

一、填空题:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \\ a + x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 曲线 $y = \frac{1}{x+1} e^{-x^2}$ 的铅直渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $f'(1) = -1$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设 $y = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 过对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 的点 P 的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $y = f(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - \sin x + 6y = 0$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. 曲线 $y = \ln(1+x^2)$ 在区间 $\underline{\hspace{2cm}}$ 上是凹的.

9. $\int_{-1}^1 \frac{1+x^3}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、计算题:

11. 设 $f(x) = \frac{3x+1}{e^x}$, 求 (1) $f'(x), f''(x)$; (2) $f(x)$ 带皮亚诺余项的3阶麦克劳林公式; (3) $f^{(2021)}(0).$

12. 计算不定积分 $\int x \arctan \sqrt{x} dx.$

13. 计算 $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} dx.$

14. 求函数 $f(x) = x^2 \ln x$ 的极值.

15. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq e \\ \frac{A}{x(2 \ln x + \ln^2 x)}, & x > e \end{cases}$

(1) 求函数 $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式;

(2) 设 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = A$, 试确定 A 的值.

16. 记曲线段 $x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0, 0 \leq x \leq 1)$ 与直线 $x=0, x=1$ 及 x 轴所围的图形为 D ,

(1) 求平面图形 D 的面积;

(2) 求图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

三、证明题:

17. 当 $x > 4$ 时, 证明: $2^x > x^2$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = -f(1) = 1$,

证明: 至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\xi f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$.