Julia Set 的生成和与 Mandelbrot Set 的联系

毕嘉文
数学与应用数学 3190105194

2022 年 7 月 4 日

摘要

在本文中，我们简单介绍 Julia Set 的历史发展和相关数学知识，使用 C++ 复现了 Julia Set 的生成算法，并且尝试扩展生成色彩更丰富的图片。

1 引言

一个多世纪以前，人们便开始了对复解析函数迭代的研究。在 1870 年代，Ernst Schroder [1, 2] 研究了求解方程的迭代算法的收敛性，特别关注牛顿法的收敛性，并将牛顿方法推广到其他数值方法。后来，Arthur Cayley 通过完全不同的方法在 [3] 中获得了类似的结果。虽然 Cayley 和 Schro,der 都希望将他们的理解扩展到更高次的多项式，但他们无法实际做到。后来，Gabriel Koenigs [4] 进一步推广了 Schroder 的工作。

在第一次世界大战后不久，Pierre Fatou [5, 6] 和 Gaston Julia [7] 奠定了复杂动力学的基础，从全局的角度看待迭代有理函数的理论。两人都接触到了蒙特尔的正规族（normal family）理论，并意识到这一理论对复解析函数研究的重要性。Fatou 和 Julia 都独立地证明了正规域必须要么是空的，要么有一个、两个或无限多个分量。他们都证明了 Julia 集通常是分形结构，并且能够通过可视化来理解 Julia 集的复杂结构，并研究和解释复杂的行为。

在 Fatou 和 Julia 的研究工作的推动下，对复变量函数迭代领域的研究热情一直持续到 1930 年代，后来它逐渐淡出人们的视线。尽管在那段时间有几位重要的数学家在这个领域工作，但直到 1980 年代它才恢复了活力，大概是因为计算机的出现使得其他人能够直观感受 Julia 和 Fatou 理解下的艺术美感和复杂性。[8]

2 相关数学理论

2.1 Julia 集

Julia 集分形通常通过初始化复数 $z = x + yi$ 来生成，其中 x 和 y 是大约 -2 到 2 范围内的图像像素坐标。然后，使用 $z = z^2 + c$ 重复更新 z 的值，其中 c 是一个决定 Julia 集

的复参数。经过多次迭代，如果 z 的模小于 2，我们就认为该像素在 Julia 集中并相应对其进行着色。

2.2 与 Mandelbrot 集的联系

对于 Julia 集，c 是所有像素的相同复数，并且基于 c 的不同值有许多不同的 Julia 集。连续改变 c，我们可以从一个 Julia 集连续转换为另一个。对于 Mandelbrot 集，$c = x + yi$，其中 x 和 y 是图像坐标。Mandelbrot 集可以被认为是所有 Julia 集的映射，因为它在每个位置使用不同的 c，就好像从一个 Julia 集跨空间转换到另一个一样。因为两集合的迭代函数相似，所以我们可以发现对任一 Mandelbrot 集中的点 c，它都会给出一个 Julia 集，并且通过迭代公式也可以发现整个 Julia 集的外观通常在样式上与 Mandelbrot 集相应位置的局部外形相似。[9]

3 算法介绍

以下为 Julia Set 的染色生成算法：

Algorithm 1 Drawing Mandelbrot Set

Input: 参数 c

对于图像中的每一个像素点 p：

  令 z 为 p 对应的复数，$n = 0$

  while $n \leq N$:

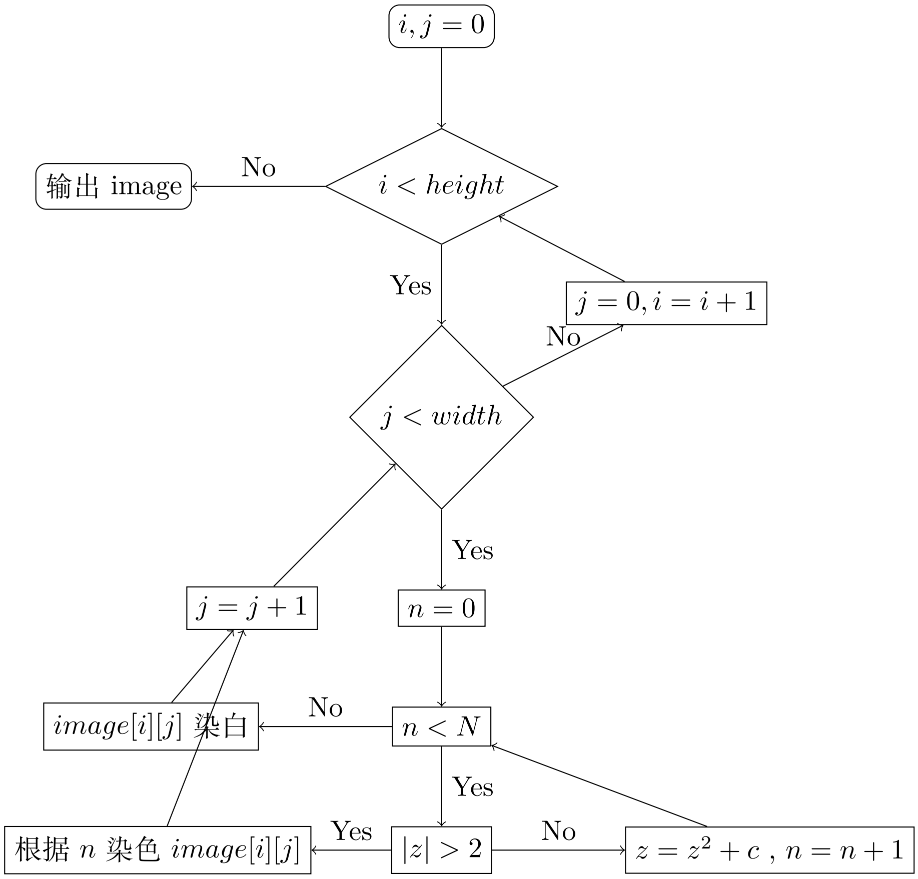
    如果 $|z| > 2$，将该像素点为 $get_color(n)$，并跳出循环，移动至下一个像素点

    否则 $z \leftarrow z^2 + c, n \leftarrow n + 1$

  如果正常结束循环，令该像素点为白色

  移动至下一个像素点

具体流程图如下：



4 数值算例

考虑到 pdf 文件大小，在这里我仅展示四张低像素的图片，若想查看更大像素的图片可以前往 image 文件夹。

5 结论

参考文献

[1] E. Schröder. Ueber unendlich viele algorithmen zur auflösung der gleichungen. *Mathematische Annalen*, 2(2):317–365, Jun 1870.

[2] E. Schröder. Ueber iterirte functionen. *Mathematische Annalen*, 3:296–322, 1871.

图 1

图 2

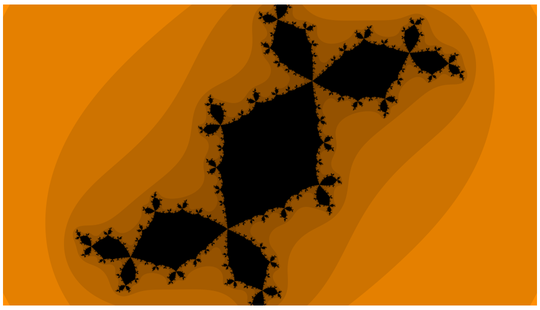


图 3

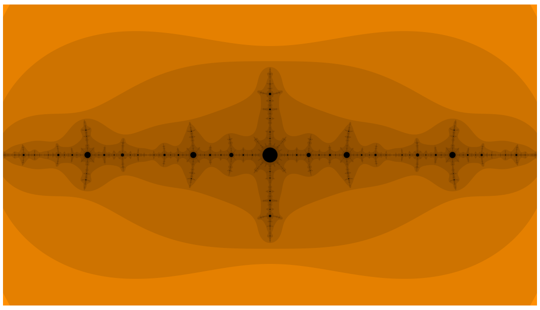


图 4

[3] Arthur Cayley. *Application of the Newton-Fourier method to an imaginary root of an equation*, volume 11 of *Cambridge Library Collection - Mathematics*, page 114–121. Cambridge University Press, 2009.

[4] G. Koenigs. Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 1:3–41, 1884.

[5] P. Fatou. Note sur les fonctions invariantes par une substitution rationnelle. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 50:37–41, 1922.

[6] P. Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 48:208–314, 1920.

[7] Gaston Julia. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1:47–246, 1918.

[8] Scott Sutherland. An introduction to julia and fatou sets. In Christoph Bandt, Michael Barnsley, Robert Devaney, Kenneth J. Falconer, V. Kannan, and Vinod Kumar P.B., editors, *Fractals, Wavelets, and their Applications*, pages 37–60, Cham, 2014. Springer International Publishing.

[9] Juan Carlos Ponce Campuzano. The julia set. [EB/OL]. https://complex-analysis.com/content/julia_set.html Accessed July 4, 2022.