

漫談布朗運動

文/龐寧寧

一、前言

西元 1771 年，由一群蘇格蘭學者合力編寫的大英百科全書(Encyclopedia Britannica)第一版問世。其中關於原子(atom)有如下的解釋：哲學名詞，假設為構成物質世界的最小單位，本質上是不可分割的。然而，在科學界中，直到 19 世紀中後期，才逐漸地被化學家們接受此一觀念，而當時在化學中如何定義及區分原子與分子的異同，仍然是十分模糊的。逐漸地，在物理學界中，也有一些知名的物理學家開始接受原子的觀念。其中最著名的就是波茲曼(L. Boltzmann 圖一)，在他的精心著作“氣體論”(Gas Theory)中，他試圖藉由原子的觀念，從微觀的角度出發，解釋所有巨觀觀察到的熱力學物理量的關係式。但是，在當時經驗主義與實證主義風行的年代，他的看法受到許多物理學家的攻擊，其中最為有名的代表性人物如奧斯特華德(W. Ostwald 圖二)及馬赫(E. Mach 圖三)。愛因斯坦(A. Einstein 圖四)在學生時期閱讀了波茲曼所著的氣體論，大受啟發，他深深地接受了原子與分子的概念，也對於能由微觀角度出發，由力學的觀念，推導出眾多原子、分子集體行為所表現出的巨觀熱力學的性質，感到極大的興趣。在西元 1905 年，愛因斯坦是第一位科學家，成功地提出一套數學物理的理論，解釋在顯微鏡下觀察到的微小懸浮粒子所做的布朗運動。

愛因斯坦並且對這方面未來的實驗，提出一些具體的建議。在西元 1908 年，法國實驗物理學家培林(J. Perrin 圖五)成功地以實驗驗證了愛因斯坦有關布朗運動的理論預測。在西元 1922 年及 1928 年，愛因斯坦及培林先後以他們在理論物理及原子實驗方面的貢獻獲得了諾貝爾獎。愛因斯坦有關布朗運動的理論

解釋，在物理發展的漫漫歷史長河中，是有其特殊的承先啟後的貢獻。因為布朗運動的實驗現象，無法用任何連續體的物理解釋，唯有從原子論的觀點出發，才能夠得到成功的解釋。自此以後，原來懷疑原子論的物理學家們，都高掛免戰牌，棄械投降。此外，愛因斯坦也是第一位引進數學的隨機過程理論，成功的解釋了物理現象，也奠定了非平衡統計熱力學的發展基礎，更啟發了許多物理學家投入變動(fluctuation)現象的研究。



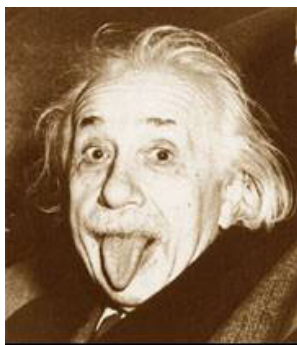
圖一：物理學家波茲曼 (Boltzmann) (引用圖片來源：<http://www.desy.de/f/hera/germ/chapl.html>)



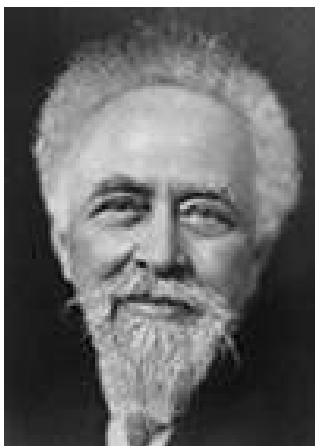
圖二：物理學家奧斯特華德 (Ostwald) (引用圖片來源：<http://www.chemsoc.org/networks/enc/Images/>)



圖三：物理學家馬赫（Mach）（引用圖片來源：<http://www.bun.kyoto-u.ac.jp/~suchii/mach.jpg>）



圖四：物理學家愛因斯坦（Einstein）（引用圖片來源：<http://www.dlr.de/Schoollab/Oberpfaffenhofen/Experimente/GPS/internal&action=printview.action>）



圖五：物理學家培林（Perrin）（引用圖片來源：<http://nobelprize.org/physics/laureates/1926/index.html>）

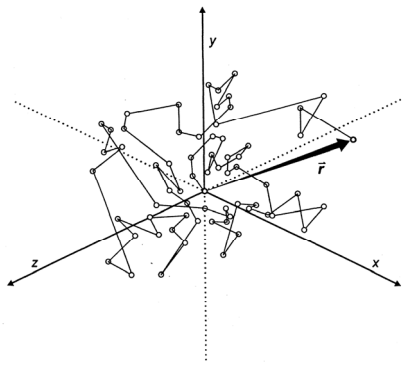
二、布朗運動的研究起源

西元 1828 年，英國植物學家布朗(R. Brown 圖六)在顯微鏡下觀察植物切片，發現懸浮在水中的花粉粒子，會做不規則、凌亂的鋸齒狀運動(圖七)。雖然當

時有許多的生物學家猜測，這是生物的主體性運動。但是植物學家布朗秉持著科學實證的精神，用顯微鏡觀察各式各樣懸浮在流體中有生命或無生命的微小粒子，發現它們均會做如此不規則的運動，顯示此種布朗運動(Brownian Motion)的普遍性(ubiquity)。在 19 世紀中期，許多科學家嘗試用連續體的概念(包括毛細現象、對流現象、蒸發現象、電力作用…等等)，均無法合理解釋布朗運動的現象。直到西元 1870 年代，有些物理學家如阮隨(W. Ramsay)及固意(L. Gouy)猜測可能可以用熱的動力學來解釋。但是當時對熱力學了解還不夠深刻，故在數學理論上不足使人信服，如物理學家凡納吉里(K. Van Nageli)，就是有名的質疑者。除此之外，當時實驗上對布朗運動的定量性的測量，也是結果分歧、莫衷一是。直到 1905 年，愛因斯坦超越了前人對熱力學的理解，成功的提出了布朗運動的理論解釋，也開拓了人們對統計熱力學的視野。歸納其成功的主要因素，在於他結合了微觀的理想氣體粒子熱運動的概念，與巨觀的流體力學中所描述的阻滯力的影響。此外，他是第一個科學家指出在布朗運動定量性的實驗觀察中，應該測量的是微小懸浮粒子做布朗運動時，所對應的位移大小平方的平均值與時間的關係，而不是測量瞬間速度。因為以當時的實驗技術，所能達到的時間上或空間上的解析度，都是很粗糙的，根本不足以確定如此不規則、凌亂的鋸齒狀運動的瞬間速度。



圖六：植物學家布朗（Brown）（引用圖片來源：http://www.abc.net.au/navigators/img/nature/brown_sml.jpg）



圖七：布朗運動（引用圖片來源：Denny and Gaines, Chance in Biology (2000)）

三、愛因斯坦的理論分析

以下我們先簡單介紹愛因斯坦的思路脈絡。首先他直觀的認為懸浮在液體中的微小粒子的擴散過程，是由兩個主要機制〔包括了粒子在流體中的滲透壓 (osmotic pressure) 的分布，及粒子相對遷移律 (mobility)〕決定。他並由此推得擴散係數與溫度及黏滯係數的關係式。接著他引進了數學中的隨機過程理論，來描述懸浮粒子所做的不規則地鋸齒狀的運動，並推得其平均量與擴散係數的關係。

接下來，我們將詳細介紹愛因斯坦的推導過程。假設一圓柱體的容器，其中心軸的方向設為 \hat{x} 方向，如果懸浮粒子在液體中沿著 \hat{x} 軸的分布是不均勻的，以 ρ 代表懸浮粒子的數目密度，那麼 ρ 就應該是 x 的函數 $\rho(x)$ 。再由理想氣體方程式 $P = \rho k_B T$ （其中 P 代表滲透壓， k_B 為波茲曼常數， T 代表溫度），我們亦可得滲透壓的分布，也是一個 x 的函數 $P(x)$ 。假設一想像的半透膜，在 x_0 的位置分隔圓柱容器，那麼半透膜單位截面積順著 x 方向所受的滲透壓合力則為 $-\left.\frac{dP}{dx}\right|_{x_0}$ （負號代表方向，見圖八）。由理想氣體方程式，可得 $-\left.\frac{dP}{dx}\right|_{x_0} = -k_B T \left(\left.\frac{d\rho}{dx}\right|_{x_0}\right)$ ，所以，一個位於 x_0 位置的單一懸浮粒子所受的平均滲透壓合力為 $-\left.\frac{k_B T}{\rho} \frac{d\rho}{dx}\right|_{x_0}$ ，此種力量就是驅使懸浮粒子從濃度高的地方，擴散到濃度低的地方的力量來源。此外，懸浮

粒子在液體中所做的運動，又會受到液體的阻滯力的阻擋。假設懸浮粒子基本上可視為球狀體，而其大小（半徑約為 10^{-6}m ）又遠大於液體分子（半徑約為 10^{-10}m ），並且懸浮粒子的運動速度不是很大，以致液體仍可保留層流 (laminar flow) 的結構（見圖九）。在這樣的條件下，由一般的流體力學的斯多克定律 (Stokes' Law) 告訴我們，液體施於單一懸浮粒子的阻滯力是 $(6\pi\eta a)v_x$ ，其中 η 代表液體的黏滯係數， a 代表懸浮粒子的半徑， v_x 代表懸浮粒子順著 x 方向相對於液體的運動速度，由此兩種力量的動態平衡

$$-\frac{k_B T}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 6\pi\eta a v_x$$

我們可得知懸浮粒子的數目密度 $\rho(x)$ 隨著時間的演變情況。因為 ρv_x 代表單位時間裡通過 x 位置的單位截面積的懸浮粒子的數目（我們稱其為粒子流密度），由連續方程式 (the continuity equation) 告訴我們粒子數目密度隨著時間的變化率

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)$$

$$\left(-\frac{d}{dx}(\rho v_x)\right)$$

等於粒子流密度在 x 位置流入流出的差值率。因此 $\frac{d\rho}{dt} = -\frac{d}{dx}(\rho v_x) = \frac{k_B T}{6\pi\eta a} \left(\frac{d^2\rho}{dx^2}\right)$ ，這就是有名的擴散方程式。其中對應的擴散係數

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a}$$

（Einstein's relation）。此關係式是非常合乎物理直覺的，比如說：溫度 (T) 越高，擴散速度越快，所以擴散係數越大；相對的，液體的黏滯係數 (η) 越大，則擴散越慢，所以擴散係數越小。簡而言之，懸浮粒子在特徵時間 τ 的範圍，因為受液體的阻滯力的作用，幾乎完全喪失了原來具有的初速度。但是，由於熱擾動，造成懸浮粒子之間的碰撞，或與環境液體分子的碰撞，給予懸浮粒子新的動量來源。既然此動量來源，是來自於熱擾動，所以動量的方向與大小可視為是不規則的，而且與原先喪失的初速度無關。在室溫下，對於一個在水中懸浮的直徑約為 10^{-6}m 的粒子，對應的特徵時間約為 10^{-7} 秒，的確是遠小於實驗觀察時間。基於以上的理解，愛因斯坦引進了數學中的機率及隨機過程的概念，從這一角度出發，也推導

出擴散方程式。以下我們簡單的介紹愛因斯坦的分析過程，首先，爲了簡潔起見，我們只考慮一維空間擴散的情況，讀者可依照以下的分析脈絡推廣到三維空間的情況。

我們用 $P(\Delta)$ 代表一個懸浮粒子，在特徵時間 τ 的範圍，在 x 方向位移 Δ 所對應的機率密度。顯然的， $P(\Delta)$ 必須滿足歸一化的條件， $\int_{-\infty}^{\infty} P(\Delta) d\Delta = 1$ ，

以及正負對稱的性質 $P(\Delta) = P(-\Delta)$ 。此外，由於特徵時間 τ ($\approx 10^{-7}$ sec) 非常地短，所以機率分佈 $P(\Delta)$ 應該非常集中於 Δ 的絕對值很小的範圍。此外，我們以 $f(x, t)$ 代表懸浮粒子在位置 x 、時間 t 的時候，所對應的數目密度。由前述的阻滯力作用與熱擾動的動態平衡，造成的獨立運動的概念，我們可推得以下的關係式：

$f(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \Delta, t) P(\Delta) d\Delta$ 。因爲特徵時間 τ 很小，所以 $f(x, t + \tau) \approx f(x, t) + \tau \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$ ，以及

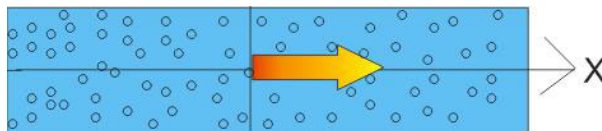
$f(x - \Delta, t) \approx f(x, t) - \Delta \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}$ 。因此，

$f + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \tau \approx f \int_{-\infty}^{\infty} P(\Delta) d\Delta - \frac{\partial f}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta P(\Delta) d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2} P(\Delta) d\Delta$ 。利用歸一化條件，與正負對稱的性質，上式可簡化爲以下的形式 $\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ，其中

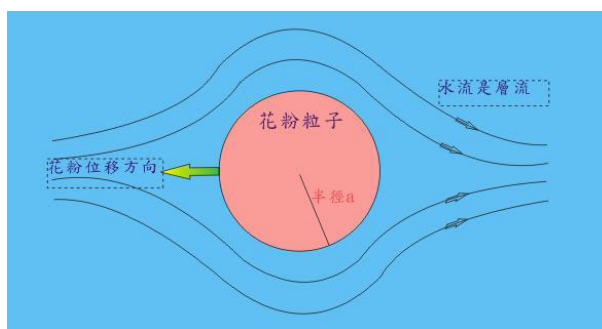
$D = \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 P(\Delta) d\Delta$ ，這就是前面已經提過的擴散方程式。如果以 N 代表懸浮粒子的總數目，並且假設一開始懸浮粒子都集中在 $x=0$ 的位置，則擴散方程式對應的解，爲 $f(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ 。由此可得，懸浮

粒子位移平方的平均值 $\langle x^2 \rangle = 2Dt$ 。推廣到三維空間，則對應的位移平方的平均值 $\langle r^2 \rangle = 6Dt$ 。以實際的實驗數據帶入，溫度 $T=17^\circ\text{C}$ ，水的黏滯係數 $\eta = 1.35 \cdot 10^{-2}$ ，懸浮粒子半徑 $a=10^{-6}$ m，觀察時間 $t=1$ sec，那麼對應的位移的方均根值 $\sqrt{\langle x^2 \rangle} \approx 8 \cdot 10^{-7}$ m。這是

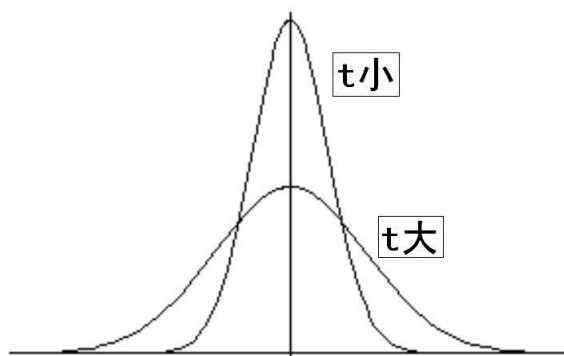
在一般的光學顯微鏡下，可以觀測到的尺度。以上我們簡單地介紹了愛因斯坦對布朗運動的理論分析，在 1908 年法國實驗學家培林也以實驗充分地支持了愛因斯坦的預測。此後，對布朗運動的理解，大致上可說是蓋棺論定了。



圖八：懸浮粒子所受滲透壓的淨力



圖九：懸浮粒子運動時所受液體施予的阻滯力



圖十：在一維空間中，布朗運動對應的機率分佈

四、朗級文 (Langevin) 的貢獻

自從 1905 年愛因斯坦成功的提出了對布朗運動的理論解釋，許多科學家大受啟發，紛紛嘗試對布朗運動提出更精細的解釋，其中以物理學家朗級文的貢獻最爲重要。在 1908 年，他從微觀的牛頓第二運動定律出發，藉著詳細而且嚴謹的數學推導，得到了布朗運動在短時間與長時間的動態表現，並且給予愛因

斯坦所提出的直觀性的假設，非常充分的理論基礎。接著，我們將簡單的介紹朗級文的分析過程。首先，他寫下了一個懸浮粒子所遵循的牛頓第二運動定律：

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{v}}{B} + \vec{F}$ ，其中 m 代表懸浮粒子的質量， B 代表懸浮粒子在液體中的遷移率(也就是我們在前一節中提到的 $\frac{1}{6\pi\eta a}$)，所以 $-\frac{\vec{v}}{B}$ 就代表懸浮粒子運動時所

受的液體施予的阻滯力。 \vec{F} 稱之為隨機力(random force)，也就是粒子之間隨機碰撞(random bombardment)所施予的力量，因此 \vec{F} 的平均值為零，而且在時間上是前後不相關的。我們定義隨機力大小平方的平均值為 A 及特徵時間 $\tau = mB$ 。由簡單的數學計算可推得以下的結果。

(i) 懸浮粒子速度的平均值 $\langle \vec{v}(t) \rangle = \vec{v}(t=0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ ，在時間 t 遠大於特徵時間 τ 的時候，速度的平均值趨近於零。這驗證了愛因斯坦所說的，由於液體的阻滯力的作用，懸浮粒子經過時間 τ 之後，其原來的速度幾乎被耗盡，一切從頭開始。

(ii) 懸浮粒子速度大小的平方的平均值

$$\langle v^2(t) \rangle = v^2(t=0)e^{-\frac{2t}{\tau}} + \frac{A\tau}{2m^2}(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}})$$

。當時間 t 遠大於特徵時間 τ 的時候， $\langle v^2(t) \rangle$ 就趨近於一個常數 $\frac{A\tau}{2m^2}$ 。再由理想氣體的熱力學告訴我們，在

熱平衡時，三維空間中的理想氣體分子的速度大小平方的平均值 $\langle v^2(t) \rangle = \frac{3k_B T}{m}$ ，其中 k_B 代表波

茲曼常數， T 代表溫度， m 代表理想氣體分子的質量。因此我們可得以下的關係式 $AB = 6k_B T$ 。既然 A 代表隨機力大小平方的平均值，而 B 與阻滯力有關，因此 $AB = 6k_B T$ 被稱為變動與耗散定律(Fluctuation-Dissipation Theorem)，這個部分驗證了愛因斯坦動態平衡的概念。

(iii) 在時間上懸浮粒子前後的速度之間的相關性

$$\langle \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t') \rangle = v^2(t=0) \cdot e^{-\frac{(t+t')}{\tau}} + \frac{A\tau}{2m^2} (e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}} - e^{-\frac{(t+t')}{\tau}})$$

。顯然的，當時間 t 與 t' 均遠大於特徵時間 τ ，而且 t 與 t' 的時間差值 $|t-t'|$ 也遠大於 τ 時，我們可得 $\langle \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t') \rangle$ 趨近於零，這就驗證了愛因斯坦所提的前後運動視為獨立運動的概念。

(iv) 懸浮粒子位移大小平方的平均值

$$\langle |\vec{r}(t) - \langle \vec{r}(t) \rangle|^2 \rangle = \frac{A\tau^2}{m^2} [t + \tau(2e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{2t}{\tau}} - \frac{3}{2})]$$

。顯然的，經過長時間之後， $\langle |\vec{r}(t) - \langle \vec{r}(t) \rangle|^2 \rangle$ 就趨近 $(\frac{A\tau^2}{m^2})t$ 。在前一節曾

經提到，在三維空間中，上述的物理量是趨近於 $6Dt$ 。因此，我們得到擴散係數 $D = \frac{A\tau^2}{6m^2}$ ，而因為

$\tau = mB$ ，所以 $D = \frac{AB^2}{6}$ 。再運用 $AB = 6k_B T$ ，因此

$$D = B(k_B T) = \frac{k_B T}{6\pi\eta a}$$

。所以，這個部分再次驗證了愛因斯坦所得的關係式(Einstein's relation)。總而言之，朗級文使用較為嚴謹的數學概念，一一驗證了愛因斯坦對布朗運動物理直觀性的假設，也使得這整套理論架構更為完整。

以上我們簡單的介紹了在 20 世紀初期對於布朗運動的主要理解與分析的脈絡。在愛因斯坦與朗級文之後，有許多科學家，把布朗運動的分析概念延伸到許多的學門，不論是物理、化學、生物、經濟、醫學，以及社會學科的應用。並配合實際處理的情況，對分析的方式加以適度的修正調整，其例繁多不勝枚舉。以下我們簡單的介紹一些應用的例子。

五、布朗運動的延伸及應用

(A) 徑向擴散與指數成長

在布朗運動概念的應用上，其中一個最為著名的應用，就是描述生物族群的擴散現象。這裡我們將舉一個有趣的例子：20 世紀初期麝香鼠在中歐洲的蔓延現象。麝香鼠是一種水生的大老鼠（身長大約 60 公分，體重約 2 公斤重），經常在溫帶地區成長。麝

香鼠的繁殖是非常快的，母鼠每年生三胎，一胎就產下 4 到 8 隻小鼠。麝香鼠最大的天敵就是貂。在 1905 年麝香鼠自布拉格附近的河域開始增生蔓延，到了 1927 年，麝香鼠遍佈幾乎整個中歐洲，北至波蘭，南至奧國，西至德國。以下我們將用數學模型來描述其繁衍擴散的情況。

在生物群聚的徑向擴散現象中，由於生物的繁衍，故需考慮數目密度在固定的位置上隨時間增生的效應，因此擴散方程式需做一些修正。

$$\frac{\partial N(r,t)}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial N}{\partial r} \right) + aN, \text{ 其中, } N \text{ 代表生物}$$

群聚的數目密度；右式第一項代表徑向擴散的效應，而右式第二項代表指數型成長的效應。如果一開始生物群聚的總數為 M ，並且集中在座標原點，則經過

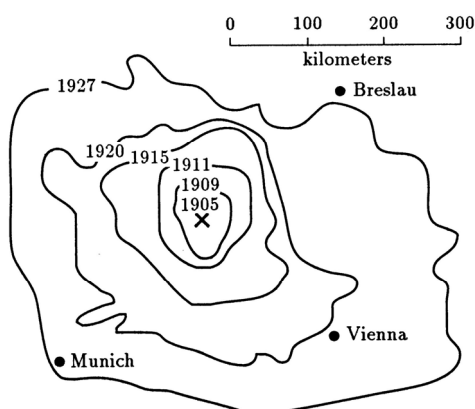
$$\text{計算可得數目密度 } N(r,t) = \frac{M}{4\pi Dt} \exp\left(at - \frac{r^2}{4Dt}\right)。$$

此外，利用以下的數學關係式，

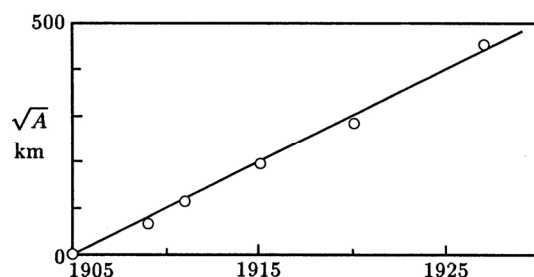
$$\int_0^\infty N(r,t) 2\pi r dr = M \exp\left(at - \frac{R^2}{4Dt}\right), \text{ 我們可得,}$$

$$\int_0^R N(r,t) 2\pi r dr = \int_0^\infty N(r,t) 2\pi r dr - \int_R^\infty N(r,t) 2\pi r dr = M \exp(at) (1 - e^{-\frac{R^2}{4Dt}})$$

。因此，如果我們定義 $\tilde{R} = 2\sqrt{aDt}$ ，那麼事實上生物群聚主要都集中在半徑為 \tilde{R} 的範圍內。此種數學模型已經成功的解釋，20 世紀初期，在中歐洲由布拉格開始向外蔓延的麝香鼠的鼠疫。（實際數據可見圖十一、十二）



圖十一：實際的中歐洲鼠疫分佈圖（引用圖片來源：Banks, Growth and Diffusion Phenomena (1994)）



圖十二：把圖十一對應的鼠疫分佈圖中的年代用 t 表示，面積用 A 表示，可看出 $\sqrt{A} \propto t$ 的關係（引用圖片來源：Banks, Growth and Diffusion Phenomena (1994)）

（B）液體中的沈澱現象

對於微小粒子在液體中，於鉛垂方向逐漸沈澱的現象，需要考慮的作用力，除了前一節提到的微小粒子在運動中所受液體施予的阻滯力及粒子之間隨機碰撞力，另外，還包括粒子所受的重力與液體施予粒子的浮力。綜合而言，微小粒子在沈澱過程中遵循的牛頓第二運動定律如下：

$$(\rho V) \frac{dv_y}{dt} = -\frac{v_y}{B} - V(\rho - \rho_0)g + F(t)。$$

其中， y 代表鉛垂方向的座標， v_y 代表粒子在鉛垂方向的運動速度，往上運動速度為正，往下運動速度為負。 ρ 代表粒子的質量密度， ρ_0 代表液體本身的質量密度， V 代表粒子的體積， B 代表粒子在液體中的遷移率（=

$$\frac{1}{6\pi\eta a}$$

）， g 代表重力加速度， F 代表碰撞對應的隨機力（random force）。在粒子的遷移率很小的情況下（ $0 < B \ll 1$ ），粒子的運動會很快的趨近於終端速度（ $= -BV(\rho - \rho_0)g + BF(t)$ ）。假設沈澱中的粒子數目密度為 $n(y,t)$ ，其所對應的擴散方程式應修正如下：

$$\frac{\partial n(y,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(y,t)}{\partial y^2} + BV(\rho - \rho_0)g \frac{\partial n(y,t)}{\partial y}。$$

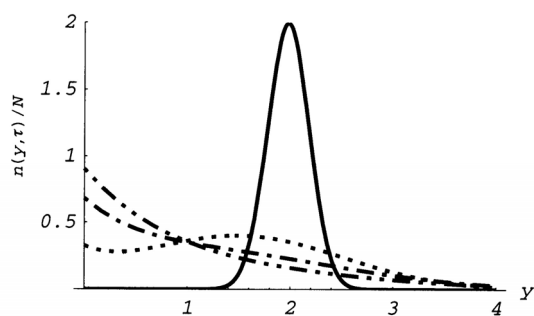
經過長時間後，粒子的分佈會趨向穩定狀態，所對應的穩定狀態下的數目密度會遵循如下的分佈：

$$\tilde{n}(y) = \frac{NV(\rho - \rho_0)g}{k_B T} e^{-\frac{V(\rho - \rho_0)gy}{k_B T}}, \text{ 其中 } N \text{ 代表總粒子數目, } k_B \text{ 代表波茲曼常數, } T \text{ 代表溫度, } V(\rho - \rho_0)gy \text{ 代表粒子在液體中的有效重力位能。事實上, 這就是有名的波茲曼分佈 (Boltzmann distribution)。$$

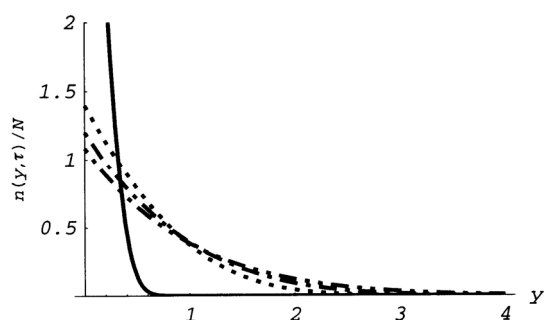
此外，如果總粒子的數目為 N ，而且一開始集中在 y_0 的位置，那麼粒子的分佈隨著時間的動態變化，可以由下述的數學函數描述：

$$n(y,t) = \frac{N}{2\sqrt{\pi Dt}} \left[e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(y+y_0)^2}{4Dt}} \right] \cdot e^{-\frac{C^2 t}{4D}} \cdot e^{\frac{C(y-y_0)}{2D}} + \frac{NC}{D\sqrt{\pi}} e^{-\frac{Cy}{D}} \cdot \int_{\frac{y+y_0-Cy}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta$$

，其中 $C = BV(\rho - \rho_0)g$ 。這個數學函數非常的複雜，因此我們用圖十三、十四定性的描述，微小粒子在沈澱過程中，其數目密度隨著時間分佈的變化。簡而言之，在微小粒子的質量密度只稍大於液體的質量密度的情況下，由於熱擾動造成的粒子間、或與液體分子間的凌亂碰撞，使得微小粒子並不會完全的沈澱於容器的底部。在達到熱平衡時，微小粒子在鉛垂方向的分佈，事實上是遵循波茲曼分佈，也就是正比於 $e^{-\frac{E}{k_B T}}$ ，其中 E 代表有效重力位能。



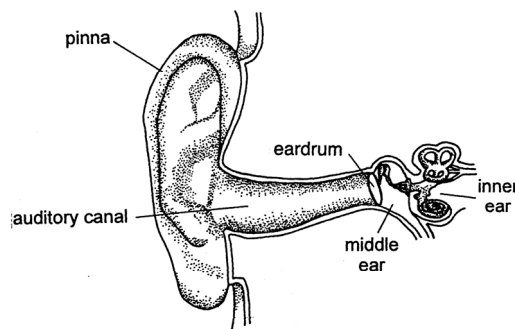
圖十三：一開始粒子由容器的中段高度釋放，最後的分佈趨近於波茲曼分佈（引用圖片來源：Pécseli, Fluctuations in Physical Systems (2000)）



圖十四：一開始粒子從容器底部釋放，最後的分佈趨近於波茲曼分佈（引用圖片來源：Pécseli, Fluctuations in Physical Systems (2000)）

(C) 人耳的聽覺

人耳的耳膜及其相連到內耳的軟骨結構（見圖十五），可被視為一個常見的具有慣性質量的物體與彈簧構成的系統（the spring-mass block system）。同樣的，在溫度大於絕對零度的情況下，由於熱擾動造成空氣分子與耳膜的不規則凌亂的碰撞，就是隨機力（random force）的來源。熱擾動所造成的人耳耳膜振盪的振幅的方均根值（the root-mean-square value）大概是在 10^{-10} m 的數量級。因此，如果外來的聲音音量過於微弱，以致於所造成的耳膜振盪振幅小於熱擾動所造成的影響，顯然的人耳是無法分辨的。這就是人耳可聽到外來聲音的最小音量，以分貝的定義來說，大概是零分貝左右。



圖十五：人耳的結構（引用圖片來源：Denny and Gaines, Chance in Biology (2000)）

(D) 電流計的熱擾動

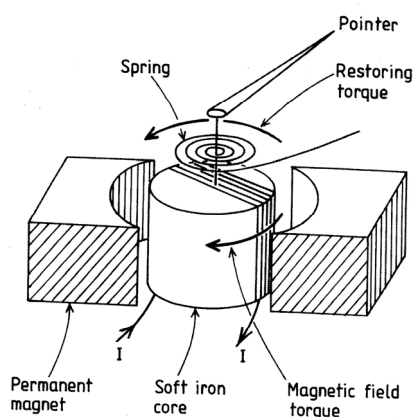
達松牟（D'Arsonval）電流計（galvanometer）是用來測量微小電流的一個裝置。基本裝置是可轉動的線圈和小鏡子，以及支撐用的纖維柱狀物。當電流通過線圈時，在磁場中受力矩作用，造成整個裝置的轉動。當磁場所給的力矩與彈簧所施的恢復力矩達到平衡時，整個系統就達到了穩定狀態。在這個過程中，用光束照射小鏡子，由反射光點在螢幕上位置的改變，經過校準後就可以用來測量電流的大小（見圖十六）。然而，在溫度大於絕對零度的情況下，空氣分子會與懸掛的小鏡子做不規則的、凌亂的碰撞，而造成光點在螢幕上位置的變動（fluctuation）。從能量均分定理（the equipartition theorem）可得小鏡子因空

氣的熱擾動造成的角度變化的方均根值

$\theta_{rms} = \sqrt{\frac{k_B T}{\kappa}}$ ，其中 K_B 是波茲曼常數， T 是溫度， κ 是恢復力矩常數。

接著，我們將估計此電流計可偵測的最小電流的數值。由磁場所施給電流線圈的力矩（ $= NiAB$ ，其中 N 代表線圈圈數， i 代表電流， A 代表截面積， B 代表磁場）要與彈簧的恢復力矩（ $= \kappa \theta$ ）達到平衡，因此我們可得 $\theta = \frac{NiAB}{\kappa}$ 。另外，我們假設小鏡子因熱擾動造成的凌亂偏向的機率分佈遵循高斯分佈。那麼凌亂偏向的角度大於 $4\theta_{rms}$ 的機率是 $1/3000$ 。因此，我們可以合理的以 $4\theta_{rms}$ 作為通電流後必須超越的最小角度底線。所以 $(\frac{NAB}{\kappa})i_{min} = 4\theta_{rms}$ ，其中 i_{min} 代表電流計可測量的最小電流。經過整理之後，得到

$$i_{min} = \frac{4\sqrt{k_B T \kappa}}{NAB}。$$



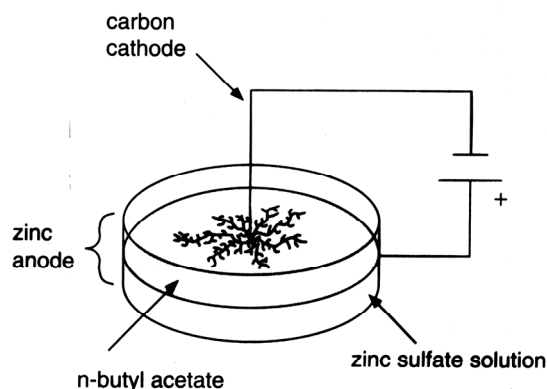
圖十六：達松牟電流計（引用圖片來源：Pécseli, Fluctuations in Physical Systems (2000)）

(E) 樹枝狀的金屬電化學沈積

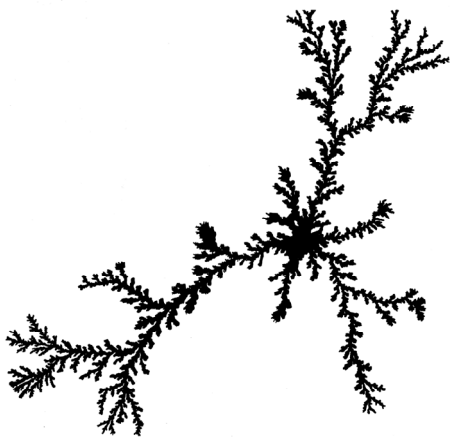
此種電化學沈積物的形狀具有自相似的碎形結構，基本上是由擴散的機制所造成的。以下我們先簡單的描述實驗裝置（見圖十七）。用一個直徑約為 20cm，深度約為 10cm 的培養皿，裝入 2 莫耳的硫酸

鋅溶液，上面填入一層丙酮。因為兩種液體不相溶，故會構成一個界面。用一個直徑約為 0.5mm 的碳圓片做為陰極，置放於培養皿的中心軸與二液體的界面處。用金屬鋅片做為環狀的陽極，貼在培養皿的內壁上。在陰極與陽極之間，通上 5 伏特的直流電壓，那麼鋅離子就會往中心的陰極沈積。大約在 10 分鐘的時間，就會形成一個直徑大約 10cm 的金屬樹枝狀的沈積物（見圖十八）。

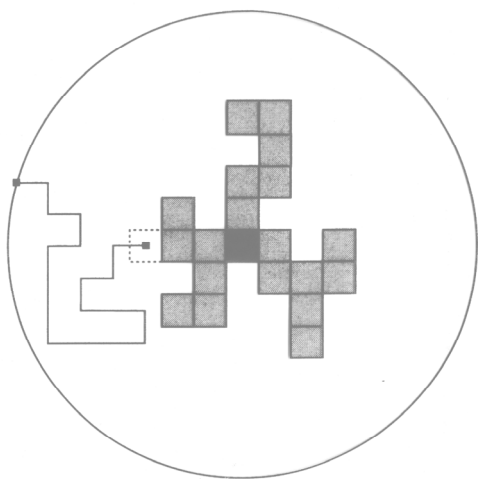
此種電化學的沈積過程，可用基於布朗運動概念所提出的有限擴散堆積（diffusion limited aggregation）模型來解釋。我們簡單的介紹此一模型的主要機制。在一個二維空間的原點，定義為種子粒子（seed particle）所在的位置。接著選擇一個以原點為中心的圓形區域，在此區域的圓周邊界，置入自由粒子（free particle）。此自由粒子將做布朗運動，如果此粒子到達種子粒子的旁邊，則此粒子會固定在這個位置，變成了另一個種子粒子。然後再置入下一個自由粒子，不斷的重複此過程。那麼我們就可看見，從原點的位置發展出一個樹枝狀的、自相似的碎形堆積物，所對應的碎形維度大約為 1.7（見圖十九、二十）。



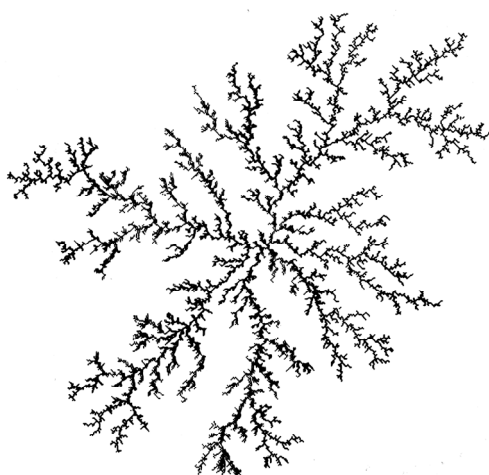
圖十七：電化學沈積實驗的基本裝置（引用圖片來源：Peitgen, Jürgens, and Saupe, Chaos and Fractals (1992)）



圖十八：經由電化學沈積實驗而得的金屬葉 (metal leaf)
(引用圖片來源：Peitgen, Jürgens, and Saupe, Chaos and Fractals (1992))



圖十九：有限擴散堆積模型的示意圖 (引用圖片來源：
Peitgen, Jürgens, and Saupe, Chaos and Fractals (1992))



圖二十：由有限擴散堆積模型電腦模擬所得的金屬葉 (引用圖片來源：Peitgen, Jürgens, and Saupe, Chaos and Fractals (1992))

(F) 單細胞生物體積大小的估計

我們可利用擴散方程式的觀念估計單細胞生物體積的大小。假設一個單細胞生物可視為一球狀體，半徑為 r_c ，沈浸在一流體中。此流體含有與細胞新陳代謝有關的某種特殊化學物質（比如說氧氣或是其他分子），在一般情況下對應的濃度是 C_∞ 。假設此種化學分子經過擴散，只要一接觸到細胞的表面，就會被細胞吸收。所以此種分子會滿足擴散方程式，其對應的邊界條件為：在細胞旁邊，分子濃度為零，在距細胞很遠的地方，則濃度趨 C_∞ 。那麼，當擴散達到穩定狀態時，此種分子的濃度分佈將遵循以下的關係式：當 $r \geq r_c$ ， $C(r) = C_\infty(1 - \frac{r_c}{r})$ ，其中 r 代表分子到

細胞中心的距離。再利用前幾節提到的粒子流密度

$$J(r) = -D \frac{dC(r)}{dr} = -DC_\infty \frac{r_c}{r^2}$$

，其中負號代表化學分子是流入細胞。因此，在細胞表面，此種特殊化學分子流密度 $J(r_c) = -\frac{DC_\infty}{r_c}$ 。接著，我們就可得到，在

$$J(r_c) = -\frac{DC_\infty}{r_c}$$

單位時間裡，此種化學分子流入細胞的總數目 $F = |4\pi r_c^2 \cdot J(r_c)| = 4\pi r_c DC_\infty$ 。此外，我們可做一合理的假設，單位時間裡細胞新陳代謝此化學物質的總數目與細胞體積成正比（也就是 $\frac{4\pi r_c^3 M}{3}$ ，其中 M 代表

$$\frac{4\pi r_c^3 M}{3}$$

$$\text{一個常數})。在平衡狀態下，4\pi r_c DC_\infty = \frac{4\pi r_c^3 M}{3}。因$$

$$\text{此，細胞半徑 } r_c = \sqrt{\frac{3DC_\infty}{M}}。$$

這裡，我們舉一個實際的例子。在水中浮游的單細胞植物，通常會藉著吸收 HCO_3^- 離子，做為光合作用所需的碳來源。因為此種單細胞植物缺乏主動傳輸的能力，所以基本上是靠著 HCO_3^- 的擴散到細胞表面，做為獲得碳的方式。將實際的數據代入 ($D \approx 1.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, $C_\infty \approx 1.5 \text{ mol/m}^3$, $M \approx 1 \text{ mol/s} \cdot \text{m}^3$)，於是我們得到 $r_c \approx 80 \mu\text{m} (= 8 \cdot 10^{-5} \text{ m})$ 。這個估計與水中浮游的單細胞植物的半徑大小，在數量級上是完全吻合的。

六、結論

自 1905 年愛因斯坦的石破天驚之舉，開啓了物理世界的新視野，至今剛好一百年。對於現在的科學界，布朗運動的觀念可以說是無人不知、無人不曉。而其應用的範圍也遍及物理、化學、電子工程、生物、社會科學等等。值此之際，我們不能不感謝這些偉大的科學家，如愛因斯坦、朗級文等等的卓越貢獻。回顧他們的工作，也給我們後人很大的啓發。雖然身為理論物理學家，他們非常的重視最新的科學實驗發展，也勇於投入尚未發展成熟的領域。此外，他們成功的重點在於具有跨學界領域（interdisciplinary）的淵博背景知識，也就是所謂的以他山之石可以攻錯，值得我們後人好好的省思與學習。

參考資料：

1. Einstein, Investigations on the Theory of the Brownian Motion (1968).
2. Stachel, ed., Einstein's Miraculous Year: Five papers that changed the face of physics (1998).
3. Pathria, Statistical Mechanics (1972).
4. Banks, Growth and Diffusion Phenomena (1994).
5. Péceli, Fluctuations in Physical Systems (2000).
6. Peitgen, Jürgens, and Saupe, Chaos and Fractals (1992).
7. Denny and Gaines, Chance in Biology (2000).

作者簡介

龐寧寧

台灣大學物理系教授

email: nnp@phys.ntu.edu.tw

健仁氣體股份有限公司

一個以服務為經營宗旨的氣體經銷商

給您一個完整的氣體資訊 讓您的使用更安全



提供-----

工業用焊接氣體、醫療用、排氣
測試用氣體、各種比例混合氣、
各類稀有特殊用氣體 N_2O WF_6 Xe
 LHe Ne SiH_4 Kr 等

【歡迎來電洽詢】

各類氣體相關零配件
液態低溫容器 壓力容器
新竹縣竹北市泰和里博愛街 760
巷 6 號

電話： (03) 5516256

傳真： (03) 5551732