北京工业大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学(工)—1》期中考试试卷

考试说明：考试日期：2018 年 月 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人：__________ 学号：__________ 班号：__________

。。

注：本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一答题纸和草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题 号	一	二	三	总成绩
满 分	30	60	10	
得 分				

得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{3x^2+x+1}=$ __ $\dfrac{1}{3}$ ________

2. 曲线 $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ 在 $t=0$ 所对应的点处的法线方程为 __ $y=-\dfrac{2}{3}x$ ____

3. 设 $y=f(x)$ 由方程 $e^y+xy+x^2=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ __ 0 ________

4. 设函数 $y=\ln(\cos(e^x))$，则 $\mathrm{d}y=$ __ $-e^x\tan e^x dx$ ________

5. 曲线 $y=\dfrac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+2)}$ 的垂直渐近线为 ____ $x=-2$ ________

6. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ 的拐点为______ $(2,5)$ __________________

7. $x \to 0$ 时，$x - \sin x$ 是关于 x 的___3___阶无穷小

8. 函数 $f(x) = e^x - x - 4$ 的单增区间是_________ $(0,+\infty)$ _____________

9. 在函数 $y = e^{2x} + x$ 的麦克劳林公式中 x^6 项的系数是________ $\frac{2^6}{6!}$ __________

10. 求抛物线 $y^2 = 4x$ 在点 $(1,2)$ 处的曲率__________ $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ________________.

二、计算题：（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11．讨论函数 $y = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的连续性，若有间断点，判断其类型.

解：$y = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，

因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} y = -1$，$\lim\limits_{x \to 0^-} y = 1$，

所以在 $x = 0$ 是间断点，是第一类跳跃间断点。

得 分

12. 设 $y=\ln\left(1-\dfrac{3}{2+x}\right)$，求 y'， y'' 及 $y^{(n)}$.

解： $y=\ln\left(\dfrac{x-1}{2+x}\right)=\ln(x-1)-\ln(2+x)$，

$$y'=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}=(x-1)^{-1}-(x+2)^{-1}，$$

$$y''=(-1)(x-1)^{-2}-(-1)(x+2)^{-2}，$$

$$y^{(3)}=(-1)(-2)(x-1)^{-3}-(-1)(-2)(x+2)^{-3}$$

L L

$$y^{(n)}=(-1)^{n+1}(n-1)!(x-1)^{-n}-(-1)^{n+1}(n-1)!(x+2)^{-n}$$

得 分

13. 设函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处都取得极值，试问 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处分别取得极大值还是极小值，并求出曲线 $f(x)$ 的极值.

解： $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$，

$f'(1)=a+2b+1=0$，

$f'(2)=\dfrac{a}{2}+4b+1=0$ 　　解得 $a=-\dfrac{2}{3}$， $b=-\dfrac{1}{6}$，

$f''(x)=-\dfrac{a}{x^2}+2b=\dfrac{2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}$，

$f''(1)=\dfrac{1}{3}>0$，所以在 $x=1$ 取得极小值，极小值为 $f(1)=\dfrac{5}{6}$，

$f''(2)=-\dfrac{1}{6}<0$，所以在 $x=2$ 取得极大值，极大值为 $f(1)=-\dfrac{2}{3}\ln 2+\dfrac{4}{3}$

得 分

14. 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\ln(1+x^3)}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+2xe^{-x^2}}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}-1}{2x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

得 分

15. 求a,b的值，使$f(x)=\begin{cases}\sin(a(x-1)), & x\le 1\\ \ln x+b, & x>1\end{cases}$在$x=1$处可导，并求$f'(1)$.

解：因为$f(x)$在$x=1$连续，所以$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x+b)=b$，　$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\sin(a(x-1)))=0$，

所以$b=0$.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=1,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin(a(x-1))}{x-1}=a,$$

所以$a=1$，且$f'(1)=1$

得 分

16. 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-\arctan t, \end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

解：$\dfrac{dy}{dt}=1-\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{t^2}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2}$，

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\frac{1+t^2}{4t},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{4+\pi^2}{8\pi}.$$

三、证明题：（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 当 $x\neq 0$ 时，证明:. $e^x>x+1$

证明：设 $f(x)=e^x-x-1$，

则 $f'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$，所以 $f(x)$ 单调增加，$f(x)>f(0)$

当 $x<0$ 时，$f'(x)=e^x-1<0$，所以 $f(x)$ 单调减少，$f(x)>f(0)$.

而 $f(0)=0$，所以 $f(x)>0$，命题得证.

得 分

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续的导数，且 $f(0)=f(1)$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

证明：对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上用罗尔中值定理，至少存在一点 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta)=0$.

令 $F(x)=f'(x)(x-1)^2$，对 $f(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上用罗尔中值定理，至少存在一点

$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$,

即 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

草　稿　纸

姓名：____________　　　　学号：________________