MÓDULO ELEMENTOS DE CÁLCULO REAL

DIPLOMADO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA, MIDE

Ruslán Gómez Nesterkín
Banco de México
Septiembre 2022

Aviso: Los comentarios y opiniones expresados son solo del autor y no necesariamente reflejan a los del Banco de México.

ENCUESTAS

- A fin de tener una mayor interacción durante las presentaciones…
- Se realizarán algunas encuestas de opinión durante las sesiones…
- A través de la aplicación de celular: **Telegram**
- Favor de adherirse al grupo: **MIDE_DIP_MATS_2022**
- Liga directa: *https://t.me/MIDE_DIP_MATS_2022*

REFERENCIAS

- Castillo Ron Enrique, Iglesias Andrés, Ruiz-Cobo Reyes Ángel; **Functional Equations in Applied Sciences**, pp. 5-7 y 327-328; Elsevier 2005.

- Clark Francis Jack, Archer Stephen H.; **Portfolio Analysis**; Prentice Hall 1971.

- Conrad Tom; **Chaos Theory, Financial Markets and Global Weirding**; Forbes 30/ago/2011; *https://www.forbes.com/sites/tomkonrad/2011/08/30/chaos-theory-financial-markets-and-global-weirding*

- Eichorn Wolfgang, Glaisser Winfried; **Mathematics and Methodology for Economics**; Springer, 2016.

- Louderer Bernard, Nollau Volker, Vetters Klaus; **Mathematical Formulas for Economists**, 4th edition; Springer 2010.

- Mavron Vassilis C., Phillips Timothy N.; **Elements of Mathematics for Economics and Finance**; Springer-Verlag 2007.

- Li Tien-Yien, Yorke James A.; **Period Three Implies Caos**; The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 10, pp. 985-992; dic/1975

Material introductorio: *http://www.objetos.unam.mx/*

TEMARIO

PARTE 1

- **SUCESIONES**
- **LÍMITE**
- **CONTINUIDAD**
- **DIFERENCIAS**

PARTE 2

- **DIFERENCIAS (Continuación)**
- **DERIVACIÓN**
- **DERIVACIÓN PARCIAL**
- **SERIES**

PARTE 3

- **SERIES (Continuación)**
- **SERIES DE TAYLOR**
- **INTEGRACIÓN**
- **OPTIMIZACIÓN**

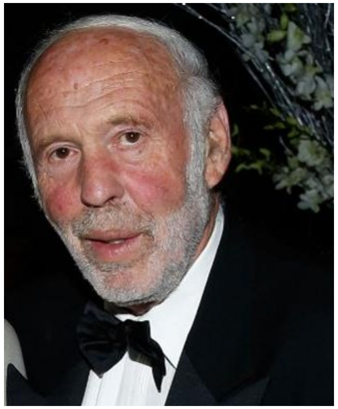
PARTE 1: LÍMITE Y CONTINUIDAD

MOTIVACIÓN

Estrategias de inversión (precedentes motivacionales):

- https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1990/markowitz-bio.html
  Harry M. Markowitz: Modelos de carteras de inversión óptimas.
  Premio Nobel de Economía en 1990.

- https://www.forbes.com/profile/james-simons/
  James Simons: Modelos matemáticos para encontrar arbitrajes financieros. Fundador de Renaissence Technologies Corp.
  Valor neto de su riqueza estimada (al 11/09/2017): $19 mil millones de dólares.



MOTIVACIÓN

- EJEMPLO DE CARTERAS DE INVERSIÓN

! El rendimiento es con base en el precio futuro !

	POSICIÓN		SIMULACIÓN	
INSTRUMENTO	POSICIÓN EN TÍTULOS	PRECIO *X(t)*	PRECIO *X(t+1)*	RENDIMIENTO
1.Bonos	10	$100	$107	7.00%
2.Cetes	16	$75	$80	6.50%
3.Acciones	12	$25	$27	9.00%
TOTAL	38	$200	$214	

Límite de inversión:	$2,500		
Valor de cartera seleccionada *C(t)* :	$2,500	$2,675	7.00%
Valor de cartera óptima *C(t)* :	$2,500	$2,725	9.00%

¿CÓMO SE OBTUVO EL VALOR ÓPTIMO?

MOTIVACIÓN

Modelo simplificado (Markowitz):

- En la fecha t, una cartera de N instrumentos sobre los que se invertirá:

$$X = \{X_1(t), X_2(t), \cdots X_N(t)\}$$

- Porcentaje del capital para invertir que se asigna a cada instrumento:

$$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_N\},$$
$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 1, \text{ con } \omega_i > 0 \text{ para toda } i.$$

- Plazo de la Inversión $M > 0$, que será cuando se venda la cartera.

- El valor de la cartera en cada tiempo t será entonces:

$$C(t) = \omega_1 X_1(t) + \omega_2 X_2(t) + \cdots + \omega_N X_N(t)$$

- Se busca seleccionar los ponderadores ω que maximicen el rendimiento $R = C(t+M) - C(t)$ dado un nivel de riesgo aceptable ρ:

$$Max_{\omega}\{R(t, M, \omega, X)\} \text{ sujeto a } \rho(t, M, \omega, X) \text{ dado.}$$

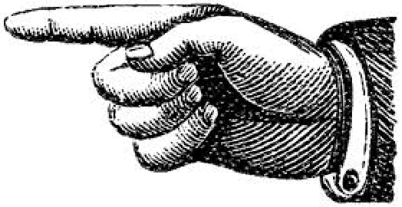
MOTIVACIÓN

Comencemos identificando el valor de los instrumentos financieros…

- ¿Cuál es el "precio justo" de cada instrumento $X_i(t)$?
- Un criterio usado consiste en considerar los rendimientos futuros esperados…
  - **FLUJOS:** Rentas, Créditos, Fibras, Estructurados, etc.: $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m\}$
  - **BONOS** (pagos de cupón durante m periodos): $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m\}$
  - **CERTIFICADOS BURSÁTILES** (rendimiento por m periodos): $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m\}$
  - **ACCIONES** (dividendos futuros): $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m, \ldots\}$

… ¡ ESTOS SON EJEMPLOS DE SUCESIONES !

TEMARIO



PARTE 1

- **SUCESIONES**
- **LÍMITE**
- **CONTINUIDAD**
- **DIFERENCIAS**

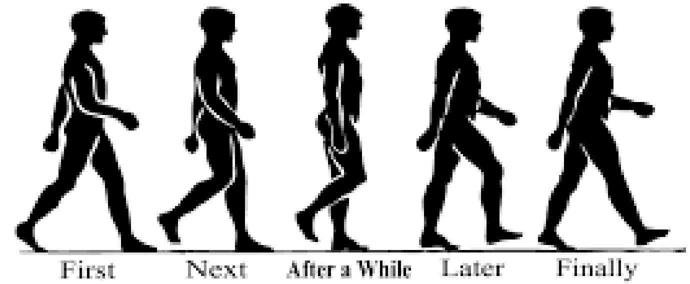
PARTE 2

- **DIFERENCIAS (Continuación)**
- **DERIVACIÓN**
- **DERIVACIÓN PARCIAL**
- **SERIES**

PARTE 3

- **SERIES (Continuación)**
- **SERIES DE TAYLOR**
- **INTEGRACIÓN**
- **OPTIMIZACIÓN**

SUCESIONES



Concepto de Sucesión

- **Sucesión**: El mapeo $A\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}$, es una sucesión (de números) y se denota $\{A_n\}$.

- **Ejemplos**:

a=01, b=02, c=03, …
tan = 21 01 14

  – Baile del Cha-cha-cha: {1,2,3, Máaaam-bó, tan, tan, tantararan, tan, tan, tantararan, ...}

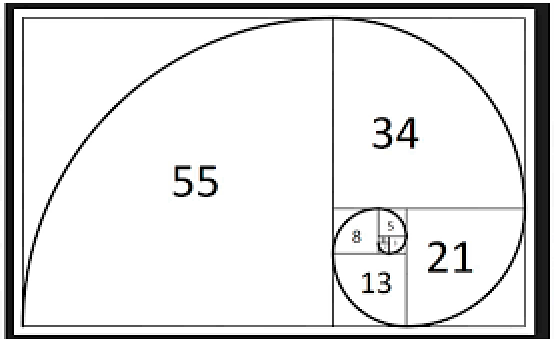
  – $\{A_n = n | n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$

  – $\left\{A_n = \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots\right\}$

  – $\left\{A_n = \begin{cases} 1, \text{si } n \text{ es par} \\ -1, \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots\}$

  – $\{A_n = 2^n | n \in \mathbb{N}\} = \{1,2,4,8,16,32, \dots, 2^n, \dots\}$

SUCESIONES



Algunas Propiedades de Sucesiones

- La sucesión puede ser finita ($\#\mathbb{K} < \infty$) o infinita ($\#\mathbb{K} = \infty$)
  - *Ejemplo:* $\{55, 34, 21, 13, 8, 5, 3, 2, 1\}$
  - *Ejemplo:* $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\}$

- Se representan en forma explícita, $\{A_n\} = \{A(n), n = 1,2, \dots\}$ con $A(n)$ dado.
  - *Ejemplo:*

    $Si\ \{A_n\} = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\}$

    $Entonces\ \ A(1) = 1, A(2) = 2, A(3) = 3, A(4) = 5, A(5) = 8\ , etc.$

- Forma implícita: $A_n = f(A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_{n-k})$ con f y A_1 dados.
  - *Ejemplo:*

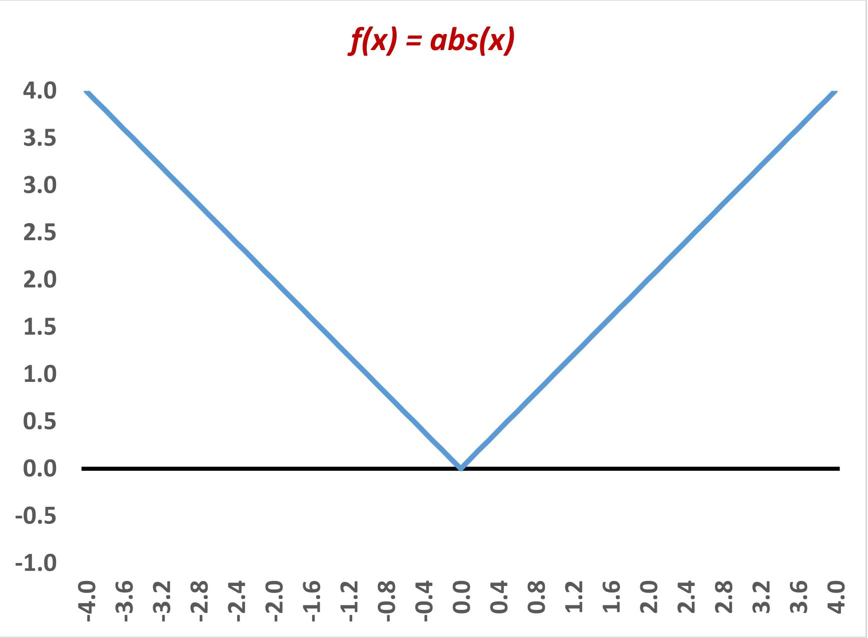
    $Si\ A_n = A_{n-1} + A_{n-2}, con\ A_1 = 1\ y\ A_2 = 2,$

    $Entonces\ \ \{A_n\} = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\}$

- Sucesiones aritméticas: Para toda $n \in \mathbb{K}$ y d $\in\mathbb{R}$ constante, entonces $A_{n+1} - A_n = d$

- Sucesiones geométricas: Para toda $n \in \mathbb{K}$ y u $\in\mathbb{R}$ constante y $A_n \neq 0$, entonces $\frac{A_{n+1}}{A_n} = u$

SUCESIONES



Paréntesis (Valor absoluto)

- El valor absoluto de un número está dado por:

$$abs(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$abs(-3) = -(-3) = 3$$

Ejemplos:
$abs(-3) = 3, abs(8) = 8, abs(-12345) = 12345.$

- Otra representación equivalente del valor absoluto (denominado norma) está dado por:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

- La expresión $|x| < \varepsilon$ es equivalente a decir que x está acotada entre $-\varepsilon$ y ε:

$$-\varepsilon < x < \varepsilon$$

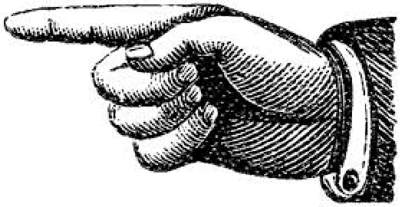
Ejemplos:

- $|3| < 4$ ya que $-4 < 3 < 4$.
- $|-3| < 4$ ya que $-4 < -3 < 4$.
- $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ significa que $-\varepsilon < f(x) - g(x) < \varepsilon$.

TEMARIO

PARTE 1

- SUCESIONES
- LÍMITE
- CONTINUIDAD
- DIFERENCIAS



PARTE 2

- DIFERENCIAS (Continuación)
- DERIVACIÓN
- DERIVACIÓN PARCIAL
- SERIES

PARTE 3

- SERIES (Continuación)
- SERIES DE TAYLOR
- INTEGRACIÓN
- OPTIMIZACIÓN

LÍMITE

Convergencia de sucesiones

- **Punto límite:** Un número $L \in \mathbb{R}$, se llama punto límite *de una sucesión* $\{A_n\}$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ (pequeño) hay una infinidad de elementos de la sucesión $\{A_n\}$ tales que:

$$|A_n - L| < \varepsilon.$$

- **Notación:** En este caso, se denota al punto límite L como:

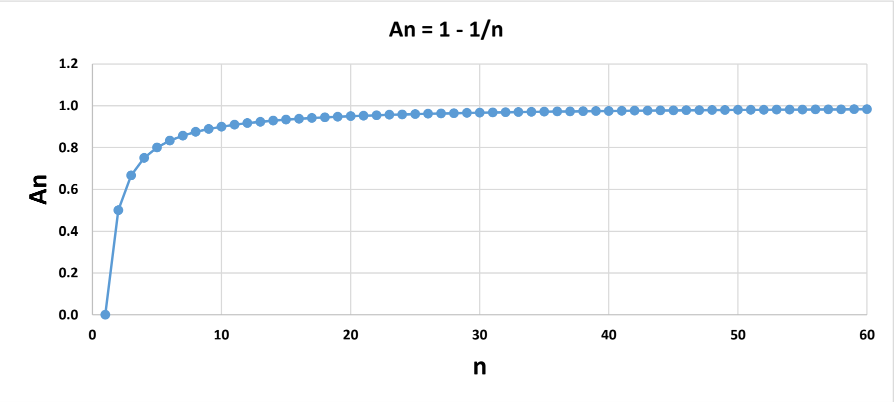
$$L = \lim_{n \to \infty} A_n$$

o también como

$$A_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

- **Divergencia:** Si una sucesión no converge a un número $L \in \mathbb{R}$, se dice que **diverge**.

LÍMITE



Resultados de Convergencia

- Una sucesión tiene a lo más 1 punto límite L.
- Una sucesión monótona (siempre creciente o siempre decreciente) tiene un punto límite L, si y solo si es **acotada**: Existe $q < \infty$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ *sucede que* $|A_n| < q$.

– *Ejemplo:*

Si $\left\{A_n = 1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} A_n = 1$. (¿SERÁ CIERTO?)

Demostración 1:

¿Es monótona? Si por que crece para cualquier $n > 1$: $A_{n+1} - A_n > 0$

$$A_{n+1} - A_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \blacksquare$$

¿Es acotada? Si, ya que no hay $n > 1$ tal que $A_n > 1$:

$$A_n > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} > 1 \Rightarrow \frac{n}{n} - \frac{1}{n} > 1 \Rightarrow n - 1 > n$$ (¡ABSURDO! Ejemplo: $2\text{-}1 = 1 \not> 2$)

Demostración 2:

¿Tiene punto límite? Si y éste es $L = 1$, ya que para cualquier $\varepsilon > 0$, cuando $n > \frac{1}{\varepsilon}$:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{1}{n}$$

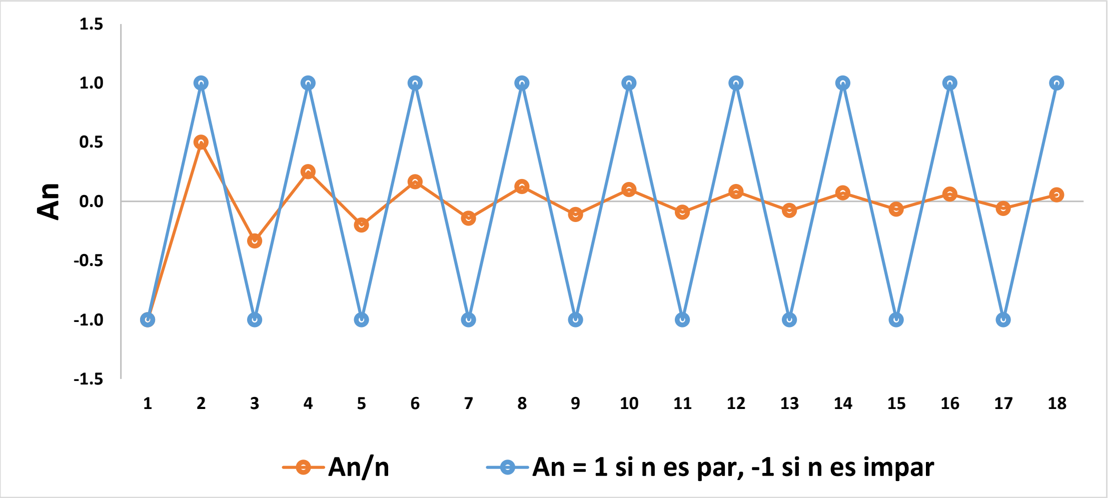
$$|A_n - L| = \left|\left(1 - \frac{1}{n}\right) - L\right| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\left({}^{1}/_{\varepsilon}\right)} = \varepsilon \blacksquare$$

LÍMITE

Propiedades del límite

- Sean $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ dos sucesiones tales que $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ y $B = \lim_{n\to\infty} B_n$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes. Entonces:
  - Si $\{A_n\}$ tiene un punto límite L, entonces cualquier $\{C_n\}$ subsucesión de $\{A_n\}$ converge también a L.
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
  - $\lim_{n\to\infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha A + \beta B$
  - $\lim_{n\to\infty} (A_n B_n) = AB$
  - Si $B \neq 0, B_n \neq 0$ para toda n, entonces $lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{A}{B}$
  - Si $\alpha < A_n < \beta$ para toda n, entonces $\alpha < A < \beta$

LÍMITE



- **Ejemplos**:

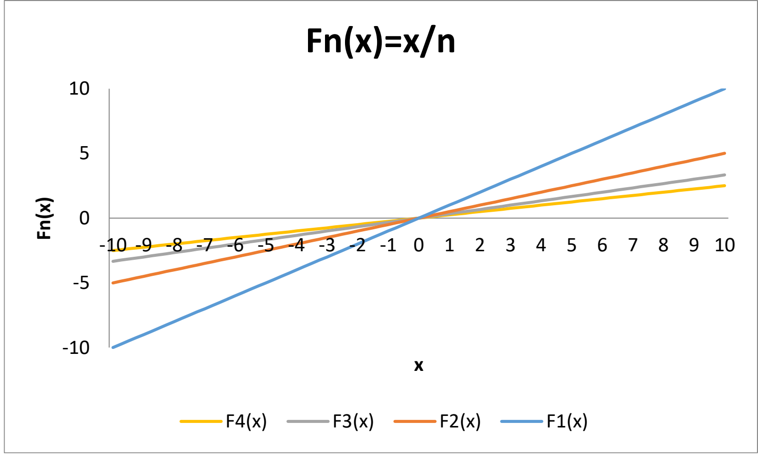
- $\left\{A_n = \begin{cases} 1, \text{si } n \text{ es par} \\ -1, \text{si } n \text{ es inpar} \end{cases} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} = \{-1,1,-1,1,\ldots,-1,1,\ldots\}$. (¿EXISTE EL LÍMITE?)
- A_n no converge, pero si $B_n = \left\{\frac{A_n}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$, entonces $\lim_{n\to\infty} B_n = 0$.

En conclusión:

A_n es acotada pero no converge (<u>diverge</u>), pero....

¡ B_n <u>si converge !</u>

LÍMITE



Límite de funciones
(Tres casos importantes a tener presente)

- **SUCESIONES DE LA IMAGEN:**
  Dada una sucesión $\{A_n\}$ de números reales y una función $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que $f(A_n)$ induce una sucesión de números reales $\{B_n\}$:

$$B_n = f(A_n), \text{ para toda } n > 0.$$

- **SUCESIÓN DE FUNCIONES:**
  La función límite $f(x)$ de la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ se define como:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \text{ para toda } x \in \mathbb{D}.$$

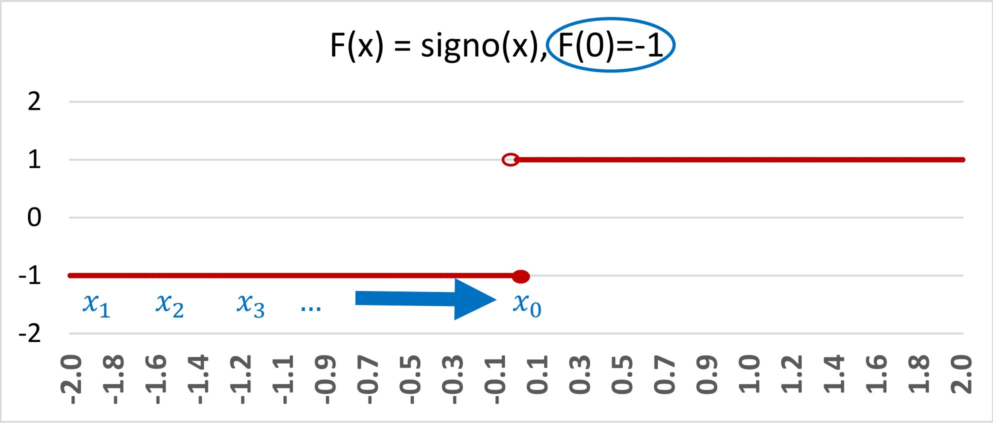
- **SUCESIONES EN EL DOMINIO:**
  Dada una sucesión $\{x_n\}$ que converge a x_0 y una función $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, el límite de $f(x_n)$ se denota como:

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n)$$

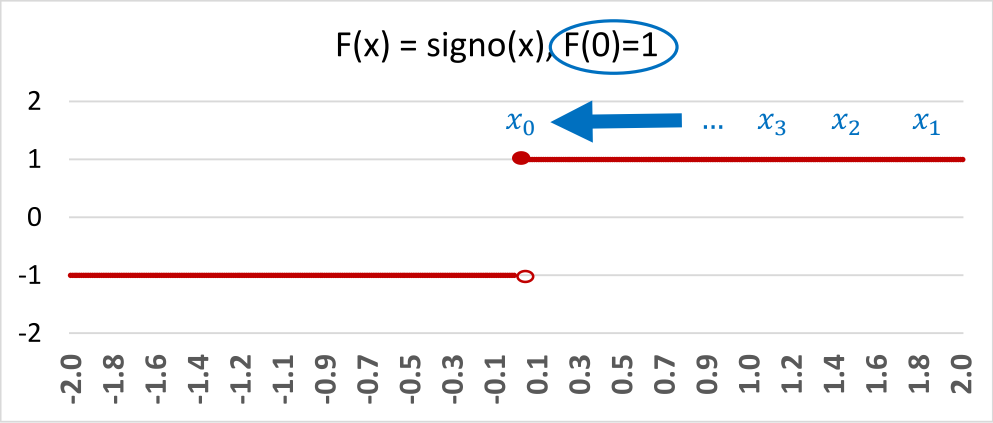
Convergencia por la derecha y por la izquierda

Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $x_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$, entonces:

- Si $x_n \leq x_0$ para toda n, se dice que x_n converge a x_0 por la izquierda.



- Si $x_n \geq x_0$ para toda n, se dice que x_n converge a x_0 por la derecha.



LÍMITE

Convergencia uniforme (de funciones)

- **Condición de Cauchy:** Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ con $n > 0$, converge uniformemente si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $N(\varepsilon)$ tal que para toda $n > N(\varepsilon)$ y para toda $m \in \mathbb{N}$ se cumple que:

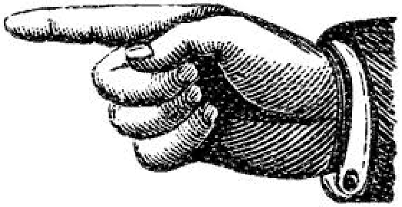
$$|f_{m+n}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \text{ para toda } x.$$

- **Ejemplos de usos:**
  - En el largo plazo, ¿hay **equilibrios económicos**?
  - ¿Es posible **aproximar funciones en** $\mathbb{R}$ con **funciones en** $\mathbb{N}$?

TEMARIO

PARTE 1

- **SUCESIONES**
- **LÍMITE**
- **CONTINUIDAD**
- **DIFERENCIAS**



PARTE 2

- **DIFERENCIAS (Continuación)**
- **DERIVACIÓN**
- **DERIVACIÓN PARCIAL**
- **SERIES**

PARTE 3

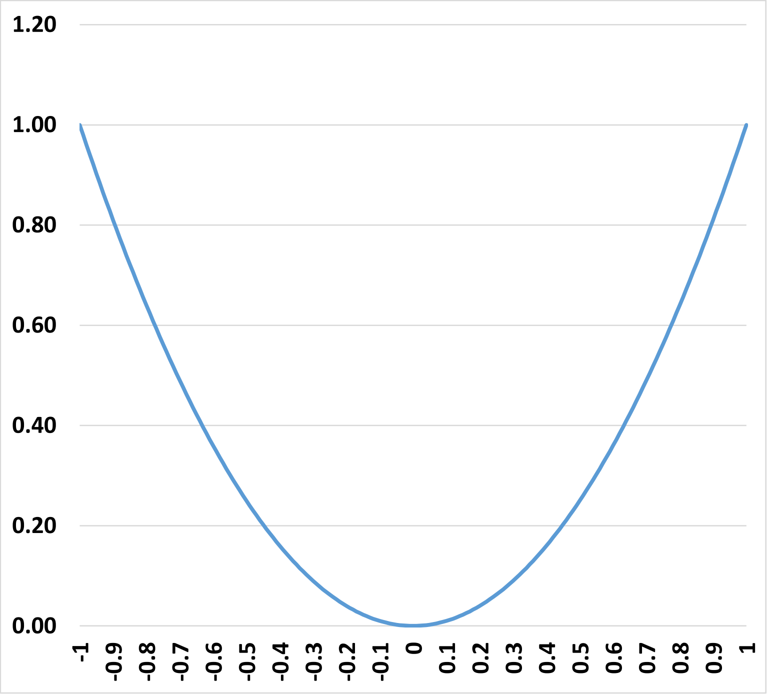
- **SERIES (Continuación)**
- **SERIES DE TAYLOR**
- **INTEGRACIÓN**
- **OPTIMIZACIÓN**

CONTINUIDAD

Continuidad de funciones

- Caligrafía: **molde** o *manuscrita*

- Una función $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in \mathbb{D}$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.



- **Ejemplo**: La función

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \text{signo}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

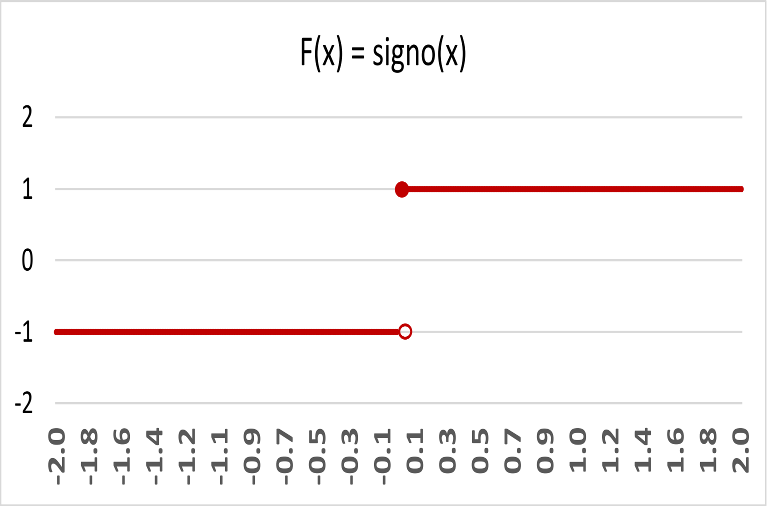
a) Es continua para todo $x_0 < 0$.

b) Es continua para todo $x_0 > 0$.

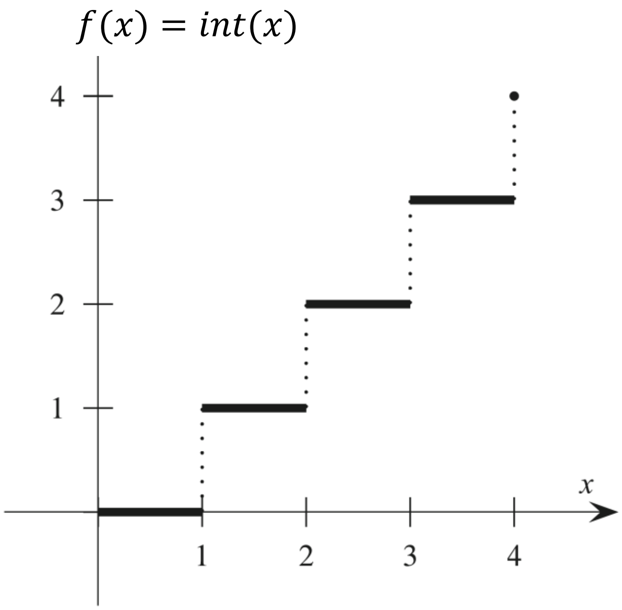
c) Es discontinua en $x_0 = 0$, ya que:

$$\lim_{x \to 0,\, x<0} F(x) = -1 \neq 1 = F(0)$$

$$\lim_{x \to 0,\, x>0} F(x) = \quad 1 = F(0)$$



CONTINUIDAD



Criterio de continuidad

- Una función $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es continua en el punto x_0 si para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ dado que $|x - x_0| < \delta$.

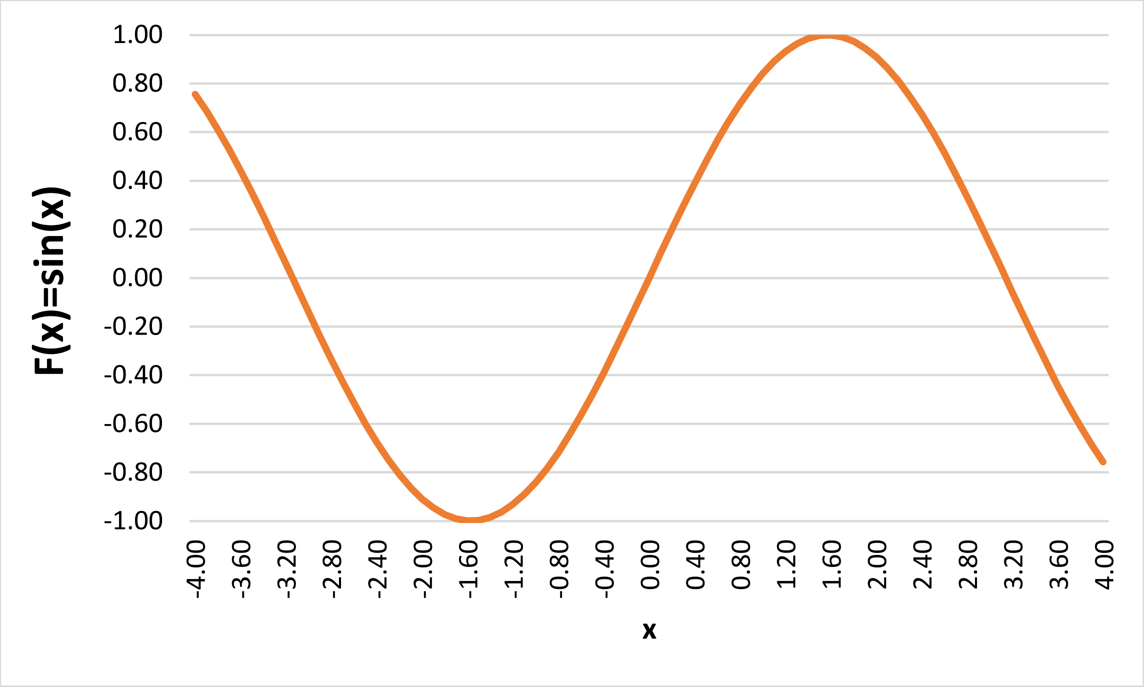
- Si una función $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ es continua para todo $x \in \mathbb{D}$, entonces se dice que f es continua en su dominio $\mathbb{D}$.

- **EJERCICIO EN CLASE (5 MINUTOS):** Sean $f(x) = x$ y $x_0 = 1$...

- **SI** $\varepsilon = 0.1$ **DAR UNA** $\delta = ? > 0$ **TAL QUE** $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ **CUANDO** $|x - x_0| < \delta$.
  (Enviar respuesta (delta=¿?) al grupo MIDE_DIP_MATS de Telegram. [MIDE-C-P1]

CONTINUIDAD

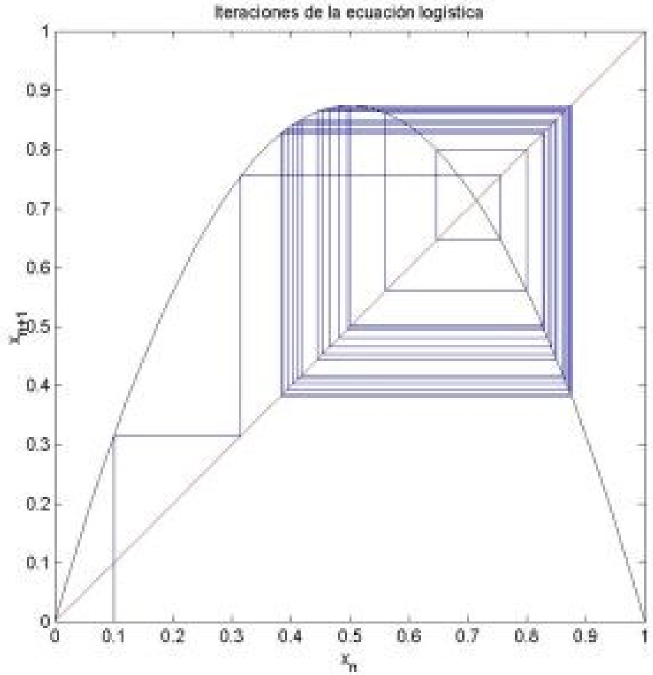
Ejemplos



- Polinomios: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ con $a_0, a_1, \dots, a_n$ constantes reales, $a_n \neq 0$.
- Seno: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$.
- Coseno: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$.
- Exponencial: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \exp(x)$.
- Potencias: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$ (asumiendo $0^0 = 1$).
- Logaritmo: $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log(x)$.

CONTINUIDAD

Iteración de funciones



http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/cnumerico/recursos/logistica.htm

- La iteración de una función real $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, está dada por la sucesión de funciones:

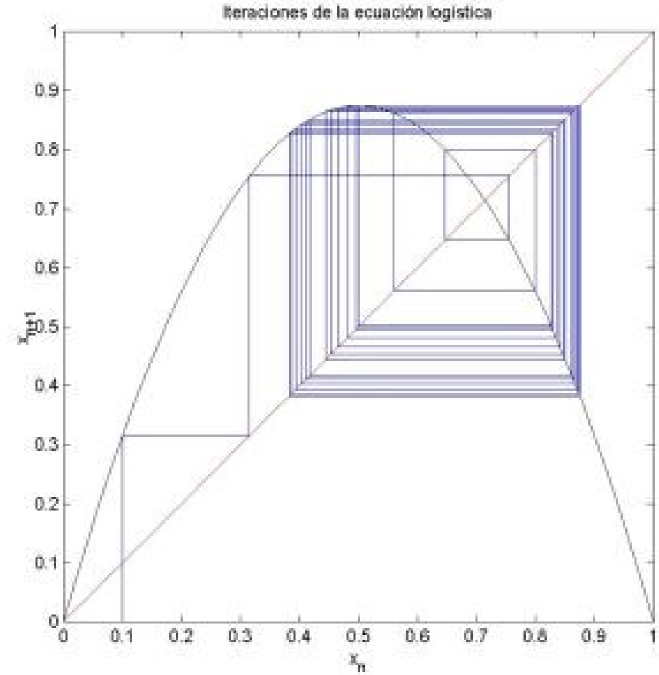
  $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y con $f^1(x) = f(x)$.

- Ejemplo (Logística): $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\, x\, (1 - x)$ con λ constante real. (POLINOMIO)

  – $\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ SI converge para valores de $0 < \lambda < 3$. (CONVERGENCIA)

  – $\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ NO converge y NO diverge para valores de $3 < \lambda < 4$. (CAOS)

CONTINUIDAD



http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/cnumerico/recursos/logistica.htm

Comentario al margen:
Impredecibilidad en instrumentos financieros

1. **Caos**:
   a) Sensibilidad a condiciones iniciales,
   b) Sucesión acotada y
   c) No convergencia en el límite.

2. **Periodicidad**: Que la sucesión vuelva a puntos anteriores: Periodo k si para alguna $n > 0$ se presenta que $a_{n+k} = a_n$.

3. **Resultados de 1975:** Periodo 3 implica Caos [Li, Yorke].

4. **Resultados empíricos** muestran desde entonces que instrumentos financieros tienen muchos tipos de periodicidad (>3) y por ende son impredecibles bajo ciertas condiciones:

   https://www.forbes.com/sites/tomkonrad/2011/08/30/chaos-theory-financial-markets-and-global-weirding

   https://www.quantamagazine.org/machine-learnings-amazing-ability-to-predict-chaos-20180418/

Propiedades de funciones continuas

Sean $f\colon \mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathrm{g}\colon \mathbb{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en sus respectivos dominios $\mathbb{D}_f$ y $\mathbb{D}_g$. Sea el conjunto $\mathbb{D}_h = \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$, entonces:

- $h(x) = f(x) + g(x)$ es continua en el dominio $\mathbb{D}_h$.
- $h(x) = f(x) - g(x)$ es continua en el dominio $\mathbb{D}_h$.
- $h(x) = f(x) \times g(x)$ es continua en el dominio $\mathbb{D}_h$.
- $h(x) = {}^{f(x)}/_{g(x)}$ es continua en el dominio $\mathbb{D}_h$ cuando $g(x) \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{D}_h$.

- Sea $f\colon [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces f presenta sus valores máximo f_{max} y mínimo f_{min} en dicho intervalo:

$$f_{max} = \max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, \ \ f_{min} = \min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

CONTINUIDAD

Comentarios

- Las crisis financieras son normalmente ligadas a **brincos**.
- ¿Modelos **Discretos** ($\{A_n\}$) o **Continuos con Brincos** ($f(t)$) ?

TEMARIO

PARTE 1

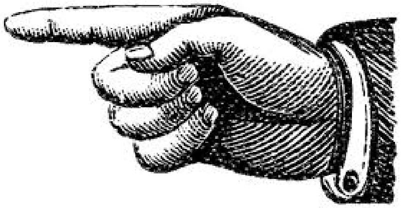
- SUCESIONES
- LÍMITE
- CONTINUIDAD
- DIFERENCIAS

PARTE 2

- DIFERENCIAS (Continuación)
- DERIVACIÓN
- DERIVACIÓN PARCIAL
- SERIES

PARTE 3

- SERIES (Continuación)
- SERIES DE TAYLOR
- INTEGRACIÓN
- OPTIMIZACIÓN



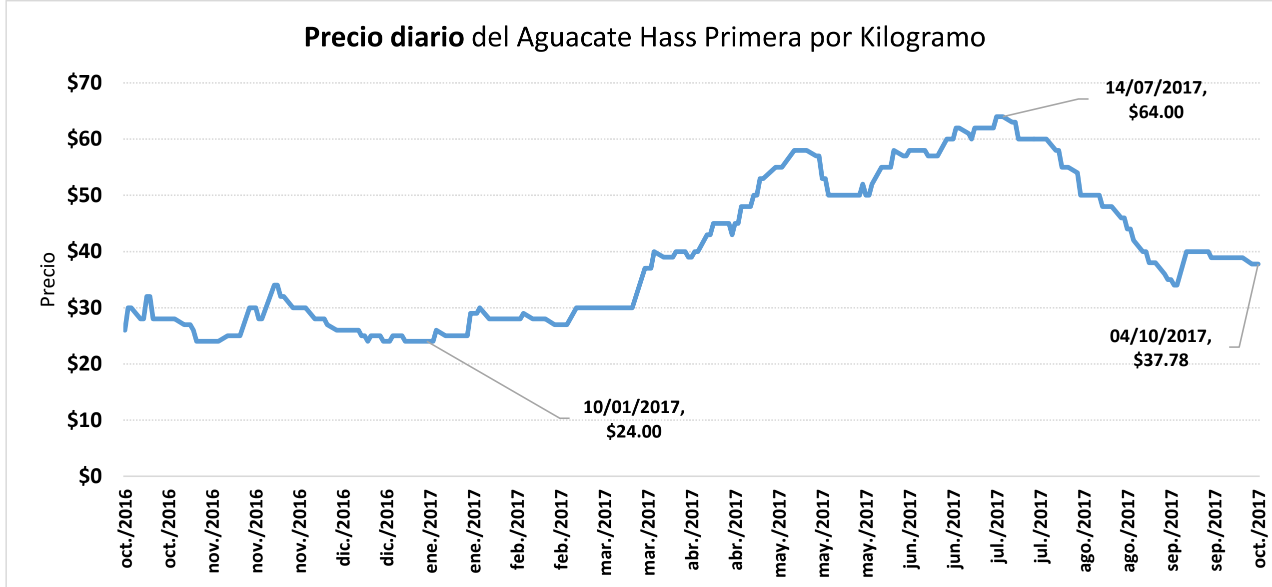
DIFERENCIAS

Motivación

- Una **diferencia** es la generalización de la resta…
$$Diferencia\ de\ Precios = 70 - 60 = 10$$
- El **rendimiento de un instrumento** S_t es la diferencia del valor de éste en el tiempo:
$$Rendimiento = S_t - S_{t-1}$$
- A la diferencia también se le conoce como **incremento** de la función y se denota como:
$$\Delta S_{t-1} = S_t - S_{t-1}$$

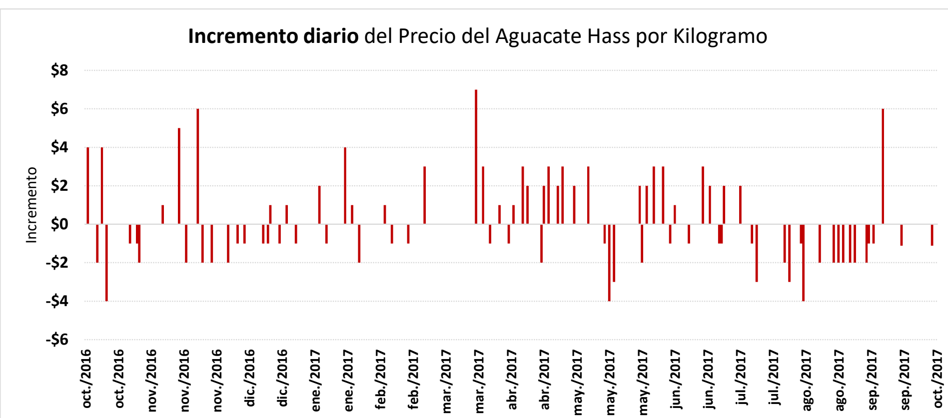
DIFERENCIAS

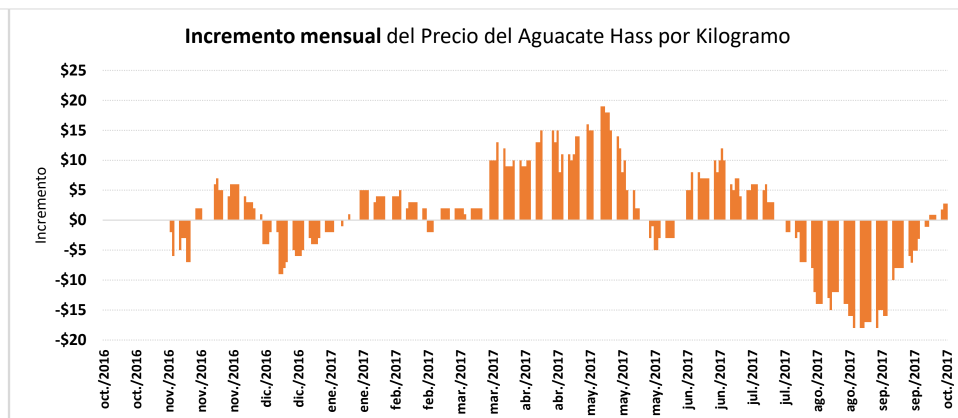
Incremento



Fuente: SNIIM, Secretaría de Economía. Precios en la Central de Abastos de la CDMX.

- Sea $f:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ una función real. El **incremento de una función** f en el punto $x_0\in\mathbb{D}$ de tamaño h se define como:
$$\Delta f(x_0,h)=f(x_0+h)-f(x_0)$$





Continuará...