

Likninger

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



Likninger

- 1 Likninger
 - Likninger
 - Løse likninger
 - Sette prøve på svaret

2 Formler

Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

To eksempel:

$$3 = 7$$

Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

To eksempel:

$$3 = 7$$
 $2x + 3y = 5 - 3z$.

Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

To eksempel:

$$3 = 7$$
 $2x + 3y = 5 - 3z$.

Et sett med tall er en løsning av en likning dersom vi kan bytte ut variablene med disse tallene, og vi får at venstresiden og høyresiden er like.

Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

To eksempel:

$$3 = 7$$
 $2x + 3y = 5 - 3z$.

- Et sett med tall er en løsning av en likning dersom vi kan bytte ut variablene med disse tallene, og vi får at venstresiden og høyresiden er like.
- Eksempel: Tallene x = 1, y = 1 og z = 0 løser likningen over, siden

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 - 3 \cdot 0.$$

Definisjon

En likning består av to uttrykk og et likhetstegn mellom dem.

To eksempel:

$$3 = 7$$
 $2x + 3y = 5 - 3z$.

- Et sett med tall er en løsning av en likning dersom vi kan bytte ut variablene med disse tallene, og vi får at venstresiden og høyresiden er like.
- Eksempel: Tallene x = 1, y = 1 og z = 0 løser likningen over, siden

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 - 3 \cdot 0.$$

A løse en likning betyr å finne alle sett med tall som er en løsning av likningen.

Nikolai Bjørnestøl Hansen Likninger 29. juni 2020 1/11

Likninger

- 1 Likninger
 - Likninger
 - Løse likninger
 - Sette prøve på svaret

2 Formler

En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.



- En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.
- Vi holder oss derfor til likninger som bare har én variabel.



- En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.
- Vi holder oss derfor til likninger som bare har én variabel.
- Men hvordan finner vi ut hva løsningen(e) kan være?



- En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.
- Vi holder oss derfor til likninger som bare har én variabel.
- Men hvordan finner vi ut hva løsningen(e) kan være?
- Hvilke *x*-verdier er løsninger av likningen

$$2x - 3 = 7$$
?



- En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.
- Vi holder oss derfor til likninger som bare har én variabel.
- Men hvordan finner vi ut hva løsningen(e) kan være?
- Hvilke *x*-verdier er løsninger av likningen

$$2x - 3 = 7$$
?

Skal vi bare gjette? Om vi prøver oss frem med et par tall, så vil vi fort finne ut at x = 5 løser likningen.



- En likning med flere variable har vanligvis uendelig mange løsninger.
- Vi holder oss derfor til likninger som bare har én variabel.
- Men hvordan finner vi ut hva løsningen(e) kan være?
- Hvilke *x*-verdier er løsninger av likningen

$$2x - 3 = 7$$
?

- Skal vi bare gjette? Om vi prøver oss frem med et par tall, så vil vi fort finne ut at x = 5 løser likningen.
- Dette kan da ikke være den letteste metoden. Blir mye vanskeligere med en gang svaret ikke er et heltall.



■ Vi kan se på en likning som en sann setning. Venstresiden er lik høyresiden.



- Vi kan se på en likning som en sann setning. Venstresiden er lik høyresiden.
- Vi vet bare ikke hva *x*-verdien skal være for at det skal være sant.



- Vi kan se på en likning som en sann setning. Venstresiden er lik høyresiden.
- Vi vet bare ikke hva x-verdien skal være for at det skal være sant.
- Men om vi «gjør» det samme på begge sidene av likhetstegnet, så vil setningen fortsatt være sann.



- Vi kan se på en likning som en sann setning. Venstresiden er lik høyresiden.
- Vi vet bare ikke hva x-verdien skal være for at det skal være sant.
- Men om vi «gjør» det samme på begge sidene av likhetstegnet, så vil setningen fortsatt være sann.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$(2x-3)+2=(7)+2.$$



- Vi kan se på en likning som en sann setning. Venstresiden er lik høyresiden.
- Vi vet bare ikke hva x-verdien skal være for at det skal være sant.
- Men om vi «gjør» det samme på begge sidene av likhetstegnet, så vil setningen fortsatt være sann.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

så må jo også

$$(2x-3)+2=(7)+2.$$

Begge deler er jo bare «2 mer», men siden begge er 2 mer, må de fremdeles være like.



■ Vi kan også gange med det samme på begge sider.



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$3\cdot(2x-3)=3\cdot(7).$$



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

så må jo også

$$3\cdot(2x-3)=3\cdot(7).$$

Begge sider er nå 3 ganger større, men siden begge er det, må de fremdeles være like.



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$3\cdot(2x-3)=3\cdot(7).$$

- Begge sider er nå 3 ganger større, men siden begge er det, må de fremdeles være like.
- Vi har disse to triksene:



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$3\cdot(2x-3)=3\cdot(7).$$

- Begge sider er nå 3 ganger større, men siden begge er det, må de fremdeles være like.
- Vi har disse to triksene:
 - Vi kan plusse/minuse med det samme på begge sider.



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$3\cdot(2x-3)=3\cdot(7).$$

- Begge sider er nå 3 ganger større, men siden begge er det, må de fremdeles være like.
- Vi har disse to triksene:
 - Vi kan plusse/minuse med det samme på begge sider.
 - Vi kan gange/dele med det samme på begge sider.



- Vi kan også gange med det samme på begge sider.
- Om

$$2x - 3 = 7$$

$$3\cdot(2x-3)=3\cdot(7).$$

- Begge sider er nå 3 ganger større, men siden begge er det, må de fremdeles være like.
- Vi har disse to triksene:
 - Vi kan plusse/minuse med det samme på begge sider.
 - Vi kan gange/dele med det samme på begge sider.
- Til sammen så vil disse to triksene løse veldig mange likninger.



Vi vil løse likningen

$$2x - 3 = 7$$
.



Vi vil løse likningen

$$2x - 3 = 7$$
.

■ Vi velger å plusse på 3 på begge sidene, og får

$$(2x-3)+3=(7)+3$$



Vi vil løse likningen

$$2x - 3 = 7$$
.

■ Vi velger å plusse på 3 på begge sidene, og får

$$(2x-3)+3=(7)+3$$

 $2x=7+3$



Vi vil løse likningen

$$2x - 3 = 7$$
.

■ Vi velger å plusse på 3 på begge sidene, og får

$$(2x-3)+3=(7)+3$$

 $2x=7+3$

Merk hvordan 3-tallet «byttet side» men da også byttet fortegn.



Vi vil løse likningen

$$2x - 3 = 7$$
.

■ Vi velger å plusse på 3 på begge sidene, og får

$$(2x-3)+3=(7)+3$$

 $2x=7+3$

Merk hvordan 3-tallet «byttet side» men da også byttet fortegn.

Regel

Vi kan flytte et ledd over på andre siden av likhetstegnet, men må da bytte fortegn.



Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.



Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

Vi løser:

$$3x - 3 = 5x + 7$$



Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

Vi løser:

$$3x - 3 = 5x + 7$$
$$-3 = 5x + 7 - 3x$$

Flytte-Bytte



Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

Vi løser:

$$3x - 3 = 5x + 7$$
$$-3 = 5x + 7 - 3x$$
$$-3 - 7 = 5x - 3x$$

Flytte-Bytte Flytte-Bytte



Å løse en likning, eksempel

Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

Vi løser:

$$3x - 3 = 5x + 7$$

$$-3 = 5x + 7 - 3x$$

$$-3 - 7 = 5x - 3x$$

$$-10 = 2x$$

Flytte-Bytte Flytte-Bytte Regne ut



Å løse en likning, eksempel

Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

$$3x - 3 = 5x + 7$$

 $-3 = 5x + 7 - 3x$ Flytte-Bytte
 $-3 - 7 = 5x - 3x$ Flytte-Bytte
 $-10 = 2x$ Regne ut
 $\frac{-10}{2} = \frac{2x}{2}$ Del begge sider på 2



Å løse en likning, eksempel

Vi skal nå fullstendig løse likningen

$$3x - 3 = 5x + 7$$
.

$$3x - 3 = 5x + 7$$
 $-3 = 5x + 7 - 3x$
Flytte-Bytte
 $-3 - 7 = 5x - 3x$
Flytte-Bytte
 $-10 = 2x$
Regne ut
$$\frac{-10}{2} = \frac{2x}{2}$$
Del begge sider på 2
$$-5 = x$$
Regne ut



Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.



- Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.
- Vi ender da alltid opp med en likning som ikke lenger har brøker.



- Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.
- Vi ender da alltid opp med en likning som ikke lenger har brøker.
- Eksempel: Vi skal løse

$$\frac{3}{x}+5=\frac{2x+1}{x}.$$



- Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.
- Vi ender da alltid opp med en likning som ikke lenger har brøker.
- Eksempel: Vi skal løse

$$\frac{3}{x}+5=\frac{2x+1}{x}.$$

■ Vi ganger begge sidene med x og får

$$\left(\frac{3}{x} + 5\right) \cdot x = \frac{2x + 1}{x} \cdot x$$



- Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.
- Vi ender da alltid opp med en likning som ikke lenger har brøker.
- Eksempel: Vi skal løse

$$\frac{3}{x}+5=\frac{2x+1}{x}.$$

■ Vi ganger begge sidene med x og får

$$\left(\frac{3}{x} + 5\right) \cdot x = \frac{2x + 1}{x} \cdot x$$
$$\frac{3x}{x} + 5x = \frac{(2x + 1) \cdot x}{x}$$



- Om en likning har brøker, kan vi starte med å gange begge sider med nevnerene.
- Vi ender da alltid opp med en likning som ikke lenger har brøker.
- Eksempel: Vi skal løse

$$\frac{3}{x}+5=\frac{2x+1}{x}.$$

■ Vi ganger begge sidene med x og får

$$\left(\frac{3}{x} + 5\right) \cdot x = \frac{2x + 1}{x} \cdot x$$
$$\frac{3x}{x} + 5x = \frac{(2x + 1) \cdot x}{x}$$
$$3 + 5x = 2x + 1$$



Denne rekkefølgen fører nesten alltid frem:

1 Løs opp parenteser.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.
- 3 Trekk sammen like ledd.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.
- Trekk sammen like ledd.
- 4 Flytt alle ledd med ukjente til venstresiden.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.
- Trekk sammen like ledd.
- 4 Flytt alle ledd med ukjente til venstresiden.
- 5 Flytt alle ledd uten ukjente til høyresiden.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.
- 3 Trekk sammen like ledd.
- 4 Flytt alle ledd med ukjente til venstresiden.
- 5 Flytt alle ledd uten ukjente til høyresiden.
- 6 Trekk sammen like ledd.



- Løs opp parenteser.
- 2 Gang med nevner til eventuelle brøker til det ikke lenger er noen brøker.
- Trekk sammen like ledd.
- 4 Flytt alle ledd med ukjente til venstresiden.
- 5 Flytt alle ledd uten ukjente til høyresiden.
- Trekk sammen like ledd.
- 7 Del begge sider med tallet foran den ukjente.



Likninger

- 1 Likninger
 - Likninger
 - Løse likninger
 - Sette prøve på svaret

2 Formler

Når vi har funnet en løsning, så kan vi sette prøve på denne ved å sette den inn i den originale likningen.



- Når vi har funnet en løsning, så kan vi sette prøve på denne ved å sette den inn i den originale likningen.
- Om vi har regnet riktig så skal vi da få at venstresiden og høyresiden er like.



- Når vi har funnet en løsning, så kan vi sette prøve på denne ved å sette den inn i den originale likningen.
- Om vi har regnet riktig så skal vi da få at venstresiden og høyresiden er like.
- Lurt å sette prøve på svaret om du er usikker på om du har regnet riktig.



- Når vi har funnet en løsning, så kan vi sette prøve på denne ved å sette den inn i den originale likningen.
- Om vi har regnet riktig så skal vi da få at venstresiden og høyresiden er like.
- Lurt å sette prøve på svaret om du er usikker på om du har regnet riktig.
- Også veldig viktig å sette prøve på svaret dersom likningen hadde ukjente under brøkstreken.



- Når vi har funnet en løsning, så kan vi sette prøve på denne ved å sette den inn i den originale likningen.
- Om vi har regnet riktig så skal vi da få at venstresiden og høyresiden er like.
- Lurt å sette prøve på svaret om du er usikker på om du har regnet riktig.
- Også veldig viktig å sette prøve på svaret dersom likningen hadde ukjente under brøkstreken.
- Vi må sjekke at løsningen ikke gjør at vi deler på null!



Vi vil løse likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$$



Vi vil løse likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$$

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$



Vi vil løse likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$$

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$

$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$



Vi vil løse likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$$

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$
$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$
$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$



Vi vil løse likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$$

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$
$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$
$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$
$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x - 1$$



Vi vil løse likningen

 $\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$

Vi løser:

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$

$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$

$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$

$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x - 1$$



6x - 3 + 2 = 4x - 1

Vi vil løse likningen

 $\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$

Vi løser:

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$

$$6x\cdot\left(\frac{2x-1}{2x}+\frac{1}{3x}\right)=\frac{4x-1}{6x}\cdot 6x$$

$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$

$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x-1$$



6x - 3 + 2 = 4x - 1

6x - 1 = 4x - 1

Vi vil løse likningen

 $\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$

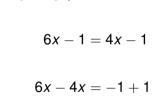
Vi løser:

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$

$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$

$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$

$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x-1$$



6x - 3 + 2 = 4x - 1



Vi vil løse likningen

 $\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$
$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$

$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$

$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x-1$$

$$6x - 3 + 2 = 4x - 1$$

$$6x - 1 = 4x - 1$$

$$6x - 4x = -1 + 1$$

$$6x-4x=-1+1$$

$$2x = 0$$



Vi vil løse likningen

 $\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}.$

Vi løser:

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{6x}$$

$$6x \cdot \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x}\right) = \frac{4x-1}{6x} \cdot 6x$$

$$\frac{6x \cdot (2x-1)}{2x} + \frac{6x}{3x} = \frac{6x \cdot (4x-1)}{6x}$$

$$3 \cdot (2x-1) + 2 = 4x-1$$

$$6x - 3 + 2 = 4x - 1$$

$$6x - 1 = 4x - 1$$

$$6x - 4x = -1 + 1$$

$$2x = 0$$

x = 0



Det eneste svaret vi fant for likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{x}$$

 $\operatorname{var} x = 0.$



Det eneste svaret vi fant for likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{x}$$

 $\operatorname{var} x = 0.$

Men om vi prøver å sette det inn i likningen får vi

$$\frac{2 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0} + \frac{1}{3 \cdot 0} = \frac{4 \cdot 0 - 1}{0}.$$



Det eneste svaret vi fant for likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{x}$$

 $\operatorname{var} x = 0.$

Men om vi prøver å sette det inn i likningen får vi

$$\frac{2 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0} + \frac{1}{3 \cdot 0} = \frac{4 \cdot 0 - 1}{0}.$$

Vi deler på null! Ikke lov!



Det eneste svaret vi fant for likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{x}$$

 $\operatorname{var} x = 0.$

Men om vi prøver å sette det inn i likningen får vi

$$\frac{2 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0} + \frac{1}{3 \cdot 0} = \frac{4 \cdot 0 - 1}{0}.$$

- Vi deler på null! Ikke lov!
- Det betyr at x = 0 ikke er en løsning likevel.



Det eneste svaret vi fant for likningen

$$\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{4x-1}{x}$$

 $\operatorname{var} x = 0.$

Men om vi prøver å sette det inn i likningen får vi

$$\frac{2 \cdot 0 - 1}{2 \cdot 0} + \frac{1}{3 \cdot 0} = \frac{4 \cdot 0 - 1}{0}.$$

- Vi deler på null! Ikke lov!
- Det betyr at x = 0 ikke er en løsning likevel.
- Og siden det var den eneste mulige løsningen, betyr det at denne likningen ikke har noen løsninger.



OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY STORBYUNIVERSITETET