Faktorisering av polynomer

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

Faktorisering

Faktorisering av andregradspolynom

- Vi har tidligere lært å faktorisere andregradspolynom.
- Om andregradspolynomet $P(x)$ har nullpunktene x_1 og x_2, og andregradskoeffisient a, har vi

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- Om $P(x) = x^2 + bx + c$ og vi finner to tall y_1 og y_2 slik at

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= b \\ y_1 \cdot y_2 &= c \end{aligned}$$

  så har vi

$$P(x) = (x + y_1)(x + y_2).$$

Faktorisering av høyere grad

- Fra forrige forrige forelesning vet vi:
  - Hvis x_1 er et nullpunkt til $P(x)$ så er $x - x_1$ en faktor av $P(x)$.
  - Hvis $x - x_1$ er en faktor, vil polynomdivisjonen $P(x) : (x - x_1)$ gå opp.
  - Svaret vil da være et polynom av lavere grad.
- Dette betyr at om vi vi kan ett av nullpunktene til et tredjegradspolynom, så kan vi en av faktorene.
- Denne kan vi dele ut med for å få et andregradspolynom.
- Dette kan vi så faktorisere.
- Vi trenger to av nullpunktene til et fjerdegradspolynom, tre av nullpunktene til et femtegrads, og så videre.
- Om vi må gjette på nullpunkter, prøv med tall som deler konstantleddet.
- Typisk blir det oppgitt nullpunkt i oppgaven.

Eksempler

Eksempel faktorisering av tredjegradspolynom

Oppgave

- Vis at $(x+1)$ er en faktor i $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 2x + 15$.
- Faktoriser $P(x)$ mest mulig.

- Boka har veldig mange oppgaver av denne typen.
- Idéen er å sette inn $x = -1$ i polynomet, og se at du får 0.
- Siden $(x+1)$ da er en faktor, kan vi utføre polynomdivisjonen.
- Vi kan «lure systemet» ved å utføre divisjonen til å starte med.
- Siden divisjonen går opp, er $(x+1)$ en faktor.
- Første steg i neste oppgave er å polynomdividere, som vi allerede har gjort.
- Ruffinis regel (se forelesning 5.3) gir oss også begge svarene samtidig.

Eksempel faktorisering av tredjegradspolynom

Oppgave

- Vis at $(x+1)$ er en faktor i $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 2x + 15$.
- Faktoriser $P(x)$ mest mulig.

Vi polynomdividerer (Jeg bruker Ruffinis regel):

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -11 & 2 & 15 \\ x=-1 & & -2 & 13 & -15 \\ \hline & 2 & -13 & 15 & 0 \end{array}$$

Vi har derfor $2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = (x+1)(2x^2 - 13x + 15)$.

Eksempel faktorisering av tredjegradspolynom

Oppgave

- Vis at $(x+1)$ er en faktor i $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 2x + 15$.
- Faktoriser $P(x)$ mest mulig.

- Vi har funnet at $2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = (x+1)(2x^2 - 13x + 15)$.
- For å fullføre oppgaven må vi faktorisere $2x^2 - 13x + 15$.
- Vi setter inn i andregradsformelen og får $x = {}^3\!/_2$ og $x = 5$.
- Vi har derfor $2x^2 - 13x + 15 = 2(x-5)(x - {}^3\!/_2)$.
- Og får da
$$2x^3 - 11x^2 + 2x + 15 = 2(x - {}^3\!/_2)(x-5)(x+1).$$

Faktorisering av fjerdegradspolynom

Oppgave

Faktoriser $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$ så mye som mulig.

- Vi har her ingen hint, og må da gjette oss frem til nullpunkter.
- Vi prøver oss frem med ting som deler 9. Valgene er da $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.
- Vi ser at $x = -1$ gir $P(x) = 0$, så $x + 1$ må være en faktor.
- Vi polynomdividerer:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 4 & 0 & -9 \\ x = -1 & & -1 & 5 & -9 & 9 \\ \hline & 1 & -5 & 9 & -9 & 0 \end{array}$$

- Vi har: $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x+1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 9)$.

Faktorisering av fjerdegradspolynom

Oppgave

Faktoriser $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$ så mye som mulig.

- Vi har funnet $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x+1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 9) = (x+1)Q(x)$.
- Vi må gjette oss frem til et nullpunkt for $Q(x)$, og prøver ting som deler 9.
- Vi ser at $x = 3$ gir $Q(x) = 0$, så $x - 3$ må være en faktor. Vi dividerer:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 9 & -9 \\ x = 3 & & 3 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

- Vi har derfor $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = (x-3)(x^2 - 2x + 3)$.

Faktorisering av fjerdegradspolynom

Oppgave

Faktoriser $P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$ så mye som mulig.

- Vi har at $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x + 1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 9)$.
- Vi har også funnet ut at $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = (x - 3)(x^2 - 2x + 3)$.
- Vi mangler bare å faktorisere $x^2 - 2x + 3$.
- Vi setter $x^2 - 2x + 3$ inn i andregradsformelen, og finner ut at likningen ikke har noen løsninger.
- Den kan derfor ikke faktoriseres mer.
- Vi avslutter derfor med

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x + 1)(x - 3)(x^2 - 2x + 3).$$

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET