

北京工业大学 2024—2025 学年第一学期

《高等数学（工）-1》期末考试试卷 A 卷

考试说明：考试日期：2024 年 12 月 31 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：_____ 学号：_____ 班号：_____

注：本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷面成绩汇总表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
满分	30	60	10	
得分				

得分

一、填空题：（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \underline{\hspace{10em}}$.

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定，则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{10em}}$.

3. 曲线 $y = x \left(1 + \arcsin \frac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{10em}}$.

4. 曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点个数为 $\underline{\hspace{10em}}$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^3 \right] = \underline{\hspace{10em}}$.

6. 抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 上点 $\underline{\hspace{10em}}$ 处的曲率最大.

7. 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\sin x$ ，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x) dx = \underline{\hspace{10em}}$.

8. 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ 是收敛还是发散_____.

9. $\int_{-1}^1 (\sin^3 x + \sqrt{1-x^2}) dx =$ _____.

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其导函数在 $x=0$ 处连续, 则正整数 n 的取值范围

是_____.



二、计算题: (本题共 6 小题, 每小题 10 分, 共 60 分)

得分	

11. 设 $a > 1$, $f(t) = a^t - at$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$, 问 a 为何值时,
 $t(a)$ 最小? 并求出最小值.



得分

12. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

得分

13. 已知 $f'(\sin x) = \cos x + x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, 求 $f(x)$.

得分

14. 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx.$

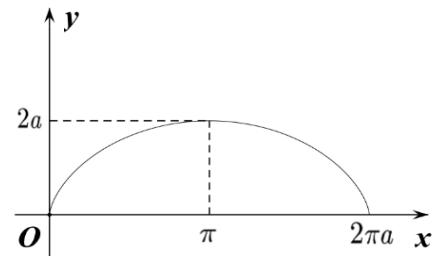
得分

15. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x \geq 1 \end{cases}$

(1) 求函数 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的表达式; (2) 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$

得分

16. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 相应于 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的一拱的弧长 s ，并计算它与直线 $y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 V 。



三、证明题：（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得分

17. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数且 $f'(a)=f'(b)=0$ ，则存在

$$\xi \in (a,b), \text{ 使 } |f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b)-f(a)|.$$



得分

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导， $F(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt$ ，且 $F(1) = f(1)$. 证明：

在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ ，使 $f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

