北京工业大学 2023—2024 学年第一学期

《高等数学(工)—1》期末考试试卷 A 卷(答案)

考试说明：考试日期:2024 年 1 月 4 日、考试时间：95 分钟、考试方式：闭卷

承诺:

本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，在考试过程中自觉遵守有关规定和纪律，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考，若有违反，愿接受相应处分。

承诺人： __________ **学号：** __________ **班号：** __________

注：本试卷共<u>三</u>大题，共<u>6</u>页，满分 100 分，考试时必须使用卷后附加的统一草稿纸。

卷 面 成 绩 汇 总 表（阅卷教师填写）

题号	一	二	三	总成绩
满分	30	60	10	
得分				

得 分

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ ___ $\dfrac{1}{3}$ ___.

2. 若曲线 $y=\ln(2+\dfrac{1}{x})$ 的垂直渐近线为 __ $x=-\dfrac{1}{2}$，$x=0$ _（只写出一条得 2 分）_.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$ ___ $\dfrac{1}{2}$ ___.

4. 已知 $\dfrac{\cos x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\cdot\dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}x=$ ___ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)^2+C$ ___.

5. 曲线 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于 $0\le x\le 1$ 的一段弧长为 ___ $\dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$ ___.

6.函数 $y=\int_0^{2x}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}y=$____ $2\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ ________________ ____________.

7.函数 $y=(x+2)\mathrm{e}^x$ 的拐点为______ $(-4,-2\mathrm{e}^{-4})$ ______________________________.

8. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=$___ $\frac{1}{2}$ ____.

9. 双曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率为______ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ____________________________.

10. $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=$______ 8 ___________________________________.

二、计算题:（本大题共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分）

得 分

11. 设 $f(x)=\cos^2 2x$，求 (1) $f'(x), f''(x), f^{(2024)}(0)$；

(2) $f(x)$ 带皮亚诺型余项的2024阶麦克劳林公式.

解：(1) $f'(x)=-4\cos 2x\sin 2x=-2\sin 4x$， -----2’

$f''(x)=-2\cdot 4\cos 4x=-2\cdot 4\sin(4x+\frac{\pi}{2})$， -----4’

$f'''(x)=-2\cdot 4^2\cos(4x+\frac{\pi}{2})=-2\cdot 4^2\sin(4x+2\cdot\frac{\pi}{2})$，

…

$$f^{(2024)}(x)=-2\cdot 4^{2023}\sin\left[4x+\frac{2023}{2}\pi\right],$$

所以 $f^{(2024)}(0)=2\cdot 4^{2023}=2^{4047}$. -----6’

(2) 因为 $f(0)=1$， $f'(0)=0$， $f''(0)=-4$， $f'''(0)=0$，…，

$f^{(2m-1)}(0)=0$， $f^{(2m)}(0)=(-1)^m 2\cdot 4^{2m-1}=(-1)^m 2^{4m-1}$，其中 $m=1,2,\cdots 1012$.

------8’

所以 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(2024)}(0)}{2024!}x^{2024}+o(x^{2024})$ ----9’

$$=1-\frac{2^3}{2!}x^2+\frac{2^7}{4!}x^4+\cdots+\frac{2^{4047}}{2024!}x^{2024}+o(x^{2024})$$ ------10’

得 分

12.设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\cos t^2 \\ y=t^2\cos t^2-\sin t^2 \end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$..

解：$\frac{dx}{dt}=-2t\sin t^2$， -----2’

$$\frac{dy}{dt}=2t\cos t^2-2t^3\sin t^2-2t\cos t^2=-2t^3\sin t^2,$$ -----4’

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2t^3\sin t^2}{-2t\sin t^2}=t^2,$$ -----6’

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}=2t,$$ -----8’

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{-2t\sin t^2}=-\csc t^2.$$ ----10’

得 分

13.计算 $\int_0^1\frac{1+x\sqrt{x}}{1+x}dx$.

解： 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2, dx=2tdt$， -------2’

当 $x=0$ 时 $t=0$；当 $x=1$ 时 $t=1$， ------4’

$$原式=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx+\int_0^1\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x}dx$$ -----5’

$$=\ln(1+x)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{t^3}{1+t^2}\cdot 2tdt$$ -----6’

$$=\ln 2+2\int_0^1\frac{t^4-1+1}{1+t^2}dt$$ ------7’

$$=\ln 2+2\int_0^1(t^2-1)dt+2\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$$ ------8’

$$=\ln 2+2(\frac{t^3}{3}-t)\Big|_0^1+2\arctan t\Big|_0^1$$ ------9’

$$=\ln 2+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$$ -------10’

得 分

14．求 $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ 的单调区间与极值.

解：函数定义域为 $(0,+\infty)$， --------1’

$$y'=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2},$$ ---------3’

令 $y'=0$，解得驻点为 $x_1=1,\ x_2=e^2$， -------5’

x	$(0,1)$	1	$(1,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	单减	极小值	单增	极大值	单减

故函数单调减少区间为 $(0,1]$，$[e^2,+\infty)$；单调减少区间为 $[1,e^2]$. -----8’

极小值为 $y(1)=0$，极大值为 $y(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$. ----10’

得 分

15．设 $f(x)=\begin{cases} A\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

（1）求函数 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式；

（2）若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t=1$，试确定 A 的值.

解：（1）当 $x<-\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t=0$， -------2’

当 $-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} A\cos t\mathrm{d}t=A\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{x}=A\sin x+A$，

-----5’

当 $x>\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A\cos t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0\mathrm{d}t=A\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2A$， -----8’

$$所以\ \Phi(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2}\\ A\sin x+A, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}.\\ 2A, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

（2） $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=2A$， ----9’

所以 $A=\dfrac{1}{2}$. -----10’

得 分

16. 从原点 $(0,0)$ 向抛物线 $y=x^2+1$ 引两条切线，记由抛物线与所引两切线所围成的图形为 D，(1) 求图形 D 的面积 A；(2) 求图形 D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V.

解：求得切点为 $(1,2)$ 和 $(-1,2)$， -----2’

(1) 所求图形 D 的面积 $A=2\left[\int_0^1(x^2+1)\mathrm{d}x-\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\right]$ -----4’

$$=2\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1+x\big|_0^1-1\right)$$ ------5’

$$=\frac{2}{3}.$$ ------6’

(2) 所求体积 $V=2\left[\pi\int_0^1(x^2+1)^2\mathrm{d}x-\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot2^2\cdot1\right]$ ------8’

$$=2\pi\left(\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1+\frac{2}{3}x^2\big|_0^1+x\big|_0^1\right)-\frac{8}{3}\pi$$ ------9’

$$=\frac{56}{15}\pi-\frac{8}{3}\pi$$

$$=\frac{16}{15}\pi.$$ ------10’

三、证明题:（本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

得 分

17. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)+2024f(\xi)=f'(\xi)$.

证明：令 $F(x)=f(x)(x-1)^{2024}$， -----------3’

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$. ------4’

由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，

于是 $(\xi-1)^{2024}f'(\xi)+2024(\xi-1)^{2023}f(\xi)=0$，

即 $\xi f'(\xi)+2024f(\xi)=f'(\xi)$. --------5’

得 分

18. 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)<0$， $f(0)=0$，证明当 $0<x<b$ 时，恒有 $bf(x)>xf(b)$.

证明：设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}, x\in(0,+\infty)$， -----2’

则 $F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. ------3’

令 $g(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $g'(x)=xf''(x)+f'(x)-f'(x)=xf''(x)<0$， ----4’

所以 $g(x)<g(0)=0$，即 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减， -----5’

所以 $\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{f(b)}{b}$，原命题成立.