高等数学笔记

北郊 HH
bjhh2005@outlook.com

更新：November 22, 2025

目录

1 极限的计算

问题 1.1 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

解答:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\sqrt[m]{1+\alpha x}\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{1+\beta x}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}\\ &= \frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}\end{aligned}$$

知识点：

- 添项减项法 / 分项求极限
- 幂次根号等价无穷小: $\sqrt[k]{1+u}-1\sim u/k$

问题 1.2 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos x\ldots\cos x}{x^2}$$

解答:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+(\cos x-\cos x\cos x\ldots\cos x)}{x^2}\\
&= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x\ldots\cos x}{x^2}\\
&= \cdots \quad (\text{反复使用上面的拆项方法})\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot 3^2+\cdots+\frac{1}{2}\cdot n^2\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}
\end{aligned}$$

知识点:
- 连锁拆项法 / 反复添项减项
- $\lim\frac{1-\cos u}{u^2}=\frac{1}{2}$
- $\sum k^2$ 平方和公式

注 前面两个都是添项减项法的运用。其实还有另一种做法。

问题 1.3 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

解答:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}}\cdot(1+\beta x)^{\frac{1}{n}}\right]}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{m}\ln(1+\alpha x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}\ln(1+\beta x)}{x}\\
&= \frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}
\end{aligned}$$

知识点:
- 对数法: $u-1\sim\ln u$ (当 $u\to 1$ 时)
- 乘积极限化为和式极限 (利用 $\ln(AB)=\ln A+\ln B$)

- $\ln(1+u)$ 等价无穷小 ($\sim u$)

问题 1.4 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos x\ldots\cos x}{x^2}$$

解答:

$$\begin{aligned}
原式&=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cos 2x\cdots\cos nx-1}{x^2}\\
&=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x\cdots\cos nx}{x^2}\\
&=-\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos kx}{x^2}\\
&=-\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\cos kx-1}{x^2}\\
&=-\sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2}k^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}
\end{aligned}$$

知识点:

- 对数法 (乘积型极限简化)
- $\ln(\cos u)$ 等价无穷小 ($\sim -u^2/2$)
- $\sum k^2$ 平方和公式

注 先反用 $\ln x\sim x-1(x\to 1)$，再正用 $\ln x\sim x-1(x\to 1)$，尤其适用于含有"$A_1A_2\ldots A_n-1$" 结构的极限。

问题 1.5 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

解答:

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}\cdots(\cos nx)^{\frac{1}{n}}}{x^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\ln\left(\cos x(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}\cdots(\cos nx)^{\frac{1}{n}}\right)}{x^2} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ln(\cos kx)}{x^2} \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{k}\ln(\cos kx)}{x^2} \\
&= -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{(kx)^2}{2}}{x^2} \quad \text{（利用等价无穷小 }\ln(\cos u)\sim -\frac{u^2}{2}\text{）} \\
&= \frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}
$$

知识点：
- 对数法 (根式/乘积混合极限)
- $\ln(\cos u)$ 等价无穷小 ($\sim -u^2/2$)
- $\sum k$ 等差数列求和公式

问题 1.6 计算

$$
\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{x^4}
$$

解答:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{x^4} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[0+\frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

知识点：
- 等价无穷小替换 (乘积型)
- Taylor/高阶无穷小: $x-\ln(1+u)\sim u^2/2$
- 拆分代换 (利用 $\tan x \sim x$ 简化内部结构)

注 $x-\ln(1+x)\sim\frac{x^2}{2}\quad(x\to 0)$

问题 1.7 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\tan x)^x-3^x}{3\sin^2 x+x^3\cdot\cos\frac{1}{x}}$$

解答:

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\tan x)^x-3^x}{3\sin^2 x}\quad(\text{无穷小的吸收律})\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left[(1+\frac{2}{3}\tan x)^x-1\right]}{3x^2}\\
&=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+\frac{2}{3}\tan x)}{x^2}\\
&=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}\tan x}{x}\\
&=\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

知识点:

- 无穷小的吸收律 (分母简化)
- 指数差型极限 A^x-B^x 提取公因式
- $(1+u)^v-1\sim v\ln(1+u)$

问题 1.8 设 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 的邻域 U 内有定义, 且对 $\forall x\in U$, 均有 $f(x)\neq g(x)$, 且 $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=a>0$, 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}$$

解答:

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}[g(x)]^{g(x)}\cdot\frac{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}\\
&=a^a\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}\\
&=a^{a+1}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}
\end{aligned}$$

$$= a^a$$

知识点:

- 抽象函数极限
- $A^B - C^B$ 指数差型极限 (提取公因式)
- $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ 时的关键代换: $\ln\left(\frac{f}{g}\right) = \ln\left(1+\frac{f-g}{g}\right) \sim \frac{f-g}{g}$

问题 1.9 计算

$$\lim_{x\to 0^+} (e^x - 1 - x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

知识点:

- 幂指函数极限 (0^0 型)
- $\ln L$ 法 (转化为指数形式 $e^{\lim \text{指数}\cdot\ln \text{底数}}$)
- Taylor 展开 ($e^x - 1 - x \sim x^2/2$)
- $\frac{\ln(x^2/2)}{\ln x}$ 等价代换和洛必达