

# Vertikale asymptoter

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



# Vertikale asymptoter

- 1 Vertikale asymptoter
  - Absoluttverdi
  - Uendelige grenser
  - Vertikale asymptoter

2 Horisontale asymptoter

■ Tallene 2 og −2 er «like store» men med motsatt fortegn.



- Tallene 2 og −2 er «like store» men med motsatt fortegn.
- De har begge absoluttverdi 2.



- Tallene 2 og −2 er «like store» men med motsatt fortegn.
- De har begge absoluttverdi 2.
- Absoluttverdien til et tall er «tallet, men uten minustegn».



- Tallene 2 og −2 er «like store» men med motsatt fortegn.
- De har begge absoluttverdi 2.
- Absoluttverdien til et tall er «tallet, men uten minustegn».
- Vi skriver |x| for «absoluttverdien til x».



- Tallene 2 og −2 er «like store» men med motsatt fortegn.
- De har begge absoluttverdi 2.
- Absoluttverdien til et tall er «tallet, men uten minustegn».
- Vi skriver |x| for «absoluttverdien til x».
- Vi får derfor |-2| = 2 og |2| = 2.



- Tallene 2 og −2 er «like store» men med motsatt fortegn.
- De har begge absoluttverdi 2.
- Absoluttverdien til et tall er «tallet, men uten minustegn».
- Vi skriver |x| for «absoluttverdien til x».
- Vi får derfor |-2| = 2 og |2| = 2.
- Vi kan definere absoluttverdi ved hjelp av delt funksjonsuttrykk:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



- Tallene 2 og −2 er «like store» men med motsatt fortegn.
- De har begge absoluttverdi 2.
- Absoluttverdien til et tall er «tallet, men uten minustegn».
- Vi skriver |x| for «absoluttverdien til x».
- Vi får derfor |-2| = 2 og |2| = 2.
- Vi kan definere absoluttverdi ved hjelp av delt funksjonsuttrykk:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Men lettere å tenke på det som «bare fjern minustegnet».



- Tallene 2 og −2 er «like store» men med motsatt fortegn.
- De har begge absoluttverdi 2.
- Absoluttverdien til et tall er «tallet, men uten minustegn».
- Vi skriver |x| for «absoluttverdien til x».
- Vi får derfor |-2| = 2 og |2| = 2.
- Vi kan definere absoluttverdi ved hjelp av delt funksjonsuttrykk:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

- Men lettere å tenke på det som «bare fjern minustegnet».
- Absoluttverdien av et tall er aldri negativt (men |0| = 0).



# Vertikale asymptoter

- 1 Vertikale asymptoter
  - Absoluttverdi
  - Uendelige grenser
  - Vertikale asymptoter

2 Horisontale asymptoter

Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29 f(1,1)$$



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$
  $f(1,1) = 31$ 



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$
  $f(1,1) = 31$   $f(0,99)$ 



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$
  $f(1,1) = 31$   $f(0,99) = -299$ 



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$
  $f(1,1) = 31$   
 $f(0,99) = -299$   $f(1,01)$ 



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$
  $f(1,1) = 31$   $f(0,99) = -299$   $f(1,01) = 301$ 



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$
  $f(1,1) = 31$   
 $f(0,99) = -299$   $f(1,01) = 301$   
 $f(0,999)$ 



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$
  $f(1,1) = 31$   
 $f(0,99) = -299$   $f(1,01) = 301$   
 $f(0,999) = -2999$ 



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$
  $f(1,1) = 31$   
 $f(0,99) = -299$   $f(1,01) = 301$   
 $f(0,999) = -2999$   $f(1,001)$ 



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$
  $f(1,1) = 31$   
 $f(0,99) = -299$   $f(1,01) = 301$   
 $f(0,999) = -2999$   $f(1,001) = 3001$ 



- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$  kan vi bare sette inn x=1 og få  $\frac{0}{-2}=0$ .
- Om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$  kan vi ikke sette inn x=1, for da deler vi på 0.
- Men vi kan forkorte  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$  og så sette inn x=1.
- Men hva gjør vi om vi skal regne ut  $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}$ ?
- Om vi setter inn tall nærme 1 får vi

$$f(0,9) = -29$$
  $f(1,1) = 31$   
 $f(0,99) = -299$   $f(1,01) = 301$   
 $f(0,999) = -2999$   $f(1,001) = 3001$ 

■ Vi ser at svaret bare blir større og større (i absoluttverdi).



■ Vi bruker symbolet  $\infty$  for «uendelig».



- Vi bruker symbolet  $\infty$  for «uendelig».
- Hvis noe bare vokser og vokser og vokser sier vi at det går mot uendelig.



- Vi bruker symbolet  $\infty$  for «uendelig».
- Hvis noe bare vokser og vokser og vokser sier vi at det går mot uendelig.
- Fra forrige eksempel har vi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty.$$



- Vi bruker symbolet  $\infty$  for «uendelig».
- Hvis noe bare vokser og vokser og vokser sier vi at det går mot uendelig.
- Fra forrige eksempel har vi

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\infty.$$

Om noe synker og synker og synker, sier vi at det går mot negativ uendelig.



- Vi bruker symbolet  $\infty$  for «uendelig».
- Hvis noe bare vokser og vokser og vokser sier vi at det går mot uendelig.
- Fra forrige eksempel har vi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty.$$

- Om noe synker og synker, sier vi at det går mot negativ uendelig.
- Fra forrige eksempel har vi

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty.$$



- Vi bruker symbolet  $\infty$  for «uendelig».
- Hvis noe bare vokser og vokser og vokser sier vi at det går mot uendelig.
- Fra forrige eksempel har vi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty.$$

- Om noe synker og synker, sier vi at det går mot negativ uendelig.
- Fra forrige eksempel har vi

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty.$$

Vi kan da skrive

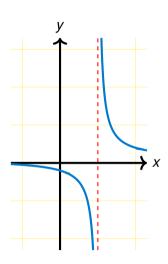
$$\lim_{x\to 1} |f(x)| = \infty$$
 eller  $\lim_{x\to 1} f(x) = \pm \infty$ .



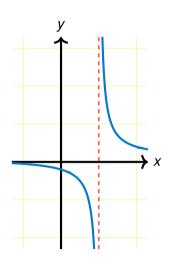
# Vertikale asymptoter

- 1 Vertikale asymptoter
  - Absoluttverdi
  - Uendelige grenser
  - Vertikale asymptoter

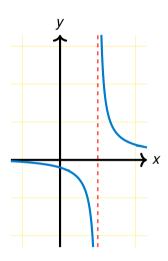
2 Horisontale asymptoter



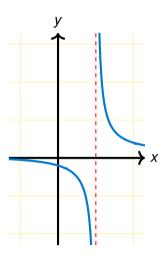
Hvis vi tegner grafen til  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  kan vi se at den vokser/synker mot uendelig.



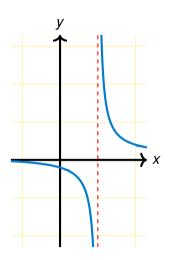
- Hvis vi tegner grafen til  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  kan vi se at den vokser/synker mot uendelig.
- Vi ser at grafen nærmer seg linja x = 2 uten å treffe.



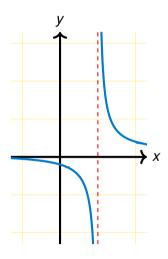
- Hvis vi tegner grafen til  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  kan vi se at den vokser/synker mot uendelig.
- $lue{}$  Vi ser at grafen nærmer seg linja x=2 uten å treffe.
- Dette kaller vi en vertikal asymptote



- Hvis vi tegner grafen til  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  kan vi se at den vokser/synker mot uendelig.
- Vi ser at grafen nærmer seg linja x = 2 uten å treffe.
- Dette kaller vi en vertikal asymptote
- Asymptotisk betyr «ikke sammenfallende».



- Hvis vi tegner grafen til  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  kan vi se at den vokser/synker mot uendelig.
- Vi ser at grafen nærmer seg linja x = 2 uten å treffe.
- Dette kaller vi en vertikal asymptote
- Asymptotisk betyr «ikke sammenfallende».
- Betyr at grafen likner mer og mer på linja jo nærmere vi kommer, men treffer den aldri.

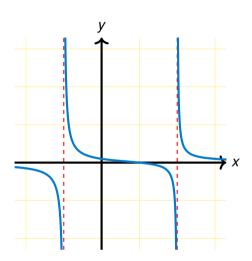


- Hvis vi tegner grafen til  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$  kan vi se at den vokser/synker mot uendelig.
- Vi ser at grafen nærmer seg linja x = 2 uten å treffe.
- Dette kaller vi en vertikal asymptote
- Asymptotisk betyr «ikke sammenfallende».
- Betyr at grafen likner mer og mer på linja jo nærmere vi kommer, men treffer den aldri.

#### **Definisjon**

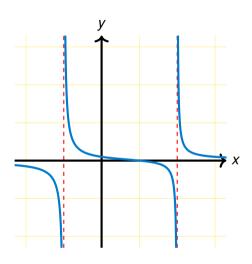
Funksjonen f(x) har en vertikal asymptote i x = a om

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\infty.$$



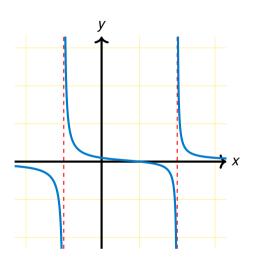
 Vi finner vertikale asymptoter til rasjonale funksjoner ved å se hvor vi deler på 0.





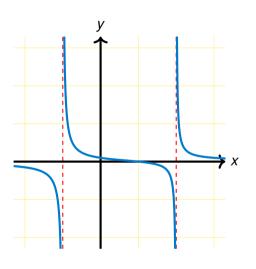
- Vi finner vertikale asymptoter til rasjonale funksjoner ved å se hvor vi deler på 0.
- Om  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  er forkortet mest mulig, er de vertikale asymptotene der Q(a) = 0.





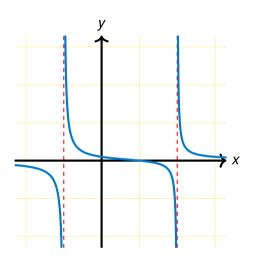
- Vi finner vertikale asymptoter til rasjonale funksjoner ved å se hvor vi deler på 0.
- Om  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  er forkortet mest mulig, er de vertikale asymptotene der Q(a) = 0.
- Husk å forkorte brøken først.





- Vi finner vertikale asymptoter til rasjonale funksjoner ved å se hvor vi deler på 0.
- Om  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  er forkortet mest mulig, er de vertikale asymptotene der Q(a) = 0.
- Husk å forkorte brøken først.
- Om P(a) også er 0 kan brøken forkortes.





- Vi finner vertikale asymptoter til rasjonale funksjoner ved å se hvor vi deler på 0.
- Om  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  er forkortet mest mulig, er de vertikale asymptotene der Q(a) = 0.
- Husk å forkorte brøken først.
- Om P(a) også er 0 kan brøken forkortes.
- En funksjon kan godt ha mer enn én asymptote.



#### **Oppgave**



#### **Oppgave**

Finn alle vertikale asymptoter til  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x-2}$ .

■ Vi må se når  $x^2 - x - 2 = 0$ .



#### **Oppgave**

- Vi må se når  $x^2 x 2 = 0$ .
- Vi løser denne og får x = 2 og x = -1.



#### **Oppgave**

- Vi må se når  $x^2 x 2 = 0$ .
- Vi løser denne og får x = 2 og x = -1.
- Vi kan derfor skrive om



#### **Oppgave**

- Vi må se når  $x^2 x 2 = 0$ .
- Vi løser denne og får x = 2 og x = -1.
- Vi kan derfor skrive om

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+1)}$$



#### **Oppgave**

- Vi må se når  $x^2 x 2 = 0$ .
- Vi løser denne og får x = 2 og x = -1.
- Vi kan derfor skrive om

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+1)}$$



#### **Oppgave**

- Vi må se når  $x^2 x 2 = 0$ .
- Vi løser denne og får x = 2 og x = -1.
- Vi kan derfor skrive om

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2}.$$



#### **Oppgave**

Finn alle vertikale asymptoter til  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x-2}$ .

- Vi må se når  $x^2 x 2 = 0$ .
- Vi løser denne og får x = 2 og x = -1.
- Vi kan derfor skrive om

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2}.$$

Kun x = 2 er en vertikal asymptote.





# OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY STORBYUNIVERSITETET