

一、填空题：(本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} =$ _____.

2. 曲线 $f(x) = \arctan \frac{x}{x-1}$ 的渐近线为_____.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+6x)}{x} + a, & x > 0 \\ \sqrt{1-x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a =$ _____.

4. 设 $f'(2)=1$ ，则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{3h} =$ _____.

5. 函数 $y = \int_2^{\sqrt{x}} (2-t^2)dt$ ，则 $dy =$ _____.

6. 曲线 $y = (1+x)\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为_____.

7. 设 $y = f(x)$ 由方程 $4\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 确定，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

8. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点为_____.

9. $\int_{-2}^2 (xe^{x^2} + \sqrt{4-x^2})dx =$ _____.

10. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx =$ _____.

二、计算题：(本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分)

11. 设 $f(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$ ，求 (1) $f'(x), f''(x), f^{(2022)}(0)$;

(2) $f(x)$ 带皮亚诺型余项的 2022 阶麦克劳林公式.

12. 求由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

13. 计算 $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}$.

14. 求函数 $f(x) = 2\ln(x^2+3) + x + 1 - 4\ln 2$ 的极值.

15. 求由抛物线 $y = x^2$ 与 $y = -4x^2 + 5$ 在第一象限内围成图形的面积; 并求该图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

16. 设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0 \\ x \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, 求函数 $\int_{-1}^x f(t)dt$ 在 $x \in [-1, \pi]$ 的表达式.

三、证明题: (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

17. 证明: $\sqrt{3} \sin \sqrt{3} + 2 \cos \sqrt{3} + \sqrt{3} \pi > \sqrt{2} \sin \sqrt{2} + 2 \cos \sqrt{2} + \sqrt{2} \pi$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) + f(\xi) \cos \xi = 0$.