Funksjonsbegrepet

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

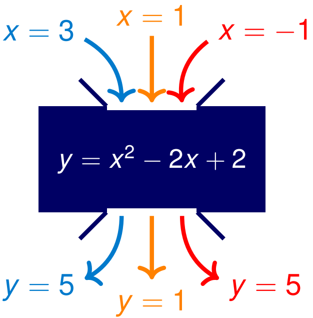
1 Å finne likningen for en linje

2 Funksjonsbegrepet

- Funksjoner
- Grafer

Funksjoner

Hva er en funksjon



- En unøyaktig definisjon:

  En funksjon er en «maskin» vi kan dytte tall inn i, for å få tall ut.

- Hvis du dytter inn samme tall på nytt, skal du alltid få samme svar ut.
- Hvis du dytter inn et forskjellig tall, kan du få samme svar ut.
- «Maskinen» består vanligvis av en formel.

Funksjon

Definisjon

En funksjon av x er en regel som til hvert valg av x gir ut en verdi.

- Om vi gir funksjonen navnet f skriver vi $f(x)$ og uttaler det «f av x».
- For å gi en formel til funksjonen skriver vi da at

$$f(x) = x^2 - 2x + 2.$$

- Vi skriver $f(3)$ for «verdien når $x = 3$.»

$$f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = 5$$

Funksjoner og parenteser

- Uttrykket «$f(1)$» betyr «Regn ut verdien til f når $x = 1$.»
- Uttrykket «$f(1+3)$» betyr «Regn ut verdien til f når $x = 1+3$».
- Vi kan ikke bruke parentesregler på dette!
- Uttrykket $f(1+3)$ er ikke det samme som $f(1)+f(3)$.
- Om $f(x) = x^2 - 2x + 2$:

$$\begin{aligned} f(1+3) &= (1+3)^2 - 2(1+3) + 2 \\ &= 4^2 - 2\cdot 4 + 2 \\ &= 10 \\ f(1)+f(3) &= (1^2 - 2\cdot 1 + 2) + (3^2 - 2\cdot 3 + 2) \\ &= 1 + 5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Funksjoner og navn

- «Standardnavnet» til en funksjon vi ikke vet noe mer om er f for funksjon.
- Om vi har flere funksjoner, følger vi typisk alfabetet, og får funksjonene g og h.
- Om vi vet hva funksjonen representerer, bruker vi typisk første bokstav:
  - Arealet til en sirkel med radius r er $A(r) = \pi r^2$.
  - Høyden etter t sekunder til en ball som kastes er $h(t) = -5t^2 + 20t$.
  - Prisen på k kilo epler er $E(k) = 30k$.
  - Den siste kunne også vært $P(k)$ for pris.
- Ingen av disse er regler, bare forslag.
- Ingen kan stoppe oss fra å definere funksjonen

$$\text{😎}(\nabla) = \nabla^2 - 2\nabla + 1.$$

- Poenget med å gi navn til ting er å spare tid, så dette tjener vi lite på.

Definisjonsmengde

Definisjon

Definisjonsmengden til en funksjon er mengden av alle tallene vi kan sette inn i funksjonen. Vi skriver D_f for definisjonsmengden til f.

- Om vi får lov til å sette inn alle tall skriver vi $D_f = \mathbb{R}$.
- Det er to mulige grunner til at vi ikke kan sette inn alle tall:
  - Fordi vi har bestemt oss for det.
  - Fordi vi deler på 0 eller tar roten av negative tall.
- Om $A(r)$ er arealet til en sirkel med radius r, gir det ikke mening å sette inn en negativ radius, så vi velger $D_A = [0, \rightarrow\rangle$.
- Om $g(x) = \frac{1}{x-1}$ deler vi på 0 om vi setter inn $x = 1$, så $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Om $f(x) = \sqrt{-x+1}$ tar vi roten av negative tall om $x > 1$, så $D_f = \langle \leftarrow, 1]$.

Verdimengde

Definisjon

Verdimengden til en funksjon er mengden av alle tall vi kan få ut av funksjonen. Vi skriver V_f for verdimengden til f.

- Funksjonen $f(x) = x^2$ kan aldri bli negativ, så verdimengden er $V_f = [0, \rightarrow\rangle$.
- Om vi gjør definisjonsmengden mindre, kan verdimengden også bli mindre.
- Om vi velger $D_f = [0, 2]$ blir verdimengden $V_f = [0, 4]$.
- Om vi velger $D_f = [0, \rightarrow\rangle$ er verdimengden fremdeles $[0, \rightarrow\rangle$.
- I mer avansert matematikk betyr verdimengde noe *litt* annet, og det vi beskriver her kalles bildet til funksjonen.

Funksjon, eksempel

Oppgave

Høyden til en stein som blir kastet er gitt ved $h(t) = -5t^2 + 10t$. Finn når den treffer bakken.

- Vi må regne ut når høyden er 0. Vi får likningen

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 \\ -5t^2 + 10t &= 0 \\ t(-5t + 10) &= 0 \end{aligned}$$

- Steinen er derfor ved bakken når $t = 0$ og når $t = 2$.
- Siden $t = 0$ er når vi kaster steinen, er det da $t = 2$ som er interessant.

Funksjon, eksempel

Oppgave

Høyden til en stein som blir kastet er gitt ved $h(t) = -5t^2 + 10t$. Finn D_h og V_h.

- Formelen over gir kun mening fra vi kaster steinen til den treffer bakken igjen.
- Siden vi vet fra forrige side at den treffer bakken etter 2 s så blir $D_h = [0, 2]$.
- Vi vet at det laveste steinen kan være er 0 m, så vi må finne det høyeste punktet.
- Fysisk burde steinen være på det høyeste midt mellom de to bakkepunktene, så når $t = 1$.
- Vi får derfor at det høyeste punktet er på $h(1) = -5 + 10 = 5$ meter, og verdimengden blir $V_h = [0, 5]$.

Grafer

Grafen til en funksjon

Definisjon

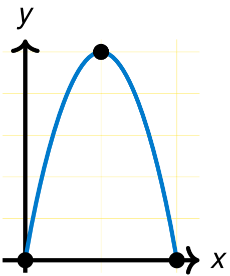
Grafen til en funksjon f er alle punkter (x, y) som er slik at $y = f(x)$.

- I de forrige delkapitlene så vi på grafen til en lineær funksjon, som var en rett linje.
- Det holdt å regne ut verdien til funksjonen i to punkter for å kunne tegne hele grafen.
- Vi er sjeldent så heldige, og må vanligvis tegne opp mange flere punkter.
- Jo flere punkter vi tegner, jo mer nøyaktig blir grafen.

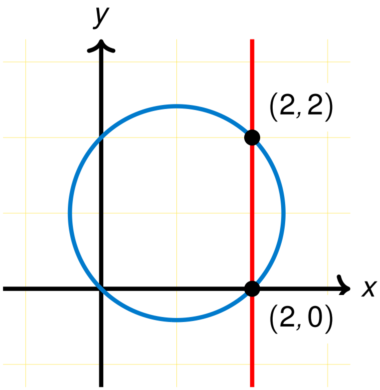
Graf, eksempel

- Vi vil tegne grafen til $f(x) = -5x^2 + 10x$ mellom 0 og 2.
- Vi velger å regne ut verdiene til funksjonen i 0, 1 og 2.
- Vi gjetter hvordan grafen ser ut.
- Om man vil ha mer nøyaktig graf, kan det være lurt å regne flere punkter.
- Datamaskiner og kalkulatorer regner ut hundrevis av punkter, og tegner rette streker mellom dem.

x	$f(x)$	y
0	$-5 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0$	0
1	$-5 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1$	5
2	$-5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2$	0



Tegninger som ikke er grafer



- Ikke alt vi kan tegne er grafen til en funksjon.
- En funksjon må ta inn ett tall, og gi ut ett tall.
- Men hva skulle $f(2)$ vært her?
- Både $f(2) = 0$ og $f(2) = 2$ burde være riktig, men kun én av dem kan stemme.
- Sirkelen er derfor ikke grafen til en funksjon.
- En tegning er kun grafen til en funksjon dersom den «ikke går baklengs».
- Om du tegner en rett linje oppover skal du kun treffe ett punkt.

OSLOMET

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET