北京XX大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学(工)—1》期中考试试卷

学号：____________ 姓名：____________ 成绩：_________

一、填空题:（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}=$____ 2 ______________

2. 曲线$\begin{cases}x=t^2-1\\ y=t-t^3\end{cases}$在$t=1$处的切线方程为__ $y=-x$ _______

3. 设$y=f(x)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$确定，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$_____ $\dfrac{x-y}{3y^2-2y+x}$ __

4. 设函数$y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$，则$\mathrm{d}y\big|_{x=1}=$___ $\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$ ________________

5. 曲线$y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$的水平渐近线为_________ $y=1$ _____________

6. 曲线$y=x\sin x+2\cos x\quad(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2})$的拐点为______ $(\pi,-2)$ _____

7. 若 $f(u)$ 可导，则 $y=f(\sin\sqrt{x})$ 的导数为______ $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\cdot f'(\sin\sqrt{x})$ ______

8. 函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$在区间$[0,1]$上的最大值为_____ $\dfrac{\pi}{4}$ _____________

9. 设 $f(x)=x^2\sin x$，则 $f^{(2021)}(0)=$________ -2020×2021 __________

10. 抛物线$y=\sqrt{8x}$上曲率等于$\dfrac{16}{125}$的点为_____ $(\dfrac{9}{8},3)$ ______________

二、计算题:（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11．设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{1-\cos x^2}{x}, & x<0, \end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性，如果有间断点请指出其类型。

解：$x>0$ 时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$，

$x<0$ 时，$f'(x)=\dfrac{2x^2\sin x^2+\cos x^2-1}{x^2}$，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1-\cos x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^2}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\lim_{x\to0^-}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

故 $f'(0)=0$.

所以 $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{2x^2\sin x^2+\cos x^2-1}{x^2}, & x<0, \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})$ 不存在.

故 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 连续. $x=0$ 是第二类间断点.

12. 设 $y=\dfrac{x}{x^2+3x+2}$，求 y'， y'' 及 $y^{(n)}$.

解： $y=\dfrac{x}{x^2+3x+2}=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$，

$y'=-2(x+2)^{-2}+(x+1)^{-2}$，

$y''=-2\cdot(-2)(x+2)^{-3}-2(x+1)^{-3}$，

$y^{(3)}=-2(-2)(-3)(x+2)^{-4}+2\cdot 3(x+1)^{-4}$

……

$y^{(n)}=(-1)^n\cdot 2\cdot n!(x+2)^{-n-1}-(-1)^n n!(x+1)^{-n-1}$.

13. 已知点 $(1,3)$ 为曲线 $f(x)=ax^3+bx^2$ 的拐点.

(1) 求常数 a,b；

(2) 对确定常数 a,b 的曲线，求它的极值点和极值.

解：（1） $f'(x)=3ax^2+2bx$， $f''(x)=6ax+2b$，

由点 $(1,3)$ 为曲线 $f(x)=ax^3+bx^2$ 的拐点有

$f''(1)=6a+2b=0$， 且 $a+b=3$，

解得 $a=-\dfrac{3}{2}$， $b=\dfrac{9}{2}$.

(2) 曲线 $f(x)=-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{9}{2}x^2$， $f'(x)=-\dfrac{9}{2}x^2+9x$，

驻点为 $x=0,x=2$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	单减	极小值	单增	极大值	单减

所以在 $x=0$ 取得极小值，极小值为 $f(0)=0$，

在 $x=2$ 取得极大值，极大值为 $f(2)=6$.

14. 计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-\left(\sin x\right)\cdot\sin(\sin x)}{x^4}$.

解：原式=$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\left(\sin x-\sin(\sin x)\right)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

令$\sin x=t$，则有

原式 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\cos t}{3t^2}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{2}t^2}{3t^2}$

$=\dfrac{1}{6}$

15. 设$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t,\end{cases}$ 求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\cos t$，

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{t\cos t}{\cos t}=t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{1}{\cos t}$，

$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

16. 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0, f''(0)=4$，计算 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解： 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0,$ 得到 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,$

由 $f(x)$ 可导得到 $f(x)$ 连续，故 $f(0)=0$， $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

$$则\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}},$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\dfrac{1}{2}f''(0)=2$,

故 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^2.$

三、证明题:（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

17. 当 $0<x<2$ 时, 证明: $4x\ln x\ge x^2+2x-3$.

证明：设 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$，

则 $f'(x)=4\ln x+4-2x-2$，且 $f''(x)=\dfrac{4-2x}{x}>0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，

由 $f'(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$，当 $x\in(1,2)$ 时， $f'(x)>0$，

所以 $f(1)=0$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上的最小值，得证.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，且 $f(1)=f(0)$，证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得

$f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

证明：设 $F(x)=(1-x)^2f'(x)$，显然 $F(1)=0$，

又因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，且 $f(1)=f(0)$，由罗尔定理

存在一点$\eta \in (0,1)$使得$f'(\eta)=0$，故$F(\eta)=0$，

$F(x)$在$[\eta,1]$上满足罗尔定理的条件，存在一点$\xi \in (\eta,1) \subset (0,1)$使得$F'(\xi)=0$,

即$-2(1-\xi)f'(\xi)+(1-\xi)^2 f''(\xi)=0$,得证.