

北京工业大学 2025-2026 学年《高等代数 I》期中测试

一、填空题（每题 5 分，共 15 分）

1. 若 $(x-1)^2 \mid x^3 + Ax^2 + B$ ，则 $A - B =$ _____.

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} =$$
 _____.

3.
$$R \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 2 & a & b & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$$
, 则 $a + b =$ _____.

二、判断题（填×或√）（每题 3 分，共 15 分）

4. 多项式 $x^{2025} + 2025x + 5$ 在实数域上不可约.

5. 设 $(f(x), g(x)) = d(x)$ ，则 $\left(\frac{f(x)}{d(x)}, g(x)\right) = 1$.

6. 三维空间中任意 4 个向量都线性相关.

7. 秩相同的两个向量组一定等价.

8. 若
$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 + 4\beta_2 \\ \alpha_2 = -\beta_1 + 5\beta_2 \\ \alpha_3 = 7\beta_1 - 3\beta_2 \end{cases}$$
，则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

三、计算与证明（写出过程，每题 10 分，共 70 分）

9. 已知多项式 $f(x)$ 满足 $f(1)=3, f(-1)=1, f'(1)=7$ ，求 $x^3 - x^2 - x + 1$ 除 $f(x)$ 的余式.

10. 求 $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ 的有理根和重因式.

11. 已知 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ ，求 $M_{11} + M_{21} - M_{41}$.

12. 判断以下方程组何时有解. 有解时，求出解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = a + 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + (a+2)x_4 = b \end{cases}$$

13. 向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 3, 2, 1)^T, \alpha_4 = (2, -1, 0, 1)^T, \alpha_5 = (1, -1, 3, 7)^T$. 求一个极大无关组和秩，并用该极大无关组线性表出其余向量.

14. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性相关. 证明: β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 且表出方式唯一.

15. 证明: $R\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n\} \leq R\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} + R\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$.