北京工业大学 2025-2026 学年《数学分析Ⅰ》期末测试

1. 设 $x_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 用 $\varepsilon - N$ 语言证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

2. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})^{\frac{1}{\ln x}}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^2-\cos x}{\sin^2 x}$.

3. 设 $a > 1$，数列 $x_n = \dfrac{\sin 1}{a} + \dfrac{\sin 2}{a^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{a^n}$. 证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛.

4. 证明：若数列 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 单调增加且有界，则极限 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有最大值或最小值.

6. 证明函数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(c,1)$ $(0 < c < 1)$ 上一致连续，在 $(0,1)$ 上不一致连续.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)\cdot f(b) > 0$，$f(a)\cdot f(\dfrac{a+b}{2}) < 0$. 证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f'(\xi) = f(\xi)$.

8. 设 $\alpha > 1$，定义函数 $f(x) = \begin{cases} \alpha x + x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$，并说明是否存在 $x = 0$ 的一个邻域，使 $f(x)$ 在该邻域上单调.

9. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有连续三阶导数，且 $f(-1) = 0$，$f(1) = 2$，$f'(0) = 0$. 证明：在 $(-1,1)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f'''(\xi) = 6$.

10. 用有限覆盖定理证明：$f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，且仅有第一类间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.