

一、单项选择题：（在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将正确选项的字母写在括号内. 本大题共 30 小题，每小题 3 分，共 90 分.）

1. 若 $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ()
 A. 1 B. \sqrt{e} C. e^2 D. 2
2. $x=0$ 是 $f(x)=x \cdot \cos \frac{1}{2x}$ 的哪一类间断点 ()
 A. 跳跃间断点 B. 无穷间断点 C. 可去间断点 D. 不是间断点
3. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)-f(0)}{2x}=1$ ，则 $f'(0)=$ ()
 A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 6 D. $\frac{1}{6}$
4. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 ()
 A. $y=x$ B. $y=-x$ C. $x+y=2$ D. $x-y=2$
5. 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 确定了函数 $y=y(x)$ ，则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} =$ ()
 A. 1 B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -4
6. $y=x^2-4x+10$ 在点 $(2,6)$ 处的曲率为 ()
 A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
7. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x \sin \frac{1}{x}$ ()
 A. 有且仅有水平渐近线 B. 有且仅有垂直渐近线

C. 既有水平渐近线又有垂直渐近线 D. 既无水平渐近线也无垂直渐近线

8. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x^3, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ()

- A. 左、右导数都存在但不相等
B. 左导数存在但右导数不存在
C. 左导数不存在但右导数存在
D. 左、右导数都不存在

9. 设函数 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数为 ()

- A. $1 + \sin x$ B. $1 - \sin x$ C. $1 + \cos x$ D. $1 - \cos x$

10. 设 $y = \int_0^{2x} \sqrt{1+t^2} dt$, 则 $y' =$ ()

- A. $2\sqrt{1+2x}$ B. $\sqrt{1+2x}$ C. $\sqrt{1+4x^2}$ D. $2\sqrt{1+4x^2}$

11. 关于方程 $x^5 + 2x^3 + 3x + 4 = 0$, 下列说法正确的是 ()

- A. 无实根 B. 有唯一实根 C. 有三个不同的实根 D. 有五个不同的实根

12. 函数 $y = x^{1+x}$, 则 $dy|_{x=2} =$ ()

- A. $12dx$ B. $8\ln 2 dx$ C. $(8\ln 2 + 12)dx$ D. $8dx$

13. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的 ()

- A. 高阶无穷小 B. 同阶无穷小, 但不等价 C. 低阶无穷小 D. 等价无穷小

14. $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ 的 n 阶麦克劳林多项式为 $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, 则

$$a_n = \quad ()$$

- A. $(-1)^n 2^n \cdot n!$ B. $(-1)^n 2^n$ C. $\frac{(-1)^n}{2^n}$ D. $\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

15. 设 $f(x) = e^x(x-1)^2$, 则关于 $f(x)$ 的极值, 下面说法正确的是 ()

- A. $x=-1$ 不是极值点, $x=1$ 是极值点

- B. $x=-1$ 是极大值点, $x=1$ 是极小值点
 C. $x=-1$ 是极小值点, $x=1$ 是极大值点
 D. $x=-1, x=1$ 都不是极值点

16. 设 $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$, 则 $y^{(2022)}(x) =$ ()

A. $\frac{2022!}{3} \left[\frac{1}{(x-4)^{2023}} - \frac{1}{(x-1)^{2023}} \right]$	B. $\frac{2022!}{3} \left[\frac{1}{(x-4)^{2022}} - \frac{1}{(x-1)^{2022}} \right]$
C. $\frac{2022!}{3} \left[\frac{1}{(x-1)^{2023}} - \frac{1}{(x-4)^{2023}} \right]$	D. $\frac{2022!}{3} \left[\frac{1}{(x-1)^{2022}} - \frac{1}{(x-4)^{2022}} \right]$

17. 曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为 ()

- A. $(0,0)$ B. $(2, -3\sqrt[3]{4})$ C. 无拐点 D. $(-1, -6)$

18. 设 $y = f(\sqrt{x})$, 其中 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 则 $y' =$ ()

A. $\frac{(f(\sqrt{x}))'}{2\sqrt{x}}$	B. $\frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	C. $\frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$	D. $f'(\sqrt{x})$
---------------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------	-------------------

19. $\int_{-2}^2 \frac{|x|+x}{2+x^2} dx =$ ()

- A. $\ln 3$ B. $2\ln 3$ C. $\ln 6$ D. 0

20. $\int x \cos^2 x dx =$ ()

A. $\frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$	B. $\frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$
C. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$	D. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$

21. $\int_1^5 \frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}} dx =$ ()

- A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{19}{3}$ C. $\frac{44}{3}$ D. $\frac{80}{3}$

22. $\int_{-5}^5 4\sqrt{25-x^2} dx =$ ()

- A. $\frac{25\pi}{2}$ B. 25π C. 50π D. 100π

23. 由 $y = \ln x$, $y = \ln 2$, $y = \ln 4$ 和 y 轴所围成的图形的面积为 ()

- A. 2 B. 1 C. $\ln 2$ D. $\ln 4$

24. 曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1 \leq x \leq 3$ 的弧长为 ()

- A. $\frac{1}{2} \int_1^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$
B. $\frac{1}{2} \int_1^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$
C. $\int_1^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$
D. $\int_1^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$

25. 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} =$ ()

- A. 发散 B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{4}$

26. 由 $y = x^2 - 2x$, $x = 1$ 和 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所得立体的体积为 ()

- A. $\pi \int_{-1}^0 (1 + \sqrt{1-y})^2 dy - \pi$
B. $\pi \int_{-1}^0 (1 - \sqrt{1-y})^2 dy - \pi$
C. $\pi - \pi \int_{-1}^0 (1 - \sqrt{1+y})^2 dy$
D. $\pi - \pi \int_{-1}^0 (1 + \sqrt{1+y})^2 dy$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx =$ ()

- A. $\frac{8}{15}\pi$ B. $\frac{4}{15}\pi$ C. $\frac{8}{15}$ D. $\frac{4}{15}$

28. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, 记 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, 则 ()

- A. $F(x) = \begin{cases} e-1, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$
B. $F(x) = \begin{cases} e-e^{-x}, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$
C. $F(x) = \begin{cases} e-e^{-x}, & x < 0 \\ e-1+\frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$
D. $F(x) = \begin{cases} e-1, & x < 0 \\ e-1+\frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

29. $I_1 = \int_e^x \ln t dt$, $I_2 = \int_e^x \ln t^2 dt$, 其中 $x > 1$, 则 ()

- A. 仅当 $x > e$ 时, $I_1 < I_2$
B. 对一切 $x \neq e$ 有 $I_1 < I_2$

C. 仅当 $x < e$ 时, $I_1 < I_2$

D. 对一切 $x \neq e$ 有 $I_1 \geq I_2$

30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2} =$ ()

A. $\int_0^1 e^x dx$ B. $\int_0^1 xe^x dx$ C. $\int_0^1 e^{x^2} dx$ D. $\int_0^1 xe^{x^2} dx$

二、证明题: (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

31. 证明: $\frac{1}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

32. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) + 2[f(\xi) - \xi] = 1$.