

# Likninger

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



#### Likninger

- 1 Likninger
  - Likninger
  - Løse likninger
  - Sette prøve på svaret

2 Formler

#### Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

#### Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

To eksempel:

$$3 = 7$$

#### Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

To eksempel:

$$3 = 7$$
  $2x + 3y = 5 - 3z$ .

#### Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

To eksempel:

$$3 = 7$$
  $2x + 3y = 5 - 3z$ .

Et sett med tall er en løsning av en likning dersom vi kan bytte ut variablene med disse tallene, og vi får at venstresiden og høyresiden er like.

#### Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

To eksempel:

$$3 = 7$$
  $2x + 3y = 5 - 3z$ .

- Et sett med tall er en løsning av en likning dersom vi kan bytte ut variablene med disse tallene, og vi får at venstresiden og høyresiden er like.
- Eksempel: Tallene x = 1, y = 1 og z = 0 løser likningen over, siden

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 - 3 \cdot 0$$

#### Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

To eksempel:

$$3 = 7$$
  $2x + 3y = 5 - 3z$ .

- Et sett med tall er en løsning av en likning dersom vi kan bytte ut variablene med disse tallene, og vi får at venstresiden og høyresiden er like.
- Eksempel: Tallene x = 1, y = 1 og z = 0 løser likningen over, siden

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 - 3 \cdot 0$$

A løse en likning betyr å finne alle sett med tall som er en løsning av likningen.

Nikolai Bjørnestøl Hansen Likninger 29. juni 2020 1/11

#### Likninger

- 1 Likninger
  - Likninger
  - Løse likninger
  - Sette prøve på svaret

2 Formler

En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.



- En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.
- Vi holder oss derfor til likninger som bare har én variabel.



- En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.
- Vi holder oss derfor til likninger som bare har én variabel.
- Men hvordan finner vi ut hva løsningen(e) kan være?



- En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.
- Vi holder oss derfor til likninger som bare har én variabel.
- Men hvordan finner vi ut hva løsningen(e) kan være?
- Hvilke *x*-verdier er løsninger av likningen

$$2x - 3 = 7$$
?



- En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.
- Vi holder oss derfor til likninger som bare har én variabel.
- Men hvordan finner vi ut hva løsningen(e) kan være?
- Hvilke *x*-verdier er løsninger av likningen

$$2x - 3 = 7$$
?

Skal vi bare gjette? Om vi prøver oss frem med et par tall, så vil vi fort finne ut at x = 5 løser likningen.



- En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.
- Vi holder oss derfor til likninger som bare har én variabel.
- Men hvordan finner vi ut hva løsningen(e) kan være?
- Hvilke *x*-verdier er løsninger av likningen

$$2x - 3 = 7$$
?

- Skal vi bare gjette? Om vi prøver oss frem med et par tall, så vil vi fort finne ut at x = 5 løser likningen.
- Dette kan da ikke være den letteste metoden. Blir mye vanskeligere med en gang svaret ikke er et heltall.



■ Vi kan se på en likning som en sann setning. Venstresiden er lik høyresiden.



- Vi kan se på en likning som en sann setning. Venstresiden er lik høyresiden.
- Vi vet bare ikke hva *x*-verdien skal være for at det skal være sant.



- Vi kan se på en likning som en sann setning. Venstresiden er lik høyresiden.
- Vi vet bare ikke hva x-verdien skal være for at det skal være sant.
- Men om vi «gjør» det samme på begge sidene av likhetstegnet, så vil setningen fortsatt være sann.



- Vi kan se på en likning som en sann setning. Venstresiden er lik høyresiden.
- Vi vet bare ikke hva x-verdien skal være for at det skal være sant.
- Men om vi «gjør» det samme på begge sidene av likhetstegnet, så vil setningen fortsatt være sann.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$(2x-3)+2=(7)+2.$$



- Vi kan se på en likning som en sann setning. Venstresiden er lik høyresiden.
- Vi vet bare ikke hva x-verdien skal være for at det skal være sant.
- Men om vi «gjør» det samme på begge sidene av likhetstegnet, så vil setningen fortsatt være sann.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

så må jo også

$$(2x-3)+2=(7)+2.$$

Begge deler er jo bare «2 mer», men siden begge er 2 mer, må de fremdeles være like.



■ Vi kan også gange med det samme på begge sider.



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$3\cdot(2x-3)=3\cdot(7).$$



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

så må jo også

$$3\cdot(2x-3)=3\cdot(7).$$

Begge sider er nå 3 ganger større, men siden begge er det, må de fremdeles være like.



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$3 \cdot (2x - 3) = 3 \cdot (7)$$
.

- Begge sider er nå 3 ganger større, men siden begge er det, må de fremdeles være like.
- Vi har disse to triksene:



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$3 \cdot (2x - 3) = 3 \cdot (7)$$
.

- Begge sider er nå 3 ganger større, men siden begge er det, må de fremdeles være like.
- Vi har disse to triksene:
  - Vi kan plusse/minuse med det samme på begge sider.



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$3 \cdot (2x - 3) = 3 \cdot (7)$$
.

- Begge sider er nå 3 ganger større, men siden begge er det, må de fremdeles være like.
- Vi har disse to triksene:
  - Vi kan plusse/minuse med det samme på begge sider.
  - Vi kan gange/dele med det samme på begge sider.



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$3\cdot(2x-3)=3\cdot(7).$$

- Begge sider er nå 3 ganger større, men siden begge er det, må de fremdeles være like.
- Vi har disse to triksene:
  - Vi kan plusse/minuse med det samme på begge sider.
  - Vi kan gange/dele med det samme på begge sider.
- Til sammen så vil disse to triksene løse veldig mange likninger.



Vi vil løse likningen

$$2x - 3 = 7$$
.



Vi vil løse likningen

$$2x - 3 = 7$$
.

■ Vi velger å plusse på 3 på begge sidene, og får

$$(2x-3)+3=(7)+3$$



Vi vil løse likningen

$$2x - 3 = 7$$
.

■ Vi velger å plusse på 3 på begge sidene, og får

$$(2x-3)+3=(7)+3$$
  
 $2x=7+3$ 



Vi vil løse likningen

$$2x - 3 = 7$$
.

■ Vi velger å plusse på 3 på begge sidene, og får

$$(2x-3)+3=(7)+3$$
  
 $2x=7+3$ 

Merk hvordan 3-tallet «byttet side» men da også byttet fortegn.



Vi vil løse likningen

$$2x - 3 = 7$$
.

■ Vi velger å plusse på 3 på begge sidene, og får

$$(2x-3)+3=(7)+3$$
  
 $2x=7+3$ 

Merk hvordan 3-tallet «byttet side» men da også byttet fortegn.

#### Regel

Vi kan flytte et ledd over på andre siden av likhetstegnet, men må da bytte fortegn.



Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.



Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

Vi løser:

$$3x - 3 = 5x + 7$$



Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

Vi løser:

$$3x - 3 = 5x + 7$$
$$-3 = 5x + 7 - 3x$$

Flytte-Bytte



Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

Vi løser:

$$3x - 3 = 5x + 7$$
$$-3 = 5x + 7 - 3x$$
$$-3 - 7 = 5x - 3x$$

Flytte-Bytte Flytte-Bytte



# Å løse en likning, eksempel

Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

Vi løser:

$$3x - 3 = 5x + 7$$

$$-3 = 5x + 7 - 3x$$

$$-3 - 7 = 5x - 3x$$

$$-10 = 2x$$

Flytte-Bytte Flytte-Bytte Regne ut



# Å løse en likning, eksempel

Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

$$3x - 3 = 5x + 7$$
  
 $-3 = 5x + 7 - 3x$  Flytte-Bytte  
 $-3 - 7 = 5x - 3x$  Flytte-Bytte  
 $-10 = 2x$  Regne ut  
 $\frac{-10}{2} = \frac{2x}{2}$  Del begge sider på 2



# Å løse en likning, eksempel

Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

$$3x - 3 = 5x + 7$$
 $-3 = 5x + 7 - 3x$ 
Flytte-Bytte
 $-3 - 7 = 5x - 3x$ 
Flytte-Bytte
 $-10 = 2x$ 
Regne ut
$$\frac{-10}{2} = \frac{2x}{2}$$
Del begge sider på 2
$$-5 = x$$
Regne ut



Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.



- Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.
- Vi ender da alltid opp med en likning som ikke lenger har brøker.



- Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.
- Vi ender da alltid opp med en likning som ikke lenger har brøker.
- Eksempel: Vi skal løse

$$\frac{3}{x}+5=\frac{2x+1}{x}.$$



- Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.
- Vi ender da alltid opp med en likning som ikke lenger har brøker.
- Eksempel: Vi skal løse

$$\frac{3}{x}+5=\frac{2x+1}{x}.$$

■ Vi ganger begge sidene med x og får

$$\left(\frac{3}{x} + 5\right) \cdot x = \frac{2x + 1}{x} \cdot x$$



- Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.
- Vi ender da alltid opp med en likning som ikke lenger har brøker.
- Eksempel: Vi skal løse

$$\frac{3}{x}+5=\frac{2x+1}{x}.$$

■ Vi ganger begge sidene med x og får

$$\left(\frac{3}{x} + 5\right) \cdot x = \frac{2x + 1}{x} \cdot x$$
$$\frac{3x}{x} + 5x = \frac{(2x + 1) \cdot x}{x}$$



- Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.
- Vi ender da alltid opp med en likning som ikke lenger har brøker.
- Eksempel: Vi skal løse

$$\frac{3}{x}+5=\frac{2x+1}{x}.$$

■ Vi ganger begge sidene med x og får

$$\left(\frac{3}{x} + 5\right) \cdot x = \frac{2x + 1}{x} \cdot x$$
$$\frac{3x}{x} + 5x = \frac{(2x + 1) \cdot x}{x}$$
$$3 + 5x = 2x + 1$$



Denne rekkefølgen fører nesten alltid frem:

1 Løs opp parenteser.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.
- 3 Trekk sammen like ledd.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.
- Trekk sammen like ledd.
- 4 Flytt alle ledd med ukjente til venstresiden.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.
- Trekk sammen like ledd.
- 4 Flytt alle ledd med ukjente til venstresiden.
- 5 Flytt alle ledd uten ukjente til høyresiden.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.
- 3 Trekk sammen like ledd.
- 4 Flytt alle ledd med ukjente til venstresiden.
- 5 Flytt alle ledd uten ukjente til høyresiden.
- 6 Trekk sammen like ledd.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.
- Trekk sammen like ledd.
- 4 Flytt alle ledd med ukjente til venstresiden.
- 5 Flytt alle ledd uten ukjente til høyresiden.
- Trekk sammen like ledd.
- 7 Del begge sider med tallet foran den ukjente.



# Likninger

- 1 Likninger
  - Likninger
  - Løse likninger
  - Sette prøve på svaret

2 Formler

Når vi har funnet en løsning, så kan vi sette prøve på denne ved å sette den inn i den originale likningen.



- Når vi har funnet en løsning, så kan vi sette prøve på denne ved å sette den inn i den originale likningen.
- Om vi har regnet riktig så skal vi da få at venstresiden og høyresiden er like.



- Når vi har funnet en løsning, så kan vi sette prøve på denne ved å sette den inn i den originale likningen.
- Om vi har regnet riktig så skal vi da få at venstresiden og høyresiden er like.
- Lurt å sette prøve på svaret om du er usikker på om du har regnet riktig.



- Når vi har funnet en løsning, så kan vi sette prøve på denne ved å sette den inn i den originale likningen.
- Om vi har regnet riktig så skal vi da få at venstresiden og høyresiden er like.
- Lurt å sette prøve på svaret om du er usikker på om du har regnet riktig.
- Også veldig viktig å sette prøve på svaret dersom likningen hadde ukjente under brøkstreken.



- Når vi har funnet en løsning, så kan vi sette prøve på denne ved å sette den inn i den originale likningen.
- Om vi har regnet riktig så skal vi da få at venstresiden og høyresiden er like.
- Lurt å sette prøve på svaret om du er usikker på om du har regnet riktig.
- Også veldig viktig å sette prøve på svaret dersom likningen hadde ukjente under brøkstreken.
- Vi må sjekke at løsningen ikke gjør at vi deler på null!



Vi vil løse likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$$



Vi vil løse likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$$

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$



Vi vil løse likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$$

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$

$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$



Vi vil løse likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$$

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$
$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$
$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$



Vi vil løse likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$$

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$
$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$
$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$
$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x - 1$$



Vi vil løse likningen

 $\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$ 

Vi løser:

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$

$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$

$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$

$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x - 1$$



6x - 3 + 2 = 4x - 1

Vi vil løse likningen

 $\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$ 

Vi løser:

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$
$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$

$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$

$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x-1$$



6x - 3 + 2 = 4x - 1

6x - 1 = 4x - 1

Vi vil løse likningen

 $\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$ 

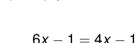
Vi løser:

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$

$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$

$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$

$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x-1$$



6x - 3 + 2 = 4x - 1

$$6x - 4x = -1 + 1$$



Vi vil løse likningen

 $\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$ 

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$

$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$

$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$

$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x-1$$

$$6x - 3 + 2 = 4x - 1$$

$$6x - 1 = 4x - 1$$

$$6x - 4x = -1 + 1$$

$$2x = 0$$



Vi vil løse likningen

 $\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$ 

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$

$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$

$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$

$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x-1$$

$$6x-3+2=4x-1$$

$$6x-1=4x-1$$

$$6x-4x=-1+1$$

$$2x=0$$

$$x = 0$$



Det eneste svaret vi fant for likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{x}$$

 $\operatorname{var} x = 0.$ 



Det eneste svaret vi fant for likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{x}$$

 $\operatorname{var} x = 0.$ 

Men om vi prøver å sette det inn i likningen får vi

$$\frac{2 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0} + \frac{1}{3 \cdot 0} = \frac{4 \cdot 0 - 1}{0}.$$



Det eneste svaret vi fant for likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{x}$$

 $\operatorname{var} x = 0.$ 

Men om vi prøver å sette det inn i likningen får vi

$$\frac{2 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0} + \frac{1}{3 \cdot 0} = \frac{4 \cdot 0 - 1}{0}.$$

Vi deler på null! Ikke lov!



Det eneste svaret vi fant for likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{x}$$

 $\operatorname{var} x = 0.$ 

Men om vi prøver å sette det inn i likningen får vi

$$\frac{2 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0} + \frac{1}{3 \cdot 0} = \frac{4 \cdot 0 - 1}{0}.$$

- Vi deler på null! Ikke lov!
- Det betyr at x = 0 ikke er en løsning likevel.



Det eneste svaret vi fant for likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{x}$$

var x = 0.

Men om vi prøver å sette det inn i likningen får vi

$$\frac{2 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0} + \frac{1}{3 \cdot 0} = \frac{4 \cdot 0 - 1}{0}.$$

- Vi deler på null! Ikke lov!
- Det betyr at x = 0 ikke er en løsning likevel.
- Og siden det var den eneste mulige løsningen, betyr det at denne likningen ikke har noen løsninger.



# OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY STORBYUNIVERSITETET