Þakningar fléttufræðilegra fyrirbrigða með aðstoð línulegrar bestunnar

Stærðfræði á Íslandi 2019

Bjarni Jens Kristinsson, Christian Bean og Henning Úlfarsson

Háskólinn í Reykjavík

13. október 2019

Bakgrunnur

- M.Sc. verkefni í tölvunarfræði við Háskólann í Reykjavík
- Byggir á *„Automatic discovery of structural rules of permutation classes“* (2019) eftir Christian Bean, Bjarka Guðmundsson og Henning Úlfarsson
- Struct einskorðast við umraðanaklasa

Okkar framlag

- CombCov hugbúnaðarpakka fyrir Python
- Almennt tól fyrir fléttufræðileg fyrirbrigði
- Sjálfvirknivætt eldri niðurstöður um möskvamynstursklasa

Dæmi um fléttufræðilegt fyrirbrigði – *orðaklasar*

Skilgreining

Látum s vera orð með bókstöfum úr stafrófinu $\Sigma = \{a, b\}$*. Við táknum tóma orðið með* ϵ *og það uppfyllir skilyrðin* $\epsilon \cdot s = s$ *(forskeyti) og* $s \cdot \epsilon = s$ *(viðskeyti) fyrir öll orð s yfir* Σ*. Skilgreinum* $\mathrm{Av}(s)$ *sem mengið af orðum yfir stafrófið* Σ *sem innihalda ekki s sem hlutorð. Köllum þetta orðaklasa.*

Dæmi um fléttufræðilegt fyrirbrigði – *orðaklasar*

Skilgreining

Látum s vera orð með bókstöfum úr stafrófinu $\Sigma = \{a, b\}$. *Við táknum tóma orðið með* ϵ *og það uppfyllir skilyrðin* $\epsilon \cdot s = s$ *(forskeyti) og* $s \cdot \epsilon = s$ *(viðskeyti) fyrir öll orð s yfir* Σ. *Skilgreinum* $\mathrm{Av}(s)$ *sem mengið af orðum yfir stafrófið* Σ *sem innihalda ekki s sem hlutorð. Köllum þetta orðaklasa.*

Dæmi

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$ *er orðaklasi.*

Dæmi um fléttufræðilegt fyrirbrigði – *orðaklasar*

Skilgreining

Látum s vera orð með bókstöfum úr stafrófinu $\Sigma = \{a, b\}$. Við táknum tóma orðið með ϵ og það uppfyllir skilyrðin $\epsilon \cdot s = s$ (forskeyti) og $s \cdot \epsilon = s$ (viðskeyti) fyrir öll orð s yfir Σ. Skilgreinum $\mathrm{Av}(s)$ sem mengið af orðum yfir stafrófið Σ sem innihalda ekki s sem hlutorð. Köllum þetta orðaklasa.

Dæmi

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$ *er orðaklasi.*
- *Er til einfaldari lýsing á $\mathrm{Av}(aa)$?*

Dæmi um fléttufræðilegt fyrirbrigði – *orðaklasar*

Skilgreining

Látum s vera orð með bókstöfum úr stafrófinu $\Sigma = \{a, b\}$. Við táknum tóma orðið með ϵ og það uppfyllir skilyrðin $\epsilon \cdot s = s$ (forskeyti) og $s \cdot \epsilon = s$ (viðskeyti) fyrir öll orð s yfir Σ. Skilgreinum $\mathrm{Av}(s)$ sem mengið af orðum yfir stafrófið Σ sem innihalda ekki s sem hlutorð. Köllum þetta orðaklasa.

Dæmi

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$ *er orðaklasi.*
- *Er til einfaldari lýsing á* $\mathrm{Av}(aa)$*?*
- *Hvað eru mörg orð af lengd n í* $\mathrm{Av}(aa)$*?*

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$

  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$
  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$
  (2) $S_i \cap S_j = \emptyset$ ef $i \neq j$

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$
  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$
  (2) $S_i \cap S_j = \emptyset$ ef $i \neq j$
- Köllum $\mathrm{Av}(S)$ *rótina* og S_i *reglur*

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$
  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$
  (2) $S_i \cap S_j = \emptyset$ ef $i \neq j$
- Köllum $\mathrm{Av}(S)$ *rótina* og S_i *reglur*
- Vandamál: Tölvur kunna ekki að reikna með óendanlega mörgum hlutum

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$
  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$
  (2) $S_i \cap S_j = \emptyset$ ef $i \neq j$
- Köllum $\mathrm{Av}(S)$ *rótina* og S_i *reglur*
- Vandamál: Tölvur kunna ekki að reikna með óendanlega mörgum hlutum
- Lausn: Búum til og vinnum með *endanlegar* framsetningar

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$
  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$
  (2) $S_i \cap S_j = \varnothing$ ef $i \neq j$
- Köllum $\mathrm{Av}(S)$ *rótina* og S_i *reglur*
- Vandamál: Tölvur kunna ekki að reikna með óendanlega mörgum hlutum
- Lausn: Búum til og vinnum með *endanlegar* framsetningar
  - $R = \{w \in \mathrm{Av}(S) : |w| \leqslant \ell\}$

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$
  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$
  (2) $S_i \cap S_j = \varnothing$ ef $i \neq j$
- Köllum $\mathrm{Av}(S)$ *rótina* og S_i *reglur*
- Vandamál: Tölvur kunna ekki að reikna með óendanlega mörgum hlutum
- Lausn: Búum til og vinnum með *endanlegar* framsetningar
  - $R = \{w \in \mathrm{Av}(S) : |w| \leqslant \ell\}$
  - $R_i = \{w \in S_i : |w| \leqslant \ell\}$

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$
  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$
  (2) $S_i \cap S_j = \emptyset$ ef $i \neq j$
- Köllum $\mathrm{Av}(S)$ *rótina* og S_i *reglur*
- Vandamál: Tölvur kunna ekki að reikna með óendanlega mörgum hlutum
- Lausn: Búum til og vinnum með *endanlegar* framsetningar
  - $R = \{w \in \mathrm{Av}(S) : |w| \leqslant \ell\}$
  - $R_i = \{w \in S_i : |w| \leqslant \ell\}$
- Leysum í staðinn endanlega vandamálið

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$
  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$
  (2) $S_i \cap S_j = \varnothing$ ef $i \neq j$
- Köllum $\mathrm{Av}(S)$ *rótina* og S_i *reglur*
- Vandamál: Tölvur kunna ekki að reikna með óendanlega mörgum hlutum
- Lausn: Búum til og vinnum með *endanlegar* framsetningar
  - $R = \{w \in \mathrm{Av}(S) : |w| \leqslant \ell\}$
  - $R_i = \{w \in S_i : |w| \leqslant \ell\}$
- Leysum í staðinn endanlega vandamálið
  (1) $\bigcup_{i \in I} R_i = R$

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$
  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$
  (2) $S_i \cap S_j = \emptyset$ ef $i \neq j$
- Köllum $\mathrm{Av}(S)$ *rótina* og S_i *reglur*
- Vandamál: Tölvur kunna ekki að reikna með óendanlega mörgum hlutum
- Lausn: Búum til og vinnum með *endanlegar* framsetningar
  - $R = \{w \in \mathrm{Av}(S) : |w| \leqslant \ell\}$
  - $R_i = \{w \in S_i : |w| \leqslant \ell\}$
- Leysum í staðinn endanlega vandamálið
  (1) $\bigcup_{i \in I} R_i = R$
  (2) $R_i \cap R_j = \emptyset$ ef $i \neq j$

Hugmyndin bak við CombCov

- Markmið: Finna k sundurlæg hlutmengi S_i sem *þekja* $\mathrm{Av}(S)$
  (1) $\bigcup_{i \in I} S_i = \mathrm{Av}(S)$
  (2) $S_i \cap S_j = \varnothing$ ef $i \neq j$
- Köllum $\mathrm{Av}(S)$ *rótina* og S_i *reglur*
- Vandamál: Tölvur kunna ekki að reikna með óendanlega mörgum hlutum
- Lausn: Búum til og vinnum með *endanlegar* framsetningar
  - $R = \{w \in \mathrm{Av}(S) : |w| \leqslant \ell\}$
  - $R_i = \{w \in S_i : |w| \leqslant \ell\}$
- Leysum í staðinn endanlega vandamálið
  (1) $\bigcup_{i \in I} R_i = R$
  (2) $R_i \cap R_j = \varnothing$ ef $i \neq j$
- Á næstu glærum förum við í gegn um reikniritið til að finna þakningu á $\mathrm{Av}(aa)$

Reglur

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$

Reglur

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Hvernig finnum við reglurnar S_i?

Reglur

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Hvernig finnum við reglurnar S_i?
- Okkar hugmynd: Prófum reglur af gerðinni $u\mathrm{Av}(S')$ þar sem

Reglur

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Hvernig finnum við reglurnar S_i?
- Okkar hugmynd: Prófum reglur af gerðinni $u\mathrm{Av}(S')$ þar sem
    - u er orð í $\mathrm{Av}(S)$ að lengd $\leqslant \max\{|w| : w \in S\}$ og

Reglur

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Hvernig finnum við reglurnar S_i?
- Okkar hugmynd: Prófum reglur af gerðinni $u\mathrm{Av}(S')$ þar sem
  - u er orð í $\mathrm{Av}(S)$ að lengd $\leqslant \max\{|w| : w \in S\}$ og
  - S' er annað hvort allt stafrófið Σ eða mengi af orðum sem eru hlutorð af orðum í $\mathrm{Av}(S)$

Reglur

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Hvernig finnum við reglurnar S_i?
- Okkar hugmynd: Prófum reglur af gerðinni $u\mathrm{Av}(S')$ þar sem
  - u er orð í $\mathrm{Av}(S)$ að lengd $\leqslant \max\{|w| : w \in S\}$ og
  - S' er annað hvort allt stafrófið Σ eða mengi af orðum sem eru hlutorð af orðum í $\mathrm{Av}(S)$
- Næsta skref: Kanna hvort reglurnar séu *gjaldgengar*

Bitastrengir

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$

Bitastrengir

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Veljum nákvæmnina $\ell = 2$

Bitastrengir

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Veljum nákvæmnina $\ell = 2$
- Þá er $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$

Bitastrengir

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Veljum nákvæmnina $\ell = 2$
- Þá er $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$
- Notum *bitastrengi* til að tákna hlutmengi í R

Bitastrengir

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Veljum nákvæmnina $\ell = 2$
- Þá er $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$
- Notum *bitastrengi* til að tákna hlutmengi í R
  - $B' = 111111$ táknar allt mengið R

Bitastrengir

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Veljum nákvæmnina $\ell = 2$
- Þá er $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$
- Notum *bitastrengi* til að tákna hlutmengi í R
    - $B' = 111111$ táknar allt mengið R
    - $B'' = 011001$ táknar hlutmengið $\{a, b, bb\}$

Bitastrengir

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Veljum nákvæmnina $\ell = 2$
- Þá er $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$
- Notum *bitastrengi* til að tákna hlutmengi í R
    - $B' = 111111$ táknar allt mengið R
    - $B'' = 011001$ táknar hlutmengið $\{a, b, bb\}$
    - $B''' = 100000$ táknar hlutmengið $\{\epsilon\}$

Bitastrengir

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Veljum nákvæmnina $\ell = 2$
- Þá er $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$
- Notum *bitastrengi* til að tákna hlutmengi í R
    - $B' = 111111$ táknar allt mengið R
    - $B'' = 011001$ táknar hlutmengið $\{a, b, bb\}$
    - $B''' = 100000$ táknar hlutmengið $\{\epsilon\}$
- Reglan $a\mathrm{Av}(a)$ býr til mengið $R' = \{a, ab\} \subseteq R$ með tilsvarandi bitastreng 010100 og er því gjaldgeng

