# 2024春《计算机系统》小班讨论-3

## 讨论课选题

选题一（由智能2103班李晓辉202108040308同学提供）

某银行一直采用32位的float型来存储用户的存款余额，为了吸引土豪们来存款，推出如下措施：土豪可以与银行协商存款的方式。

土豪A携一个小目标来存，因为他喜欢财富增长的感觉，所以要求只存一块钱，即存款程序循环执行一亿次，每次余额增加1.0，但最后发现余额只有一千六百余万；

土豪B携0.3个小目标来存，他的要求比较奇特：“我只存25000000，剩下的5000000无偿捐赠给银行，但我要你们给我存的每块钱都加上利息！” 银行经理想了一下，一块钱能有多少利息（按天约0.3%）？还能白赚五百万，果断答应了土豪的要求。即存款程序循环执行25000000次，每次余额增加1.03，结果余额有三千三百余万！

土豪C欲效仿土豪B，携一个小目标存款，将其中的0.1个小目标捐赠给银行后，也按照每一块钱都加上利息的方式存款，结果却损失不小。

（1）请仔细分析产生这些结果的原因，并找出各种情况下不会出现错误的临界值。

（2）假如来存款的土豪身家不会超过N（例如N=100亿），那么是否可以通过调整阶码与尾数的位数来避免这些情况？要如何调整？

（1）

土豪A：

余额为16777216，即

IEEE浮点表示：

float一位符号位S，八位阶码E，23位尾数位M，

当表示16777216时，就是S=1，E=24，M=1.0，即(+1) \* 2^24 \* 1.0，

如果要加一，肯定不是让E加一，那肯定是让M变大，

也就应该是(+1) \* 2^24 \* ( 1.0 + 2^(-24) )，但是M只有23位，不能表示1.0 + 2^(-24)，

16777217表示不了，但是16777218可以，这个数展开应该是(+1) \* 2^24 \* ( 1.0 + 2^(-23) )

没有跳过而是停留是由于舍入问题（土豪B中讲解）

土豪B：

余额为33254464；正确值应为25750000

只能精确表示诸如的的数



1.03的二进制：1.00**[00011110101110000101]** 不能精确表示

**具体的误差产生情况？**

在余额达到16777216前会有相对较小的误差（是因为舍入误差产生，具体原因以16777216之后的部分为例讲解）;

计算机中，浮点数在加法运算时，必须先**将小数点调整至相同位置（对阶）**，之后再进行计算

16777216的阶码为24，1.03进行对阶后为，标出的1为第24bit

**舍入问题（up or down）**

**舍入规则为：若第 24bit为 0，则直接舍弃；若为 1，且之后位不全为零则进位；若为中间值，则向偶数舍入；“偶数” 是指 0；“中间值” 是指舍入位的右边正好是的形式**

根据如上规则，16777216之后，1.03应舍入为2（土豪A中的1会舍入为0）

当余额到达16777216时，实际上加了16761376次，之后每次加1.03实际上是加2，最后余额应为

土豪C:

余额为33554432，即；正确值应为92700000

33554432之前与土豪B一样，到此之后1.03对阶后发生变化，为被标记的0为第24bit，根据舍入规则，1.03会舍入为0；

若想让余额继续增加，可以按每一次存入两块钱且计算利息的方式，即每次存入2.06，2.06会舍入为4，此方法的上限会是67108864；若想让余额继续增加，可按每一次存入四块钱且计算利息的方式

（2）

**阶码部分决定了数的大小范围，尾数部分决定了数的精度。**

float能表示的最大值：约为3.403e38

float精度：，，七位

不需要这么大的数字时，可以通过减少阶码位增加尾数位来减少最大值，增加精度

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 最大值 | 精度 |
| 七位阶码 | 1.844e19 | 八位 |
| 六位阶码 | 4.295e9 | 八位 |
| 五位阶码 | 6.553e4 | 八位 |

想精确表示不超过100亿的数字需要最大值≥1e10和十位精度，至少需要30位尾数位和7位阶码，如果限制为32位，不可能直接达到。

**IEEE为什么要这样设置阶码和指数位？最大值有38位，精确位却只有7位是否平衡？**

浮点数不是用来精确计算的，而是一种广泛的表示，七位精度更类似与科学计数法中的有效数字。

其应用场景有很多，尤其是和真实世界扯上关系的时候。

例如长度的测量，我们需要用一个值来描述两点之间的距离，这个距离可以很小，例如头发丝的直径，这个值是0.00006米，这个值可以用float表达。

这个距离也可能很大，例如地月距离，这个值是384403900米，这个值也能用float表达。

但是显然，我们在说地月距离的时候，只会精确到千米而不是微米。

这就是浮点数的用武之地，用浮点在精度一定的情况下拓展了值域。