

北京XX大学 2021—2022 学年第一学期

《高等数学(工)一1》期中考试试卷

学号: _____ 姓名: _____ 成绩: _____

一、填空题: (本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 曲线 $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$

3. 设 $y = f(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 设函数 $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$, 则 $dy|_{x=1} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 曲线 $y = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 的水平渐近线为 $\underline{\hspace{2cm}}$

6. 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$) 的拐点为 $\underline{\hspace{2cm}}$

7. 若 $f(u)$ 可导, 则 $y = f(\sin \sqrt{x})$ 的导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$

8. 函数 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

9. 设 $f(x) = x^2 \sin x$, 则 $f^{(2021)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 抛物线 $y = \sqrt{8x}$ 上曲率等于 $\frac{16}{125}$ 的点为 $\underline{\hspace{2cm}}$

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

11. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{1 - \cos x^2}{x}, & x < 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$ ，并讨论 $f'(x)$ 的连续性，如果有间断点请指出其类型。

12. 设 $y = \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$, 求 y' , y'' 及 $y^{(n)}$.

13. 已知点 $(1, 3)$ 为曲线 $f(x) = ax^3 + bx^2$ 的拐点.

- (1) 求常数 a, b ;
- (2) 对确定常数 a, b 的曲线, 求它的极值点和极值.

14. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - (\sin x) \cdot \sin(\sin x)}{x^4}$.

15. 设 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

16. 设 $f(x)$ 可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) = 4$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$.

三、证明题: (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

17. 当 $0 < x < 2$ 时, 证明: $4x \ln x \geq x^2 + 2x - 3$.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, 且 $f(1) = f(0)$, 证明: 存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

