

Resten ved polynomdivisjon

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



1 Polynomfunksjoner

2 Polynomdivisjon

3 Resten ved polynomdivisjon

- Rest og polynomverdier
- Ruffinis regel

Rest og polynomverdier

Rest og polynomverdier

$$\begin{array}{r} (x^2 - 2x + 1) : (x - 7) = x + 5 \\ - x^2 + 7x \\ \hline 5x + 1 \\ - 5x + 35 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(7) &= 7^2 - 2 \cdot 7 + 1 \\ &= 49 - 14 + 1 \\ &= 36. \end{aligned}$$

- Vi regner ut $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 7}$.
- Vi ser at vi får 36 som rest.
- Vi regner også ut $P(7)$ med $P(x) = x^2 - 2x + 1$.
- Vi får 36 som svar.
- Merk at resten vi fikk når vi delte på $x - 7$ er samme som svaret vi fikk når vi satt inn 7.
- Dette vil **alltid** stemme.

Rest og polynomverdier

Regel

Tallet du får som rest når du regner ut $P(x) : (x - x_1)$ er lik $P(x_1)$.

- Dette kan vi bruke til å finne ut hva resten blir **uten** å utføre divisjonen.
- Vi kan **også** bruke det til å regne ut verdien til polynomet uten å sette inn.
- For større potenser er det lettere å utføre divisjonen.

Eksempel

Vi vil regne ut $x^3 - 41x + 2$ for $x = 7$. Vi må da regne ut $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ og $41 \cdot 7 = 287$. Det er ganske store tall vi må regne på.

Regne polynomverdi ved å finne rest

$$(x^3 - 41x + 2) : (x - 7) = x^2 + 7x + 8$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 2 \\ - x^3 + 7x^2 \\ \hline 7x^2 - 41x \\ - 7x^2 + 49x \\ \hline 8x + 2 \\ - 8x + 56 \\ \hline 58 \end{array}$$

- Vi vil regne ut $P(7)$ når $P(x) = x^3 - 41x + 2$.
- Vi regner heller ut $P(x) : (x - 7)$.
- Selv om det var litt **flere** utregninger, var hver av dem **mindre** enn når vi satt inn direkte.
- Dette er sjeldent nyttig, siden vi kan bruke kalkulator. Men litt kult.

Faktorisering og nullpunkt

- Dersom vi får 0 i rest, sier vi at divisjonen **går opp**.
- Vi kan da **faktorisere** det opprinnelige polynomet.
- Siden $(x^2 - 2x - 3) : (x + 1) = x - 3$, er $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.
- Siden **resten** av $P(x) : (x - x_1)$ er det samme som $P(x_1)$ må x_1 være et **nullpunkt** for at divisjonen skal gå opp.

Regel

Divisjonen

$$P(x) : (x - x_1)$$

går opp hvis og bare hvis $P(x_1) = 0$.

Polynomet $P(x)$ har $(x - x_1)$ som faktor hvis og bare hvis $P(x_1) = 0$.

Om divisjonen går opp

Oppgave

Bestem hva a må være for at divisjonen går opp:

$$(x^2 - ax + 3) : (x - 3).$$

- For at divisjonen skal gå opp, må $x = 3$ være et nullpunkt for polynomet.
- Vi setter inn $x = 3$ og påstår at det skal bli 0:

$$\begin{aligned}0 &= x^2 - ax + 3 \\&= 3^2 - 3a + 3 \\&= 12 - 3a \\12 &= 3a \\4 &= a\end{aligned}$$

Ruffinis regel

Ruffinis regel

- Mesteparten av tiden så deler vi på et førstegradspolynom.
- Det finnes en rask metode å utføre divisjonen på kalt **Ruffinis regel**.
- Den går gjennom de samme utregningene som den vanlige divisjonsalgoritmen for polynom.
- Men bruker mindre plass, og gir mindre sjanse for regnefeil.
- Regelen brukes kun om vi deler på $x - x_1$.
- Om vi vil regne ut $\frac{3x^2 - 2x + 1}{2x - 1}$ med Ruffinis regel, må vi derfor heller regne ut $3x^2 - 2x + 1$ delt på $x - \frac{1}{2}$
- Og så dele svaret på 2.
- Mesteparten av tiden kan vi bruke Ruffinis regel uten problemer.

Ruffinis regel

$x = 2$	1	-5	3
		2	-6
	1	-3	-3

- Vi vil regne ut $x^2 - 5x + 3$ når $x = 2$. Vi setter opp en tabell som over.
- Vi fyller inn koeffisientene til $x^2 - 5x + 3$ i øverste rad.
- Vi summerer tallene i første kolonne.
- Vi ganger svaret med x -verdien, og skriver svaret i neste kolonne.
- Vi summerer tallene i midtre kolonne.
- Vi ganger svaret med x -verdien.
- Vi summerer tallene i siste kolonne.
- Vi får da at $P(x) = -3$.
- Og at $\frac{x^2-5x+3}{x-2} = x - 3 - \frac{3}{x-2}$.

Ruffinis regel, II

$x = 4$	2	-7	-5	4
		8	4	-4
	2	1	-1	0

- Vi vil regne ut $(2x^3 - 7x^2 - 5x + 4) : (x - 4)$. Vi setter opp en tabell som over.
- Vi fyller inn koeffisientene til $2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$ i øverste rad.
- Vi følger Ruffinis regel.
- Dette gir oss at

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 5x + 4}{x - 4} = 2x^2 + x - 1$$

med null i rest.



OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET