

Derivasjon av et produkt

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



1 Sammensatte funksjoner

2 Derivasjon av et produkt

- Produktregelen
- Eksempler

3 Derivasjon av en kvotient

Produktregeln

Produktregelen

- Vi kan nå derivere både $(x^2 + 1)$ og $\sqrt{2x - 2}$, men ikke (ennå!) $(x^2 + 1)\sqrt{2x - 2}$.
- Vi trenger en regel som deriverer **produktet** av to funksjoner.

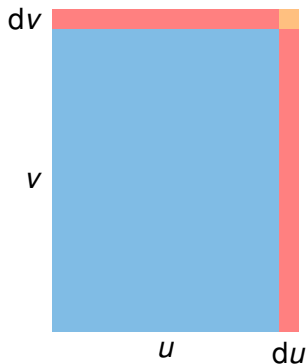
Regel

Om vi har funksjonene $u(x)$ og $v(x)$, får vi

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

- Rekkefølgen her har ikke noe å si, vi kunne skrevet $u \cdot v' + u' \cdot v$.
- Jeg anbefaler å huske rekkefølgen i regelen, da det kommer til å gjøre **brøkregelen** lettere å huske.

Et (raskt) bevis



- Vi har at $u \cdot v$ er **arealet** av rektangelet med sider u og v .
- Dersom vi **endrer** u og v **uendelig lite**, du og dv , blir **endringen i arealet**

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv + dudv.$$

- Vi deler begge sider på dx og får

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = \frac{du}{dv} v + u \frac{dv}{dx} + \frac{dudv}{dx}.$$

- Her er $\frac{dudv}{dx} = u'(x) \cdot dv$ **uendelig lite**, og ignoreres.
- Vi får derfor $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Eksempler

Produktregelen, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x - 2}$.

- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \sqrt{2x - 2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = \frac{2}{2\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$.
- Vi får da

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = 2x \cdot \sqrt{2x-2} + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-2}} \\ &= \frac{2x(2x-2)}{\sqrt{2x-2}} + \frac{x^2+1}{\sqrt{2x-2}} = \frac{5x^2-4x+1}{\sqrt{2x-2}} \end{aligned}$$

Produktregelen, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3(x^2 + 2x - 1)$.

- Vi lar $u(x) = x^3$ og $v(x) = x^2 + 2x - 1$.
- Vi får $u' = 3x^2$ og $v' = 2x + 2$.
- Vi får da

$$\begin{aligned}f(x) &= (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \\&= 3x^2 \cdot (x^2 + 2x - 1) + x^3 \cdot (2x + 2) \\&= 5x^4 + 8x^3 - 3x^2\end{aligned}$$

- Her hadde det vært lettere å gange ut for å få $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3$ og så derivere til $f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 3x^2$.

Produktregelen, eksempel III

Oppgave

Deriver $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

- Dette er **ikke** et produkt, men vi kan gjøre det om til ett.
- Vi lar $u(x) = x^2 + 1$ og $v(x) = \frac{1}{x-2}$.
- Vi får $u' = 2x$ og $v' = -\frac{1}{(x-2)^2}$.
- Og får da

$$\begin{aligned} f'(x) &= u' \cdot v + u \cdot v' = \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

- I neste delkapittel skal vi lære **brøkregelen**, som gjør disse utregningene lettere.



OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET