北京XX大学 2024—2025 学年第一学期

《高等数学(工)—1》期中考试试卷

考试说明：考试日期:2024 年 11 月 13 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺:

承诺人：__________　　学号：__________　　班号：__________

注： 本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用黑色或者蓝色中性笔或者钢笔。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	总成绩
满 分	30	60	10	
得 分				

得 分

一、填空题:（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\sin x + 3x^4} =$ ____________________.

2. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0,\ f'(0)=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(e^x-1\right)}{2x} =$ __________.

3. 函数 $y=\dfrac{x^2}{2^x}$ 的单调增加区间是____________________.

4. 若 $x\to 0$ 时 $(1-ax^3)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 $x^2\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$____________.

5. 将一个边长为 a 的正方形铁片的四角截去四个边长为 x 的小正方形，然后做成一个无盖的方盒，当 $x=$________时，方盒的容积最大.

6. 若 $f(x)$ 可导，函数 $y=f^2(e^{\sin x})$，则 $\mathrm{d}y=$____________________.

7.设$\begin{cases} x=-t^2+2t \\ y=-t^3+3t \end{cases}$确定了函数$y=y(x)$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ______________________________.

8.若 $f^{(i)}(x_0)=g^{(i)}(x_0)$ $(i=0,1,\cdots,n)$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n}=$________________________.

9.曲线 $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$ 的水平渐近线为____.

10.设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 恒有 $f^{(2024)}(x)\neq 0$, 则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 至多有______个根.

二、计算题:（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11.设 $y=\dfrac{1}{a^2-b^2x^2}(a\neq 0)$，求 y'， y'' 及 $y^{(n)}$.

得 分

12.计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^3\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)}$.

得 分

13.求曲线 $y=x^2\mathrm{e}^{-x}$ 的凹凸区间和拐点.

得 分

14.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{-y}+xy-\mathrm{e}^{x}=0$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

得 分

15.求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}\sin x}{x\ln|2-x|}$ 的间断点，并判断间断点的类型.

得 分

16.设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，问常数$\alpha$满足什么条件时，

(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微；(2) $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数连续.

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17.证明：$(1+\frac{1}{x})^{x}<\mathrm{e}<(1+\frac{1}{x})^{x+1}$，$(x>0)$.

得 分

18.已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f''(x)<0\ (\forall x\in(0,1))$，若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值为 $M>0$，证明对任意的自然数 n，存在唯一的 $\xi_n\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_n)=\frac{M}{n}$.