# Fullstendige kvadrater

**Nikolai Bjørnestøl Hansen**

**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

# Fullstendige kvadrater

1 **Fullstendige kvadrater**

- Hva er fullstendige kvadrater?
- Lage fullstendige kvadrater
- Faktorisere andregradsuttrykk

2 **Andregradslikninger med to ledd**

3 **Andregradsformelen**

# Hva er fullstendige kvadrater?

## Definisjon

Et uttrykk er et fullstendig kvadrat dersom det kan faktoriseres ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

# Hva er fullstendige kvadrater?

## Definisjon

Et uttrykk er et fullstendig kvadrat dersom det kan faktoriseres ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

**Eksempler:**

- Uttrykket $x^2 + 10x + 25$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.

# Hva er fullstendige kvadrater?

## Definisjon

Et uttrykk er et fullstendig kvadrat dersom det kan faktoriseres ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

**Eksempler:**

- Uttrykket $x^2 + 10x + 25$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$.
- Uttrykket $x^2 - x + \frac{1}{4}$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

# Hva er fullstendige kvadrater?

**Definisjon**

Et uttrykk er et fullstendig kvadrat dersom det kan faktoriseres ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

**Eksempler:**

- Uttrykket $x^2 + 10x + 25$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
- Uttrykket $x^2 - x + \frac{1}{4}$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.
- Uttrykket $x^2 - 5x + 6$ er ikke et fullstendig kvadrat.

# Fullstendig kvadrat

- Forste og andre kvadratsetning er

$$(x+y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$

# Fullstendig kvadrat

- Forste og andre kvadratsetning er

$$(x+y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$

- Så for at $x^2 + bx + c$ skal kunne skrives om ved hjelp av første eller andre kvadratsetning, må $b = \pm 2y$ og $c = y^2$.

# Fullstendig kvadrat

- Forste og andre kvadratsetning er

$$(x+y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$

- Så for at $x^2 + bx + c$ skal kunne skrives om ved hjelp av første eller andre kvadratsetning, må $b = \pm 2y$ og $c = y^2$.
- Det vil si at vi må ha $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

# Fullstendig kvadrat

- Forste og andre kvadratsetning er
$$(x+y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$
- Så for at $x^2 + bx + c$ skal kunne skrives om ved hjelp av første eller andre kvadratsetning, må $b = \pm 2y$ og $c = y^2$.
- Det vil si at vi må ha $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

**Regel**

*Uttrykket $x^2 + bx + c$ er et fullstendig kvadrat hvis og bare hvis*
$$c = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

# Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.

# Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke andre kvadratsetning.

# Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke andre kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $14x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

# Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke andre kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $14x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{14}{2} = 7$.
- Sjekker at siste ledd er $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

$$7^2 = 49.$$

# Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke andre kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $14x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{14}{2} = 7$.
- Sjekker at siste ledd er $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:
$$7^2 = 49.$$
- Vi har derfor
$$x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2.$$

# Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.

# Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.

# Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $10x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

# Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $10x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
- Sjekker om siste ledd er $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:
$$5^2 = 25.$$

# Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $10x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
- Sjekker om siste ledd er $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:
$$5^2 = 25.$$
- Siden $20 \neq 25$ er $x^2 + 10x + 20$ ikke et fullstendig kvadrat.

# Fullstendige kvadrater

1 **Fullstendige kvadrater**
- Hva er fullstendige kvadrater?
- Lage fullstendige kvadrater
- Faktorisere andregradsuttrykk

2 **Andregradslikninger med to ledd**

3 **Andregradsformelen**

# Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som ikke er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

# Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som ikke er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

## Eksempel

Vi så nettopp at $x^2 + 10x + 20$ ikke var et fullstendig kvadrat, siden siste leddet burde vært 25. Vi får:

$$x^2 + 10x + 20 = x^2 + 10x + 25 - 25 + 20$$

# Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som ikke er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

## Eksempel

Vi så nettopp at $x^2 + 10x + 20$ ikke var et fullstendig kvadrat, siden siste leddet burde vært 25. Vi får:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 20 &= x^2 + 10x + 25 - 25 + 20 \\ &= (x+5)^2 - 25 + 20 \end{aligned}$$

# Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som ikke er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

## Eksempel

Vi så nettopp at $x^2 + 10x + 20$ ikke var et fullstendig kvadrat, siden siste leddet burde vært 25. Vi får:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 20 &= x^2 + 10x + 25 - 25 + 20 \\ &= (x+5)^2 - 25 + 20 \\ &= (x+5)^2 - 5 \end{aligned}$$

# Lage fullstendig kvadrat, eksempel

## Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3$$

# Lage fullstendig kvadrat, eksempel

## Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3$$

# Lage fullstendig kvadrat, eksempel

## Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

# Lage fullstendig kvadrat, eksempel

## Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 - 6x + 2$:

$$x^2 - 6x + 2$$

# Lage fullstendig kvadrat, eksempel

## Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 - 6x + 2$:

$$x^2 - 6x + 2 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 2$$

# Lage fullstendig kvadrat, eksempel

## Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 - 6x + 2$:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 2 &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 2 \\ &= (x-3)^2 - 7 \end{aligned}$$

# Fullstendige kvadrater

1 **Fullstendige kvadrater**
- Hva er fullstendige kvadrater?
- Lage fullstendige kvadrater
- Faktorisere andregradsuttrykk

2 **Andregradslikninger med to ledd**

3 **Andregradsformelen**

# Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.

# Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2$$

# Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2)$$

# Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1)+2)((x+1)-2) = (x+3)(x-1).$$

# Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1) + 2)((x+1) - 2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.

# Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1) + 2)((x+1) - 2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraleddet vi får etter å ha fullført kvadratet er negativt.

# Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1)+2)((x+1)-2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraleddet vi får etter å ha fullført kvadratet er negativt.
- Eksempel: Vi har

$$x^2 - 6x + 2$$

# Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1)+2)((x+1)-2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraleddet vi får etter å ha fullført kvadratet er negativt.
- Eksempel: Vi har

$$x^2 - 6x + 2 = (x-3)^2 - 7$$

# Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1)+2)((x+1)-2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraleddet vi får etter å ha fullført kvadratet er negativt.
- Eksempel: Vi har

$$x^2 - 6x + 2 = (x-3)^2 - 7 = (x-3)^2 - \sqrt{7}^2$$

# Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1) + 2)((x+1) - 2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraleddet vi får etter å ha fullført kvadratet er negativt.
- Eksempel: Vi har

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 2 &= (x-3)^2 - 7 = (x-3)^2 - \sqrt{7}^2 \\ &= \left(x - 3 + \sqrt{7}\right)\left(x - 3 - \sqrt{7}\right) \end{aligned}$$

# Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

**Oppgave**

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

# Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

**Oppgave**

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6$$

# Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

**Oppgave**

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6$$

# Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

**Oppgave**

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

# Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

**Oppgave**

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25$$

# Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

**Oppgave**

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25 = (x - 2{,}5)^2 - \sqrt{0{,}25}^2$$

# Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

**Oppgave**

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25 = (x - 2{,}5)^2 - \sqrt{0{,}25}^2 \qquad = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}5^2$$

# Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

## Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$\begin{aligned}(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25 &= (x - 2{,}5)^2 - \sqrt{0{,}25}^2 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}5^2 \\ &= (x - 2{,}5 + 0{,}5)(x - 2{,}5 - 0{,}5)\end{aligned}$$

# Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

**Oppgave**

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$\begin{aligned}(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25 &= (x - 2{,}5)^2 - \sqrt{0{,}25}^2 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}5^2 \\ &= (x - 2{,}5 + 0{,}5)(x - 2{,}5 - 0{,}5) = (x - 2)(x - 3).\end{aligned}$$

# Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

**Oppgave**

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$\begin{aligned}(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25 = (x - 2{,}5)^2 - \sqrt{0{,}25}^2 &= (x - 2{,}5)^2 - 0{,}5^2 \\ = (x - 2{,}5 + 0{,}5)(x - 2{,}5 - 0{,}5) &= (x - 2)(x - 3).\end{aligned}$$

Så $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Vi kan gange ut for å se at det stemmer.

OSLOMET

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET