

1. 旋转体绕x轴或y轴

2. 填空5求导

3. 17题三阶导

4. 18题rolle中值&拉格朗日&零点存在定理结合

得分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}} 0 \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 设  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \\ a + x^2, & x \leq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  连续，则  $a = \underline{\hspace{2cm}} 1 \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 曲线  $y = \frac{1}{x} e^{-x^2}$  的铅直渐近线为  $\underline{\hspace{2cm}} x = 0 \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 设  $f'(1) = -1$ ，则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h)-f(1)}{h} = \underline{\hspace{2cm}} 2 \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 设  $y = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$ ，则  $dy = \underline{\hspace{2cm}} \frac{2 \sin x^2}{x} dx \underline{\hspace{2cm}}$ .

6. 曲线  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$  过对应于  $t = \frac{\pi}{6}$  的点  $P$  的法线方程为  $\underline{\hspace{2cm}} y = \sqrt{3}x - 1 \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 设  $y = f(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - \sin x + 6y = 0$  确定，则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{1}{6} \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 曲线  $y = \ln(1+x^2)$  在区间  $\underline{\hspace{2cm}} [-1, 1] \underline{\hspace{2cm}}$  上是凹的.

9.  $\int_{-1}^1 \frac{1+x^3}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}} \frac{\pi}{2} \underline{\hspace{2cm}}$ .

10.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}} 1 \underline{\hspace{2cm}}$ .



二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得分

11. 求函数  $f(x) = x^2 \ln x$  的极值.

解：定义域  $x \in (0, +\infty)$ ,

$$f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1),$$

令  $f'(x) = 0$ ，得  $x = 0$  (舍) 或  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ,

当  $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{e}})$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ;

所以在  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$  取得极小值, 极小值  $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$ .



得分

12. 计算不定积分  $\int x \arctan \sqrt{x} dx$ .

解: 令  $\sqrt{x} = t$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ , 则

$$\begin{aligned}\int x \arctan \sqrt{x} dx &= 2 \int t^3 \arctan t dt = \frac{1}{2} \int \arctan t dt^4 \\&= \frac{1}{2} t^4 \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^4}{1+t^2} dt \\&= \frac{1}{2} t^4 \arctan t - \frac{1}{2} \int \frac{t^4 - 1 + 1}{1+t^2} dt \\&= \frac{1}{2} t^4 \arctan t - \frac{1}{2} \int (t^2 - 1) dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt \\&= \frac{1}{2} t^4 \arctan t - \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \arctan t + C \\&= \frac{1}{2} x^4 \arctan x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \arctan \sqrt{x} + C\end{aligned}$$

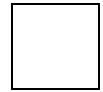


得分

13. 计算  $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx$ .

解: 令  $\sqrt{x+1} = t$ , 则  $x = t^2 - 1$ ,  $dx = 2t dt$ ,  $x = 0, t = 1$ ;  $x = 2, t = \sqrt{3}$ , 则

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t + t^3} dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$



得分

14. 设  $f(x) = \frac{3x+1}{e^x}$ , 求 (1)  $f'(x), f''(x)$ ; (2)  $f(x)$  带皮亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式; (3)  $f^{(2021)}(0)$ .

解: (1)  $f'(x) = 3e^{-x} - (3x+1)e^{-x}, f''(x) = -6e^{-x} + (3x+1)e^{-x}$ .

(2)  $f'''(x) = 9e^{-x} - (3x+1)e^{-x}, f(0) = 1, f'(0) = 2, f''(0) = -5, f'''(0) = 8$ ,

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + 2x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),\end{aligned}$$

(3)  $f^{(4)}(x) = -12e^{-x} + (3x+1)e^{-x}, L, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} 3ne^{-x} + (-1)^n (3x+1)e^{-x}$ ,

故  $f^{(2021)}(0) = 6062$ .



得分

15. 记曲线段  $x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0, 0 \leq x \leq 1)$  与直线  $x = 0, x = 1$  及  $x$  轴所围的图形为  $D$ ,

(1) 求平面图形  $D$  的面积;

(2) 求图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：(1)  $S = \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ , 令  $x=2\sin t$ , 则  $dx=2\cos t dt$ ,

故平面图形  $D$  的面积  $S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(2) 圆柱体积  $V_1 = \sqrt{3}\pi$ ,

剩余旋转体体积  $V_2 = \pi \int_{\sqrt{3}}^2 \left( \sqrt{4-y^2} \right)^2 dy = 4\pi y \Big|_{\sqrt{3}}^2 - \frac{\pi}{3} y^3 \Big|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{16}{3}\pi - 3\sqrt{3}\pi$ ,

图形  $D$  绕  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积  $V = \frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3}\pi$ .



得分

$$16. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq e \\ \frac{A}{x(2\ln x + \ln^2 x)}, & x > e \end{cases}$$

(1) 求函数  $\int_{-\infty}^x f(t) dt$  在  $(-\infty, +\infty)$  内的表达式;

(2) 设  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = A$ , 试确定  $A$  的值.

解：(1)  $x \leq 0$  时,  $\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{2} dt = \frac{e^t}{2} \Big|_{-\infty}^x = \frac{e^x}{2}$ ,

$0 < x \leq e$  时,  $\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{2} dt + \int_0^x 0 dt = \frac{e^t}{2} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{2}$ ,

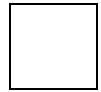
$x > e$  时,  $\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 \frac{e^t}{2} dt + \int_0^e 0 dt + \int_e^x \frac{A}{t(2\ln t + \ln^2 t)} dt = \frac{1}{2} + \frac{A}{2} \ln \left( \frac{\ln t}{2 + \ln t} \right) \Big|_e^x$

$$= \frac{1}{2} + \frac{A}{2} \ln \left( \frac{\ln x}{2 + \ln x} \right) - \frac{A}{2} \ln \frac{1}{3}.$$

$$(2) \quad A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{A}{2} \ln \left( \frac{\ln x}{2 + \ln x} \right) - \frac{A}{2} \ln \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{A}{2} \ln \frac{1}{3},$$

故  $A = \frac{1}{2 - \ln 3}$ .



三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得分	

17. 当  $x > 4$  时，证明： $2^x > x^2$ .

证明一：设  $f(x) = 2^x - x^2$ ,

$$\text{则 } f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x, \quad f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 - 2, \quad f'''(x) = 2^x (\ln 2)^3 > 0,$$

故当  $x > 4$  时  $f''(x)$  单调增加，即  $f''(x) > f''(4) = 2^4 (\ln 2)^2 - 2 > 0$ ,

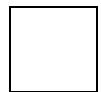
当  $x > 4$  时  $f'(x)$  单调增加，即  $f'(x) > f'(4) = 2^4 \ln 2 - 8 > 0$ ,

当  $x > 4$  时  $f(x)$  单调增加，即  $f(x) > f(4) = 2^4 - 4^2 = 0$ ,

即有  $2^x > x^2$ .

证明二：设  $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$ ，则  $f'(x) = 2x \cdot 2^{-x} - \ln 2 \cdot x^2 \cdot 2^{-x} = 2^{-x} \cdot x(2 - x \ln 2)$ ,

当  $x > 4$  时  $f'(x) < 0$ ，故  $f(x)$  单调减少，有  $f(x) < f(4) = 1$ ，即有  $2^x > x^2$ .






18. 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0) = -f(1) = 1$ ,

证明: 至少存在一点  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $\xi f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$ .

证明: 令  $F(x) = x^3 f(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导,

因为  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0) = -f(1) = 1$ ,

由零点定理,  $\exists \eta \in (0,1)$ , 使得  $f(\eta) = 0$ ,

所以  $F(0) = F(\eta) = 0$ ,

由罗尔定理  $\exists \xi \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ , 即  $\xi f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$ .

