

# Krumning og vendepunkter

**Nikolai Bjørnestøl Hansen**

**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**  
STORBYUNIVERSITETET



## 1 Funksjonsdrøfting

## 2 Krumning og vendepunkter

- Høyeregradsderiverte
- Krumning

# Høyeregradsderiverte

# Deriverte av høyere grad

- Om vi deriverer  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$  får vi  $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ .
- Vi kan derivere på nytt, og får

$$f''(x) = 6x - 4.$$

- Funksjonen  $f''(x)$  kalles den andrederiverte til  $f$ .
- Vi kan også finne den tredjederiverte  $f'''(x)$ .
- Etter tredjederiverte, gidder vi ikke lenger skrive fnutter, og får

$$f^{(4)}(x), \quad f^{(5)}(x), \quad \dots$$

- Merk parenteser rundt tallet!

# Alternativ notasjon

- Dersom vi foretrekker å skrive deriverte som  $\frac{df}{dx}$ , trenger i en måte å skrive andrederiverte, tredjederiverte, og så videre.

- Vi skriver

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3f}{dx^3}, \quad \dots$$

- Merk at **over** brøkstreken opphøyer vi d, og **under** brøkstreken opphøyer vi dx.

- **Idéen** er at vi kan skrive

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} f \right).$$

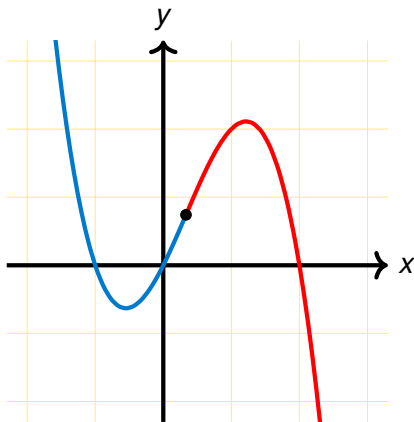
- Merk at  $\frac{d}{dx}$  betyr «Deriver funksjonen som kommer etter.»

- Vi kan derfor skrive

$$\frac{d}{dx} (x^2 - 3x + 2) = (x^2 - 3x + 2)'$$

**Krumning**

# Krumning



- Grafen vender den **hule siden opp** når  $x < \frac{1}{3}$ .
- Vi sier at grafen har **positiv krumning**.
- Grafen vender den **hule siden ned** når  $x > \frac{1}{3}$ .
- Vi sier at grafen har **negativ krumning**.
- Punktet hvor vi bytter fra **positiv** til **negativ** krumning kalles et **vendepunkt**.
- Der grafen har **positiv krumning** ser vi at vekstfarten **øker**.
- Der grafen har **negativ krumning** ser vi at vekstfarten **minker**.
- Vi kan derfor finne **krumningen** ved å se på den deriverte.

# Krumning og dobbelderivert

- **Positiv krumning** er der den deriverte **øker**.
- Det betyr at den **dobbelderiverte** er positiv.
- **Negativ krumning** er der den deriverte **synker**.
- Det betyr at den **dobbelderiverte** er negativ.
- Vi kan finne **vendepunktet** ved å se hvor den dobbelderiverte skifter fortegn.
- Det er typisk der den dobbelderiverte **er null**.
- For å huske hvordan positiv/negativ krumning ser ut, har vi denne huskeregelen:
  - **Positiv** krumning gir **blid** graf: 😊
  - **Negativ** krumning gir **sur** graf: ☹️





# Vendepunkt, eksempel

## Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$ .

- Vi begynner med å dobbelderivere funksjonen.

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 4$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 24$$

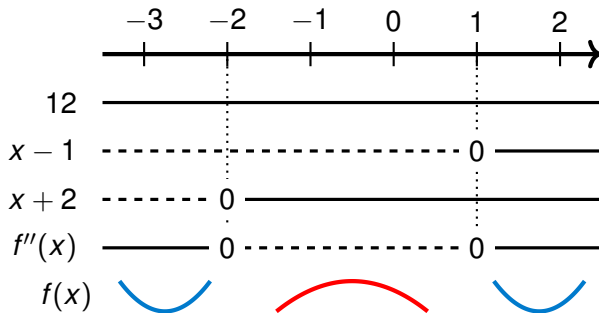
- Vi løser  $f''(x) = 0$  og får  $x = 1$  og  $x = -2$ .
- Vi må sjekke at den dobbelderiverte **byter fortegn** i disse punktene.
- Vi kan tegne en fortegnslinje.

# Vendepunkt, eksempel

## Oppgave

Finn eventuelle vendepunkter til  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 4x - 3$ .

- Vi fant  $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x - 1)(x + 2)$ , og tegner fortegnslinje:



# Dobbelderivert og ekstremalpunkt

- Vi tegnet en **representant** for funksjonen under fortegnslinjen.
- Det gir oss en idé om hvordan funksjonen ser ut.
- Vi ser fra fortegnslinjen at  $f(x)$  har vendepunkter når  $x = -2$  og  $x = 1$ .
- Vi ser også at dersom  $f(x)$  har et ekstremalpunkt med  $x < -2$  eller  $x > 1$ , må det være et **bunnpunkt**.
- Og et ekstremalpunkt på  $\langle -2, 1 \rangle$  må være et **toppunkt**.
- Generelt har vi:

## Regel

*Dersom  $f'(a) = 0$  og  $f''(a) < 0$  har funksjonen et **toppunkt** i  $x = a$ .*

*Dersom  $f'(a) = 0$  og  $f''(a) > 0$  har funksjonen et **bunnpunkt** i  $x = a$ .*

*Dersom  $f''(a) = 0$  kan funksjonen ha toppunkt, bunnpunkt, eller terrassepunkt.*

# Dobbelderivert og ekstremalpunkt, eksempel

## Oppgave

Finn topp- og bunnpunkt til  $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 105x - 10$ .

- Vi deriverer og får  $f'(x) = -3x^2 + 36x - 105$ .
- Vi løser  $f'(x) = 0$  og får  $x = 5$  og  $x = 7$ .
- Vi dobbelderiverer og får  $f''(x) = -6x + 36$ .
- Setter vi inn  $x = 5$  og  $x = 7$  får vi

$$f''(5) = 6 \quad \text{og} \quad f''(7) = -6.$$

- Vi har derfor at  $x = 5$  gir et **bunnpunkt** og  $x = 7$  gir et **toppunkt**.



**OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY**  
STORBYUNIVERSITETET