Lineære likningssett

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

1 Lineære likningssett

- Lineære likninger og likningssett
- Å løse likningssett: Innsettingsmetoden
- Å løse likningssett: Addisjonsmetoden

2 Ikke-lineære likningssett

3 Ulikheter

Lineære likninger og likningssett

Hva er en lineær likning?

Definisjon

En likning er lineær dersom hvert ledd enten er et tall eller et tall ganget med en ukjent.

Eksempler:

- Likningen $2x + 3y - 4z = 3x - 2y + 5$ er lineær.
- Likningen $2x + 3yz - z + 4 = 1$ er ikke lineær, da leddet $3yz$ har to ukjente.
- Likningen $2x^2 + 3y - 4 = 2$ er ikke lineær, da leddet $2x^2$ har en ukjent opphøyd i 2.
- Likningen $1/3x + 7y = 3$ er ikke lineær, da leddet $1/3x$ deler på en ukjent.

Hva er et likningssett?

Definisjon

Et likningssett er et sett med likninger vi vil at skal være sanne samtidig.

Vi skriver dem enten

Under hverandre:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 7x - y &= 6 \end{aligned}$$

Ved hjelp av «og»:

$$2x + 3y = 5 \qquad \text{og} \qquad 7x - y = 6$$

$$2x + 3y = 5 \qquad \wedge \qquad 7x - y = 6$$

Å løse likningssett: Innsettingsmetoden

Innsettingsmetoden, eksempel

- Vi vil løse likningssettet

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 7x - y &= 6. \end{aligned}$$

- Vi løser den nederste likningen for y:

$$\begin{aligned} 7x - y &= 6 \\ 7x - 6 &= y. \end{aligned}$$

- Vi har nå at

$$y = 7x - 6$$

og kan bruke det i den andre likningen.

Innsettingsmetoden, eksempel

- Vi har funnet $y = 7x - 6$.
- Vi setter dette inn i den øverste likningen og løser for x:

$$\begin{aligned} 2x + 3(7x - 6) &= 5 \\ 2x + 21x - 18 &= 5 \\ 23x &= 23 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

- Vi vet nå at $x = 1$ men vet ikke hva y er ennå.

Innsettingsmetoden, eksempel

- Vi har at $x = 1$ og $y = 7x - 6$.
- Vi setter inn svaret vårt for x i likningen for y:

$$\begin{aligned} y &= 7 \cdot 1 - 6 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

- Vi har derfor at $x = 1$ og at $y = 1$.
- Vi kan skrive det på følgende måter:

$$\begin{aligned} x = 1 \ \text{ og } \ y &= 1 \\ x = 1 \ \wedge \ y &= 1 \\ (x, y) \ = \ (1, 1)&. \end{aligned}$$

Innsettingsmetoden

Innsettingsmetoden følger alltid disse stegene:

1. Løs en av likningene for den ene variabelen.
2. Sett det du kom frem til inn for variabelen i den andre likningen. Du har nå én likning med én ukjent.
3. Løs denne likningen.
4. Sett inn svaret du nettopp fant i likningen fra 1.

Det kan også være mer enn to ukjente, og da mer enn to likninger. Vi må da repetere 1 og 2 helt til vi sitter igjen med kun én likning og én ukjent.

Flere variable, innsettingsmetoden

- Vi vil løse likningssettet

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 9 \\ 2x + y - 4z &= 2 \\ -x - y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

- Vi løser midterste likning for y og får

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z &= 2 \\ y &= 2 - 2x + 4z. \end{aligned}$$

- Dette vil vi sette inn i øverste og nederste likning.

Flere variable, innsettingsmetoden

- Vi fant $y = 2 - 2x + 4z$. Setter dette inn i de to ubrukte likningene.
- Øverste likning gir oss

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 9 \\ 3x - (2 - 2x + 4z) + 2z &= 9 \\ 3x - 2 + 2x - 4z + 2z &= 9 \\ 5x - 2z &= 11. \end{aligned}$$

- Nederste likning gir oss

$$\begin{aligned} -x - y + 5z &= 3 \\ -x - (2 - 2x + 4z) + 5z &= 3 \\ -x - 2 + 2x - 4z + 5z &= 3 \\ x + z &= 5 \end{aligned}$$

Flere variable, innsettingsmetoden

- Vi har funnet likningene $5x - 2z = 11$ og $x + z = 5$.
- Dette er to likninger med to ukjente.
- Vi løser den siste for z og får $z = 5 - x$.
- Vi fyllet dette inn i den første, og får:

$$
\begin{aligned}
5x - 2z &= 11 \\
5x - 2(5 - x) &= 11 \\
5x - 10 + 2x &= 11 \\
7x &= 21 \\
x &= 3.
\end{aligned}
$$

Flere variable, innsettingsmetoden

- Vi har:

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ z &= 5 - x \\ y &= 2 - 2x + 4z \end{aligned}$$

- Vi fyller inn verdien for x i den andre likningen, og får

$$z = 5 - 3 = 2.$$

- Vi fyller inn verdiene for x og z i den siste, og får

$$y = 2 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 4.$$

- Svaret blir derfor

$$x = 3 \quad \text{og} \quad y = 4 \quad \text{og} \quad z = 2.$$

Å løse likningssett: Addisjonsmetoden

Addisjonsmetoden, eksempel

- Vi vil løse likningssettet

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -2x + y &= 1 \end{aligned}$$

- Vi plusser sammen de to likningene ved å
  - Plusse venstresidene sammen
  - Plusse høyresidene sammen
- Vi får

$$\begin{aligned} (3x - y) + (-2x + y) &= 2 + 1 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

- Setter inn $x = 3$ i den nederste likningen og får $y = 7$.

Addisjonsmetoden

- Den andre måten vi kan bruke til å løse likninger går ut på å plusse sammen likningene på lure måter.
- Idéen er
  - Vi kan plusse på det samme på begge sider av liketstegnet i den ene likningen.
  - Venstresiden og høyresiden i den andre likningen er jo like.
  - Vi kan derfor plusse sammen venstresidene og høyresidene hver for seg.
- Vi må vanligvis være litt lure og gange opp likningene før vi plusser dem sammen.
- Hver gang vi plusser sammen, vil vi bli kvitt en ukjent.

Addisjonsmetoden, eksempel II

- Vi vil løse likningssettet

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 7x - y &= 6. \end{aligned}$$

- Vi ganger den nederste likningen med 3 og legger til den øverste:

$$\begin{aligned} (2x + 3y) + 3(7x - y) &= 5 + 3 \cdot 6 \\ 2x + 3y + 21x - 3y &= 23 \\ 23x &= 23 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

- Vi setter inn $x = 1$ i en av de originale likningene, og får $y = 1$.

Flere variable, addisjonsmetoden

- Vi vil løse likningssettet

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 9 \\ 2x + y - 4z &= 2 \\ -x - y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

- Vi plusser sammen øverste og midterste likning:

$$\begin{aligned} (3x - y + 2z) + (2x + y - 4z) &= 9 + 2 \\ 5x - 2z &= 11 \end{aligned}$$

- Vi plusser sammen midterste og nederste likning:

$$\begin{aligned} (2x + y - 4z) + (-x - y + 5z) &= 2 + 3 \\ x + z &= 5 \end{aligned}$$

Flere variable, addisjonsmetoden

- Vi har funnet

$$\begin{aligned} 5x - 2z &= 11 \\ x + z &= 5 \end{aligned}$$

- Vi trekker den nederste likningen 5 ganger fra den øverste:

$$\begin{aligned} (5x - 2z) - 5(x + z) &= 11 - 5 \cdot 5 \\ -7z &= -14 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

- Setter inn $z = 2$ i en av likningene over, og får $x = 3$.

Flere variable, addisjonsmetoden

- Vi startet med likningene

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 9 \\ 2x + y - 4z &= 2 \\ -x - y + 5z &= 3 \end{aligned}$$

- Vi har funnet $x = 3$ og $z = 2$.
- Setter dette inn i den midterste likningen og får

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z &= 2 \\ 2 \cdot 3 + y - 4 \cdot 2 &= 2 \\ y &= 2 - 6 + 8 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

- Vi har derfor

$$x = 3 \quad \text{og} \quad y = 4 \quad \text{og} \quad z = 2.$$

Addisjonsmetoden, eksempel III

- Vi vil løse likningssettet

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 14 \\ 3x - 5y &= 21 \end{aligned}$$

- Her kan vi ikke plusse eller minuse den ene likningen riktig antall ganger for å fjerne en ukjent.
- Vi ganger første likning med 3 og trekker fra andre likning 2 ganger og får

$$\begin{aligned} 3(2x + 3y) - 2(3x - 5y) &= 3 \cdot 14 - 2 \cdot 21 \\ 6x + 9y - 6x + 10y &= 42 - 42 \\ 19y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

- Vi setter inn $y = 0$ i en av likningene over, og får $x = 7$.

Addisjonsmetoden og innsettingsmetoden

- Boka lærer kun bort innsettingsmetoden.
- Addisjonsmetoden er ofte raskere, men man må «se» hvordan det er lurt å plusse sammen likningene.
- Noen ganger må man «finne fellesnevner» med addisjonsmetoden.
- Om man kun skal lære seg én metode, fokuser på innsettingsmetoden.
- I senere kurs skal dere lære å løse likninger ved hjelp av matriser, og da er det hjelpsomt å kunne addisjonsmetoden.
- Med flere ukjente er addisjonsmetoden ganske mye raskere enn innsettingsmetoden.

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET