

Tall og tallregning

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



1 Tall og tallregning

- Mengdelære
- Talltyper
- Regnerekkefølge

2 Brøkregning

3 Bokstavregning og parenteser

Mengdelære

Mengder

En **mengde** er en samling tall. Vi skriver mengder ved hjelp av krøllparenteser.

Eksempel

Mengden $\{1, 2, 4, 5\}$ består av tallene 1, 2, 4 og 5. Mengden $\{1\}$ består kun av tallet 1. Mengden $\{\}$ har ingen tall i seg. Dette kalles den **tomme mengden** og vi bruker symbolet \emptyset . Mengden $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ har uendelig mange tall i seg.

Mengder

Det eneste som betyr noe for en mengde er om et tall er med eller ikke. Det har ingenting å si hvor ofte et element er med, eller i hvilken rekkefølge.

Eksempel

Mengdene $\{1, 2, 3, 2\}$ og $\{3, 2, 3, 1, 1\}$ er like, da de begge (kun) inneholder tallene 1, 2, og 3.

Når vi skriver opp en mengde, pleier vi å kun skrive hvert tall én gang, og å skrive dem i stigende rekkefølge, men dette er ikke et **krav**.

Mengdenotasjon

Vi bruker symbolet \in for å symbolisere «inneholdt i».

Eksempel

Setningen «Tallet 5 er inneholdt i mengden $\{1, 4, 5\}$ » skrives matematisk som

$$5 \in \{1, 4, 5\}.$$

Setningen «Tallet 3 er ikke inneholdt i mengden $\{1, 4, 5\}$.» skrives matematisk som

$$3 \notin \{1, 4, 5\}.$$

Mengdenotasjon

Vi bruker symbolet \subset for å symbolisere «delmengde av».

Eksempel

Setningen «Mengden $\{2, 3\}$ er en del av mengden $\{2, 3, 4\}$ » skrives matematisk som

$$\{2, 3\} \subset \{2, 3, 4\}.$$

Setningen «Mengden $\{2, 5\}$ er ikke en del av mengden $\{1, 3, 4\}$ » skrives matematisk som

$$\{2, 5\} \not\subset \{1, 3, 4\}.$$

Union

Vi bruker symbolet \cup for å symbolisere å slå sammen to mengder. Symbolet uttales **union**.

Eksempel

Setningen «Om vi slår sammen mengden $\{1, 2, 3\}$ og mengden $\{2, 4, 7\}$ får vi $\{1, 2, 3, 4, 7\}$ » skrives matematisk som

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 7\},$$

og uttales « $\{1, 2, 3\}$ union $\{2, 4, 7\}$ er $\{1, 2, 3, 4, 7\}$.»

Snitt

Vi bruker symbolet \cap for å symbolisere det som er til felles for to mengder. Symbolet uttales **snitt**.

Eksempel

Setningen «Det som er til felles for mengdene $\{1, 3, 4\}$ og $\{2, 3, 5\}$ er $\{3\}$ » skrives matematisk som

$$\{1, 3, 4\} \cap \{2, 3, 5\} = \{3\},$$

og uttales « $\{1, 3, 4\}$ snitt $\{2, 3, 5\}$ er $\{3\}$.»

Minus

Vi bruker symbolet \setminus for å symbolisere å fjerne noe fra en mengde.

Eksempel

Setningen «Om vi fjerner $\{1, 3, 4\}$ fra $\{1, 2, 3\}$ sitter vi igjen med $\{2\}$ » skrives matematisk som

$$\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 3, 4\} = \{2\}.$$

Merk at det ikke gjør noe at 4 ikke var med i mengden $\{1, 2, 3\}$. Det vil da bare ignoreres.

Noen mattebøker bruker vanlig minustegn, $-$, i stedet for skråstrek, \setminus , for å betegne mengdeminus.

Talltyper

Naturlige tall

Det finnes (i dette kurset) fire typer tall, den første typen kaller vi naturlige tall.

Definisjon

De **naturlige tallene** \mathbb{N} er tallene 1, 2, 3, 4, 5 . . .

Tallet 0 er også noen ganger med, avhengig av hvem du spør.

De kalles naturlige fordi det er tallene man «naturlig» møter på, når man skal telle ting og så videre.

Primtall

- Et tall er **delelig** med et annet dersom vi kan dele dem på hverandre uten å få kommatall.
- Eksempel: 4 er delelig med 2 siden $4 : 2 = 2$, men 3 er ikke delelig med 2 siden $3 : 2 = 1,5$.
- Et naturlig tall kalles en **faktor** av et annet tall, om det andre tallet er delelig med det første.
- Eksempel: 2 er en faktor av 6 siden 6 er delelig med 2.
- Et **primtall** er et tall som har **nøyaktig** to faktorer.
- Alle tall som ikke er primtall kalles **sammensatte tall**, og de kan alltid skrives som et gangestykke hvor alle tallene er primtall.
- Denne måten å skrive tall som gangestykker på er **unik**.

Primtall, eksempler

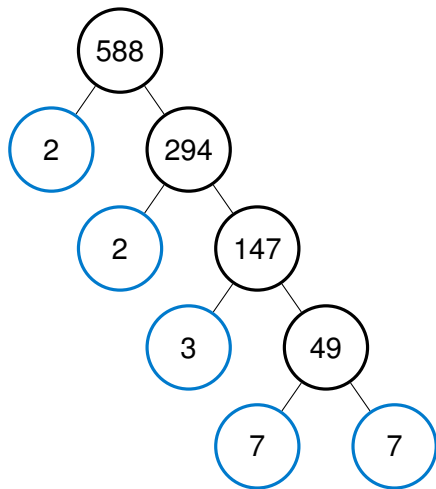
- Tallet 5 er et primtall, da det er delelig med 1 og 5.
- Tallet 4 er ikke et primtall, da det er delelig med 1, 2 og 4.
- Tallet 1 er **ikke** et primtall, da det **kun** er delelig med ett naturlig tall, nemlig 1 selv. Dette er det eneste naturlige tallet med kun én faktor.
- De første primtallene er

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$

Primtallsfaktorisering

- Å skrive et tall som et produkt av primtall kalles å **primtallsfaktorisere** tallet.
- Vi kan for eksempel skrive $588 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$. Dette er da primtallsfaktoriseringen av 588.
- Måten vi kommer frem til faktoriseringen på er at vi ser at 588 er delelig med 2, så vi deler det på 2 og får 294. Dette er igjen delelig på 2, så vi utfører divisjonen og får 147.
- Dette er **ikke** delelig på 2, så vi går videre til neste primtall, 3, og sjekker om det er delelig på det.
- Tallet 147 er delelig på 3, og vi sitter igjen med 49 etter å ha utført divisjonen.
- Her kjenner vi igjen at $49 = 7 \cdot 7$ og er ferdig.

Primtallsfaktorisering, visuelt



Heltall

Den neste talltypen er heltallene.

Definisjon

Heltallene \mathbb{Z} er tallene $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Symbolet \mathbb{Z} kommer fra tyske «Zahlen». Ved hjelp av mengdelære-språket vi nettopp har lært, kan vi skrive

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

for å påpeke at de naturlige tallene er inneholdt i heltallene.

Partall og oddetall

Definisjon

- Heltallene som er delelig med 2 kalles **partall**. Eksempler: 2, 4, -14 , 288.
 - Heltallene som ikke er delelig med 2 kalles **oddetall**. Eksempler: 3, 77, -11 , 103.
-
- Lett å se om et tall er partall: Det slutter på 0, 2, 4, 6 eller 8.
 - Lett å se om et tall er oddetall: Det er ikke et partall.
 - Merk at også negative tall vil være partall/oddetall.
 - Tallet 0 **er** delelig med 2, og er derfor et **partall**.
 - Litt gammeldags språk: Partall kalles også for **like tall** eller **jevne tall**.

Rasjonale tall

Den tredje typen tall er de rasjonale tallene.

Definisjon

De **rasjonale tallene** \mathbb{Q} er alle tall som kan skrives som en brøk

$$\frac{a}{b}$$

hvor både a og b er heltall, med $b \neq 0$. Tallet over brøkstreken kalles **teller** og tallet under brøkstreken kalles **nevner**.

Jeg pleier bruke huskeregelen «**teller** er på **topp**, **nevner** er **nederst**.»

Rasjonale tall

Nesten alle tall dere bruker er rasjonale.

- Alle heltall er rasjonale fordi vi for eksempel kan skrive 5 som $5/1$.
- Alle endelige desimaltall er rasjonale fordi vi kan skrive 2,3721 som $\frac{23721}{10000}$.
- Alle repeterende desimaltall viser seg også å være rasjonale.

Symbolet \mathbb{Q} kommer fra engelske «Quotient». Siden vi har at alle heltall også er rasjonale, så har vi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Reelle tall

Den fjerde og siste typen tall er reelle tall.

Definisjon

De **reelle** tallene \mathbb{R} er alle mulige desimaltall.

- De reelle tallene som ikke er rasjonale kalles **irrasjonale tall**.
- Dette er da alle desimaltall som ikke vil repetere seg.
- De mest kjente eksemplene er $\sqrt{2}$ og π .
- Vi har:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Reelle tall

- Det er ekstremt mange flere irrasjonale tall enn det er rasjonale tall.
- De fleste desimaltall vil jo **ikke** repetere seg.
- Det er uendelig mange steder det kan «gå galt».
- Men det må også «gå galt» uendelig mange steder.

Teorem

Om n er et naturlig tall, og \sqrt{n} ikke er et naturlig tall, så er \sqrt{n} irrasjonal.

Så eksempelvis er $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ og $\sqrt{7}$ irrasjonale, men $\sqrt{4} = 2$ er ikke.

Regnerekkefølge

Regnerekkefølgen

Når vi skal regne ut et regnestykke, må vi regne gjennom ting i riktig rekkefølge.

- 1 Parenteser
- 2 Eksponenter (opphøyd i)
- 3 Multiplikasjon og divisjon (ganging og deling)
- 4 Addisjon og subtraksjon (plussing og minusing)

Lite spesialtilfelle: Om jeg skriver 4^{3+2} så betyr det egentlig $4^{(3+2)}$. Tenk over dette. Hva skulle det ellers betydd?

Regnerekkefølgen, eksempel

Eksempel

Om vi skal regne ut

$$2 + 3 \cdot 4^{3-1}$$

får vi

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot 4^{3-1} &= 2 + 3 \cdot 4^2 \\ &= 2 + 3 \cdot 16 \\ &= 2 + 48 \\ &= 50 \end{aligned}$$

Regnerekkefølgen,

Merk at ganging/deling skjer i samme steg, og plussing/minusing også skjer i samme steg. Om to ting skjer i samme steg, går vi fra venstre til høyre.

Eksempel

Hvis vi skal regne ut $10 - 2 + 3$ får vi 11, og ikke 5.

Hvorfor er akkurat denne rekkefølgen riktig?

En eller annen rekkefølge må jo bli den riktige, og dette er den som er mest behagelig å jobbe med. Prøv deg frem med andre rekkefølger, se hvordan de føles!

Vanskelige navn

- Alle de vanlige regneoperasjonene har vanskelige navn.
- Når du plusser sammen to tall så **summerer** du to **ledd** og får en **sum**.
- Når du minuser to tall så **subtraherer** du en **subtrahend** fra en **minuend** og får en **differanse**.
- Når du ganger to tall så **multipliserer** du to **faktorer** og får et **produkt**.
- Når du deler to tall så **dividerer** du en **dividend** på en **divisor** og får en **kvotient**.
- Av disse så er det kun **ledd**, **sum**, **faktor** og **produkt** som er verd å huske.



OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET