Kontinuerlige funksjoner

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET

Foto: Ronny Østnes / OsloMet

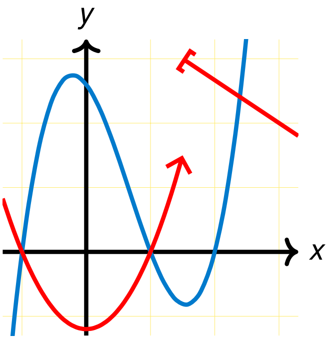
1 Grenseverdier

2 Kontinuerlige funksjoner

- Kontinuitet
- Delt funksjonsuttrykk

Kontinuitet

Kontinuerlige funksjoner



- En funksjon er kontinuerlig dersom grafen ikke gjør noen «hopp».
- Matematisk kan vi beskrive det ved hjelp av grenser:

Definisjon

En funksjon er kontinuerlig i $x = a$ dersom

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

- En funksjon er kontinuerlig dersom den er kontinuerlig i alle punkter i definisjonsmengden.

Polynom er kontinuerlige

Regel

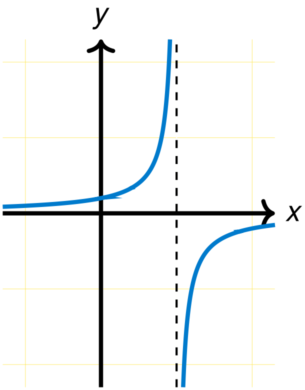
Funksjonen $f(x) = x$ er kontinuerlig.

- Vi kombinerer regelen over med grensereglene fra forrige forelesning.
- Gir oss: «Alle polynom er kontinuerlige.»
- Eksempel: $2x^2 - 3x + 1$ er kontinuerlig i $x = a$ fordi

$$\lim_{x \to a} 2x^2 - 3x + 1 = 2 \cdot \left(\lim_{x \to a} x\right)\left(\lim_{x \to a} x\right) - 3 \cdot \lim_{x \to a} x + 1 = 2a^2 - 3a + 1.$$

- Dette gjør at for polynom kan vi regne ut grenser ved innsetting.

Rasjonale funksjoner er kontinuerlige



- Funksjonen $\frac{-1}{5x-5}$ er kontinuerlig.
- Funksjonen gjør et «hopp» når vi går fra $x < 1$ til $x > 1$.
- Men hoppet skjer i $x = 1$, som ikke er en del av definisjonsmengden.
- Definisjonen av kontinuerlig var «kontinuerlig i alle punkter i definisjonsmengden».
- Denne funksjonen er derfor teknisk sett kontinuerlig.
- Det samme gjelder for alle rasjonale funksjoner.
- Bruddpunktene er utenfor definisjonsmengden.

Delt funksjonsuttrykk

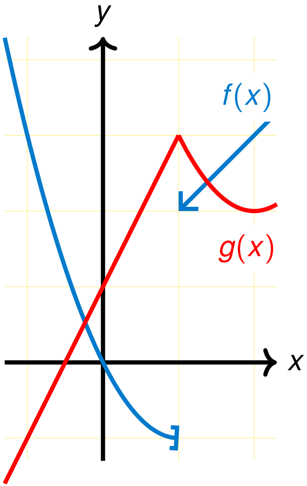
Delt funksjonsuttrykk

- Funksjonen skrevet som

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

  har et delt funksjonsuttrykk
- Leses som:
  - Bruk $f(x) = x^2 - 2x$ når $x \leq 1$.
  - Bruk $f(x) = x + 1$ når $x > 1$.
- Om vi vil regne ut $f(3)$ tenker vi da «Tallet 3 er større enn 1, så vi regner ut $3 + 1 = 4$.»
- Om vi vil regne ut $f(1)$ tenker vi «Tallet 1 er mindre enn eller lik 1, så vi regner ut $1^2 - 2 \cdot 1 = -1$.»

Kontinuitet av delt funksjonsuttrykk



- Grafene til f og g gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ x^2 - 4x + 6, & x \geq 1 \end{cases}$$

er tegnet til venstre.

- Vi ser her at $f(x)$ er diskontinuerlig og $g(x)$ er kontinuerlig.
- Et delt funksjonsuttrykk kan være diskontinuerlig.
- Vi må se om de møtes i bruddpunktet.

Ensidige grenser

- Uttrykket $\lim_{x \to a} f(x)$ betyr «Hva blir $f(x)$ når x nesten er a?»
- Vi vil noen ganger skille mellom
  - «Hva blir $f(x)$ når x er rett under a?»
  - «Hva blir $f(x)$ når x er rett over a?»
- Vi skriver

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \to a^+} f(x).$$

- Grensen $\lim_{x \to a} f(x)$ finnes hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Regel

Funksjonen f er kontinuerlig i a hvis og bare hvis

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Delt funksjonsuttrykk og kontinuitet

Oppgave

Sjekk om $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1 \\ x^2 - 4x + 4, & x \geq 1 \end{cases}$ er kontinuerlig.

- Siden $2x - 1$ er kontinuerlig, er $f(x)$ kontinuerlig når $x < 1$.
- Siden $x^2 - 4x + 4$ er kontinuerlig, er $f(x)$ kontinuerlig når $x > 1$.
- Vi sjekker om $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x - 1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 - 4x + 4 = 1^2 - 4\cdot 1 + 4 = 1.$$

- Funksjonen er kontinuerlig.

Delt funksjonsuttrykk og kontinuitet II

Oppgave

Sjekk om $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$ er kontinuerlig.

- Siden $x^2 - 2$ er kontinuerlig, er $f(x)$ kontinuerlig når $x < 0$.
- Siden $x - 1$ er kontinuerlig, er $f(x)$ kontinuerlig når $x > 0$.
- Vi sjekker om $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -2$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 - 2 = 0^2 - 2 = -2$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - 1 = 0 - 1 = -1.$$

- Funksjonen er ikke kontinuerlig.

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET