

北京XX大学 2022—2023 学年第一学期
《高等数学(工)一1》期中考试试卷 (答案)

考试说明: 考试日期: 2022 年 10 月 28 日, 考试时间: 95 分钟, 考试方式: 闭卷

承诺:

承诺人: _____ 学号: _____ 班号: _____

.....
注: 本试卷共三大题, 共6页, 满分 100 分, 考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷面成绩汇总表(阅卷教师填写)

题号	一	二	三	总成绩
满 分	30	60	10	
得 分				

得分

一、填空题: (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan 3x)^{\frac{1}{\sin(\sin x)}} = \underline{\hspace{2cm}} e^3 \underline{\hspace{2cm}}$

2. 曲线 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 上斜率为 1 的切线方程为 $y - 2 = x - (\pi - 2)$

3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x^y = xy$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{y(y-1)}{x(1-y \ln x)} \underline{\hspace{2cm}}$

4. 函数 $y = 1 - x^2 \sqrt{3-x^2}$ 在 $[0, \sqrt{3}]$ 上的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}} -1 \underline{\hspace{2cm}}$

5. 曲线 $y = \frac{x|x+1|}{x^2-1} + (x-1) \sin \frac{1}{x^2+1}$ 的水平渐近线和垂直渐近线共 $\underline{\hspace{2cm}} 3 \underline{\hspace{2cm}}$ 条。

6. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+\pi) - f(x)] = \underline{\hspace{2cm}} \pi A \underline{\hspace{2cm}}$

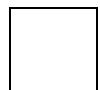
7. 已知 $\lim_{h \rightarrow \infty} h \left[f \left(\sin \frac{2}{h} \right) - f(0) \right] = \frac{1}{2}$, 则 $df(x)|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}} \frac{1}{4} dx \underline{\hspace{2cm}}$

8. 设 $y = \frac{x^2 + 2x}{e^x}$, 则 $y^{(2022)}(0) = \underline{\hspace{1cm}} 2019 \times 2022 \underline{\hspace{1cm}}$

9. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时函数 $\frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{1 - \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}$ 与 $x^\alpha(1 + \sqrt{x})$ 为同阶无穷小, 则 $\alpha = \underline{\hspace{1cm}} \frac{11}{4} \underline{\hspace{1cm}}$

10. 设 $y = f(\arccot x + \sec x)e^{f(x)}$, 其中函数 $f(x)$ 可微, 则

$$\frac{dy}{dx} = f'(\arccot x + \sec x)(\sec x \tan x - \frac{1}{1+x^2})e^{f(x)} + f(\arccot x + \sec x)e^{f(x)}f'(x)$$



二、计算题: (本大题共 6 小题, 每小题 10 分, 共 60 分)

得 分	

11. 设 $y = \ln \frac{2x+1}{2-3x+x^2} (x > 2)$, 求 y', y'', y''' 以及 $y^{(n)}(x)$.

解 $y = \ln \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} = \ln(2x+1) - \ln(x-1) - \ln(x-2)$

$$= \ln 2 + \ln(x + \frac{1}{2}) - \ln(x-1) - \ln(x-2) \quad \text{----- 2'}$$

$$y' = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = (x + \frac{1}{2})^{-1} - (x-1)^{-1} - (x-2)^{-1} \quad \text{----- 4'}$$

$$y'' = (-1)(x + \frac{1}{2})^{-2} - (-1)(x-1)^{-2} - (-1)(x-2)^{-2} \quad \text{----- 6'}$$

$$y''' = (-1)(-2)(x + \frac{1}{2})^{-3} - (-1)(-2)(x-1)^{-3} - (-1)(-2)(x-2)^{-3} \quad \text{----- 8'}$$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (-1)(-2) \cdots (-n+1)(x + \frac{1}{2})^{-n} - (-1)(-2) \cdots (-n+1)(x-1)^{-n} - (-1)(-2) \cdots (-n+1)(x-2)^{-n} \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)![(x + \frac{1}{2})^{-n} - (x-1)^{-n} - (x-2)^{-n}] \end{aligned} \quad \text{----- 10'}$$



得分

12. 求函数 $y = (x-6)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的单调区间、极值、凹凸区间和拐点。

$$\text{解 } y = (x-1-5)\sqrt[3]{(x-1)^2}, y' = \frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{5(x-3)}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}, \quad \text{----1'}$$

$$y'' = \frac{5}{3} \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}} - (x-3) \cdot \frac{1}{3} \cdot (x-1)^{-\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{10x}{9(x-1)^{\frac{4}{3}}}. \quad \text{----2'}$$

函数在 $x=1$ 处不可导。令一阶导数 $y'=0$ ，得驻点 $x=3$ 。 ----3' 在 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ 上， $y' > 0$ ，在 $(1, 3)$ 上， $y' < 0$ ，所以 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ 是单增区间， $(1, 3)$ 是单减区间， ----5' 函数在 $x=1$ 处取得极大值 $y(1)=0$ ， $x=3$ 处取得极小值 $y(3)=-3\sqrt[3]{4}$ 。 ----7' 在 $(-\infty, 0)$ 上， $y'' < 0$ ，在 $(0, +\infty)$ 上， $y'' > 0$ ，所以 $(-\infty, 0)$ 是凸区间， $(0, +\infty)$ 是凹区间。 ----9' $(0, -6)$ 是拐点。 ----10'

得分

13. 求函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}{e^{\frac{1}{x-1}} + 1} + \frac{\sin(x+1)}{x(x+1)} \cos \frac{1}{\pi-x}$ 的间断点，并判断其类型。解 函数定义域是 $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \pi) \cup (\pi, +\infty)$ ， $x=-1, x=0, x=1, x=\pi$ 是间断点。 ----2'

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}} - 1}{e^{-\frac{1}{2}} + 1} - \cos \frac{1}{\pi+1}, \quad x=-1 \text{ 是第一类间断点中的可去间断点。} \quad \text{----4'}$$

 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ ， $x=0$ 是第二类间断点中的无穷间断点。 ----6'

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 - \frac{\sin 2}{2} \cos \frac{1}{\pi-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - \frac{\sin 2}{2} \cos \frac{1}{\pi-1},$$

 $x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点。 ----8' $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ 不存在， $x=\pi$ 是第二类间断点中的振荡型间断点。 ----10'

得分

14. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上二阶可导, $g(x) = \begin{cases} ax^2 + b \sin x + c, & x > 0 \\ f(x), & x \leq 0 \end{cases}$ 在

 $x=0$ 处二阶可导, 求常数 a, b, c .解 $g(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 可推出 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 一阶可导。-----1'

(1) 因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$,

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} ax^2 + b \sin x + c = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\Rightarrow c = f(0)$. -----4'

(2) 因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处一阶可导, 所以 $g'(0) = g'_-(0) = g'_+(0)$,

由 $g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 + b \sin x + f(0) - f(0)}{x} = b$, $g'_-(0) = f'_-(0)$, $\Rightarrow b = f'_-(0)$. ---7'

(3) 当 $x > 0$ 时, $g'(x) = 2ax + b \cos x$,

因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 所以 $g''_-(0) = g''_+(0)$,

由 $g''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2ax + f'_-(0)(\cos x - 1)}{x} = 2a$, $g''_-(0) = f''_-(0)$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2} f''_-(0)$. -----10'



得分

15. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{\tan \ln(1+3x^2)(e^{-x^2} + 1) \arcsin(x+x^2)}$.

解 原式 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{3x^3}$ -----2'

$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x + e^x \cos x - 1 - 2x}{9x^2}$ -----4'

$= \frac{1}{18} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - 1}{x}$ -----6'

$= \frac{1}{18} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - e^x \sin x}{1}$ -----8'

$= \frac{1}{18}$. -----10'



得分

16. 设参数方程 $\begin{cases} x = te^{2t} \\ e^{2t} - e^{y^2} = 1 - e \end{cases}$ 确定了函数 $y = y(x)$, 求

$$\left. \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{t=0}.$$

解 $\frac{dx}{dt} = (2t+1)e^{2t}$ -----1,

方程 $e^{2t} - e^{y^2} = 1 - e$ 两端同时对 t 求导, 得

$$2e^{2t} - e^{y^2} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{-----2,}$$

解出 $\frac{dy}{dt} = \frac{e^{2t}}{ye^{y^2}}$ -----3,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{(2t+1)ye^{y^2}} \quad \text{-----4,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) &= -\frac{[2ye^{y^2} + (2t+1)\frac{dy}{dt}e^{y^2} + (2t+1)ye^{y^2} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dt}]}{(2t+1)^2 y^2 e^{2y^2}} \\ &= -\frac{2y^2 e^{y^2} + (2t+1)e^{2t} + 2y^2(2t+1)e^{2t}}{(2t+1)^2 y^3 e^{2y^2}} \quad \text{-----5,} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{2y^2 e^{y^2} + (2t+1)e^{2t} + 2y^2(2t+1)e^{2t}}{(2t+1)^3 y^3 e^{2y^2} e^{2t}} \quad \text{-----6,}$$

$t=0$ 时代入 $e^{2t} - e^{y^2} = 1 - e$, 得 $y = \pm 1$. -----8,

$$y = -1 \text{ 时, } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{2e+3}{e^2} \quad \text{-----9,}$$

$$y = +1 \text{ 时, } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = -\frac{2e+3}{e^2} \quad \text{-----10,}$$



三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得分

17. 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 证明: $\sin x + \tan x > 2x$.

证 设 $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, -----1'

$$f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2, \quad \text{-----2'}$$

$$f''(x) = -\sin x + 2\sec^2 x \tan x = \sin x \left(\frac{2 - \cos^3 x}{\cos^3 x}\right) > 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \quad \text{-----3'}$$

故 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x)$ 单调增加, $f'(x) > f'(0) = 0$, -----4'

故 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 单调增加, $f(x) > f(0) = 0$,

所以 $\sin x + \tan x > 2x$. -----5'



得分

18. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ ($a > 0$) 上可微, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{a^n f(b) - b^n f(a)}{a^n - b^n} = f(\xi) - \frac{1}{n} \xi f'(\xi) \quad (n \geq 1).$$

证 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}, h(x) = \frac{1}{x^n}$, $x \in [a, b]$,

对 $g(x), h(x)$ 在 $[a, b]$ 上应用柯西中值定理, 得: -----3'

至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b^n} - \frac{f(a)}{a^n}}{\frac{1}{b^n} - \frac{1}{a^n}} = \frac{\left[\frac{f(x)}{x^n}\right]'}{\left[\frac{1}{x^n}\right]'} \Big|_{x=\xi} = \frac{f'(\xi) \xi^{-n} - n \xi^{-(n+1)} f(\xi)}{-n \xi^{-(n+1)}} = f(\xi) - \frac{1}{n} \xi f'(\xi)$$

即 $\frac{a^n f(b) - b^n f(a)}{a^n - b^n} = f(\xi) - \frac{1}{n} \xi f'(\xi).$ -----5'

