Fullstendige kvadrater

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

Fullstendige kvadrater

Hva er fullstendige kvadrater?

Definisjon

Et uttrykk er et fullstendig kvadrat dersom det kan faktoriseres ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

Hva er fullstendige kvadrater?

Definisjon

Et uttrykk er et fullstendig kvadrat dersom det kan faktoriseres ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

Eksempler:

- Uttrykket $x^2 + 10x + 25$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.

Hva er fullstendige kvadrater?

Definisjon

Et uttrykk er et fullstendig kvadrat dersom det kan faktoriseres ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

Eksempler:

- Uttrykket $x^2 + 10x + 25$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
- Uttrykket $x^2 - x + \frac{1}{4}$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

Hva er fullstendige kvadrater?

Definisjon

Et uttrykk er et fullstendig kvadrat dersom det kan faktoriseres ved hjelp av første eller andre kvadratsetning.

Eksempler:

- Uttrykket $x^2 + 10x + 25$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$.
- Uttrykket $x^2 - x + \frac{1}{4}$ er et fullstendig kvadrat, siden $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.
- Uttrykket $x^2 - 5x + 6$ er ikke et fullstendig kvadrat.

Fullstendig kvadrat

- Forste og andre kvadratsetning er

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + 2yx + y^2 \\
(x-y)^2 &= x^2 - 2yx + y^2.
\end{aligned}
$$

Fullstendig kvadrat

- Forste og andre kvadratsetning er

$$(x+y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$

- Så for at $x^2 + bx + c$ skal kunne skrives om ved hjelp av første eller andre kvadratsetning, må $b = \pm 2y$ og $c = y^2$.

Fullstendig kvadrat

- Forste og andre kvadratsetning er

$$(x+y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$

- Så for at $x^2 + bx + c$ skal kunne skrives om ved hjelp av første eller andre kvadratsetning, må $b = \pm 2y$ og $c = y^2$.
- Det vil si at vi må ha $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Fullstendig kvadrat

- Forste og andre kvadratsetning er

$$(x+y)^2 = x^2 + 2yx + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2yx + y^2.$$

- Så for at $x^2 + bx + c$ skal kunne skrives om ved hjelp av første eller andre kvadratsetning, må $b = \pm 2y$ og $c = y^2$.
- Det vil si at vi må ha $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Regel

Uttrykket $x^2 + bx + c$ er et fullstendig kvadrat hvis og bare hvis

$$c = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke andre kvadratsetning.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke andre kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $14x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke andre kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $14x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{14}{2} = 7$.
- Sjekker at siste ledd er $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

$$7^2 = 49.$$

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 - 14x + 49$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er minus i midterste ledd, skal vi bruke andre kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $14x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{14}{2} = 7$.
- Sjekker at siste ledd er $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:
$$7^2 = 49.$$
- Vi har derfor
$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2.$$

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $10x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $10x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
- Sjekker om siste ledd er $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

$$5^2 = 25.$$

Fullstendig kvadrat, eksempel

- Vi vil sjekke om $x^2 + 10x + 20$ er et fullstendig kvadrat.
- Siden det er pluss i midterste ledd, skal vi bruke første kvadratsetning.
- Siden midterste ledd er $10x$ får vi $\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
- Sjekker om siste ledd er $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:
$$5^2 = 25.$$
- Siden $20 \neq 25$ er $x^2 + 10x + 20$ ikke et fullstendig kvadrat.

Fullstendige kvadrater

1. **Fullstendige kvadrater**
   - Hva er fullstendige kvadrater?
   - Lage fullstendige kvadrater
   - Faktorisere andregradsuttrykk
2. **Andregradslikninger med to ledd**
3. **Andregradsformelen**

Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som ikke er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som ikke er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

Eksempel

Vi så nettopp at $x^2 + 10x + 20$ ikke var et fullstendig kvadrat, siden siste leddet burde vært 25. Vi får:

$$x^2 + 10x + 20 = x^2 + 10x + 25 - 25 + 20$$

Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som ikke er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

Eksempel

Vi så nettopp at $x^2 + 10x + 20$ ikke var et fullstendig kvadrat, siden siste leddet burde vært 25. Vi får:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 20 &= x^2 + 10x + 25 - 25 + 20 \\ &= (x+5)^2 - 25 + 20 \end{aligned}$$

Å lage fullstendige kvadrater

Når vi har et uttrykk som ikke er et fullstendig kvadrat, kan vi lage oss et fullstendig kvadrat ved å legge til og trekke fra det riktige tallet.

Eksempel

Vi så nettopp at $x^2 + 10x + 20$ ikke var et fullstendig kvadrat, siden siste leddet burde vært 25. Vi får:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 20 &= x^2 + 10x + 25 - 25 + 20 \\ &= (x+5)^2 - 25 + 20 \\ &= (x+5)^2 - 5 \end{aligned}$$

OSLOMET

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3$$

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3$$

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 - 6x + 2$:

$$x^2 - 6x + 2$$

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 - 6x + 2$:

$$x^2 - 6x + 2 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 2$$

OSLOMET

Lage fullstendig kvadrat, eksempel

Eksempler

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 + 2x - 3$:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

- Vi vil lage fullstendig kvadrat fra $x^2 - 6x + 2$:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 2 &= x^2 - 6x + 9 - 9 + 2 \\ &= (x-3)^2 - 7 \end{aligned}$$

Fullstendige kvadrater

1. **Fullstendige kvadrater**
   - Hva er fullstendige kvadrater?
   - Lage fullstendige kvadrater
   - Faktorisere andregradsuttrykk
2. **Andregradslikninger med to ledd**
3. **Andregradsformelen**

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2)$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1)+2)((x+1)-2) = (x+3)(x-1).$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1)+2)((x+1)-2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1)+2)((x+1)-2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraleddet vi får etter å ha fullført kvadratet er negativt.

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x + 1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x + 1)^2 - 2^2 = ((x + 1) + 2)((x + 1) - 2) = (x + 3)(x - 1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, og vi har faktorisert uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraleddet vi får etter å ha fullført kvadratet er negativt.
- Eksempel: Vi har

$$x^2 - 6x + 2$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1)+2)((x+1)-2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraleddet vi får etter å ha fullført kvadratet er negativt.
- Eksempel: Vi har

$$x^2 - 6x + 2 = (x-3)^2 - 7$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1) + 2)((x+1) - 2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraleddet vi får etter å ha fullført kvadratet er negativt.
- Eksempel: Vi har

$$x^2 - 6x + 2 = (x-3)^2 - 7 = (x-3)^2 - \sqrt{7}^2$$

Faktorisere andregradsuttrykk

- I eksempelet $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ ser vi at $4 = 2^2$.
- Uttrykket $(x+1)^2 - 2^2$ kan skrives om ved hjelp av konjugatsetningen til

$$(x+1)^2 - 2^2 = ((x+1)+2)((x+1)-2) = (x+3)(x-1).$$

- Så $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, og vi har faktorisert uttrykket.
- Dette kan vi alltid gjøre så lenge ekstraleddet vi får etter å ha fullført kvadratet er negativt.
- Eksempel: Vi har

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 2 &= (x-3)^2 - 7 = (x-3)^2 - \sqrt{7}^2 \\ &= \left(x - 3 + \sqrt{7}\right)\left(x - 3 - \sqrt{7}\right) \end{aligned}$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25 = (x - 2{,}5)^2 - \sqrt{0{,}25}^2$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25 = (x - 2{,}5)^2 - \sqrt{0{,}25}^2 \qquad = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}5^2$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$\begin{aligned}(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25 &= (x - 2{,}5)^2 - \sqrt{0{,}25}^2 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}5^2 \\ &= (x - 2{,}5 + 0{,}5)(x - 2{,}5 - 0{,}5)\end{aligned}$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$\begin{aligned}(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25 &= (x - 2{,}5)^2 - \sqrt{0{,}25}^2 \qquad = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}5^2 \\ &= (x - 2{,}5 + 0{,}5)(x - 2{,}5 - 0{,}5) = (x - 2)(x - 3).\end{aligned}$$

Faktorisere andregradsuttrykk, eksempel

Oppgave

Faktoriser $x^2 - 5x + 6$.

Vi fullfører først kvadratet:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot x + 6{,}25 - 6{,}25 + 6 = (x - 2{,}5)^2 - 0{,}25.$$

Vi bruker så konjugatsetningen:

$$\begin{aligned}(x - 2{,}5)^2 - 0{,}25 = (x - 2{,}5)^2 - \sqrt{0{,}25}^2 \qquad &= (x - 2{,}5)^2 - 0{,}5^2 \\ = (x - 2{,}5 + 0{,}5)(x - 2{,}5 - 0{,}5) &= (x - 2)(x - 3).\end{aligned}$$

Så $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Vi kan gange ut for å se at det stemmer.

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY

STORBYUNIVERSITETET