

# **Polynomdivisjon**

**Nikolai Bjørnestøl Hansen**

**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**  
**STORBYUNIVERSITETET**



# Polynomdivisjon

## 1 Polynomfunksjoner

## 2 Polynomdivisjon

- Å dele polynomer
- Polynomdivisjon og rest

## 3 Resten ved polynomdivisjon

# Divisjon av polynomer

- Om vi ganger  $2x^2 - 3x + 1$  med  $x - 2$  får vi

$$(2x^2 - 3x + 1)(x - 2) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2.$$

# Divisjon av polynomer

- Om vi ganger  $2x^2 - 3x + 1$  med  $x - 2$  får vi

$$(2x^2 - 3x + 1)(x - 2) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2.$$

- Det betyr at

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}{x - 2}$$

# Divisjon av polynomer

- Om vi ganger  $2x^2 - 3x + 1$  med  $x - 2$  får vi

$$(2x^2 - 3x + 1)(x - 2) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2.$$

- Det betyr at

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}{x - 2} = \frac{(2x^2 - 3x + 1)(x - 2)}{x - 2}.$$

# Divisjon av polynomer

- Om vi ganger  $2x^2 - 3x + 1$  med  $x - 2$  får vi

$$(2x^2 - 3x + 1)(x - 2) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2.$$

- Det betyr at

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}{x - 2} = \frac{(2x^2 - 3x + 1)(\cancel{x - 2})}{\cancel{x - 2}}.$$

# Divisjon av polynomer

- Om vi ganger  $2x^2 - 3x + 1$  med  $x - 2$  får vi

$$(2x^2 - 3x + 1)(x - 2) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2.$$

- Det betyr at

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}{x - 2} = \frac{(2x^2 - 3x + 1)(\cancel{x - 2})}{\cancel{x - 2}} = 2x^2 - 3x + 1.$$

# Divisjon av polynomer

- Om vi ganger  $2x^2 - 3x + 1$  med  $x - 2$  får vi

$$(2x^2 - 3x + 1)(x - 2) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2.$$

- Det betyr at

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}{x - 2} = \frac{(2x^2 - 3x + 1)(\cancel{x - 2})}{\cancel{x - 2}} = 2x^2 - 3x + 1.$$

- Vi kan skrive dette med deletegn som

$$(2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 - 3x + 1.$$



# Divisjon av polynomer

- Om vi ganger  $2x^2 - 3x + 1$  med  $x - 2$  får vi

$$(2x^2 - 3x + 1)(x - 2) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2.$$

- Det betyr at

$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}{x - 2} = \frac{(2x^2 - 3x + 1)(\cancel{x - 2})}{\cancel{x - 2}} = 2x^2 - 3x + 1.$$

- Vi kan skrive dette med deletegn som

$$(2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 - 3x + 1.$$

- Vi skal lære hvordan regne ut dette uten å vite svaret på forhånd.

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$945 : 7 =$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$945 : 7 = 1$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 1 \\ - \underline{7} \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7.

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 1 \\ - \underline{7} \\ 2 \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7. Vi trekker 7 fra 9 og får 2.

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 1 \\ - \underline{7} \downarrow \\ 24 \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7. Vi trekker 7 fra 9 og får 2.
- Vi trekker 4 ned og får 24.

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 13 \\ - \underline{7} \downarrow \\ 24 \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7. Vi trekker 7 fra 9 og får 2.
- Vi trekker 4 ned og får 24.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nær 24? Jo, 3.

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 13 \\ - \underline{7} \downarrow \\ \quad 24 \\ - \underline{21} \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7. Vi trekker 7 fra 9 og får 2.
- Vi trekker 4 ned og får 24.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nær 24? Jo, 3.
- Vi ganger 7 med 3 og får 21.



# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 13 \\ - \underline{7} \downarrow \\ 24 \\ - \underline{21} \\ 3 \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7. Vi trekker 7 fra 9 og får 2.
- Vi trekker 4 ned og får 24.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nær 24? Jo, 3.
- Vi ganger 7 med 3 og får 21. Vi får  $24 - 21 = 3$ .

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 13 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 24 \phantom{00} \\ - \underline{21} \phantom{00} \\ \phantom{-} 35 \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7. Vi trekker 7 fra 9 og får 2.
- Vi trekker 4 ned og får 24.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nær 24? Jo, 3.
- Vi ganger 7 med 3 og får 21. Vi får  $24 - 21 = 3$ .
- Vi trekker 5 ned og får 35.

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 135 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 24 \phantom{00} \\ - \underline{21} \phantom{00} \\ \phantom{-} 35 \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7. Vi trekker 7 fra 9 og får 2.
- Vi trekker 4 ned og får 24.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nær 24? Jo, 3.
- Vi ganger 7 med 3 og får 21. Vi får  $24 - 21 = 3$ .
- Vi trekker 5 ned og får 35.
- Hva må vi gange 7 med for å få 35? Jo, 5.

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 135 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 24 \phantom{00} \\ - \underline{21} \phantom{00} \\ \phantom{-} 35 \phantom{00} \\ - \underline{35} \\ \phantom{-} 0 \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7. Vi trekker 7 fra 9 og får 2.
- Vi trekker 4 ned og får 24.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nær 24? Jo, 3.
- Vi ganger 7 med 3 og får 21. Vi får  $24 - 21 = 3$ .
- Vi trekker 5 ned og får 35.
- Hva må vi gange 7 med for å få 35? Jo, 5.
- Vi ganger 7 med 5 og får 35.

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 135 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 24 \phantom{00} \\ - \underline{21} \phantom{00} \\ \phantom{-} 35 \phantom{00} \\ - \underline{35} \\ \phantom{-} 0 \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7. Vi trekker 7 fra 9 og får 2.
- Vi trekker 4 ned og får 24.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nær 24? Jo, 3.
- Vi ganger 7 med 3 og får 21. Vi får  $24 - 21 = 3$ .
- Vi trekker 5 ned og får 35.
- Hva må vi gange 7 med for å få 35? Jo, 5.
- Vi ganger 7 med 5 og får 35. Vi får  $35 - 35 = 0$ .

# Divisjonsalgoritmen, oppfriskning

$$\begin{array}{r} 945 : 7 = 135 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 24 \phantom{00} \phantom{00} \\ - \underline{21} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{00} 35 \phantom{00} \\ - \underline{\phantom{00} 35} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{00} \phantom{00} 0 \end{array}$$

- Vi skal regne ut 945 delt på 7.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nærmest 9 uten å gå over? Svaret er 1.
- Vi ganger 1 med 7 og får 7. Vi trekker 7 fra 9 og får 2.
- Vi trekker 4 ned og får 24.
- Hva må vi gange 7 med for å komme nær 24? Jo, 3.
- Vi ganger 7 med 3 og får 21. Vi får  $24 - 21 = 3$ .
- Vi trekker 5 ned og får 35.
- Hva må vi gange 7 med for å få 35? Jo, 5.
- Vi ganger 7 med 5 og får 35. Vi får  $35 - 35 = 0$ .
- Så  $945 : 7 = 135$ , med 0 i rest.

# Polynomdivisjon

- Måten vi skal dele polynomer på hverandre likner veldig på divisjonsalgoritmen for tall.

# Polynomdivisjon

- Måten vi skal dele polynomer på hverandre likner veldig på divisjonsalgoritmen for tall.
- Vi kommer til å spørre «Hva må vi gange med for å få riktig koeffisient?»



# Polynomdivisjon

- Måten vi skal dele polynomer på hverandre likner veldig på divisjonsalgoritmen for tall.
- Vi kommer til å spørre «Hva må vi gange med for å få riktig koeffisient?»
- Vi kommer til å gange med det vi valgte.

# Polynomdivisjon

- Måten vi skal dele polynomer på hverandre likner veldig på divisjonsalgoritmen for tall.
- Vi kommer til å spørre «Hva må vi gange med for å få riktig koeffisient?»
- Vi kommer til å gange med det vi valgte.
- Vi kommer til å trekke fra det vi får.

# Polynomdivisjon

- Måten vi skal dele polynomer på hverandre likner veldig på divisjonsalgoritmen for tall.
- Vi kommer til å spørre «Hva må vi gange med for å få riktig koeffisient?»
- Vi kommer til å gange med det vi valgte.
- Vi kommer til å trekke fra det vi får.
- Vi kommer til å trekke ned neste ledd.

# Polynomdivisjon

- Måten vi skal dele polynomer på hverandre likner veldig på divisjonsalgoritmen for tall.
- Vi kommer til å spørre «Hva må vi gange med for å få riktig koeffisient?»
- Vi kommer til å gange med det vi valgte.
- Vi kommer til å trekke fra det vi får.
- Vi kommer til å trekke ned neste ledd.
- Vi kommer til å repetere dette.

# Polynomdivisjon

- Måten vi skal dele polynomer på hverandre likner veldig på divisjonsalgoritmen for tall.
- Vi kommer til å spørre «Hva må vi gange med for å få riktig koeffisient?»
- Vi kommer til å gange med det vi valgte.
- Vi kommer til å trekke fra det vi får.
- Vi kommer til å trekke ned neste ledd.
- Vi kommer til å repetere dette.
- En forskjell jeg her gjør fra boka:

# Polynomdivisjon

- Måten vi skal dele polynomer på hverandre likner veldig på divisjonsalgoritmen for tall.
- Vi kommer til å spørre «Hva må vi gange med for å få riktig koeffisient?»
- Vi kommer til å gange med det vi valgte.
- Vi kommer til å trekke fra det vi får.
- Vi kommer til å trekke ned neste ledd.
- Vi kommer til å repetere dette.
- En forskjell jeg her gjør fra boka:
  - Vi skal trekke fra, og har derfor et minustegn utenfor polynomet.

# Polynomdivisjon

- Måten vi skal dele polynomer på hverandre likner veldig på divisjonsalgoritmen for tall.
- Vi kommer til å spørre «Hva må vi gange med for å få riktig koeffisient?»
- Vi kommer til å gange med det vi valgte.
- Vi kommer til å trekke fra det vi får.
- Vi kommer til å trekke ned neste ledd.
- Vi kommer til å repetere dette.
- En forskjell jeg her gjør fra boka:
  - Vi skal trekke fra, og har derfor et minustegn utenfor polynomet.
  - Jeg ganger dette **inn** i polynomet.

# Polynomdivisjon

- Måten vi skal dele polynomer på hverandre likner veldig på divisjonsalgoritmen for tall.
- Vi kommer til å spørre «Hva må vi gange med for å få riktig koeffisient?»
- Vi kommer til å gange med det vi valgte.
- Vi kommer til å trekke fra det vi får.
- Vi kommer til å trekke ned neste ledd.
- Vi kommer til å repetere dette.
- En forskjell jeg her gjør fra boka:
  - Vi skal trekke fra, og har derfor et minustegn utenfor polynomet.
  - Jeg ganger dette **inn** i polynomet.
  - Det er da mindre sjanse for å gjøre feil med minustegnene.



# Polynomdivisjon, eksempel

$$(2x^2 + x - 3) : (x - 1) =$$

■ Vi skal regne ut  $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ .

# Polynomdivisjon, eksempel

$$(2x^2 + x - 3) : (x - 1) = 2x$$

- Vi skal regne ut  $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ .
- Hva må vi gange  $x - 1$  med for å få et  $2x^2$ -ledd? Svaret er  $2x$ .

# Polynomdivisjon, eksempel

$$\begin{array}{r} (2x^2 + x - 3) : (x - 1) = 2x \\ \underline{-2x^2 + 2x} \end{array}$$

- Vi skal regne ut  $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ .
- Hva må vi gange  $x - 1$  med for å få et  $2x^2$ -ledd? Svaret er  $2x$ .
- Vi ganger  $x - 1$  med  $2x$  og får  $2x^2 - 2x$ . Vi ganger inn minustegnet som er foran.

# Polynomdivisjon, eksempel

$$\begin{array}{r} (2x^2 + x - 3) : (x - 1) = 2x \\ \underline{-2x^2 + 2x} \phantom{-3} \\ 3x - 3 \end{array}$$

- Vi skal regne ut  $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ .
- Hva må vi gange  $x - 1$  med for å få et  $2x^2$ -ledd? Svaret er  $2x$ .
- Vi ganger  $x - 1$  med  $2x$  og får  $2x^2 - 2x$ . Vi ganger inn minustegnet som er foran.
- Siden vi ganget inn minustegnet, plusser vi sammen, og trekker ned  $-3$ .

# Polynomdivisjon, eksempel

$$\begin{array}{r} (2x^2 + x - 3) : (x - 1) = 2x + 3 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \phantom{-3} \\ 3x - 3 \end{array}$$

- Vi skal regne ut  $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ .
- Hva må vi gange  $x - 1$  med for å få et  $2x^2$ -ledd? Svaret er  $2x$ .
- Vi ganger  $x - 1$  med  $2x$  og får  $2x^2 - 2x$ . Vi ganger inn minustegnet som er foran.
- Siden vi ganget inn minustegnet, plusser vi sammen, og trekker ned  $-3$ .
- Hva må vi gange med for å få  $3x$ ? Jo,  $3$ .

# Polynomdivisjon, eksempel

$$\begin{array}{r} (2x^2 + x - 3) : (x - 1) = 2x + 3 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \phantom{-3} \\ 3x - 3 \\ \underline{-3x + 3} \\ 0 \end{array}$$

- Vi skal regne ut  $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ .
- Hva må vi gange  $x - 1$  med for å få et  $2x^2$ -ledd? Svaret er  $2x$ .
- Vi ganger  $x - 1$  med  $2x$  og får  $2x^2 - 2x$ . Vi ganger inn minustegnet som er foran.
- Siden vi ganget inn minustegnet, plusser vi sammen, og trekker ned  $-3$ .
- Hva må vi gange med for å få  $3x$ ? Jo,  $3$ .
- Vi ganger sammen  $3(x - 1)$  og ganger inn minustegnet.

# Polynomdivisjon, eksempel

$$\begin{array}{r} (2x^2 + x - 3) : (x - 1) = 2x + 3 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \phantom{-3} \\ 3x - 3 \\ \underline{-3x + 3} \\ 0 \end{array}$$

- Vi skal regne ut  $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ .
- Hva må vi gange  $x - 1$  med for å få et  $2x^2$ -ledd? Svaret er  $2x$ .
- Vi ganger  $x - 1$  med  $2x$  og får  $2x^2 - 2x$ . Vi ganger inn minustegnet som er foran.
- Siden vi ganget inn minustegnet, plusser vi sammen, og trekker ned  $-3$ .
- Hva må vi gange med for å få  $3x$ ? Jo,  $3$ .
- Vi ganger sammen  $3(x - 1)$  og ganger inn minustegnet.
- Vi plusser sammen og får  $0$ .

# Polynomdivisjon, eksempel

$$\begin{array}{r} (2x^2 + x - 3) : (x - 1) = 2x + 3 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \phantom{-3} \\ 3x - 3 \\ \underline{-3x + 3} \\ 0 \end{array}$$

- Vi skal regne ut  $\frac{2x^2+x-3}{x-1}$ .
- Hva må vi gange  $x - 1$  med for å få et  $2x^2$ -ledd? Svaret er  $2x$ .
- Vi ganger  $x - 1$  med  $2x$  og får  $2x^2 - 2x$ . Vi ganger inn minustegnet som er foran.
- Siden vi ganget inn minustegnet, plusser vi sammen, og trekker ned  $-3$ .
- Hva må vi gange med for å få  $3x$ ? Jo,  $3$ .
- Vi ganger sammen  $3(x - 1)$  og ganger inn minustegnet.
- Vi plusser sammen og får  $0$ .
- Vi har derfor  $\frac{2x^2+x-3}{x-1} = 2x + 3$ .



# Polynomdivisjon, eksempel II

$$(2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) =$$

# Polynomdivisjon, eksempel II

$$(2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2$$

# Polynomdivisjon, eksempel II

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \end{array}$$

# Polynomdivisjon, eksempel II

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \phantom{+ 7x - 2} \\ -3x^2 + 7x \phantom{- 2} \end{array}$$

# Polynomdivisjon, eksempel II

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 - 3x \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \phantom{- 7x - 2} \\ -3x^2 + 7x \phantom{- 2} \end{array}$$

# Polynomdivisjon, eksempel II

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 - 3x \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \phantom{- 7x - 2} \\ -3x^2 + 7x \phantom{- 2} \\ \underline{3x^2 - 6x} \phantom{- 2} \\ 7x - 2 \end{array}$$

# Polynomdivisjon, eksempel II

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 - 3x \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \phantom{+ 7x - 2} \\ -3x^2 + 7x \phantom{- 2} \\ \underline{3x^2 - 6x} \phantom{- 2} \\ x - 2 \end{array}$$

# Polynomdivisjon, eksempel II

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \phantom{+ 7x - 2} \\ -3x^2 + 7x \phantom{- 2} \\ \underline{3x^2 - 6x} \phantom{- 2} \\ x - 2 \end{array}$$



# Polynomdivisjon, eksempel II

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \phantom{+ 7x - 2} \\ -3x^2 + 7x \phantom{- 2} \\ \underline{3x^2 - 6x} \phantom{- 2} \\ x - 2 \\ \underline{-x + 2} \\ 0 \end{array}$$

# Polynomdivisjon, eksempel II

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \phantom{+ 7x - 2} \\ -3x^2 + 7x \phantom{- 2} \\ \underline{3x^2 - 6x} \phantom{- 2} \\ x - 2 \\ \underline{-x + 2} \\ 0 \end{array}$$

# Polynomdivisjon, eksempel II

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \phantom{+ 7x - 2} \\ -3x^2 + 7x \phantom{- 2} \\ \underline{3x^2 - 6x} \phantom{- 2} \\ x - 2 \\ \underline{-x + 2} \\ 0 \end{array}$$

Vi har derfor

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$$

# Polynomdivisjon, eksempel II

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) : (x - 2) = 2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \phantom{+ 7x - 2} \\ -3x^2 + 7x \phantom{- 2} \\ \underline{3x^2 - 6x} \phantom{- 2} \\ x - 2 \\ \underline{-x + 2} \\ 0 \end{array}$$

Vi har derfor

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x^2 - 3x + 1)(x - 2)$$

# Polynomdivisjon

## 1 Polynomfunksjoner

## 2 Polynomdivisjon

- Å dele polynomer
- Polynomdivisjon og rest

## 3 Resten ved polynomdivisjon

# Polynomdivisjon og rest

- Vi var i alle tilfellene heldige med at divisjonen gikk opp.

# Polynomdivisjon og rest

- Vi var i alle tilfellene heldige med at divisjonen gikk opp.
- Vi fikk 0 i rest.

# Polynomdivisjon og rest

- Vi var i alle tilfellene heldige med at divisjonen gikk opp.
- Vi fikk 0 i rest.
- Rest er det du sitter igjen med etter å ha prøvd å dele.



# Polynomdivisjon og rest

- Vi var i alle tilfellene heldige med at divisjonen gikk opp.
- Vi fikk 0 i rest.
- Rest er det du sitter igjen med etter å ha prøvd å dele.
- For tall er resten alltid større en eller lik 0 og mindre enn tallet du delte på.

# Polynomdivisjon og rest

- Vi var i alle tilfellene heldige med at divisjonen gikk opp.
- Vi fikk 0 i rest.
- Rest er det du sitter igjen med etter å ha prøvd å dele.
- For tall er resten alltid større en eller lik 0 og mindre enn tallet du delte på.
- Om du deler 16 på 7 får du 2 i rest, siden  $16 = 14 + 2$ .

# Polynomdivisjon og rest

- Vi var i alle tilfellene heldige med at divisjonen gikk opp.
- Vi fikk 0 i rest.
- Rest er det du sitter igjen med etter å ha prøvd å dele.
- For tall er resten alltid større en eller lik 0 og mindre enn tallet du delte på.
- Om du deler 16 på 7 får du 2 i rest, siden  $16 = 14 + 2$ .
- For polynomer er resten alltid lavere grad enn det du deler på.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$856 : 7 =$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$856 : 7 = 1$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 1 \\ - \underline{7} \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 1 \\ - 7 \\ \hline 1 \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 1 \\ - \frac{7}{15} \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.



# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 12 \\ - \frac{7}{15} \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 12 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 15 \phantom{00} \\ - \phantom{-} \underline{14} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{-} \phantom{-} \phantom{-} \phantom{-} \phantom{-} \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 12 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 15 \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \\ \phantom{-} 1 \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 12 \\ - \underline{7} \phantom{00} \\ 15 \phantom{0} \\ - \underline{14} \phantom{0} \\ 16 \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 122 \\ - \underline{7} \phantom{00} \\ 15 \phantom{0} \\ - \underline{14} \phantom{0} \\ 16 \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 122 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 15 \phantom{00} \phantom{00} \\ - \phantom{0} \underline{14} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{0} 16 \phantom{00} \\ - \phantom{0} \phantom{0} \underline{14} \phantom{00} \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 122 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 15 \phantom{00} \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 16 \phantom{00} \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 2 \phantom{00} \phantom{00} \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 122 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 15 \phantom{00} \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{00} 16 \phantom{00} \\ - \phantom{-} \underline{14} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{-} \phantom{00} 2 \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.
- Vi kunne fortsatt her ved å legge på komma etter 122 og 856, og trukket ned nuller fra bak komma.



# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 122 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 15 \phantom{00} \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{1} 16 \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{1} \phantom{1} 2 \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.
- Vi kunne fortsatt her ved å legge på komma etter 122 og 856, og trukket ned nuller fra bak komma.
- Men vi kan også bare si at svaret er

$$856 : 7 = 122 + \frac{2}{7}.$$

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 122 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 15 \phantom{00} \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{00} 16 \phantom{00} \\ - \phantom{00} \underline{14} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{00} \phantom{00} 2 \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.
- Vi kunne fortsatt her ved å legge på komma etter 122 og 856, og trukket ned nuller fra bak komma.
- Men vi kan også bare si at svaret er

$$856 : 7 = 122 + \frac{2}{7}.$$

- Vi sier at divisjonen gir 122 med 2 i rest.

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 122 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 15 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{00} 16 \phantom{00} \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{00} \phantom{00} 2 \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.
- Vi kunne fortsatt her ved å legge på komma etter 122 og 856, og trukket ned nuller fra bak komma.
- Men vi kan også bare si at svaret er

$$856 : 7 = 122 + \frac{2}{7}.$$

- Vi sier at divisjonen gir 122 med 2 i rest.
- For polynomer har vi ingen «komma-polynom».

# Divisjonsalgoritmen og rest

$$\begin{array}{r} 856 : 7 = 122 \\ - \underline{7} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} 15 \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{00} 16 \phantom{00} \phantom{00} \\ - \underline{14} \phantom{00} \phantom{00} \\ \phantom{-} \phantom{00} \phantom{00} 2 \end{array}$$

- Vi regner på  $856 : 7$  og stopper når vi ikke har flere tall å trekke ned.
- Vi **kunne** fortsatt her ved å legge på komma etter 122 og 856, og trukket ned nuller fra bak komma.
- Men vi kan også bare si at svaret er

$$856 : 7 = 122 + \frac{2}{7}.$$

- Vi sier at divisjonen gir 122 med **2 i rest**.
- For polynomer har vi ingen «komma-polynom».
- Vi må da bare skrive opp resten.

# Polynomdivisjon med rest

$$(x^2 - 3x + 5) : (x - 2) =$$

■ Vi regner ut  $\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ .

# Polynomdivisjon med rest

$$(x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = x$$

■ Vi regner ut  $\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ .

# Polynomdivisjon med rest

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = x \\ \underline{-x^2 + 2x} \end{array}$$

■ Vi regner ut  $\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ .

# Polynomdivisjon med rest

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = x \\ -x^2 + 2x \\ \hline -x + 5 \end{array}$$

■ Vi regner ut  $\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ .



# Polynomdivisjon med rest

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = x - 1 \\ -x^2 + 2x \\ \hline -x + 5 \end{array}$$

■ Vi regner ut  $\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ .

# Polynomdivisjon med rest

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = x - 1 \\ - x^2 + 2x \\ \hline -x + 5 \\ x - 2 \\ \hline \end{array}$$

■ Vi regner ut  $\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ .

# Polynomdivisjon med rest

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = x - 1 \\ \underline{-x^2 + 2x} \phantom{+ 5} \\ -x + 5 \\ \underline{x - 2} \\ 3 \end{array}$$

■ Vi regner ut  $\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ .

# Polynomdivisjon med rest

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = x - 1 \\ \underline{-x^2 + 2x} \phantom{+ 5} \\ -x + 5 \\ \underline{x - 2} \\ 3 \end{array}$$

- Vi regner ut  $\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ .
- Vi ender **ikke** opp med 0 til slutt.

# Polynomdivisjon med rest

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = x - 1 \\ -x^2 + 2x \\ \hline -x + 5 \\ x - 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

- Vi regner ut  $\frac{x^2-3x+5}{x-2}$ .
- Vi ender **ikke** opp med 0 til slutt.
- Vi har her 3 i rest.

# Polynomdivisjon med rest

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = x - 1 + \frac{3}{x - 2} \\ \underline{-x^2 + 2x} \phantom{+ 5} \\ -x + 5 \\ \underline{x - 2} \\ 3 \end{array}$$

- Vi regner ut  $\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ .
- Vi ender **ikke** opp med 0 til slutt.
- Vi har her 3 i rest.
- Vi må da legge til  $\frac{3}{x - 2}$ .

# Polynomdivisjon med rest

$$\begin{array}{r} (x^2 - 3x + 5) : (x - 2) = x - 1 + \frac{3}{x - 2} \\ \underline{-x^2 + 2x} \phantom{+ 5} \\ -x + 5 \\ \underline{x - 2} \\ 3 \end{array}$$

- Vi regner ut  $\frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ .
- Vi ender **ikke** opp med 0 til slutt.
- Vi har her 3 i rest.
- Vi må da legge til  $\frac{3}{x - 2}$ .
- Vi kan også skrive

$$x^2 - 3x + 5 = (x - 1)(x - 2) + 3$$

# Polynomdivisjon med rest II

$$(x^3 - 2x^2 + 3x - 3) : (x^2 - x + 1) =$$



# Polynomdivisjon med rest II

$$(x^3 - 2x^2 + 3x - 3) : (x^2 - x + 1) = x$$

# Polynomdivisjon med rest II

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + 3x - 3) : (x^2 - x + 1) = x \\ \underline{-x^3 \quad +x^2 \quad -x} \end{array}$$

# Polynomdivisjon med rest II

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + 3x - 3) : (x^2 - x + 1) = x \\ \underline{-x^3 \quad +x^2 \quad -x} \phantom{-3} \\ -x^2 + 2x - 3 \end{array}$$

# Polynomdivisjon med rest II

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + 3x - 3) : (x^2 - x + 1) = x - 1 \\ \underline{-x^3 \quad +x^2 \quad -x} \phantom{-3} \\ -x^2 + 2x - 3 \end{array}$$

# Polynomdivisjon med rest II

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + 3x - 3) : (x^2 - x + 1) = x - 1 \\ \underline{-x^3 \quad +x^2 \quad -x} \phantom{-3} \\ -x^2 + 2x - 3 \\ \underline{x^2 \quad -x + 1} \phantom{-3} \end{array}$$

# Polynomdivisjon med rest II

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + 3x - 3) : (x^2 - x + 1) = x - 1 \\ \underline{-x^3 \quad +x^2 \quad -x} \phantom{-3} \\ -x^2 + 2x - 3 \\ \underline{x^2 \quad -x + 1} \\ x - 2 \end{array}$$

# Polynomdivisjon med rest II

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + 3x - 3) : (x^2 - x + 1) = x - 1 + \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} \\ \underline{-x^3 + x^2 - x} \phantom{- 3} \\ -x^2 + 2x - 3 \\ \underline{x^2 - x + 1} \\ x - 2 \end{array}$$

# Polynomdivisjon med rest II

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + 3x - 3) : (x^2 - x + 1) = x - 1 + \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} \\ \underline{-x^3 + x^2 - x} \phantom{- 3} \\ -x^2 + 2x - 3 \\ \underline{x^2 - x + 1} \\ x - 2 \end{array}$$

Vi har derfor

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 3$$



# Polynomdivisjon med rest II

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x^2 + 3x - 3) : (x^2 - x + 1) = x - 1 + \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} \\ \underline{-x^3 + x^2 - x} \phantom{- 3} \\ -x^2 + 2x - 3 \\ \underline{x^2 - x + 1} \\ x - 2 \end{array}$$

Vi har derfor

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = (x - 1)(x^2 - x + 1) + x - 2$$



**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**  
STORBYUNIVERSITETET