Grenseverdier

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

Grenseverdier

Tilnærming

- La oss se på funksjonen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}.$$

Tilnærming

- La oss se på funksjonen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}.$$

- Definisjonsmengden er $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Tilnærming

- La oss se på funksjonen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}.$$

- Definisjonsmengden er $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Vi får ikke lov til å sette inn $x = 3$.

Tilnærming

- La oss se på funksjonen
$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}.$$
- Definisjonsmengden er $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Vi får ikke lov til å sette inn $x = 3$.
- Men vi kan spørre «Hva burde vi fått, om vi fikk lov?»

Tilnærming

- La oss se på funksjonen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}.$$

- Definisjonsmengden er $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Vi får ikke lov til å sette inn $x = 3$.
- Men vi kan spørre «Hva burde vi fått, om vi fikk lov?»
- La oss prøve å sett inn tall som nesten er 3:

Tilnærming

- La oss se på funksjonen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}.$$

- Definisjonsmengden er $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Vi får ikke lov til å sette inn $x = 3$.
- Men vi kan spørre «Hva burde vi fått, om vi fikk lov?»
- La oss prøve å sett inn tall som nesten er 3:

$$f(2{,}9) = 9{,}8 \qquad\qquad f(3{,}1) = 10{,}2$$

Tilnærming

- La oss se på funksjonen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}.$$

- Definisjonsmengden er $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Vi får ikke lov til å sette inn $x = 3$.
- Men vi kan spørre «Hva burde vi fått, om vi fikk lov?»
- La oss prøve å sett inn tall som nesten er 3:

$$f(2{,}9) = 9{,}8 \qquad f(3{,}1) = 10{,}2$$
$$f(2{,}99) = 9{,}98 \qquad f(3{,}01) = 10{,}02$$

Tilnærming

- La oss se på funksjonen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}.$$

- Definisjonsmengden er $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Vi får ikke lov til å sette inn $x = 3$.
- Men vi kan spørre «Hva burde vi fått, om vi fikk lov?»
- La oss prøve å sett inn tall som nesten er 3:

$$f(2{,}9) = 9{,}8 \qquad f(3{,}1) = 10{,}2$$
$$f(2{,}99) = 9{,}98 \qquad f(3{,}01) = 10{,}02$$
$$f(2{,}999) = 9{,}998 \qquad f(3{,}001) = 10{,}002$$

Tilnærming

- La oss se på funksjonen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}.$$

- Definisjonsmengden er $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Vi får ikke lov til å sette inn $x = 3$.
- Men vi kan spørre «Hva burde vi fått, om vi fikk lov?»
- La oss prøve å sett inn tall som nesten er 3:

$$f(2{,}9) = 9{,}8 \qquad f(3{,}1) = 10{,}2$$
$$f(2{,}99) = 9{,}98 \qquad f(3{,}01) = 10{,}02$$
$$f(2{,}999) = 9{,}998 \qquad f(3{,}001) = 10{,}002$$

- Når x går mot 3, går $f(x)$ mot 10.

Grensen til en funksjon

- Vi så på forrige side at når x kom nærmere 3, ville $f(x)$ komme nærmere 10.

Grensen til en funksjon

- Vi så på forrige side at når x kom nærmere 3, ville $f(x)$ komme nærmere 10.
- Vi skriver $f(x) \to 10$ når $x \to 3$.

Grensen til en funksjon

- Vi så på forrige side at når x kom nærmere 3, ville $f(x)$ komme nærmere 10.
- Vi skriver $f(x) \to 10$ når $x \to 3$.
- Og uttaler det «$f(x)$ går mot 10 når x går mot 3.»

Grensen til en funksjon

- Vi så på forrige side at når x kom nærmere 3, ville $f(x)$ komme nærmere 10.
- Vi skriver $f(x) \to 10$ når $x \to 3$.
- Og uttaler det «$f(x)$ går mot 10 når x går mot 3.»
- Eller:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 10.$$

Grensen til en funksjon

- Vi så på forrige side at når x kom nærmere 3, ville $f(x)$ komme nærmere 10.
- Vi skriver $f(x) \to 10$ når $x \to 3$.
- Og uttaler det «$f(x)$ går mot 10 når x går mot 3.»
- Eller:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 10.$$

- Uttales «Grensen til $f(x)$ når x går mot 3 er 10.»

Grensen til en funksjon

- Vi så på forrige side at når x kom nærmere 3, ville $f(x)$ komme nærmere 10.
- Vi skriver $f(x) \to 10$ når $x \to 3$.
- Og uttaler det «$f(x)$ går mot 10 når x går mot 3.»
- Eller:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 10.$$

- Uttales «Grensen til $f(x)$ når x går mot 3 er 10.»
- Merk: Vi bruker likhetstegn når vi skriver «lim» og piler når vi ikke skriver «lim».

Grensen til en funksjon

- Vi så på forrige side at når x kom nærmere 3, ville $f(x)$ komme nærmere 10.
- Vi skriver $f(x) \to 10$ når $x \to 3$.
- Og uttaler det «$f(x)$ går mot 10 når x går mot 3.»
- Eller:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 10.$$

- Uttales «Grensen til $f(x)$ når x går mot 3 er 10.»
- Merk: Vi bruker likhetstegn når vi skriver «lim» og piler når vi ikke skriver «lim».
- Vi sier at grensen $\lim_{x \to a} f(x)$ finnes dersom vi får samme svar uansett hvordan vi prøver å regne den ut.

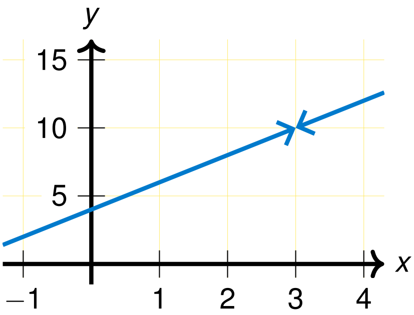
Grensen til en funksjon

- Vi så på forrige side at når x kom nærmere 3, ville $f(x)$ komme nærmere 10.
- Vi skriver $f(x) \to 10$ når $x \to 3$.
- Og uttaler det «$f(x)$ går mot 10 når x går mot 3.»
- Eller:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 10.$$

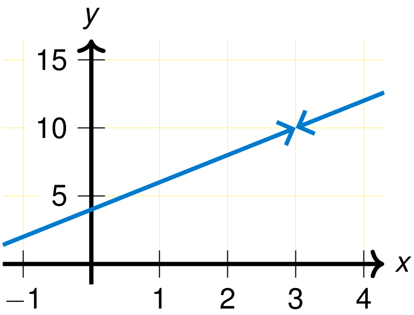
- Uttales «Grensen til $f(x)$ når x går mot 3 er 10.»
- Merk: Vi bruker likhetstegn når vi skriver «lim» og piler når vi ikke skriver «lim».
- Vi sier at grensen $\lim_{x \to a} f(x)$ finnes dersom vi får samme svar uansett hvordan vi prøver å regne den ut.
- Om vi hadde hatt $f(2.99) = 9.98$ men $f(3.01) = 12.02$ og så videre, finnes ikke grensen.

Se grensen grafisk



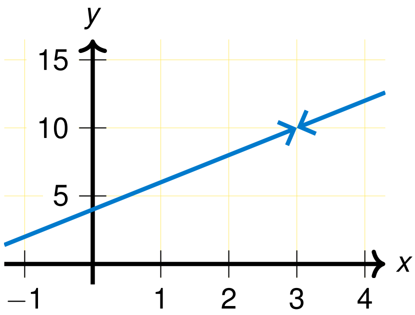
- Om vi tegner grafen til $f(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x-3}$ får vi nesten en rett linje.

Se grensen grafisk



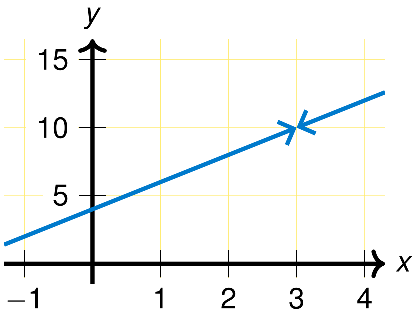
- Om vi tegner grafen til $f(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x-3}$ får vi nesten en rett linje.
- Alt som mangler er punktet i $x = 3$.

Se grensen grafisk



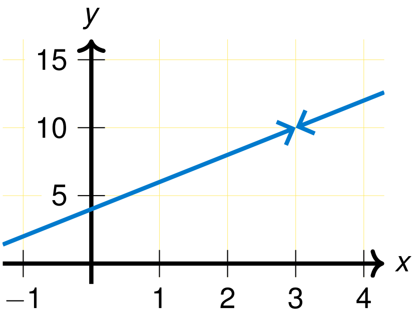
- Om vi tegner grafen til $f(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x-3}$ får vi nesten en rett linje.
- Alt som mangler er punktet i $x = 3$.
- Vi ser at «punktet som mangler» er $(3, 10)$.

Se grensen grafisk



- Om vi tegner grafen til $f(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x-3}$ får vi nesten en rett linje.
- Alt som mangler er punktet i $x = 3$.
- Vi ser at «punktet som mangler» er $(3, 10)$.
- Om vi hadde lagt til punktet $(3, 10)$ hadde grafen vært kontinuerlig.

Se grensen grafisk



- Om vi tegner grafen til $f(x) = \frac{2x^2-2x-12}{x-3}$ får vi nesten en rett linje.
- Alt som mangler er punktet i $x = 3$.
- Vi ser at «punktet som mangler» er $(3, 10)$.
- Om vi hadde lagt til punktet $(3, 10)$ hadde grafen vært kontinuerlig.
- Så igjen ser vi at $f(3)$ «burde vært» 10.

Grenseverdier

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x \to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x\to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x \to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}$$

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x \to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \frac{(2x + 4)(x - 3)}{(x - 3)}$$

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x\to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}$$

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x\to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = 2x + 4.$$

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x \to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \frac{(2x + 4)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}} = 2x + 4.$$

- Vi ser derfor at $f(x) = 2x + 4$ når $x \neq 3$. Siden $2 \cdot 3 + 4 = 10$ «burde» da også $f(3) = 10$.

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x \to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \frac{(2x + 4)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}} = 2x + 4.$$

- Vi ser derfor at $f(x) = 2x + 4$ når $x \neq 3$. Siden $2 \cdot 3 + 4 = 10$ «burde» da også $f(3) = 10$.
- Vi skriver

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}$$

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x\to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = 2x + 4.$$

- Vi ser derfor at $f(x) = 2x + 4$ når $x \neq 3$. Siden $2 \cdot 3 + 4 = 10$ «burde» da også $f(3) = 10$.
- Vi skriver

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(2x+4)(x-3)}{x-3}$$

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x\to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x-3} = \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = 2x + 4.$$

- Vi ser derfor at $f(x) = 2x + 4$ når $x \neq 3$. Siden $2 \cdot 3 + 4 = 10$ «burde» da også $f(3) = 10$.
- Vi skriver

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x\to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = 2x + 4.$$

- Vi ser derfor at $f(x) = 2x + 4$ når $x \neq 3$. Siden $2 \cdot 3 + 4 = 10$ «burde» da også $f(3) = 10$.
- Vi skriver

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\to 3} 2x + 4$$

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x\to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = 2x + 4.$$

- Vi ser derfor at $f(x) = 2x + 4$ når $x \neq 3$. Siden $2 \cdot 3 + 4 = 10$ «burde» da også $f(3) = 10$.
- Vi skriver

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\to 3} 2x + 4 = 2 \cdot 3 + 4$$

Regne ut grenser

- For å være sikre på at $\lim_{x \to 3} f(x) = 10$ burde vi regne ut svaret.
- Dette kan vi gjøre ved å forenkle uttrykket.
- Vi har, når $x \neq 3$:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = 2x + 4.$$

- Vi ser derfor at $f(x) = 2x + 4$ når $x \neq 3$. Siden $2 \cdot 3 + 4 = 10$ «burde» da også $f(3) = 10$.
- Vi skriver

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(2x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \to 3} 2x + 4 = 2 \cdot 3 + 4 = 10.$$

Grense for polynom

Oppgave

Finn $\lim_{x \to -1} f(x)$ for $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Grense for polynom

Oppgave

Finn $\lim_{x \to -1} f(x)$ for $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

- Vi vil se hva $x^2 - 3x + 1$ er når x er nærme -1.

Grense for polynom

Oppgave

Finn $\lim_{x \to -1} f(x)$ for $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

- Vi vil se hva $x^2 - 3x + 1$ er når x er nærme -1.
- Vi får

$$f(-1{,}1) = 5{,}51 \qquad f(-0{,}9) = 4{,}51$$
$$f(-1{,}01) = 5{,}0501 \qquad f(-0{,}99) = 4{,}9501$$
$$f(-1{,}001) = 5{,}005\,001 \qquad f(-0{,}999) = 4{,}995\,001$$

Grense for polynom

Oppgave

Finn $\lim_{x \to -1} f(x)$ for $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

- Vi vil se hva $x^2 - 3x + 1$ er når x er nærme -1.
- Vi får

$$
\begin{aligned}
f(-1{,}1) &= 5{,}51 & \qquad f(-0{,}9) &= 4{,}51 \\
f(-1{,}01) &= 5{,}0501 & \qquad f(-0{,}99) &= 4{,}9501 \\
f(-1{,}001) &= 5{,}005\,001 & \qquad f(-0{,}999) &= 4{,}995\,001
\end{aligned}
$$

- Vi ser at $\lim_{x \to -1} f(x) = 5$.

Grense for polynom

Oppgave

Finn $\lim_{x \to -1} f(x)$ for $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

- Vi vil se hva $x^2 - 3x + 1$ er når x er nærme -1.
- Vi får

$$\begin{aligned} f(-1{,}1) &= 5{,}51 & f(-0{,}9) &= 4{,}51 \\ f(-1{,}01) &= 5{,}0501 & f(-0{,}99) &= 4{,}9501 \\ f(-1{,}001) &= 5{,}005\,001 & f(-0{,}999) &= 4{,}995\,001 \end{aligned}$$

- Vi ser at $\lim_{x \to -1} f(x) = 5$. Vi ser også at $f(-1) = 5$.

Grense for polynom

Oppgave

Finn $\lim_{x \to -1} f(x)$ for $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

- Vi vil se hva $x^2 - 3x + 1$ er når x er nærme -1.
- Vi får

$$f(-1{,}1) = 5{,}51 \qquad f(-0{,}9) = 4{,}51$$
$$f(-1{,}01) = 5{,}0501 \qquad f(-0{,}99) = 4{,}9501$$
$$f(-1{,}001) = 5{,}005\,001 \qquad f(-0{,}999) = 4{,}995\,001$$

- Vi ser at $\lim_{x \to -1} f(x) = 5$. Vi ser også at $f(-1) = 5$.
- For polynom kan vi alltid sette inn verdien. Dette skal vi se i neste delkapittel.

Grenseverdier

Regler for grenser

Regel

Om $\lim_{x \to a} f(x)$ *og* $\lim_{x \to a} g(x)$ *begge eksisterer, har vi:*

Regler for grenser

Regel

Om $\lim_{x\to a} f(x)$ *og* $\lim_{x\to a} g(x)$ *begge eksisterer, har vi:*

1. $$\lim_{x\to a}\Big(f(x)+g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Regler for grenser

Regel

Om $\lim_{x\to a} f(x)$ *og* $\lim_{x\to a} g(x)$ *begge eksisterer, har vi:*

1. $$\lim_{x\to a}\Big(f(x)+g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$
2. $$\lim_{x\to a}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Regler for grenser

Regel

Om $\lim_{x\to a} f(x)$ *og* $\lim_{x\to a} g(x)$ *begge eksisterer, har vi:*

1. $$\lim_{x\to a}\Big(f(x)+g(x)\Big)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$
2. $$\lim_{x\to a}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$
3. $$\lim_{x\to a}\Big(k\cdot f(x)\Big)=k\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$ *for et tall k*

Regler for grenser

Regel

Om $\lim_{x\to a} f(x)$ *og* $\lim_{x\to a} g(x)$ *begge eksisterer, har vi:*

1. $$\lim_{x\to a}\Big(f(x)+g(x)\Big)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$
2. $$\lim_{x\to a}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$
3. $$\lim_{x\to a}\Big(k\cdot f(x)\Big)=k\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$ *for et tall* k
4. $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$ *hvis* $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

Grenseregler, eksempel

Oppgave

Hvis $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ og $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$, hva er

$$\lim_{x\to 1} \frac{2f(x) - g(x)}{f(x) - 3g(x)}?$$

Grenseregler, eksempel

Oppgave

Hvis $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ og $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$, hva er

$$\lim_{x\to 1} \frac{2f(x) - g(x)}{f(x) - 3g(x)}?$$

- Vi bruker grensereglene til å skrive om uttrykket til

$$\frac{2 \cdot \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)}{\lim_{x\to 1} f(x) - 3 \cdot \lim_{x\to 1} g(x)}.$$

Grenseregler, eksempel

Oppgave

Hvis $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ og $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$, hva er

$$\lim_{x\to 1} \frac{2f(x) - g(x)}{f(x) - 3g(x)}?$$

- Vi bruker grensereglene til å skrive om uttrykket til

$$\frac{2 \cdot \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)}{\lim_{x\to 1} f(x) - 3 \cdot \lim_{x\to 1} g(x)}.$$

- Vi fyller inn for $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ og $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$, og får

$$\frac{2 \cdot 3 - 2}{3 - 3 \cdot 2}$$

Grenseregler, eksempel

Oppgave

Hvis $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ og $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$, hva er

$$\lim_{x\to 1} \frac{2f(x) - g(x)}{f(x) - 3g(x)}?$$

- Vi bruker grensereglene til å skrive om uttrykket til
$$\frac{2 \cdot \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)}{\lim_{x\to 1} f(x) - 3 \cdot \lim_{x\to 1} g(x)}.$$
- Vi fyller inn for $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ og $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$, og får
$$\frac{2 \cdot 3 - 2}{3 - 3 \cdot 2} = -\frac{4}{3}.$$

OSLOMET

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY

STORBYUNIVERSITETET