

一、单项选择题：（在每小题给出的四个选项中，只有一项

符合题目要求，请将正确选项的字母写在括号内. 本大题共 30

小题，每小题 3 分，共 90 分.）

1. 若  $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续，则  $a =$  ( )

- A. 1                      B.  $\sqrt{e}$                       C.  $e^2$                       D. 2

2.  $x=0$  是  $f(x) = x \cdot \cos \frac{1}{2x}$  的哪一类间断点 ( )

- A. 跳跃间断点              B. 无穷间断点              C. 可去间断点              D. 不是间断点

3. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{2x} = 1$ ，则  $f'(0) =$  ( )

- A.  $\frac{3}{2}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C. 6                      D.  $\frac{1}{6}$

4. 设函数  $y = f(x)$  由方程  $xy + 2\ln x = y^4$  所确定，则曲线  $y = f(x)$  在点 (1,1) 处的切线方程为 ( )

- A.  $y = x$                       B.  $y = -x$                       C.  $x + y = 2$                       D.  $x - y = 2$

5. 设  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$  确定了函数  $y = y(x)$ ，则  $\left. \frac{d^2x}{dy^2} \right|_{t=1} =$  ( )

- A. 1                      B.  $-\frac{1}{2}$                       C. 2                      D. -4

6.  $y = x^2 - 4x + 10$  在点 (2,6) 处的曲率为 ( )

- A. 0                      B.  $\frac{1}{2}$                       C. 2                      D.  $\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

7. 当  $x > 0$  时，曲线  $y = x \sin \frac{1}{x}$  ( )

- A. 有且仅有水平渐近线                      B. 有且仅有垂直渐近线

C. 既有水平渐近线又有垂直渐近线      D. 既无水平渐近线也无垂直渐近线

8. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x^3, & x > 1 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  在  $x=1$  处 ( )

- A. 左、右导数都存在但不相等      B. 左导数存在但右导数不存在  
C. 左导数不存在但右导数存在      D. 左、右导数都不存在

9. 设函数  $f(x)$  的导函数为  $\sin x$ , 则  $f(x)$  的一个原函数为 ( )

- A.  $1 + \sin x$       B.  $1 - \sin x$       C.  $1 + \cos x$       D.  $1 - \cos x$

10. 设  $y = \int_0^{2x} \sqrt{1+t^2} dt$ , 则  $y' =$  ( )

- A.  $2\sqrt{1+2x}$       B.  $\sqrt{1+2x}$       C.  $\sqrt{1+4x^2}$       D.  $2\sqrt{1+4x^2}$

11. 关于方程  $x^5 + 2x^3 + 3x + 4 = 0$ , 下列说法正确的是 ( )

- A. 无实根      B. 有唯一实根      C. 有三个不同的实根      D. 有五个不同的实根

12. 函数  $y = x^{1+x}$ , 则  $dy|_{x=2} =$  ( )

- A.  $12dx$       B.  $8\ln 2 dx$       C.  $(8\ln 2 + 12)dx$       D.  $8dx$

13. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 - \cos x)^2$  是  $\sin^2 x$  的 ( )

- A. 高阶无穷小      B. 同阶无穷小, 但不等价      C. 低阶无穷小      D. 等价无穷小

14.  $f(x) = \frac{1}{1+2x}$  的  $n$  阶麦克劳林多项式为  $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ , 则

$a_n =$  ( )

- A.  $(-1)^n 2^n \cdot n!$       B.  $(-1)^n 2^n$       C.  $\frac{(-1)^n}{2^n}$       D.  $\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

15. 设  $f(x) = e^x(x-1)^2$ , 则关于  $f(x)$  的极值, 下面说法正确的是 ( )

- A.  $x = -1$  不是极值点,  $x = 1$  是极值点

- B.  $x=-1$  是极大值点,  $x=1$  是极小值点  
 C.  $x=-1$  是极小值点,  $x=1$  是极大值点  
 D.  $x=-1$ ,  $x=1$  都不是极值点

16. 设  $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$ , 则  $y^{(2022)}(x) =$  ( )

- A.  $\frac{2022!}{3} \left[ \frac{1}{(x-4)^{2023}} - \frac{1}{(x-1)^{2023}} \right]$       B.  $\frac{2022!}{3} \left[ \frac{1}{(x-4)^{2022}} - \frac{1}{(x-1)^{2022}} \right]$   
 C.  $\frac{2022!}{3} \left[ \frac{1}{(x-1)^{2023}} - \frac{1}{(x-4)^{2023}} \right]$       D.  $\frac{2022!}{3} \left[ \frac{1}{(x-1)^{2022}} - \frac{1}{(x-4)^{2022}} \right]$

17. 曲线  $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$  的拐点坐标为 ( )

- A. (0,0)      B.  $(2, -3\sqrt[3]{4})$       C. 无拐点      D.  $(-1, -6)$

18. 设  $y = f(\sqrt{x})$ , 其中  $f(x)$  具有连续的一阶导数, 则  $y' =$  ( )

- A.  $\frac{(f(\sqrt{x}))'}{2\sqrt{x}}$       B.  $\frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$       C.  $\frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$       D.  $f'(\sqrt{x})$

19.  $\int_{-2}^2 \frac{|x|+x}{2+x^2} dx =$  ( )

- A.  $\ln 3$       B.  $2\ln 3$       C.  $\ln 6$       D. 0

20.  $\int x \cos^2 x dx =$  ( )

- A.  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$       B.  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$   
 C.  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$       D.  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$

21.  $\int_1^5 \frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}} dx =$  ( )

- A.  $\frac{7}{3}$       B.  $\frac{19}{3}$       C.  $\frac{44}{3}$       D.  $\frac{80}{3}$

22.  $\int_{-5}^5 4\sqrt{25-x^2} dx =$  ( )

- A.  $\frac{25\pi}{2}$       B.  $25\pi$       C.  $50\pi$       D.  $100\pi$

23. 由  $y = \ln x$ ,  $y = \ln 2$ ,  $y = \ln 4$  和  $y$  轴所围成的图形的面积为 ( )

- A. 2                      B. 1                      C.  $\ln 2$                       D.  $\ln 4$

24. 曲线  $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$  上相应于  $1 \leq x \leq 3$  的弧长为 ( )

- A.  $\frac{1}{2} \int_1^3 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$                       B.  $\frac{1}{2} \int_1^3 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$   
C.  $\int_1^3 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$                       D.  $\int_1^3 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$

25. 广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} =$  ( )

- A. 发散                      B.  $\frac{\pi}{2}$                       C.  $\frac{3\pi}{4}$                       D.  $\frac{\pi}{4}$

26. 由  $y = x^2 - 2x$ ,  $x = 1$  和  $x$  轴所围图形绕  $y$  轴旋转所得立体的体积为( )

- A.  $\pi \int_{-1}^0 (1 + \sqrt{1-y})^2 dy - \pi$                       B.  $\pi \int_{-1}^0 (1 - \sqrt{1-y})^2 dy - \pi$   
C.  $\pi - \pi \int_{-1}^0 (1 - \sqrt{1+y})^2 dy$                       D.  $\pi - \pi \int_{-1}^0 (1 + \sqrt{1+y})^2 dy$

27.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx =$  ( )

- A.  $\frac{8}{15} \pi$                       B.  $\frac{4}{15} \pi$                       C.  $\frac{8}{15}$                       D.  $\frac{4}{15}$

28. 设函数  $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ , 记  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ , 则 ( )

- A.  $F(x) = \begin{cases} e-1, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$                       B.  $F(x) = \begin{cases} e-e^{-x}, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$   
C.  $F(x) = \begin{cases} e-e^{-x}, & x < 0 \\ e-1 + \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$                       D.  $F(x) = \begin{cases} e-1, & x < 0 \\ e-1 + \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

29.  $I_1 = \int_e^x \ln t dt$ ,  $I_2 = \int_e^x \ln t^2 dt$ , 其中  $x > 1$ , 则 ( )

- A. 仅当  $x > e$  时,  $I_1 < I_2$                       B. 对一切  $x \neq e$  有  $I_1 < I_2$

C. 仅当  $x < e$  时,  $I_1 < I_2$

D. 对一切  $x \neq e$  有  $I_1 \geq I_2$

30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2} =$  ( )

A.  $\int_0^1 e^x dx$

B.  $\int_0^1 x e^x dx$

C.  $\int_0^1 e^{x^2} dx$

D.  $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

二、证明题: (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

31. 证明:  $\frac{1}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$

32. 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0)=0$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ,

证明: 存在  $\xi \in (0,1)$ , 使得  $f'(\xi) + 2[f(\xi) - \xi] = 1$ .