Numerische Integration des Dreikörperproblems

A/Prof Bernhard Müller
https://github.com/bjmueller/three_body_problem

3. Mai 2022

Wiederholung: Zweikörperproblem

Die Bewegungsgleichungen für die Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ der Massenpunkte m_1 und m_2 unter dem Einfluss der Gravitation,

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = G m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3},$$
$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = G m_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3},$$

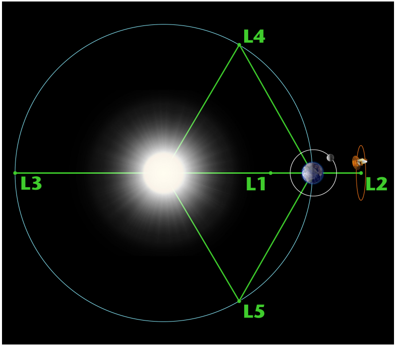
können nach Übergang in Relativkoordinaten in ein äquivalentes Einkörperproblem überführt werden. Dieses ist in *geschlossener Form* lösbar ($\rightarrow$Keplersche Gesetze).
Für mehr als zwei Körper existiert für beliebige Anfangsbedingungen i.A. keine Lösung in geschlossener Form.
Abgesehen von Spezialfällen muss man daher auf Störungsrechnung zurückgreifen oder die Bewegungsgleichungen **numerisch integrieren.**

Dreiköperproblem vs. N-Körperproblem

- Die Methoden zur numerischen Integration des Dreikörperproblems (bzw. des *few-body problems)* und des allgemeinen N-Körper-Problems weisen Ähnlichkeiten auf; allerdings gibt es in der Praxis aufgrund der spezifischen physikalischen Fragestellungen, numerischer Effizienzfragen, und pragmatischer Erwägungen Unterschiede.
- Beispiel: Bei der Trajektorienberechnung von Raumfahrzeugen ist eine erheblich größere relative Genauigkeit erforderlich und möglich als in stellardynamischen Modellen der Milchstraße.
- Das Dreikörperproblem eignet sich programmiertechnisch als "einfacher" Einstieg in Methoden zur Behandlung des Wenig- und Vielkörperproblems. Außerdem existieren speziellen Lösungen in geschlossener Form zur Code-Verifikation, und die gut verstandene Physik des Dreikörperproblems erleichtert die Interpretation numerischer Simulationen.

Dreiköperproblem: Lösungen in geschlossener Form

Für den Fall dreier nicht verschwindender Massen ($m_1, m_2, m_3 \neq 0$) sind einige geschlossene Lösungen des Dreikörperproblems bekannt (Euler, Lagrange). Etwas einfacher und von großer praktischer Relevanz (z.B. für Weltraumteleskope) ist das **eingeschränkte Dreiköproblem** mit $m_3 = 0$. Hier gibt es fünf Lösungen (Lagrangepunkte L_1 bis L_5), die im mitrotierenden System ortsfest sind. Die Lösung am stabilen Lagrangepunkt L_4 sei unser erster Testfall.



©NASA/WMAP Science Team

Erster Versuch

Die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ldots, \quad \ddot{\mathbf{r}}_3 = \ldots, \tag{1}$$

können wir approximativ durch **Diskretisierung** lösen, d.h. wir suchen eine numerische Lösung zu den Zeiten t_0, $t_0 + \Delta t$, $t_0 + 2\Delta t$, etc. (evtl. auch mit variablen Zeitschritten) und approximieren Ableitungen durch geeignete Differenzen.

Erster Versuch

Die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dots, \quad \ddot{\mathbf{r}}_3 = \dots, \tag{1}$$

können wir approximativ durch **Diskretisierung** lösen, d.h. wir suchen eine numerische Lösung zu den Zeiten t_0, $t_0 + \Delta t$, $t_0 + 2\Delta t$, etc. (evtl. auch mit variablen Zeitschritten) und approximieren Ableitungen durch geeignete Differenzen.

