

Fullstendige kvadrater

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



Fullstendige kvadrater

1 Fullstendige kvadrater

- Hva er fullstendige kvadrater?
- Lage fullstendige kvadrater
- Faktorisere andregradsuttrykk

2 Andregradslikninger med to ledd

3 Andregradsformelen

Hva er fullstendige kvadrater?

Definisjon

Et uttrykk er et **fullstendig kvadrat** dersom det kan faktorerises ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

Hva er fullstendige kvadrater?

Definisjon

Et uttrykk er et **fullstendig kvadrat** dersom det kan faktorerises ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

Eksempler:

- Uttrykket $x^2 + 10x + 25$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.

Hva er fullstendige kvadrater?

Definisjon

Et uttrykk er et **fullstendig kvadrat** dersom det kan faktorerises ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

Eksempler:

- Uttrykket $x^2 + 10x + 25$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
- Uttrykket $x^2 - x + \frac{1}{4}$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

Hva er fullstendige kvadrater?

Definisjon

Et uttrykk er et **fullstendig kvadrat** dersom det kan faktorerises ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

Eksempler:

- Uttrykket $x^2 + 10x + 25$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
- Uttrykket $x^2 - x + \frac{1}{4}$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.
- Uttrykket $x^2 - 5x + 6$ er **ikke** et fullstendig kvadrat.

Fullstendig kvadrat

- Første og andre kvadratsetning er

$$(x + y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$

Fullstendig kvadrat

- Første og andre kvadratsetning er

$$(x + y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$

- Så for at $x^2 + bx + c$ skal kunne skrives om ved hjelp av første eller andre kvadratsetning, må $b = \pm 2y$ og $c = y^2$.

Fullstendig kvadrat

- Første og andre kvadratsetning er

$$(x + y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$

- Så for at $x^2 + bx + c$ skal kunne skrives om ved hjelp av første eller andre kvadratsetning, må $b = \pm 2y$ og $c = y^2$.
- Det vil si at vi må ha $c = (\frac{b}{2})^2$.

Fullstendig kvadrat

- Første og andre kvadratsetning er

$$(x + y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$

- Så for at $x^2 + bx + c$ skal kunne skrives om ved hjelp av første eller andre kvadratsetning, må $b = \pm 2y$ og $c = y^2$.
- Det vil si at vi må ha $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Regel

Uttrykket $x^2 + bx + c$ er et fullstendig kvadrat hvis og bare hvis

$$c = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke **andre** kvadratsetning.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke **andre** kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $14x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke **andre** kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $14x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{14}{2} = 7$.
- Sjekker at siste ledd er $(\frac{b}{2})^2$:

$$7^2 = 49.$$

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke **andre** kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $14x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{14}{2} = 7$.
- Sjekker at siste ledd er $(\frac{b}{2})^2$:

$$7^2 = 49.$$

- Vi har derfor

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2.$$

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $10x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $10x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
- Sjekker om siste ledd er $(\frac{b}{2})^2$:

$$5^2 = 25.$$

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke **første** kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $10x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
- Sjekker om siste ledd er $(\frac{b}{2})^2$:
$$5^2 = 25.$$
- Siden $20 \neq 25$ er $x^2 + 10x + 20$ **ikke** et fullstendig kvadrat.

Fullstendige kvadrater

1 Fullstendige kvadrater

- Hva er fullstendige kvadrater?
- Lage fullstendige kvadrater
- Faktorisere andregradsuttrykk

2 Andregradslikninger med to ledd

3 Andregradsformelen

Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som **ikke** er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som **ikke** er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

Eksempel

Vi så nettopp at $x^2 + 10x + 20$ ikke var et fullstendig kvadrat, siden siste leddet burde vært **25**. Vi får:

$$x^2 + 10x + 20 = x^2 + 10x + 25 - 25 + 20$$

Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som **ikke** er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

Eksempel

Vi så nettopp at $x^2 + 10x + 20$ ikke var et fullstendig kvadrat, siden siste leddet burde vært **25**. Vi får:

$$\begin{aligned}x^2 + 10x + 20 &= x^2 + 10x + \mathbf{25} - \mathbf{25} + 20 \\ &= (x + 5)^2 - 25 + 20\end{aligned}$$

Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som **ikke** er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

Eksempel

Vi så nettopp at $x^2 + 10x + 20$ ikke var et fullstendig kvadrat, siden siste leddet burde vært **25**. Vi får:

$$\begin{aligned}x^2 + 10x + 20 &= x^2 + 10x + \mathbf{25} - \mathbf{25} + 20 \\&= (x + 5)^2 - 25 + 20 \\&= (x + 5)^2 - 5\end{aligned}$$

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3$$

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3$$

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 - 6x + 2$:

$$x^2 - 6x + 2$$

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 - 6x + 2$:

$$x^2 - 6x + 2 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 2$$

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x + 1)^2 - 4\end{aligned}$$

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 - 6x + 2$:

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 2 &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 2 \\ &= (x - 3)^2 - 7\end{aligned}$$

Fullstendige kvadrater

1 Fullstendige kvadrater

- Hva er fullstendige kvadrater?
- Lage fullstendige kvadrater
- Faktorisere andregradsuttrykk

2 Andregradslikninger med to ledd

3 Andregradsformelen

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2)$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2) = (x + 3)(x - 1).$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2) = (x + 3)(x - 1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, og vi har **faktorisert** uttrykket.

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2) = (x + 3)(x - 1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, og vi har **faktorisert** uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraledet vi får etter å ha fullført kvadratet er **negativt**.

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2) = (x + 3)(x - 1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, og vi har **faktorisert** uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraledet vi får etter å ha fullført kvadratet er **negativt**.
- Eksempel: Vi har

$$x^2 - 6x + 2$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2) = (x + 3)(x - 1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, og vi har **faktorisert** uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraledet vi får etter å ha fullført kvadratet er **negativt**.
- Eksempel: Vi har

$$x^2 - 6x + 2 = (x - 3)^2 - 7$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2) = (x + 3)(x - 1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, og vi har **faktorisert** uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraledet vi får etter å ha fullført kvadratet er **negativt**.
- Eksempel: Vi har

$$x^2 - 6x + 2 = (x - 3)^2 - 7 = (x - 3)^2 - \sqrt{7}^2$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2) = (x + 3)(x - 1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, og vi har **faktorisert** uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraledet vi får etter å ha fullført kvadratet er **negativt**.
- Eksempel: Vi har

$$\begin{aligned}x^2 - 6x + 2 &= (x - 3)^2 - 7 = (x - 3)^2 - \sqrt{7}^2 \\ &= (x - 3 + \sqrt{7})(x - 3 - \sqrt{7})\end{aligned}$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot x + 6,25 - 6,25 + 6$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot x + 6,25 - 6,25 + 6 = (x - 2,5)^2 - 0,25.$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot x + 6,25 - 6,25 + 6 = (x - 2,5)^2 - 0,25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$(x - 2,5)^2 - 0,25$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot x + 6,25 - 6,25 + 6 = (x - 2,5)^2 - 0,25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$(x - 2,5)^2 - 0,25 = (x - 2,5)^2 - \sqrt{0,25}^2$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot x + 6,25 - 6,25 + 6 = (x - 2,5)^2 - 0,25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$(x - 2,5)^2 - 0,25 = (x - 2,5)^2 - \sqrt{0,25}^2 = (x - 2,5)^2 - 0,5^2$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot x + 6,25 - 6,25 + 6 = (x - 2,5)^2 - 0,25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$\begin{aligned}(x - 2,5)^2 - 0,25 &= (x - 2,5)^2 - \sqrt{0,25}^2 &&= (x - 2,5)^2 - 0,5^2 \\ &= (x - 2,5 + 0,5)(x - 2,5 - 0,5)\end{aligned}$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot x + 6,25 - 6,25 + 6 = (x - 2,5)^2 - 0,25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$\begin{aligned}(x - 2,5)^2 - 0,25 &= (x - 2,5)^2 - \sqrt{0,25}^2 &&= (x - 2,5)^2 - 0,5^2 \\ &= (x - 2,5 + 0,5)(x - 2,5 - 0,5) &&= (x - 2)(x - 3).\end{aligned}$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktorer $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot x + 6,25 - 6,25 + 6 = (x - 2,5)^2 - 0,25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$\begin{aligned}(x - 2,5)^2 - 0,25 &= (x - 2,5)^2 - \sqrt{0,25}^2 &&= (x - 2,5)^2 - 0,5^2 \\ &= (x - 2,5 + 0,5)(x - 2,5 - 0,5) &&= (x - 2)(x - 3).\end{aligned}$$

Så $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Vi kan gange ut for å se at det stemmer.



OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET