线性代数复习 - 填空题常见题型

本文档根据复习课整理，整理时间为 2026 年 1 月，仅供参考、请勿倒卖。
推荐同学们在开始练习往年真题前利用这个文档复习填空题的常见题型和必备的知识点，填空题的具体设问多有变化，希望冲击高分的同学还请进行系统的复习和刷题。

1. **求多项式系数**

多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为__________

不需要计算行列式，逐个思考行列式展开后哪些项可能形成所求幂次系数即可。

2. **代数余子式之和**

2. 若 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$

____

本题求第一排的 4 个代数余子式，我们令行列式第一排的 4 个数字都为 1，计算新行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 即可。

3. **范德蒙德行列式**

若行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 1 & 1 & k^2 & 9 \\ 1 & -1 & k^3 & 27 \end{vmatrix}=0$，且常数 $k<0$，则 $k=$__________

我们可以使用公式 $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ 求范德蒙德行列式的值，例如本题中 $D=(3-k)(3+1)(3-1)(k+1)(k-1)(-1-1)$.

4. **初等矩阵**

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\6&0&3\\0&2&2\\-5&1&3\end{pmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

初等矩阵左乘矩阵 A 即对 A 做对应的初等行变换，右乘则是初等列变换。
例如在本题中，观察到左侧的初等矩阵是将 E 的第 3 行乘以 -1 倍加到第 1 行得到的，我们对右侧的矩阵也做相同的操作，即可得到答案。

5. **抽象矩阵求逆**

若 n 阶实方阵 A 满足 $A^2+3A-2E=O$，则 $(A+E)^{-1}=\_\_\_\_\_\_\_\_$

在本题中，我们可以将条件变换为：

$$A^2+3A+2E=4E$$
$$(A+E)(A+2E)=4E$$
$$(A+E)\frac{A+2E}{4}=E$$

由矩阵逆的定义可得 $(A+E)^{-1}=\frac{A+2E}{4}$.

6. **解空间维数**

8. 设 A^* 为实方阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵，则线性方程组 $A^*X=O$ 的基础解系中所含向量的个数为______

需要掌握：

$$\text{齐次线性方程组解空间的维数}\dim V_{\text{解}}=n-R(A)$$

$$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n\\1, & R(A)=n-1\\0, & R(A)<n-1\end{cases}$$

本题中 $R(A)=3\implies R(A*)=3\implies dimV_{\text{解}}=3-3=0.$

7. **利用相似求解**

> 若实方阵 A 与 $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$ 相似，则 $|A+E|=$________________

可以利用相似矩阵特征值相等的性质及 $\lambda_{A+E}=\lambda_A+1$ 求解；也可以直接认为 $A=B$、计算 $|A+E|$ 即可。

> 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&2&-5\\2&4&-2\\-5&-2&a\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$________________

利用性质：

$$\text{迹 } \mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

求解 a 即可。

8. **求特征值**

> 6. 若 3 阶实方阵 A 满足 $A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2$， $A\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2$， $A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，并且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维线性无关的列向量，则 $\left|A^*+3A^{-1}+E\right|=$________________

首先拼成矩阵形式

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

由此可知 A 与 $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似，其特征值相等，求得 A 和 B 的特征值 $\lambda=1,1,3$。
然后 $|A^*+3A^{-1}+E|=|3A^{-1}+3A^{-1}+E|=|6A^{-1}+E|$，可以求得 $\lambda_{6A^{-1}+E}=7,7,3.$
最后 $|6A^{-1}+E|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=147$ 即可。

9. **对称阵相关题型**

对称阵不同特征值对应的特征向量必正交。

10. 二次型的规范形

> 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^{\,2}+2x_3^{\,2}+2x_2x_3$ 的规范形为__________

首先写出二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$，求得其特征值 $\lambda=0,1,3$。

可得其正惯性指数（正特征值个数）为 2、负惯性指数（负特征值个数）为 0，即可得到规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

11. 求正定矩阵系数范围

> 10. 已知三阶实方阵 $A=\begin{pmatrix}2-a&1&0\\1&1&0\\0&0&a+3\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，则 a 的取值范围为__________

根据正定矩阵的顺序主子式（$|2-a|,\begin{vmatrix}2-a&1\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2-a&1&0\\1&1&0\\0&0&a+3\end{vmatrix}$）均大于 0 求解系数即可。

12. 正定矩阵行列式的大小比较

> 10. 若实矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&e&f&g\\c&f&h&j\\d&g&j&k\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，$B=\begin{pmatrix}h&f&c&j\\f&e&b&g\\c&b&a&d\\j&g&d&k\end{pmatrix}$，则行列式
>
> $\begin{vmatrix}3+h&f&c\\f&3+e&b\\c&b&3+a\end{vmatrix}$ ______ 25 （填比较符号 >，=，< 之一）.

发现：

$$\begin{vmatrix}3+h&f&c\\f&3+e&b\\c&b&3+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}h&f&c\\f&e&b\\c&b&a\end{vmatrix}+3E$$

上式中 $\begin{vmatrix} h & f & c \\ f & e & b \\ c & b & a \end{vmatrix}$ 是 B 的顺序主子式。观察到 A、B 是合同的，可得 B 也是正定矩阵，它的顺序主子阵 $\begin{pmatrix} h & f & c \\ f & e & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ 也是正定的，其特征值 λ 均大于 0，加上 $3E$ 的特征值 λ' 均大于 3，因此

$$\begin{vmatrix} 3+h & f & c \\ f & 3+e & b \\ c & b & 3+a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i' > 27 > 25$$

> 10. 若实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 & c_1 & c_2 \\ a_4 & b_3 & c_2 & d \end{pmatrix}$ 满足 $A^9 - 3A^6 + 5A^3 - 2A^2 = E$，则行列式
>
> $\begin{vmatrix} b_2 & b_1 & b_3 \\ c_1 & b_2 & c_2 \\ c_2 & b_3 & d \end{vmatrix}$ ___$<$___ 0（填 >,=,< 之一）.

由矩阵多项式与特征值的关系，我们可以知道 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^9 - 3\lambda^6 + 5\lambda^3 - 2\lambda^2 = 1$，发现要满足该式、一定有 $\lambda > 0$，因此 A 正定，剩余的步骤思路与上题类似。

13. **求代数余子式之和**

$$|A+E| = |A| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$