

## 北京工业大学 2024—2025 学年第一学期

## 《高等数学（工）-1》期末考试试卷 A 卷

考试说明：考试日期：2024 年 12 月 31 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_ 班号：\_\_\_\_\_

注：本试卷共三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷面成绩汇总表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
满分	30	60	10	
得分				

得分

一、填空题：（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} =$  \_\_\_\_\_.

2. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $2^{xy} = x + y$  所确定，则  $dy|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_.

3. 曲线  $y = x \left( 1 + \arcsin \frac{2}{x} \right)$  的斜渐近线方程为 \_\_\_\_\_.

4. 曲线  $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$  的拐点个数为 \_\_\_\_\_.

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left( \frac{1}{n} \right)^3 + \left( \frac{2}{n} \right)^3 + \cdots + \left( \frac{n}{n} \right)^3 \right] =$  \_\_\_\_\_.

6. 抛物线  $y = x^2 - 4x + 3$  上点 \_\_\_\_\_ 处的曲率最大.

7. 设  $f(x)$  有一个原函数  $\sin x$ ，则  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x) dx =$  \_\_\_\_\_.

8. 广义积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$  是收敛还是发散\_\_\_\_\_.

9.  $\int_{-1}^1 (\sin^3 x + \sqrt{1-x^2}) dx =$  \_\_\_\_\_.

10. 设  $f(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 其导函数在  $x=0$  处连续, 则正整数  $n$  的取值范围

是\_\_\_\_\_.



二、计算题: (本题共 6 小题, 每小题 10 分, 共 60 分)

得 分	11. 设 $a > 1$ , $f(t) = a^t - at$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$ , 问 $a$ 为何值时,
	$t(a)$ 最小? 并求出最小值.



得分

12. 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$  所确定, 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ .

得分

13. 已知  $f'(\sin x) = \cos x + x$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ , 求  $f(x)$ .

得 分

14. 计算  $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$ .

得 分

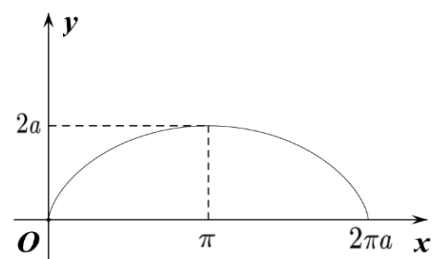
15. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x \geq 1 \end{cases}$

(1) 求函数  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的表达式; (2) 求  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ .

得 分

16. 计算摆线  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$  相应于  $0 \leq t \leq 2\pi$  的一拱的弧长  $s$ ，并计算

它与直线  $y=0$  所围成的图形绕  $x$  轴旋转而成的旋转体的体积  $V$ 。



## 三、证明题：（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分	17. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数且 $f'(a) = f'(b) = 0$ ，则存在
	$\xi \in (a, b)$ ，使 $ f''(\xi)  \geq \frac{4}{(b-a)^2}  f(b) - f(a) $ .



得 分	18. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导， $F(x) = \int_0^x t^2 f(t) dt$ ，且 $F(1) = f(1)$ . 证明：
	在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 $\xi$ ，使 $f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$ .

