

# Horisontale asymptoter

**Nikolai Bjørnestøl Hansen**

**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**  
STORBYUNIVERSITETET



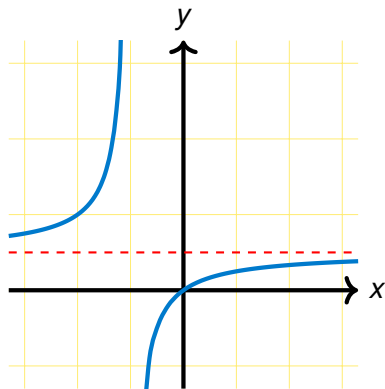
## 1 Vertikale asymptoten

## 2 Horizontale asymptoten

- Horizontal asymptote

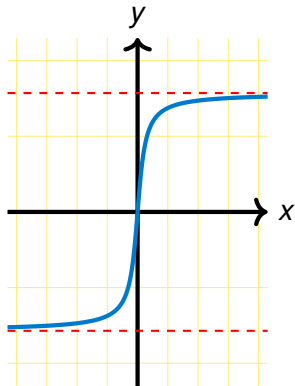
**Horizontal asymptote**

# Horizontal asymptote



- En **horizontal asymptote** er den horisontale linja som grafen vil gå mot når  $x$  går mot uendelig.
- De fleste grafer har **ikke** horisontale asymptoter.
- Mange rasjonale funksjoner har.
- Vi skriver  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  for å se hva  $f(x)$  går mot når  $x$  vokser og vokser.
- Vi skriver  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  for å se hva  $f(x)$  går mot når  $x$  synker.
- Vi får **ofte men ikke alltid** samme svar i begge retninger.
- Alle **rasjonale funksjoner** gir samme svar i begge retninger.

# Horisontale asymptoter



## Definisjon

Funksjonen  $f(x)$  har en **horizontal asymptote** i  $y = b$  om

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{eller} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

- En graf kan **maksimalt** ha to horisontale asymptoter.
- En i hver retning.
- Vi ser kun på grafer med **en** horizontal asymptote.
- Mer avanserte funksjoner må til for å få to.

# Finne horisontale asymptoter

Det er **to** triks vi bruker for å finne horisontale asymptoter.

1  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

2 Vi kan dele teller og nevner på høyeste potens av  $x$ .

## Eksempel

- Vi skal finne de horisontale asymptotene til  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 + x - 7}$ .
- Vi deler både teller og nevner på  $x^2$  og får, når  $x \rightarrow \pm\infty$

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{x^2} - 2\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{3\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - 7\frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} - 7\frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

- Den horisontale asymptoten er derfor i  $y = \frac{1}{3}$ .

# Forskjellig grad

- Om vi vil finne horisontal asymptote til  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-2}$  får vi

$$\frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + 2\frac{x}{x^2} - 2\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + 2\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

- Dette skjer alltid om teller har lavere grad enn nevner.
- Vi får alltid  $y = 0$  som horisontal asymptote.

## Regel

Om  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  og  $P(x)$  er et polynom av lavere grad enn  $Q(x)$ , har  $f(x)$  horisontal asymptote i  $y = 0$ .

# Forskjellig grad II

- Om vi vil finne horisontal asymptote til  $f(x) = \frac{x^2-2}{x+1}$  får vi

$$\frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 2\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{1}{0}.$$

- Men å dele på 0 er ikke lov!
- Vi deler på mindre og mindre ting, så vi får  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = \infty$ .
- Vi har derfor ingen horisontal asymptote.
- Dette skjer alltid om teller har høyere grad enn nevner.

## Regel

Om  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  og  $P(x)$  er et polynom av høyere grad enn  $Q(x)$ , har  $f(x)$  ingen horisontal asymptote.





**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**  
STORBYUNIVERSITETET