

Irrasjonale likninger

Nikolai Bjørnestøl Hansen

OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET



Implikasjonspiler

Logiske symboler

- Vi har tidligere lært to logiske symboler:

\vee , **eller** $A \vee B$ betyr « A er sann **eller** B er sann (eller begge er sanne).»

\wedge , **og** $A \wedge B$ betyr «**Både** A **og** B er sanne.»

- Vi skal nå lære et nytt symbol:

\implies , **impliserer** $A \implies B$ betyr «**Hvis** A er sann, **må** B også være sann.»

- Vi kan også si « A medfører B » eller « A impliserer B ».

- Symbolet \implies kalles en **implikasjonspil**

- Vi kan også skrive pilen andre veien, hvis B medfører A : $A \longleftarrow B$.

- Hvis vi har både $A \implies B$ og $A \longleftarrow B$, skriver vi $A \iff B$, og sier at A og B er **ekvivalente**.

- Det betyr « A er sann **hvis og bare hvis** B er sann.»

Implikasjonspiler i dagligtale

- «Det har regnet, så det er glatt på veien!»
- Med implikasjonspil: «Det har regnet» \implies «Det er glatt på veien».
- Implikasjonspilen brukes om den **generelle påstanden** om at når det regner blir det glatt på veien.
- Den originale setningen forteller oss også at det nettopp har regnet.
- Og konkluderer med at det derfor er glatt på veien.
- Den motsatte implikasjonen trenger ikke gjelde.
- «Det er glatt på veien, så det må ha regnet!»
- Det kan for eksempel ha snødd.

Falsk ekvivalens

False equivalence



Jesus Christ

Adolf Hitler

They both have mustaches, but that does not make them the same

- **Falsk ekvivalens** er når $A \implies C$ og $B \implies C$, og du derfor påstår at $A \iff B$.
- **Wikipedias eksempel:**
 - «Er Jesus» \implies «Har bart»
 - «Er Hitler» \implies «Har bart»
 - Derfor «Er Jesus» \iff «Er Hitler».
- **Eksempel fra «Erasmus Montanus»:**
 - «En sten kan ikke fly.»
 - «Morlille kan ikke fly.»
 - Derfor «Morlille er en sten.»
- I virkeligheten er ofte situasjonen mer avansert.
- Det er da vanskeligere å legge merke til en falsk ekvivalens.

Implikasjonspiler, eksempel, plussing

- Vi har $x = 3 \implies x + 2 = 5$. Hvis x er 3 må $x + 2$ være 5.
- Vi har **også** $x + 2 = 5 \implies x = 3$. Hvis $x + 2$ er 5, må $x = 3$.
- Vi kan derfor skrive $x = 3 \iff x + 2 = 5$.
- Det er ingenting spesielt med tallene 3 og 5, og vi kan skrive

$$a + c = b + c \iff a = b.$$

- Dette er en av reglene vi bruker når vi løser likninger.
- Den forteller oss at likningen er **like sann** dersom vi plusser på det samme på begge sider.

Implikasjonspiler, eksempel, ganging

- Vi har $x = 7 \implies 2x = 14$. Hvis x er 7 må $2x$ være 14.
- Vi har **også** $2x = 14 \implies x = 7$. Hvis $2x$ er 14, må $x = 7$.
- Denne regelen bruker vi **også** når vi løser likninger. Likningen er **like sann** dersom vi ganger med det samme på begge sider.
- Det er ikke **helt** likegyldig hva vi ganger med, derimot.
- Vi har $x = 7 \implies 0x = 0$, men $0x = 0 \not\implies x = 7$.
- Regelen er, dersom $c \neq 0$:

$$a \cdot c = b \cdot c \iff a = b.$$

- I rasjonale likninger kan vi få **falske løsninger** fordi vi ganger med et uttrykk som er lik 0.

Likninger med flere løsninger

- Vi har $x = 2 \implies x^2 = 4$. Hvis $x = 2$ må x^2 være 4.
- Vi har **ikke** $x^2 = 4 \implies x = 2$. Dersom $x^2 = 4$ **kan** $x = -2$.
- For likninger med flere løsninger bruker vi «eller, \vee » for å lage ekvivalens.
- Vi har

$$x^2 = 4 \iff x = 2 \vee x = -2.$$

- Hvis $x^2 = 4$ må $x = 2$ eller $x = -2$.
- Og hvis $x = 2$ eller $x = -2$ må $x^2 = 4$.
- Vi har

$$a = b \implies a^2 = b^2$$

og

$$a = \pm b \iff a^2 = b^2.$$

Irrasjonale likninger

Irrasjonale likninger

Definisjon

En **irrasjonal likning** er en likning hvor den ukjente er under et rottegn.

Eksempler:

- Likningen $\sqrt{3x-3} = 2x+1$ er en irrasjonal likning.
- Likningen $\sqrt[3]{x} = 2$ er en irrasjonal likning.
- Likningen $x^2 - 2x = \sqrt{3}$ er **ikke** en irrasjonal likning.

Løse irrasjonale likninger

- For å løse irrasjonale likninger må vi **bli kvitt** rottegnet.
- Det gjør vi ved å opphøye.
- Siden $a = b \implies a^2 = b^2$ kun går **én** vei, kan det introdusere **falske løsninger**.
- Vi må **teste løsningene** til slutt.

Irrasjonal likning, eksempel

Oppgave

Løs $\sqrt{5-x} = x-3$.

- For å bli kvitt rottegnet, opphøyer vi begge sidene i 2, og får

$$5 - x = (x - 3)^2.$$

- Vi åpner parentesen og får

$$5 - x = x^2 - 6x + 9.$$

- Vi flytter $5 - x$ over, og får andregradslikningen

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

- Vi løser denne med andregradsformelen og får $x = 1 \vee x = 4$.

Irrasjonal likning, eksempel

Oppgave

Løs $\sqrt{5-x} = x-3$.

- Vi fant svarene $x = 1$ eller $x = 4$.
- Men vi opphøyde likningen, og kan derfor ha introdusert falske løsninger.
- Vi må teste om løsningene stemmer ved å **sette inn**.
- Vi setter inn $x = 1$:

$$\sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2 \neq 1-3.$$

- Vi setter inn $x = 4$:

$$\sqrt{5-4} = \sqrt{1} = 1 = 4-3.$$

- Kun $x = 4$ er derfor en **faktisk** løsning for likningen.

Irrasjonal likning, eksempel II

Oppgave

Løs $\sqrt{x+7} - x - 1 = 0$.

- For å bli kvitt kvadratroten må vi først få kvadratroten alene.
- Vi flytter over $-x - 1$ til andre siden og får

$$\sqrt{x+7} = x + 1.$$

- Vi opphøyer i 2 for å bli kvitt kvadratroten:

$$x + 7 = (x + 1)^2$$

- Vi regner ut parentesen og flytter alt over på høyresiden:

$$0 = x^2 + x - 6.$$

- Vi løser andregradslikningen og får $x = 2$ eller $x = -3$.

Irrasjonal likning, eksempel II

Oppgave

Løs $\sqrt{x+7} - x - 1 = 0$.

- Vi fant løsningene $x = 2$ og $x = -3$.
- Vi må teste for **falske løsninger** ved å sette inn.
- Vi setter inn $x = 2$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2+7} - 2 - 1 &= 3 - 2 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

- Vi setter inn $x = -3$:

$$\begin{aligned}\sqrt{-3+7} - (-3) - 1 &= 4 + 3 - 1 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

- Kun $x = 2$ er derfor en **faktisk** løsning for likningen.



OSLO METROPOLITAN UNIVERSITY
STORBYUNIVERSITETET