1.旋转体绕x轴ory轴
2.填空5求导
3.17题三阶导
4.18题rolle中值&拉格朗日&零点存在定理结合

得分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x^2}=$______ 0 ______________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+1, & x>0 \\ a+x^2, & x\le 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $a=$__1______.

3. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}e^{-x^2}$ 的铅直渐近线为 _____ $x=0$ ___________.

4. 设 $f'(1)=-1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{h}=$________ 2 __________________.

5. 设 $y=\int_0^{x^2}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}y=$______ $\dfrac{2\sin x^2}{x}\mathrm{d}x$ __________.

6. 曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 过对应于 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 的点 P 的法线方程为_______ $y=\sqrt{3}x-1$ _______.

7. 设 $y=f(x)$ 由方程 $x^3+y^3-\sin x+6y=0$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$_______ $\dfrac{1}{6}$ __________.

8. 曲线 $y=\ln(1+x^2)$ 在区间________ $[-1,1]$ ____________上是凹的.

9. $\int_{-1}^{1}\dfrac{1+x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x=$_____ $\dfrac{\pi}{2}$ __________________.

10. $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=$_______ 1 ________.

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得分

11. 求函数 $f(x)=x^2\ln x$ 的极值.

解：定义域 $x\in(0,+\infty)$，

$f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$（舍）或 $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，

当 $x\in(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

所以在 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 取得极小值，极小值 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$.

得分

12. 计算不定积分 $\int x\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解：令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，则

$$\int x\arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int t^3\arctan t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\arctan t\mathrm{d}t^4$$

$$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}\int\frac{t^4}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}\int\frac{t^4-1+1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{2}x^4\arctan x-\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}+C$$

得分

13. 计算$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\mathrm{d}x$.

解：令$\sqrt{x+1}=t$，则$x=t^2-1,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$， $x=0,t=1;x=2,t=\sqrt{3}$，则

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2t}{t+t^3}dt=2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=2\arctan t\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\pi}{6}$$

得分

14．设$f(x)=\frac{3x+1}{e^x}$，求（1）$f'(x),f''(x)$；（2）$f(x)$带皮亚诺余项的3阶麦克劳林公式；（3）$f^{(2021)}(0)$.

解：（1） $f'(x)=3e^{-x}-(3x+1)e^{-x},f''(x)=-6e^{-x}+(3x+1)e^{-x}$.

（2）$f'''(x)=9e^{-x}-(3x+1)e^{-x}$， $f(0)=1,f'(0)=2,f''(0)=-5,f'''(0)=8,$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$$
$$=1+2x-\frac{5}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3),$$

（3） $f^{(4)}(x)=-12e^{-x}+(3x+1)e^{-x}$，L ，$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}3ne^{-x}+(-1)^n(3x+1)e^{-x}$，

故$f^{(2021)}(0)=6062$.

得分

15.记曲线段$x^2+y^2=4\left(y\geq 0,0\leq x\leq 1\right)$与直线$x=0,x=1$及$x$轴所围的图形为$D$,

（1）求平面图形D的面积；

（2）求图形D绕y轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：（1） $S=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$，令 $x=2\sin t$,则$\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$，

故平面图形 D 的面积 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）圆柱体积 $V_1=\sqrt{3}\pi$,

剩余旋转体体积 $V_2=\pi\int_{\sqrt{3}}^2\left(\sqrt{4-y^2}\right)^2\mathrm{d}y=4\pi y\Big|_{\sqrt{3}}^2-\dfrac{\pi}{3}y^3\Big|_{\sqrt{3}}^2=\dfrac{16}{3}\pi-3\sqrt{3}\pi$，

图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 $V=\dfrac{16}{3}\pi-2\sqrt{3}\pi$.

得分

16．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{2}, & x\le 0\\ 0, & 0<x\le e\\ \dfrac{A}{x(2\ln x+\ln^2 x)}, & x>e\end{cases}$

(1) 求函数 $\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式；

(2) 设 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=A$，试确定 A 的值.

解：（1） $x\le 0$ 时，$\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{e^t}{2}\mathrm{d}t=\dfrac{e^t}{2}\Big|_{-\infty}^{x}=\dfrac{e^x}{2}$，

$0<x\le e$ 时，$\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{e^t}{2}\mathrm{d}t+\int_0^x 0\mathrm{d}t=\dfrac{e^t}{2}\Big|_{-\infty}^{0}=\dfrac{1}{2}$，

$x>e$ 时，$\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{e^t}{2}\mathrm{d}t+\int_0^e 0\mathrm{d}t+\int_e^x\dfrac{A}{t(2\ln t+\ln^2 t)}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}+\dfrac{A}{2}\ln\left(\dfrac{\ln t}{2+\ln t}\right)\Big|_e^x$

$$=\frac{1}{2}+\frac{A}{2}\ln\left(\frac{\ln x}{2+\ln x}\right)-\frac{A}{2}\ln\frac{1}{3}.$$

（2） $A=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{A}{2}\ln\left(\frac{\ln x}{2+\ln x}\right)-\frac{A}{2}\ln\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{A}{2}\ln\frac{1}{3}$，

故 $A=\frac{1}{2-\ln 3}$.

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得分

17. 当 $x>4$ 时，证明： $2^x>x^2$.

证明一：设 $f(x)=2^x-x^2$，

则 $f'(x)=2^x\ln 2-2x$， $f''(x)=2^x(\ln 2)^2-2$， $f'''(x)=2^x(\ln 2)^3>0$，

故当 $x>4$ 时 $f''(x)$ 单调增加，即 $f''(x)>f''(4)=2^4(\ln 2)^2-2>0$，

当 $x>4$ 时 $f'(x)$ 单调增加，即 $f'(x)>f'(4)=2^4\ln 2-8>0$，

当 $x>4$ 时 $f(x)$ 单调增加，即 $f(x)>f(4)=2^4-4^2=0$，

即有 $2^x>x^2$.

证明二：设 $f(x)=x^2\cdot 2^{-x}$，则 $f'(x)=2x\cdot 2^{-x}-\ln 2\cdot x^2\cdot 2^{-x}=2^{-x}\cdot x(2-x\ln 2)$，

当 $x>4$ 时 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调减少，有 $f(x)<f(4)=1$，即有 $2^x>x^2$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=-f(1)=1$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$.

证明：令 $F(x)=x^3 f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=-f(1)=1$，

由零点定理，$\exists\eta\in(0,1)$，使得 $f(\eta)=0$，

所以 $F(0)=F(\eta)=0$，

由罗尔定理 $\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 $\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$.