

# Faktorisering av polynomer

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



### Faktorisering av polynomer

- 1 Faktorisering av polynomer
  - Faktorisering
  - Eksempler

2 Forkorting av rasjonale uttrykk

### Faktorisering av andregradspolynom

■ Vi har tidligere lært å faktorisere andregradspolynom.



### Faktorisering av andregradspolynom

- Vi har tidligere lært å faktorisere andregradspolynom.
- Om andregradspolynomet P(x) har nullpunktene  $x_1$  og  $x_2$ , og andregradskoeffisient a, har vi

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$



### Faktorisering av andregradspolynom

- Vi har tidligere lært å faktorisere andregradspolynom.
- Om andregradspolynomet P(x) har nullpunktene  $x_1$  og  $x_2$ , og andregradskoeffisient a, har vi

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Om  $P(x) = x^2 + bx + c$  og vi finner to tall  $y_1$  og  $y_2$  slik at

$$y_1 + y_2 = b$$
$$y_1 \cdot y_2 = c$$

så har vi

$$P(x) = (x + y_1)(x + y_2).$$



Fra forrige forelesning vet vi:



- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis  $x_1$  er et nullpunkt til P(x) så er  $x x_1$  en faktor av P(x).



- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis  $x_1$  er et nullpunkt til P(x) så er  $x x_1$  en faktor av P(x).
  - Hvis  $x x_1$  er en faktor, vil polynomdivisjonen  $P(x) : (x x_1)$  gå opp.



- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis  $x_1$  er et nullpunkt til P(x) så er  $x x_1$  en faktor av P(x).
  - Hvis  $x x_1$  er en faktor, vil polynomdivisjonen P(x):  $(x x_1)$  gå opp.
  - Svaret vil da være et polynom av lavere grad.



- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis  $x_1$  er et nullpunkt til P(x) så er  $x x_1$  en faktor av P(x).
  - Hvis  $x x_1$  er en faktor, vil polynomdivisjonen  $P(x) : (x x_1)$  gå opp.
  - Svaret vil da være et polynom av lavere grad.
- Dette betyr at om vi vi kan ett av nullpunktene til et tredjegradspolynom, så kan vi en av faktorene.



- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis  $x_1$  er et nullpunkt til P(x) så er  $x x_1$  en faktor av P(x).
  - Hvis  $x x_1$  er en faktor, vil polynomdivisjonen  $P(x) : (x x_1)$  gå opp.
  - Svaret vil da være et polynom av lavere grad.
- Dette betyr at om vi vi kan ett av nullpunktene til et tredjegradspolynom, så kan vi en av faktorene.
- Denne kan vi dele ut med for å få et andregradspolynom.



- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis  $x_1$  er et nullpunkt til P(x) så er  $x x_1$  en faktor av P(x).
  - Hvis  $x x_1$  er en faktor, vil polynomdivisjonen  $P(x) : (x x_1)$  gå opp.
  - Svaret vil da være et polynom av lavere grad.
- Dette betyr at om vi vi kan ett av nullpunktene til et tredjegradspolynom, så kan vi en av faktorene.
- Denne kan vi dele ut med for å få et andregradspolynom.
- Dette kan vi så faktorisere.



- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis  $x_1$  er et nullpunkt til P(x) så er  $x x_1$  en faktor av P(x).
  - Hvis  $x x_1$  er en faktor, vil polynomdivisjonen  $P(x) : (x x_1)$  gå opp.
  - Svaret vil da være et polynom av lavere grad.
- Dette betyr at om vi vi kan ett av nullpunktene til et tredjegradspolynom, så kan vi en av faktorene.
- Denne kan vi dele ut med for å få et andregradspolynom.
- Dette kan vi så faktorisere.
- Vi trenger to av nullpunktene til et fjerdegradspolynom, tre av nullpunktene til et femtegrads, og så videre.



- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis  $x_1$  er et nullpunkt til P(x) så er  $x x_1$  en faktor av P(x).
  - Hvis  $x x_1$  er en faktor, vil polynomdivisjonen  $P(x) : (x x_1)$  gå opp.
  - Svaret vil da være et polynom av lavere grad.
- Dette betyr at om vi vi kan ett av nullpunktene til et tredjegradspolynom, så kan vi en av faktorene.
- Denne kan vi dele ut med for å få et andregradspolynom.
- Dette kan vi så faktorisere.
- Vi trenger to av nullpunktene til et fjerdegradspolynom, tre av nullpunktene til et femtegrads, og så videre.
- Om vi må gjette på nullpunkter, prøv med tall som deler konstantleddet.



- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis  $x_1$  er et nullpunkt til P(x) så er  $x x_1$  en faktor av P(x).
  - Hvis  $x x_1$  er en faktor, vil polynomdivisjonen  $P(x) : (x x_1)$  gå opp.
  - Svaret vil da være et polynom av lavere grad.
- Dette betyr at om vi vi kan ett av nullpunktene til et tredjegradspolynom, så kan vi en av faktorene.
- Denne kan vi dele ut med for å få et andregradspolynom.
- Dette kan vi så faktorisere.
- Vi trenger to av nullpunktene til et fjerdegradspolynom, tre av nullpunktene til et femtegrads, og så videre.
- Om vi må gjette på nullpunkter, prøv med tall som deler konstantleddet.
- Typisk blir det oppgitt nullpunkt i oppgaven.



### Faktorisering av polynomer

- 1 Faktorisering av polynomer
  - Faktorisering
  - Eksempler

2 Forkorting av rasjonale uttrykk

- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Boka har veldig mange oppgaver av denne typen.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Boka har veldig mange oppgaver av denne typen.
- Idéen er å sette inn x = -1 i polynomet, og se at du får 0.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Boka har veldig mange oppgaver av denne typen.
- Idéen er å sette inn x = -1 i polynomet, og se at du får 0.
- Siden (x + 1) da er en faktor, kan vi utføre polynomdivisjonen.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Boka har veldig mange oppgaver av denne typen.
- Idéen er å sette inn x = -1 i polynomet, og se at du får 0.
- Siden (x + 1) da er en faktor, kan vi utføre polynomdivisjonen.
- Vi kan «lure systemet» ved å utføre divisjonen til å starte med.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Boka har veldig mange oppgaver av denne typen.
- Idéen er å sette inn x = -1 i polynomet, og se at du får 0.
- Siden (x + 1) da er en faktor, kan vi utføre polynomdivisjonen.
- Vi kan «lure systemet» ved å utføre divisjonen til å starte med.
- Siden divisjonen går opp, er (x + 1) en faktor.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Boka har veldig mange oppgaver av denne typen.
- Idéen er å sette inn x = -1 i polynomet, og se at du får 0.
- Siden (x + 1) da er en faktor, kan vi utføre polynomdivisjonen.
- Vi kan «lure systemet» ved å utføre divisjonen til å starte med.
- Siden divisjonen går opp, er (x + 1) en faktor.
- Første steg i neste oppgave er å polynomdividere, som vi allerede har gjort.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Boka har veldig mange oppgaver av denne typen.
- Idéen er å sette inn x = -1 i polynomet, og se at du får 0.
- Siden (x + 1) da er en faktor, kan vi utføre polynomdivisjonen.
- Vi kan «lure systemet» ved å utføre divisjonen til å starte med.
- Siden divisjonen går opp, er (x + 1) en faktor.
- Første steg i neste oppgave er å polynomdividere, som vi allerede har gjort.
- Ruffinis regel (se forelesning 5.3) gir oss også begge svarene samtidig.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.



#### **Oppgave**

- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.

$$x = -1$$
 2 -11 2 15



#### **Oppgave**

- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.

$$x = -1$$
 2 -11 2 15



#### **Oppgave**

- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.



#### **Oppgave**

- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.



#### **Oppgave**

- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.



#### **Oppgave**

- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.



#### **Oppgave**

- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.



#### **Oppgave**

- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.



#### **Oppgave**

- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.



#### **Oppgave**

- ✓ Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.

Vi har derfor 
$$2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = (x + 1)(2x^2 - 13x + 15)$$
.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Vi har funnet at  $2x^3 11x^2 + 2x + 15 = (x+1)(2x^2 13x + 15)$ .



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Vi har funnet at  $2x^3 11x^2 + 2x + 15 = (x+1)(2x^2 13x + 15)$ .
- For å fullføre oppgaven må vi faktorisere  $2x^2 13x + 15$ .



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Vi har funnet at  $2x^3 11x^2 + 2x + 15 = (x+1)(2x^2 13x + 15)$ .
- For å fullføre oppgaven må vi faktorisere  $2x^2 13x + 15$ .
- Vi setter inn i andregradsformelen og får x = 3/2 og x = 5.



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Vi har funnet at  $2x^3 11x^2 + 2x + 15 = (x+1)(2x^2 13x + 15)$ .
- For a fullføre oppgaven må vi faktorisere  $2x^2 13x + 15$ .
- Vi setter inn i andregradsformelen og får x = 3/2 og x = 5.
- Vi har derfor  $2x^2 13x + 15 = 2(x 5)(x 3/2)$ .



- Vis at (x + 1) er en faktor i  $P(x) = 2x^3 11x^2 + 2x + 15$ .
- Faktoriser P(x) mest mulig.
- Vi har funnet at  $2x^3 11x^2 + 2x + 15 = (x+1)(2x^2 13x + 15)$ .
- For a fullføre oppgaven må vi faktorisere  $2x^2 13x + 15$ .
- Vi setter inn i andregradsformelen og får x = 3/2 og x = 5.
- Vi har derfor  $2x^2 13x + 15 = 2(x 5)(x 3/2)$ .
- Og får da

$$2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = 2(x - 3/2)(x - 5)(x + 1).$$



#### **Oppgave**



#### **Oppgave**

Faktoriser  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$  så mye som mulig.

■ Vi har her ingen hint, og må da gjette oss frem til nullpunkter.



#### **Oppgave**

- Vi har her ingen hint, og må da gjette oss frem til nullpunkter.
- Vi prøver oss frem med ting som deler 9. Valgene er da  $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ .



#### **Oppgave**

- Vi har her ingen hint, og må da gjette oss frem til nullpunkter.
- Vi prøver oss frem med ting som deler 9. Valgene er da  $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ .
- Vi ser at x = -1 gir P(x) = 0, så x + 1 må være en faktor.



#### **Oppgave**

- Vi har her ingen hint, og må da gjette oss frem til nullpunkter.
- Vi prøver oss frem med ting som deler 9. Valgene er da  $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ .
- Vi ser at x = -1 gir P(x) = 0, så x + 1 må være en faktor.
- Vi polynomdividerer:



#### **Oppgave**

- Vi har her ingen hint, og må da gjette oss frem til nullpunkter.
- Vi prøver oss frem med ting som deler 9. Valgene er da  $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ .
- Vi ser at x = -1 gir P(x) = 0, så x + 1 må være en faktor.
- Vi polynomdividerer:

Vi har: 
$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x+1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 9)$$
.



#### **Oppgave**



#### **Oppgave**

■ Vi har funnet 
$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x+1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 9) = (x+1)Q(x)$$
.



#### **Oppgave**

- Vi har funnet  $x^4 4x^3 + 4x^2 9 = (x+1)(x^3 5x^2 + 9x 9) = (x+1)Q(x)$ .
- Vi må gjette oss frem til et nullpunkt for Q(x), og prøver ting som deler 9.



#### **Oppgave**

- Vi har funnet  $x^4 4x^3 + 4x^2 9 = (x+1)(x^3 5x^2 + 9x 9) = (x+1)Q(x)$ .
- Vi må gjette oss frem til et nullpunkt for Q(x), og prøver ting som deler 9.
- Vi ser at x = 3 gir Q(x) = 0, så x 3 må være en faktor. Vi dividerer:



#### **Oppgave**

- Vi har funnet  $x^4 4x^3 + 4x^2 9 = (x+1)(x^3 5x^2 + 9x 9) = (x+1)Q(x)$ .
- Vi må gjette oss frem til et nullpunkt for Q(x), og prøver ting som deler 9.
- Vi ser at x = 3 gir Q(x) = 0, så x 3 må være en faktor. Vi dividerer:



#### **Oppgave**

Faktoriser  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$  så mye som mulig.

- Vi har funnet  $x^4 4x^3 + 4x^2 9 = (x+1)(x^3 5x^2 + 9x 9) = (x+1)Q(x)$ .
- Vi må gjette oss frem til et nullpunkt for Q(x), og prøver ting som deler 9.
- Vi ser at x = 3 gir Q(x) = 0, så x 3 må være en faktor. Vi dividerer:

■ Vi har derfor  $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = (x - 3)(x^2 - 2x + 3)$ .



#### **Oppgave**



#### **Oppgave**

■ Vi har at 
$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x+1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 9)$$
.



#### **Oppgave**

- Vi har at  $x^4 4x^3 + 4x^2 9 = (x+1)(x^3 5x^2 + 9x 9)$ .
- Vi har også funnet ut at  $x^3 5x^2 + 9x 9 = (x 3)(x^2 2x + 3)$ .



#### **Oppgave**

- Vi har at  $x^4 4x^3 + 4x^2 9 = (x+1)(x^3 5x^2 + 9x 9)$ .
- Vi har også funnet ut at  $x^3 5x^2 + 9x 9 = (x 3)(x^2 2x + 3)$ .
- Vi mangler bare å faktorisere  $x^2 2x + 3$ .



#### **Oppgave**

- Vi har at  $x^4 4x^3 + 4x^2 9 = (x+1)(x^3 5x^2 + 9x 9)$ .
- Vi har også funnet ut at  $x^3 5x^2 + 9x 9 = (x 3)(x^2 2x + 3)$ .
- Vi mangler bare å faktorisere  $x^2 2x + 3$ .
- Vi setter  $x^2 2x + 3$  inn i andregradsformelen, og finner ut at likningen ikke har noen løsninger.



#### **Oppgave**

- Vi har at  $x^4 4x^3 + 4x^2 9 = (x+1)(x^3 5x^2 + 9x 9)$ .
- Vi har også funnet ut at  $x^3 5x^2 + 9x 9 = (x 3)(x^2 2x + 3)$ .
- Vi mangler bare å faktorisere  $x^2 2x + 3$ .
- Vi setter  $x^2 2x + 3$  inn i andregradsformelen, og finner ut at likningen ikke har noen løsninger.
- Den kan derfor ikke faktoriseres mer.



#### **Oppgave**

- Vi har at  $x^4 4x^3 + 4x^2 9 = (x+1)(x^3 5x^2 + 9x 9)$ .
- Vi har også funnet ut at  $x^3 5x^2 + 9x 9 = (x 3)(x^2 2x + 3)$ .
- Vi mangler bare å faktorisere  $x^2 2x + 3$ .
- Vi setter  $x^2 2x + 3$  inn i andregradsformelen, og finner ut at likningen ikke har noen løsninger.
- Den kan derfor ikke faktoriseres mer.
- Vi avslutter derfor med

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x+1)(x-3)(x^2 - 2x + 3).$$





# OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY STORBYUNIVERSITETET