

Derivasjon

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



1 Vekstfart

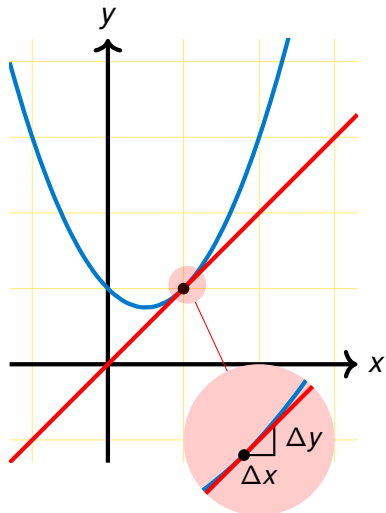
2 Derivasjon

- Derivasjon
- Derivasjonsregler

3 Potensfunksjoner og rotfunksjoner

Derivasjon

Tolkning av derivert



- Vi definerte den **deriverte** til f som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

- Vi kom frem til formelen ved å se på **momentan vekstfart** til funksjonen.
- Vi kan også tolke det som **stigningstallet** til **tangenten**.
- **Tangenten** er den linja som **likner mest** på grafen i et punkt.
- Vi skal lære å finne likningen for tangenten i slutten av uka.

Derivert til linje

- **Stigningstallet** til linja $y = 3x - 7$ er 3.
- Den **momentane vekstfarten** er derfor også 3 for alle x .
- Alternativt: **Tangenten** til ei linje er linja selv.
- Den **deriverte** til linja $f(x) = ax + b$ vil derfor være $f'(x) = a$.
- Om vi setter $a = 0$ får vi også at den **deriverte** til $f(x) = b$ er $f'(x) = 0$.
- Dette gir oss våre to første derivasjonsregler.

Regel

- *Den deriverte til funksjonen $f(x) = k$ er $f'(x) = 0$.*
- *Den deriverte til funksjonen $f(x) = ax + b$ er $f'(x) = a$.*

Derivasjonsregler

Derivasjon av potens

- Vi kan bruke definisjonen av den deriverte til å finne $f'(x)$ når $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x. \end{aligned}$$

- Vi har funnet:

$$(1)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

Derivasjon av potens

- De tre reglene

$$(1)' = 0 \quad (x)' = 1 \quad (x^2)' = 2x$$

er tre spesialtilfeller av en **generell regel**:

Regel

For potenser er den deriverte gitt ved

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

- Huskeregelen er «Sett eksponenten foran og gjør den én mindre.»
- Eksempler:

$$(x^7)' = 7x^6 \quad (x^4)' = 4x^3 \quad (x^2)' = 2x^1 \quad (x^1)' = 1x^0 = 1.$$

Addisjon og konstant

- Det er kun to regler til vi trenger for å raskt kunne derivere **alle** polynom:

Regel

For funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og konstant k har vi:

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \quad \text{og} \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

- Sagt på en annen måte: **tall** kan settes utenfor derivasjonen, og **sum** kan deriveres ledd for ledd.
- **Merk:** Dette gjelder **ikke** for ganging,

$$(f(x) \cdot g(x))' \neq f'(x) \cdot g'(x).$$

- Vi har $(x)' = 1$ men $(x \cdot x)' = (x^2)' = 2x \neq 1 \cdot 1$.

Derivasjon av polynom, eksempel

Oppgave

Deriver $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$.

Vi får:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^3 - 3x^2 + 2x - 7)' \\&= (x^3)' - (3x^2)' + (2x)' - (7)' \\&= (x^3)' - 3 \cdot (x^2)' + 2 \cdot (x)' - 7 \cdot (1)' \\&= 3x^2 - 3 \cdot 2x + 2 \cdot 1 - 7 \cdot 0 \\f'(x) &= 3x^2 - 6x + 2.\end{aligned}$$

Vi kan derivere **alle** polynom på tilsvarende måte.

Derivasjon av polynom, eksempel II

Oppgave

Deriver $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$.

- Vi har ikke (ennå!) en regel for å derivere et produkt, så vi må først gange ut parentesene.
- Vi får $f(x) = (2x - 1)(x + 2) = 2x^2 + 3x - 2$.
- Og derfor

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x^2 + 3x - 2)' \\&= 2(x^2)' + 3(x)' - (2)' \\&= 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 - 0 \\f'(x) &= 4x + 3.\end{aligned}$$



OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET