Tallinjer, intervall og doble ulikheter

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

1 Tallinjer, intervall og doble ulikheter

- Tallinja
- Doble ulikheter og intervall
- Åpne og lukkede intervall
- Halvåpne intervall og uendelige intervall
- Standard notasjon

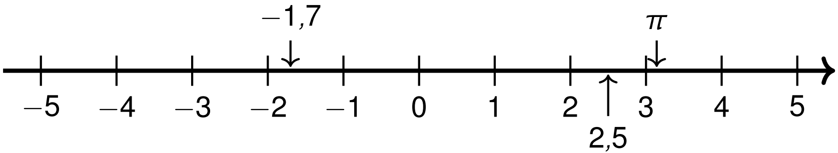
2 Andregradsulikheter

3 Rasjonale ulikheter

Tallinja

Tallinja

- Tallinja er en måte å se for seg tallene på.



- Avstanden mellom heltallene skal være uniform (lik overalt). Denne avstanden kalles skalaen til tallinjen.
- Alle reelle tall har sin plass på tallinjen.
- Tallinjen er uendelig lang, så vi tegner alltid bare en del av den.
- Det du tegner trenger ikke ha 0 i midten.

Doble ulikheter og intervall

Doble ulikheter

- Hvis vi vil si «x er større enn 3» kan vi skrive «$x > 3$».
- Men hva om vi vil si «x er mellom 2 og 7»?
- En måte å skrive det på er ved hjelp av to ulikehter:

$$2 < x \quad \text{og} \quad x < 7.$$

- Dette forenkler vi ved å skrive det som en dobbelt ulikhet,

$$2 < x < 7.$$

- I doble ulikheter skriver vi det minste tallet først, så vi ville vanligvis ikke skrevet $7 > x > 2$.
- Den siste skrivemåten er ikke feil, men det er mer naturlig å gå fra lavt til høyt.

Å løse doble ulikheter

Dersom den ukjente er i midten av en dobbel ulikhet, kan vi løse begge ulikhetene samtidig.

Eksempel

Vi skal løse $-7 \leq 3 - 5x < 18$. Vi får:

$$
\begin{aligned}
-7 &\leq 3 - 5x < 18 \\
-7 - 3 &\leq \quad -5x < 18 - 3 \\
-10 &\leq \quad -5x < 15
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\frac{-10}{-5} &\geq x > \frac{15}{-5} \\
2 &\geq x > -3 \\
-3 &< x \leq 2
\end{aligned}
$$

Vi foretrekker å skrive svaret som $-3 < x \leq 2$ i stedet for $2 \geq x > -3$.

Å løse doble uliketer II

Dersom den ukjente er andre steder enn i midten, må vi dele opp i to ulikheter.

Eksempel

Vi skal løse $x - 1 < 3x + 5 < 2x + 9$. Vi deler opp i:

$$\begin{aligned} x - 1 &< 3x + 5 \\ -1 - 5 &< 3x - x \\ -6 &< 2x \\ -3 &< x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3x + 5 &< 2x + 9 \\ 3x - 2x &< 9 - 5 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Siden vi har $-3 < x$ og $x < 4$ kan vi slå sammen til

$$-3 < x < 4.$$

Intervall

Definisjon

Et intervall er en sammenhengende mengde tall på tallinjen.

Eksempler:

- Alle tall fra og med 2 til og med 3 er et intervall.
- Alle tall større enn -2 er et intervall.
- Alle tall bortsett fra 0 er ikke et intervall.
- Tallene 1, 2 og 3 er ikke et intervall.
- Alle tallene er et intervall.

Intervall og ulikheter

- Alle intervall kan beskrives med en enkel eller dobbel ulikhet.
- Alle tall fra og med 2 til og med 3 kan skrives som

$$\textit{Alle x med } 2 \leq x \leq 3.$$

- Alle tall større enn -2 kan skrives som

$$\textit{Alle x med } x > -2.$$

- Hvis tar med ∞, kan vi alltid skrive det som en dobbel ulikhet.
- Alle tall større enn -2 blir da

$$\textit{Alle x med } -2 < x < \infty.$$

- Alle tall kan skrives

$$\textit{Alle x med } -\infty < x < \infty.$$

Åpne, lukkede og halvåpne intervall

- Intervaller har endepunkter.
- Intervallet fra og med 2 til og med 3 har endepunktene 2 og 3.
- Intervallet fra -2 og opp har -2 som endepunkt.
- Intervallet som består av alle tall er det eneste intervallet som har ingen endepunkter.

Vi gir intervaller forskjellige navn avhengig av om endepunktene er en del av intervallet. Et intervall kan være

Åpent: Dersom ingen av endepunktene er med.

Lukket: Dersom alle endepunktene er med.

Halvåpent: Dersom ett endepunkt er med og ett ikke er med.

Åpne og lukkede intervall

Åpne intervall

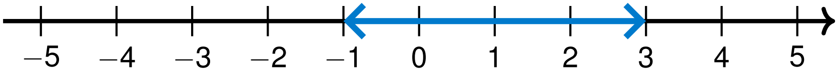
- I stedet for å hele tiden måtte skrive «Tallene mellom -1 og 3» så skriver vi

$$\langle -1, 3\rangle.$$

- Dette er alle tall som er større enn -1 og mindre enn 3. Tallene -1 og 3 er ikke med.
- Om x er et tall som er større enn -1 og mindre enn 3 kan vi derfor enten skrive

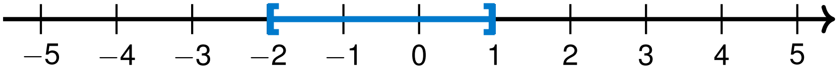
$$-1 < x < 3 \qquad \text{eller} \qquad x \in \langle -1, 3\rangle.$$

- Vi tegner åpne intervall på tallinja slik:



Lukkede intervall

- I stedet for å hele tiden måtte skrive «Tallene fra og med -2 til og med 1» så skriver vi
$$[-2, 1].$$
- Dette er alle tall som er større enn eller lik -2 og mindre enn eller lik 1. Tallene -2 og 1 er med.
- Om x er et tall som er større enn eller lik -2 og mindre enn eller lik 1 kan vi derfor enten skrive
$$-2 \leq x \leq 1 \qquad \text{eller} \qquad x \in [-2, 1].$$
- Vi tegner lukkede intervall på tallinja slik:



Halvåpne intervall og uendelige intervall

Halvåpne intervall

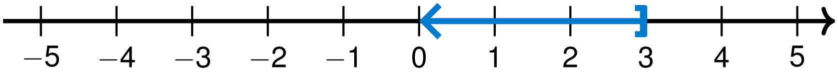
- Om det ene endepunktet er med, og det andre ikke er med, blander vi vinkelparenteser, $\langle$, og firkantparenteser, [.
- Intervallet som består av alle tall større enn 0 og mindre enn eller lik 3 skrives

$$\langle 0, 3].$$

- Intervallet som består av alle tall større enn eller lik 0 og mindre enn 3 skrives

$$[0, 3\rangle.$$

- Vi blander også pilspisser om vi skal tegne det opp på tallinja.



Uendelige intervall

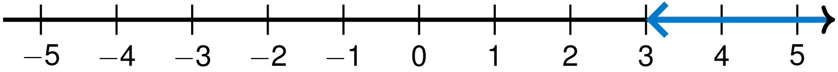
- Om et intervall går uendelig langt den ene retningen, bruker vi en pil til å representere det.
- Intervallet som består av alle tall større enn 3 skriver vi som

$$\langle 3, \rightarrow \rangle.$$

- Intervallet som består av alle tall mindre enn eller lik -2 skriver vi som

$$\langle \leftarrow, -2].$$

- Vi bruker aldri firkantparenteser ved siden av pilen.
- Vi tegner det på tallinjen ved å la intervallet «fortsette» videre:



Standard notasjon

Standard notasjon

- Norsk lærerstab, og derfor også norske videregående-bøker i matematikk, er (såvidt jeg vet) eneste i verden som bruker vinelparenteser for åpne intervall.
- Nesten hele resten av verden bruker runde parenteser.
- Der norske lærebøker skriver $\langle -3, 5\rangle$ vil andre mattebøker skrive $(-3, 5)$.
- Andre mattebøker bruker heller ikke piler til å representere uendelige intervall, men bruker heller $\pm\infty$.
- Der norske lærebøker skriver $\langle 3, \rightarrow\rangle$ vil andre mattebøker skrive $(3, \infty)$.
- Der norske lærebøker skriver $\langle \leftarrow, -1\rangle$ vil andre mattebøker skrive $(-\infty, -1)$.
- Den største fordelen med å bruke runde parenteser over vinkelparenteser er at man ikke har vinkelparenteser på tastaturet.
- Merk at $<$ og $\langle$ er forskjellige, det ene er et ulikhetstegn, det andre er et parentestegn.

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET