Architecture des ordinateurs

Représentation des nombres entiers positifs

Définitions

- Qu’est-ce qu’un nombre ?
- Qu’est-ce qu’un chiffre ?

Qu'est-ce qu'un nombre / un chiffre ?

- Un nombre représente une quantité, une valeur
- Les chiffres sont une des façons de représenter un nombre

$$12 = douze = XII \quad (= \sqrt{144} = 9 + 3?)$$
$$\frac{1}{3} = 0,3333....$$
$$\sqrt{2}$$
$$\pi$$
$$DIX = 509$$

- L'informaticien manipule des **représentations** de nombres

$$1000001_2 = 65_{10} = 101_8 = 41_{16}$$

Base 10 / base décimale

- Manière usuelle de représenter les nombres
- suite de multiplications et additions avec le nombre 10 : $365 = 3 \times 10 \times 10 + 6 \times 10 + 5$

Autres bases utilisées couramment

Chiffres romains

- additions et des soustractions élémentaires, pas de multiplication
- *IVXLCDM*
- additionner quand le chiffre de droite est plus grand, soustraire sinon :
  $VI = 5 + 1 = 6$
  $IV = 5 - 1 = 4$
- facilite les additions,
  mais la multiplication (décimale) ne fonctionne pas.

Base 1 : compter sur ses doigts, nombre de bougies...

Décomposition d'un nombre

- nommer les chiffres : $a_{n-1}...a_1 a_0$
- exemple 27351 : $a_4 = 2, a_3 = 7, a_2 = 3, a_1 = 5, a_0 = 1$

- décomposition d'un nombre décimal en unités, dizaines, centaines : des puissances de 10 ($10^0 10^1 10^2 10^3$...)
- 27351 peut s'écrire :
  $2 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 1 \times 10^0$

Forme de Horner

$$
\begin{aligned}
a &= a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1 a_0 && (1)\\
a &= a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0 && (2)\\
a &= \sum_{0 \leq i < n} a_i 10^i && (3)
\end{aligned}
$$

$$a = (\cdots((a_{n-1} \times 10 + a_{n-2}) \times 10 + \cdots) \times 10 + a_1) \times 10 + a_0$$

Forme de Horner :

$$a = a_0 + 10(a_1 + 10(\cdots + 10(a_{n-2} + 10a_{n-1})\cdots))$$

Nombres en base constante

- on peut remplacer le 10 par n'importe quel nombre (ou presque)
- Presque tous les ordinateurs utilisent la base 2 (le **binaire**) : adapté aux circuits électroniques
- Nombres binaires "encombrants" : on utilise aussi l'**octal** (8) et l'**hexadécimal** (16)
- binaire : 0 ou 1
- octal : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
- hexadécimal : 0, 1, 2, 3, ..., 9, A, B, C, D, E, F

$$\begin{aligned} a &= a_{n-1} \cdots a_1 a_0 && (4) \\ &= a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0 && (5) \\ &= a_0 + b(a_1 + b(\cdots + b(a_{n-2} + b a_{n-1}) \cdots)) && (6) \\ &= \sum_{0 \leq i < n} a_i b^i && (7) \end{aligned}$$

Conversion vers la base 10 (1/2)

Convertir 4567_8 en base 10 :

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & {}_8 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \mathrm{b} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
a &= a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0 \\
4567_8 &= 4 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 7 \times 8^0 \\
4567_8 &= 4 \times 512_{10} + 5 \times 64_{10} + 6 \times 8 + 7 \\
4567_8 &= 2048_{10} + 320_{10} + 48_{10} + 7 = 2423_{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4567_8 &= 7 + 8 \times (6 + 8 \times (5 + 8 \times 4)) \\
&= 7 + 8 \times (6 + 8 \times (5 + 32_{10})) \\
&= 7 + 8 \times (6 + 8 \times 37_{10}) \\
&= 7 + 8 \times (6 + 296_{10}) \\
&= 7 + 8 \times 302_{10} \\
&= 7 + 2416_{10} = 2423_{10}
\end{aligned}$$

Conversion vers la base 10 (2/2)

Convertir FAC_{16} en base 10 :

$$\begin{aligned}
FAC_{16} &= F_{16} \times (16_{10})^2 + A_{16} \times (16_{10})^1 + C_{16} \times (16_{10})^0 \\
&= 15_{10} \times (16_{10})^2 + 10_{10} \times (16_{10})^1 + 12_{16} \times (16_{10})^0 \\
&= 15_{10} \times 256_{10} + 10_{10} \times 16_{10} + 12_{10} \\
&= 3840_{10} + 160_{10} + 12_{10} \\
&= 4012_{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
FAC_{16} &= C_{16} + 16_{10} \times (A_{16} + 16_{10} \times F_{16}) \\
&= 12_{10} + 16_{10} \times (10_{10} + 16_{10} \times 15_{10}) \\
&= 12_{10} + 16_{10} \times (10_{10} + 240_{10}) \\
&= 12_{10} + 16_{10} \times 250_{10} \\
&= 12_{10} + 4000_{10} \\
&= 4012_{10}
\end{aligned}$$

Exercices

Convertir les nombres suivants vers la base 10 **en indiquant les étapes intermédiaires** :

1. $CAFFE_{16}$ (base 16)
2. 12345_6 (base 6)
3. 234_{-8} (base -8)
4. 1110_2 (base 2)

Convertir de la base 10 à une autre base (1/2)

- Idée : faire une **division Euclidienne**
- on divise le nombre N par la base b
  - on pose le reste = a_0
  - on divise le résultat obtenu par la base b
    - on pose le reste = a_1
    - on divise le résultat obtenu par la base b
    - etc...
    - jusqu'à obtenir un nombre strictement inférieur à b

Exemple :

$$
\begin{aligned}
681_{10} &= 1 + 8_{10} \times 85_{10} \\
&= 1 + 8_{10} \times (5 + 8_{10} \times 10_{10}) \\
&= 1 + 8_{10} \times (5 + 8_{10} \times (2 + 8_{10} \times 1)) \\
&= ((\mathbf{1} \times 8_{10} + \mathbf{2}) \times 8_{10} + \mathbf{5}) \times 8_{10} + \mathbf{1} \\
&= 1251_8
\end{aligned}
$$

Convertir de la base 10 à une autre base (2/2)

Autre exemple : $(2003)_{10}$ en base 6 ?

$$\begin{aligned}(2003)_{10} &= 5 + 6 \times 333_{10}\\ &= 5 + 6 \times (3 + 6 \times 55_{10})\\ &= 5 + 6 \times (3 + 6 \times (1 + 6 \times 9))\\ &= 5 + 6 \times (3 + 6 \times (1 + 6 \times (3 + 6 \times 1)))\\ &= (((\mathbf{1} \times 6 + \mathbf{3}) \times 6 + \mathbf{1}) \times 6 + \mathbf{3}) \times 6 + \mathbf{5}\\ &= 13135_6\end{aligned}$$

Autre exemple : $(2009)_{10}$ en base 16 ?

$$\begin{aligned}(2009)_{10} &= 9 + 16_{10} \times 125_{10}\\ &= 9 + 16_{10} \times (13_{10} + 16_{10} \times 7)\\ &= 9 + 16_{10} \times (d + 16_{10} \times 7)\\ &= (\mathbf{7} \times (16)_{10} + \mathbf{d}) \times (16)_{10} + \mathbf{9}\\ &= 7d9_{16}\end{aligned}$$

Exercices

Convertir les nombres suivants de la base 10 **en indiquant les étapes intermédiaires** :

1. 2017_{10} vers la base 8
2. 2003_{10} vers la base 16
3. 2009_{10} vers la base 6
4. 2012_{10} vers la base -8

Conversion rapide vers la base 2 (1/2)

- Conversion de base 10 vers 2 :
  trop long avec la **forme de Horner**
- Astuce : convertir vers la base 8 ou 16 puis en binaire
- Soit deux bases b et b' avec $b' = b^p$
- On ajoute des des 0 à gauche pour avoir $n \bmod p = 0$

$$\begin{aligned}(a_{n-1} \cdots a_0)_b &= \sum_{0 \le i < n} a_i b^i \\ &= \sum_{0 \le i < n/p} (b^i \sum_{0 \le j < p} a_{pi+j} b'^j)\end{aligned}$$

Conversion rapide vers la base 2 (2/2)

octal	binaire	hexadécimal	binaire	hexadécimal	binaire
0	000	0	0000	8	1000
1	001	1	0001	9	1001
2	010	2	0010	A	1010
3	011	3	0011	B	1011
4	100	4	0100	C	1100
5	101	5	0101	D	1101
6	110	6	0110	E	1110
7	111	7	0111	F	1111

$$\begin{aligned}
7654_8 &= 111\ 110\ 101\ 100_2 \\
&= 1111\ 1010\ 1100_2 = FAC_{16} \\
c0ffee_{16} &= 1100\ 0000\ 1111\ 1111\ 1110\ 1110_2 \\
&= 110\ 000\ 001\ 111\ 111\ 111\ 101\ 110_2 \\
&= 60177756_8
\end{aligned}$$

Exercices

Convertir les nombres suivants **en indiquant les étapes intermédiaires** :

1. $BAFFE_{16}$ vers l'octal
2. 7756_8 vers l'hexadécimal
3. 1100101011010000_2 en hexadécimal

A connaitre par cœur

décimal	octal	hexadécimal	binaire
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	10
3	3	3	11
4	4	4	100
5	5	5	101
6	6	6	110
7	7	7	111
8	10	8	1000
9	11	9	1001
10	12	A	1010
11	13	B	1011
12	14	C	1100
13	15	D	1101
14	16	E	1110
15	17	F	1111
16	20	10	10000

puissances de 2	
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024

Résumé

Pour convertir

- vers la base 10 : écrire la *formule de Horner* puis effectuer les opérations
- vers une base quelconque : effectuer la série de divisions par la base, les restes des divisions donnent les chiffres du nombre de la droite vers la gauche.
- Entre le binaire et l'octal ou l'hexadécimal, utiliser la méthode rapide.

- La calculatrice en mode programmeur : à connaitre