MÓDULO ELEMENTOS DE CÁLCULO REAL

DIPLOMADO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA, MIDE

Ruslán Gómez Nesterkín
Banco de México
Octubre 2022

ENCUESTAS

- A fin de tener una mayor interacción durante las presentaciones…
- Se realizarán algunas encuestas de opinión durante las sesiones…
- A través de la aplicación de celular: **Telegram**
- Favor de adherirse al grupo: **MIDE_DIP_MATS_2022**
- Liga directa: *https://t.me/MIDE_DIP_MATS_2022*

PARTE 3: INTEGRACIÓN Y OPTIMIZACIÓN

TEMARIO

PARTE 1

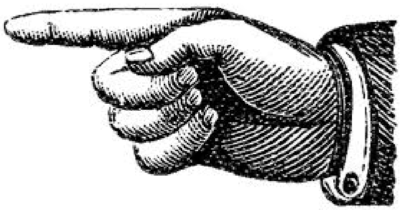
- SUCESIONES
- LÍMITE
- CONTINUIDAD
- DIFERENCIAS

PARTE 2

- DIFERENCIAS (Continuación)
- DERIVACIÓN
- DERIVACIÓN PARCIAL
- SERIES

PARTE 3

- SERIES (Continuación)
- SERIES DE TAYLOR
- INTEGRACIÓN
- OPTIMIZACIÓN



SERIES

Motivación (Tasa de interés)

- Retomando el modelo del capital en el tiempo: $f(S,i,N) = S(1+iN)$

  N: Plazo de tiempo (en años)

  i: Incremento (simple) del capital en el tiempo (5% anual)

  S: Monto inicial (por ejemplo $S = \$100$ en $N = 0$)

- Tenemos que

$$f(S,i,0) = S \qquad [= S(1+0)]$$

$$f(S,i,1) = S + Si \qquad [= S(1+i)]$$

$$f(S,i,2) = S + Si + Si \qquad [= S(1+2i)]$$

$$f(S,i,3) = S + Si + Si + Si \qquad [= S(1+3i)]$$

Entonces

$$\boxed{f(S,i,N) = \underbrace{S + Si + \cdots + Si}_{\text{ESTO ES UNA SERIE CON } N+1 \text{ SUMANDOS}}} \qquad [= S(1+iN)]$$

SERIES

Definición

- Una serie es la **suma de elementos de una sucesión** $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, representada de la siguiente manera:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

- También se denota la serie mediante:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

- **Ejemplo:** Consideremos la descomposición decimal del número real $x = \frac{1}{3}$,

$$x = \frac{1}{3} = 0.3333333\ldots =$$

$$x = 3 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + \cdots + 3 \times 10^{-n} + \cdots$$

Entonces la sucesión sería $a_1 = 0.3, a_2 = 0.03, a_3 = 0.003, \ldots$, y la serie quedaría como:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} 3 \times 10^{-i}$$

La serie S_n converge a $x = \frac{1}{3}$ cuando $n \to \infty$: $\boxed{S_1 = 0.3,\ S_2 = 0.33,\ S_3 = 0.333, \ldots,\ S_\infty = \frac{1}{3}}$

SERIES

Ejemplos importantes de series (finitas)

- Sea $x \neq 1$ un número real. Si $S_n = 1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n$, entonces $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Observando que S_n tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} S_n - S_{n-1} = x^n \\ S_n = xS_{n-1} + 1 \end{cases}$$

De la primera ecuación resolvemos para S_{n-1}:

$$S_{n-1} = S_n - x^n$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$S_n = x(S_n - x^n) + 1$$

Por lo tanto

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Si

$$x = (1 + i)$$

entonces

$$S_n = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$$

Esto es una ANUALIDAD de n pagos iguales con tasa de interés compuesta i.

Criterios de Convergencia de series infinitas

- **Criterio de convergencia**:

  Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

- **Condición de Cauchy:**

  La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si para cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número $N(\varepsilon)$, tal que para toda $n > N(\varepsilon)$ y para cualquier $m > 0$:

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

SERIES

Algunas propiedades de series convergentes

- Sean $\boldsymbol{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\boldsymbol{b} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. SI c es una constante real, entonces:

1. Suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. Resta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

3. Producto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

SERIES

Series de funciones

- Una serie infinita cuyos términos son las funciones reales $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, con $f_n: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ para toda n, se definen como una serie de funciones S si:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

- En caso de que cada función tuviera un dominio distinto, $f_n: \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}$, entonces la serie $S: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ se aplicaría en la intersección de los dominios:

$$\mathbb{D} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{D}_n$$

- Una serie converge uniformemente si su convergencia es para todos los elementos del dominio $\mathbb{D}$.

- **Criterio de Convergencia de Weierstrass:** La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $\mathbb{D}$ si existe una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que para toda n y para toda $x \in \mathbb{D}$:

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

Series de Potencias

- Se define una serie de potencias como la función $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ dada por la expresión:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

- La serie converge para $x \in (-r, r)$, donde r se conoce como el **radio de convergencia (o coeficiente de convergencia)**, a partir del comportamiento de sus coeficientes $b_n = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ y $c_n = \sqrt[n]{|a_n|}$ cuando $n \to \infty$:

Criterio	Radio de convergencia r
$\{b_n\} \to b$	$r = b$
$\{b_n\} \to +\infty$	$r = \infty$
$\{c_n\} \to 0$	$r = \infty$
$\{c_n\} \to c,\, c \neq 0$	$r = {}^{1}/_{c}$
$\{c_n\} \to +\infty$	$r = 0$

TEMARIO

PARTE 1

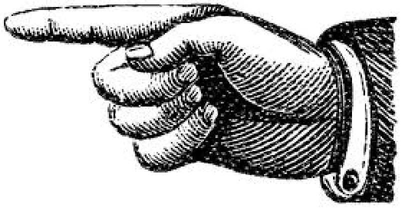
- SUCESIONES
- LÍMITE
- CONTINUIDAD
- DIFERENCIAS

PARTE 2

- DIFERENCIAS (Continuación)
- DERIVACIÓN
- DERIVACIÓN PARCIAL
- SERIES

PARTE 3

- SERIES (Continuación)
- SERIES DE TAYLOR
- INTEGRACIÓN
- OPTIMIZACIÓN



SERIES

Expansión en series de Taylor

- Denotaremos la n-derivada de la función f en x_0 como $f^{(n)}(x_0) = f'''^{\dots\prime}(x_0)$, y denotamos la cero-derivada de la función f como $f^{(0)}\ (x_0) = f\ (x_0)$.
- Si la función $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es arbitrariamente diferenciable en $x_0 \in \mathbb{D}$, entonces se cumple la siguiente relación:

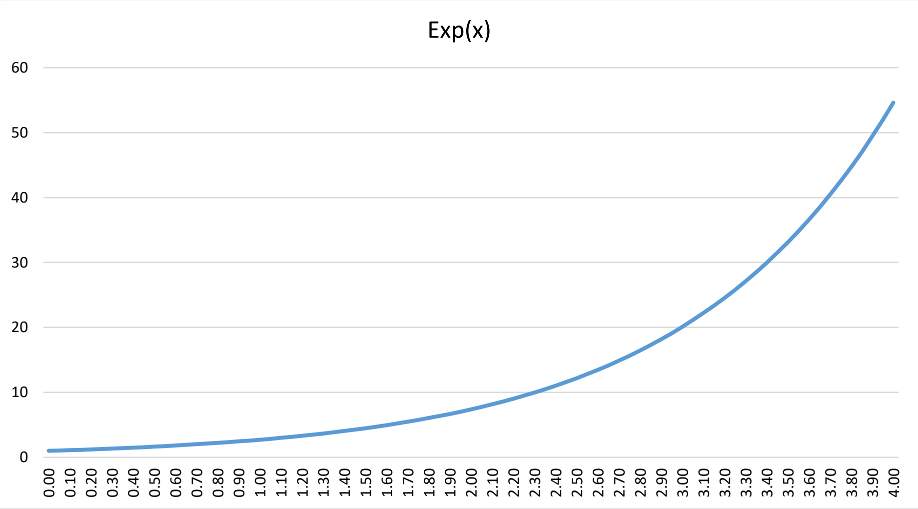
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}\ (x_0) =$$

$$= f\ (x_0) + (x-x_0)\cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\cdot f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{6}\cdot f'''(x_0) + \cdots$$

- **Aplicaciones:** Sumamente útil para aproximaciones numéricas de funciones, conocido como métodos numéricos.
- **Nota**: Hay otros muchos tipos de descomposición de funciones, como *series de Fourier*, *series de Laplace*, etc., las cuales se emplean frecuentemente para la simplificación del análisis, la modelación y la evaluación de problemas complejos .

SERIES

Ejemplo:



Sea $f(x) = e^x$, entonces aplicando el teorema de Taylor en el punto $x_0 = 0$, obtenemos:

$$\boldsymbol{f(x)} = f\,(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} \cdot f'\,(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cdot f''\,(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} \cdot f'''\,(x_0) + \cdots \qquad \text{(TAYLOR)}$$

$$= f\,(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} \cdot f''(0) + \frac{x^3}{6} \cdot f'''(0) + \cdots \qquad \text{(SUSTITUCIÓN DE } x_0 = 0\text{)}$$

$$= \boldsymbol{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}} + \cdots \qquad \text{(SUSTITUCIÓN DE } f'(x) = e^x\text{, ENTONCES } f'(0) = e^0 = 1\text{)}$$

Nota: El resultado de aproximación será válido alrededor del punto $x_0 = 0$, fuera de este rango el error se puede incrementar.

SERIES

Ejemplos de expansión de funciones en series de potencias

Función	Series de Potencias	Restricciones
e^x	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$	$x \neq -1$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$	$-1 < x \leq 1$

Nota para curiosos: Calcular $\frac{d}{dx}f(x)$, con $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ y comparar con $\frac{d}{dx}e^x = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

EJERCICIO EN CLASE (2 MINUTOS):

Cuál es el desarrollo en series de potencias de la función: e^{-2x}

Responder a la encuesta de opción múltiple del grupo **MIDE_DIP_MATS_2022** de Telegram. [MIDE-C-P3a]

TEMARIO

PARTE 1

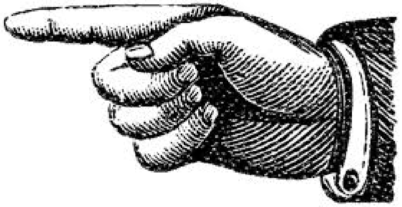
- **SUCESIONES**
- **LÍMITE**
- **CONTINUIDAD**
- **DIFERENCIAS**

PARTE 2

- **DIFERENCIAS (Continuación)**
- **DERIVACIÓN**
- **DERIVACIÓN PARCIAL**
- **SERIES**

PARTE 3

- **SERIES (Continuación)**
- **SERIES DE TAYLOR**
- **INTEGRACIÓN**
- **OPTIMIZACIÓN**



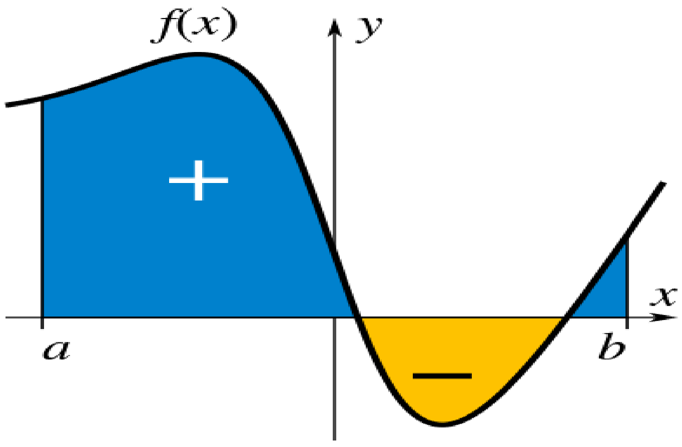
INTEGRACIÓN

Concepto de Integral

- **Real Academia de la Lengua Española**:
  Integral (*del lat. mediev. integralis*).
  Adj. Que comprende todos los elementos
  o aspectos de algo. Adj. Que indica integración.

https://www.vix.com/es/imj/salud/4395/harina-refinada-o-harina-integral

- En matemáticas, la integral es la suma del área bajo la curva de una función $f(x)$.



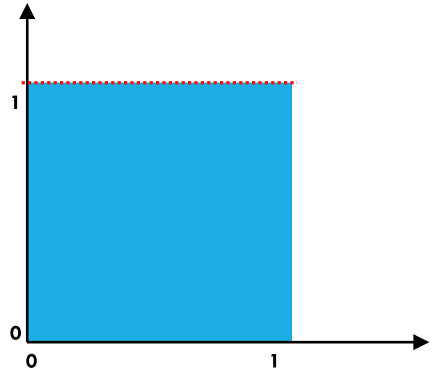
Fuente: Wikipedia, *https://en.wikipedia.org/wiki/Integral*

- Ejemplo: rendimiento acumulado en un periodo de tiempo (flujo de capitales).

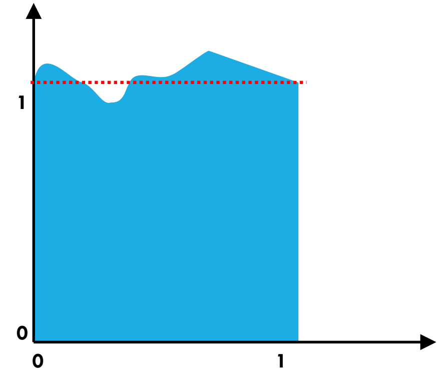
INTEGRACIÓN

Definición

- El área de un cuerpo se obtiene en geometría tras multiplicar la base por la altura:

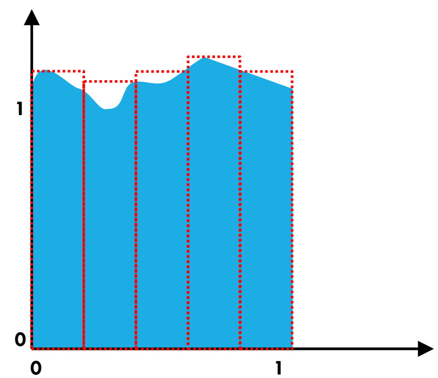


$$Área = 1 \times 1 = 1$$



$$Área = ¿?$$

- La integral de una función $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ se obtiene sumando el área de rectángulos que cubran la figura y de base cada vez más pequeña:



$$Área \approx \text{Suma Rectángulos}$$

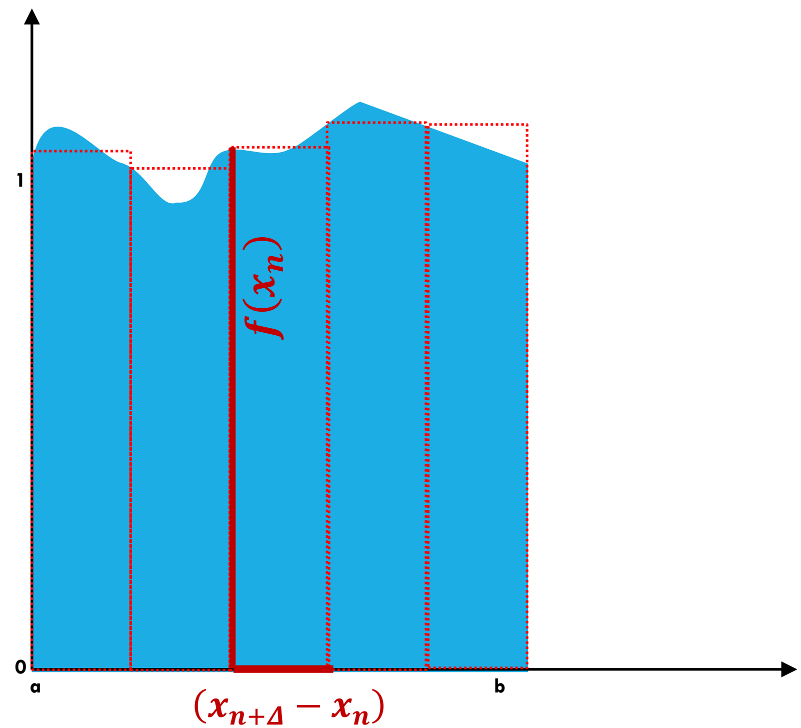
INTEGRACIÓN

Definición

- La integral de una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ se denota por:
$$\int_a^b f(s)ds$$

- La integral se obtiene mediante el límite:
$$\int_a^b f(s)ds = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(x_n)(x_{n+\Delta} - x_n)$$

con $\Delta = \frac{b-a}{N}$.



Integral ≈ Suma Rectángulos

INTEGRACIÓN

Propiedades y reglas de operación.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad a < b$$

INTEGRACIÓN

Algunos resultados

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1,\ x \neq 0 \ \text{ for } \ n < 0)$$

$$\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ \ \alpha \neq -1,\ \ x > 0)$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| \qquad (x \neq 0)$$

¿¡ COINCIDE CON ALGO VISTO ANTES !?

$$\frac{1}{x} = \frac{d}{dx} ln(x) \qquad (x > 0)$$

INTEGRACIÓN

Teorema Fundamental del Cálculo (Operador inverso)

- Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua en su dominio, entonces la integral

$$I(x)=\int_a^x f(t)dt$$

es diferenciable para $x\in[a,b]$ y además se cumple que

$$I'(x)=f(x)$$

EN OTRAS PALABRAS, LA DERIVADA DE LA INTEGRAL ES LA FUNCIÓN EVALUADA EN EL LÍMITE SUPERIOR:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

TEMARIO

PARTE 1

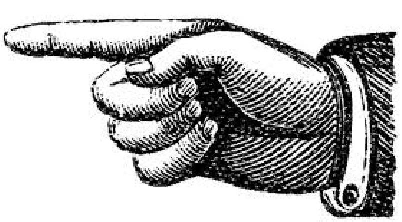
- SUCESIONES
- LÍMITE
- CONTINUIDAD
- DIFERENCIAS

PARTE 2

- DIFERENCIAS (Continuación)
- DERIVACIÓN
- DERIVACIÓN PARCIAL
- SERIES

PARTE 3

- SERIES (Continuación)
- SERIES DE TAYLOR
- INTEGRACIÓN
- OPTIMIZACIÓN



OPTIMIZACIÓN

Planteamiento inicial

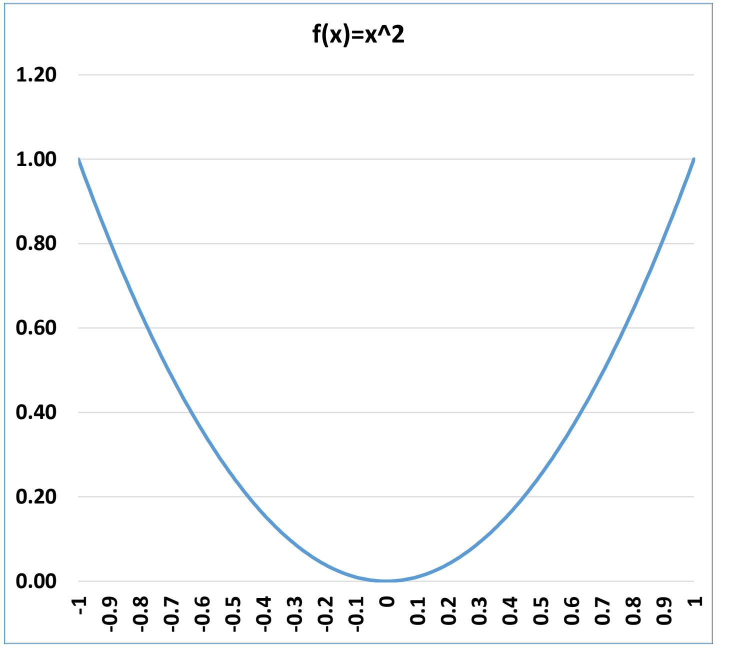
- Consiste en encontrar el máximo o el mínimo de algún conjunto.

- Ejemplo sencillo: $A = \{1,\ 5,\ \ \mathbf{12},\ 8, \mathbf{-1},\ 3.5,\ 9\}$
  - El máximo de A es $\mathbf{12}$.
  - El mínimo de A es $\mathbf{-1}$.

- **Definición del punto extremo de una función:** Sea $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$. Para toda $x \in \mathbb{D}$, se tiene un mínimo en x_0 si $f(x_0) \leq f(x)$ y máximo en x_1 cuando $f(x_1) \geq f(x)$.

OPTIMIZACIÓN

Planteamiento inicial



- **Ejemplo**: Sea $f(x) = x^2$ en el dominio $\mathbb{D} = [-1,1]$. El mínimo y el máximo de la función están dados respectivamente por:

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x) = 0$$ (El mínimo SI es único)

$$\max_{x\in[-1,1]} f(x) = 1$$ (El máximo NO es único)

- **EJERCICIO EN CLASE (2 MINUTOS):**

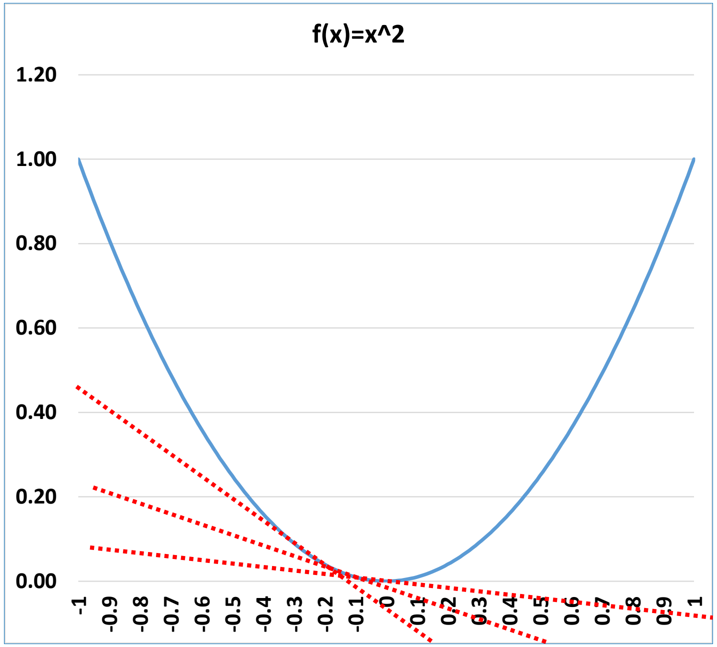
Considerando el dominio extendido $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ del ejemplo anterior, tenemos que $\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$...

$$a) \quad \max_{x\in[-5,5]} f(x) = ¿?$$

$$\text{b)} \quad \max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = ¿?$$

Responder encuesta de opción múltiple en Telegram, grupo MIDE_DIP_MATS_2022. [MIDE-C-P3b]

OPTIMIZACIÓN



Relación de la derivada con el máximo y mínimo

- Del ejemplo anterior, se desprenden dos comentarios que:
  1. El mínimo de la función $f(x) = x^2$ se obtiene cuando $x = 0$.
  2. La derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 0$ es $f'(0) = 0$.
- En conclusión: ¿Podría haber alguna relación entre el **mínimo de una función** y la **derivada de dicha función**?

Si $f(x_0) = \min_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} f(x)$ entonces $f'(x_0) = 0$

NOTAS:

1) El resultado solo aplica alrededor de x_0.

2) Se requieren condiciones adicionales para tener el si y solo si.

OPTIMIZACIÓN

Criterio para valores extremos

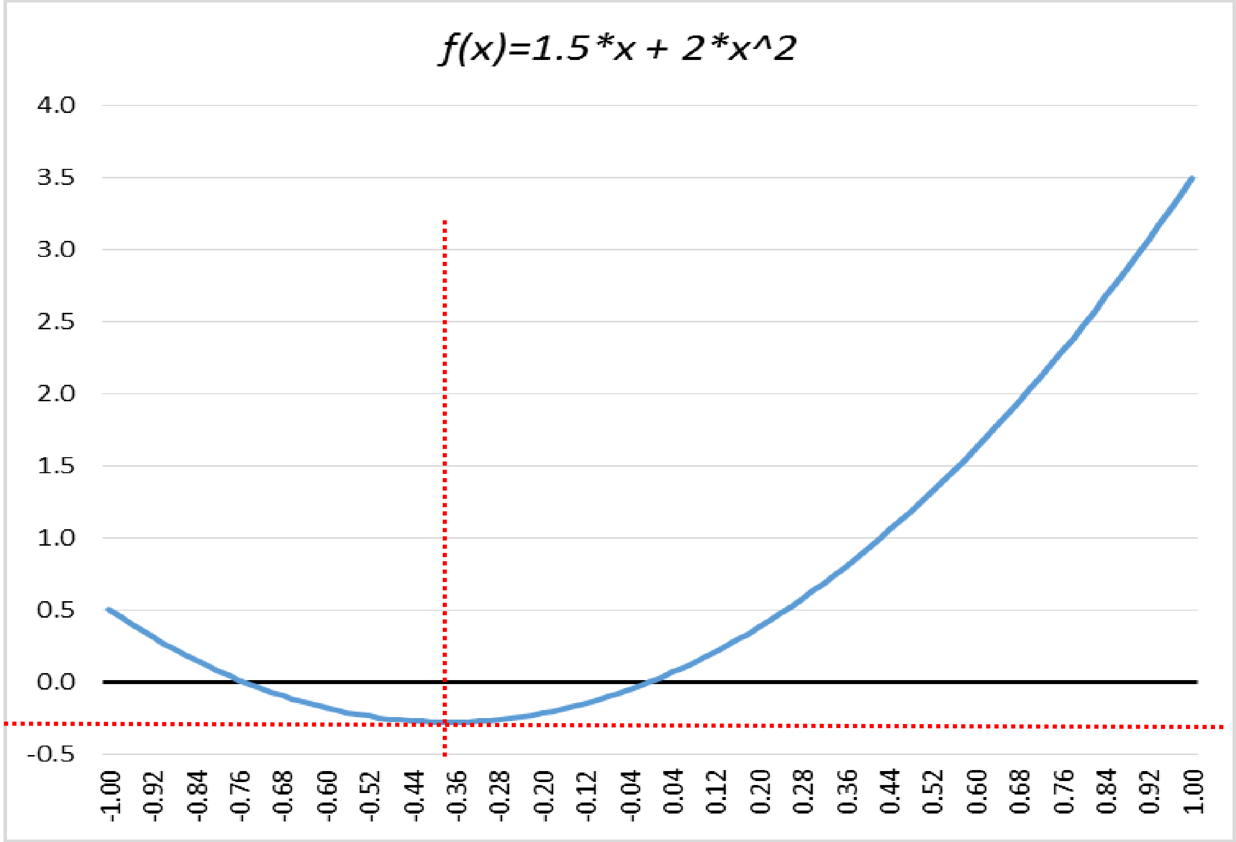
Sea $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función doblemente diferenciable, $f \in \mathbb{C}^2$, entonces si existe un x_0 en su dominio $\mathbb{D}$ tal que:

a) MÍNIMO: $f(x_0) = \min_x f(x)$ entonces $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$

b) MÁXIMO: $f(x_0) = \max_x f(x)$ entonces $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$

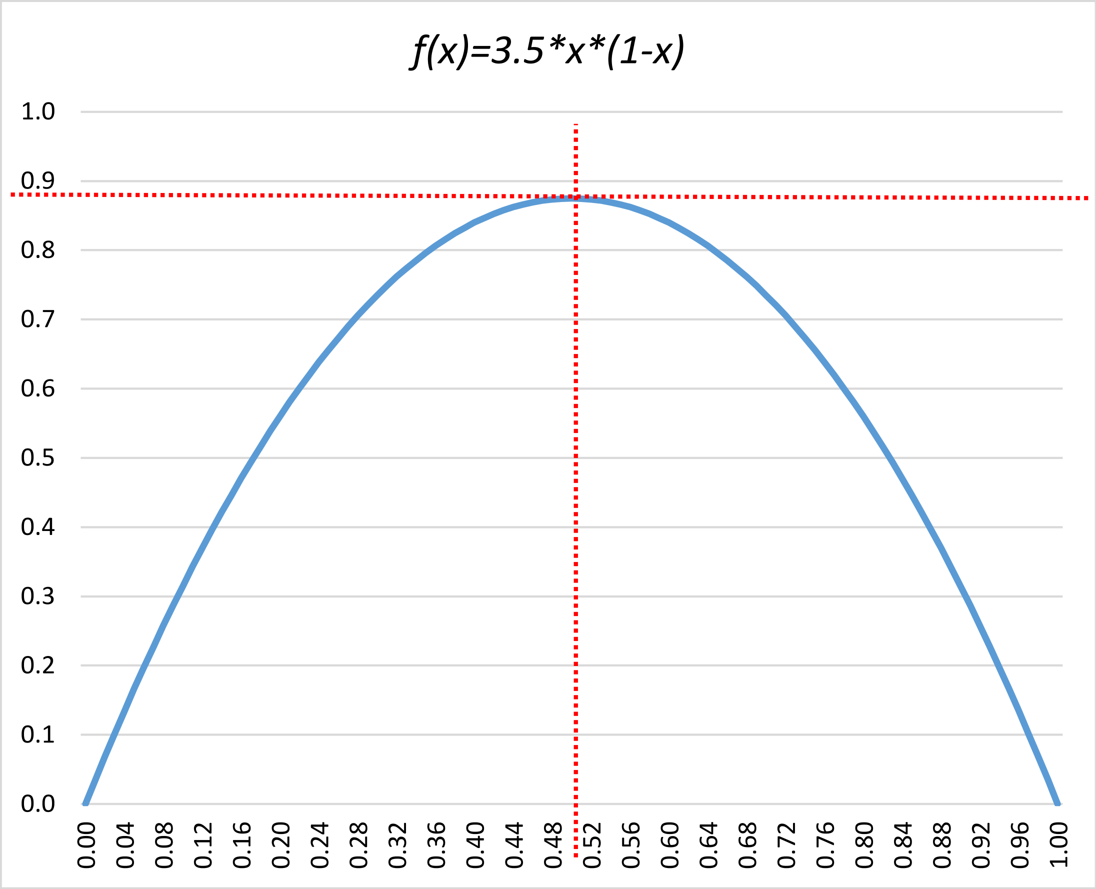
OPTIMIZACIÓN

Ejemplos:



1. Sea $f(x) = 1.5\,x + 2\,x^2$ entonces:
   a) $f'(x) = 0 \Rightarrow \; 1.5 + 4x = 0 \Rightarrow \; x = {}^{-1.5}/_{4} = -0.375$
   b) $f''(x) = 4 > 0$
   c) Por lo tanto se tiene un **MÍNIMO** local en $\boldsymbol{x = -0.375}$, con valor $f(-0.375) = \boldsymbol{-0.28125}$

Ejemplos:



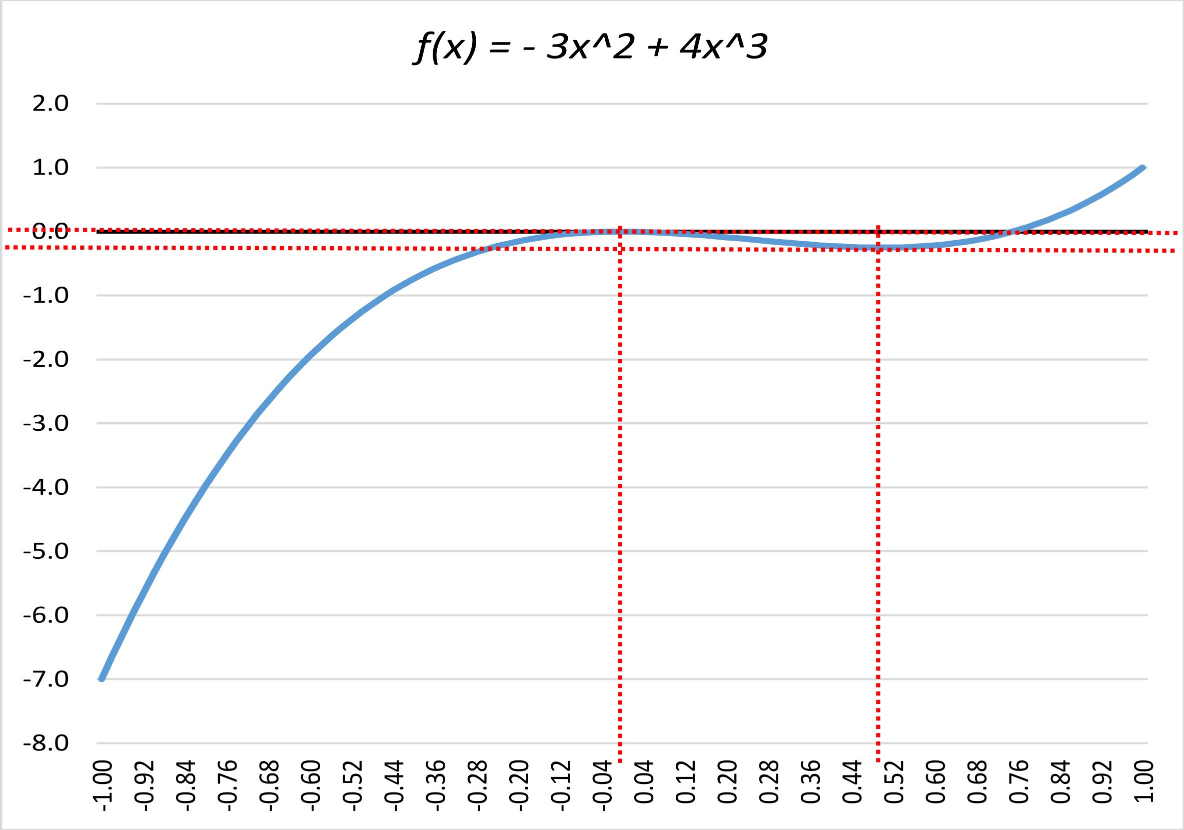
2. Sea $f(x) = 3.5\,x(1-x)$ entonces

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow 3.5 - 7x = 0 \Rightarrow x = {}^{3.5}/_{7} = 0.5$

b) $f''(x) = -7 < 0$

c) Por lo tanto se tiene un **MÁXIMO** en $\boldsymbol{x = 0.5}$, con valor $f(0.5) = \frac{7}{8} = \mathbf{0.875}$

Ejemplos



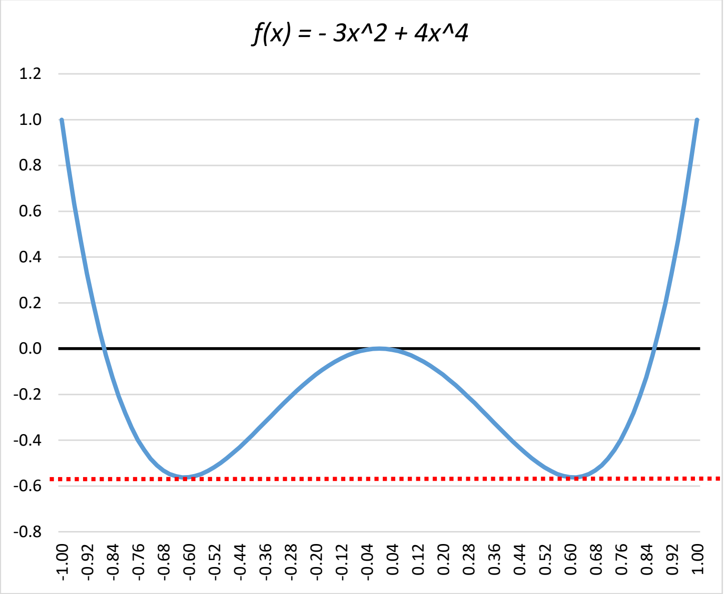
3. Sea $f(x) = -3x^2 + 4x^3$ entonces:

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 12x^2 = 0 \Rightarrow 6x(2x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0.5$

b) $f''(x) = -6 + 24x = \begin{cases} < 0, \text{si } x < 0.25 \\ > 0, \text{si } x > 0.25 \end{cases}$

c) **MÁXIMO** local en $x_1 = 0$ con valor $f(0) = \mathbf{0}$.

MÍNIMO local en $x_2 = 0.5$ con valor $f(0.5) = \mathbf{-0.25}$



Ejemplos

4. Sea $f(x) = -3x^2 + 4x^4$ entonces

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 16x^3 = 0 \Rightarrow 2x(8x^2 - 3) = 0$

Como $8x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3/8}$

Entonces $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3/8}, x_3 = -\sqrt{3/8}$

b) $f''(x) = -6 + 48x^2 = \begin{cases} < 0, & \text{si } -0.35 < x < 0.35 \\ > 0, & \text{si } x < -0.35 \text{ o } x > 0.35 \end{cases}$

c) **MÁXIMO** local en $\boldsymbol{x_1 = 0}$ con valor $f(0) = \mathbf{0}$ (ya que $-0.35 < x_1 < 0.35$)

MÍNIMO local en $\boldsymbol{x_2 = \sqrt{3/8}}$ con valor $f(x_2) \approx \mathbf{-0.56}$ (ya que $x_2 > 0.35$)

MÍNIMO local en $\boldsymbol{x_3 = -\sqrt{3/8}}$ con valor $f(x_3) \approx \mathbf{-0.56}$ (ya que $x_3 < -0.35$)

Nota: $\sqrt{3/8} \approx 0.61$ y $\sqrt{6/48} \approx 0.35$

OPTIMIZACIÓN

Valores extremos con restricciones
(Método de Multiplicadores de Lagrange)

- Asúmanse $f, g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ funciones reales con derivadas parciales continuas y $\omega \in \mathbb{R}^N$ constante.
- Problema de optimización: $\max_{\omega} \{f(\omega)\}$ sujeto a $g(\omega) = 0$
- Definimos la función $\mathcal{L}(\omega, \lambda)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda) = f(\omega) - \lambda g(\omega)$$

(*Función de Lagrange*)

con un coeficiente $\lambda \in \mathbb{R}$ dado por cada una de las restricciones $g(\omega)$.

- Entonces una **condición necesaria** para la existencia de solución al problema de optimización anterior es que:

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\mathcal{L}(\omega, \lambda) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{L}(\omega, \lambda) = 0$$

Ejemplo de Carteras Óptimas (MODELO)

- En la fecha t, una cartera de N instrumentos sobre los que va a invertir:

$$X = \{X_1(t), X_2(t), \cdots X_N(t)\}$$

- Porcentaje del capital para invertir que se asigna a cada instrumento:

$$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_N\},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1, \text{ con } \omega_i > 0 \text{ para toda } i.$$

- Plazo de la Inversión $M > 0$, que será cuando se venda la cartera.

- El valor de la cartera en cada tiempo t será entonces:

$$C(t) = \omega_1 X_1(t) + \omega_2 X_2(t) + \cdots + \omega_N X_N(t)$$

- Se busca seleccionar los ponderadores ω que maximicen el rendimiento $R = C(t+M) - C(t)$ dado un nivel de riesgo aceptable ρ:

$$Max_{\omega}\{R(t, M, \omega, X)\} \text{ sujeto a } \rho(t, M, \omega, X) \text{ dado.}$$

OPTIMIZACIÓN

Ejemplo de Carteras Óptimas (PLANTEAMIENTO)

- Supongamos una cartera con tres instrumentos: $\boldsymbol{X} = \{X_1(t), X_2(t), X_3(t)\}$.
- Sea el rendimiento $R(\omega) = R(t, M, \omega, X)$ dado por el valor esperado del rendimiento:

$$\boldsymbol{R(\omega)} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbb{E}[r_i] = \mathbf{7\%}\boldsymbol{\omega_1} + \mathbf{6.5\%}\boldsymbol{\omega_2} + \mathbf{9\%}\boldsymbol{\omega_3}$$

- Y considérese el nivel de riesgo

$$\boldsymbol{\rho(\omega)} = \rho(t, M, \omega, X) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\omega_i\, \sigma_{i,j}\, \omega_j}$$

dado en función de la matriz de covarianzas $\sigma_{i,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.5} & \mathbf{1.0} & \mathbf{0.8} \\ \mathbf{1.3} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0.6} \\ \mathbf{0.8} & \mathbf{0.7} & \mathbf{0.9} \end{bmatrix}$

- La restricción considerada será que la suma de los pesos sea igual a 1:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{N} \omega_i = 1$$

- El problema de optimización planteado es :

$$\max_{\boldsymbol{\omega}} \{\boldsymbol{R(\omega)} - \boldsymbol{\rho(\omega)}\}$$

$$\boldsymbol{s.a.}\ \sum\nolimits_{i=1}^{N} \boldsymbol{\omega_i} - \mathbf{1} = \mathbf{0.}$$

Ejemplo de Carteras Óptimas (SOLUCIÓN)

1. El problema de optimización planteado es obtener $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ en el siguiente problema de optimización:

$$\max_{\omega} \{R(\omega) - \rho(\omega)\} \ s.a. \ \sum_{i=1}^{N} \omega_i - 1 = 0.$$

2. La expresión de la función de Lagrange resulta ser:

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda) = R(\omega) - \rho(\omega) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i - 1\right)$$

Quedando finalmente así:

$$\mathcal{L}(\omega, \lambda) = \omega \begin{bmatrix} 7.0\% \\ 6.5\% \\ 9.0\% \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} \mathbf{0.5} & \mathbf{1.0} & \mathbf{0.8} \\ \mathbf{1.3} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0.6} \\ \mathbf{0.8} & \mathbf{0.7} & \mathbf{0.9} \end{bmatrix} \omega^T - \lambda\omega \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda$$

3. Tomando derivadas parciales de $\mathcal{L}$ respecto a las ω's y λ y las igualamos a 0:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1} = 7.0\% - 2 \times \mathbf{0.5} \times \omega_1 - \mathbf{1.0} \times \omega_2 - \mathbf{0.8} \times \omega_3 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_2} = 6.5\% - \mathbf{1.3} \times \omega_1 - 2 \times \mathbf{0.5} \times \omega_2 - \mathbf{0.6} \times \omega_3 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_3} = 9.0\% - \mathbf{0.8} \times \omega_1 - \mathbf{0.7} \times \omega_2 - 2 \times \mathbf{0.9} \times \omega_3 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + 1 = 0$$

Ejemplo de Carteras Óptimas (SOLUCIÓN)

4. Lo anterior se convierte en el siguiente sistema de ecuaciones en ω y λ:

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{k}$$

donde:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.8 & 1 \\ 1.3 & 1.0 & 0.6 & 1 \\ 0.8 & 0.7 & 1.8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \lambda \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{k} = \begin{bmatrix} 7.0\% \\ 6.5\% \\ 9.0\% \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones $x = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{k}$, se obtienen los pesos óptimos.

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega_1} \\ \boldsymbol{\omega_2} \\ \boldsymbol{\omega_3} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.14} \\ \mathbf{0.62} \\ \mathbf{0.23} \\ \mathbf{-0.88} \end{bmatrix}$$

Código en R:

```
install.packages("matlib")
library(matlib)
A <- matrix( c(1.0, 1.0, 0.8,  1,
               1.3, 1.0, 0.6,  1,
               0.8, 0.7, 1.8,  1,
                 1,   1,   1,  0),      nrow=4, byrow=TRUE);
k <- matrix( c (0.07,0.065,0.09,1) ,  nrow=4, byrow=TRUE);
inv(A);
inv(A) %*% k
```