MIDE-C-P1

DATOS:

$f(x) = x$

$x_0 = 1$

PROBLEMA:

$\epsilon = 0.1$

$\delta =$¿?

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ cuando $|x - x_0| < \delta$

SOLUCIÓN:

Buscamos δ, como función de ε, que satisfaga:

$$\boxed{\text{Para todo } \varepsilon > 0 \text{, existe } \delta > 0 \text{ tal que si } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{, entonces } |x - x_0| < \delta.} \quad (1)$$

Sabemos que $f(x) = x$, entonces:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ si y solo si } |x - x_0| < \varepsilon = 0.1 \quad (2)$$

Entonces si tomamos a $\delta = \varepsilon$, se cumpliría que:

$$|x - x_0| < \delta = \varepsilon = 0.1$$

Obteniedo lo buscado:

$$\boxed{\text{Para todo } \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{, tal que si } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{, entonces } |x - x_0| < \delta = \varepsilon = 0.1.}$$

NOTAS:

a) Si $\delta < \varepsilon$,no podemos asegurar que se cumpla (1). Por ejemplo, si $|x - x_0| = 0.05 < \varepsilon$ y $\delta = 0.04 < \varepsilon$, entonces no se cumple (1):

$\mathbf{0.05} = |x - x_0| > \delta = \mathbf{0.04}$ (no se cumple que $|x - x_0| < \delta = \mathbf{0.04}$)

b) De manera similar, si $\delta > \varepsilon$, no podemos asegurar que se cumpla (2). Por ejemplo, si $|x - x_0| = 1.05$ y $\delta = 2$, entonces no se cumple (2):

$\varepsilon = \mathbf{0.1} < \mathbf{1.05} = |x - x_0| < \delta = \mathbf{2}$ (no se cumple que $|x - x_0| < \varepsilon = \mathbf{0.1}$)

Por lo tanto $\boxed{\delta = \varepsilon = 0.1}$