

得分

一、填空题（每空 2 分 共计 30 分）

1、已知向量  $\alpha = \{0, -2, 4\}$ ,  $\beta = \{1, 2, 1\}$ , 则  $\frac{1}{2}\alpha - \beta =$  \_\_\_\_\_,

$\alpha \cdot \beta =$  \_\_\_\_\_,  $\alpha$  与  $\beta$  的夹角为 \_\_\_\_\_,  $\alpha \times \beta =$  \_\_\_\_\_; 若

还有  $\gamma = \{1, 0, x\}$ , 且  $\alpha, \beta, \gamma$  线性相关, 则  $x =$  \_\_\_\_\_, 此时  $(\alpha, \beta, \gamma) =$  \_\_\_\_\_;

2、平面  $x - y + 4z + 3 = 0$  的法向量为 \_\_\_\_\_, 以  $(0, 0, 0)$  为心且与此平面相切的球面的直径为 \_\_\_\_\_;

3、直线  $\begin{cases} x + 2y - z = 15 \\ x - 2z = 2021 \end{cases}$  的方向向量为 \_\_\_\_\_, 过点  $(1, 2, 0)$  且与此线平行的直线的标准方程为 \_\_\_\_\_;

4、曲线  $\begin{cases} y^2 - 3x^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转得到的旋转曲面方程为 \_\_\_\_\_, 这是一个 \_\_\_\_\_ (填曲面类型);

5、曲线  $\begin{cases} z = xy \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  在  $xoy$  坐标面上的投影曲线方程为 \_\_\_\_\_;

6、二次曲线  $x^2 + 2xy + y^2 + 2020x - 2021y = 0$  有 \_\_\_\_\_ 个渐近方向, 有 \_\_\_\_\_ 个中心。

得分

二、平面上以  $O$  为心、 $R$  为半径的圆内有一定点  $P$ ,  $A, B$  为圆上两动点, 且  $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 。利用向量的运算证明: 满足  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$  的动点  $Q$

的轨迹是以  $O$  为心的圆周。 (10 分)

---

得 分

三、 已知直线  $l: \begin{cases} 2x+y-2z+3=0 \\ x-y-4z+12=0 \end{cases}$  (20 分)

- 1、求过点  $P(3,-1,4)$  且与  $l$  垂直的平面方程；
- 2、求过  $P$  且与  $l$  垂直相交的直线方程；
- 3、求点  $P$  关于直线  $l$  对称的点的坐标。

---

得 分

四、 已知柱面准线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ ，母线方向为 $\{1, 1, 1\}$ 。

求此柱面的方程。(10 分)

---

得 分

五、求顶点为原点，准线为  $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 1 \end{cases}$  的锥面方程。 (10 分)

得 分

六、给定两异面直线  $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{0}$  与  $l_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$ ,

1、求这两条直线的公垂线方程； 2、求这两线直线间的距离。(15 分)

---

得 分

七、证明：椭圆抛物面  $x^2 + y^2 = 2z$  上没有直母线。（5 分）

---