

# Numerische Integration des Dreikörperproblems

A/Prof Bernhard Müller

`https:`

`//github.com/bjmueller/three_body_problem`

3. Mai 2022

# Wiederholung: Zweikörperproblem

Die Bewegungsgleichungen für die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  der Massenpunkte  $m_1$  und  $m_2$  unter dem Einfluss der Gravitation,

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3},$$
$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3},$$

können nach Übergang in Relativkoordinaten in ein äquivalentes Einkörperproblem überführt werden. Dieses ist in *geschlossener Form* lösbar ( $\rightarrow$ Keplersche Gesetze).

# Wiederholung: Zweikörperproblem

Die Bewegungsgleichungen für die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  der Massenpunkte  $m_1$  und  $m_2$  unter dem Einfluss der Gravitation,

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3},$$
$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3},$$

können nach Übergang in Relativkoordinaten in ein äquivalentes Einkörperproblem überführt werden. Dieses ist in *geschlossener Form* lösbar ( $\rightarrow$ Keplersche Gesetze). Für mehr als zwei Körper existiert für beliebige Anfangsbedingungen i.A. keine Lösung in geschlossener Form. Abgesehen von Spezialfällen muss man daher auf Störungsrechnung zurückgreifen oder die Bewegungsgleichungen **numerisch integrieren**.

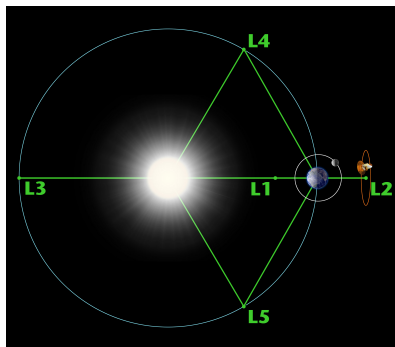
# Dreikörperproblem vs. N-Körperproblem

- Die Methoden zur numerischen Integration des Dreikörperproblems (bzw. des *few-body problems*) und des allgemeinen N-Körper-Problems weisen Ähnlichkeiten auf; allerdings gibt es in der Praxis aufgrund der spezifischen physikalischen Fragestellungen, numerischer Effizienzfragen, und pragmatischer Erwägungen Unterschiede.
- Beispiel: Bei der Trajektorienberechnung von Raumfahrzeugen ist eine erheblich größere relative Genauigkeit erforderlich und möglich als in stellardynamischen Modellen der Milchstraße.
- Das Dreikörperproblem eignet sich programmiertechnisch als “einfacher” Einstieg in Methoden zur Behandlung des Wenig- und Vielkörperproblems. Außerdem existieren speziellen Lösungen in geschlossener Form zur Code-Verifikation, und die gut verstandene Physik des Dreikörperproblems erleichtert die Interpretation numerischer Simulationen.

# Dreikörperproblem: Lösungen in geschlossener Form

Für den Fall dreier nicht verschwindender Massen ( $m_1, m_2, m_3 \neq 0$ ) sind einige geschlossene Lösungen des Dreikörperproblems bekannt (Euler, Lagrange).

Etwas einfacher und von großer praktischer Relevanz (z.B. für Weltraumteleskope) ist das **eingeschränkte Dreikörperproblem** mit  $m_3 = 0$ . Hier gibt es fünf Lösungen (Lagrangepunkte  $L_1$  bis  $L_5$ ), die im mitrotierenden System ortsfest sind. Die Lösung am stabilen Lagrangeunkt  $L_4$  sei unser erster Testfall.



©NASA/WMAP Science Team

Die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dots, \quad \ddot{\mathbf{r}}_3 = \dots, \quad (1)$$

können wir approximativ durch **Diskretisierung** lösen, d.h. wir suchen eine numerische Lösung zu den Zeiten  $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t$ , etc. (evtl. auch mit variablen Zeitschritten) und approximieren Ableitungen durch geeignete Differenzen.

Die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \dots, \quad \ddot{\mathbf{r}}_3 = \dots, \quad (1)$$

können wir approximativ durch **Diskretisierung** lösen, d.h. wir suchen eine numerische Lösung zu den Zeiten  $t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t$ , etc. (evtl. auch mit variablen Zeitschritten) und approximieren Ableitungen durch geeignete Differenzen.

Für die meisten Verfahren (Ausnahme z.B. klassisches Störmer-Verlet-Verfahren) überführt man die Bewegungsgleichungen zunächst in ein System 1. Ordnung, wobei wir zweckmäßigerweise zu Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren der drei Körper zusammenfassen ( $3 \times 3$  verallgemeinerte Koordinaten):

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(t), \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}(\mathbf{r}(t)), \quad (2)$$

oder alternativ als Hamiltonsche Bewegungsgleichungen, was später relevant wird,

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3)$$

# Erster Versuch: Euler-Verfahren

Wir bezeichnen die Lösung für verschiedene Zeiten mit einem unteren Index für den Zeitschritt. Das einfachste Verfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{a}(\mathbf{r}_n). \quad (4)$$



# Erster Versuch: Euler-Verfahren

Wir bezeichnen die Lösung für verschiedene Zeiten mit einem unteren Index für den Zeitschritt. Das einfachste Verfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{a}(\mathbf{r}_n). \quad (4)$$

Der Diskretisierungsfehler lässt sich mittels Taylor-Entwicklung abschätzen,

$$\mathbf{r}_n + \underbrace{\Delta t \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_n}_{\mathbf{v}_n} + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)_n + \mathcal{O}(\Delta t^3) = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_n. \quad (5)$$

# Erster Versuch: Euler-Verfahren

Wir bezeichnen die Lösung für verschiedene Zeiten mit einem unteren Index für den Zeitschritt. Das einfachste Verfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{a}(\mathbf{r}_n). \quad (4)$$

Der Diskretisierungsfehler lässt sich mittels Taylor-Entwicklung abschätzen,

$$\mathbf{r}_n + \underbrace{\Delta t \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_n}_{\mathbf{v}_n} + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)_n + \mathcal{O}(\Delta t^3) = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_n. \quad (5)$$

$\mathbf{r}_{n+1}$  weist einen **lokalen Fehler**  $\sim \ddot{\mathbf{r}}_n \Delta t^2 / 2$  auf. Über einen *fixen* Zeitraum ist der Fehler ungefähr  $\propto \Delta t$  (Verfahren 1. Ordnung), und sollte für  $\Delta t \rightarrow 0$  gegen die korrekte Lösungen gehen. Allerdings ist das numerische Resultat sehr unbefriedigend (siehe Animation).

- Erhaltungsgrößen (Gesamtenergie und -Drehimpuls) sind numerisch nicht erhalten.
- Dieses Problem tritt schon beim Ein- und Zweikörperproblem auf!
- Zusätzlich tritt ebenfalls schon beim Keplerproblem eine rein numerische Periheldrehung auf.
- Eine Verkleinerung des Zeitschritts ist keine effiziente und daher keine *praktikable* Lösung.
- Eine mögliche Verbesserungsstrategie besteht in der Reduktion des Fehlers mittels eines **Integrationsverfahrens höherer Ordnung**.

# Euler-Verfahren: Probleme

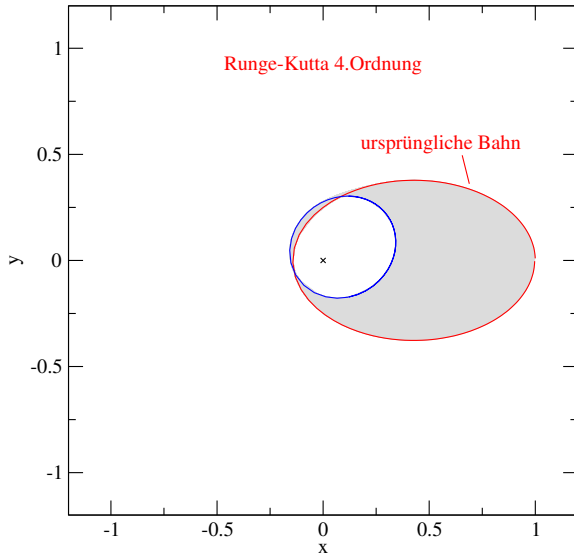
Die Ordnung des lokalen Fehlers in  $\Delta t$  kann durch Einführung zusätzlicher Stützstellen innerhalb des Zeitschritts erhöht werden, wie z.B. im verbesserten Euler-Verfahren (2. Ordnung),

$$\mathbf{y}_{n+1/2} = \mathbf{y}_n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{y}}_n, \quad \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \dot{\mathbf{y}}_{n+1} \quad \text{mit } \mathbf{y} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$$

Mehrstufige Verfahren höherer Ordnung können systematisch konstruiert werden (z.B. Familie der **Runge-Kutta-Verfahren**). Dabei kann auch **Fehlerschätzer** eingebaut werden, der eine **adaptive Schrittweitensteuerung** ermöglicht. Sehr verbreitet ist das Runge–Kutta–Fehlberg (RK45) Verfahren 4. Ordnung mit einem Fehlerschätzer  $\mathcal{O}(\Delta t^5)$ .

Die Konvergenz mit  $\Delta t^r$  bei einem Verfahren mit fester Ordnung  $r$  kann noch übertroffen werden, wenn man ein Verfahren niedriger Ordnung für *verschiedene* Zwischenschritte  $\delta h < \Delta t$  ausführt und zu  $\delta h \rightarrow 0$  extrapoliert (**Bulirsch-Stoer-Verfahren**).

# Ellipsenbahn mit Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung



# Symplektische Verfahren

Die meisten Verfahren höherer Ordnung leiden immer noch spürbar unter der Nichterhaltung von Erhaltungsgrößen. Betrachten wir nun das scheinbar “falsche” Euler-Verfahren,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{a}(\mathbf{r}_{n+1}).$$

# Symplektische Verfahren

Die meisten Verfahren höherer Ordnung leiden immer noch spürbar unter der Nichterhaltung von Erhaltungsgrößen. Betrachten wir nun das scheinbar “falsche” Euler-Verfahren,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{a}(\mathbf{r}_{n+1}).$$

Dieses **semi-implizite Euler-Verfahren** ist ein korrektes Verfahren 1. Ordnung und erzielt langfristig *bessere* Energieerhaltung als Runge-Kutta 4. Ordnung! Der tiefere Grund liegt darin, dass dieses Verfahren die *exakte* Lösung der Bewegungsgleichungen für eine Hamilton-Funktion darstellt, die im Zeitmittel die korrekte Hamilton-Funktion approximiert,

$$H = T(\mathbf{p}) + \sum_n \delta(t - t_n) V(\mathbf{r}).$$

# Symplektische Verfahren

Die meisten Verfahren höherer Ordnung leiden immer noch spürbar unter der Nichterhaltung von Erhaltungsgrößen. Betrachten wir nun das scheinbar “falsche” Euler-Verfahren,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{a}(\mathbf{r}_{n+1}).$$

Dieses **semi-implizite Euler-Verfahren** ist ein korrektes Verfahren 1. Ordnung und erzielt langfristig *bessere* Energieerhaltung als Runge-Kutta 4. Ordnung! Der tiefere Grund liegt darin, dass dieses Verfahren die *exakte* Lösung der Bewegungsgleichungen für eine Hamilton-Funktion darstellt, die im Zeitmittel die korrekte Hamilton-Funktion approximiert,

$$H = T(\mathbf{p}) + \sum_n \delta(t - t_n) V(\mathbf{r}).$$

Durch geeignete Kombination von “Kick”- und “Drift”-Schritten erhält man Verfahren 2. Ordnung (velocity Verlet, leicht abgewandelt auch als Leapfrog-Verfahren),

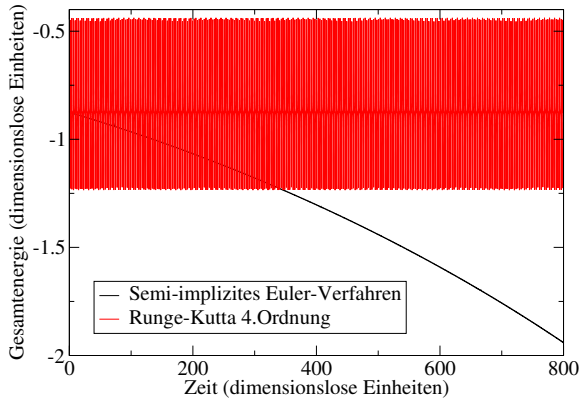
$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}(\mathbf{r}_n), \quad \mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \Delta t \mathbf{v}_{n+1/2}, \quad \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}(\mathbf{r}_{n+1}),$$

oder höherer Ordnung (z.B., Yoshida 1990, Physics Letters A 150, 262).

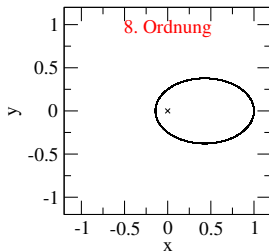
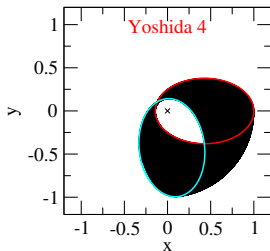
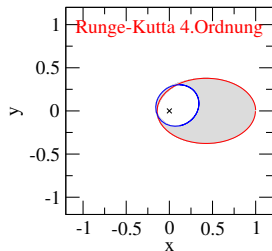
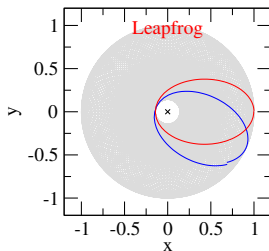
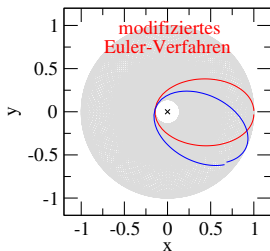
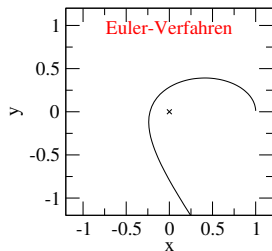


# Semi-implizites Euler-Verfahren vs. Runge-Kutta 4. Ordnung

## 4. Ordnung: Energieerhaltung



# Ergebnisse verschiedener Verfahren – Kepler-Problem

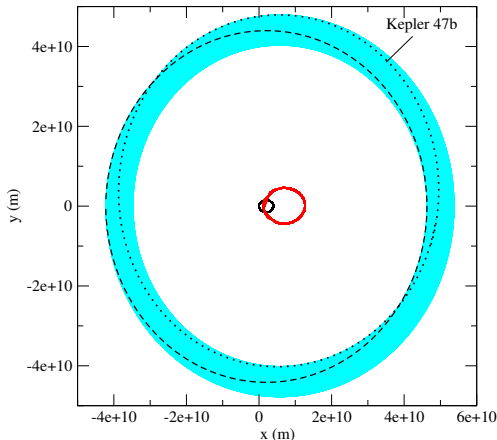


# Ausblick auf Anwendungen

Der Austausch von Energie und Drehimpuls zwischen den drei Körpern führt zu komplexer Dynamik (insbesondere Resonanzphänomene) von periodischen Oszillationen der Bahnparameter hin zu chaotischem Verhalten und evtl. dem Aufbrechen des Systems.

# Ausblick auf Anwendungen

Der Austausch von Energie und Drehimpuls zwischen den drei Körpern führt zu komplexer Dynamik (insbesondere Resonanzphänomene) von periodischen Oszillationen der Bahnparameter hin zu chaotischem Verhalten und evtl. dem Aufbrechen des Systems.



Apsidendrehung von Kepler-47b (Exoplanet in Doppelsternsystem)

# Zur weiteren Lektüre

## Numerische Methoden:

- Binney & Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press
- Press, Teukolsky, Vetterling & Flannery, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press (Programmiersprache nach Wahl), Kapitel "Integration of Ordinary Differential Equations"
- Fortgeschritten: Yoshida 1990, Physics Letters A 150, 262 (Konstruktion symplektischer Integratoren höherer Ordnung)
- Sehr fortgeschritten: Arseth, Tout & Mardling (eds.), *The Cambridge N-Body Lectures*, Kapitel 1 & 2

## Physik des Dreikörperproblems:

- Arseth, Tout & Mardling (eds.), *The Cambridge N-Body Lectures*, Kapitel 3

## Zum Ausprobieren:

- MERCURY6-Code: <https://github.com/smirik/mercury>