

Sammensatte funksjoner

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



1 Sammensatte funksjoner

- Sammensatte funksjoner og kjerneregelen
- Differensialer og deriverte

2 Derivasjon av et produkt

3 Derivasjon av en kvotient

Sammensatte funksjoner og kjerneregelen

Sammensatte funksjoner

- Hvis vi har $g(u) = u^2 + 3u$ og $u(x) = 2x^2$ kan vi **sette sammen** funksjonene til

$$g(u(x)) = (u(x))^2 + 3 \cdot u(x) = (2x^2)^2 + 3 \cdot 2x^2 = 4x^4 + 6x^2.$$

- Vi skriver $g(u)$ for å **hint** om at vi planlegger sette inn $u(x)$ i g , men vi kunne ha skrevet $g(x)$ også.
- Å dele opp i sammensatt funksjon gjør at vi kan regne ut $f(x)$ i **to steg**.
- **Først** regner vi ut $u = 2x^2$, **så** regner vi ut $g = u^2 + 3u$.
- Vi kaller $u(x)$ for **kjernen** til sammensetningen.
- Vi kan også ha funksjoner som består av flere sammensetninger.
- Om $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ kan vi skrive

$$f(x) = g(u(v(x))) \quad g(u) = \frac{1}{u} \quad u(v) = \sqrt{v} \quad v(x) = x^2 + 1.$$

Kjerneregelen

- Vi kan derivere funksjonen \sqrt{x} og funksjonen $x^2 + 1$.
- Men vi kan ikke (ennå) derivere $\sqrt{x^2 + 1}$.
- Vi kan skrive $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ som en sammensatt funksjon.
- Vi velger $g(u) = \sqrt{u}$ og $u(x) = x^2 + 1$. Vi får da $f(x) = g(u(x))$.
- Vi kan finne både $g'(u)$ og $u'(x)$, og vil kombinere dem til $f'(x)$.
- Det viser seg at det riktige er å gange.

Regel (Kjerneregelen)

Om vi kan skrive $f(x) = g(u(x))$ har vi

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x).$$

Kjerneregelen, eksempel

Oppgave

Finn den deriverte til $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- Vi skriver $g(u) = \sqrt{u}$ og $u(x) = x^2 + 1$.
- Vi får da $g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ og $u'(x) = 2x$.
- Fra kjerneregelen får vi derfor

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u) \cdot u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

Kjerneregelen, eksempel II

Oppgave

Finn den deriverte til $f(x) = (x^2 + 1)^3$.

- Vi setter $g(u) = u^3$ og $u(x) = x^2 + 1$.
- Vi får da $g'(u) = 3u^2$ og $u'(x) = 2x$.
- Fra kjerneregelen får vi derfor

$$\begin{aligned}f'(x) &= g'(u) \cdot u'(x) = 3u^2 \cdot 2x \\ &= 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2\end{aligned}$$

- Her kunne vi også regnet ut

$$f(x) = (x^2 + 1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

og så fått $f'(x) = 6x^5 + 12x^3 + 6x$, men det er mer arbeid.

Kjerneregelen, eksempel III

Oppgave

Finn den deriverte til $f(x) = \frac{1}{x^3+2x}$.

- Vi setter $g(u) = \frac{1}{u}$ og $u(x) = x^3 + 2x$.
- Vi får da $g'(u) = -\frac{1}{u^2}$ og $u'(x) = 3x^2 + 2$.
- Fra kjerneregelen får vi derfor

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u) \cdot u'(x) = -\frac{1}{u^2} \cdot 3x^2 = -\frac{3x^2}{(x^3 + 2x)^2} \\ &= -\frac{3x^2}{(x(x^2 + 2))^2} = -\frac{\cancel{x^2}^{3x^2}}{\cancel{x^2}^{x^2}(x^2 + 2)^2} = -\frac{3}{(x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

Kjerneregelen, forenklet utregning

- Når vi blir bedre på å bruke kjerneregelen, slipper vi å skrive så mye.
- Det første steget er at vi ikke lenger gidder skrive opp $g(u)$.
- Eksempel: Deriverer $f(x) = \sqrt{x-1} = \sqrt{u}$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)' = (\sqrt{u})' \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

- Det neste steget er at vi ikke gidder skrive opp u heller.
- Vi må fremdeles huske å gange med u' .
- Eksempel: Deriverer $f(x) = \sqrt{x-1}$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Kjerneregelen, eksempel IV

Oppgave

Deriver $f(x) = \frac{1}{x+1} + \sqrt{x^2 - 2}$.

- Her bruker vi kjerneregelen på **hvert ledd**.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x+1} + \sqrt{x^2 - 2} \right)' = \left(\frac{1}{x+1} \right)' + \left(\sqrt{x^2 - 2} \right)' \\ &= -\frac{1}{(x+1)^2} \cdot (x+1)' + \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2}} \cdot (x^2 - 2)' \\ &= -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} \end{aligned}$$

Differensialer og deriverte

Differensialer

- Vi kan også skrive deriverte som $\frac{df}{dx}$ i stedet for $f'(x)$.
- Her er df og dx **differensialer**.
 - Differensialet dx betyr «en **uendelig liten** endring i x .»
 - Differensialet df betyr «en **uendelig liten** endring i f .»
- Siden den deriverte er **vekstfarten** til grafen, får vi da at

$$df = f'(x) dx.$$

- Dersom vi gjør en **uendelig liten** endring i x må vi gange med vekstfarten for å finne endringen i f .
- Om vi deler begge sider på dx ser vi at vi får

$$\frac{df}{dx} = f'(x).$$

Differensialer og tilnærming

- Siden dx er uendelig liten, stemmer ikke formelen $df = f'(x) dx$ for vanlige tall.
- Men om tallene er veldig små får vi en god tilnærming.

Oppgave

Om $f(3) = 5$ og $f'(3) = 9$, hva blir $f(3,0001)$?

- Vi bruker $dx = 0,0001$ i formelen og får

$$df = f'(x) dx = 9 \cdot 0,0001 = 0,0009.$$

- Endringen i f er derfor 0,0009.
- Den nye verdien til f er derfor $5 + 0,0009 = 5,0009$.
- Jeg brukte $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4$ for å finne tallene, som gir meg at det ekte svaret er $f(3,0001) = 5,000\,900\,03$.

Differensialer og kjerneregelen

- Om en funksjon er gitt ved $y = \sqrt{x^2 + 1}$ kan vi definere $u = x^2 + 1$.
- Vi får da $y = \sqrt{u}$.
- Om vi deriverer y med hensyn på u får vi $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$.
- Om vi deriverer u med hensyn på x får vi $\frac{du}{dx} = 2x$.
- Fra kjerneregelen får vi da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

- Vi kan huske kjerneregelen ved at vi kan **stryke** du -ene mot hverandre i produktet:

$$\frac{dy}{\cancel{du}} \cdot \frac{\cancel{du}}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$



OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET