Andregradsformelen

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

Andregradsformelen

Andregradsformelen

I forrige video lærte vi å løse andregradslikninger ved å faktorisere. Det finnes en enklere løsning!

Regel

Løsningene av likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

er gitt ved

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- *Om* $b^2 - 4ac > 0$ *har likningen to løsninger.*
- *Om* $b^2 - 4ac = 0$ *har likningen én løsning.*
- *Om* $b^2 - 4ac < 0$ *har likningen ingen løsninger.*

Andregradsformelen

- Formelen på forrige side må pugges.
- Mange kaller formelen for *abc*-formelen i stedet for andregradsformelen.
- Tallet $b^2 - 4ac$ kalles diskriminanten.
- Om oppgaven bare er å finne ut hvor mange løsninger likningen har, holder det å regne ut diskriminanten.

Eksempel

- Vi har likningen $2x^2 + 2x - 40 = 0$.
- Diskriminanten er $2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-40) = 324$, så den har to løsninger.
- Løsningene er $x = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm 18}{4}$.
- Det gir oss at $x = -\frac{20}{4} = -5$ eller at $x = \frac{16}{4} = 4$.

«Og» og «eller»

- Det finnes symboler du kan bruke i stedet for å skrive og og eller.
- Disse symbolene er $\wedge$ for og, og $\vee$ for eller.
- I stedet for å skrive at $2x^2 + 2x - 40 = 0$ når $x = -5$ eller når $x = 4$, så kan vi skrive
$$x = -5 \quad \vee \quad x = 4.$$
- Uttrykket
$$x = -5 \wedge x = 4$$
gir ikke mening. Da påstår vi at x er både -5 og 4 samtidig.

Bevis for andregradsformelen

Bevis for andregradsformelen

- Resten av forelesningen vil jeg bruke på å vise at andregradsformelen stemmer.
- Det er ikke forventet at dere kan beviset, så det er kun dersom du er interessert i å se hvordan man kan vise formelen.
- Måten det vises på er ved å faktorisere en generell andregradslikning slik vi har sett tidligere.

Regel

Løsningene av likningen $x^2 + bx + c = 0$ *er gitt ved*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bevis for andregradsformelen

- Vi har likningen $ax^2 + bx + c = 0$.
- Det første vi gjør er å dele hele likningen på a.
- Likningen er nå $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.
- Vi bruker første kvadratsetning:

$$
\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \\
&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}
\end{aligned}
$$

Bevis for andregradsformelen II

- Vi har:

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}.$$

- Vi finner fellesnevner for de to siste leddene, og slår sammen til ett ledd med minus foran.

$$\begin{aligned} -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \\ &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

- Vi har nå

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Bevis for andregradsformelen III

- Vi har:
$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$
- For å kunne bruke konjugatsetningen må vi ta kvadratroten av det siste leddet:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\end{aligned}$$

Bevis for andregradsformelen IV

- Vi har:

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2.$$

- Her kan vi bruke konjugatsetningen:

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 &= \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\
&= \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Bevis for andregradsformelen V

- Vi har vist:

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

- Vi har derfor at $ax^2 + bx + c = 0$ er samme likning som

$$\left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

- Siden dette er to ting ganget sammen som blir null, må en av dem være null:

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \text{eller} \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.$$

Bevis for andregradsformelen VI

- Vi har kommet frem til

$$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \quad \text{eller} \quad x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.$$

- Det gir:

$$0 = x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad 0 = x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bevis for andregradsformelen VII

- Vi startet med
$$ax^2 + bx + c = 0.$$
- Vi viste at da må
$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
- Dette skriver vi da som
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET