

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 若曲线 $y = \ln(2 + \frac{1}{x})$ 的垂直渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知 $\frac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x) \cdot \frac{\cos x}{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 曲线 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $0 \leq x \leq 1$ 的一段弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. 函数 $y = \int_0^{2x} \sqrt{1+t^2} dt$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

7. 函数 $y = (x+2)e^x$ 的拐点为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

8. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. 双曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

10. $\int_{-1}^1 \left(x + \sqrt{4-x^2} \right)^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 设 $f(x) = \cos^2 2x$, 求 (1) $f'(x), f''(x), f^{(2024)}(0)$;

(2) $f(x)$ 带皮亚诺型余项的 2024 阶麦克劳林公式.

12. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \cos t^2 \\ y = t^2 \cos t^2 - \sin t^2 \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}.$

13. 计算 $\int_0^1 \frac{1+x\sqrt{x}}{1+x} dx.$

14. 求 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ 的单调区间与极值.

15. 设 $f(x) = \begin{cases} A \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 求函数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式;

(2) 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$, 试确定 A 的值.

16. 从原点 $(0,0)$ 向抛物线 $y = x^2 + 1$ 引两条切线, 记由抛物线与所引两切线所围成的图形为 D , (1) 求图形 D 的面积 A ; (2) 求图形 D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V .

三、证明题: (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

17. 已知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内二阶可导, 且 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$, 证明当

$0 < x < b$ 时, 恒有 $bf(x) > xf(b)$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, 证明: 至少存在一点

$\xi \in (0,1)$, 使得 $\xi f'(\xi) + 2024 f(\xi) = f'(\xi)$.