北京工业大学 2025—2026 学年第一学期

《高等数学(工)-1》期中考试试卷（评分标准）

考试说明：考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习《北京工业大学考生守则》、《北京工业大学学生违纪处分办法》和《北京工业大学本科学生学籍管理规定》，知晓如下内容：学生违反考核纪律或作弊的，其纪律处分按学校违纪处分相关规定执行，该课程考核成绩记为零分，并备注“违纪”或“作弊”。

本人在考试过程中将自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：__________　　学号：__________　　班号：__________

注：本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸、草稿纸。考试结束，考场上所发的任何考试资料（含试卷、答题纸、草稿纸）均须上交。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	**总成绩**
满分	30	60	10	
得分				

得 分

一、填空题：请将答案填写在题中横线上.（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(2^{-n}+3^{-n}+5^{-n})^{\frac{1}{n}}=$ ______ $\frac{1}{2}$ ______.

2. 设 $\begin{cases} x=\ln(1+\mathrm{e}^{2t}) \\ y=t-\arctan\mathrm{e}^{t} \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=$ ______ $\dfrac{1+\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{2\mathrm{e}^2}$ ______.

3. 曲线 $x^4-4(x+y)=0$ 在某一点处的切线与直线 $x+7y-2=0$ 垂直，该点的坐标是 ______ $(2,2)$ ______.

4. 设 $f(0)=1, f'(0)=-1$，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x f(x)-1}{x}=$ ______ $-1+\ln 2$ __________.

5. 设函数 $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处连续，则 $a+b=$ ___ -3 ______.

6. 设 $y=x^{\sin x}$，则 $dy|_{x=\pi}=$ ____________ $-\ln\pi dx$ ______________________.

7. 设 $\dfrac{d}{dx}\left[f\left(x^4\right)\right]=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=$ __________ $\dfrac{1}{4x}$ ________________________.

8. 当 $x\to 0^+$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}$ 是 x 的_____ $\dfrac{1}{4}$ ____________阶无穷小（填阶数）.

9. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$ ____ -2 _______.

10. 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为_______ $y=x+2$ ______.

三、计算题: 请写出详细计算过程.（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 设 $f(x)=\begin{cases}ax^2+b\sin x+c, & x\le 0\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$，试问 a,b,c 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导数连续，但二阶导数不存在？

解：由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，可得

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，则有 $\lim\limits_{x\to 0^+}(ax^2+b\sin x+c)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)$，**得** $c=0$；.........2 分

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2+b\sin x}{x}=b$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$，**则有** $b=1$；

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+\cos x, & x<0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0\end{cases}$$ ....**6 分**

$$f_+''(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{2ax+\cos x-1}{x}=2a$$

$f_-''(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-1$，**则有** $a\neq-\dfrac{1}{2}$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶导数不存在……. . 10 分

得 分

12. 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}$.

解： $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{-\frac{1}{2}x^3}$ --------4 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{-\frac{3}{2}x^2}$ --------6 分

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{-\frac{3}{2}x^2}$ --------8 分

$=-\dfrac{1}{3}$ --------10 分

得 分

13. 设 $y=\dfrac{3x^2-6x-5}{x^2-2x-3}$, 求 $y',y'',y^{(n)}$.

解： $y=3+\dfrac{4}{x^2-2x-3}=3+\dfrac{4}{(x-3)(x+1)}=3+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+1}$ --------3 分

$y'=(-1)(x-3)^{-2}-(-1)(x+1)^{-2}$ --------4 分

$y''=(-1)(-2)(x-3)^{-3}-(-1)(-2)(x+1)^{-3}$ --------6 分

$$y^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n)(x-3)^{-(n+1)}-(-1)(-2)\cdots(-n)(x+1)^{-(n+1)}=(-1)^n n![\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}]$$

-------10 分

得 分

14. 设 $y=2x+\sin x$, 求其反函数 $x=x(y)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

解一：$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{2+\cos x}$ ---------4 分

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d(\frac{dx}{dy})}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=-\frac{-\sin x}{(2+\cos x)^2}\cdot\frac{1}{(2+\cos x)}=\frac{\sin x}{(2+\cos x)^3}$$

----------6 分 ---------10 分

解二：方程两端同时对 y 求导

$1=2\dfrac{dx}{dy}+\cos x\dfrac{dx}{dy}$ (1)，解得 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2+\cos x}$，

----------3 分 -----------4 分

式(1)两端再同时对 y 求导得

$0=2\dfrac{d^2x}{dy^2}-\sin x\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2+\cos x\dfrac{d^2x}{dy^2}$， 解得 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{\sin x\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2+\cos x}=\dfrac{\sin x}{(2+\cos x)^3}$

--------8 分 ---------10 分

得 分

15. 设函数 $f(x)$ 满足 $3f(x)+4x^2f\left(-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{7}{x}=0$，求函数 $f(x)$ 的极大值和极小值.

解：令 $x=-\dfrac{1}{t}$，则有 $3f(-\dfrac{1}{t})+\dfrac{4}{t^2}f(t)-7t=0$ 得到 $f(-\dfrac{1}{x})=\dfrac{7}{3}x-\dfrac{4}{3t^2}f(x)$，

代入方程，得到 $f(x)=4x^3+\dfrac{3}{x}$ ------3 分

令 $f'(x)=12x^2-\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{3(4x^4-1)}{x^2}=0$, 得驻点 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ------5 分

又 $f''(x)=24x+\dfrac{6}{x^3}$， $f''(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=24\sqrt{2}>0$, $f''(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})=-24\sqrt{2}<0$, ------8 分

所以函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=4\sqrt{2}$, 极大值为 $f(-\dfrac{1}{\sqrt{2}})=-4\sqrt{2}$, ------10 分

得 分

16. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

解： $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}-1\right)\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$

------3 分

函数的间断点为 $x=k\pi,k=0,\pm1,\cdots$　　------5 分

当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=e$，则 $x=0$ 是第一类可去间断点，　　------7 分

当 $k=1$ 时，$\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to\pi^-}\frac{x}{\sin x}}=\infty$

当 $k=2$ 时，$\lim\limits_{x\to 2\pi^+}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to 2\pi^+}\frac{x}{\sin x}}=\infty$

结合函数是偶函数以及周期性，可得 $x=k\pi,k=\pm1,\cdots$ 是第二类无穷型间断点。

------10 分

三、证明题：请写出详细的证明过程.（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=f(2)=0$，$f(1)=2$，证明：在 $(0,2)$ 内存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=1$.

证明：设 $F(x)=f(x)-x$，　　------1 分

显然 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，$(0,2)$ 内可导，又知 $F(1)=f(1)-1=1$，$F(2)=f(2)-2=-2$，由零点定理知，至少存在一点 $\eta\in(0,2)$ 使得 $F(\eta)=0$，

------3 分

又知 $F(0)=f(0)-0=0$，对函数 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上应用罗尔定理得：

至少存在一点 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$.　　------5 分

得 分

18. 证明：当$0<x<1$时，$(x+1)\ln x<2(x-1)$.

证明：令 $f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$ ------1 分

$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1,\ f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

当$0<x<1$时，$f''(x)<0$， ------3 分

则当$0<x<1$时 $f'(x)$ 单调递减，则有 $f'(x)>f'(1)=0$

则当$0<x<1$时 $f(x)$ 单调递增，则有 $f(x)<f(1)=0$，证毕. ------5 分