北京工业大学 2025-2026 学年《数学分析Ⅰ》期中测试

1.（1）写出极限 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 存在的柯西收敛准则；

（2）用定义证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2+3x+2}{3x^2-1}=-2$.

2. 求极限（不用洛必达）：

（1） $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\sqrt{(e^{3x}-1)\ln(1+x)}}$;

（2） $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}$.

3. 若数列 $\{x_n\}$ 满足条件：$|x_n-x_{n-1}|\le r|x_{n-1}-x_{n-2}|, n=3,4,\ldots$ 且 $0<r<1$. 证明：$\{x_n\}$ 收敛.

4. 设 $x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{1+2x_n}{1+x_n}(n=1,2,\ldots)$. 证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求极限.

5. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ ，证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上有界.

6. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，且 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 是 I 上任意 n 个点. 证明：若对 $\forall x\in I, f(x)>0$ ，存在 $\xi\in I$ ，使得

$f(\xi)=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$.

7. 用有限覆盖定理证明：$f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，且仅有第一类间断点. 证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

8. 求函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{e^{\frac{1}{x-1}}+1}+\dfrac{\sin(x+1)}{x(x+1)}$ 的间断点，并判断其类型.

9. 证明：（1） $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $(a,+\infty)(a>0)$ 上一直连续；

（2） $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $(0,1)$ 上不一直连续.

10. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f(x^2)=f(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(1)$. 证明：$f(x)\equiv f(1), \forall x\in(0,+\infty)$.