Bitastrengir

- $\mathrm{Av}(aa) = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- Veljum nákvæmnina $\ell = 2$
- Þá er $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$
- Notum *bitastrengi* til að tákna hlutmengi í R
  - $B' = 111111$ táknar allt mengið R
  - $B'' = 011001$ táknar hlutmengið $\{a, b, bb\}$
  - $B''' = 100000$ táknar hlutmengið $\{\epsilon\}$
- Reglan $a\mathrm{Av}(a)$ býr til mengið $R' = \{a, ab\} \subseteq R$ með tilsvarandi bitastreng 010100 og er því gjaldgeng
- Reglan $a\mathrm{Av}(b)$ býr til mengið $R'' = \{a, aa\} \nsubseteq R$ svo reglan er ógjaldgeng

Línuleg bestun

- $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$

Línuleg bestun

- $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$
- Samtals verða til 16 reglur

Línuleg bestun

- $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$
- Samtals verða til 16 reglur
    - Þar af eru 15 gjaldgengar

Línuleg bestun

- $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$
- Samtals verða til 16 reglur
  - Þar af eru 15 gjaldgengar
  - Þær búa til 9 ólíka bitastrengi

Línuleg bestun

- $R = \{\epsilon, a, b, ab, ba, bb\}$
- Samtals verða til 16 reglur
  - Þar af eru 15 gjaldgengar
  - Þær búa til 9 ólíka bitastrengi
- Notum *Gurobi* eða *COIN CLP/CBC LP* til að leysa jöfnuhneppið

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & z = x_1 + \cdots + x_9 \\
\text{þ.a.} & x_6 + x_8 + x_9 = 1 \\
 & x_1 = 1 \\
 & x_2 + x_7 = 1 \\
 & x_3 + x_8 + x_9 = 1 \\
 & x_4 + x_7 = 1 \\
 & x_5 + x_9 = 1 \\
\text{m.t.t.} & x_i \in \{0, 1\} \text{ fyrir } i = 1, \ldots, 9.
\end{array}
$$

Þakning $\mathrm{Av}(aa)$

- Ein lausn jöfnuhneppisins er $x_1 = x_7 = x_9 = 1$ og gefur þakninguna

$$\epsilon \mathrm{Av}(a, b) \cup a\mathrm{Av}(a) \cup b\mathrm{Av}(aa).$$

Þakning $\mathrm{Av}(aa)$

- Ein lausn jöfnuhneppisins er $x_1 = x_7 = x_9 = 1$ og gefur þakninguna

$$\epsilon\mathrm{Av}(a, b) \cup a\mathrm{Av}(a) \cup b\mathrm{Av}(aa).$$

- Þetta er *röng* lausn!

Þakning $\mathrm{Av}(aa)$

- Ein lausn jöfnuhneppisins er $x_1 = x_7 = x_9 = 1$ og gefur þakninguna

$$\epsilon\mathrm{Av}(a, b) \cup a\mathrm{Av}(a) \cup b\mathrm{Av}(aa).$$

- Þetta er *röng* lausn!
- $abba \in \mathrm{Av}(aa)$ en engin af reglunum býr til orðið!

Þakning $\mathrm{Av}(aa)$

- Ein lausn jöfnuhneppisins er $x_1 = x_7 = x_9 = 1$ og gefur þakninguna

$$\epsilon\mathrm{Av}(a, b) \cup a\mathrm{Av}(a) \cup b\mathrm{Av}(aa).$$

- Þetta er *röng* lausn!
- $abba \in \mathrm{Av}(aa)$ en engin af reglunum býr til orðið!
- Með því að hækka nákæmnina (gildið á ℓ) fæst rétt svar:

$$\mathrm{Av}(aa) = \epsilon\mathrm{Av}(a, b) \cup a\mathrm{Av}(a, b) \cup b\mathrm{Av}(aa) \cup ab\mathrm{Av}(aa)$$

Þakning $\mathrm{Av}(aa)$

- Ein lausn jöfnuhneppisins er $x_1 = x_7 = x_9 = 1$ og gefur þakninguna

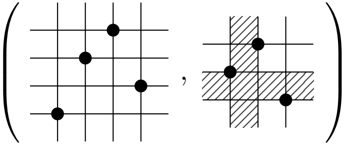
$$\epsilon\mathrm{Av}(a,b) \cup a\mathrm{Av}(a) \cup b\mathrm{Av}(aa).$$

- Þetta er *röng* lausn!
- $abba \in \mathrm{Av}(aa)$ en engin af reglunum býr til orðið!
- Með því að hækka nákæmnina (gildið á ℓ) fæst rétt svar:

$$\mathrm{Av}(aa) = \epsilon\mathrm{Av}(a,b) \cup a\mathrm{Av}(a,b) \cup b\mathrm{Av}(aa) \cup ab\mathrm{Av}(aa)$$

- Hægt er að sýna fram á að *talning* orðaklasans séu Fibonacci tölurnar (hliðraðar um einn)

Okkar viðfangsefni

Av 

Umraðanir

Umröðun (e. permutation) að lengd n er gagntæk vörpun á $[\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$.

Umraðanir

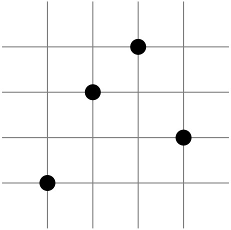
Umröðun (e. permutation) að lengd n er gagntæk vörpun á $[\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$. Dæmi um umröðun að lengd 4 er $\pi = 1342$

Umraðanir

Umröðun (e. permutation) að lengd n er gagntæk vörpun á $[\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$. Dæmi um umröðun að lengd 4 er $\pi = 1342$ sem varpar $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 4$ og $4 \mapsto 2$.

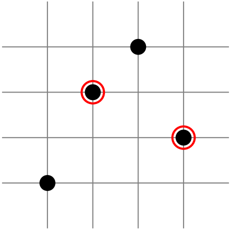
Umraðanir

Umröðun (e. permutation) að lengd n er gagntæk vörpun á $[\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$. Dæmi um umröðun að lengd 4 er $\pi = 1342$ sem varpar $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 4$ og $4 \mapsto 2$. Myndræn framsetning á umröðunum lítur svona út:



Umraðanir

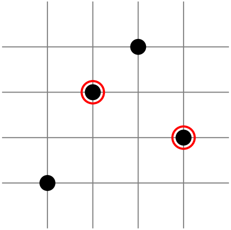
Umröðun (e. permutation) að lengd n er gagntæk vörpun á $[\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$. Dæmi um umröðun að lengd 4 er $\pi = 1342$ sem varpar $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 4$ og $4 \mapsto 2$. Myndræn framsetning á umröðunum lítur svona út:



Við segjum að π *innihaldi mynstrið* $p = 21$ því 32 (í $1\underline{3}4\underline{2}$) er *einsraða* (e. *order isomorphic*) p.

Umraðanir

Umröðun (e. permutation) að lengd n er gagntæk vörpun á $[\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$. Dæmi um umröðun að lengd 4 er $\pi = 1342$ sem varpar $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 4$ og $4 \mapsto 2$. Myndræn framsetning á umröðunum lítur svona út:



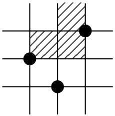
Við segjum að π *innihaldi mynstrið* $p = 21$ því 32 (í $1\underline{3}4\underline{2}$) er *einsraða* (e. *order isomorphic*) p. π inniheldur ekki mynstrið $q = 312$ og þá segjum við að π *forðist* q.

Möskvamynstur

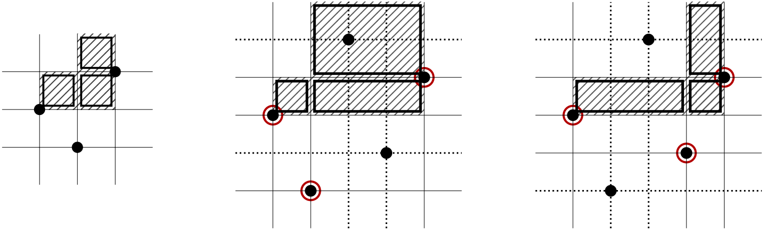
- *Möskvamynstur (e. mesh pattern)* er tvennd (π, M) þar sem π er umröðun að lengd n og M er hlutmengi í $[\![0, n]\!] \times [\![0, n]\!]$.

Möskvamynstur

- *Möskvamynstur (e. mesh pattern)* er tvennd (π, M) þar sem π er umröðun að lengd n og M er hlutmengi í $[\![0, n]\!] \times [\![0, n]\!]$.
- Dæmi: $p = (213, \{\ulcorner 1, 2 \urcorner, \ulcorner 2, 2 \urcorner, \ulcorner 2, 3 \urcorner\})$

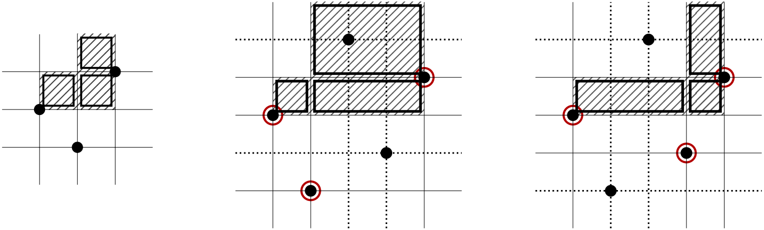


Umröðun inniheldur möskvamynstur



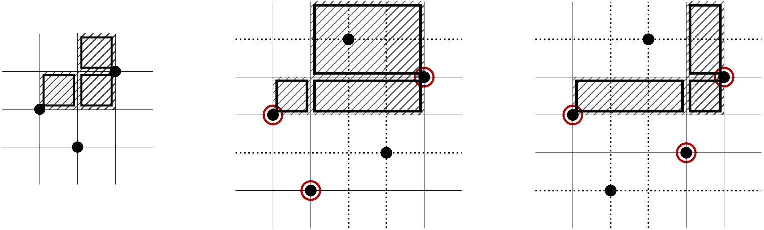
- Her að ofan sést dæmi um tilvik af möskvamynstrinu $p = (213, \{[1,2], [2,2], [2,3]\})$ í umröðuninni $\pi = 31524$.

Umröðun inniheldur möskvamynstur



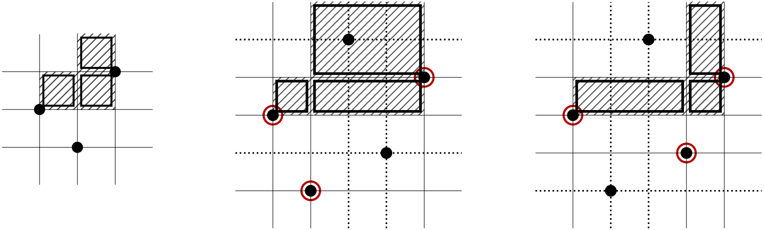
- Her að ofan sést dæmi um tilvik af möskvamynstrinu $p = (213, \{\ulcorner 1, 2 \lrcorner, \ulcorner 2, 2 \lrcorner, \ulcorner 2, 3 \lrcorner\})$ í umröðuninni $\pi = 31524$.
- Mengi allra umraðana sem *forðast* möskvamynstrið p er $\mathrm{Av}(p)$.

Umröðun inniheldur möskvamynstur



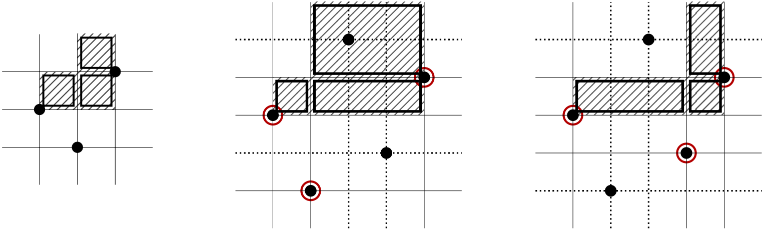
- Her að ofan sést dæmi um tilvik af möskvamynstrinu $p = (213, \{\ulcorner\!\llcorner 1,2 \urcorner\!\lrcorner, \ulcorner\!\llcorner 2,2 \urcorner\!\lrcorner, \ulcorner\!\llcorner 2,3 \urcorner\!\lrcorner\})$ í umröðuninni $\pi = 31524$.
- Mengi allra umraðana sem *forðast* möskvamynstrið p er $\mathrm{Av}(p)$.
- Mengi allra umraðana *af lengd n* sem forðast p er $\mathrm{Av}_n(p)$.

Umröðun inniheldur möskvamynstur



- Her að ofan sést dæmi um tilvik af möskvamynstrinu $p = (213, \{\ulcorner 1, 2 \urcorner, \ulcorner 2, 2 \urcorner, \ulcorner 2, 3 \urcorner\})$ í umröðuninni $\pi = 31524$.
- Mengi allra umraðana sem *forðast* möskvamynstrið p er $\mathrm{Av}(p)$.
- Mengi allra umraðana *af lengd n* sem forðast p er $\mathrm{Av}_n(p)$.
- *Talning* möskvamynstursklasans $\mathrm{Av}(p)$ er talnaruna $(F_n)_{n=0}^{+\infty}$ þ.a. $|\mathrm{Av}_n(p)| = F_n$.

Umröðun inniheldur möskvamynstur

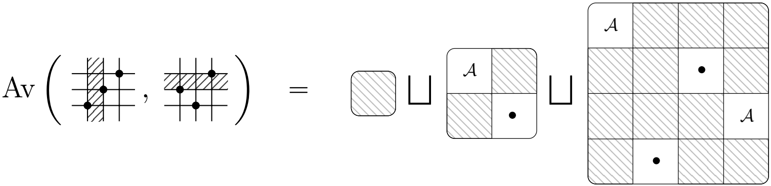


- Her að ofan sést dæmi um tilvik af möskvamynstrinu $p = (213, \{\ulcorner 1,2 \urcorner, \ulcorner 2,2 \urcorner, \ulcorner 2,3 \urcorner\})$ í umröðuninni $\pi = 31524$.
- Mengi allra umraðana sem *forðast* möskvamynstrið p er $\mathrm{Av}(p)$.
- Mengi allra umraðana *af lengd n* sem forðast p er $\mathrm{Av}_n(p)$.
- *Talning* möskvamynstursklasans $\mathrm{Av}(p)$ er talnaruna $(F_n)_{n=0}^{+\infty}$ þ.a. $|\mathrm{Av}_n(p)| = F_n$.
- Summan $\Sigma_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$ er *framleiðnifall* möskvamynstursklasans $\mathrm{Av}(p)$.

Áhugaverðar niðurstöður

Næst skoðum við nokkrar áhugaverðar niðurstöður.

Enumerations of Permutations Simultaneously Avoiding a Vincular and a Covincular Pattern of Length 3 (2017)

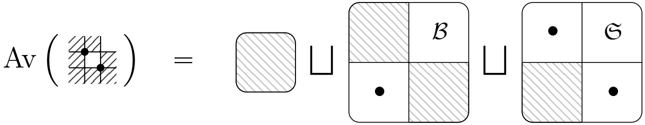


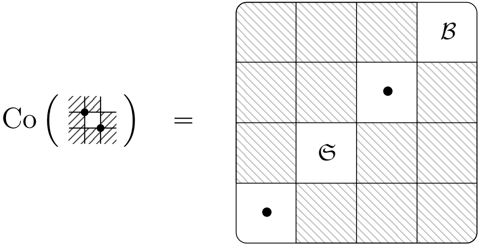
Af þessari þakningu sjáum við að um framleiðnifallið $F(X)$ gildir

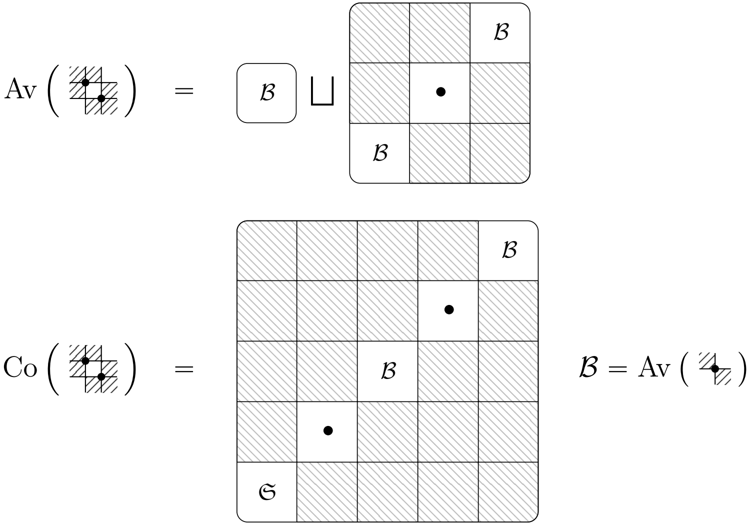
$$F(x) = 1 + xF(x) + x^2F(x)^2$$

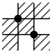
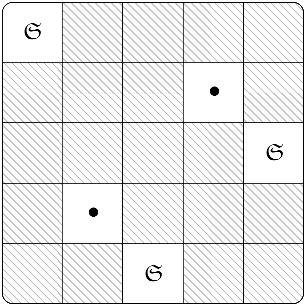
sem gefa okkur *Motzkin* tölurnar M_n.

Wilf-Classification of Mesh Patterns of Short Length (2015)

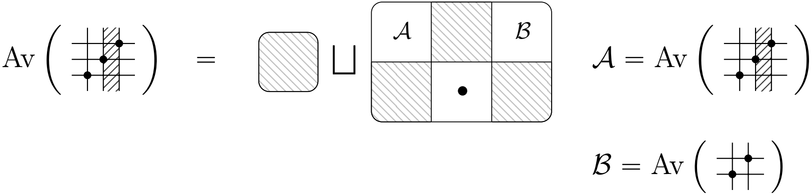





Av
=
$\mathcal{B}$
$\bigsqcup$
$\mathcal{B}$
$\mathcal{B}$
Co
=
$\mathcal{B}$
$\mathcal{B}$
$\mathfrak{S}$
$\mathcal{B} = \mathrm{Av}($ $)$

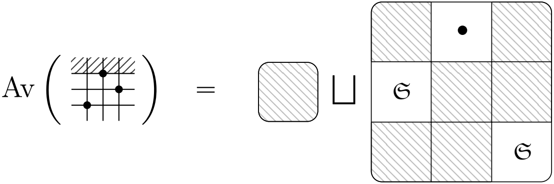
Co () = 

Generalized Pattern Avoidance (2001)

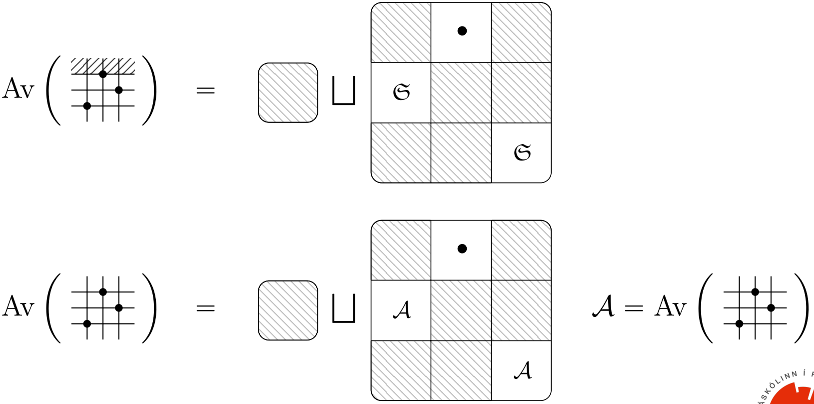


Hægt er að leiða út framleiðnifallið sem gæfi okkur *Bell* tölurnar B_n.

Wilf classification of bi-vincular permutation patterns (2009)



Wilf classification of bi-vincular permutation patterns (2009)



Einhverjar spurningar?