

Lineære likningssett

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



1 Lineære likningssett

- Lineære likninger og likningssett
- Å løse likningssett: Innsetningsmetoden
- Å løse likningssett: Addisjonsmetoden

2 Ikke-lineære likningssett

3 Ulikheter

Lineære likninger og likningssett

Hva er en lineær likning?

Definisjon

En likning er **lineær** dersom hvert ledd enten er et tall eller et tall ganget med en ukjent.

Eksempler:

- Likningen $2x + 3y - 4z = 3x - 2y + 5$ er lineær.
- Likningen $2x + 3yz - z + 4 = 1$ er **ikke** lineær, da leddet $3yz$ har to ukjente.
- Likningen $2x^2 + 3y - 4 = 2$ er **ikke** lineær, da leddet $2x^2$ har en ukjent opphøyd i 2.
- Likningen $\frac{1}{3}x + 7y = 3$ er **ikke** lineær, da leddet $\frac{1}{3}x$ deler på en ukjent.

Hva er et likningssett?

Definisjon

Et **likningssett** er et sett med likninger vi vil at skal være sanne **samtidig**.

Vi skriver dem enten

Under hverandre:

$$2x + 3y = 5$$

$$7x - y = 6$$

Ved hjelp av «og»:

$$2x + 3y = 5$$

og

$$7x - y = 6$$

$$2x + 3y = 5$$

\wedge

$$7x - y = 6$$

Å løse likningssett: Innsetningsmetoden

Innsettingsmetoden, eksempel

- Vi vil løse likningssettet

$$2x + 3y = 5$$

$$7x - y = 6.$$

- Vi løser den nederste likningen for y :

$$7x - y = 6$$

$$7x - 6 = y.$$

- Vi har nå at

$$y = 7x - 6$$

og kan bruke det i den andre likningen.

Innsettingsmetoden, eksempel

- Vi har funnet $y = 7x - 6$.
- Vi setter dette inn i den øverste likningen og løser for x :

$$2x + 3(7x - 6) = 5$$

$$2x + 21x - 18 = 5$$

$$23x = 23$$

$$x = 1.$$

- Vi vet nå at $x = 1$ men vet ikke hva y er ennå.

Innsettingsmetoden, eksempel

- Vi har at $x = 1$ og $y = 7x - 6$.
- Vi setter inn svaret vårt for x i likningen for y :

$$y = 7 \cdot 1 - 6$$

$$y = 1.$$

- Vi har derfor at $x = 1$ og at $y = 1$.
- Vi kan skrive det på følgende måter:

$$x = 1 \text{ og } y = 1$$

$$x = 1 \quad \wedge \quad y = 1$$

$$(x, y) = (1, 1).$$

Innsettingsmetoden

Innsettingsmetoden følger alltid disse stegene:

- 1 Løs en av likningene for den ene variabelen.
- 2 Sett det du kom frem til inn for variabelen i den andre likningen. Du har nå én likning med én ukjent.
- 3 Løs denne likningen.
- 4 Sett inn svaret du nettopp fant i likningen fra 1.

Det kan også være mer enn to ukjente, og da mer enn to likninger. Vi må da repetere 1 og 2 helt til vi sitter igjen med kun én likning og én ukjent.

Flere variable, innsetningsmetoden

- Vi vil løse likningssettet

$$3x - y + 2z = 9$$

$$2x + y - 4z = 2$$

$$-x - y + 5z = 3$$

- Vi løser midterste likning for y og får

$$2x + y - 4z = 2$$

$$y = 2 - 2x + 4z.$$

- Dette vil vi sette inn i øverste og nederste likning.

Flere variable, innsettingsmetoden

- Vi fant $y = 2 - 2x + 4z$. Setter dette inn i de to ubrukte likningene.
- Øverste likning gir oss

$$3x - y + 2z = 9$$

$$3x - (2 - 2x + 4z) + 2z = 9$$

$$3x - 2 + 2x - 4z + 2z = 9$$

$$5x - 2z = 11.$$

- Nederste likning gir oss

$$-x - y + 5z = 3$$

$$-x - (2 - 2x + 4z) + 5z = 3$$

$$-x - 2 + 2x - 4z + 5z = 3$$

$$x + z = 5$$

Flere variable, innsetningsmetoden

- Vi har funnet likningene $5x - 2z = 11$ og $x + z = 5$.
- Dette er **to** likninger med **to** ukjente.
- Vi løser den siste for z og får $z = 5 - x$.
- Vi fyllet dette inn i den første, og får:

$$5x - 2z = 11$$

$$5x - 2(5 - x) = 11$$

$$5x - 10 + 2x = 11$$

$$7x = 21$$

$$x = 3.$$

Flere variable, innsetningsmetoden

- Vi har:

$$x = 3$$

$$z = 5 - x$$

$$y = 2 - 2x + 4z$$

- Vi fyller inn verdien for x i den andre likningen, og får

$$z = 5 - 3 = 2.$$

- Vi fyller inn verdiene for x og z i den siste, og får

$$y = 2 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 4.$$

- Svaret blir derfor

$$x = 3 \quad \text{og} \quad y = 4 \quad \text{og} \quad z = 2.$$

Å løse likningssett: Addisjonsmetoden

Addisjonsmetoden, eksempel

- Vi vil løse likningssettet

$$\begin{aligned}3x - y &= 2 \\ -2x + y &= 1\end{aligned}$$

- Vi **plusser** sammen de to likningene ved å
 - Plusse venstresidene sammen
 - Plusse høyresidene sammen
- Vi får

$$\begin{aligned}(3x - y) + (-2x + y) &= 2 + 1 \\ x &= 3.\end{aligned}$$

- Setter inn $x = 3$ i den nederste likningen og får $y = 7$.

Addisjonsmetoden

- Den andre måten vi kan bruke til å løse likninger går ut på å **plusse** sammen likningene på lure måter.
- Idéen er
 - Vi kan plusse på det samme på begge sider av liketstegnet i den ene likningen.
 - Venstresiden og høyresiden i den andre likningen er jo like.
 - Vi kan derfor plusse sammen venstresidene og høyresidene hver for seg.
- Vi må vanligvis være litt lure og gange opp likningene før vi plusser dem sammen.
- Hver gang vi plusser sammen, vil vi bli kvitt en ukjent.

Addisjonsmetoden, eksempel II

- Vi vil løse likningssettet

$$2x + 3y = 5$$

$$7x - y = 6.$$

- Vi ganger den nederste likningen med 3 og legger til den øverste:

$$(2x + 3y) + 3(7x - y) = 5 + 3 \cdot 6$$

$$2x + 3y + 21x - 3y = 23$$

$$23x = 23$$

$$x = 1$$

- Vi setter inn $x = 1$ i en av de originale likningene, og får $y = 1$.

Flere variable, addisjonsmetoden

- Vi vil løse likningssettet

$$3x - y + 2z = 9$$

$$2x + y - 4z = 2$$

$$-x - y + 5z = 3$$

- Vi plusser sammen øverste og midterste likning:

$$(3x - y + 2z) + (2x + y - 4z) = 9 + 2$$

$$5x - 2z = 11$$

- Vi plusser sammen midterste og nederste likning:

$$(2x + y - 4z) + (-x - y + 5z) = 2 + 3$$

$$x + z = 5$$

Flere variable, addisjonsmetoden

- Vi har funnet

$$5x - 2z = 11$$

$$x + z = 5$$

- Vi trekker den nederste likningen 5 ganger fra den øverste:

$$(5x - 2z) - 5(x + z) = 11 - 5 \cdot 5$$

$$-7z = -14$$

$$z = 2$$

- Setter inn $z = 2$ i en av likningene over, og får $x = 3$.

Flere variable, addisjonsmetoden

- Vi startet med likningene

$$3x - y + 2z = 9$$

$$2x + y - 4z = 2$$

$$-x - y + 5z = 3$$

- Vi har funnet $x = 3$ og $z = 2$.
- Setter dette inn i den midterste likningen og får

$$2x + y - 4z = 2$$

$$2 \cdot 3 + y - 4 \cdot 2 = 2$$

$$y = 2 - 6 + 8$$

$$y = 4$$

- Vi har derfor

$$x = 3 \quad \text{og} \quad y = 4 \quad \text{og} \quad z = 2.$$

Addisjonsmetoden, eksempel III

- Vi vil løse likningssettet

$$2x + 3y = 14$$

$$3x - 5y = 21$$

- Her kan vi ikke plusse eller minuse den ene likningen riktig antall ganger for å fjerne en ukjent.
- Vi ganger første likning med 3 og trekker fra andre likning 2 ganger og får

$$3(2x + 3y) - 2(3x - 5y) = 3 \cdot 14 - 2 \cdot 21$$

$$6x + 9y - 6x + 10y = 42 - 42$$

$$19y = 0$$

$$y = 0$$

- Vi setter inn $y = 0$ i en av likningene over, og får $x = 7$.

Addisjonsmetoden og innsettingsmetoden

- Boka lærer kun bort innsettingsmetoden.
- Addisjonsmetoden er ofte raskere, men man må «se» hvordan det er lurt å plusse sammen likningene.
- Noen ganger må man «finne fellesnevner» med addisjonsmetoden.
- Om man kun skal lære seg én metode, fokuser på innsettingsmetoden.
- I senere kurs skal dere lære å løse likninger ved hjelp av matriser, og da er det hjelpsomt å kunne addisjonsmetoden.
- Med flere ukjente er addisjonsmetoden ganske mye raskere enn innsettingsmetoden.



OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET