Dédicace

Je dédie ce travail
À la mémoire de mon père, KABLAM Oi Kablam Simon, en témoignage de ma reconnaissance pour tout ce qu'il a fait pour moi et en signe de mon attachement indéfectible à ses principes et règles.
À ma mère, KASSI Ettien Cécile, qui m'a inculqué des valeurs de persévérance, d'honnêteté et de bonne moralité.
À mes frères et sœurs, pour leur soutien tout au long de mon parcours.
À mes amis, pour leurs encouragements et leurs conseils.
À tous ceux que j'aime.
À tous ceux qui m'aiment.

Remerciements

C'est avec un immense plaisir que je m'apprête à soutenir mon mémoire de MASTER. Je me livre à l'exercice délicat des remerciements.

Je rends gloire et louange à Dieu pour la grâce qu'il m'a accordée, me permettant de maintenir le moral haut tout au long de mon parcours malgré les nombreuses péripéties.

Je tiens à remercier chaleureusement le Professeur DIAGANA Youssouf, Directeur du Laboratoire de Mathématiques et Informatique de l'Unité de Formation et de Recherche Sciences Fondamentales et Appliquées (UFR-SFA) et Professeur Titulaire de l'Université NANGUI ABROGOUA, d'avoir accepté de présider ce jury de mémoire de MASTER. Il a été une source d'inspiration pour nous et nous a transmis un véritable amour pour les Mathématiques.

J'adresse une note spéciale d'appréciation à mon Directeur de mémoire, le Docteur ASSANE Abdoulaye, Maître de Conférences à l'Université NANGUI ABROGOUA. Ses conseils éclairés et ses orientations ont été d'une grande valeur tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Mes sincères remerciements vont également à mon encadrant scientifique, le Docteur BROU Kouadjo Pierre, Maître-Assistant à l'Université NANGUI ABROGOUA. Ses encouragements, ses conseils, sa disponibilité et ses critiques objectives ont été d'une aide précieuse pendant la réalisation de ce travail.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers les membres du jury, notamment le Docteur KOUAKOU Kouassi Vincent, Maître-Assistant à l'Université NANGUI ABROGOUA, pour l'honneur qu'il nous fait en faisant partie de notre jury en tant qu'examinateur.

Mes remerciements s'adressent au Directeur de l'Unité de Formation et de Recherche Sciences Fondamentales et Appliquées (UFR-SFA), Monsieur KRE N'Guessan Raymond, Professeur Titulaire à l'Université NANGUI ABROGOUA, ainsi qu'au Vice Doyen de l'UFR-SFA, Monsieur BENIÉ Anoubilé, Professeur Titulaire à l'Université NANGUI ABROGOUA et à Madame KOUASSI Bienvenue, Secrétaire Principale de l'UFR-SFA, qui, ensemble œuvrent inlassablement pour le bien-être des étudiant(e)s de l'UFR-SFA.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude envers mes amis et condisciples de parcours depuis mes débuts à l'Université NANGUI ABROGOUA.

Résumé

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous penchons sur une étude approfondie de la dépendance intégrale et de la réduction dans le contexte des filtrations bonnes. Nous reprenons les travaux déjà publiés par divers chercheurs dans le domaine de la théorie des filtrations.

Notre approche consiste à examiner ces concepts au sein des filtrations I-adiques, afin d'explorer les propriétés qui leurs sont associées. Nous remarquons que les filtrations I-adiques, sous certaines conditions, présentent toujours une réduction. Par conséquent, nous cherchons à étendre ces propriétés aux filtrations f-bonnes de manière générale.

Mots-clés : Dépendance intégrale, Réduction, Filtration bonne.

Abstract

In this dissertation, we focus on an in-depth study of integral dependence and reduction in the context of good filtrations. We take up work already published by various researchers in the field of filtration theory.

Our approach consists of examining these concepts within I-adic filtrations, in order to explore the properties associated with them. We notice that I-adic filtrations, under certain conditions, always show a reduction. Therefore, we seek to extend these properties to f-good filtrations in general.

Keywords : Integral dependence, Reduction, Good filtration.

Notations

$\mathbb{N}^*$	Ensemble des nombres entiers naturels privés de 0
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{K}$	Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$A[X]$	Anneau des polynômes à coefficients dans A d'indéterminée X
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{F}(A)$	Ensemble des filtrations sur le module A
$R(A,f)$	Anneau de Rees par rapport à la filtration f de A
$\mathcal{R}(A,f)$	Anneau de Rees généralisé par rapport à la filtration f de A
f_I	La filtration I-adique
e	Élément neutre d'un groupe
0_A	Élément neutre par rapport à la première loi de l'anneau
1_A	Élément neutre par rapport à la deuxième loi de l'anneau
id_A	L'application identité de A
$P(f)$	Clôture prüférienne de f.
$f^{(k)}$	Filtration extraite de f d'ordre k
$t_k f$	Filtration tronquée de f d'ordre k
I_r	Matrice identité d'ordre r
$0_{r,1}$	Matrice nulle de dimension (r,1)
P_T	Polynôme caractéristique associé à T

Table des matières

Remerciements ii

Résumé iii

Abstract iv

Notations v

Introduction 1

Chapitre 1: GÉNÉRALITÉS 2

1.1 Relation d'équivalences, groupe et sous-groupe . . . 2
1.1.1 Relation d'équivalences . . . 2
1.1.2 Relation d'ordre . . . 3
1.1.3 Groupe . . . 3
1.1.4 Sous-groupe . . . 3
1.2 Anneau, Corps, Espace vectoriel et Morphisme d'anneaux . . . 4
1.2.1 Anneau . . . 4
1.2.2 Corps . . . 4
1.2.3 Espace vectoriel . . . 5
1.2.4 Morphisme d'anneaux . . . 5
1.2.5 Anneau gradué . . . 6
1.3 Module . . . 6
1.4 Idéal . . . 7
1.4.1 Idéal premier . . . 8
1.4.2 Idéal primaire . . . 8
1.4.3 Idéal maximal . . . 8
1.4.4 Radical d'un idéal . . . 8
1.5 Filtrations . . . 9
1.5.1 Filtration sur un anneau . . . 9
1.5.2 Filtration sur un module . . . 10
1.6 Anneaux gradués associés à une filtration . . . 10
1.6.1 Anneau de Rees d'une filtration . . . 10
1.6.2 Anneau gradué d'une filtration . . . 11
1.6.3 Quelques exemples de filtrations . . . 11
1.6.4 Classification des filtrations sur un anneau . . . 12

1.6.5 Caractérisation des filtrations 13

Chapitre 2: DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION I-ADIQUE **15**

2.1 Dépendance intégrale 15

2.1.1 Dépendance intégrale sur les anneaux 15

2.1.2 Dépendance intégrale sur un idéal 20

2.2 Réduction d'un idéal 22

2.2.1 Définitions et propriétés 22

2.2.2 Réduction minimale d'un idéal 27

Chapitre 3: DÉPENDANCE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES **28**

3.1 Dépendance intégrale de filtration 28

3.2 Clôture intégrale d'une filtration 29

3.3 Réduction d'une filtration 34

3.3.1 Réduction au sens de Okon-Ratliff 34

3.3.2 Réduction au sens de Dichi-Sangaré 37

3.4 Filtrations f-bonnes 40

Conclusion et perspectives **46**

Bibliographie **48**

Introduction

La notion d'élément entier sur un idéal I d'un anneau noethérien A a été introduit dans [9] par Prüfer dans les années 1930. Un élément x de A est dit entier sur l'idéal I de A s'il vérifie une équation de la forme $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ qui est nulle, où les a_j appartiennent à I^j pour tout entier j allant de 1 à n.
La clôture intégrale de l'idéal I est l'idéal I' formés des éléments x de A qui sont entiers sur I. L'idéal J de A est dit entier sur l'idéal I si J est contenu ou égal à I'.
Northcott et Rees dans [7] ont défini dans un anneau local noethérien la notion de réduction d'un idéal sur un autre qui est proche de la notion d'élément entier sur un idéal introduit par Prüfer. L'idéal I est une réduction de l'idéal J si I est contenu dans J et s'il existe un entier N supérieur ou égal à 1 tel que J^N est égal à IJ^{N-1}.
Une filtration de l'anneau A est une famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'idéaux de A, décroissante pour l'inclusion et vérifiant I_0 est égal à A et I_nI_m est contenu dans I_{n+m} pour tout $m, n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{F}(A)$ l'ensemble des filtrations de l'anneau A. Soit I un idéal de A, une filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite $I-bonne$ si pour tout entier n de $\mathbb{N}$, II_n est contenu ou égal à I_{n+1} et s'il existe k un entier tel que pour tout n supérieur ou égal à k, II_n est égal à I_{n+1}. Les filtrations les plus usuelles sont les filtrations *adiques*. En particulier, toute filtration $I-adique$ est $I-bonne$ pour tout I, idéal de A.

En soulignant les contributions majeures des éminents mathématiciens, cette étude aspire à expliciter les résultats de Dichi H. dans [3] qui constitue une contribution significative à l'édifice des connaissances, en poursuivant le développement et la généralisation des notions de dépendance intégrale, de réduction, et de filtrations bonnes.

Malgré les avancées significatives réalisées dans l'étude des notions de dépendance intégrale, de réduction et de filtrations bonnes des questionnements demeurent quant à leur généralisation et à leur interconnexion dans des cadres mathématiques diversifiés. Comment étendre de manière rigoureuse les résultats obtenus dans le contexte restreint de la filtration I-adique à des filtrations de nature plus générale, telles que les filtrations bonnes ? Comment ces notions sont-elles liées ?

Afin de répondre à ces interrogations, notre étude s'articule autour de trois axes majeurs. Dans un premier temps, nous plongeons dans l'étude approfondie de la dépendance intégrale, en explorant ses origines historiques et en analysant ses implications dans le contexte des anneaux commutatifs. Nous poursuivons ensuite, notre étude en examinant la réduction au sein de la filtration I-adique, avant d'élargir notre perspective à des filtrations bonnes, mettant en lumière les liens conceptuels et les différences inhérentes à ces contextes variés. En adoptant cette démarche, nous aspirons à contribuer à l'enrichissement des connaissances dans le domaine de l'Algèbre Commutative, tout en offrant des perspectives nouvelles sur des concepts fondamentaux de cette discipline.

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre, nous posons les bases en rappelant plusieurs définitions et propriétés importantes vues dans [3] et liées à divers concepts de notre étude. Parmi ces éléments, nous explorons les structures algébriques notamment les anneaux et les modules. Ensuite, nous définissons et classifions les différentes types de filtrations. De plus, nous récapitulons quelques résultats importants associés aux filtrations I-bonnes et présentations un lien entre les filtrations I-bonnes et les autres classes de filtrations.

Dans l'ensemble de ce mémoire, sauf mention contraire, les anneaux considérés sont supposés commutatifs et unitaires.

1.1 Relation d'équivalences, groupe et sous-groupe

1.1.1 Relation d'équivalences

Définition 1.1. *On appelle relation d'équivalences sur un ensemble non vide E, une relation $\Re$ sur E vérifiant les conditions suivantes :*

a) $\forall x \in E, x\Re x$ *;*

b) $\forall x, y \in E, x\Re y \Longrightarrow y\Re x$ *;*

c) $\forall x, y, z \in E,$ *[*$x\Re y$ *et* $y\Re z$*]* $\Longrightarrow (x\Re z)$*.*

La partie $C_x = \{y \in E,\ x\Re y\}$ *de E est appelée la classe d'équivalence modulo* $\Re$ *de* $x \in E$*. Les classes d'équivalence constituent une partition de E. Notons* $\mathcal{P}(E)$ *l'ensemble des parties de E. La famille* $(C_x)_{x\in E}$ *constituant* $\mathcal{P}(E)$ *est appelée l'ensemble quotient de E par* $\Re$*. On le note* $E/\Re$*. Dans la suite, la classe de* $x \in E$ *sera vue essentiellement comme élément de ce nouvel ensemble* $E/\Re$ *et sera notée* $\bar{x}$*.*

1.1.2 Relation d'ordre

Définition 1.2. *On appelle relation d'ordre sur un ensemble non vide E, une relation $\Re$ sur E vérifiant les conditions suivantes :*

a) $\forall x \in E, x\Re x$ *;*

b) $\forall x, y \in E, [x\Re y$ *et* $y\Re x] \Longrightarrow y = x$ *;*

c) $\forall x, y, z \in E,$ $[x\Re y$ *et* $y\Re z] \Longrightarrow (x\Re z)$ *.*

L'ensemble $(E, \Re)$ *s'appelle alors ensemble ordonné. L'ordre est dit total si deux éléments quelconques sont toujours comparables (on dit aussi que l'ensemble est totalement ordonné). Sinon, il est dit partiellement ordonné.*

1.1.3 Groupe

Définition 1.3. *Soit G un ensemble non vide.*
On dit que $(G, \star)$ *est un groupe si* $\star$ *est une loi de composition interne de G vérifiant :*

(i) La loi $\star$ *est associative. C'est-à-dire,*

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c,\ \forall (a, b, c) \in G^3;$$

.

(ii) $\star$ *possède un élément neutre e. En d'autres termes,*

$$\forall a \in G,\ e \star a = e = a \star e;$$

.

(iii) Tout élément de G admet un symétrique. Autrement dit,

$$\forall a \in G,\ \exists b \in G,\ a \star b = e = b \star a;$$

(iv) Si de plus la loi $\star$ *est commutative, c'est-à-dire*

$$a \star b = b \star a,\ \forall (a, b) \in G^2.$$

On dit que le groupe $(G, \star)$ *est abélien ou commutatif.*

1.1.4 Sous-groupe

Définition 1.4. *Soit* $(G, \star)$ *un groupe d'élément neutre e.*
On dit que $H \subset G$ *est un sous-groupe de G si :*

(i) e appartient à H,

(ii) La partie H est stable par la loi $\star$*. Autrement dit,*

$$\forall (a, b) \in H^2, a \star b \in H;$$

(iii) $\forall a \in H, a^{-1} \in H$*.*

1.2 Anneau, Corps, Espace vectoriel et Morphisme d'anneaux

1.2.1 Anneau

Définition 1.5. *Soit A un ensemble non vide muni de deux lois de compositions internes. On dit que $(A, +, \times)$ est un anneau si :*

(i) $(A, +)$ *est un groupe abélien ;*

(ii) La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$;

(iii) La loi $\times$ est associative.

L'anneau est dit commutatif si la loi $\times$ est commutatif.

Exemple 1.1. $(\mathbb{Z}, +, .), (\mathbb{R}, +, .)$ *et* $(\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, .)$ *sont des anneaux commutatifs unitaires.*

Remarque 1.1. *L'élément neutre de la loi $+$ dans A est noté 0_A. Si de plus il existe un élément neutre pour la loi $\times$ dans A, cet élément est appelé l'élément unité et est noté 1_A. On dit alors que l'anneau A est unitaire.*

Définition 1.6. *Soient $(A, +, \times)$ un anneau et B un sous-ensemble de A.*
On dit que B est un sous-anneau de A si :

(i) $1_A \in B$ *;*

(ii) $\forall\ x, y \in B, x - y \in B$ *;*

(iii) $\forall\ x, y \in B, xy \in B$.

Définition-Proposition 1.1. *(Anneau noethérien)*
Soit A une anneau commutatif unitaire. On dit que A est un anneau noethérien si l'une des trois assertions équivalentes est vérifiée :

(i) Tout idéal de A est de type fini ;

(ii) Toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire ;

(iii) Toute famille non vide d'idéaux de A admet un élément maximal pour l'inclusion.

1.2.2 Corps

Définition 1.7. *Un corps est un anneau dans lequel tout élément non nul est inversible.*

Exemple 1.2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont des corps.*

1.2.3 Espace vectoriel

Définition 1.8. *Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit E un ensemble (non vide). On appelle loi externe sur E la donnée d'une application définie sur le produit cartésien $\mathbb{K} \times E$ et à valeurs dans E.*

Définition 1.9. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. On dit qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'il est muni d'une loi de composition interne commutative, notée + et d'une loi externe de $\mathbb{K}$, notée $\times$, telle que :*

1. *(E, +) est un groupe additif d'élément neutre noté 0_E.*
2. *Les lois + et $\times$ sont compatibles entre elles. C'est-à-dire qu'elle vérifient :*
   (a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \lambda \times (u + v) = \lambda \times u + \lambda \times v;$
   (b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda \times \mu) \times u = \lambda \times (\mu \times u);$
   (c) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \times u = (\lambda \times u) + (\mu \times v);$
   (d) $\forall u \in E, 1_{\mathbb{K}}.u = u.$

Exemple 1.3. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Alors :*

(i) $\mathbb{K}^n$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel* $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $\mathbb{K}[X]$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(iii) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est un espace vectoriel.*

Définition 1.10. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si elle est compatible avec les structures de $\mathbb{K}$-espaces sur E et sur F. Autrement dit si f vérifie :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(\lambda \times u) = \lambda \times f(u).$
2. $\forall u, v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v).$

1.2.4 Morphisme d'anneaux

Définition 1.11. *Soient deux anneaux $(A, \star, \circ)$ et $(B, *, \diamond)$.*
Une application $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux ou homomorphisme si :

(i) $f(x \star y) = f(x) * f(y)$;

(ii) $f(x \circ y) = f(x) \diamond f(y), \forall (x, y) \in A^2.$

On dit de plus que f est un :
- Endomorphisme lorsque $A = B$.
- Isomorphisme lorsque f admet une application réciproque g telle que $f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$.

Proposition 1.1. *(Théorème d'isomorphisme d'anneaux)*
Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.
Son noyau Ker(φ) est un idéal de A et son image Im(φ) est un sous-anneau de B.
De plus, on a

$$\frac{A}{Ker(\varphi)} \simeq Im(\varphi).$$

Avec Ker(φ) $= \{a \in A : \varphi(a) = 0\}$ et Im(φ) $= \{\varphi(a) : a \in A\}$.

1.2.5 Anneau gradué

Définition 1.12. *Soit A un anneau.*
Une graduation sur A est une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-groupes stables de $(A,+)$ vérifiant :

i) $A_pA_q \subset A_{p+q}$ *;*

ii) $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$.

Si pour tout entier n négatif, les A_n sont tous égaux au sous-groupe nul, on dit que A est positivement gradué ou que A est gradué de type $\mathbb{N}$. Ainsi $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Les éléments de A_n, pour tout entier n de $\mathbb{N}$ sont dits de degré n.

Remarque 1.2. *Soit A un anneau.*
Si $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alors :

$$\begin{cases} 1_A \in A_0, \\ A_0 \text{ est un sous-anneau de } A. \\ A_+ = \bigoplus_{n\geqslant 1} A_n \text{ est un idéal de } A. \end{cases}$$

Exemple 1.4. *Soit A un anneau commutatif unitaire.*

1) $A[X] = A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} AX^n$, $A_n = AX^n = \{\alpha X^n, \alpha \in A, n \in \mathbb{N}\}$.

2) $A[X^{-1}, X] = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$, $A_n = AX^n = \{\alpha X^n, \alpha \in A, n \in \mathbb{Z}\}$.

1.3 Module

Définition 1.13. *Soit A un anneau commutatif unitaire.*
Un A-module ou module sur A est un groupe abélien $(M,+)$ muni d'une multiplication externe $A \times M \to M, (a,x) \mapsto ax$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\forall a, b \in A, \forall x \in M, (a+b)x = ax + bx$ *;*

(ii) $\forall a \in A, \forall x, y \in M, a(x+y) = ax + ay$ *;*

(iii) $\forall x \in M$, $1_A x = x$ *;*

(iv) $\forall a, b \in A, \forall x \in M$, $a(bx) = (ab)x$.

Remarque 1.3.

(i) Si A est un anneau, alors A est un $A-$module.

(ii) Si A est un corps, alors tout $A-$module est un $A-$espace vectoriel.

Exemple 1.5.

Si A est égal à $\mathbb{Z}$, tout sous-groupe abélien peut être vu comme un $\mathbb{Z}-$module.

Définition 1.14. *Soit M un A-module. Un sous-module de M est un sous-ensemble N de M tel que :*

(i) $0_M \in N$;

(ii) $\forall x, y \in N \; x + y \in N$;

(iii) $\forall x \in N, \forall a \in A \; ax \in N$.

Définition 1.15. *Soit M un A-module. M est dit de type fini s'il admet un système générateur fini. En d'autres termes,*

$$\exists \, x_1, \cdots, x_r \in M \; , \forall \, x \in M, x = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i, \; a_i \in A.$$

Définition-Proposition 1.2. *(Module noethérien)*
Soient A un anneau et M un $A-$module. On dit que M est un module noethérien si l'une des trois assertions équivalentes est vérifiée :

(i) Tout sous-module de M est de type fini ;

(ii) Toute suite croissante de sous-modules de M est stationnaire ;

(iii) Tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément maximal pour l'inclusion.

Définition 1.16. *(A-algèbre de type fini)*
Soit A un anneau.
On dit que B est une $A-$algèbre de type fini si :

(i) B est un $A-$module ;

(ii) B est un anneau ;

(iii) $B = A[b_1, \cdots, b_r] \simeq \dfrac{A[X_1, \cdots, X_r]}{J}, \; b_i \in B,$

avec J idéal de $A[X_1, \cdots, X_r]$.

1.4 Idéal

Définition 1.17. *Soit A un anneau.*
Un idéal de A est une partie I de A vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $0_A \in I$;

(ii) $\forall \; x, y \in I, x + y \in I$;

(iii) $\forall \; a \in A \; , \; x \in I, ax \in I$.

Exemple 1.6.

(i) Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Si A est un corps alors tout idéal I de A est nul ou est égale à A tout entier.

1.4.1 Idéal premier

Définition 1.18. *Soit A un anneau. Un idéal P de A est dit premier s'il est strict et si pour tout x, y deux éléments de A tels que xy appartient à P, alors*

$$x \in P \quad ou \ \ y \in P.$$

On note $Spec(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau A.

1.4.2 Idéal primaire

Définition 1.19. *Soit A un anneau. Un idéal Q de A est dit primaire s'il est strict et si pour tout x, y deux éléments de A tels que xy appartient à Q, x n'appartenant pas à Q alors*

$$\exists n \in \mathbb{N}\ , y^n \in Q.$$

1.4.3 Idéal maximal

Définition 1.20. *Soit A un anneau. Un idéal I de A est dit maximal s'il est strict et s'il n'est contenu dans aucun autre idéal strict de A.*

Remarque 1.4. *Un anneau qui ne possède qu'un seul idéal maximal est appelé anneau local.*

1.4.4 Radical d'un idéal

Définition 1.21. *Soient A un anneau, I un idéal de A. On appelle radical de I,*

$$\sqrt{I} = \{a \in A, \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}.$$

Remarque 1.5. *Si I est un idéal de A, alors $\sqrt{I}$ est un idéal de A.*

Proposition 1.2. *Soient A un anneau et I un idéal de A.*

(i) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ *;*

(ii) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ *;*

(iii) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$ *avec* $I + J = \{x + y,\ x \in I, y \in J\}$ *;*

(iv) Si $P \in Spec(A), \sqrt{P} = P$.

Exemple 1.7. $A = \mathbb{Z}$, $I = 6\mathbb{Z}$.
$\sqrt{I} = \sqrt{6\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$.
$\sqrt{24\mathbb{Z}} = \sqrt{(2^3 \times 3)\mathbb{Z}} = \sqrt{2^3\mathbb{Z}} \cap \sqrt{3\mathbb{Z}} = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = ppcm(2, 3)\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$.

Remarque 1.6. *Si I est un idéal du module M, $IM = \{\sum\limits_{finie} a_i x_i,\ a_i \in I,\ x_i \in M\}$ est un sous module de M.*

Proposition 1.3. *Soient A un anneau, I, J des idéaux de A.*
On a :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*, (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} I^k J^{n-k}$;

(ii) $I \subset J \implies I^k \subset J^k, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

(iii) $nI = I, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1.5 Filtrations

1.5.1 Filtration sur un anneau

Définition 1.22. *Soit A un anneau. On appelle filtration de A toute famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'idéaux de A telle que :*

(i) $I_0 = A$;

(ii) $\forall\ n \in \mathbb{Z}, I_{n+1} \subset I_n$;

(iii) $\forall\ p, q \in \mathbb{Z}, I_p I_q \subset I_{p+q}$.

L'ensemble des filtrations de l'anneau A est noté $\mathbb{F}(A)$.
Pour tout f, g éléments de $\mathbb{F}(A)$, cet ensemble est ordonné par

$$f = (I_n) \leqslant g = (J_n) \Longleftrightarrow I_n \subseteq J_n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 1.7. *Dans la définition (*1.22*), il est facile de remarquer que, pour tout n inférieur ou égal à 0, I_n est égal à A. En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que $I_0 = A$ (i), il vient d'une part que I_0 est contenu dans I_n, pour tout n négatif (ii). Ainsi A est contenu dans I_n. D'autre part, comme pour tout entier relatif n de $\mathbb{Z}$, les I_n sont des idéaux de A, alors I_n est contenu dans A.*
Donc I_n est égal à A, pour tout n inférieur ou égal à 0.

Ainsi au lieu d'étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples 1.1. *1. Soit I un idéal de A et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que*

$$I_{3n} = I_{3n-1} = I_{3n-2} = I^n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

2. Soit $A = \dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$I_1 = I_2 = (\bar{2})$$

$$I_n = (\bar{0}),\ \forall\ \ n \geqslant 3.$$

Définition 1.23. *On définit pour toutes filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ de A les trois opérations suivantes :*

(1) Le produit $fg = (I_n J_n)$;

(2) L'intersection $f \cap g = (I_n \cap J_n)$;

(3) La somme $f+g=(K_n)$ *où pour tout entier* n,

$K_n = \sum\limits_{k=0}^{n} I_k J_{n-k}$.

On vérifie que $fg, f\cap g, f+g$ *sont des filtrations de* A *et pour toutes filtrations* f, g *de* $\mathbb{F}(A)$. *On a*

$$fg \leqslant f\cap g \leqslant f \leqslant f+g.$$

1.5.2 Filtration sur un module

Définition 1.24. *Soit* M *un* A*-module. On appelle filtration de* M *toute famille* $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de sous-modules de* M *telle que :*

i) $M_0 = M$;

ii) $\forall\ n\in\mathbb{Z}, M_{n+1}\subset M_n$.

La filtration $f=(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de* A *et la filtration* $\varphi=(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *du* A*-module* M *sont dites compatibles si*

$$I_pM_q \subset M_{p+q}, \forall\, p, q\in\mathbb{Z}.$$

1.6 Anneaux gradués associés à une filtration

1.6.1 Anneau de Rees d'une filtration

Définition 1.25. *Soit* $f=(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une filtration de l'anneau* A, X *est une indéterminée. On appelle anneau de Rees de f, l'anneau gradué noté R(A,f) tel que*

$$R(A,f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_nX^n.$$

On appelle anneau de Rees généralisé de f, l'anneau gradué noté $\mathcal{R}(A,f)$ *tel que*

$$\mathcal{R}(A,f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_nX^n.$$

On munit $R(A,f)$ *d'une structure de sous-anneau gradué de* $A[X]$, *l'ensemble des polynômes d'indéterminée* X *à coefficients dans* A *dont les opérations sont définies pour des éléments de* $R(A,f)$ *par :*

1. *La multiplication :* $(\sum\limits_{n=0}^{r} a_nX^n)(\sum\limits_{k=0}^{s} b_kX^k) = \sum\limits_{p=0}^{r+s} c_pX^p = \sum\limits_{p=0}^{r+s}\sum\limits_{q=0}^{p} a_{p-q}b_qX^p$;
2. *L'addition :* $\sum\limits_{n=0}^{r} a_nX^n + \sum\limits_{k=0}^{r} b_kX^k = \sum\limits_{j=0}^{r}(a_j+b_j)X^j$.

1.6.2 Anneau gradué d'une filtration

Définition 1.26. *Soient A un anneau, M un A-module*
$f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$, $\phi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(M)$ *telle que ϕ est $f-$compatible. On pose :*

$$G(A, f) = G_f(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \frac{I_n}{I_{n+1}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \frac{I_n}{I_{n+1}};$$

$$G(A, \phi) = G_\phi(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \frac{M_n}{M_{n+1}}.$$

$G_f(A)$ *est muni d'une structure d'anneau gradué dont la multiplication est définie par :* $\forall\ a_n + I_{n+1}, b_p + I_{p+1}$, *deux éléments homogènes de degré $\mathbb{N}$ de $G_f(A)$, On pose*
$(a_n + I_{n+1})(b_p + I_{p+1}) = a_n b_p + I_{n+p+1}$.

Proposition 1.4. *Soient A un anneau, I un idéal de A. Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$ et X une indéterminée. On a :*

(i) $A \subset R(A, f) \subset A[X]$;

(ii) $R(A, f) \subset \mathcal{R}(A, f) \subset A[u, X]$ *où* $u = \dfrac{1}{X} = X^{-1}$;

(iii) $\mathcal{R}(A, f) = R(A, f)[u]$;

(iv) $u^n\mathcal{R}(A, f) \cap A = I_n, \forall n \in \mathbb{Z}$

(v) $R(A, f) = A[I_1X, I_2X^2, \cdots, I_nX^n, \cdots]$;

(vi) $u = \dfrac{1}{X} = X^{-1}$ *est régulier de degré -1 dans $\mathcal{R}(A, f)$ et on a*

$$\mathcal{R}(A, f) = A[u, I_1X, I_2X^2, \cdots, I_nX^n, \cdots];$$

(vii) $\dfrac{R(A, I)}{IR(A, I)} \simeq G_I(A)$ *avec* $R(A, I) = R(A, f_I)$ *et* $G_I(A) = G_{f_I}(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{I^n}{I^{n+1}}$;

(viii) $\dfrac{\mathcal{R}(A, I)}{u\mathcal{R}(A, I)} \simeq G_I(A)$;

(ix) $\dfrac{\mathcal{R}(A, I)}{(u-1)\mathcal{R}(A, I)} \simeq A$.

1.6.3 Quelques exemples de filtrations

a) Filtration I-adique

Définition 1.27. *Soient A un anneau, I un idéal de A.*
La famille $f_I = (I^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout entier n négatif, I^n est égal à A est une filtration de A appelé filtration I-adique et noté f_I.

Remarque 1.8. *Soit I un idéal de l'anneau A si f_I est la filtration $I-adique$ alors l'anneau de Rees de f_I sera simplement noté $R(A, I)$.*

Proposition 1.5. *Soient I un idéal de l'anneau A et f_I est la filtration $I-adique$. Si I est de type fini avec I est égal à $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ alors $R(A, I)$ est égal à $A[a_1X, a_2X, \cdots, a_rX]$.*

Conséquence 1.1. *Si A est un anneau noethérien alors $R(A, I)$ est aussi noethérien.*

b) **Filtration tronqué d'ordre k de f**

Définition 1.28. *Soient A un anneau et f est égal à $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A.*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_k f$ est égal à (K_n) avec K_n est égal à I_{n+k} si n supérieur ou égal à 1 et K_n est égal à A sinon.
Ainsi $t_k f$ est une filtration de A appelé filtration tronqué d'ordre k de f.

c) **Filtration extraite d'ordre k de f**

Définition 1.29. *Soient A un anneau et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A.*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^{(k)} = (I_{nk})_{k\in\mathbb{N}^*}$.
Ainsi $f^{(k)}$ est une filtration de A appelé filtration extraite d'ordre k de f.

d) **Filtration définie par une graduation**

Définition 1.30. *Soit $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ un anneau gradué de type $\mathbb{N}$.*
Posons $J_n = \bigoplus_{n\geqslant p} A_p$.
$f = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration de A.

e) **Filtration de type fini**

Définition 1.31. *Soient A un anneau. $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A.*
On dit que la filtration f est de type fini si I_n est de type fini pour tout entier n de $\mathbb{N}$ assez grand.

1.6.4 Classification des filtrations sur un anneau

a) **Filtrations I-bonnes**

Définition 1.32. *Soient A un anneau.*
$f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A. f est dite I-bonne si :

i) $II_n \subseteq I_{n+1}\,, \forall n \in \mathbb{Z}$;

ii) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $II_n = I_{n+1}, \forall n \geqslant n_0$.

Conséquence 1.2. *$II_{n_0} = I_{n_0+1}$, en multipliant par I, on a $I^2 I_{n_0} = II_{n_0+1} = I_{n_0+2}$. Ainsi de proche en proche, on obtient $I^n I_{n_0} = I_{n_0+n}$, pour tout n supérieur ou égal à 1.*

b) **Filtrations A.P.**

Définition 1.33. *La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite Approximable par des Puissances d'idéaux (en abrégé A.P.) s'il existe $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels telle que :*

(i) $\forall\ n,m \in \mathbb{N}$, $I_{mk_n} \subset I_n^m$;

(ii) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1.$

c) Filtrations fortement A.P.

Définition 1.34. *La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite fortement Approximable par des Puissances d'idéaux (en abrégé fortement A.P.) s'il existe un entier k supérieur ou égal à 1 tel que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{nk} = I_k^n.$$

d) Filtrations E.P.

Définition 1.35. *La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite Essentiellement par des Puissances d'idéaux (en abrégé E.P) s'il existe un entier N supérieur ou égal à 1 tel que :*

$$\forall\, n \geqslant N,\ I_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p.$$

e) Filtrations noethériennes

Définition 1.36. *La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite noethérienne si son anneau de Rees $R(A, f)$ est noethérien.*

f) Filtrations fortement noethériennes

Définition 1.37. *La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite fortement noethérienne s'il existe un entier k supérieur ou égal à 1 tel que :*

$$\forall\, m, n \in \mathbb{Z},\ m, n \geqslant k \implies I_m I_n = I_{m+n}.$$

1.6.5 Caractérisation des filtrations

Caractérisation des filtrations noethériennes

Proposition 1.6. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$.*
Si A est noethérien, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{R}(A, f)$ *est noethérien ;*

(ii) $R(A, f)$ *est noethérien ;*

(iii) f *est E.P. ;*

(iv) $\exists n \geqslant 1, \forall n \geqslant k, I_{n+k} = I_n I_k$.

Exemple 1.8. *Soit A un anneau noethérien et I un idéal de A.*
Posons $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} I_0 = A; \\ I_{2n} = I_{2n-1} = I^n\ ,\ \forall n \geq 1. \end{cases}$

Montrons que pour tout n supérieur ou égal à 1, $I_{n+2} = I_n I_2$.

Suivant la parité de n, il vient $n = 2p$ ou $n = 2p + 1$, pour tout entier p de $\mathbb{N}$.

* *Si $n = 2p$.*

$I_{2p+2} = I_{2(p+1)} = I^{p+1} = I^p I = I_{2p} I_2$ ($I^k \subseteq I_k$).

* *Si $n = 2p + 1$.*

$I_{2p+1+2} = I_{2(p+1)+1} = I_{2(p+2)-1} = I^{p+2} = I^{p+1} I^1 = I_{2(p+1)-1} I_{2\times 1} = I_{2p+1} I_2$.

Dans tous les cas pour tout n supérieur ou égal à 1, $I_{n+2} = I_n I_2$.

On en déduit que f est noethérienne.

Remarque 1.9. *([4])*
Soient A un anneau noethérien, I un idéal de A et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Nous avons les résultats suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & f\ E.P & & \\
f\ I\text{-adique} \arrow[r] & f\ I\text{-bonne} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & f \text{ fortement } A.P \arrow[r] & f\ A.P \\
 & f \text{ fortement noethérienne} \arrow[r] & f \text{ noethérienne} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Chapitre 2

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION I-ADIQUE

Dans ce second chapitre, notre étude se concentrera sur les filtrations I-adiques, lesquelles représentent un cas spécifique de filtrations bonnes.

2.1 Dépendance intégrale

2.1.1 Dépendance intégrale sur les anneaux

Définition 2.1. ***(Élément Entier)***
Soient B un anneau et A un sous-anneau de B (A est contenu dans B).
Un élément x de B est dit ***entier*** *sur A s'il est* ***racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans*** *A.*
En d'autres termes, s'ils existent $a_1, a_2, \cdots, a_n$ éléments de A tels que :

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_ix^{n-i} + \cdots + a_n = x^n + \sum_{i=1}^{n} a_ix^{n-i} = 0,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.1}$$

Cette relation (2.1) est appelée ***équation de dépendance intégrale*** *de x sur A. On dit que B est entier sur A lorsque tous les éléments de B sont entiers sur A.*

Exemple 2.1. *Posons $B = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Z}$. A est un sous-anneau de B.*
• *$x = \sqrt{5}$ est solution de l'équation $x^2 - 5 = 0$. Donc $\sqrt{5}$ est entier sur $\mathbb{Z}$.*
• *$x = \sqrt{2} + 1$ est solution de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.*
Donc $x = \sqrt{2} + 1$ est entier sur $\mathbb{Z}$.

Contre exemple 2.1. *Cependant, $\dfrac{1}{2}$ n'est pas entier sur $\mathbb{Z}$.*
En effet, si $\dfrac{1}{2}$ est entier sur $\mathbb{Z}$, alors $\dfrac{1}{2}$ est solution d'une équation de dépendance intégrale. Alors :

$\exists\ n \geq 1, \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} = 0\ ,\ a_i \in \mathbb{Z}.$
D'où $\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{1}{2}\right)^{-i}\right] = 0.$
Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \neq 0$ *alors* $1 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 2^i = 0.$
D'où $1 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 2^i = 0.$
Donc $1 = 2\left(\sum\limits_{i=1}^{n} -a_i 2^{i-1}\right).$
Par suite, 1 *appartient à* $2\mathbb{Z}$. *Ce qui est **Absurde**.*

Proposition 2.1. *Soient B un anneau et A un sous-anneau de B (A est contenu dans B).*
Soit x appartenant à B.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) x est entier sur A ;

ii) $A[x]$ est un A-module de type fini ;

iii) Il existe C un sous-anneau de B contenant $A[x]$ tel que C soit un A-module de type fini.

Démonstration. $i \implies ii)$
Supposons que x est entier sur A.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0,$ pour tout $i \in [\![1;n]\!], a_i \in A$.
D'où il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $x^n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i) x^{n-i},$ pour tout $i \in [\![1;n]\!], a_i \in A$.
Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $x^n \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1}) = A[x]$.
• Montrons que $A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1}) = A[x]$.
a) Par construction, $A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$ est contenu dans $A[x]$.
b) Réciproquement, montrons par récurrence sur m que pour tout $m \in \mathbb{N}, x^m \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.
* Si $m \in [\![0; n-1]\!]$, alors $x^m \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.
* Si $m \geq n$, alors $m = n + p$, $p \geq 0$.
<u>Initialisation</u>
Si $p = 0$ alors $x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ alors $x^n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i) x^{n-i}$.
Comme $1 \leq i \leq n$, alors $0 \leq n - i \leq n - 1$.
D'où, $x^n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i) x^{n-i} \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.
Donc la propriété est vraie pour $p = 0$.
<u>Hérédité</u>
Soit $p \geq 0$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, p]\!], x^{n+k} \in A(1, x, x^2, ..., x^{n-1})$.
Montrons que $x^{n+p+1} \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.
$x^{n+p+1} = x^{p+1} x^n = x^{p+1} \times \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i) x^{n-i} = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i) x^{n+p+1-i}$.
Comme $1 \leq i \leq n$, alors $p + 1 \leq n + p + 1 - i \leq n + p$.

Ainsi par hypothèse de récurrence, $x^{n+p+1-i} \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$ et par stabilité, il vient $x^{n+p+1} \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.

Par suite, pour tout $m \in \mathbb{N}, x^m \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.

Donc $A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1}) = A[x]$.

$A[x]$ est donc un $A-$module de type fini de générateur $(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.

$ii) \implies iii)$ Il suffit de poser $A[x] = C$.

$iii) \implies i)$ Supposons qu'il existe C un sous module de B contenant $A[x]$ qui soit un $A-$module de type fini.

Soit $x \in A$.

$A[x]$ est contenu dans $C = A(y_1, y_2, ..., y_r)$ de type fini.

Ainsi, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, $xy_i \in C$. On a :

$xy_i = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}y_j$ alors $\sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}y_j - xy_i = 0$ alors $\sum\limits_{j=1}^{r} (a_{ij} - \delta_{ij}x)y_j = 0$.

Où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j; \\ 0 & sinon. \end{cases}$

D'où $\begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{22} & a_{11} - x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & \cdots & a_{rr} - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Posons $T = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$, $Y = (y_j)_{1 \leq j \leq r}$.

Ainsi $(T - xI_r) \times Y = 0_r$.

$(T - xI_r) \times Y = 0$ ainsi ${}^t com(T - xI_r) \times Y[(T - xI_r) \times Y] = 0$.

Alors $\det[(T - xI_r)Y] = 0$.

D'où $\det(T - xI_r)y_i = 0$, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$.

$P_T(x)y_i = 0$, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$.

De plus, $1_A \in C$, on peut donc supposer qu' il existe $i \in [\![1; r]\!]$, tel que $y_i = 1_A$.

D'où $P_T(x) = 0$.

Or P_T est un polynôme unitaire qui s'écrit :

$P_T(x) = x^n - tr(T)x^{n-1} + ... + (-1)^n \det(T) = x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x^{n-i}, \alpha_i \in A$.

Donc $P_T(x) = 0$ alors $x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x^{n-i} = 0, \alpha_i \in A$ alors x est entier sur A.

□

Corollaire 2.1. *Soient A et B deux anneaux tels que A est contenu dans B et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ appartenant à B.*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) pour tout i appartenant à $[\![1; n]\!], x_i$ est entier sur A ;

ii) $A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ est un A-module de type fini ;

iii) Il existe un $A-$module de type fini C, contenu dans B tel que x_iC soit contenu dans C, pour tout i appartenant à $[\![1; n]\!]$.

Démonstration. En faisant comme démonstration de la proposition (2.1) et en procédant de proche en proche. □

Définition 2.2. *Soit A contenu dans B une inclusion d'anneaux.*
On qualifie B d'une ***A-algèbre*** *lorsque B peut être appréhendé simultanément en tant que module sur A et en tant qu'anneau.*
De plus, B est dit ***de type fini*** *si B est un $A-$ module de type fini.*

Corollaire 2.2. ***(Clôture intégrale d'anneaux)****[3]*
Soit A contenu dans B une inclusion d'anneaux.
L'ensemble des éléments de B entiers sur A est un sous-anneau de B contenant A appelé ***clôture intégrale*** *de B dans A notée A'.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que A' est un sous anneau de B.
$i)$ 1_B appartient à A et $x - 1_B$ est nul donc 1_B appartient à A'.
D'où $A \subset A' \subset B$.
$ii)$ Soient x, y appartenant à A'.
x appartient à A' alors $A[x]$ est un $A-$module de type fini.
y appartient à A' alors $A[y]$ est un $A-$module de type fini.
Posons $C = A[x, y] = A[x][y]$.
Ainsi pour tout $z \in C, z = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i y^i, \alpha_i \in A[x]$. Ainsi $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_{ij} x^j$.
D'où $z = \sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_{ij} x^j y^i$.
Donc $C = A(x^j y^i)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s,}$ est un système de générateur fini de C.
Par suite, C est un $A-$module de type fini.
De plus $A[x + y]$ est contenu dans C ainsi $A[x + y]$ est de type fini et donc $x + y$ est entier sur A.
Par suite $x + y \in A'$. De même $A[xy]$ est de type fini et donc xy est entier sur A.
Par suite $xy \in A'$.
On en déduit que A' est un sous anneau de B. □

Corollaire 2.3. *Soient A contenu dans B et B contenu dans C deux inclusions d'anneaux.*
Si C est entier sur B et B est entier sur A alors C est entier sur A.

Démonstration. Soit $x \in C$.
Comme x est entier sur B alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-b_i) x^{n-i}$, pour tout $b_i \in B, i \in [\![1; n]\!]$.
Soit $i \in [\![1; n]\!]$, $A[b_i]$ est un $A-$module de type fini (car B entier sur A).
Donc $A[b_1, b_2, ..., b_n]$ est un $A-$module de type fini.
Ainsi $A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$ est un $A-$module de type fini.
Soit $p \geq 0$. Montrons que $x^{n+p} \in A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$.
<u>Initialisation</u> $(p = 0)$.
$x^n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-b_i) x^{n-i} \in A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$.
<u>Hérédité</u> $(p \geq 0)$.
Supposons que pour tout $k \in [\![0; p]\!], x^{n+k} \in A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$.
$x^{n+p+1} = x^n \times x^{p+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} (-b_i) x^{n+p+1-i}$.

Comme $1 \leq i \leq r$ alors $n+p+1-r \leq n+p+1-i \leq n+p$.

Donc par hypothèse de récurrence, $x^{n+p+1-i} \in A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, ..., b_n]$.

Par stabilité, il vient $x^{n+p+1} \in A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, ..., b_n]$.

Donc $x^{n+p} \in A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, ..., b_n]$.

Par suite, $A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, ..., b_n]$ est un $A-$module de type fini, c'est à dire $A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, ..., b_n] = A(z_1, z_2, ..., z_s)$.

Posons $H = A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, ..., b_n]$ et $H' = A(1, x, ..., x^{n-1}, z_1, z_2, ..., z_s)$.

H' est un $A-$module de type fini tel que $A[x]$ est contenu dans H' et H' est contenu dans C.

Donc x est entier sur A.

Par suite C entier sur A. □

Proposition 2.2. *Soit A contenu dans B une inclusion d'anneaux tel que B entier sur A.*
Si J est un idéal de B alors :

$$\frac{B}{J} \text{ est entier sur } \frac{A}{J \cap A};$$

Démonstration. $i)$ B entier sur A.

Soit x appartenant à B, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum_{i=1}^{n} a_ix^{n-i} = 0$, pour tout $a_i \in A, i \in [\![1;n]\!]$.

Ainsi $(x+J)^n + \sum_{i=1}^{n}(a_i + J \cap A)(x+J)^{n-i} = x^n + J + \sum_{i=1}^{n} a_ix^{n-i} + J =$ $(x^n + \sum_{i=1}^{n} a_ix^{n-i}) + J = 0 + J = 0_{J\cap A}$.

Donc $x + J$ est entier sur $\dfrac{A}{J \cap A}$.

Ainsi $\dfrac{B}{J}$ est entier sur $\dfrac{A}{J \cap A}$.

□

Proposition 2.3. *Soit A contenu dans B une inclusion d'anneaux tel que B soit entier sur A.*

B est un corps si et seulement si A est un corps.

Démonstration. $i) \implies ii)$ Supposons B corps.

Soit x appartenant à $A\backslash\{0\}$.

Comme A est contenu dans B alors x appartenant à $B\backslash\{0\}$. Donc x est inversible d'inverse x^{-1} appartenant à B.

De plus B entier sur A, alors il existe n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $(x^{-1})^n + \sum_{i=1}^{n} a_i(x^{-1})^{n-i} = 0$, pour tout a_i appartenant à A, i appartenant à $[\![1;n]\!]$.

Ainsi $(x^{-1})^n = \sum_{i=1}^{n}(-a_i)(x^{-1})^{n-i}$, pour tout a_i appartenant à A, i appartenant à $[\![1;n]\!]$.

$(x^{-1}) \times (x^{-1})^{n-1} = \sum_{i=1}^{n}(-a_i)(x^{-1})^{n-i}$, pour tout a_i appartenant à A, i appartenant à $[\![1;n]\!]$.

$(x^{-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i)(x^{-1})^{n-i}(x^{-1})^{-n+1}$, pour tout a_i appartenant à A, i appartenant à $[\![1;n]\!]$.

$x^{-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i)x^{i-1}$, pour tout a_i appartenant à A, i appartenant à $[\![1;n]\!]$.

Comme $1 \leq i \leq n$ alors $0 \leq i-1 \leq n-1$.

Donc x^{i-1} appartient à A.

Par stabilité x^{-1} appartient à A.

Donc A est un corps.

$ii) \implies i)$ Supposons que A soit un corps.

Soit x appartenant à $B\backslash\{0\}$.

Comme B entier sur A, alors il existe n appartenant à $\mathbb{N}^*, x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$, pour tout a_i appartenant à A, i appartenant à $[\![1;n]\!]$.

Par récurrence sur n, montrons que x appartient à A.

<u>Initialisation</u> $(n = 1)$.

L'équation de dépendance intégrale devient, $x + a_1 = 0$ alors $x = -a_1$ appartenant à $A\backslash\{0\}$.

Donc x est inversible dans A contenu dans B. Donc x est inversible dans B.

<u>Hérédité</u> $(n \geq 1)$.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n.

Alors $x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ alors x appartient à A.

