

# Faktorisering av polynomer

**Nikolai Bjørnestøl Hansen**

**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**  
STORBYUNIVERSITETET



## **1 Faktorisering av polynomer**

- Faktorisering
- Eksempler

## **2 Forkorting av rasjonale uttrykk**

# Faktorisering

# Faktorisering av andregradspolynom

- Vi har tidligere lært å faktorisere [andregradspolynom](#).
- Om andregradspolynomet  $P(x)$  har nullpunktene  $x_1$  og  $x_2$ , og andregradskoeffisient  $a$ , har vi

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Om  $P(x) = x^2 + bx + c$  og vi finner to tall  $y_1$  og  $y_2$  slik at

$$y_1 + y_2 = b$$

$$y_1 \cdot y_2 = c$$

så har vi

$$P(x) = (x + y_1)(x + y_2).$$

# Faktorisering av høyere grad

- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis  $x_1$  er et nullpunkt til  $P(x)$  så er  $x - x_1$  en **faktor** av  $P(x)$ .
  - Hvis  $x - x_1$  er en faktor, vil polynomdivisjonen  $P(x) : (x - x_1)$  gå opp.
  - Svaret vil da være et polynom av lavere grad.
- Dette betyr at om vi vi kan ett av nullpunktene til et tredjegradspolynom, så kan vi en av faktorene.
- Denne kan vi dele ut med for å få et andregradspolynom.
- Dette kan vi så faktorisere.
- Vi trenger to av nullpunktene til et fjerdegradspolynom, tre av nullpunktene til et femtegrads, og så videre.
- Om vi må **gjette** på nullpunkter, prøv med tall som deler **konstantleddet**.
- Typisk blir det oppgitt nullpunkt i oppgaven.

# Eksempler

# Eksempel faktorisering av tredjegradspolynom

## Oppgave

- Vis at  $(x + 1)$  er en faktor i  $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 2x + 15$ .
  - Faktoriser  $P(x)$  mest mulig.
- 
- Boka har veldig mange oppgaver av denne typen.
  - Idéen er å **sette inn**  $x = -1$  i polynomet, og se at du får 0.
  - Siden  $(x + 1)$  da er en faktor, kan vi utføre polynomdivisjonen.
  - Vi kan «lure systemet» ved å utføre divisjonen til å starte med.
  - Siden divisjonen går opp, er  $(x + 1)$  en faktor.
  - Første steg i neste oppgave er å polynomdividere, som vi allerede har gjort.
  - Ruffinis regel (se forelesning 5.3) gir oss også begge svarene samtidig.

# Eksempel faktorisering av tredjegradspolynom

## Oppgave

- Vis at  $(x + 1)$  er en faktor i  $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser  $P(x)$  mest mulig.

Vi polynomdividerer (Jeg bruker Ruffinis regel):

$x = -1$	2	-11	2	15
		-2	13	-15
	2	-13	15	0

Vi har derfor  $2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = (x + 1)(2x^2 - 13x + 15)$ .



# Eksempel faktorisering av tredjegradspolynom

## Oppgave

- Vis at  $(x + 1)$  er en faktor i  $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser  $P(x)$  mest mulig.

- Vi har funnet at  $2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = (x + 1)(2x^2 - 13x + 15)$ .
- For å fullføre oppgaven må vi faktorisere  $2x^2 - 13x + 15$ .
- Vi setter inn i andregradsformelen og får  $x = 3/2$  og  $x = 5$ .
- Vi har derfor  $2x^2 - 13x + 15 = 2(x - 5)(x - 3/2)$ .
- Og får da

$$2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = 2(x - 3/2)(x - 5)(x + 1).$$

# Faktorisering av fjerdegradspolynom

## Oppgave

Faktoriser  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$  så mye som mulig.

- Vi har her ingen hint, og må da gjette oss frem til nullpunkter.
- Vi prøver oss frem med ting som deler 9. Valgene er da  $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ .
- Vi ser at  $x = -1$  gir  $P(x) = 0$ , så  $x + 1$  må være en faktor.
- Vi polynomdividerer:

$$x = -1 \begin{array}{c|ccccc} & 1 & -4 & 4 & 0 & -9 \\ \hline & & -1 & 5 & -9 & 9 \\ \hline & 1 & -5 & 9 & -9 & 0 \end{array}$$

- Vi har:  $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x + 1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 9)$ .

# Faktorisering av fjerdegradspolynom

## Oppgave

Faktoriser  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$  så mye som mulig.

- Vi har funnet  $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x + 1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 9) = (x + 1)Q(x)$ .
- Vi må gjette oss frem til et nullpunkt for  $Q(x)$ , og prøver ting som deler 9.
- Vi ser at  $x = 3$  gir  $Q(x) = 0$ , så  $x - 3$  må være en faktor. Vi dividerer:

$$x = 3 \begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 9 & -9 \\ \hline & & 3 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

- Vi har derfor  $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = (x - 3)(x^2 - 2x + 3)$ .

# Faktorisering av fjerdegradspolynom

## Oppgave

Faktoriser  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$  så mye som mulig.

- Vi har at  $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x + 1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 9)$ .
- Vi har også funnet ut at  $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = (x - 3)(x^2 - 2x + 3)$ .
- Vi mangler bare å faktorisere  $x^2 - 2x + 3$ .
- Vi setter  $x^2 - 2x + 3$  inn i andregradsformelen, og finner ut at likningen ikke har noen løsninger.
- Den kan derfor ikke faktorerer mer.
- Vi avslutter derfor med

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x + 1)(x - 3)(x^2 - 2x + 3).$$



**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**  
STORBYUNIVERSITETET