

## 北京XX大学 2022—2023 学年第一学期

## 《高等数学(工)—1》期中考试试卷(答案)

考试说明: 考试日期: 2022 年 10 月 28 日, 考试时间: 95 分钟, 考试方式: 闭卷  
承诺:

承诺人: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_ 班号: \_\_\_\_\_

.....  
注: 本试卷共 三 大题, 共 6 页, 满分 100 分, 考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷面成绩汇总表(阅卷教师填写)

题号	一	二	三	总成绩
满分	30	60	10	
得分				

得分

一、填空题: (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan 3x)^{\frac{1}{\sin(\sin x)}} = \underline{\quad\quad\quad} e^3 \underline{\quad\quad\quad}$

2. 曲线  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$  上斜率为 1 的切线方程为  $y - 2 = x - (\pi - 2)$

3. 设  $y = y(x)$  由方程  $x^y = xy$  确定, 则  $\frac{dy}{dx} = \underline{\quad\quad\quad} \frac{y(y-1)}{x(1-y \ln x)} \underline{\quad\quad\quad}$

4. 函数  $y = 1 - x^2 \sqrt{3 - x^2}$  在  $[0, \sqrt{3}]$  上的最小值为  $\quad\quad\quad -1 \quad\quad\quad$

5. 曲线  $y = \frac{x|x+1|}{x^2-1} + (x-1) \sin \frac{1}{x^2+1}$  的水平渐近线和垂直渐近线共 3 条。

6. 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+\pi) - f(x)] = \underline{\quad\quad\quad} \pi A \underline{\quad\quad\quad}$

7. 已知  $\lim_{h \rightarrow 0} h \left[ f\left(\sin \frac{2}{h}\right) - f(0) \right] = \frac{1}{2}$ , 则  $df(x)|_{x=0} = \underline{\quad\quad\quad} \frac{1}{4} dx \underline{\quad\quad\quad}$

8. 设  $y = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$ , 则  $y^{(2022)}(0) = \underline{\hspace{2cm}} 2019 \times 2022 \underline{\hspace{2cm}}$

9. 已知当  $x \rightarrow 0$  时函数  $\frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{1 - \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}$  与  $x^\alpha(1 + \sqrt{x})$  为同阶无穷小, 则  $\alpha = \underline{\hspace{2cm}} \frac{11}{4} \underline{\hspace{2cm}}$

10. 设  $y = f(\operatorname{arccot} x + \sec x)e^{f(x)}$ , 其中函数  $f(x)$  可微, 则

$$\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{10cm}} f'(\operatorname{arccot} x + \sec x)(\sec x \tan x - \frac{1}{1+x^2})e^{f(x)} + f(\operatorname{arccot} x + \sec x)e^{f(x)} f'(x)$$



二、计算题：(本大题共 6 小题, 每小题 10 分, 共 60 分)

得 分

11. 设  $y = \ln \frac{2x+1}{2-3x+x^2} (x > 2)$ , 求  $y', y'', y'''$  以及  $y^{(n)}(x)$ .

解  $y = \ln \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \ln(2x+1) - \ln(x-1) - \ln(x-2)$

$$= \ln 2 + \ln(x + \frac{1}{2}) - \ln(x-1) - \ln(x-2) \quad \text{-----} 2'$$

$$y' = \frac{1}{x + \frac{1}{2}} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = (x + \frac{1}{2})^{-1} - (x-1)^{-1} - (x-2)^{-1} \quad \text{-----} 4'$$

$$y'' = (-1)(x + \frac{1}{2})^{-2} - (-1)(x-1)^{-2} - (-1)(x-2)^{-2} \quad \text{-----} 6'$$

$$y''' = (-1)(-2)(x + \frac{1}{2})^{-3} - (-1)(-2)(x-1)^{-3} - (-1)(-2)(x-2)^{-3} \quad \text{-----} 8'$$

$$y^{(n)} = (-1)(-2) \cdots (-n+1)(x + \frac{1}{2})^{-n} - (-1)(-2) \cdots (-n+1)(x-1)^{-n} - (-1)(-2) \cdots (-n+1)(x-2)^{-n}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)![(x + \frac{1}{2})^{-n} - (x-1)^{-n} - (x-2)^{-n}] \quad \text{-----} 10'$$



得分

12. 求函数  $y = (x-6)\sqrt[3]{(x-1)^2}$  的单调区间、极值、凹凸区间和拐点.

解  $y = (x-1-5)\sqrt[3]{(x-1)^2}, y' = \frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{5(x-3)}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}},$  -----1'

$$y'' = \frac{5}{3} \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}} - (x-3) \cdot \frac{1}{3} \cdot (x-1)^{-\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{10x}{9(x-1)^{\frac{4}{3}}}.$$
 -----2'

函数在  $x=1$  处不可导. 令一阶导数  $y'=0$ , 得驻点  $x=3$ , . -----3'

在  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$  上,  $y' > 0$ , 在  $(1, 3)$  上,  $y' < 0$ , 所以  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$  是单增

区间,  $(1, 3)$  是单减区间, -----5'

函数在  $x=1$  处取得极大值  $y(1)=0$ ,  $x=3$  处取得极小值  $y(3)=-3\sqrt[3]{4}$ . -----7'

在  $(-\infty, 0)$  上,  $y'' < 0$ , 在  $(0, +\infty)$  上,  $y'' > 0$ , 所以  $(-\infty, 0)$  是凸区间,

$(0, +\infty)$  是凹区间. -----9'

$(0, -6)$  是拐点. -----10'

得分

13. 求函数  $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} + \frac{\sin(x+1)}{x(x+1)} \cos \frac{1}{\pi - x}$  的间断点, 并判断其类型.

解 函数定义域是  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \pi) \cup (\pi, +\infty)$ ,

$x = -1, x = 0, x = 1, x = \pi$  是间断点. -----2'

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}} - 1}{e^{-\frac{1}{2}} + 1} - \cos \frac{1}{\pi + 1}, \quad x = -1 \text{ 是第一类间断点中的可去间断点.} \text{ -----4'}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ ,  $x = 0$  是第二类间断点中的无穷间断点. -----6'

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 - \frac{\sin 2}{2} \cos \frac{1}{\pi - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - \frac{\sin 2}{2} \cos \frac{1}{\pi - 1},$$

$x = 1$  是第一类间断点中的跳跃间断点. -----8'

$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$  不存在,  $x = \pi$  是第二类间断点中的振荡型间断点. -----10'

得分

14. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上二阶可导,  $g(x) = \begin{cases} ax^2 + b \sin x + c, & x > 0 \\ f(x), & x \leq 0 \end{cases}$  在

$x=0$  处二阶可导, 求常数  $a, b, c$ .

解  $g(x)$  在  $x=0$  处二阶可导, 可推出  $g(x)$  在  $x=0$  处连续, 一阶可导。-----1'

(1) 因为  $g(x)$  在  $x=0$  处连续, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ ,

由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 + b \sin x + c = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ,  $\Rightarrow c = f(0)$ . -----4'

(2) 因为  $g(x)$  在  $x=0$  处一阶可导, 所以  $g'(0) = g'_-(0) = g'_+(0)$ ,

由  $g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 + b \sin x + f(0) - f(0)}{x} = b$ ,  $g'_-(0) = f'_-(0)$ ,  $\Rightarrow b = f'_-(0)$ . ---7'

(3) 当  $x > 0$  时,  $g'(x) = 2ax + b \cos x$ ,

因为  $g(x)$  在  $x=0$  处二阶可导, 所以  $g''_-(0) = g''_+(0)$ ,

由  $g''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2ax + f'_-(0)(\cos x - 1)}{x} = 2a$ ,  $g''_-(0) = f''_-(0)$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2} f''_-(0)$ . -----10'

得分

15. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{\tan \ln(1+3x^2)(e^{-x^2} + 1) \arcsin(x+x^2)}$ .

解 原式 =  $\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{3x^3}$  -----2'

=  $\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - 2x}{9x^2}$  -----4'

=  $\frac{1}{18} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1}{x}$  -----6'

=  $\frac{1}{18} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - e^x \sin x}{1}$  -----8'

=  $\frac{1}{18}$ . -----10'

得 分

16. 设参数方程  $\begin{cases} x = te^{2t} \\ e^{2t} - e^{y^2} = 1 - e \end{cases}$  确定了函数  $y = y(x)$ , 求

$$\left. \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0}.$$

解  $\frac{dx}{dt} = (2t+1)e^{2t}$  -----1'

方程  $e^{2t} - e^{y^2} = 1 - e$  两端同时对  $t$  求导, 得

$$2e^{2t} - e^{y^2} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$
 -----2'

解出  $\frac{dy}{dt} = \frac{e^{2t}}{ye^{y^2}}$  -----3'

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{(2t+1)ye^{y^2}}$$
 -----4'

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) &= - \frac{[2ye^{y^2} + (2t+1)\frac{dy}{dt}e^{y^2} + (2t+1)ye^{y^2} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dt}]}{(2t+1)^2 y^2 e^{2y^2}} \\ &= - \frac{2y^2 e^{y^2} + (2t+1)e^{2t} + 2y^2(2t+1)e^{2t}}{(2t+1)^2 y^3 e^{2y^2}} \end{aligned}$$
 -----5'

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = - \frac{2y^2 e^{y^2} + (2t+1)e^{2t} + 2y^2(2t+1)e^{2t}}{(2t+1)^3 y^3 e^{2y^2} e^{2t}}$$
 -----6'

$t=0$  时代入  $e^{2t} - e^{y^2} = 1 - e$ , 得  $y = \pm 1$ . -----8'

$y = -1$  时,  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{2e+3}{e^2}$  -----9'

$y = +1$  时,  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = -\frac{2e+3}{e^2}$  -----10'

## 三、证明题：(本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分)

得分

17. 设  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 证明:  $\sin x + \tan x > 2x$ .

证 设  $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ , -----1'

$f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2$ , -----2'

$f''(x) = -\sin x + 2\sec^2 x \tan x = \sin x \left( \frac{2 - \cos^3 x}{\cos^3 x} \right) > 0, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ . -----3'

故  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $f'(x)$  单调增加,  $f'(x) > f'(0) = 0$ , -----4'

故  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $f(x)$  单调增加,  $f(x) > f(0) = 0$ ,

所以  $\sin x + \tan x > 2x$ . -----5'



得分

18. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  ( $a > 0$ ) 上可微, 证明: 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{a^n f(b) - b^n f(a)}{a^n - b^n} = f(\xi) - \frac{1}{n} \xi f'(\xi) \quad (n \geq 1).$$

证 设  $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}, h(x) = \frac{1}{x^n}, x \in [a, b]$ ,

对  $g(x), h(x)$  在  $[a, b]$  上应用柯西中值定理, 得: -----3'

至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b^n} - \frac{f(a)}{a^n}}{\frac{1}{b^n} - \frac{1}{a^n}} = \frac{[\frac{f(x)}{x^n}]'}{[\frac{1}{x^n}]'} \bigg|_{x=\xi} = \frac{f'(\xi)\xi^{-n} - n\xi^{-(n+1)}f(\xi)}{-n\xi^{-(n+1)}} = f(\xi) - \frac{1}{n}\xi f'(\xi)$$

即  $\frac{a^n f(b) - b^n f(a)}{a^n - b^n} = f(\xi) - \frac{1}{n} \xi f'(\xi)$ . -----5'

