MÓDULO ELEMENTOS DE CÁLCULO REAL

DIPLOMADO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA, MIDE

Ruslán Gómez Nesterkín
Banco de México
Septiembre 2022

Aviso: Los comentarios y opiniones expresados son solo del autor y no necesariamente reflejan a los del Banco de México.

ENCUESTAS

- A fin de tener una mayor interacción durante las presentaciones…
- Se realizarán algunas encuestas de opinión durante las sesiones…
- A través de la aplicación de celular: **Telegram**
- Favor de adherirse al grupo: **MIDE_DIP_MATS_2022**
- Liga directa: *https://t.me/MIDE_DIP_MATS_2022*

PARTE 2: DERIVACIÓN

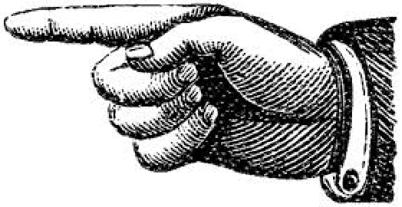
TEMARIO

PARTE 1

- SUCESIONES
- LÍMITE
- CONTINUIDAD
- DIFERENCIAS

PARTE 2

- DIFERENCIAS (Continuación)
- DERIVACIÓN
- DERIVACIÓN PARCIAL
- SERIES



PARTE 3

- SERIES (Continuación)
- SERIES DE TAYLOR
- INTEGRACIÓN
- OPTIMIZACIÓN

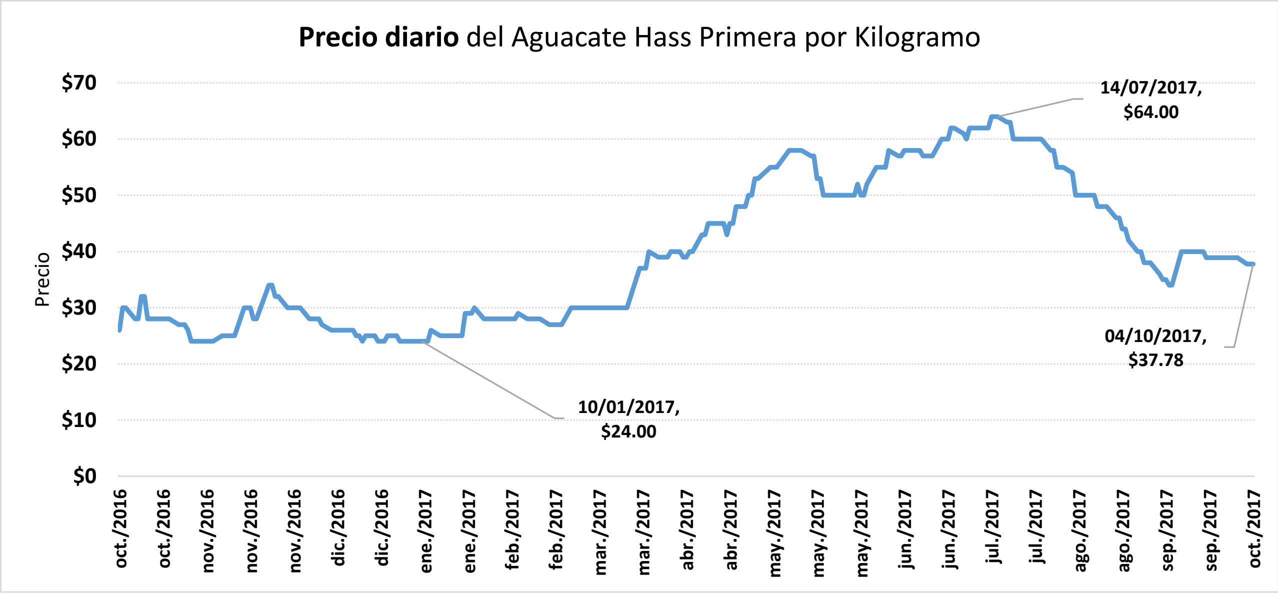
DIFERENCIAS

Motivación

- Una **diferencia** es la generalización de la resta…
$$Diferencia\ de\ Precios = 70 - 60 = 10$$
- El **rendimiento de un instrumento** S_t es la diferencia del valor de éste en el tiempo:
$$Rendimiento = S_t - S_{t-1}$$
- A la diferencia también se le conoce como **incremento** de la función y se denota como:
$$\Delta S_{t-1} = S_t - S_{t-1}$$

