5.3.5 i Lin Alg.

A er diagonalisert. Bruk det vi vet om diagonalisering til å finne egenverdier og egenvektorer.

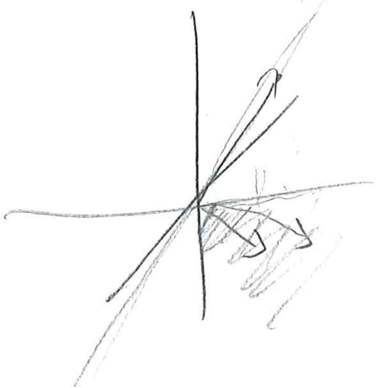
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene er langs diagonalen ($\lambda_1=5$ og $\lambda_2=1$)

Egenvektorene ligger i P

Egenvektor for $\lambda_1=5$ er $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og

egenvektorer for $\lambda_2=1$ er $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$



5.3.6

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Egenverdier 5 med egenvektorer $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

4 — " — $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

5.3.14 Diagonalisér

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = A \qquad |A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \cancel{+0\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5-\lambda & 4 \end{vmatrix}} \cancel{-0\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$+(5-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \qquad = (5-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \; 5-\lambda = 0 \Rightarrow 5 = \lambda$$
$$4-\lambda = 0 \Rightarrow 4 = \lambda$$
$$5-\lambda = 0 \Rightarrow 5 = \lambda$$

Starter med $\lambda = 4$ $\qquad A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 + 2R_3 \\ \sim \\ R_2 - 4R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 = 0 & \\ 2x + y = 0 & y = -2x \\ z = 0 & \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Egenvektor } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-1 \cdot R_1}{\overset{R_2 + 2R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + 2z = 0 \qquad x = -2z$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

$$= y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektorer $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ til diagonalisering.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Sjekk:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad A \cdot P = P \cdot D$$

(og $|P| \neq 0$)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad |P| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\operatorname{cof} P = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$-\left(1 \cdot 0 - (-2)(-2)\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot (\operatorname{cof} P)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.3.21

a) A er diagonaliserbar hvis $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ for en matrise D og inverterbar matrise P.

Nei, fordi vi må ha at D er diagonal.

b) Hvis $\mathbb{R}^n$ har en basis av egenvektorer for A, så er A diagonaliserbar.

Ja, fordi teori.

c) A er diagonaliserbar hvis og bare hvis A har n egenverdier, når vi teller multiplisitet.

Feil, en egenverdi som dukker opp to ganger trenger ikke å ha to tilhørende uavhengige egenvektorer.

d) Hvis A er inverterbar så er A diagonaliserbar.

Feil, inverterbar og diagonaliserbar har ingenting med hverandre å gjøre.

5.3.25

A er en 4x4-matrise med tre egenverdier.
Det ene egenrommet er endimensjonalt
En av de to andre egenrommene er todimensjonalt.

Er det mulig at A ikke er diagonaliserbar?

λ_1 som har én egenvektor
λ_2 som har to egenvektorer
λ_3 som har én egenvektor

4 til sammen

A er alltid diagonaliserbar.

5.3.26

A er en 7x7-matrise med tre egenverdier.
Et egenrom er todimensjonalt, en av de andre er tredimensjonalt.
Er det mulig at A ikke er diagonaliserbar.

λ_1 som har to egenvektorer
λ_2 som har tre egenvektorer
λ_3 som har ??? egenvektorer

7 til sammen?

er dette 1 eller 2?

Hvis det er én, så er A ikke diagonaliserbar.

Hvis det er to, så er A diagonaliserbar.

10.3.4. Diagonaliser matrisen (ortogonalt om mulig).

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Egenverdier:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = 1 \text{ og } \lambda = -1$$

Egenvektorer:

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2+R_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -x+y&=0 \\ x&=y \end{aligned}$$

Egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2-R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x+y&=0 \\ x&=-y \end{aligned}$$

Egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

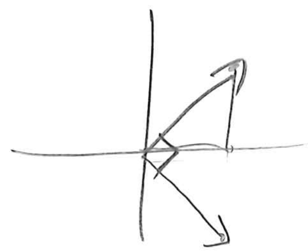
$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ortogonal diagonalisering:

- Alle egenvektorene er 90° på hverandre. ← Må være sjekke
- Alle egenvektorene har lengde 1. ← Kan vi fikse.

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ $\quad$ $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\quad$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Hvis A er ortogonalt diagonalisert, vil

$P^{-1} = P^T$ $\quad$ $\left(\text{Her: } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right)$

Teorem Alle egenvektorene vil være 90° på hverandre, og dersom kun A er symmetrisk. (til forskjellige egenverdier)

$$A^T = A$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10.3.4

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$

A er ikke symmetrisk, så kan ikke diagonaliseres ortogonalt.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq A$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Ingen reelle løsninger.
Komplekse løsninger, $\lambda = i$, $\lambda = -i$.

Egenvektor $\lambda = i$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 - iR_2}{\sim} \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -ix + y &= 0 \\ y &= ix \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Egenvektor, $\lambda = -i$

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 + iR_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -x + iy &= 0 \\ x &= iy \end{aligned}$$

egenvektor $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i &= \sqrt{-1} \end{aligned}}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

---

c)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

C er symmetrisk, kan ortogonalt diagonaliseres (hvis den kan diagonaliseres)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$= (3-\lambda)\lambda(\lambda-2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 3 \quad \vee \quad \lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = 2$$

Egenverdi $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}R_2}{\overset{R_3-R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x + z = 0$

$y = 0$

$x = -z$

Egenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Egenverdi $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_3+R_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-x + z = 0$

$y = 0$

$x = z$

Egenvektor $\begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Egenverdi $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-\frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_3+2R_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{V}_3\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = \sqrt{1} = 1 \qquad \vec{u}_3 = \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalisering:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}$$ litt mer stress å finne.