Julia Set 的生成和与 Mandelbrot Set 的联系

毕嘉文
数学与应用数学 3190105194

July 4, 2022

Contents

引言

在第一次世界大战后不久，Pierre Fatou [1, 2] 和 Gaston Julia [3] 奠定了复杂动力学的基础，从全局的角度看待迭代有理函数的理论。两人都接触到了蒙特尔的正规族（normal family）理论，并意识到这一理论对复解析函数研究的重要性。Fatou 和 Julia 都独立地证明了正规域必须要么是空的，要么有一个、两个或无限多个分量。他们都证明了 Julia 集通常是分形结构，并且能够通过可视化来理解 Julia 集的复杂结构，并研究和解释复杂的行为。

在 Fatou 和 Julia 的研究工作的推动下，对复变量函数迭代领域的研究热情一直持续到 1930 年代，后来它逐渐淡出人们的视线。尽管在那段时间有几位重要的数学家在这个领域工作，但直到 1980 年代它才恢复了活力，大概是因为计算机的出现使得其他人能够直观感受 Julia 和 Fatou 理解下的艺术美感和复杂性。[4]

Julia 集分形通常通过初始化复数 $z = x + yi$ 来生成，其中 x 和 y 是大约 -2 到 2 范围内的图像像素坐标。然后，使用 $z = z^2 + c$ 重复更新 z 的值，其中 c 是一个决定 Julia 集的复参数。经过多次迭代，如果 z 的模小于 2，我们就认为该像素在 Julia 集中并相应对其进行着色。

与 Mandelbrot 集的联系

对于 Julia 集，c 是所有像素的相同复数，并且基于 c 的不同值有许多不同的 Julia 集。连续改变 c，我们可以从一个 Julia 集连续转换为另一个。对于 Mandelbrot 集，$c = x + yi$，其中 x 和 y 是图像坐标。

Mandelbrot 集可以被认为是所有 Julia 集的映射，因为它在每个位置使用不同的 c，就好像从一个 Julia 集跨空间转换到另一个一样。因为两集合的迭代函数相似，所以我们可以发现对任一 Mandelbrot 集中的点 c，它都会给出一个 Julia 集，并且通过迭代公式也可以发现整个 Julia 集的外观通常在样式上与 Mandelbrot 集相应位置的局部外形相似。[5]

生成算法

Algorithm 1 Drawing Mandelbrot Set

Input: 参数 c

对于图像中的每一个像素点 p：

令 z 为 p 对应的复数，$n = 0$

while $n \leq N$:

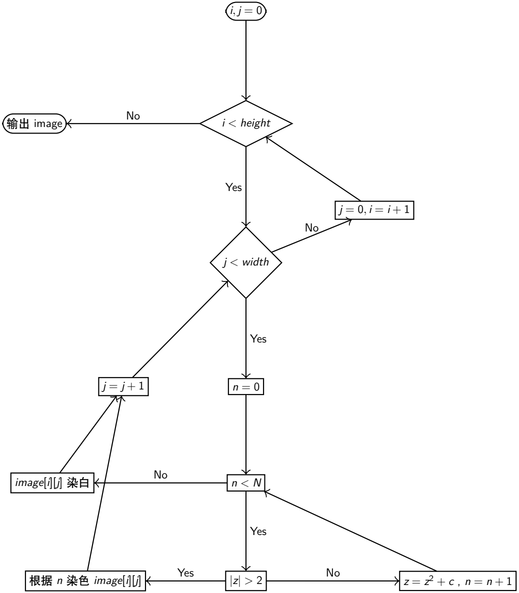
如果 $|z| > 2$，将该像素点为 $get\_color(n)$，并跳出循环，移动至下一个像素点

否则 $z \leftarrow z^2 + c, n \leftarrow n + 1$

如果正常结束循环，令该像素点为白色

移动至下一个像素点

流程图



$i, j = 0$
$i < height$
No
输出 image
Yes
$j = 0, i = i + 1$
No
$j < width$
Yes
$j = j + 1$
$n = 0$
No
$image[i][j]$ 染白
$n < N$
Yes
Yes
根据 n 染色 $image[i][j]$
$|z| > 2$
No
$z = z^2 + c$, $n = n + 1$

数值算例

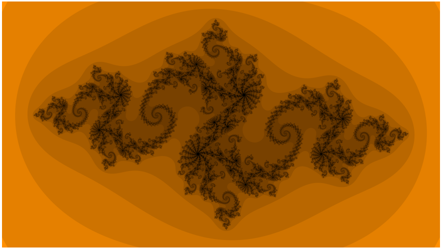


Figure: $c = -0.79 + 0.15i$

Figure: $c = 0.28 + 0.085i$

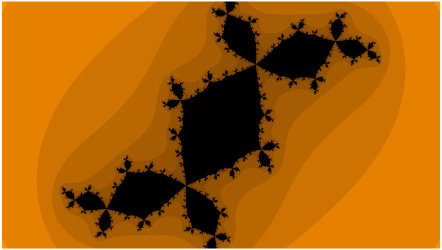


Figure: $c = -0.12 - 0.77i$

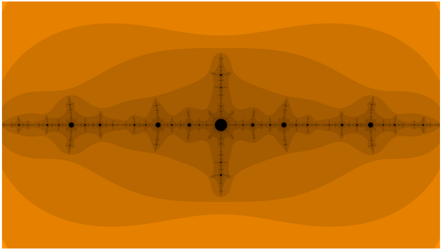


Figure: $c = -1.476 + 0i$

P. Fatou.
Note sur les fonctions invariantes par une substitution rationnelle.
Bulletin de la Société Mathématique de France, 50:37–41, 1922.

P. Fatou.
Sur les équations fonctionnelles.
Bulletin de la Société Mathématique de France, 48:208–314, 1920.

Gaston Julia.
Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles.
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1:47–246, 1918.

Scott Sutherland.
An introduction to julia and fatou sets.
In Christoph Bandt, Michael Barnsley, Robert Devaney, Kenneth J. Falconer, V. Kannan, and Vinod Kumar P.B., editors, *Fractals, Wavelets, and their Applications*, pages 37–60, Cham, 2014. Springer International Publishing.

Juan Carlos Ponce Campuzano.
The julia set.

[EB/OL].
https://complex-analysis.com/content/julia_set.html
Accessed July 4, 2022.