① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ $(0, \frac{2}{\ln 2})$

④ -2 ⑤ $\frac{1}{6}a$ ⑥ $2f(e^{\sin x})\cdot f'(e^{\sin x})\cdot e^{\sin x}\cos x\,dx$

⑦ $\frac{3}{4(1-t)}$ ⑧ 0 ⑨ $y=1$, ⑩ 2024

⑪

$$y=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{a-bx}\right)$$

$$y'=\frac{b}{2a}\left(\frac{1}{(a-bx)^2}+\frac{-1}{(a+bx)^2}\right)$$

$$y''=\frac{2!\,b^2}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^3}+\frac{(-1)^2}{(a+bx)^3}\right],$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=\frac{n!\,b^n}{2a}\left[\frac{1}{(a-bx)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(a+bx)^{n+1}}\right]$$

⑫ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})^n\right)^{n^2(1-n\sin\frac{1}{n})}$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(1-n\sin\frac{1}{n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!}(\frac{1}{n})^3+o((\frac{1}{n})^4)\right)\right]$

$=\frac{1}{6}$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{1}{6}}$

P2

⑬ $y' = \dfrac{x(2-x)}{e^x}$

$y'' = \dfrac{x^2-4x+2}{e^x}$

令 $y''=0 \Rightarrow x_{1,2} = 2\pm\sqrt{2}$

x	$(-\infty, 2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2}, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

凸区间：$(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$

凹区间 $(-\infty, 2-\sqrt{2})$, $(2+\sqrt{2}, +\infty)$

拐点：$(2-\sqrt{2}, (2-\sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}})$, $(2+\sqrt{2}, (2+\sqrt{2})^2 e^{-2-\sqrt{2}})$.

⑭ $e^{-y}\cdot(-y') + y + xy' - e^x = 0$

$\Rightarrow y' = \dfrac{e^x - y}{x - e^{-y}}$

$\cancel{y''=}\ e^{-y}\cdot(-y')^2 + e^{-y}\cdot(-y'') + y' + y' + xy'' - e^x = 0$

$\Rightarrow y'' = \dfrac{e^x - e^{-y}(y')^2 - 2y'}{x - e^{-y}}$

$x=0,\ y=0 \Rightarrow y'|_{x=0} = -1$.

$\Rightarrow y''|_{x=0} = -2$.

(15) $x = 0, 1, 2, 3$

$x=0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{\ln 2}$，第一类可去

$x=1$: $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$，第二类无穷

$x=2$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$，第一类可去

$x=3$. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{\sin 3}{3}$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\frac{\sin 3}{3}$，第一类跳跃

(16) ① $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$

$\therefore$ 当 $\alpha-1>0$ 即 $\alpha>1$ 时，$f'(0)$ 存在 且 $f'(0)=0$

② 当 $x\neq 0$ 时，

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$

~~$\therefore$ $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续~~

$\therefore$ 当 $\alpha-2>0$ 即 $\alpha>2$ 时，有 $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$

即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

⑰ 令 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^{x}$

$\ln f(x) = x[\ln(1+x)-\ln x]$

而 $(x[\ln(1+x)-\ln x])'$

$=[\ln(1+x)-\ln x]-\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{1+x}$，$\exists\, \xi\in(x,1+x)$

>0

$\therefore$ $f(x)$ 单增（$x>0$时）.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

$\Rightarrow$ $(1+\frac{1}{x})^{x}<e$.

令 $g(x)=(1+\frac{1}{x})^{x+1}$

同理可证 $x>0$时，$g(x)$单减，且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=e$.

$\therefore$ $e<(1+\frac{1}{x})^{x+1}$ 得证.

或取对数，即需证 $x\ln(1+\frac{1}{x})<1<(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})$

$$\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\frac{1}{x}}<1<\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\frac{1}{x+1}}.$$

存在性.

(18) 令 $F(x) = f(x) - \frac{M}{n}x$.

由题意知 $\exists\, x_0 \in (0,1)$, s.t. $f(x_0) = M$

计算 $F(0) = 0$, $F(1) = -\frac{M}{n} < 0$,

而 $F(x_0) = M - \frac{M}{n}x_0 > 0$

在 $[x_0, 1]$ 用零点定理, $\exists\, \eta \in (x_0, 1)$, s.t. $F(\eta) = 0$

在 $[0, \eta]$ 上用 Rolle 定理. $\exists\, \xi_n \in (0, \eta) \subset (0,1)$

s.t. $F'(\xi_n) = 0$, ~~即~~ $f'(\xi_n) = \frac{M}{n}$.

唯一性: 若还有 $\eta_n \in (0,1)$, s.t. $f'(\eta_n) = \frac{M}{n}$.

由 Rolle 定理, $\exists\, \xi$ 介于 ξ_n 与 η_n 之间, s.t.

$f''(\xi) = 0$, 而 $f''(x) < 0$ $(x \in (0,1))$ 矛盾