{\mathcal{P}}_\rho\tilde{\mathcal{P}}^\rho\tilde{\mathcal{M}}_{\sigma\tau}\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma\tau} + \tilde{\mathcal{P}}_\rho\left[\tilde{\mathcal{M}}_{\sigma\tau}, \tilde{\mathcal{P}}^\rho\right]\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma\tau} = \tilde{\mathcal{P}}^2\tilde{\mathcal{M}}_{\sigma\tau}\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma\tau} + \left[\tilde{\mathcal{P}}_\sigma, \tilde{\mathcal{P}}_\tau\right]\tilde{\mathcal{M}}^{\sigma\tau} \tag{1.4.34}$$

のように変形して、2 項目がゼロになることから得られる。とくに $\tilde{\mathcal{P}}^2$ が Casimir 不変量なので $\tilde{\mathcal{P}}^2\tilde{\mathcal{M}}^2 = \tilde{\mathcal{M}}^2\tilde{\mathcal{P}}^2$ である。このように $\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ と $\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}$ との交換関係により順序を変えれば

$$\tilde{\mathcal{W}}^2 = \tilde{\mathcal{M}}^2\tilde{\mathcal{P}}^2 + \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\tau}\tilde{\mathcal{M}}^{\tau\sigma}\tilde{\mathcal{P}}_\sigma\tilde{\mathcal{P}}^\rho \tag{1.4.35}$$

とも表わせる。2 つの Casimir 不変量 $\tilde{\mathcal{P}}^2, \tilde{\mathcal{W}}^2$ についての基本的な性質の確認は以上である。

ちょっとした補足。$\tilde{\mathcal{W}}_\mu$ は式 (1.4.23) で示される $\tilde{\mathcal{I}}$（Lorentz 群の生成子同士を完全反対称テンソルで縮約を取った量）と関係するものとして与えられた。ここで $\tilde{\mathcal{M}}^2$ についても同じことをして

30）

$$\eta^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau} = \det\begin{pmatrix} \eta_{\alpha\rho} & \eta_{\beta\rho} & \eta_{\gamma\rho} \\ \eta_{\alpha\sigma} & \eta_{\beta\sigma} & \eta_{\gamma\sigma} \\ \eta_{\alpha\tau} & \eta_{\beta\tau} & \eta_{\gamma\tau} \end{pmatrix}. \tag{1.4.33}$$

みる。まず $\tilde{\mathcal{W}}_\mu = \frac{1}{2}\left[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{M}}^2\right] = \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{P}}^\nu - \tilde{\mathcal{P}}^\nu\tilde{\mathcal{M}}_{\nu\mu})$ とする。このとき $\left[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{W}}_\nu\right] = \eta_{\mu\rho}\tilde{\mathcal{P}}^2 - \tilde{\mathcal{P}}_\mu\tilde{\mathcal{P}}_\nu$ と $\left[\tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}, \tilde{\mathcal{W}}_\rho\right] = -(\eta_{\mu\rho}\tilde{\mathcal{W}}_\nu - \eta_{\nu\rho}\tilde{\mathcal{W}}_\mu)$ とが得られる。$\tilde{\mathcal{I}}$ の時と比較すると後者は似た形になっているが、前者がゼロになっておらず違う形になっている。また $\tilde{\mathcal{W}}^\mu\tilde{\mathcal{P}}_\mu = \tilde{\mathcal{P}}^\mu\tilde{\mathcal{W}}_\mu = \frac{3}{2}\tilde{\mathcal{P}}^2$ であり、可換になってはいるが直交性が失われている。したがって $\tilde{\mathcal{W}}^2 = \tilde{\mathcal{W}}^\mu\tilde{\mathcal{W}}_\mu$ とすると $\left[\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{W}}^2\right] = (2\tilde{\mathcal{W}}_\mu - 3\tilde{\mathcal{P}}_\mu)\tilde{\mathcal{P}}^2$ かつ $\left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{W}}^2\right] = 0$ となり、Casimir 不変量を構成できていないことが確認できる。

1.5　共形変換

Minkowski 時空における計量を不変に保つ変換群としてまず Lorentz 群を考え、次に時空並進変換群との半直積として拡張された Poincaré 群を考えた。それぞれを非相対論に制限すると回転群と特殊 Euclid 群とになる。一方で Poincaré 群の拡張を考えると、そのひとつに共形群がある。

1.5.1　微小変換

ここでの計算は正の整数 d で与えられる一般の次元で行なう（ギリシャ文字の添字は 0 から $d-1$ までを走る)。実函数 $\Omega(x)$ を用いて表わされる計量の変化、$\mathrm{d}s^2 \to \mathrm{d}s'^2 = \Omega(x)\mathrm{d}s^2$ を許す座標変換のなす群を共形群と呼ぶ。計量の変化を陽に書けば

$$\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \;\to\; \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu = \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha x'^\mu\partial_\beta x'^\nu\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta = \Omega(x)\eta_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta, \tag{1.5.1}$$

つまり

$$\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha x'^\mu\partial_\beta x'^\nu = \Omega(x)\eta_{\alpha\beta} \tag{1.5.2}$$

である。ここで微小変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu + O\left(\epsilon^2\right)$ を考えると、1 次近似の範囲で

$$\eta_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\epsilon_\beta + \partial_\beta\epsilon_\alpha \simeq \Omega(x)\eta_{\alpha\beta} \tag{1.5.3}$$

である。両辺で $\eta_{\alpha\beta}$ との縮約を取ると

$$\Omega(x) \simeq 1 + \frac{2}{d}\partial_\alpha\epsilon^\alpha \tag{1.5.4}$$

が得られる。これを式 (1.5.3) に入れ直せば

$$\partial_\alpha\epsilon_\beta + \partial_\beta\epsilon_\alpha \simeq \frac{2}{d}\partial_\mu\epsilon^\mu\eta_{\alpha\beta} \tag{1.5.5}$$

となる。両辺で ∂^α との縮約を取った後に ∂_α を乗じると

$$\partial^\mu\partial_\mu\partial_\alpha\epsilon_\beta \simeq \left(\frac{2}{d} - 1\right)\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\mu\epsilon^\mu \tag{1.5.6}$$

となる。操作として若干紛らわしいが、前者の操作は縮約が取られて α の添字が無くなる（そのことを明示するためにダミーは μ に変えた）ので、後者の操作と合わせて $\partial_\alpha\partial^\alpha$ を両辺に乗じている

わけではない。同様に両辺で ∂^β との縮約を取った後に ∂_β を乗じると

$$\partial^\mu \partial_\mu \partial_\beta \epsilon_\alpha \simeq \left(\frac{2}{d} - 1 \right) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \epsilon^\mu \tag{1.5.7}$$

となる。両式の和をとると

$$2 \left(\frac{2}{d} - 1 \right) \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \epsilon^\mu \simeq \partial^\mu \partial_\mu \left(\partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha \right) \simeq \frac{2}{d} \partial^\mu \partial_\mu \partial_\nu \epsilon^\nu \eta_{\alpha\beta}, \tag{1.5.8}$$

つまり

$$(2 - d) \, \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \epsilon^\mu \simeq \partial^\nu \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^\mu \eta_{\alpha\beta} \tag{1.5.9}$$

が得られる。両辺で $\eta^{\alpha\beta}$ との縮約をとると

$$(1 - d) \, \partial^\nu \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^\mu \simeq 0 \tag{1.5.10}$$

も得られる。$d = 1$ のとき、式 (1.5.10) は何も条件を与えない[31)]。ここで $d = 1$ の状況に興味はないので $d \geq 2$ を考えることにする。つまり

$$\partial^\nu \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^\mu \simeq 0 \tag{1.5.11}$$

が常に成り立つ状況を考える。すると式 (1.5.9) は

$$(2 - d) \, \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \epsilon^\mu \simeq 0 \tag{1.5.12}$$

という条件を与えることになる。$d = 2$ のときが最も特徴的な挙動をとるが、まずは $d \geq 3$ の状況を考えることにする。

$d \geq 3$ のとき、式 (1.5.11) は

$$\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\mu \epsilon^\mu \simeq 0 \tag{1.5.13}$$

である。すなわち ϵ^μ は最大次数が 2 で、3 種類の係数 $a^\mu, b^\mu{}_\nu, c^\mu{}_{\rho\sigma}$ を用いて

$$\epsilon^\mu = a^\mu + b^\mu{}_\nu x^\nu + c^\mu{}_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \tag{1.5.14}$$

と表わすことができる。ただし $c^\mu{}_{\rho\sigma}$ は $c^\mu{}_{\rho\sigma} = c^\mu{}_{\sigma\rho}$（2,3 番目の添字が対称）を満たすものとする。0 次項の a^μ は Poincaré 変換の時に既に述べた時空並進のパラメータである。1 次以上の項を調べるために式 (1.5.5) に代入すると

$$b_{\beta\alpha} + b_{\alpha\beta} + 2(c_{\beta\alpha\nu} + c_{\alpha\beta\nu}) x^\nu \simeq \frac{2}{d} b^\mu{}_\mu \eta_{\alpha\beta} + \frac{4}{d} c^\mu{}_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} x^\nu \tag{1.5.15}$$

が得られる。各次数で分けると

$$\begin{cases} b_{\alpha\beta} + b_{\beta\alpha} \simeq 2\sigma \eta_{\alpha\beta} & \left(\sigma = \dfrac{1}{d} b^\mu{}_\mu \right) \\ c_{\alpha\beta\nu} + c_{\beta\alpha\nu} \simeq 2\chi_\nu \eta_{\alpha\beta} & \left(\chi_\nu = \dfrac{1}{d} c^\mu{}_{\mu\nu} \right) \end{cases} \tag{1.5.16}$$

31) このことは時空の次元が $d = 1$ のときに共形変換（等角写像とも呼ばれる）を定義するための角が考えられないことに対応する、と文献 [10] で述べられている。

である。一般に対称な成分と反対称な成分との和に分解できることから、前者は反対称な量 $\omega^\mu{}_\nu$ $(\omega^\mu{}_\nu + \omega_\nu{}^\mu = 0)$ を用いて

$$b^\mu{}_\nu = \omega^\mu{}_\nu + \sigma\delta^\mu_\nu \tag{1.5.17}$$

と表わせる。$\omega^\mu{}_\nu$ は Lorentz 変換のパラメータである。一方で対角成分の係数 σ は共形変換で新たに出てきたパラメータであり、スケール変換に対応する。$c_{\alpha\beta\nu}$ を調べるためにこれまでの結果を踏まえた上で再び式 (1.5.5) の右辺にパラメータを代入すると

$$\partial_\alpha\epsilon_\beta + \partial_\beta\epsilon_\alpha \simeq 2\left(\sigma + 2\chi_\nu x^\nu\right)\eta_{\alpha\beta}, \tag{1.5.18}$$

両辺に ∂_μ を作用させると

$$\partial_\mu\partial_\alpha\epsilon_\beta + \partial_\beta\partial_\mu\epsilon_\alpha \simeq 4\chi_\mu\eta_{\alpha\beta} \tag{1.5.19}$$

になる。式 (1.5.18) で添字を巡回的に $\alpha\beta \to \beta\mu$ とし、両辺に ∂_α を作用させると

$$\partial_\alpha\partial_\beta\epsilon_\mu + \partial_\mu\partial_\alpha\epsilon_\beta \simeq 4\chi_\alpha\eta_{\beta\mu}, \tag{1.5.20}$$

同様に $\alpha\beta \to \mu\alpha$ とし、両辺に ∂_β を作用させると

$$\partial_\beta\partial_\mu\epsilon_\alpha + \partial_\alpha\partial_\beta\epsilon_\mu \simeq 4\chi_\beta\eta_{\mu\alpha} \tag{1.5.21}$$

になる。$\partial_\alpha\partial_\beta\epsilon_\mu = 2c_{\mu\alpha\beta}$ と $-(1.5.19) + (1.5.20) + (1.5.21)$ から

$$c_{\mu\alpha\beta} = \chi_\alpha\eta_{\beta\mu} + \chi_\beta\eta_{\mu\alpha} - \chi_\mu\eta_{\alpha\beta} \tag{1.5.22}$$

が得られる。したがって 2 次の係数である $c^\mu{}_{\rho\sigma}$ の自由度は χ_μ の 4 つしかないことが分かる。これも共形変換で新たに出てきたパラメータで、特殊共形変換と呼ばれる。具体的に計算すると

$$c^\mu{}_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma = 2\chi_\alpha x^\alpha x^\mu - x_\alpha x^\alpha \chi^\mu \tag{1.5.23}$$

となることが確認できる。

以上の結果をまとめると、共形変換の 1 次近似は

$$x^\mu \to x'^\mu \simeq (1+\sigma)x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + 2\chi_\alpha x^\alpha x^\mu - x_\alpha x^\alpha \chi^\mu + a^\mu \tag{1.5.24}$$

で示される。共形変換のパラメータ $d(d+3)/2+1$ あり、その内訳は時空並進変換 a^μ の d と Lorentz 変換 $\omega^\mu{}_\nu$ の ${}_d\mathrm{C}_2 = d(d-1)/2$、スケール変換 σ の 1、特殊共形変換 χ^μ の d となっている。

1.5.2　生成子と交換関係

共形変換の生成子のうち Poincaré 変換の部分は $\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} = x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho (= x_\rho\tilde{\mathcal{P}}_\sigma - x_\sigma\tilde{\mathcal{P}}_\rho)$, $\tilde{\mathcal{P}}_\mu = \partial_\mu$ である。式 (1.5.24) よりスケール変換は

$$\sigma x^\mu = \sigma x^\nu\delta^\mu_\nu = \sigma x^\nu\partial_\nu x^\mu \tag{1.5.25}$$

のように変形できるので、生成子は

$$\tilde{\mathcal{D}} = x^\mu \partial_\mu \left(= x^\mu \tilde{\mathcal{P}}_\mu\right) \tag{1.5.26}$$

となる。特殊共形変換についても同様に、パラメータを分離させるように変形すれば

$$2\chi_\alpha x^\alpha x^\mu - x_\alpha x^\alpha \chi^\mu = -\chi^\alpha \left(x_\beta x^\beta \delta^\mu_\alpha - 2x_\alpha x^\mu\right) = -\chi^\alpha \left(x_\beta x^\beta \partial_\alpha - 2x_\alpha x^\beta \partial_\beta\right) x^\mu \tag{1.5.27}$$

のように出来るので、生成子は

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu = x_\alpha x^\alpha \partial_\mu - 2x_\mu x^\alpha \partial_\alpha \left(= x_\alpha x^\alpha \tilde{\mathcal{P}}_\mu - 2x_\mu \tilde{\mathcal{D}}\right) \tag{1.5.28}$$

であることが分かる。

共形変換の生成子は $\{\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{K}}_\mu\}$ なので、独立な交換関係は $4 + {}_4\mathrm{C}_2 = 10$ ある。$\{\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}_\mu\}$ は Poincaré 変換の生成子で、式 (1.4.19) で既に示されている 3 つの交換関係を満たす。

スケール変換の生成子 $\tilde{\mathcal{D}}$ との交換関係をまず確認する。以下微分演算子を用いた計算において $[\partial_\mu, x_\nu] \left(= [\tilde{\mathcal{P}}_\mu, x_\nu]\right) = \eta_{\mu\nu}$ は基本的である[32]。$\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}$ との交換関係は

$$[\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}] = x^\alpha \left[\tilde{\mathcal{P}}_\alpha, \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}\right] + \left[x^\alpha, \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}\right] \tilde{\mathcal{P}}_\alpha = x_\rho \tilde{\mathcal{P}}_\sigma - x_\sigma \tilde{\mathcal{P}}_\rho + \left(x_\sigma \tilde{\mathcal{P}}_\rho - x_\rho \tilde{\mathcal{P}}_\sigma\right) = 0 \tag{1.5.29}$$

であり、$\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ との交換関係は

$$[\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{P}}_\mu] = \left[x^\alpha, \tilde{\mathcal{P}}_\mu\right] \tilde{\mathcal{P}}_\alpha = -\delta^\alpha_\mu \tilde{\mathcal{P}}_\alpha = -\tilde{\mathcal{P}}_\mu \tag{1.5.30}$$

となる[33]。自身との交換関係は

$$[\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{D}}] = \left[x^\alpha \partial_\alpha, x^\beta \partial_\beta\right] = x^\alpha \left[\partial_\alpha, x^\beta\right] \partial_\beta + x^\beta \left[x^\alpha, \partial_\beta\right] \partial_\alpha = 0 \tag{1.5.31}$$

となり、残る $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ は

$$\begin{aligned}
[\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{K}}_\mu] = \left[\tilde{\mathcal{D}}, x_\beta x^\beta \tilde{\mathcal{P}}_\mu\right] - \left[\tilde{\mathcal{D}}, 2x_\mu \tilde{\mathcal{D}}\right] &= x_\beta x^\beta \left[\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{P}}_\mu\right] + \left[\tilde{\mathcal{D}}, x_\beta x^\beta\right] \tilde{\mathcal{P}}_\mu - 2\left[\tilde{\mathcal{D}}, x_\mu\right] \tilde{\mathcal{D}} \\
&= -x_\beta x^\beta \tilde{\mathcal{P}}_\mu + 2x_\beta x^\beta \tilde{\mathcal{P}}_\mu - 2x_\mu \tilde{\mathcal{D}} \\
&= \tilde{\mathcal{K}}_\mu
\end{aligned} \tag{1.5.32}$$

となる。添字を 1 つ持つ時空並進変換・特殊共形変換の生成子との交換関係は（係数の変化を許容する範囲で）それぞれの生成子を不変に保つ。添字を 2 つ持っている Lorentz 変換の生成子との交換関係はゼロ、つまりスケール変換と Lorentz 変換とが可換であることが分かる。これは添字を持たない $\tilde{\mathcal{D}}$ が Lorentz 変換の下で不変であることを表わしている。

---

32) $\left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, x_\mu\right] = -(\eta_{\rho\mu} x_\sigma - \eta_{\sigma\mu} x_\rho)$, $\left[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, x_\alpha x^\alpha\right] = 0$.

33) $\left[\tilde{\mathcal{D}}, x^\mu\right] = x^\mu$, $\left[\tilde{\mathcal{D}}, x_\alpha x^\alpha\right] = 2x_\alpha x^\alpha$.

特殊共形変換の生成子 $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ との交換関係を確認する。$\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}$ との交換関係は

$$
\begin{aligned}
[\tilde{\mathcal{K}}_\mu, \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}] &= [x_\alpha x^\alpha \tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}] - [2x_\mu \tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}] \\
&= x_\alpha x^\alpha [\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}] - 2[x_\mu, \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}]\tilde{\mathcal{D}} \\
&= x_\alpha x^\alpha (\eta_{\rho\mu}\tilde{\mathcal{P}}_\sigma - \eta_{\sigma\mu}\tilde{\mathcal{P}}_\rho) - 2(\eta_{\rho\mu}x_\sigma - \eta_{\sigma\mu}x_\rho)\tilde{\mathcal{D}} \\
&= \eta_{\rho\mu}\tilde{\mathcal{K}}_\sigma - \eta_{\sigma\mu}\tilde{\mathcal{K}}_\rho
\end{aligned}
\tag{1.5.33}
$$

であり、$\tilde{\mathcal{P}}_\mu$ との交換関係は

$$
[\tilde{\mathcal{K}}_\mu, \tilde{\mathcal{P}}_\nu] = [x_\alpha x^\alpha \tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{P}}_\nu] - [2x_\mu \tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{P}}_\nu] = -2x_\nu \tilde{\mathcal{P}}_\mu + 2x_\mu \tilde{\mathcal{P}}_\nu + 2\eta_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{D}} = 2\left(\tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{D}}\right) \tag{1.5.34}
$$

で、自身との交換関係は

$$
\begin{aligned}
[\tilde{\mathcal{K}}_\mu, \tilde{\mathcal{K}}_\nu] &= \left[\tilde{\mathcal{K}}_\mu, x_\beta x^\beta \tilde{\mathcal{P}}_\nu\right] - 2[\tilde{\mathcal{K}}_\mu, x_\nu \tilde{\mathcal{D}}] \\
&= 2x_\beta x^\beta \left(\tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{D}}\right) - 2x_\alpha x^\alpha x_\mu \tilde{\mathcal{P}}_\nu + 2x_\nu \tilde{\mathcal{K}}_\mu - 2(\eta_{\mu\nu}x_\alpha x^\alpha - 2x_\mu x_\nu)\tilde{\mathcal{D}} \\
&= 2\left(x_\nu \tilde{\mathcal{K}}_\mu + 2x_\mu x_\nu \tilde{\mathcal{D}} + x_\beta x^\beta \tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} - x_\alpha x^\alpha x_\mu \tilde{\mathcal{P}}_\nu\right) \\
&= 2\left(x_\nu \tilde{\mathcal{K}}_\mu - x_\nu\left(x_\beta x^\beta \tilde{\mathcal{P}}_\mu - 2x_\mu \tilde{\mathcal{D}}\right) + x_\beta x^\beta \tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} - x_\alpha x^\alpha \left(x_\mu \tilde{\mathcal{P}}_\nu - x_\nu \tilde{\mathcal{P}}_\mu\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{1.5.35}
$$

となる[34)]。とくに $[\tilde{\mathcal{K}}_\mu, \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}]$ は $[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}_\mu]$ と同じ形になっている、つまり $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$ も $\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}$ との交換関係をとることで微小 Lorentz 変換されている。

共形群の生成子

$$
\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} = x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho, \quad \tilde{\mathcal{P}}_\mu = \partial_\mu, \quad \tilde{\mathcal{D}} = x^\alpha \partial_\alpha, \quad \tilde{\mathcal{K}}_\mu = x_\alpha x^\alpha \partial_\mu - 2x_\mu x^\alpha \partial_\alpha \tag{1.5.36}
$$

が満たす交換関係は

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}] = -\left(\eta_{\rho\mu}\tilde{\mathcal{M}}_{\sigma\nu} - \eta_{\rho\nu}\tilde{\mathcal{M}}_{\sigma\mu} - \eta_{\sigma\mu}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\nu} + \eta_{\sigma\nu}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\mu}\right), \\
&[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{P}}_\mu] = -\left(\eta_{\rho\mu}\tilde{\mathcal{P}}_\sigma - \eta_{\sigma\mu}\tilde{\mathcal{P}}_\rho\right), \qquad [\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \tilde{\mathcal{P}}_\nu] = 0, \\
&[\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{D}}] = 0, \qquad [\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \tilde{\mathcal{K}}_\mu] = -\left(\eta_{\rho\mu}\tilde{\mathcal{K}}_\sigma - \eta_{\sigma\mu}\tilde{\mathcal{K}}_\rho\right), \\
&[\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{P}}_\mu] = -\tilde{\mathcal{P}}_\mu, \qquad [\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{D}}] = 0, \qquad [\tilde{\mathcal{D}}, \tilde{\mathcal{K}}_\mu] = \tilde{\mathcal{K}}_\mu, \\
&[\tilde{\mathcal{K}}_\mu, \tilde{\mathcal{P}}_\nu] = 2\left(\tilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{D}}\right), \qquad [\tilde{\mathcal{K}}_\mu, \tilde{\mathcal{K}}_\nu] = 0
\end{aligned}
\tag{1.5.37}
$$

にまとめられる。さらに -1 から d までを走る添字として下線をつけたギリシャ文字（たとえば $\underline{\mu}$、引き続き何もついてないギリシャ文字は 0 から $d-1$ を走る）を導入して $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{\rho}\underline{\sigma}}$ を

$$
\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{\rho}\underline{\sigma}} = \begin{cases}
\dfrac{1}{2}\left(\tilde{\mathcal{K}}_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_\rho\right) & (\underline{\rho} = \rho, \underline{\sigma} = -1), \\
\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} & (\underline{\rho} = \rho, \underline{\sigma} = \sigma), \\
\dfrac{1}{2}\left(\tilde{\mathcal{K}}_\rho + \tilde{\mathcal{P}}_\rho\right) & (\underline{\rho} = \rho, \underline{\sigma} = d), \\
\mathcal{D} & (\underline{\rho} = d, \underline{\sigma} = -1)
\end{cases}
\tag{1.5.38}
$$

34) $\left[\tilde{\mathcal{K}}_\mu, x_\nu\right] = \left[x_\alpha x^\alpha \tilde{\mathcal{P}}_\mu - 2x_\mu \tilde{\mathcal{D}}, x_\nu\right] = \eta_{\mu\nu}x_\alpha x^\alpha - 2x_\mu x_\nu$, $\left[\tilde{\mathcal{K}}_\mu, x_\alpha x^\alpha\right] = -2x_\alpha x^\alpha x_\mu$.

で与えると、先述の交換関係 (1.5.37) は

$$\left[\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{\rho\sigma}}, \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{\mu\nu}}\right] = -\left(\eta_{\underline{\rho\mu}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{\sigma\nu}} - \eta_{\underline{\rho\nu}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{\sigma\mu}} - \eta_{\underline{\sigma\mu}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{\rho\nu}} + \eta_{\underline{\sigma\nu}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{\rho\mu}}\right) \tag{1.5.39}$$

にまとめることも出来る。この交換関係 (1.5.39) を仮定することで得られるものと、関係式 (1.5.38) を代入して得られるものとを比較したものが

$$\begin{aligned} \eta_{-1-1}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} &= [\tilde{\mathcal{M}}_{\rho-1}, \tilde{\mathcal{M}}_{-1\sigma}] = -\frac{1}{4}\left(-[\tilde{\mathcal{K}}_\rho, \tilde{\mathcal{P}}_\sigma] - [\tilde{\mathcal{P}}_\rho, \tilde{\mathcal{K}}_\sigma]\right) = \tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma}, \\ \eta_{-1-1}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho d} &= [\tilde{\mathcal{M}}_{\rho-1}, \tilde{\mathcal{M}}_{-1d}] = -\frac{1}{2}[\tilde{\mathcal{K}}_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_\rho, \tilde{\mathcal{D}}] = \frac{1}{2}\left(\tilde{\mathcal{K}}_\rho + \tilde{\mathcal{P}}_\rho\right), \\ \eta_{dd}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho-1} &= [\tilde{\mathcal{M}}_{\rho d}, \tilde{\mathcal{M}}_{d-1}] = \frac{1}{2}[\tilde{\mathcal{K}}_\rho + \tilde{\mathcal{P}}_\rho, \tilde{\mathcal{D}}] = -\frac{1}{2}\left(\tilde{\mathcal{K}}_\rho - \tilde{\mathcal{P}}_\rho\right), \\ \eta_{dd}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} &= [\tilde{\mathcal{M}}_{\rho d}, \tilde{\mathcal{M}}_{d\sigma}] = -\frac{1}{4}\left([\tilde{\mathcal{P}}_\rho, \tilde{\mathcal{K}}_\sigma] + [\tilde{\mathcal{K}}_\rho, \tilde{\mathcal{P}}_\sigma]\right) = -\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{1.5.40}$$

である ($\eta_{-1-1} = 1, \eta_{dd} = -1$)。ここでは $\mathrm{val}\,[\eta_{\mu\nu}] = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$ としているから $\mathrm{val}\left[\eta_{\underline{\mu\nu}}\right] = \mathrm{diag}(1, 1, -1, \ldots, -1)$ で表わされることが確認できる[35)]。したがって共形群は特殊擬直交群 $\mathrm{SO}(2, d)$ で記述される。添字が 1 から d の部分は回転群 $\mathrm{SO}(d)$ になっている。

1.5.3 有限な変換

これまでの議論から、共形変換の一般形は生成子の指数写像

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma}\tilde{\mathcal{M}}_{\rho\sigma} + a^\mu\tilde{\mathcal{P}}_\mu + \sigma\tilde{\mathcal{D}} - \chi^\mu\tilde{\mathcal{K}}_\mu\right] \tag{1.5.41}$$

で与えられるはずである。微小とは限らないスケール変換は

$$\exp\left(\sigma\tilde{\mathcal{D}}\right)x^\mu = \left(1 + \sigma + \frac{1}{2!}\sigma^2 + \frac{1}{3!}\sigma^3 + \cdots\right)x^\mu = \lambda x^\mu \qquad (\lambda = e^\sigma) \tag{1.5.42}$$

である。計量の変化は $\mathrm{d}s^2 \to e^{2\sigma}\mathrm{d}s^2 = \lambda^2\mathrm{d}s^2$ である。微小とは限らない特殊共形変換も同様に指数写像で得られるはずだが、生成子の段階で既に比較的複雑な形になっており見通しを良くする意味合いは薄い。一応 2 次の係数までを見ると

$$\begin{aligned} \exp\left(-\chi^\alpha\tilde{\mathcal{K}}_\alpha\right)x^\mu &= \left(1 - \chi^\alpha\tilde{\mathcal{K}}_\alpha + \frac{1}{2!}\left(\chi^\alpha\tilde{\mathcal{K}}_\alpha\right)^2 + O\left(\chi^3\right)\right)x^\mu \\ &= \left(1 + 2\chi_\alpha x^\alpha + 4\left(\chi_\alpha x^\alpha\right)^2 - \chi_\alpha\chi^\alpha x_\beta x^\beta\right)x^\mu - \left(1 + 2\chi_\alpha x^\alpha\right)x_\beta x^\beta\chi^\mu + O\left(\chi^3\right) \end{aligned} \tag{1.5.43}$$

となっている。

微小変換を考えるだけでは見えていないが、特殊共形変換を理解する上で重要な操作として反転がある。反転は

$$x^\mu \to \frac{x^\mu}{x^2} \tag{1.5.44}$$

35) 共形群を扱う場合は $-1 \to d+1$ として添字が 0 から $d+1$ まで走る $\mathrm{val}\left[\eta_{\underline{\mu\nu}}\right] = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1, 1)$、さらに d と $d+1$ とを入れ替えて $\eta_{\mu\nu}$ の符号も反転させた $\mathrm{val}\left[\eta_{\underline{\mu\nu}}\right] = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1, -1)$ のほうが使われる。

で表わされる変換である。この変換の大まかな特徴は不連続であり、次元が逆数になるという 2 点にある。前者は微小変換では直接見えないことにつながり、後者は原点における反転が素朴には定義されていないことにつながる。とくに後者についてはいわゆる無限遠点の追加で整合性が保たれる。反転は逆変換と同一で 2 回の変換で元に戻る。具体的には

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \to x''^\mu = \frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu/x^2}{x^2/x^4} = x^\mu \tag{1.5.45}$$

である。1 回の変換では次元が変わったままなので、次元を変えないためには 2 回 1 セットの変換が基本となる。特殊共形変換を除けば共形群に含まれる連続変換は Lorentz 変換・時空並進変換・スケール変換の 3 つあるが、Lorentz 変換を反転で挟めば $x^\mu \to x^\mu/x^2 \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu/x^2 \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ であり、同様にスケール変換を反転で挟めば $x^\mu \to x^\mu/x^2 \to \lambda x^\mu/x^2 \to \lambda^{-1}x^\mu$ である。前者は反転の影響を全く受けておらず、後者も拡大（縮小）が縮小（拡大）になる変化はあるがスケール変換そのものである。一方時空並進変換を反転で挟むと

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \to x'^\mu - \chi^\mu \to x''^\mu = \frac{x'^\mu - \chi^\mu}{(x'-\chi)^2} = \frac{x^\mu - x^2\chi^\mu}{1 - 2\chi_\alpha x^\alpha + \chi^2 x^2} \tag{1.5.46}$$

となる。ただし後の計算と符号を合わせるために時空並進変換を負の方向に行なった。前の 2 つの変換と違い、こちらは時空並進変換の形を保っていない。パラメータ χ^μ の 1 次までを見ると

$$\frac{x^\mu - x^2\chi^\mu}{1 - 2\chi_\alpha x^\alpha + \chi^2 x^2} \simeq (1 + 2\chi_\alpha x^\alpha)x^\mu - x^2\chi^\mu = \left(1 - \chi^\alpha \tilde{\mathcal{K}}_\alpha\right) x^\mu \tag{1.5.47}$$

が得られる。微小変換の計算だけからは見えなかったが、特殊共形変換は反転と時空並進との合成によって得られる変換ということが分かる。したがって式 (1.5.46) に示される変換が特殊共形変換の微小でない変換ということになる。改めて書けば

$$\exp\left(-\chi^\alpha \tilde{\mathcal{K}}_\alpha\right) x^\mu = \frac{x^\mu - x^2\chi^\mu}{1 - 2\chi_\alpha x^\alpha + \chi^2 x^2} \tag{1.5.48}$$

となる（ここでは指数写像から直接この関係式を求めたわけではない。）。共形群を構成する 4 つの連続変換は、特殊共形変換を（不連続な変換である）反転に置き換えた 4 つの変換と実質的に同じである。

1.5.4 補: 2 次元の場合

2 次元の場合は式 (1.5.12) が条件を与えなくなってしまうので、微小変換のパラメータ $\epsilon^\mu(x^0, x^1)$ が満たす式は

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha &\simeq \partial_\mu \epsilon^\mu \eta_{\alpha\beta} \\ \partial^\nu \partial_\nu \partial_\mu \epsilon^\mu &\simeq 0 \end{aligned} \tag{1.5.49}$$

となる（式 (1.5.5) と (1.5.11) との再掲）。1 行目の式のそれぞれの成分を書き下せば

$$\partial_0 \epsilon_0 + \partial_1 \epsilon_1 \simeq 0 \quad (\alpha = \beta), \qquad \partial_0 \epsilon_1 + \partial_1 \epsilon_0 \simeq 0 \quad (\alpha \neq \beta) \tag{1.5.50}$$

である。ここで $\epsilon_\pm = \epsilon^0 \pm \epsilon^1 = \epsilon_0 \mp \epsilon_1$ かつ $x_\pm = x^0 \pm x^1$ とおけば、$\partial_\pm = \partial/\partial x_\pm = \frac{1}{2}(\partial_0 \pm \partial_1)$ であるから

$$\partial_\mp \epsilon_\pm = \frac{1}{2}\left(\partial_0 \mp \partial_1\right)\left(\epsilon_0 \mp \epsilon_1\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_0\epsilon_0 + \partial_1\epsilon_1 \mp \left(\partial_0\epsilon_1 + \partial_1\epsilon_0\right)\right) \simeq 0 \tag{1.5.51}$$

と等価である。2 行目の式は

$$\partial_\mu \epsilon^\mu = \partial_0\epsilon^0 + \partial_1\epsilon^1 = (\partial_+ + \partial_-)\epsilon^0 + (\partial_+ - \partial_-)\epsilon^1 = \partial_+\epsilon_+ + \partial_-\epsilon_- \tag{1.5.52}$$

かつ

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \partial_1^2 = 4\partial_+\partial_- \tag{1.5.53}$$

より、1 行目の式が成り立てば恒等的に成り立つ。つまり 2 行目の式が新たに与える条件は無く、2 次元における微小変換は式 (1.5.51) で表わし尽くされていることになる。

共形変換の微小変換 $x^\mu \to x'^\mu \simeq x^\mu + \epsilon^\mu$ を $x_\pm$ で表わせば

$$x_\pm = x^0 \pm x^1 \longrightarrow x'_\pm = x'^0 \pm x'^1 \simeq x^0 \pm x^1 + \epsilon^0 \pm \epsilon^1 = x_\pm + \epsilon_\pm \tag{1.5.54}$$

である。$x_\pm$ の微小変換のパラメータは $\epsilon_\pm$ であり、式 (1.5.51) からそれぞれ $x_\mp$ に依存しないことが分かる。つまりそれぞれが他方の座標には依存しない実数値 1 変数函数 $\epsilon_+(x_+), \epsilon_-(x_-)$ になっている。3 次元以上の場合のように共形変換のパラメータ $\epsilon_\pm(x_\pm)$ の次数を制限する条件が無いため、その係数で与えられる自由度の数を制限する条件も特に無い。

以上の計算は不定計量で表わされる 2 次元 Minkowski 時空においてのものである。2 次元共形場理論は Euclid 時空上で考えたものを指すことが多く、以下では Wick 回転を行なって Euclid 化された場合について述べる。

計量テンソルは $\eta_{\mu\nu} \to -\delta_{ij}$ で、添字の走る範囲は $0, 1 \to 1, 2$ とする。また標準の添字の位置を下に揃え、特に断らない限り下添字同士でも同じ添字は和を取るものとする。このとき式 (1.5.49) の 1 行目は

$$\partial_i\epsilon_j + \partial_j\epsilon_i \simeq \partial_k\epsilon_k\delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_1\epsilon_1 - \partial_2\epsilon_2 \simeq 0, \quad \partial_1\epsilon_2 + \partial_2\epsilon_1 \simeq 0 \tag{1.5.55}$$

になる。ここで $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ かつ $z = x_1 + ix_2$ とおくと、$\partial_z = \partial/\partial z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$ であるから

$$\partial_{\bar{z}}\epsilon = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)(\epsilon_1 + i\epsilon_2) = \frac{1}{2}(\partial_1\epsilon_1 + i\partial_2\epsilon_1 + i\partial_1\epsilon_2 - \partial_2\epsilon_2) \simeq 0 \tag{1.5.56}$$

にまとめられる。ただし $\bar{z} = x_1 - ix_2$ のようにバーは複素共役を表わすものとする。同様に $\partial_z\bar{\epsilon} \simeq 0$ である。つまり式 (1.5.55) と (1.5.56) とは複素函数論で重要な Cauchy–Riemann の方程式であり、微小変換のパラメータ $\epsilon(z)$ は正則函数ということになる。言い換えると 2 次元 Euclid 時空上の共形変換は正則函数によって生成され、パラメータの次数を制限する条件は無い。

第 2 章　場の変換

途中も途中。

2.1　古典場

時空の各点で（ひとつあるいは複数成分の）値をもつ函数を場、とくに量子論で扱う場（状態ベクトルに作用する演算子）と区別して古典場とも呼ばれる。古典場は状態ベクトルである。以下相対論的な古典場、つまり Poincaré 群の表現としての古典場について述べる。

2.1.1　表現

時空 $\mathbb{M}$ 上の複素 Hilbert 空間を V とし、V の要素を場と呼ぶ。以下特に断らない限り $\mathbb{M}$ の要素は主に x, y、V の要素は主に ϕ, ψ で表わすことにする[1)]。座標変換（Poincaré 変換）されればそれに応じて場も変換されるが、場の変換は座標変換の準同型写像で得られるものを考える。言い換えると、座標変換 $(\Lambda, a) : x \to x'$ に対して場 ϕ の変換

$$\phi(x) \to \phi'(x') = D(\Lambda, a)\phi(x) \tag{2.1.2}$$

を与え[2)]、かつ座標変換 $(\Lambda_1, a_1) : x \to x'$ と $(\Lambda_2, a_2) : x' \to x''$ とに対して $(\Lambda_3, a_3) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) : x \to x''$ が与えられるように、

$$\phi'(x') = D(\Lambda_1, a_1)\phi(x), \qquad \phi''(x'') = D(\Lambda_2, a_2)\phi'(x') \tag{2.1.3}$$

に対して

$$\phi''(x'') = D(\Lambda_3, a_3)\phi(x) = D(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)\phi(x) \tag{2.1.4}$$

を与える写像 D を考える[3)]。この準同型写像 D と、その作用される線型空間 V との組 (D, V) を表現と呼ぶ。線型空間 V は表現空間とも呼ばれる。また 1 章で特に述べていなかったが、座標変換

1）　V はいわゆる L^2 空間で、適当な測度 μ に対して

$$\left(\int_{\mathbb{M}} \phi(x)^* \phi(x) \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/2} < \infty, \qquad \left|\int_{\mathbb{M}} \phi(x)^* \psi(x) \mathrm{d}\mu(x)\right|^{1/2} < \infty \tag{2.1.1}$$

を満たす。

2）　4 成分をもつ時空点が x と書かれることがあるように、ここでは場とその変換とは成分を明示していない、というテイである。

3）　D が準同型写像であることは、V から V 自身への線形変換のなす群を $\mathrm{G}(V)$ と書くことにすると、$D : \mathrm{ISO}^+(1,3) \to \mathrm{G}(V)$ において演算（積）の構造を保っている、ということである。D は座標変換における恒等変換を場の恒等変換へ移し、座標の逆変換も場の逆変換へ移す。

自体も時空 $\mathbb{M}$ を表現空間とする（抽象的な）Poincaré 群の表現であり、標準表現と呼ばれる。

場の Poincaré 変換を考えるということは、Poincaré 群の表現 (D, V) としてどのようなものがありうるのか分類する、と言い換えることができる。それは 1.4 章で述べた Poincaré 群の生成子の議論をそのまま用いて整理することができる。

相対論において Poincaré 変換は座標変換である。座標変換という名称が意味するものは、見方を変えるだけで実体を変更しない変換である。1 章で時空そのものを考える際は、計量 $\mathrm{d}s^2$ を不変に保つことが実体を変更しないことに対応した。場を考える際も同様に、場のノルム（あるいは内積）を不変に保つ変換として Poincaré 変換を考える必要がある。また場は一般に複素数値をとる。したがって場において考える Poincaré 群の表現はユニタリ表現である。

2.1.2 Poincaré 代数

群をそのまま扱うのは一般に難しい。それは群が大域的なものであるから、というのもあるかもしれない。物理においても基本的には積分方程式を用いて運動を追うよりも、微分方程式を用いて運動を追うほうが常套的だと思われる。Poincaré 群の表現を得る際も、微小変換を考えることで得られる代数を用いる。

場は時空 $\mathbb{M}$ 上の函数なので、座標と微分作用素とで表わされた Poincaré 群の生成子を用いることが適当である[4)]。座標変換は実数のみを扱っていたため、エルミート性を気にせず生成子を定義した（座標変換そのものは擬直交変換で、その生成子は定義上反対称）。場は複素数を含むためエルミート性を気にする必要がある。素直に考えればエルミート共役で符号が反転（反エルミート）になるが、生成子に物理量との対応をつけるため、慣習上固有値が実となるエルミートに定義し直す。再定義された生成子を

$$\mathcal{M}_{\rho\sigma} = i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho), \qquad \mathcal{P}_\mu = i\partial_\mu \tag{2.1.5}$$

とする。このとき Poincaré 代数の交換関係は

$$\begin{aligned} [\mathcal{M}_{\mu\nu}, \mathcal{M}_{\rho\sigma}] &= -i\left(\eta_{\mu\rho}\mathcal{M}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\mathcal{M}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}\mathcal{M}_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}\mathcal{M}_{\mu\rho}\right), \\ [\mathcal{M}_{\rho\sigma}, \mathcal{P}_\mu] &= -i\left(\eta_{\rho\mu}\mathcal{P}_\sigma - \eta_{\sigma\mu}\mathcal{P}_\rho\right), \qquad [\mathcal{P}_\mu, \mathcal{P}_\nu] = 0 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

で与えられる。Poincaré 群の代数はこれで全てではあるが、1.4.5 章で述べた Pauli–Lubanski 演算子が表現を得る上で役に立つ。

Pauli–Lubanski 演算子は変更せずに

$$\mathcal{W}_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{P}^\nu\mathcal{M}^{\rho\sigma} \tag{2.1.7}$$

4） Poincaré 群はノンコンパクト Lie 群であるため、場におけるユニタリ表現として可能なのは（微分演算子のような）有限次元でないものに限られる（らしい）。前の章では準同型写像 D を用いて表現について述べたが、座標変換のところで既に表現の区別を字体の書き分けで行っていた。以降も基本的には表現の区別を字体による書き分けで行なうこととする。

とする。これは

$$\mathcal{W}_\mu \mathcal{P}^\mu = 0 \tag{2.1.8}$$

を満たす。交換関係は

$$[\mathcal{P}_\mu, \mathcal{W}_\nu] = 0, \qquad [\mathcal{M}_{\rho\sigma}, \mathcal{W}_\mu] = -i\left(\eta_{\rho\mu}\mathcal{W}_\sigma - \eta_{\sigma\mu}\mathcal{W}_\rho\right), \qquad [\mathcal{W}_\mu, \mathcal{W}_\nu] = -i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathcal{P}^\alpha \mathcal{W}^\beta \tag{2.1.9}$$

であり、Casimir 演算子は

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu, \qquad \mathcal{W}^2 = \mathcal{M}^2\mathcal{P}^2 + \mathcal{M}_{\rho\tau}\mathcal{M}^{\tau\sigma}\mathcal{P}_\sigma\mathcal{P}^\rho \tag{2.1.10}$$

で与えられる ($\mathcal{M}^2 = \frac{1}{2}\mathcal{M}_{\rho\sigma}\mathcal{M}^{\rho\sigma}$)。

2.1.3 Massive な表現

2.1.3.1 運動量

Poincaré 代数の要素を場に作用させて、その固有状態を調べる。まずは $\mathcal{P}_\mu$ と $\mathcal{P}^2$ との同時固有状態について考える。$\mathcal{P}_\mu$ は 4 元運動量で $\mathcal{P}^2$ はその 2 乗和として解釈でき、後者の固有値は場の質量の 2 乗を表わす。$\mathcal{P}^2$ が Casimir 演算子であることと相対論的不変量であることとが対応している。物理で興味があるのは主に $\mathcal{P}^2$ の固有値がゼロ (massless) か正の値を持つ (massive) かのどちらかである[5)]。非負実数 m に対して $\mathcal{P}^2$ の固有状態 $\phi(x)$ を

$$\mathcal{P}^2\phi(x) = m^2\phi(x) \tag{2.1.11}$$

と表わすことにする。

最初に $m > 0$ (massive) の場合を考える。$\mathcal{P}_\mu$ は互いに可換であるから同時固有状態になる。ただし $\mathcal{P}^2$ がその 2 乗和であることから、それぞれの固有値の 2 乗の和は m^2 でなければならない。ここでは

$$\mathcal{P}^0\phi(x) = m\phi(x), \qquad \mathcal{P}^k\phi(x) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{2.1.12}$$

を満たす場を考える。この状況は場の静止状態を考えることになる。Poincaré 変換を行なうことで静止状態でない状態に場を変換できるため、静止状態という特定の状態を考えても一般性は失われない。

2.1.3.2 スピン

4 元運動量についての状態を全て定めたので、式 (2.1.8) によって Pauli–Lubanski 演算子の固有値も一部定まる。それは

$$0 = \mathcal{W}_\mu \mathcal{P}^\mu \phi(x) = m\mathcal{W}_0\phi(x), \tag{2.1.13}$$

5) 表現を網羅するうえでは負の状況も考える必要があり、これはタキオンに対応する。ここでは物理的に馴染みのある状況にのみ興味があるので負の場合は扱わない。

つまり $\mathcal{W}_0$ の固有値はゼロ ($\mathcal{W}^0\phi(x)=0$)。式 (2.1.9) から $\phi(x)$ は $\mathcal{W}_\mu$ と $\mathcal{P}_\mu$ との同時固有状態になれるため、$\mathcal{W}_\mu$ の空間成分についても考えてみると

$$\mathcal{W}^k\phi(x) = -\frac{m}{2}\epsilon^{k0ij}\mathcal{M}_{ij}\phi(x) = \frac{m}{2}\sum_{i,j}\epsilon_{kij}\mathcal{M}_{ij}\phi(x) = m\mathcal{J}_k\phi(x) \qquad \left(\mathcal{J}_k = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\epsilon_{kij}\mathcal{M}_{ij}\right) \tag{2.1.14}$$

が得られる。これは固有値を得たわけではなく、演算子の記号を $\mathcal{W}^k$ から $\mathcal{J}_k$ へ書き換えただけに過ぎない。完全反対称テンソルの定義は 4 ページと 7 ページとにある。$\mathcal{J}_k$ に記号を書き換えたのは、これが $\mathfrak{so}(3)$、あるいは $\mathfrak{su}(2)$ の交換関係

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k \tag{2.1.15}$$

を意識してである。

次に 2 つ目の Casimir 演算子 $\mathcal{W}^2$ についても見てみると

$$\mathcal{W}^2\phi(x) = \left[\frac{m^2}{2}\left(2\mathcal{M}_{0k}\mathcal{M}^{0k} + \mathcal{M}_{ij}\mathcal{M}^{ij}\right) + m^2\mathcal{M}_{0k}\mathcal{M}^{k0}\right]\phi(x) = -\frac{m^2}{2}\sum_{i,j}\left(\mathcal{M}_{ij}\right)^2 \tag{2.1.16}$$

であるから、

$$\sum_k\left(\mathcal{J}_k\right)^2 = \frac{1}{4}\sum_k\sum_{i,j}\sum_{l,m}\epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\mathcal{M}_{ij}\mathcal{M}_{lm} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\mathcal{M}_{ij}\right)^2 \tag{2.1.17}$$

より

$$\mathcal{W}^2\phi(x) = -m^2\mathcal{J}^2\phi(x) \qquad \left(\mathcal{J}^2 = \sum_k\left(\mathcal{J}_k\right)^2\right) \tag{2.1.18}$$

が得られる。したがって $m>0$ において 4 元運動量に関わる固有値を静止状態に定めると、$\mathfrak{so}(3)$（あるいは $\mathfrak{su}(2)$）の要素 $\{\mathcal{J}_k\}$ と $\mathcal{J}^2$ との固有値を求める問題になる。

$\mathcal{J}^2$ は Casimir 演算子なので、$\mathcal{P}_\mu$ と $\mathcal{P}^2$ との固有状態 $\phi(x)$ と同時固有状態をとれる。一方で $\{\mathcal{J}_k\}$ は（$\mathcal{P}_\mu$ と $\mathcal{P}^2$、$\mathcal{J}^2$ とは可換だが）互いに非可換なので、$\phi(x)$ が全ての $\mathcal{J}_k$ の固有状態を取ることは出来ない。ここで特別な向きを $\mathcal{J}_3$ に選び、場 $\phi(x)$ を実数 α,β に対して

$$\mathcal{J}_3\phi(x;\alpha,\beta) = \alpha\phi(x;\alpha,\beta), \qquad \mathcal{J}^2\phi(x;\alpha,\beta) = \beta\phi(x;\alpha,\beta) \tag{2.1.19}$$

と表わすことにする。視認しやすくするために場の引数の表わし方を変更している。$\mathcal{J}^2$ はエルミート演算子の和で定義されていることから、その固有値 β は非負であることが分かる ($\beta\geq 0$)。

$\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2$ は $\mathcal{J}_\pm = \mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2$ に置き換える。$\mathcal{J}_k$ はエルミートになるように決めたので、$\mathcal{J}_\pm$ は $\mathcal{J}_\pm^\dagger = \mathcal{J}_\mp$ であり、交換関係

$$[\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-] = 2\mathcal{J}_3, \quad [\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_\pm] = \pm\mathcal{J}_\pm \tag{2.1.20}$$

を満たすことが確認できる。これより $\mathcal{J}_\pm(x;\alpha,\beta)$ という状態は

$$\mathcal{J}_3\left(\mathcal{J}_\pm\phi(x;\alpha,\beta)\right) = (\alpha\pm 1)\left(\mathcal{J}_\pm\phi(x;\alpha,\beta)\right), \quad \mathcal{J}^2\left(\mathcal{J}_\pm\phi(x;\alpha,\beta)\right) = \beta\left(\mathcal{J}_\pm\phi(x;\alpha,\beta)\right) \tag{2.1.21}$$

を満たす。つまり $\mathcal{J}_\pm \phi(x;\alpha,\beta) \propto \phi(x;\alpha \pm 1,\beta)$ である。この性質から $\mathcal{J}_\pm$ は昇降演算子とも呼ばれる。

$\mathcal{J}^2$ は

$$\mathcal{J}^2 = (\mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2)(\mathcal{J}_1 \mp i\mathcal{J}_2) \pm i\,[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2] + \mathcal{J}_3^2 = \mathcal{J}_\pm \mathcal{J}_\mp + \mathcal{J}_3(\mathcal{J}_3 \mp 1) \tag{2.1.22}$$

のように変形出来ることから

$$\mathcal{J}_\pm \mathcal{J}_\mp \phi(x;\alpha,\beta) = (\beta - \alpha(\alpha \mp 1))\,\phi(x;\alpha,\beta) \tag{2.1.23}$$

も確認できる。$\mathcal{J}_\pm \mathcal{J}_\mp$ は $\mathcal{J}_\mp^\dagger \mathcal{J}_\mp$（自身のエルミート共役との積で表わされる演算子）を満たすことから Gram 演算子であることが分かる。Gram 演算子の固有値は非負であるから、α と β との間に

$$\beta \geq \alpha(\alpha \mp 1) = \left(\alpha \mp \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \tag{2.1.24}$$

という条件が存在する。つまり非負実数 β によって α の最大値と最小値とが与えられる。

その最大値と最小値とをそれぞれ α_+ と α_- とで表わすことにすると、

$$\mathcal{J}_\pm \phi(x;\alpha_\pm,\beta) = C_\pm \phi(x;\alpha_\pm \pm 1,\beta), \tag{2.1.25}$$

となるような非ゼロな $C_\pm$ が存在することは許されない。したがって $\alpha_\pm$ は

$$\beta = \alpha_\pm(\alpha_\pm \pm 1) \tag{2.1.26}$$

を満たすことが要請される。$\alpha_+ > \alpha_-$ かつ $0 = (\alpha_+ + \alpha_-)(\alpha_+ - \alpha + 1)$ より $\alpha_- = -\alpha_+$ である。ここで $s = \alpha_+ = -\alpha_- (\geq 0)$ のように記号を変えておくと $\mathcal{J}^2$ の固有値は $\beta = s(s+1)$。昇降演算子は ± 1 の変化しか与えられないので、α_+ と α_- との差は整数であることも要請される。したがって s は

$$\alpha_+ - \alpha_- = 2s \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{2.1.27}$$

より半整数値をとることが確認できる。

$\mathcal{J}_3$ と $\mathcal{J}^2$ との固有値は

$$\mathcal{J}_3 \phi(x;j,s) = j\phi(x;j,s), \quad \mathcal{J}^2 \phi(x;j,s) = s(s+1)\phi(x;j,s) \qquad (j = -s, -s+1, \dots, s) \tag{2.1.28}$$

である。s は場の性質を特徴付けるスピンと呼ばれる半整数値をとる量である。j が取れる値は $(2s+1)$ 個ある。Pauli–Lubanski 演算子に戻せば

$$\mathcal{W}^3 \phi(x;j,s) = mj\phi(x;j,s), \quad \mathcal{W}^2 \phi(x;j,s) = -m^2 s(s+1)\phi(x;j,s) \qquad (j = -s, -s+1, \dots, s) \tag{2.1.29}$$

である。

2.1.3.3　相対論的に不変な量

Casimir 演算子の式を書くと

$$\mathcal{P}^2\phi(x) = m^2\phi(x), \qquad \mathcal{W}^2\phi(x) = -m^2 s(s+1)\phi(x) \tag{2.1.30}$$

である。Casimir 演算子は相対論的に不変な量を与えるので、固有値に現れる質量 m とスピン s とが相対論的に不変な量であることが導かれる。

半整数値 $0, 1/2, 1, \ldots$ をとるスピン s の値で区別される場をそれぞれ $(2s+1)$ 表現と呼ぶ。それぞれ $(2s+1)$ 個の成分をもつ既約表現である。とくに $s=0$ の場はスカラー場（1 成分の場)、$s=1/2$ の場はスピノル場（2 成分の場)、$s=1$ の場はベクトル場（3 成分の場）と呼ばれる。

式 (2.1.30) で連続的な質量 $m(>0)$ と離散的なスピン s とで区別される Poincaré 群の表現が分類されたことになる。$\mathcal{P}^2$ の固有状態の式を $\mathcal{P}^2 = -\partial^\mu\partial_\mu$ を使って表わせば

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0, \tag{2.1.31}$$

つまり Klein–Gordon 方程式である。相対論的に不変な場は s の値に依らず全て Klein–Gordon 方程式を満たすことが分かる。

2.1.4　Massless な表現

2.1.4.1　運動量

次に $m=0$ (massless) の場合を考える。$\mathcal{P}^2\phi(x)=0$ であるから $\mathcal{P}_\mu$ の固有状態として

$$\mathcal{P}^0\phi(x) = E\phi(x), \quad \mathcal{P}^1\phi(x) = \mathcal{P}^2\phi(x) = 0 \quad \mathcal{P}^3\phi(x) = E\phi(x) \tag{2.1.32}$$

を選ぶ $(E>0)$。このとき

$$0 = \mathcal{W}_\mu\mathcal{P}^\mu\phi(x) = E(\mathcal{W}^0 - \mathcal{W}^3)\phi(x) \tag{2.1.33}$$

より $\mathcal{W}^0 = \mathcal{W}^3$ を満たす。

2.1.4.2　ヘリシティー

参考文献

[1]　九後太一郎、ゲージ場の量子論 I、培風館。

[2]　M. E. Peskin, D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory, Westview press.

[3]　高碕金久、ツイスターの世界、共立出版。

[4]　風間洋一、講義スライド:相対論的な古典場

[5] R. Penrose, W. Rindler, Spinors and space-time Volume 1, Cambridge university press.

[6] 大貫義郎、ポアンカレ群と波動方程式、岩波書店。

[7] H. J. W. Müller-Kirsten, A. Wiedemann, Introduction to Supersymmetry (Second Edition), World Scientific.

[8] 佐藤光、群と物理、丸善出版。

[9] 坂本眞人、場の量子論-不変性と自由場を中心にして-、裳華房。

[10] 疋田泰章、共形場理論入門 基礎からホログラフィへの道、講談社。