北京工业大学 2022—2023 学年第一学期

《高等数学(工)—1》期末考试试卷 A 卷

(答案)

考试说明:考试日期:2022 年 12 月 14 日。考试时间:95 分钟。考试方式:闭卷

承诺:

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________　　学号：__________　　班号：__________

注：本试卷共 二 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸和草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	总成绩
满 分	90	10	
得 分			

得 分

一、 单项选择题:（在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将正确选项的字母写在括号内. 本大题共 30 小题，每小题 3 分，共 90 分. ）

1. 若 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ （ C ）

A. 1　　B. $\sqrt{e}$　　C. e^2　　D. 2

2. $x=0$ 是 $f(x)=x\cdot\cos\dfrac{1}{2x}$ 的哪一类间断点 （ C ）

A. 跳跃间断点　B. 无穷间断点　C.可去间断点　D. 不是间断点

3. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(0)}{2x}=1$，则 $f'(0)=$ (B)

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. 6　　D. $\dfrac{1}{6}$

4．设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 (A)

A．$y=x$　　B. $y=-x$　　C. $x+y=2$　　D. $x-y=2$

5．设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{t=1}=$ (D)

A．1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. -4

6． $y=x^2-4x+10$ 在点 $(2,6)$ 处的曲率为 (C)

A．0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

7．当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ (A)

A. 有且仅有水平渐近线　　B. 有且仅有垂直渐近线

C. 既有水平渐近线又有垂直渐近线　　D. 既无水平渐近线也无垂直渐近线

8．设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2x^3, & x>1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 (B)

A. 左、右导数都存在但不相等　　B. 左导数存在但右导数不存在

C. 左导数不存在但右导数存在　　D. 左、右导数都不存在

9. 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为 (B)

A．$1+\sin x$　　B. $1-\sin x$　　C. $1+\cos x$　　D. $1-\cos x$

10. 设 $y=\int_0^{2x}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $y'=$ (D)

A. $2\sqrt{1+2x}$　　B. $\sqrt{1+2x}$　　C. $\sqrt{1+4x^2}$　　D. $2\sqrt{1+4x^2}$

11．关于方程 $x^5+2x^3+3x+4=0$，下列说法正确的是 (B)

A．无实根 B. 有唯一实根 C. 有三个不同的实根 D. 有五个不同的实根

12. 函数 $y=x^{1+x}$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=2}=$ (C)

A．$12\mathrm{d}x$ B. $8\ln 2\mathrm{d}x$ C. $(8\ln 2+12)\mathrm{d}x$ D. $8\mathrm{d}x$

13. 当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的 (A)

A．高阶无穷小 B. 同阶无穷小，但不等价 C. 低阶无穷小 D. 等价无穷小

14. $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$ 的 n 阶麦克劳林多项式为 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，则 $a_n=$

(B)

A．$(-1)^n 2^n\cdot n!$ B. $(-1)^n 2^n$ C. $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ D. $\dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}$

15. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x(x-1)^2$，则关于 $f(x)$ 的极值，下面说法正确的是 (B)

A．$x=-1$ 不是极值点，$x=1$ 是极值点

B. $x=-1$ 是极大值点，$x=1$ 是极小值点

C. $x=-1$ 是极小值点，$x=1$ 是极大值点

D. $x=-1$，$x=1$ 都不是极值点

16. 设 $y=\dfrac{1}{x^2-5x+4}$，则 $y^{(2022)}(x)=$ (A)

A．$\dfrac{2022!}{3}\left[\dfrac{1}{(x-4)^{2023}}-\dfrac{1}{(x-1)^{2023}}\right]$ B. $\dfrac{2022!}{3}\left[\dfrac{1}{(x-4)^{2022}}-\dfrac{1}{(x-1)^{2022}}\right]$

C. $\dfrac{2022!}{3}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{2023}}-\dfrac{1}{(x-4)^{2023}}\right]$ D. $\dfrac{2022!}{3}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{2022}}-\dfrac{1}{(x-4)^{2022}}\right]$

17. 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为 (D)

A．$(0,0)$ B. $(2,-3\sqrt[3]{4})$ C. 无拐点 D. $(-1,-6)$

18. 设 $y=f(\sqrt{x})$，其中 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，则 $y'=$ (C)

A. $\dfrac{\left(f(\sqrt{x})\right)'}{2\sqrt{x}}$　B. $\dfrac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$　C. $\dfrac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$　D. $f'(\sqrt{x})$

19. $\int_{-2}^{2}\dfrac{|x|+x}{2+x^2}\mathrm{d}x=$ (A)

A. $\ln 3$　B. $2\ln 3$　C. $\ln 6$　D. 0

20. $\int x\cos^2 x\mathrm{d}x=$ (A)

A. $\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$　B. $\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$

C. $\frac{1}{2}x^2+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$　D. $\frac{1}{2}x^2-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$

21. $\int_{1}^{5}\dfrac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=$ (A)

A. $\frac{7}{3}$　B. $\frac{19}{3}$　C. $\frac{44}{3}$　D. $\frac{80}{3}$

22. $\int_{-5}^{5}4\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=$ (C)

A. $\frac{25\pi}{2}$　B. 25π　C. 50π　D. 100π

23. 广义积分 $\int_{0}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=$ (D)

A. 发散　B. $\frac{\pi}{2}$　C. $\frac{3\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{4}$

24. 由 $y=\ln x, y=\ln 2, y=\ln 4$ 和 y 轴所围成的图形的面积为 (A)

A. 2　B. 1　C. $\ln 2$　D. $\ln 4$

25. 曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1\le x\le 3$ 的弧长为 (B)

A. $\frac{1}{2}\int_{1}^{3}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x$　B. $\frac{1}{2}\int_{1}^{3}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

C. $\int_{1}^{3}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$　D. $\int_{1}^{3}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x$

26. 由 $y=x^2-2x, x=1$ 和 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所得立体的体积为（ C ）

A. $\pi\int_{-1}^{0}(1+\sqrt{1-y})^2\mathrm{d}y-\pi$　　B. $\pi\int_{-1}^{0}(1-\sqrt{1-y})^2\mathrm{d}y-\pi$

C. $\pi-\pi\int_{-1}^{0}(1-\sqrt{1+y})^2\mathrm{d}y$　　D. $\pi-\pi\int_{-1}^{0}(1+\sqrt{1+y})^2\mathrm{d}y$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}x=$（ C ）

A. $\frac{8}{15}\pi$　B. $\frac{4}{15}\pi$　C. $\frac{8}{15}$　D. $\frac{4}{15}$

28. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x<0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$，记 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，则（ C ）

A. $F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}-1, & x<0\\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & x\ge 0\end{cases}$　　B. $F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-x}, & x<0\\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, & x\ge 0\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-x}, & x<0\\ \mathrm{e}-1+\frac{x^2}{2}, & x\ge 0\end{cases}$　　D. $F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}-1, & x<0\\ \mathrm{e}-1+\frac{x^2}{2}, & x\ge 0\end{cases}$

29. $I_1=\int_{\mathrm{e}}^{x}\ln t\mathrm{d}t$，$I_2=\int_{\mathrm{e}}^{x}\ln t^2\mathrm{d}t$，其中 $x>1$，则（ A ）

A．仅当 $x>\mathrm{e}$ 时，$I_1<I_2$　　B. 对一切 $x\ne\mathrm{e}$ 有 $I_1<I_2$

C. 仅当 $x<\mathrm{e}$ 时，$I_1<I_2$　　D. 对一切 $x\ne\mathrm{e}$ 有 $I_1\ge I_2$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2}=$（ D ）

A. $\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$　B. $\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$　C. $\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x$　D. $\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x$

二、证明题：(本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分)

得 分

31 证明：$\frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

证明：设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, ------1'

则 $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, ----2'

设 $g(x) = x\cos x - \sin x$, 则 $g'(x) = -x\sin x < 0$,

所以 $g(x)$ 单调减少，而 $g(\frac{\pi}{4}) < 0$, 所以当 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$g(x) < g(\frac{\pi}{4}) < 0$，

所以 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少，

当 $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 的最大值 $M = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$，最小值 $m = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$， -----4'

由积分估值定理得 $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}$，原命题得证. -------5'

得 分

32. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = 0$，$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) + 2[f(\xi) - \xi] = 1$.

证明：设 $F(x) = e^{2x}(f(x) - x)$， -----2'

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导。 -----3'

而 $F(0) = F(\frac{1}{2}) = 0$，由罗尔定理有 ------4'

存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2}) \subset (0,1)$，使得 $F'(\xi) = 0$，

即 $f'(\xi) + 2[f(\xi) - \xi] = 1$. ------5'