

# Resten ved polynomdivisjon

**Nikolai Bjørnestøl Hansen**

**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**  
STORBYUNIVERSITETET



## 1 Polynomfunksjoner

## 2 Polynomdivisjon

## 3 Resten ved polynomdivisjon

- Rest og polynomverdier
- Ruffinis regel

# Rest og polynomverdier

# Rest og polynomverdier

$$\begin{array}{r} (x^2 - 2x + 1) : (x - 7) = x + 5 \\ \underline{-x^2 + 7x} \phantom{+ 1} \\ 5x + 1 \\ \underline{-5x + 35} \\ 36 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(7) &= 7^2 - 2 \cdot 7 + 1 \\ &= 49 - 14 + 1 \\ &= 36. \end{aligned}$$

- Vi regner ut  $\frac{x^2-2x+1}{x-7}$ .
- Vi ser at vi får 36 som rest.
- Vi regner også ut  $P(7)$  med  $P(x) = x^2 - 2x + 1$ .
- Vi får 36 som svar.
- Merk at resten vi fikk når vi delte på  $x - 7$  er samme som svaret vi fikk når vi satt inn 7.
- Dette vil **alltid** stemme.

# Rest og polynomverdier

## Regel

*Tallet du får som rest når du regner ut  $P(x) : (x - x_1)$  er lik  $P(x_1)$ .*

- Dette kan vi bruke til å finne ut hva resten blir **uten** å utføre divisjonen.
- Vi kan **også** bruke det til å regne ut verdien til polynomet uten å sette inn.
- For større potenser er det lettere å utføre divisjonen.

## Eksempel

Vi vil regne ut  $x^3 - 41x + 2$  for  $x = 7$ . Vi må da regne ut  $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$  og  $41 \cdot 7 = 287$ . Det er ganske store tall vi må regne på.

# Regne polynomverdi ved å finne rest

$$(x^3 - 41x + 2) : (x - 7) = x^2 + 7x + 8$$

$$\begin{array}{r} x^3 \phantom{- 41x} + 2 \\ - x^3 + 7x^2 \\ \hline 7x^2 - 41x \phantom{+ 2} \\ - 7x^2 + 49x \\ \hline 8x + 2 \\ - 8x + 56 \\ \hline 58 \end{array}$$

- Vi vil regne ut  $P(7)$  når  $P(x) = x^3 - 41x + 2$ .
- Vi regner heller ut  $P(x) : (x - 7)$ .
- Selv om det var litt **flere** utregninger, var hver av dem **mindre** enn når vi satt inn direkte.
- Dette er sjeldent nyttig, siden vi kan bruke kalkulator. Men litt kult.

# Faktorisering og nullpunkt

- Dersom vi får 0 i rest, sier vi at divisjonen **går opp**.
- Vi kan da **faktorisere** det opprinnelige polynomet.
- Siden  $(x^2 - 2x - 3) : (x + 1) = x - 3$ , er  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ .
- Siden **resten** av  $P(x) : (x - x_1)$  er det samme som  $P(x_1)$  må  $x_1$  være et **nullpunkt** for at divisjonen skal gå opp.

## Regel

*Divisjonen*

$$P(x) : (x - x_1)$$

*går opp hvis og bare hvis  $P(x_1) = 0$ .*

*Polynomet  $P(x)$  har  $(x - x_1)$  som faktor hvis og bare hvis  $P(x_1) = 0$ .*

# Om divisjonen går opp

## Oppgave

Bestem hva  $a$  må være for at divisjonen går opp:

$$(x^2 - ax + 3) : (x - 3).$$

- For at divisjonen skal gå opp, må  $x = 3$  være et nullpunkt for polynomet.
- Vi setter inn  $x = 3$  og påstår at det skal bli 0:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - ax + 3 \\ &= 3^2 - 3a + 3 \\ &= 12 - 3a \\ 12 &= 3a \\ 4 &= a \end{aligned}$$



**Ruffinis regel**

# Ruffinis regel

- Mesteparten av tiden så deler vi på et førstegradspolynom.
- Det finnes en rask metode å utføre divisjonen på kalt **Ruffinis regel**.
- Den går gjennom de samme utregningene som den vanlige divisjonsalgoritmen for polynom.
- Men bruker mindre plass, og gir mindre sjanse for regnefeil.
- Regelen brukes kun om vi deler på  $x - x_1$ .
- Om vi vil regne ut  $\frac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 1}$  med Ruffinis regel, må vi derfor heller regne ut  $3x^2 - 2x + 1$  delt på  $x - \frac{1}{2}$
- Og så dele svaret på 2.
- Mesteparten av tiden kan vi bruke Ruffinis regel uten problemer.

# Ruffinis regel

$x = 2$	1	-5	3
		2	-6
	1	-3	-3

- Vi vil regne ut  $x^2 - 5x + 3$  når  $x = 2$ . Vi setter opp en tabell som over.
- Vi fyller inn koeffisientene til  $x^2 - 5x + 3$  i øverste rad.
- Vi summerer tallene i første kolonne.
- Vi ganger svaret med  $x$ -verdien, og skriver svaret i neste kolonne.
- Vi summerer tallene i midtre kolonne.
- Vi ganger svaret med  $x$ -verdien.
- Vi summerer tallene i siste kolonne.
- Vi får da at  $P(x) = -3$ .
- Og at  $\frac{x^2-5x+3}{x-2} = x - 3 - \frac{3}{x-2}$ .

# Ruffinis regel, II

$x = 4$	2	-7	-5	4
		8	4	-4
	2	1	-1	0

- Vi vil regne ut  $(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) : (x - 4)$ . Vi setter opp en tabell som over.
- Vi fyller inn koeffisientene til  $2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$  i øverste rad.
- Vi følger Ruffinis regel.
- Dette gir oss at

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 5x + 4}{x - 4} = 2x^2 + x - 1$$

med null i rest.



**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**  
STORBYUNIVERSITETET