

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \underline{\hspace{10cm}}$ .

2. 若曲线  $y = \ln(2 + \frac{1}{x})$  的垂直渐近线为  $\underline{\hspace{10cm}}$ .

3. 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f'(0) = \underline{\hspace{10cm}}$ .

4. 已知  $\frac{\cos x}{x}$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $\int f(x) \cdot \frac{\cos x}{x} dx = \underline{\hspace{10cm}}$ .

5. 曲线  $y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$  上相应于  $0 \leq x \leq 1$  的一段弧长为  $\underline{\hspace{10cm}}$ .

6. 函数  $y = \int_0^{2x} \sqrt{1+t^2} dt$ , 则  $dy = \underline{\hspace{10cm}}$ .

7. 函数  $y = (x+2)e^x$  的拐点为  $\underline{\hspace{10cm}}$ .

8.  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \underline{\hspace{10cm}}$ .

9. 双曲线  $xy=1$  在点  $(1,1)$  处的曲率为  $\underline{\hspace{10cm}}$ .

10.  $\int_{-1}^1 \left( x + \sqrt{4-x^2} \right)^2 dx = \underline{\hspace{10cm}}$ .

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 设  $f(x) = \cos^2 2x$ , 求 (1)  $f'(x), f''(x), f^{(2024)}(0)$ ;

(2)  $f(x)$  带皮亚诺型余项的 2024 阶麦克劳林公式.

12. 设  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = \cos t^2 \\ y = t^2 \cos t^2 - \sin t^2 \end{cases}$  确定, 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ .

13. 计算  $\int_0^1 \frac{1+x\sqrt{x}}{1+x} dx$ .

14. 求  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$  的单调区间与极值.

15. 设  $f(x) = \begin{cases} A \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 求函数  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  在  $(-\infty, +\infty)$  内的表达式;

(2) 若  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ , 试确定  $A$  的值.

16. 从原点  $(0,0)$  向抛物线  $y = x^2 + 1$  引两条切线, 记由抛物线与所引两切线所围成的图形为  $D$ , (1) 求图形  $D$  的面积  $A$ ; (2) 求图形  $D$  绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体的体积  $V$ .

三、证明题: (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

17. 已知  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内二阶可导, 且  $f''(x) < 0$ ,  $f(0) = 0$ , 证明当

$0 < x < b$  时, 恒有  $bf(x) > xf(b)$ .

18. 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0) = 0$ , 证明: 至少存在一点

$\xi \in (0,1)$ , 使得  $\xi f'(\xi) + 2024f(\xi) = f'(\xi)$ .