Für die meisten Verfahren (Ausnahme z.B. klassisches Störmer-Verlet-Verfahren) überführt man die Bewegungslgeichungen zunächst in ein System 1. Ordnung, wobei wir zweckmäßigerweise zu Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren der drei Körper zusammenfassen (3×3 verallgemeinerte Koordinaten):

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(t), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}(\mathbf{r}(t)), \tag{2}$$

oder alternativ als Hamiltonsche Bewegungsgleichungen, was später relevant wird,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \tag{3}$$

Erster Versuch: Euler-Verfahren

Wir bezeichnen die Lösung für verschiedene Zeiten mit einem unteren Index für den Zeitschritt. Das einfachste Verfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differntialgleichungen lautet:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t\,\mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t\,\mathbf{a}(\mathbf{r}_n). \tag{4}$$

Erster Versuch: Euler-Verfahren

Wir bezeichnen die Lösung für verschiedene Zeiten mit einem unteren Index für den Zeitschritt. Das einfachste Verfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differntialgleichungen lautet:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t\, \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t\, \mathbf{a}(\mathbf{r}_n). \tag{4}$$

Der Diskretisierungsfehler lässt sich mittels Taylor-Entwicklung abschätzen,

$$\mathbf{r}_n + \Delta t \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)_n}_{\mathbf{v}_n} + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_n + \mathcal{O}(\Delta t^3) = \mathbf{r}_n + \Delta t\, \mathbf{v}_n. \tag{5}$$

$\mathbf{r}_{n+1}$ weist einen **lokalen Fehler** $\sim \ddot{\mathbf{r}}_n \Delta t^2/2$ auf (Verfahren 1. Ordnung), und sollte für $\Delta t \to 0$ gegen die korrekte Lösungen gehen. Allerdings ist das numerische Resultat sehr unbefriedigend (siehe Animation).

Euler-Verfahren: Probleme

- Erhaltungsgrößen (Gesamtenergie und -Drehimpuls) sind numerisch nicht erhalten.
- Dieses Problem tritt schon beim Ein- und Zweikörperproblem auf!
- Zusätzlich tritt ebenfalls schon beim Keplerproblem eine rein numerische Periheldrehung auf.
- Eine Verkleinerung des Zeitschritts ist keine effiziente und daher keine *praktikable* Lösung.
- Eine mögliche Verbersserungsstrategie besteht in der Reduktion des lokalen Fehlers mittels eines **Integrationsverfahrens höherer Ordnung**.

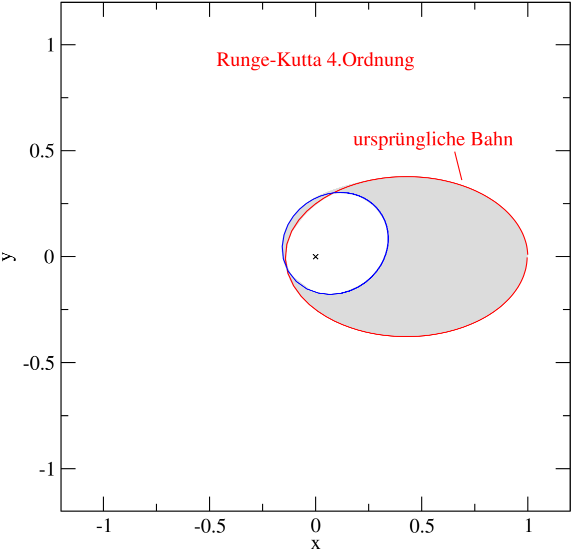
Euler-Verfahren: Probleme

Die Ordnung des lokalen Fehlers in Δt kann durch Einführung zusätzlicher Stützstellen innerhalb des Zeitschritts erhöht werden, wie z.B. im verbesserten Euler-Verfahren (2. Ordnung),

$$\mathbf{y}_{n+1/2} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2}\,\dot{\mathbf{y}}_n, \quad \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t\,\dot{\mathbf{y}}_{n+1} \quad \text{mit } \mathbf{y} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$$

Mehrstufige Verfahren höherer Ordnung können systematisch konstruiert werden (z.B. Familie der **Runge-Kutta-Verfahren**). Dabei kann auch **Fehlerschätzer** eingebaut werden, der eine **adaptive Schrittweitensteuerung** ermöglicht. Sehr verbreitet ist das Runge–Kutta–Fehlberg (RK45) Verfahren 4. Ordnung mit einem Fehlerschätzer $\mathcal{O}(\Delta t^5)$.
Die Konvergenz mit Δt^r bei einem Verfahren mit fester Ordnung r kann noch übertroffen werden, wenn man ein Verfahren niedriger Ordnung für *verschiedene* Zwischenschritte $\delta h < \Delta t$ ausführt und zu $\delta h \to 0$ extrapoliert (**Bulirsch-Stoer-Verfahren**).

Ellipsenbahn mit Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung



Symplektische Verfahren

Die meisten Verfahren höherer Ordnung leiden immer noch spürbar unter der Nichterhaltung von Erhaltungsgrößen. Betrachten wir nun das scheinbar "falsche" Euler-Verfahren,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t\, \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t\, \mathbf{a}(\mathbf{r}_{n+1}).$$

Symplektische Verfahren

Die meisten Verfahren höherer Ordnung leiden immer noch spürbar unter der Nichterhaltung von Erhaltungsgrößen. Betrachten wir nun das scheinbar “falsche” Euler-Verfahren,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t\, \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t\, \mathbf{a}(\mathbf{r}_{\color{red}{n+1}}).$$

Dieses **semi-implizite Euler-Verfahren** ist ein korrektes Verfahren 1. Ordnung und erzielt langfristig *bessere* Energieerhaltung als Runge-Kutta 4. Ordnung! Der tiefere Grund liegt darin, dass dieses Verfahren die *exakte* Lösung der Bewegungsgleichungen für eine Hamilton-Funktion darstellt, die im Zeitmittel die korrekte Hamilton-Funktion approximiert,

$$H = T(\mathbf{p}) + \sum_n \delta(t - t_n) V(\mathbf{r}).$$

Symplektische Verfahren

Die meisten Verfahren höherer Ordnung leiden immer noch spürbar unter der Nichterhaltung von Erhaltungsgrößen. Betrachten wir nun das scheinbar “falsche” Euler-Verfahren,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t\, \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t\, \mathbf{a}(\mathbf{r}_{n+1}).$$

Dieses **semi-implizite Euler-Verfahren** ist ein korrektes Verfahren 1. Ordnung und erzielt langfristig *bessere* Energieerhaltung als Runge-Kutta 4. Ordnung! Der tiefere Grund liegt darin, dass dieses Verfahren die *exakte* Lösung der Bewegungsgleichungen für eine Hamilton-Funktion darstellt, die im Zeitmittel die korrekte Hamilton-Funktion approximiert,

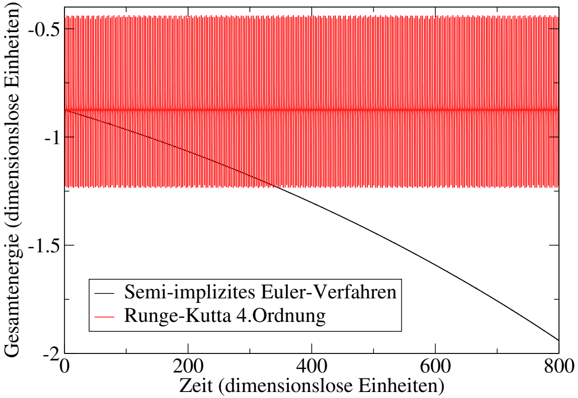
$$H = T(\mathbf{p}) + \sum_n \delta(t - t_n) V(\mathbf{r}).$$

Durch geeignete Kombination von “Kick”- und “Drift”-Schritten erhält man Verfahren 2. Ordnung (velocity Verlet, leicht abgewandelt auch als Leapfrog-Verfahren),

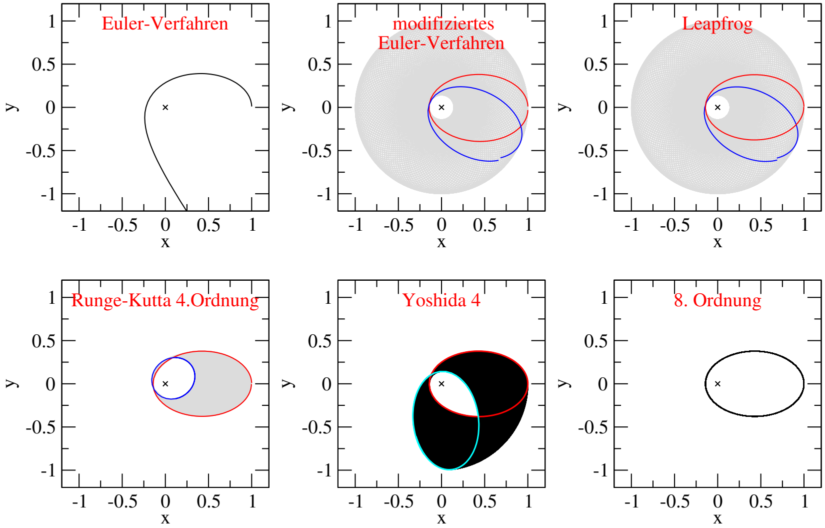
$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{a}(\mathbf{r}_n), \quad \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t\, \mathbf{v}_{n+1/2}, \quad \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{a}(\mathbf{r}_{n+1}),$$

oder höherer Ordnung (z.B., Yoshida 1990, Physics Letters A 150, 262).

Semi-implizites Euler-Verfahren vs. Runge-Kutta 4. Ordnung: Energieerhaltung

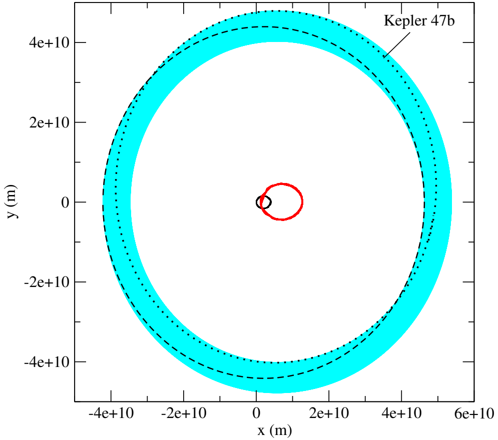


Ergebnisse verschiedener Verfahren – Kpeler-Problem



Ausblick auf Anwendungen

Der Austausch von Energie und Drehimpuls zwischen den drei Körpern führt zu komplexer Dynamik (insbesondere Resonanzphänomene) von periodischen Oszillationen der Bahnparameter hin zu chaotischem Verhaltem und evtl. dem Aufbrechen des Systems.



Apsidendrehung von Kepler-47b (Exoplanet in Doppelsternsystem)

Zur weiteren Lektüre

Numerische Methoden:

- Binney & Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press
- Press, Teukolsky, Vetterling & Flannery, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press (Progammiersprache nach Wahl), Kapitel “Integration of Ordinary Differential Equations”
- Fortgeschritten: Yoshida 1990, Physics Letters A 150, 262 (Konstruktion symplektischer Integratoren höherer Ordnung)
- Sehr fortgeschritten: Arseth, Tout & Mardling (eds.), *The Cambridge N-Body Lectures*, Kapitel 1 & 2

Physik des Dreikörperproblems:

- Arseth, Tout & Mardling (eds.), *The Cambridge N-Body Lectures*, Kapitel 3

Zum Ausprobieren:

- MERCURY6-Code: `https://github.com/smirik/mercury`