北京工业大学 2024——2025 学年第一学期

《高等数学（工）-1》期末考试试卷 A 卷

考试说明：考试日期:2024 年 12 月 31 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺：

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：__________　　学号：__________　　班号：__________

注： 本试卷共 三 大题，共 6 页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
满分	30	60	10	
得分				

得 分

一、填空题：（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=$ $-\dfrac{2}{3}$.

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ $(\ln 2-1)\mathrm{d}x$.

3. 曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为 $y=x+2$.

4. 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点个数为 1 .

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^3+\left(\dfrac{2}{n}\right)^3+\cdots\left(\dfrac{n}{n}\right)^3\right]=$ $\dfrac{1}{4}$.

6. 抛物线 $y=x^2-4x+3$ 上点 $(2,-1)$ 处的曲率最大.

7. 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\sin x$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x=$ $1-\pi$.

8. 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ 是收敛还是发散__发散________________________.

9. $\int_{-1}^{1}\left(\sin^3 x+\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=$______ $\frac{\pi}{2}$ ____________________________.

10. 设 $f(x)=\begin{cases} x^n\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，其导函数在 $x=0$ 处连续，则正整数 n 的取值范围

是_________ $n>2$ ________________________.

二、计算题:（本题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 设 $a>1$，$f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$，问 a 为何值时，$t(a)$ 最小？并求出最小值.

解：由 $f'(t)=a^t\ln a-a=0$， ----------1’

解得唯一驻点 $t(a)=1-\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$. ----------3’

考查函数 $t(a)=1-\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$ 在 $a>1$ 时的最小值.

令 $t'(a)=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln(\ln a)}{(\ln a)^2}=\frac{1-\ln(\ln a)}{a(\ln a)^2}=0$， ----------5’

解得唯一驻点 $a=e^e$. ----------7’

当 $a>e^e$ 时，$t'(a)>0$；当 $a<e^e$ 时，$t'(a)<0$. ---------9’

因此，$t(e^e)=1-\frac{1}{e}$ 为极小值，从而是最小值. ----------10’

得 分

12．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3t^2+2t$，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{t}{t+1}$ ------4’

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3t^2+2t}{\frac{t}{1+t}}=(3t+2)(t+1)$$ --------6’

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=3(t+1)+3t+2=6t+5$$ -----8’

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{6t+5}{\frac{t}{1+t}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}$$ -------10’

得 分

13．已知 $f'(\sin x)=\cos x+x$，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$，求 $f(x)$.

解：令 $t=\sin x, t\in(-1,1), x=\arcsin t$，则 $\cos x=\sqrt{1-t^2}$， -------2’

$f'(t)=\sqrt{1-t^2}+\arcsin t, t\in(-1,1)$. $f(t)=\int(\sqrt{1-t^2}+\arcsin t)\mathrm{d}t$ -------3’

分别求 $\int\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t, \int\arcsin t\mathrm{d}t$

对于 $\int\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$，令 $t=\sin u, u\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}), t\in(-1,1), \mathrm{d}t=\cos u\mathrm{d}u$

$$\int\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\int\sqrt{1-\sin^2u}\cos u\mathrm{d}u=\int\cos^2u\mathrm{d}u=\int\frac{1+\cos 2u}{2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(u+\sin u\cos u)+C$$

$=\dfrac{1}{2}(\arcsin t+t\sqrt{1-t^2})+C_1$ (也可用分部积分) ------6’

$$\int\arcsin t dt=t\arcsin t-\int t d\arcsin t=t\arcsin t-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=t\arcsin t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}(1-t^2)$$

$=t\arcsin t+\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{1-t^2}+C_2=t\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C_2$ ------9’

$$f(t)=\int(\sqrt{1-t^2}+\arcsin t)dt=\frac{1}{2}(\arcsin t+t\sqrt{1-t^2})+C_1+t\arcsin t+\sqrt{1-t^2}+C_2$$

$f(x)=\dfrac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$ -------10’

得 分

14. 计算$\int_0^4 \dfrac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解：令$t=\sqrt{2x+1}$,则$x=\dfrac{1}{2}(t^2-2), \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.　　-----3'

当$x=0$时，$t=1$；当$x=4$时，$t=3$.　　------5'

于是 $$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\mathrm{d}t$$ -------7'

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+3t\right)\Bigg|_1^3=\frac{1}{2}[(\frac{27}{3}+9)-(\frac{1}{3}+3)]=\frac{22}{3}$$ -------10'

得 分

15. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x, & x<0 \\ 0, & 0\le x<1, \\ \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x\ge 1\end{cases}$

(1)求函数$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$在$(-\infty,+\infty)$上的表达式；(2)求$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

解：（1） $x<0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^x \dfrac{1}{2}e^t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}e^t\Big|_{-\infty}^x=\dfrac{1}{2}e^x$；　　-----2'

$0\le x<1$时，$F(x)=\int_{-\infty}^0 \dfrac{1}{2}e^t\mathrm{d}t+\int_0^x 0\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}e^t\Big|_{-\infty}^0=\dfrac{1}{2}(1-0)=\dfrac{1}{2}$；　　-----5'

$x>1$时，$F(x)=\int_{-\infty}^0 \dfrac{1}{2}e^t\mathrm{d}t+\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_1^x \dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}e^t\Big|_{-\infty}^0-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\Big|_1^x=1-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}$

-----8'

故$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x, & x<0 \\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1 \\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-1)}, & x\ge 1\end{cases}$$

（2） 解法一：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(x-1)}\right)=1$　　----10'

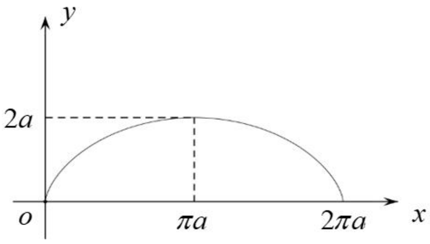
解法二： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=$

$$=\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t-1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(0-1)=1$$ -

得 分

16. 计算摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 相应于$0 \le t \le 2\pi$的一拱的弧长s，并计算它与直线$y = 0$所围成的图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积V.

解：



$\mathrm{d}x = \left(a - a\cos t\right)\mathrm{d}t,$ ----1’

$\mathrm{d}y = \left(a + a\sin t\right)\mathrm{d}t$ ------2’

代入弧长公式得

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\mathrm{d}y\right)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos t)}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 \times 2\sin^2 \frac{t}{2}}\mathrm{d}t = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right|dt$$

-------3’ ------4’ ------5’

$$= 4a\int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| d\frac{t}{2} = 4a\left(-\cos \frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8a$$ -----6’

旋转体的体积公式为

$$V = \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

-------7’ -------8’

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\mathrm{d}t = 5\pi^2 a^3$$

------9’ ------10’

三、证明题:（本题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数且 $f'(a)=f'(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\left|f''(\xi)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$.

证明：将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在点 a 和点 b 进行泰勒展开，得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right),\qquad\text{-------1'}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right).\qquad\text{-----2'}$$

$\left|f''(\xi)\right|=\max\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\}$,

则 $f(b)-f(a)=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}-\frac{f''(\xi_2)}{2}\right|\frac{(b-a)^2}{4}$ -----3'

$\leq\left[\left(\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}\right|+\left|\frac{f''(\xi_2)}{2}\right|\right)+\frac{(b-a)^2}{4}\right]<\left|f''(\xi)\right|\frac{(b-a)^2}{4}$ -----5'

即存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\left|f''(\xi)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$.

得 分

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$F(x)=\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t$，且 $F(1)=f(1)$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

证明：由积分中值定理，存在 $\eta\in[0,x]$，使 $F(x)=\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t=\eta^2f(\eta)x$， ---1'

从而 $F(1)=\eta^2f(\eta)=f(1)$， ------2'

设 $G(x)=x^2f(x)$， ------3'

则 $G(1)=f(1)$，而 $G(\eta)=\eta^2f(\eta)=f(1)$，从而 $G(1)=G(\eta)$. ----4'

对函数 $G(x)$ 在 $[\eta,1]\subset[0,1]$ 上使用罗尔定理，则至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使

$f'(\xi)=-\frac{2f(\xi)}{\xi}$. ----5'