北京工业大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学(工)—1》期末考试试卷 A 卷

考试说明：考试日期:2021 年 12 月 30 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺:

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________ 学号：__________ 班号：__________

注： 本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸和草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
满分	30	60	10	
得分				

得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}=$ ______ 2 ____________.

2. 曲线 $f(x)=\arctan\dfrac{x}{x-1}$ 的渐近线为__ $y=\dfrac{\pi}{4}$ ______.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+6x)}{x}+a, & x>0\\ \sqrt{1-x}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ______ -5 ______.

4. 设 $f'(2)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{3h}=$ __________ $\dfrac{2}{3}$ ______________.

5. 函数 $y=\int_2^{\sqrt{x}}(2-t^2)\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}y=$ _____ $\dfrac{2-x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ _________.

6. 曲线 $y=(1+x)\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为___ $y=2(x-1)$ __.

7. 设 $y=f(x)$ 由方程 $4\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ____ -2 ________.

8. 曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的拐点为___ $(2,2\mathrm{e}^{-2})$ ________________.

9. $\int_{-2}^{2}\left(xe^{x^2}+\sqrt{4-x^2}\right)\mathrm{d}x=$ ________ 2π ________________.

10. $\int_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=$ _____ $\dfrac{1}{\ln 2}$ ________.

二、计算题:（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 设 $f(x)=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$，求（1） $f'(x), f''(x), f^{(2022)}(0)$；

（2） $f(x)$ 带皮亚诺型余项的2022阶麦克劳林公式.

解：(1) $f(x)=-2+\dfrac{2}{1-x^2}=-2+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}$，

$f'(x)=(1-x)^{-2}-(1+x)^{-2}$， ----------2'

$f''(x)=2(1-x)^{-3}+2(1+x)^{-3}$， ---------4'

$f'''(x)=3!(1-x)^{-4}-3!(1+x)^{-4}$，

……

$f^{(2022)}(x)=2022!(1-x)^{-2023}+2022!(1+x)^{-2023}$， ----------6'

$f^{(2022)}(0)=2\cdot 2022!$. ----------7'

(2) $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=2\cdot 2$, $f'''(0)=0$, $f^{(4)}(0)=2\cdot 4!$, …… --------8'

$f(x)=2x^2+2x^4+2x^6+\cdots+2x^{2022}+o(x^{2022})$. -----------10'

得 分

12. 求由参数方程$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{1+t}$， ----------2’

$\dfrac{dx}{dt} = 2t + 2$， ----------4’

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(1+t)^2}$， ---------6’

$\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = -\dfrac{1}{(1+t)^3}$， ----------8’

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{(1+t)^4}$. ----------10’

得 分

13. 计算 $\displaystyle\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}$.

解：令 $\sqrt{\sqrt{x}-1} = t$，则 $x = \left(t^2+1\right)^2$，$dx = 4t(t^2+1)dt$， ----------2’

当 $x = 1$时$t = 0$； $x = 16$时$t = \sqrt{3}$. ----------4’

原式=$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4t(t^2+1)}{t} dt$ ---------6’

$= 4\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} (1+t^2) dt$ ----------7’

$= 4\left(t + \dfrac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}$ ---------8’

$= 8\sqrt{3}$ ---------10’

得 分

14．求函数 $f(x)=2\ln(x^2+3)+x+1-4\ln 2$ 的极值.

解：定义域 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=\frac{4x}{x^2+3}+1=\frac{(x+1)(x+3)}{x^2+3},$$ ------3’

驻点为 $x_1=-1$， $x_2=-3$， -------5’

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单增	极大值	单减	极小值	单增

------8’

故函数的极大值为 $f(-3)=2\ln 3-2$，极小值为 $f(-1)=0$ ---------10’

得 分

15．求由抛物线 $y=x^2$ 与 $y=-4x^2+5$ 在第一象限内围成图形的面积；并求该图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

解：交点为 $(1,1)$， ----------2’

所围图形面积为

$$S=\int_0^1(-4x^2+5-x^2)\mathrm{d}x=-5\int_0^1(x^2-1)\mathrm{d}x=-5\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_0^1=\frac{10}{3}.$$ -----------5’

$$V_1=\pi\int_0^1(-4x^2+5)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{16}{5}x^5-\frac{40}{3}x^3+25x\right)\Big|_0^1=\frac{223}{15}\pi.$$ ----------7’

$$V_2=\pi\int_0^1(x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{x^5}{5}\pi\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$$ ------------9’

所以旋转体体积为 $V=V_1-V_2=\frac{223}{15}\pi-\frac{\pi}{5}=\frac{44}{3}\pi$. ------------10’

得 分

16. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{3}{2}x^2, & -1\le x<0\\ x\sin x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$，求函数 $\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x\in[-1,\pi]$ 的表达式.

解：当 $-1\le x<0$ 时，$\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}\left(2t+\dfrac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=\left(t^2+\dfrac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{x}=\dfrac{1}{2}x^3+x^2-\dfrac{1}{2}$.

---------4’

当 $0\le x\le 1$ 时，$\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}\left(2t+\dfrac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}t\sin t\mathrm{d}t$ ---------6’

$$=\left(t^2+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{0}-\int_0^x t\mathrm{d}\cos t$$ ---------7’

$$=-\frac{1}{2}-t\cos t\Big|_0^x+\int_0^x\cos t\mathrm{d}t$$ ---------8’

$$=-\frac{1}{2}-x\cos x+\sin t\Big|_0^x$$ --------9’

$$=-\frac{1}{2}-x\cos x+\sin x$$ -----------10’

故 $$\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^3+x^2-\dfrac{1}{2}, & -1\le x<0\\ -\dfrac{1}{2}-x\cos x+\sin x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

三、证明题:（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 证明：$\sqrt{3}\sin\sqrt{3}+2\cos\sqrt{3}+\sqrt{3}\pi>\sqrt{2}\sin\sqrt{2}+2\cos\sqrt{2}+\sqrt{2}\pi$.

证明：设 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$， -------1'

$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi$， -------2'

$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$， --------3'

当 $0<x<\pi$ 时， $f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 单调减少，

则 $f'(x)>f'(\pi)=0$，所以 $f(x)$ 单调增加， --------4'

所以 $0<\sqrt{2}<\sqrt{3}<\pi$ 时，$f(\sqrt{3})>f(\sqrt{2})$， ------- 5'

即 $\sqrt{3}\sin\sqrt{3}+2\cos\sqrt{3}+\sqrt{3}\pi>\sqrt{2}\sin\sqrt{2}+2\cos\sqrt{2}+\sqrt{2}\pi$.

得 分

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)\cos\xi=0$.

证明： 设 $F(x)=f(x)e^{\sin x}$，则 $F(x)$ 在在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，-----2'

且 $F(a)=F(b)=0$，而 $F'(x)=f'(x)e^{\sin x}+f(x)\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}$， ---------4'

由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，

使得 $F'(\xi)=f'(\xi)e^{\sin\xi}+f(\xi)\cdot\cos\xi\cdot e^{\sin\xi}=0$，

即 $f'(\xi)+f(\xi)\cos\xi=0$. -----------5'