北京工业大学2019—2020学年第一学期

《高等数学(工)—1》期中考试试卷参考答案

一、填空题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1、曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 处的法线方程为 $\underline{y=x-\frac{\pi}{2}}$

2、设 $y=ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则 $y'=\underline{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

3、设 $y=y(x)$ 是由 $x=y^y$ 确定的隐函数，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underline{\frac{1}{x(1+ln\,y)}}$

4、设 $y=f(tan\,x)$，其中函数 f 可微，则 $\mathrm{d}y=\underline{f'(tan\,x)\,sec^2\,x\mathrm{d}x}$

5、函数 $f(x)=x-3\sqrt[3]{x^2}$ 的单调递增区间为 $\underline{(-\infty,0],[8,+\infty)}$

6、曲线 $y=\frac{\sin(2x)}{(x-\frac{\pi}{2})x(x-1)}$ 的渐近线的条数为 $\underline{2}$

7、曲线 $y=\frac{x}{(x+1)^2}$ 的拐点为 $\underline{(2,\frac{2}{9})}$

8、设当 $x\to0^+$ 时，函数 $\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}$ 为 x 的 k 阶无穷小，则常数 $k=\underline{\frac{1}{4}}$

二、计算题（本大题共5小题，每小题10分，共50分）

9、设由参数方程 $\begin{cases}x=t+\sin t\\ y=t+\cos t\end{cases}$ 确定的函数 $y=y(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-sin\,t}{1+\cos t}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\left(\frac{1-\sin t}{1+\cos t}\right)'_t}{1+\cos t}=\frac{\sin t-\cos t-1}{(1+\cos t)^3}$$

10、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}+1}, x<0 \\ ae^x+b, x\ge 0\end{cases}$ ，问常数 a ，b 为何值时，函数 $f(x)$ 可导？

解 要使 $f(x)$ 可导，只需 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导即可.

由可导必连续，有 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$，即

$$a+b=f(0)=0$$

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=1$

所以 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ae^x+b}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ae^x-a}{x}=a$

再由 $f'_-(0)=f'_+(0)$，可得 $a=1$， $b=-1$

11、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-sin\,x}{1-\sqrt{1+x^2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{(-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{-x}=-\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)=-1$$

12、设 $y=\ln(2+3x-2x^2)$，求 y', y'' 及 $y^{(n)}$ $(n>2)$.

解 因 $y=\ln(2x+1)(2-x)$，$(-\dfrac{1}{2}<x<2)$

$$=ln(2x+1)+ln(2-x)$$

$$y'=\frac{2}{2x+1}+\frac{1}{x-2}=2(2x+1)^{-1}+(x-2)^{-1}$$

$$y''=(-1)2^2(2x+1)^{-2}+(-1)(x-2)^{-2}$$

$$y'''=(-1)(-2)2^3(2x+1)^{-3}+(-1)(-2)(x-2)^{-3}，\quad \cdots\cdots,$$

$$y^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-(n-1))2^n(2x+1)^{-n}+(-1)(-2)\cdots(-(n-1))(x-2)^{-n}$$

$$=(-1)^{n-1}2^n\frac{(n-1)!}{(2x+1)^n}+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x-2)^n}$$

13、在半径为 R 的球内作球内接圆锥体，问圆锥体的底半径和高为何值时，其体积最大。

解 设圆锥体的底半径为 r 、高为 x ，则 $(x-R)^2+r^2=R^2$

体积 $V=\frac{\pi}{3}r^2x=\frac{\pi}{3}x(2xR-x^2)=V(x)$ ，$x\in(0,2R)$. 易见 $V(x)$ 是闭区间 $[0,2R]$ 上的连续函数，由最值定理知 $V(x)$ 在闭区间 $[0,2R]$ 上存在最大值.

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\frac{\pi}{3}(4xR-3x^2)=0$ ，可得驻点 $x_0=\frac{4}{3}R$ ，易见 $V(0)=V(2R)=0$ ，而 $V(x_0)>0$ ，故 $V(x)$ 在闭区间 $[0,2R]$ 上的最大值为 $V(x_0)$ ，$V(x)$ 在开区间 $(0,2R)$ 内的最大值当然为也为 $V(x_0)$.

故当底半径 $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$ 、高 $x=\frac{4}{3}R$ 时，圆锥体的体积最大.

三、证明题（本大题共 3 小题，14 题 4 分，15 题 3 分，16 题 3 分共 10 分）

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $f(0)=f(1)$ ，证明存在 $\xi\in[0,1]$ 使 $f(\xi+\frac{1}{3})=f(\xi)$.

证法一（较繁些的证法）

考虑函数 $F(x)=f(x+\frac{1}{3})-f(x)$ ，则函数 $F(x)$ 在区间 $[0,\frac{2}{3}]$ 上连续.

易见 $F(0)+F(\frac{1}{3})+F(\frac{2}{3})=0$ ，分两种情形讨论

（1）若 $F(0)$，$F(\frac{1}{3})$，$F(\frac{2}{3})$ 中至少一个为 0.不妨设 $F(0)=0$ (其他情形类似可证)

此时可取 $\xi=0\in[0,1]$ ，易见 $f(\xi+\frac{1}{3})=f(\xi)$ 成立.

（2）若 $F(0)$，$F(\frac{1}{3})$，$F(\frac{2}{3})$ 三个数都不为 0,则 $F(0)$，$F(\frac{1}{3})$，$F(\frac{2}{3})$ 中有两数异号

（$F(0)$，$F(\frac{1}{3})$，$F(\frac{2}{3})$ 三个数都同号会与 $F(0)+F(\frac{1}{3})+F(\frac{2}{3})=0$ 相矛盾）.

不妨设 $F(0)F(\frac{1}{3})<0$（其他情形类似可证），

则函数 $F(x)$ 在 $[0,\frac{1}{3}]$ 满足零点定理的条件，故 $\xi\in[0,\frac{1}{3}]\subset[0,1]$ ，使 $F(\xi)=0$ ，

故有 $f(\xi+\frac{1}{3})=f(\xi)$.

证法二（较简洁的证法）

考虑函数$F(x)=f(x+\frac{1}{3})-f(x)$，$x\in[0,\frac{2}{3}]$，则函数$F(x)$区间$[0,\frac{2}{3}]$上连续.

令$m=\min\{F(0),F(\frac{1}{3}),F(\frac{2}{3})\}$, $M=\max\{F(0),F(\frac{1}{3}),F(\frac{2}{3})\}$.

易见$F(0)+F(\frac{1}{3})+F(\frac{2}{3})=0$且$m\le\frac{1}{3}(F(0)+F(\frac{1}{3})+F(\frac{2}{3}))\le \mathrm{M}$，由介值定理可知存在$\xi\in[0,\frac{2}{3}]\subset[0,1]$，使$F(\xi)=0$，故有$f(\xi+\frac{1}{3})=f(\xi)$.

15、设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(1)=0$.

证明存在$\xi\in(0,1)$，使得$(2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

证 令$F(x)=xe^{2x}f(x)$，则$F(0)=F(1)=0$ ，

则$F(x)$在$[0,1]$上满足罗尔定理条件，故存在$\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$

又$F'(x)=e^{2x}[(2x+1)f(x)+xf'(x)]$，则有$(2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

16、证明不等式$e^3>3^e$.

证 考虑函数$f(x)=x-e\ln x$，则$f(x)$在区间$x\in[e,+\infty)$上连续

$f'(x)=\frac{x-e}{x}>0$，$x\in(e,+\infty)$，所以$f(x)$在$[e,+\infty)$上单调递增. 因$3>e$，故$f(3)>f(e)=0$，即$3-e\ln 3>0$，故有$e^3>3^e$.