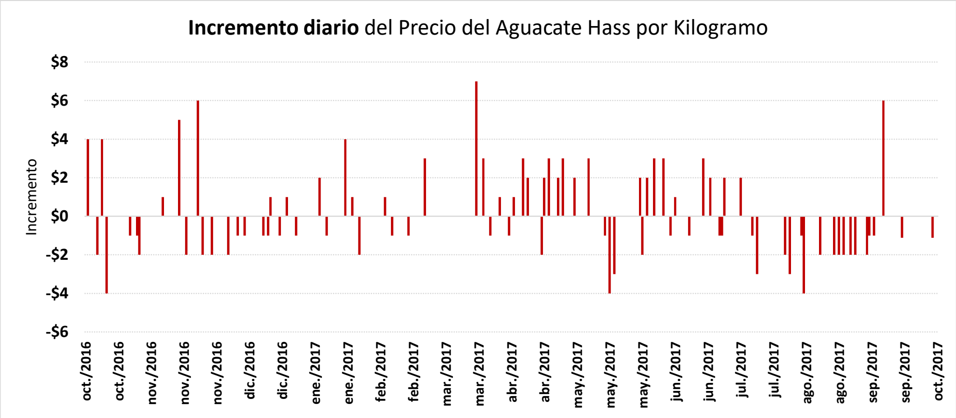
DIFERENCIAS

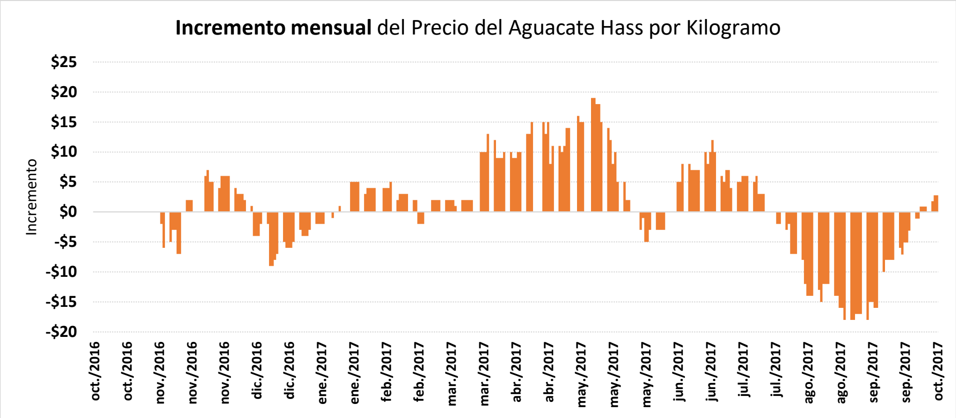
Incremento



Fuente: SNIIM, Secretaría de Economía. Precios en la Central de Abastos de la CDMX.

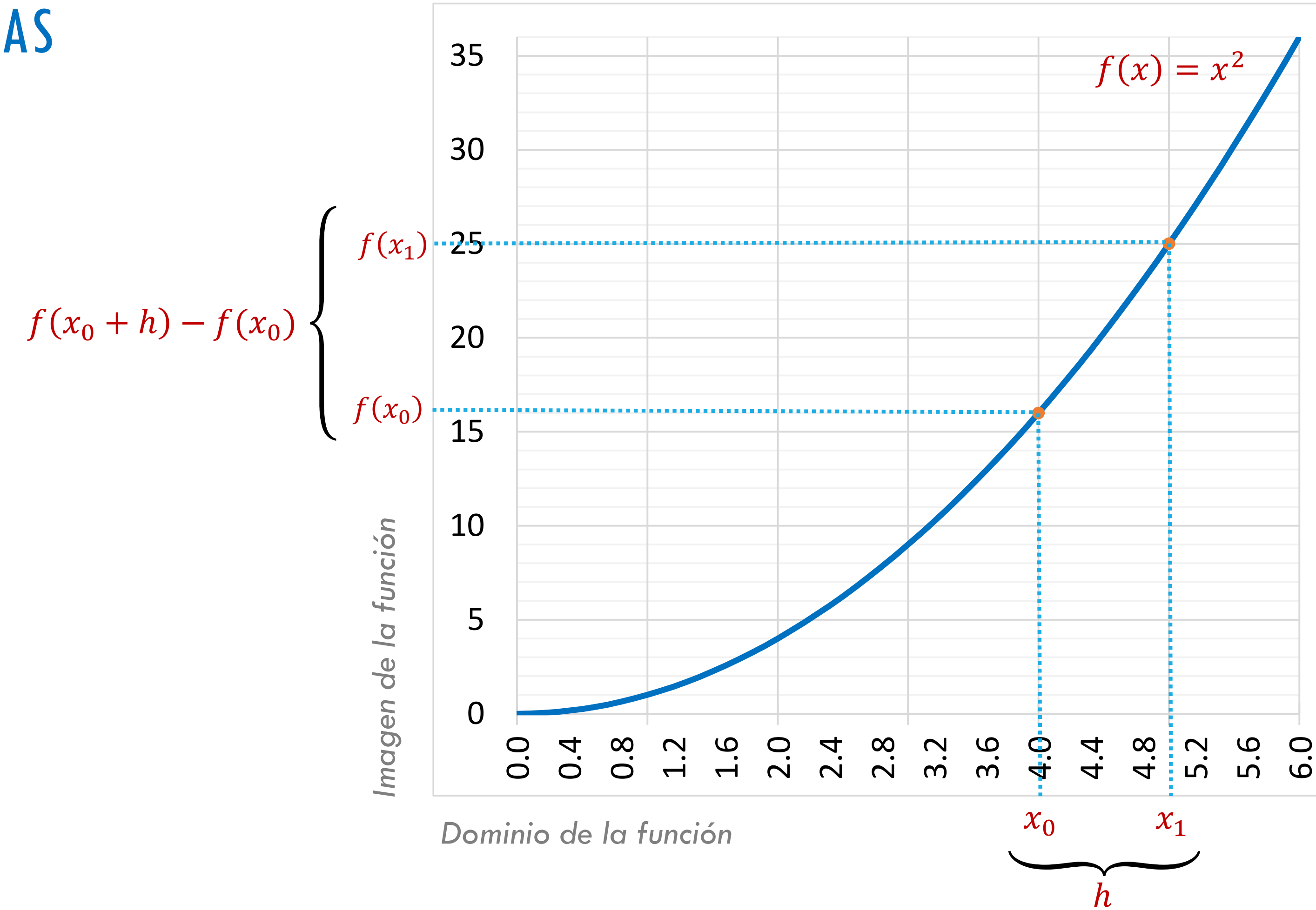
- Sea $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función real. El **incremento de una función** f en el punto $x_0 \in \mathbb{D}$ de tamaño h se define como: $\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$





DIFERENCIAS

Incrementos

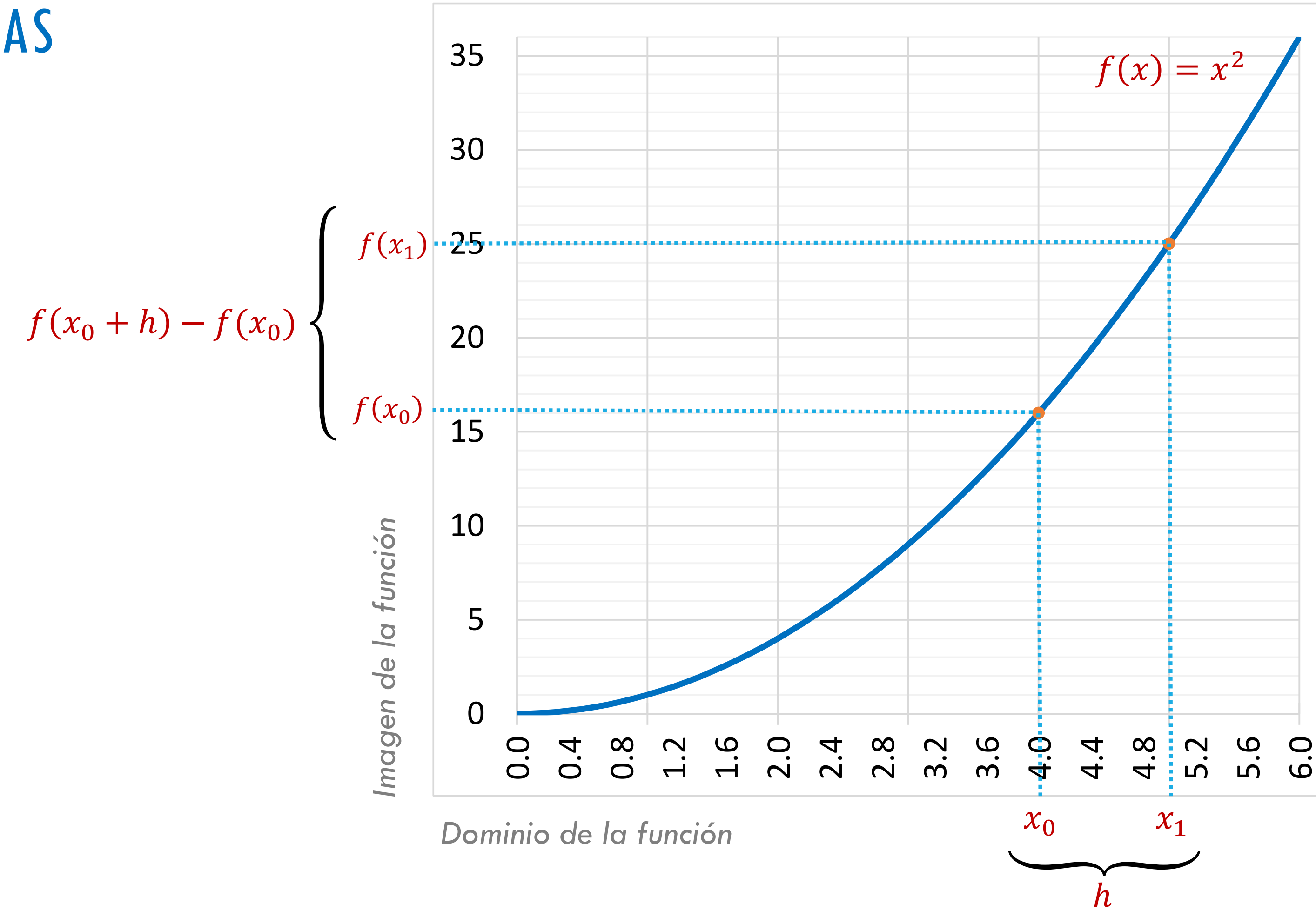


- Sea $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Considérense los puntos x_0 y x_1 en $\mathbb{D}$.
- Entonces $h = x_1 - x_0$ representa el **incremento** del punto x_0 al punto x_1.
- El **incremento de la función** f en el punto x_0 se define en términos del incremento $x_1 = x_0 + h$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

DIFERENCIAS

Incrementos

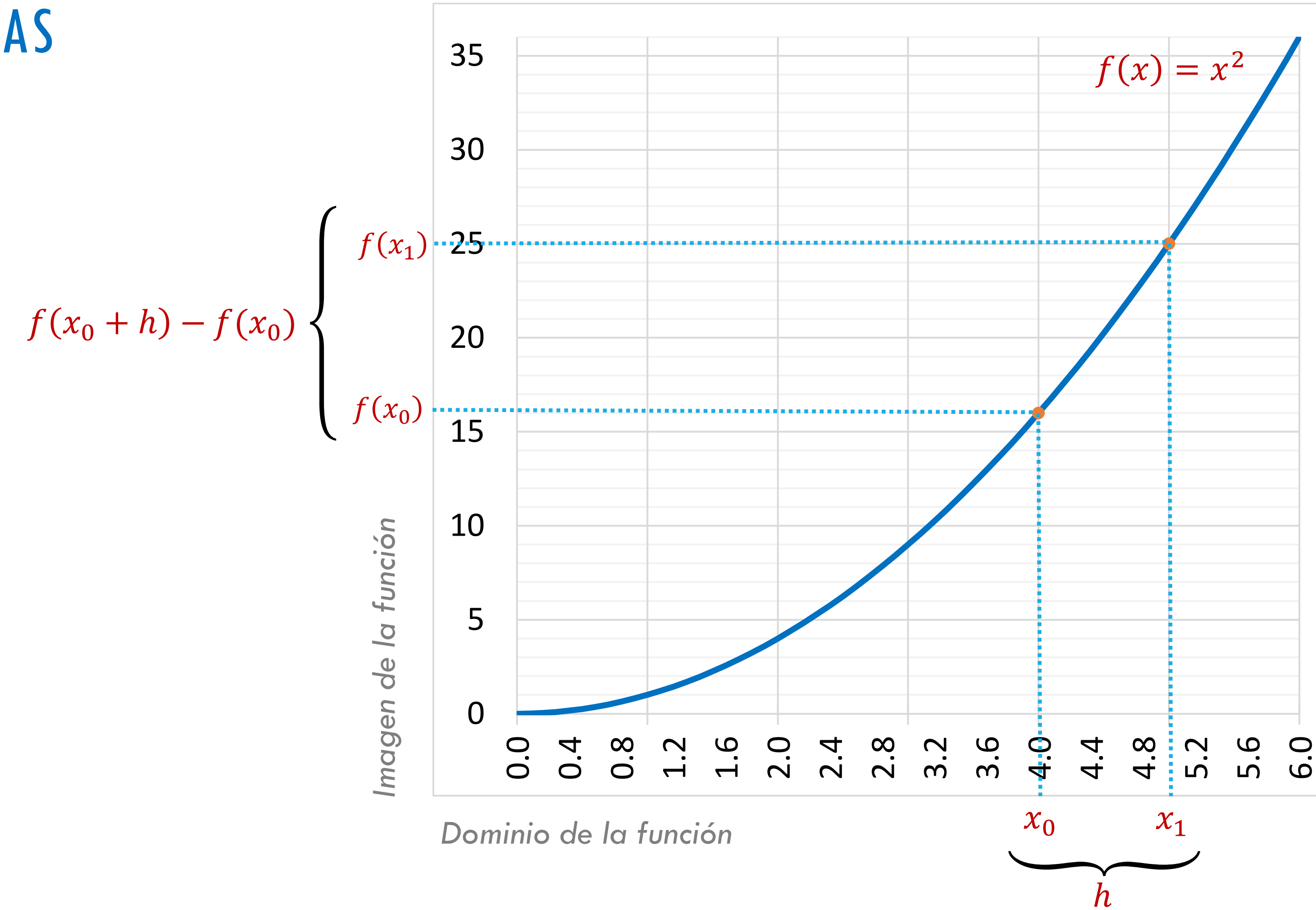


- ¿Cuánto se incrementa la función f respecto al incremento en su dominio alrededor del punto x_0?

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{con } h = x_1 - x_0$$

DIFERENCIAS

Incrementos



Ejemplo: Si $f(x) = x^2$, $x_0 = 4.0$, $\boldsymbol{x_1} = \mathbf{5.0}$, entonces

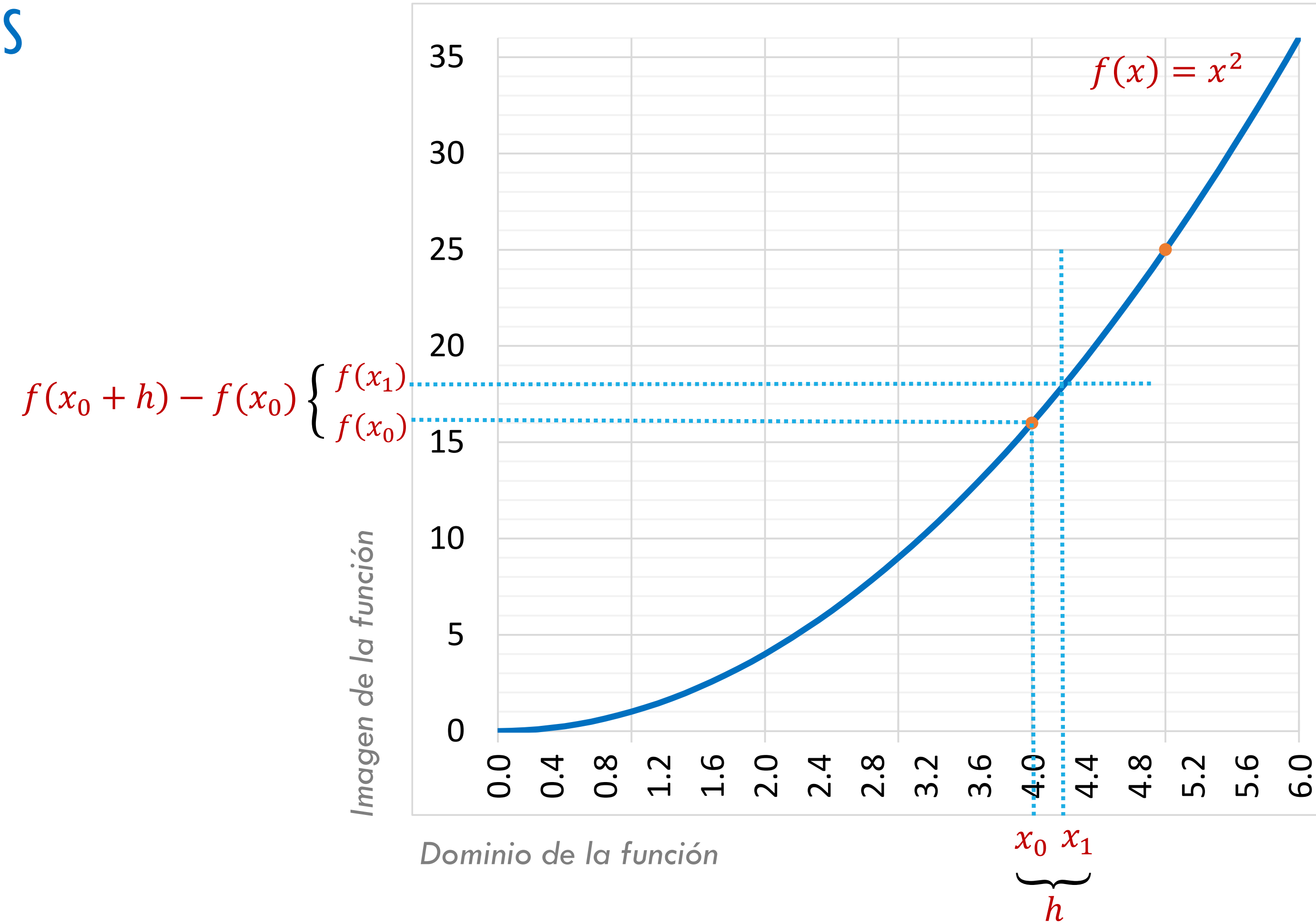
Incremento en el domino: $\boxed{\boldsymbol{h} = \mathbf{1.0}}$

Incremento en la imagen: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(5)-f(4)}{1} = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = \boxed{\mathbf{9.0}}$

Significado: El incremento en x_0 de 1 unidad implica el incremento en f de 9 unidades.

DIFERENCIAS

Incrementos



Ejemplo: Si $f(x) = x^2$, $x_0 = 4.0$, $\boldsymbol{x_1 = 4.1}$, entonces

Incremento en el domino: $\boxed{\boldsymbol{h = 0.1}}$

Incremento en la imagen: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(4.1)-f(4.0)}{0.1} = 10 \times (4.1^2 - 4.0^2) = 168.1 - 160 = \boxed{\mathbf{8.1}}$

Significado: El incremento en x_0 de 0.1 unidades implica el incremento en f de 8.1 unidades.

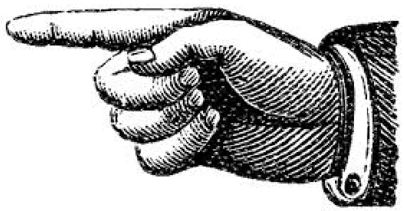
TEMARIO

PARTE 1

- SUCESIONES
- LÍMITE
- CONTINUIDAD
- DIFERENCIAS

PARTE 2

- DIFERENCIAS (Continuación)
- DERIVACIÓN
- DERIVACIÓN PARCIAL
- SERIES



PARTE 3

- SERIES (Continuación)
- SERIES DE TAYLOR
- INTEGRACIÓN
- OPTIMIZACIÓN

DERIVACIÓN

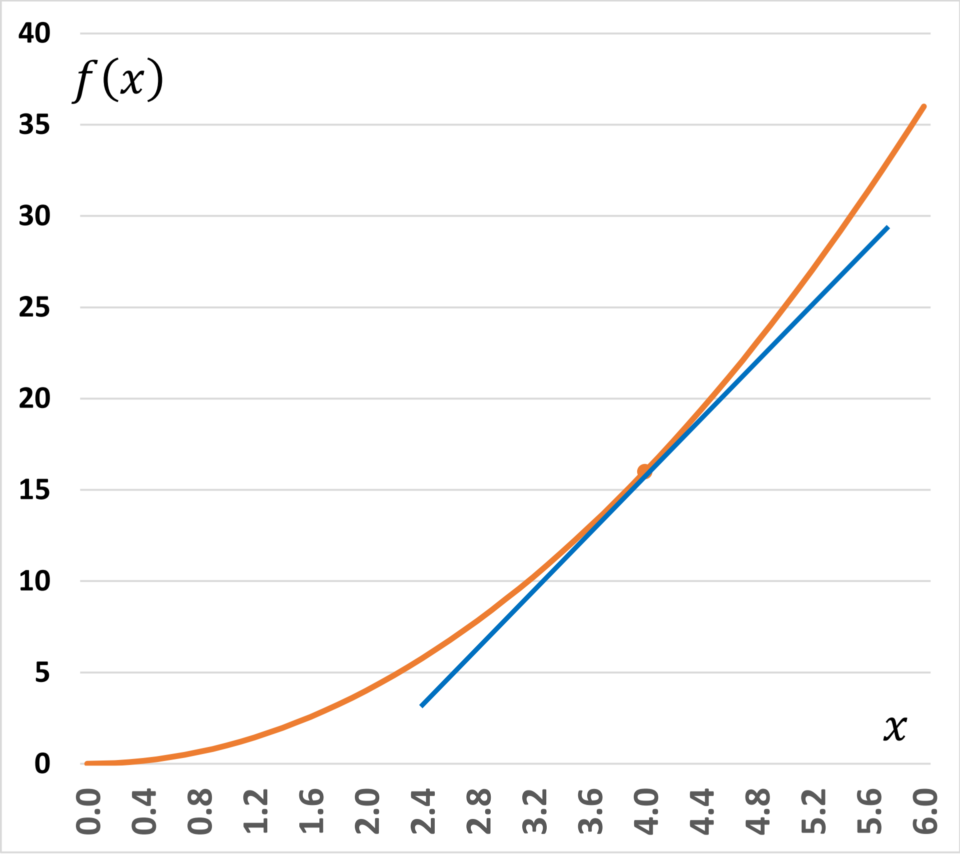
Derivada: Definición

- **Definición:** La derivada de una función $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ en un punto $x_0 \in \mathbb{D}$ está dado por el límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- **Interpretación:** Cambio instantáneo de la función f en el punto x_0

- **Notación:** $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = f_x(x_0)$



Ejemplo: Si $f(x) = x^2, x_0 = 4.0$, entonces:

Derivada: $\boldsymbol{f'(x_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2-{x_0}^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{({x_0}^2+2x_0h+h^2)-{x_0}^2}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2x_0h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} + \frac{2x_0h}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2x_0) = \boldsymbol{2x_0} = \boxed{\mathbf{8.0}}$$

Significado: El incremento **instantáneo** de $f(x) = x^2$ en $x_0 = \mathbf{4.0}$ es $2x_0 = \mathbf{8.0}$:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = 2x}.$$

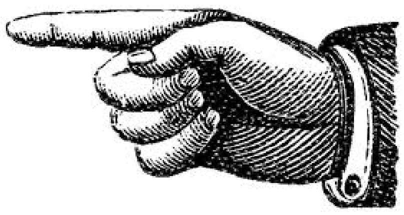
TEMARIO

PARTE 1

- SUCESIONES
- LÍMITE
- CONTINUIDAD
- DIFERENCIAS

PARTE 2

- DIFERENCIAS (Continuación)
- DERIVACIÓN
- DERIVACIÓN PARCIAL
- SERIES



PARTE 3

- SERIES (Continuación)
- SERIES DE TAYLOR
- INTEGRACIÓN
- OPTIMIZACIÓN

DERIVACIÓN

Comentarios:

1. La derivada de la función $f(x)$, puede presentarse en cualquiera de las notaciones siguientes:

$$f'(\cdot) = \frac{d}{dx} f(\cdot) = f_x(\cdot)$$

¡ LA DERIVADA ES UN OPERADOR QUE SE APLICA A FUNCIONES (DIFERENCIABLES) Y PRODUCE NUEVAS FUNCIONES !

2. Del ejemplo anterior $f(x) = x^2$ su derivada resultó ser $f'(x) = 2x$ y **posteriormente fue** evaluada en $x_0 = 4$:

$$f'(x_0) = 2x_0 = 2 \times 4 = 8$$

APLICACIÓN: Se calcula primero la función derivada y al final se evalúa en el punto x_0 de interés.

DERIVACIÓN

Con el mismo razonamiento...

Sean $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ y a, b, c constantes reales, con $x \in \mathbb{D}$.

- Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = 2x$.
- Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$.
- Si $f(x) = a$, entonces $f'(x) = 0$.
- Si $f(x) = a + bx$, entonces $f'(x) = b$.
- Si $f(x) = a + bx + x^2$, entonces $f'(x) = b + 2x$.
- Si $f(x) = a + bx + cx^2$, entonces $f'(x) = b + 2cx$.
- En general, si $f(x) = g(x) + h(x)$ con g, h diferenciables en $\mathbb{D}$, en entonces

  $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

EJERCICIO EN CLASE (5 MINUTOS):

¿Cuál es la derivada de $f(x) = 1{,}000 + 5x + 3x^2$ y cuánto vale en $x_0 = 1$?

$$f'(1) = \cdots$$

Enviar al grupo MIDE_DIP_MATS_2022 de Telegram. [MIDE-C-P2a]

DERIVACIÓN

Propiedades de la derivada

Sean $f: \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{D}_g \to \mathbb{R}$, dos funciones diferenciables y $x \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$, entonces:

1. Si $f(x) = a$, donde a es una constante real, entonces $f'(x) = 0$ para cualquier x.
2. Si $f(x) = a \cdot g(x)$, donde a es una constante real, entonces $f'(x) = a \cdot g'(x)$
3. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
4. $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
5. $(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$ **(REGLA DE LA CADENA)**
6. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f(x) \cdot g'(x) - f\prime(x) \cdot g(x)}{[g(x)]^2}$ **(REGLA DE LA CADENA)**
7. $[\,f(g(x_0))\,]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ *cuando* $g: \mathbb{D}_g \to \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}$ **(REGLA DE LA CADENA)**

DERIVACIÓN

Ejemplos...

Si $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = 2x$*, entonces:*

- *Usando Regla de la Cadena:*

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 4x \cdot 2 = \mathbf{8x}$$

$f'(\xi) = 2\xi$.
Evaluado en $\xi = g(x) = 2x$ resulta:
$f'(g(x)) = f'(2x) = 2 \cdot 2x = 4x$

$g'(x) = 2$

- *Evaluando primero la función compuesta y después derivando:*

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = \frac{d}{dx} 4x^2 = 4 \cdot \frac{d}{dx} x^2 = 4 \cdot 2x = \mathbf{8x}$$

Evaluado $f\big(g(x)\big)$ resulta:
$f(g(x)) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$

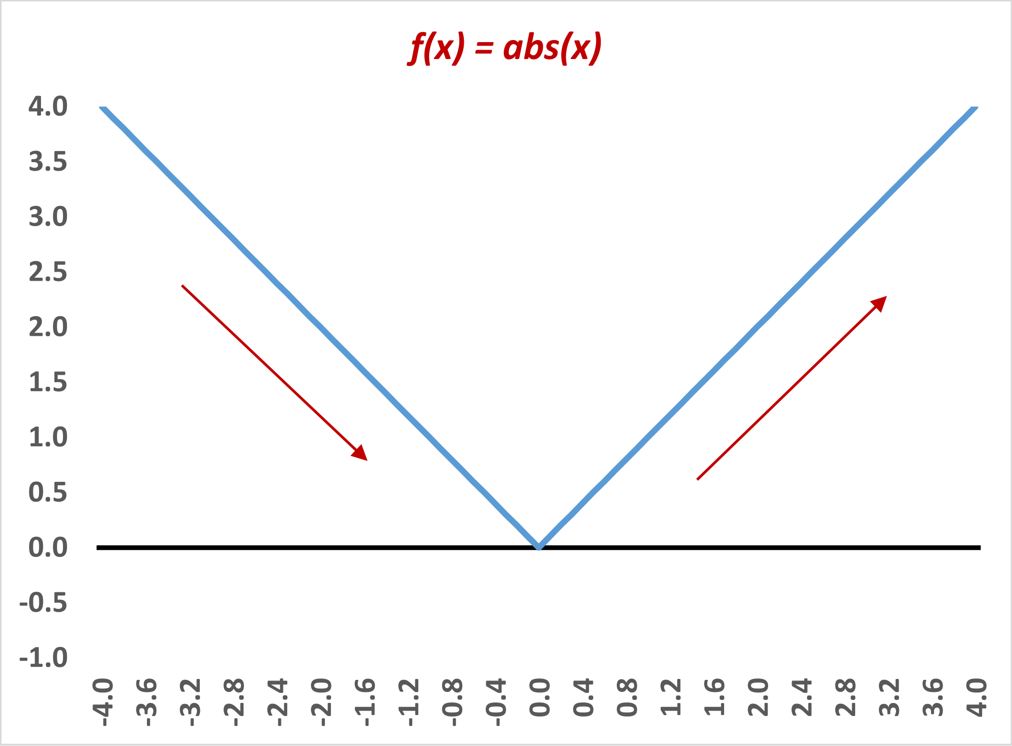
DERIVACIÓN

Existencia y unicidad

¿Cuándo podemos derivar una función y cuándo no?

- Un primer criterio consiste en pedir que la función f sea continua en todo su dominio.

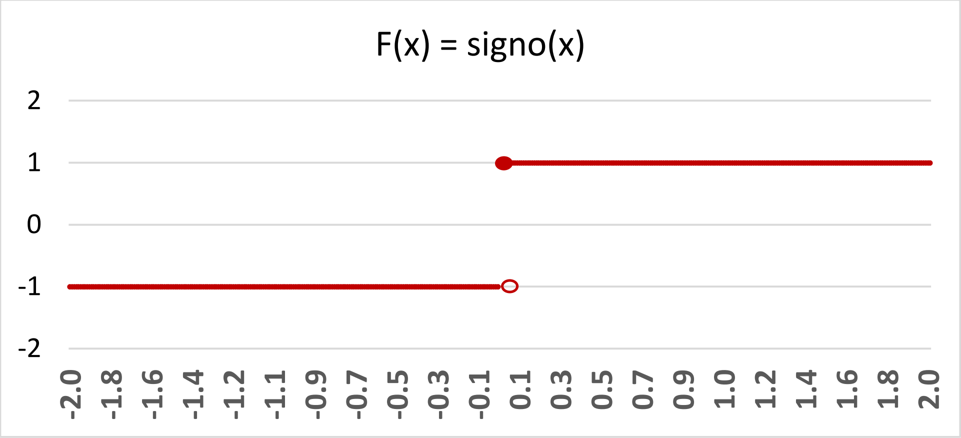
Pero …



DERIVACIÓN

Existencia y unicidad

¿Cuándo podemos y cuándo no podemos derivar una función?



- El principal criterio para que una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ se pueda derivar es que f sea continua en su dominio $\mathbb{D}$ y que para todo punto $x_0 \in \mathbb{D}$, los límites por la derecha y por la izquierda coincidan:

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$

- Notas:
  - Una función que se pueda derivar, se dice que es **DIFERENCIABLE**.
  - La función $g(x) = f'(x)$, obtenida de derivar la función diferenciable $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es **ÚNICA**.
  - La función f cuando es **CONTINUA** en su dominio se denota mediante: $f \in \mathcal{C}^0$
  - La función f es **CONTINUA y DIFERENCIABLE** en su dominio se denota: $f \in \mathcal{C}^1$
  - La función f es n-veces diferenciable en su dominio se denota mediante: $f \in \mathcal{C}^n$

DERIVACIÓN

Más ejemplos de funciones diferenciables:

Sean $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ y a, b, c constantes reales.

- Si $f(x) = a$, entonces $\boxed{f'(x) = 0}$
- Si $f(x) = ax$, entonces $f'(x) = a$
- Si $f(x) = x^n$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$
- Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$ (INVARIANTE)
- Si $f(x) = \ln(x)$ y $x_0 > 0$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$
- Si $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (NOTA: $x^{-1} = \frac{1}{x}$ y $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$)

EJERCICIO EN CASA: Sea $f(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n$ con $a_0, a_1, \dots, a_n$ constantes reales:

a) Calcular $f'(T)$ cuando $n = 1{,}000{,}000{,}000$ y evaluar la derivada en $T = 1$.

b) Calcular $f'(T)$ cuando $n = 1$ y evaluar la derivada en $T = 1{,}000{,}000{,}000$.

Responder la encuesta de opción múltiple del grupo MIDE_DIP_MATS_2022 de Telegram **antes de la siguiente clase**. [MIDE-C-P2b]

DERIVACIÓN

Derivadas de orden mayor

- **¿Podemos derivar una función tras haberla ya derivado previamente?** Si
- **Nota:** Solo que necesitamos asegurarnos que la función previamente derivada sea también derivable.
- **Ejemplo:** Si $f(x) = x^n$, entonces: $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = nx^{n-1}$

  Ahora bien, la segunda derivada de la función será:

$f''(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f\right)(x_0)$ (Se deriva primero la función $\frac{d}{dx} f(x) = nx^{n-1}$)

$= \frac{d}{dx}(nx^{n-1})$ (La primera derivada resulta $g(x) = nx^{n-1}$)

$= n\,(n-1)x^{n-2}$ (Entonces $\frac{d}{dx} g(x) = n(n-1)x^{n-2}$)

$= n\,(n-1){x_0}^{n-2}$ (Se evalúa el resultado cuando x toma el valor x_0)

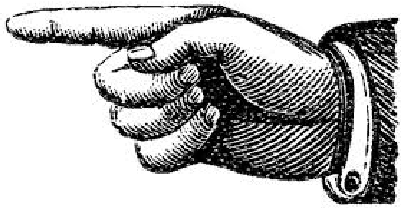
TEMARIO

PARTE 1

- SUCESIONES
- LÍMITE
- CONTINUIDAD
- DIFERENCIAS

PARTE 2

- DIFERENCIAS (Continuación)
- DERIVACIÓN
- DERIVACIÓN PARCIAL
- SERIES



PARTE 3

- SERIES (Continuación)
- SERIES DE TAYLOR
- INTEGRACIÓN
- OPTIMIZACIÓN

DERIVACIÓN

Derivadas parciales

- **¿Y cuando el dominio de f es de más de 1 variable?**
- **Ejemplo:** Supongamos una función $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por ejemplo que represente el valor en el tiempo t de una capital inicial S con una tasa de interés i, dada mediante la fórmula:

$$f(S, i, t) = S(1 + it)$$ (TASA DE INTERÉS SIMPLE)

- Hay otras fórmulas de valor del dinero en el tiempo dada una tasa de interés i:

$$f(S, i, t) = S(1 + i)^t$$ (TASA DE INTERÉS COMPUESTO)

$$f(S, i, t) = Se^{it}$$ (TASA DE INTERÉS INSTANTÁNEO)

- En todos los casos, el valor inicial (en $t = 0$) del capital es S:

$$f(S, i, 0) = S$$ (CONDICIÓN INICIAL)

DERIVACIÓN

Derivadas parciales

- Sea $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Se define la **derivada parcial** de $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ respecto a la i-ésima variable x_i como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N)}{h}$$

¡ LA **DERIVADA PARCIAL** ES UN OPERADOR QUE SE APLICA
A UNA FUNCIÓN (DIFERENCIABLE) Y PRODUCE OTRA FUNCIÓN !

- **Ejemplo**: Si $f(S, i, t) = S(1 + it)$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial S} f(S, i, t) = (1 + it)$$

Las demás variables se asumen constantes.

$$\frac{\partial}{\partial i} f(S, i, t) = \frac{\partial}{\partial i} S + \frac{\partial}{\partial i} Sit = 0 + St = St$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(S, i, t) = \frac{\partial}{\partial t} S + \frac{\partial}{\partial t} Sit = 0 + Si = Si$$

Representa la sensibilidad de precio futuro respecto al plazo de inversión.