Ainsi $x^{n+1} + \sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i} = 0$ alors $x(x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}) + a_{n+1} = 0$ alors $x(x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}) = -a_{n+1}$.

* Si $-a_{n+1} \neq 0$ alors x est inversible dans A contenu dans B. Donc x est inversible dans B.

* si $-a_{n+1} = 0$, alors $x(x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}) = 0$ alors $x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ (car $x \neq 0$ et B intègre).

Ainsi $x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ alors $x(x^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i x^{n-1-i}) = -a_{n+2}$.

* si $-a_{n+2} \neq 0$ alors x est inversible dans A contenu dans B. Donc x est inversible dans B.

* sinon de proche en proche, il vient que $x + a_1 = 0$ alors $x = -a_1$ appartient à $A\backslash\{0\}$

Donc x est inversible dans A contenu dans B. Donc x est inversible dans B

Dans tous les cas, il vient B corps. □

2.1.2 Dépendance intégrale sur un idéal

Définition 2.3. *Soient A un anneau commutatif unitaire et I un idéal de A. Un élément x de A est dit entier sur I s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que*

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \;\; a_i \in I^i, \; \forall i = 1, \cdots, m.$$

Proposition 2.4. *Soient A un anneau et I un idéal de A.*

$$x \text{ entier sur } I \text{ si et seulement si le monôme } xX \text{ est entier sur } R(A,I)$$

Démonstration. $i) \implies ii)$

Supposons x entier sur I. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0,\ a_i \in I^i$.
Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}^*, (xX)^n + \sum_{i=1}^{n} a_i X^i (xX)^{n-i} = 0,\ a_i X^i \in I^i X^i \in R(A,I)$.
D'où xX est entier sur $R(A,I)$.
$ii) \implies i)$
Supposons que $xX \in A[X]$ est entier sur $R(A,I)$.
Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}^*, (xX)^n + \sum_{i=1}^{n} a_i (xX)^{n-i} = 0,\ a_i \in R(A,I)$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, (xX)^n = \sum_{i=1}^{n} (-a_i)(xX)^{n-i},\ a_i \in R(A,I)$.
Comme $(xX)^n$ est homogène de degré n, alors pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,
$\deg[a_i(xX)^{n-i}] = n$ alors $\deg(a_i) + n - i = n$ ainsi $\deg(a_i) = i$.
Donc $a_i \in I^i X^i$ alors $a_i = \alpha_i X^i$, avec $\alpha_i \in I^i$.
D'où, il existe $n \in \mathbb{N}^*, (xX)^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^i (xX)^{n-i} = 0$,
il existe $n \in \mathbb{N}^*, X^n[x^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{n-i}] = 0$, avec $\alpha_i \in I^i$.
Par identification des polynômes, il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{n-i} = 0$, avec $\alpha_i \in I^i$.
Donc x est entier sur I. □

Corollaire 2.4. ***(Clôture intégrale d'idéaux)**[3]*
Soient A un anneau et I un idéal de A. L'ensemble noté :

$$I' = \{x \in A, x \text{ entier sur } I\}$$

*est un idéal de A appelé **clôture intégrale de I**.*

Démonstration. $i)$ Par construction, I' est contenu dans A.
$ii)$ $0^1 + 0 = 0$, donc $0 \in I'$.
$iii)$ Soient $b \in A, x \in I'$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$,avec $a_i \in I^i$.
Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}^*, (bx)^n + \sum_{i=1}^{n} b^i a_i (bx)^{n-i} = 0$,avec $b^i a_i \in I^i$.
Donc bx est entier sur I. D'où $bx \in I'$.
$iv)$ Soient $x, y \in I'$.
Ainsi xX, yX sont entiers sur $R(A,I)$.
Alors $xX + yX = (x+y)X \in A[X]$ est aussi entier sur $R(A,I)$
Donc $x + y \in I'$.
Par suite, I' est un idéal de A. □

Remarque 2.1. ***(Clôture intégrale d'idéaux et radical)**[3]*
Soient A un anneau et I et J des idéaux de A.

(i) $I \subset J \implies I' \subset J'$ *;*

(ii) $I \subset I' \subset \sqrt{I}$ *;*

(iii) $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$*.*

Démonstration. $i)$ Soit $x \in I'$ alors x est entier sur I ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$x^n + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} = 0$, avec $a_k \in I^k$, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.
Or I est contenu dans J d'où I^k est contenu dans J^k, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.
Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$x^n + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} = 0$, avec $a_k \in J^k$.
Donc x est entier sur J.
Par suite, I' est contenu dans J'.
$ii)$ Soit $x \in I$.
Alors $x^1 - x = 0$,où $a_1 = -x^1 \in I^1$.
D'où $x \in I'$. Donc I est contenu dans I'.
$iii)$ Soit $x \in I'$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$,avec $a_i \in I^i$.
Ainsi pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $a_i \in I^i$ alors $a_i x^{n-i} \in I^i$ est contenu dans I.
Par stabilité, il vient, qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i) x^{n-i} \in I$.
Donc $x \in \sqrt{I}$.
D'où, $I' \subset \sqrt{I}$.
Par suite, $I \subset I' \subset \sqrt{I}$.
$iii)$ D'après ce qui précède
$I \subset I' \subset \sqrt{I}$ alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{I'} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$ ainsi $\sqrt{I} \subset \sqrt{I'} \subset \sqrt{I}$ d'où $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$. □

Conséquence 2.1. *Soit* $x \in A$*. Si* $x \in I'$ *alors il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $x^m \in I$*.*

Définition 2.4. *Un idéal* I *de* A *est dit* ***intégralement fermé*** *si* $I = I'$*.*

2.2 Réduction d'un idéal

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.5. *Soient* A *un anneau commutatif unitaire,* I *et* J *deux idéaux de* A*. On dit que* I *est une réduction de* J *si :*

i) $I \subset J$*;*

ii) $\exists\, r \in \mathbb{N}^*,\ J^{r+1} = IJ^r$*.*

Exemple 2.2.

1) I *est une réduction de* I *lui-même ;*

2) $A = \mathbb{K}[X,Y]$ avec $\mathbb{K}$ corps.
$I = (X^2, Y^2)$.
$J = (X,Y)^2 = (X^2, Y^2, XY)$.
D'où $I \subset J$.

$$IJ = (X^2, Y^2)(X,Y)^2.$$
$$IJ = (X^2, Y^2)(X^2, XY, Y^2).$$
$$IJ = (X^4, Y^4, X^3Y, XY^3, X^2Y^2).$$

Et

$$J^2 = (X^2X^2, X^2Y^2, X^3Y, Y^2Y^2, Y^3X).$$
$$J^2 = (X^4, Y^4, X^2Y^2, X^3Y, XY^3).$$

Donc $J^{1+1} = J^2 = IJ$ avec $r = 1$.
Par suite I est une réduction de J.

Remarque 2.2. *Pour tout $r \geq n$, on a $J^{r+1} = IJ^r$.*
D'une manière générale, $I^m J^n = J^{n+m}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.5. *Soient A un anneau, I, J et K trois idéaux de A tels que I est contenu dans J et J est contenu dans K.*
Si I est une réduction de J et J est une réduction de K alors I est une réduction de K.

Démonstration. Supposons que I est une réduction de J et J est une réduction de K.
I est une réduction de J alors I est contenu dans J et il existe n appartenant à $\mathbb{N}^*$ tel que $J^{m+1} = IJ^m$, de même J est une réduction de K alors $J \subset K$ et il existe n appartenant à $\mathbb{N}^*$ tel que $K^{n+1} = JK^n$.
Posons $r = mn + n + m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
K^{r+1} = K^{mn+n+m+1} &= (K^{n+1})^{m+1}. \\
&= (K^{n+1})^m (K^{n+1}). \\
&= (JK^n)^m (JK^n). \\
&= J^m K^{nm} JK^n. \\
&= J^{m+1} K^{nm+n}. \\
&= J^{m+1} K^n K^{nm}. \\
&= IJ^m K^n K^{nm}. \\
&= I(JK^n)^m K^n. \\
&= I(K^{n+1})^m K^n. \\
&= IK^{mn+n+m}. \\
&= IK^r.
\end{aligned}$$

Il existe donc r appartenant à $\mathbb{N}^*$ tel que $K^{r+1} = IK^r$ ainsi I est une réduction de K. $\square$

Lemme 2.1. *Soit I_1, I_2, J_1 et J_2 des idéaux de A alors,*
si I_1 est une réduction de J_1 et I_2 est une réduction de J_2 alors I_1+I_2 est une réduction de J_1+J_2.

Démonstration. Supposons que I_1 est une réduction de J_1 et I_2 est une réduction de J_2.
I_1 est une réduction de J_1 alors I_1 est contenu dans J_1 et il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_1^{m+1} = I_1 J_1^m$.
I_2 est une réduction de J_2 alors I_2 est contenu dans J_2 et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_2^{n+1} = I_2 J_2^n$.
Posons $r = m + n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_1(J_1+J_2)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k}.$$
$$I_1(J_1+J_2)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m-1} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k} + \sum_{k=m}^{m+n} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k}.$$

Or I_1 est une réduction de J_1 donc pour tout k supérieur ou égal à m, d'après la remarque 2.2, on a $J_1^{k+1} = I_1 J_1^k$. Donc

$$I_1(J_1+J_2)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m-1} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k} + \sum_{k=m}^{m+n} J_1^{k+1} J_2^{m+n-k}.$$

Ainsi donc on a $\sum\limits_{k=m}^{m+n} J_1^{k+1} J_2^{m+n-k}$ est contenu dans $I_1(J_1+J_2)^{m+n}$.
De façon similaire on montre que $\sum\limits_{k=0}^{m} J_1^k J_2^{m+n-k+1}$ est contenu dans $I_2(J_1+J_2)^{m+n}$.
D'où $\sum\limits_{k=m}^{m+n} J_1^{k+1} J_2^{m+n-k} + \sum\limits_{k=0}^{m} J_1^k J_2^{m+n-k+1} \subset I_1(J_1+J_2)^{m+n} + I_2(J_1+J_2)^{m+n}$.
Alors $\sum\limits_{k=0}^{m+n+1} J_1^k J_2^{m+n+1-k} = (J_1+J_2)^{m+n+1} \subset (I_1+I_2)(J_1+J_2)^{m+n}$.
Par hypothèse on a $I_1 \subset J_1$ et $I_2 \subset J_2$ alors $I_1+I_2 \subset J_1+J_2$.
Par suite on a $(I_1+I_2)(J_1+J_2)^{m+n} \subset (J_1+J_2)^{m+n+1}$.
Par conséquent $(J_1+J_2)^{m+n+1} = (I_1+I_2)(J_1+J_2)^{m+n}$, on a donc trouver r tel que $(J_1+J_2)^{r+1} = (I_1+I_2)(J_1+J_2)^r$ ce qui fait de I_1+I_2 une réduction de J_1+J_2. □

Proposition 2.6. *Soient A un anneau, I un idéal de A et $x \in A$.*
x est entier sur I si et seulement si I est une réduction de $I+(x) = I+xA$.

Démonstration. (i) Supposons que x est entier sur I. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$, avec $a_i \in I^i, i = 1, \cdots, n$.
Montrons que I est une réduction de $I+(x)$.
On a : $(I+(x))^n = (I+(x))(I+(x))^{n-1} = I(I+(x))^{n-1} + (x)(I+(x))^{n-1}$.
En prouvant que $(x)(I+(x))^{n-1} \subset I(I+(x))^{n-1}$ on aura,

$$I(I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}.$$

$$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)\sum_{i=0}^{n-1} I^i(x)^{n-1-i}. \text{ voir proposition 1.3}$$

$$(x)(I+(x))^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} I^i(x)^{n-i}.$$

$$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + \sum_{i=1}^{n-1} I^i(x)^{n-i}.$$

$$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + I\sum_{i=1}^{n-1} I^{i-1}(x)^{n-i}.$$

$$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + I\sum_{i=0}^{n-2} I^i(x)^{n-1-i}.$$

Donc $(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + I\sum_{i=0}^{n-2} I^i(x)^{n-1-i} \subset (x)^n + I\sum_{i=0}^{n-1} I^i(x)^{n-1-i}$.
d'où $(x)(I+(x))^{n-1} \subset (x)^n + I(I+(x))^{n-1}$.
Et comme,
$x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} \in \sum_{i=1}^{n} I^i x^{n-i}$ alors $x^n \in I\sum_{i=1}^{n} I^{i-1}x^{n-i} = I\sum_{i=0}^{n-1} I^i x^{n-1-i} = I(I+(x))^{n-1}$.
Alors $(x)^n \in I(I+(x))^{n-1}$ alors $(x)^n + I(I+(x))^{n-1} = I(I+(x))^{n-1}$.
En somme $(x)(I+(x))^{n-1} \subset I(I+(x))^{n-1}$ alors $(I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}$.
Par conséquent I est une réduction de $I+(x)$.
(ii) Supposons que I est une réduction de $I+(x)$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(I+(x))^{n+1} = I(I+(x))^n$.
$x^{n+1} \in (I+(x))^{n+1} = I(I+(x))^n$ alors $x^{n+1} \in I\sum_{i=0}^{n} I^i(x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} I^{i+1}(x)^{n-i}$.
D'où $x^{n+1} \in \sum_{i=1}^{n+1} I^i(x)^{n+1-i}$ alors $x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i}$, avec $a_i \in I^i$. Ainsi x est donc entier sur I.

□

Proposition 2.7. *Soit A un anneau noethérien, I et J deux idéaux de A tels que I est contenu dans J. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) I est une réduction de J ;

ii) $R(A,J)$ est un $R(A,I)$-module de type fini ;

iii) $R(A,J)$ est entier sur $R(A,I)$;

iv) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, J^n est entier sur I^n ;

v) J est entier sur I.

Démonstration. $i) \Longrightarrow ii)$.
Supposons que I est une réduction de J alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^{n+1} = IJ^n$.

$J^{n+1} = IJ^n$ alors pour tout $r \in \mathbb{N}$; $J^{n+r} = I^r J^n$.
Ainsi $J^{n+r}X^{n+r} = I^r X^r J^n X^n$ alors $R(A, J) = R(A, I)(JX, \cdots, J^r X^r)$.
$R(A, J)$ est donc un $R(A, I)$-module de type fini.
$ii) \implies iii)$.
Supposons que $R(A, J)$ est un $R(A, I)$-module de type fini.
Soit $z \in R(A, J)$,
$z \in R(A, J)$ alors $(R(A, J)[z])$ est un sous-module de $R(A, J)$.
A est noethérien alors $R(A, I)$ est noethérien, $R(A, J)$ est un $R(A, I)$-module de type fini alors, $R(A, J)$ est un module noethérien.
$(R(A, J)[z])$ étant un sous-module de $R(A, J)$ qui est noethérien alors $(R(A, J)[z])$ est de type fini. Par suite z est entier sur $R(A, I)$.
$iii) \implies iv)$.
Supposons que $R(A, J)$ est entier sur $R(A, I)$.
Soit $a \in J^n$ alors $aX^n \in R(A, J)$, donc aX^n est entier sur $R(A, I)$.
Ainsi il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(aX^n)^m = \sum_{i=1}^{m} b_i (aX^n)^{m-i}$,
où $b_i \in I^{ni}X^{ni}$ alors $b_i = c_i X^{ni}, c_i \in I^{ni}$.
$a^m X^{nm} = \sum_{i=1}^{m} c_i X^{ni}(aX^n)^{m-i} = \sum_{i=1}^{m} c_i X^{ni} a^{m-i} X^{mn-ni} = \sum_{i=1}^{m} c_i a^{m-i} X^{mn}$.
Et donc $a^m X^{nm} = \sum_{i=1}^{m} c_i a^{m-i} X^{mn}$ alors $a^m = \sum_{i=1}^{m} c_i a^{m-i}$, $c_i \in I^{ni} = (I^n)^i$.
J^n est ainsi entier sur I^n.
$iv) \implies v)$
En prenant $n = 1$, alors pour les mêmes raisons que la preuve $iii) \implies iv)$ on a le résultat souhaité à savoir J entier sur I.
$v) \implies i)$
Supposons que J est entier sur I.
L'anneau A étant noethérien alors l'idéal J est de type fini.
Posons $J = (x_1, \cdots, x_n)$
$x_1 \in J$ qui est entier sur I donc, x est entier sur I ce qui entraine que l'idéal I soit une réduction de $I + (x_1)$. De même x_2 est entier sur I donc sur $I + (x_1)$ ainsi, $I + (x_1)$ devient une réduction de $I + (x_1) + (x_2)$.
En répétant le même raisonnement à chaque élément de J, on obtient x_r entier sur I donc nécessairement sur $I + (x_1) + \cdots + (x_{r-1})$ ce qui implique que $I + (x_1) + \cdots + (x_{r-1})$ est une réduction de $I + (x_1) + \cdots + (x_r) = I + J$.
On déduit donc que I est une réduction de J. □

Proposition 2.8. *Soient A un anneau, I un idéal de A et x un élément de A. Alors : x est entier sur I si et seulement si il existe J un idéal de A de type fini tel que : xJ est contenu dans IJ et pour tout x' élément de A, x'J est égal au module nul entraîne qu'il existe m supérieur ou égal à zéro, tel que* $x'x^m = 0$.

Corollaire 2.5. *Soient I, J deux idéaux de A. Alors :*

$$I'J' \subset (IJ)'.$$

2.2.2 Réduction minimale d'un idéal

La notion d'idéal basique a été introduite et étudiée par Northcott et Rees [7].

Définition 2.6. *Un idéal I de l'anneau local noethérien (A, m) est basique si la seule réduction de I est I lui-même. Northcott et Rees ont aussi défini la notion de réduction minimale d'un idéal J :*

Un idéal I est une réduction minimale de J si I est une réduction de J et si I est minimal au sens de l'inclusion parmi l'ensemble des réductions de J.

Remarque 2.3. *Bien qu'on puisse parler de réduction minimale pour un idéal quelconque sur un anneau local, cela n'est pas possible pour toutes les filtrations. On prouve dans [3] que la réduction minimale des filtrations I-bonnes existe toujours dans un anneau local noethérien. Ce qui n'est pas le cas en générale pour une filtration quelconque.*

Chapitre 3

DÉPENDANCE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

Après avoir étudier les propriétés des filtrations I-bonnes, nous verrons dans ce chapitre les conditions pour étendre ces propriétés aux filtrations bonnes en générale.

3.1 Dépendance intégrale de filtration

Définition 3.1. *Soient A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{F}(A)$. Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que*

$$x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^{m} a_ix^{m-i} = 0,\ m \in \mathbb{N}^* \ ,\ a_i \in I_i,\ \forall i = 1, \cdots, m.$$

Proposition 3.1. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{F}(A), x$ appartenant à A et n appartenant à $\mathbb{N}$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) x est entier sur $f^{(k)} = ((I_{nk})_{k\in\mathbb{N}^*})$;

ii) $xX^n (\in A[X])$ est entier sur $R(A, f)$;

iii) $xX^n (\in A[X])$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.

Démonstration. i) $\Longrightarrow$ ii)

Supposons x entier sur $f^{(n)}$.

Alors
$\exists\ r \geq 1,\ x^r + \sum_{i=1}^{r} a_ix^{r-i} = 0,\ a_i \in I_{ni}$.

Ainsi
$\exists\ r \geq 1,\ (xX^n)^r + \sum_{i=1}^{r} a_iX^{ni}(xX^n)^{r-i} = 0,\ a_i \in I_{ni}X^{ni} \subset R(A, f)$.

Donc xX^n est entier sur $R(A, f)$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Évident car $R(A, f)$ est contenu dans $\mathcal{R}(A, f)$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Supposons xX^n est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.

Alors
$\exists\ m \geq 1,\ (xX^n)^m + \sum_{i=1}^{m} a_i(xX^n)^{m-i} = 0,\ a_i \in \mathcal{R}(A, f)$.

D'où
$\deg((xX^n)^m) = nm$ alors $\deg(a_i) = ni$.

Ainsi
$a_i \in I_{ni}X^{ni}$, alors $a_i = \alpha_i X^{ni}$,$\alpha_i \in I_{ni}$.

Donc
$\exists\ m \geq 1,\ (xX^n)^m + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i X^{ni})(xX^n)^{m-i} = 0,\ \alpha_i \in I_{ni}$.

Alors
$\exists\ m \geq 1,\ X^{nm}[x^m + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{m-i}] = 0X^{nm},\ \alpha_i \in I_{ni}$.

Par identification
$\exists\ m \geq 1,\ x^m + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{m-i} = 0, \alpha_i \in I_{ni}$.

Par suite, x est entier sur $f^{(n)}$. □

3.2 Clôture intégrale d'une filtration

Définition-Proposition 3.1. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{F}(A)$. Alors :*
*$f' = (I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{F}(A)$ appelée **clôture intégrale de f**.*

Démonstration. Supposons que $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $F(A)$.

i) $I'_0 = \{x \in A, x$ entier sur $I_0\} = A$, car $I_0 = A$.

ii) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Comme I_{n+1} est contenu dans I_n alors par croissance, I'_{n+1} est contenu dans I'_n.

iii) Soient p, q appartenant à $\mathbb{N}$.
$I'_q I'_p \subset (I_q I_p)' \subset (I_{p+q})' = I'_{p+q}$ car $I'J' \subset (IJ)'$ pour tout idéaux de A.

Par suite $f' = (I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{F}(A)$. □

Corollaire 3.1. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{F}(A)$. Alors :*
pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$, on pose : $P_k(f) = \left\{x \in A, x \text{ entier sur } f^{(k)}\right\}$ est un idéal de A et la famille
*$P(f) = (P_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ est une filtration de A appelé **clôture prüférienne** de f.*

Démonstration. Soit k appartenant à $\mathbb{N}$.

A) Montons que $P_k(f)$ est un idéal de A.

i) Par définition, $P_k(f)$ est contenu dans A.

ii) 0_A est entier sur A, donc 0_A appartient à $P_k(f)$.

iii) Soient x, y appartenant à $P_k(f)$.

Comme x, y appartiennent à $P_k(f)$ alors xX^k, yX^k sont entiers sur $R(A, f)$.

D'où $xX^k + yX^k$ est entier sur $R(A, f)$ car $R(A, f)'$ est un anneau.

Donc $x + y$ est entier sur $f^{(k)}$.

Par suite $x + y$ appartiennent à $P_k(f)$.

iv) Soit a appartenant à A, soit x appartenant à $P_k(f)$.

x appartient à $P_k(f)$ alors xX^k est entier sur $R(A, f)$.

$(ax)X^k$ est entier sur $R(A, f)$.
Donc ax est entier sur $f^{(k)}$.
D'où ax appartient à $P_k(f)$.
Par suite $P_k(f)$ est un idéal de A.
B) Montrons que $P(f) = (P_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathbb{F}(A)$.
i) $P_0(f) = \{x \in A,\ x$ entier sur $f^{(0)} = (A, ..., A) = A\}$.
D'où $P_0(f) = A$.
ii) Soit x appartenant à $P_{k+1}(f)$.
Ainsi x est entier sur $f^{(k+1)}$.
Alors
$\exists\ n \geq 1,\ x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0,\ a_i \in I_{(k+1)i} \subset I_{ki}$.
Donc x est entier sur $f^{(k)}$.
Par suite x appartient à $P_k(f)$.
D'où $P_{k+1}(f)$ est contenu dans $P_k(f)$.
iii) Soient x appartenant à $P_{k_1}(f)$ et y appartenant à $P_{k_2}(f)$.
xX^{k_1} appartient à $R(A, f)'$ et yX^{k_2} appartient à $R(A, f)'$.
D'où $xyX^{k_1+k_2}$ appartient à $R(A, f)'$ car $R(A, f)'$ est un anneau.
Donc xy appartient à $P_{k_1+k_2}(f)$.
Par suite, $P_{k_1}(f)\ P_{k_2}(f)$ est contenu dans $P_{k_1+k_2}(f)$.
On en déduit que $P(f) = (P_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ appartenant à $F(A)$. □

Remarque 3.1. *La clôture intégrale d'un idéal I de A est : $I' = P_1(f_I)$.*

Proposition 3.2. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{F}(A)$. Alors :*

(i) $f \leqslant f' \leqslant P(f)$;

(ii) $P(P(f)) = P(f)$;

(iii) $P(f) = P(f')$, avec $f' = (I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la clôture intégrale de f.

Démonstration. i) Il s'agit de montrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $I_n \subset I'_n \subset P_n(f)$.
Soit n appartenant à $\mathbb{N}$.
a) Soit x appartenant à I_n.
Posons $r = 1$.
Ainsi $x + a_1 = x + (-x) = 0,\ a_1 = -x$.
Alors x appartient à I'_n. D'où I_n est contenu dans I'_n.
b) Soit x appartenant à I'_n.
Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. x appartient à I'_n alors
$\exists\ r \geq 1,\ x^r + \sum\limits_{i=1}^{r} a_i x^{r-i} = 0, \alpha_i \in I_n^i$.
Or I_n^i est contenu dans I_{ni}, d'où
$\exists\ m = r \geq 1,\ x^m + \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x^{m-i} = 0, \alpha_i = a_i \in I_{ni}$.
D'où x appartenant à $P_n(f)$.
Donc I'_n est contenu dans $P_n(f)$.
Par conséquent, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $I_n \subset I'_n \subset P_n(f)$.

c'est-à-dire que $f \leq f' \leq P(f)$.
ii) Montrons que $P(P(f)) = P(f)$.
A) D'après i), $f \leq P(f)$ alors $P(f) \subset P(P(f))$.
B) Posons $g = P(f) = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $J_n = P_n(f)$.
Donc $P(P(f)) = P(g)$.
Soient n appartenant à $\mathbb{N}, x$ appartenant à $P_n(g)$.
x appartient à $P_n(g)$ alors x est entier sur $g^{(n)}$.
$x \in P_n(g)$ alors
$\exists\ s \geq 1,\ x^s + \sum\limits_{i=1}^{s} a_i x^{s-i} = 0, a_i \in J_{ni}$.
Or $J_{ni} = P_{ni}(f)$, ainsi $a_i \in P_{ni}(f)$ pour tout $i \in [\![1, s]\!]$.
Ainsi les a_i sont entiers sur $f^{(ni)}$. D'où $a_i X^{ni} \in R(A, f)'$.
Alors $(xX^n)^s + \sum\limits_{i=1}^{s} a_i X^{ni}(xX^n)^{s-i} = 0$, avec $a_i X^{ni} \in R(A, f)'$.
Donc xX^n est entier sur $R(A, f)'$.
D'où $xX^n \in [R(A, f)']' = R(A, f)'$.
Par suite xX^n est entier sur $R(A, f)$.
Donc x est entier sur $f^{(n)}$.
Par suite $x \in P_n(f)$.
D'où $P_n(g)$ est contenu dans $P_n(f)$.
c'est-à-dire $P(P(f))$ est contenu dans $P_n(f)$. Donc $P(P(f)) = P_n(f)$.
iii) Montrons que $P(f) = P(f')$.
D'après i) on a $f \leq f'$ alors $P(f) \leq P(f')$.
Réciproquement, $f' \leq P(f)$ alors $P(f') \leq P(P(f)) = P(f)$.
D'où $P(f) \leq P(f') \leq P(f)$.
Par suite $P(f) = P(f')$. □

Proposition 3.3. *Soient A contenu dans B deux anneaux.*
$A' = \{x \in B, x$ *entier sur* $A\}$. *On a :*

i) $A \subset A' \subset B$ *;*

ii) $A'' = A'$.

Démonstration. i) Montrons que $A \subset A' \subset B$.
a) Soit $x \in A$.
On a : $x^1 + a_1 = x^1 + (-x) = 0$ alors $x \in A'$.
Donc A est contenu dans A'.
b) Soit $x' \in A'$.
Par construction $x \in B$.
D'où A' est contenu dans B.
Par suite $A \subset A' \subset B$.
ii) D'après i) $A \subset A'$ alors $A' \subset A''$ (Par croissance).
Réciproquement soit $x \in A''$ alors x entier sur A'.
Ainsi
$\exists\ n \geq 1$, tel que $x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0, a_i \in A'$.
Alors a_i entier sur A, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

D'où $A[a_i]$ est un A-module de type fini, ainsi $A[a_1, a_2, ..., a_n]$ est un A-module de type fini.

En effet, si,

$$\begin{cases} A[a_1] = A(1_A, a_1, a_1^2, ...a_1^{n-1}) \\ A[a_2] = A(1_A, a_2, a_2^2, ...a_2^{m-1}) \end{cases}$$

des A-modules de type fini, alors

$A[a_1, a_2] = A(a_1^i a_2^j)_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq m-1}}$.

En procédant de proche en proche, il vient $A[a_1, a_2, ..., a_n]$ est un A-module de type fini.

Par suite, $K = A[a_1 x^{n-1}, a_2 x^{n-2}, ..., a_n]$ est un A-module de type fini.

Soient $(y_1, ..., y_n)$ les générateurs de K.

Donc $K = A(y_1, ..., y_n, x^{n-1}, x^{n-2}, ..., x^2, x, 1)$.

D'où $A[x]$ est contenu dans H.

Par suite x est entier sur A.

Donc $x \in A'$.

Par suite A'' est contenu dans A.

Donc $A'' = A$.

iii) De la même manière, on montre que $I'' = I'$. □

Définition 3.2. *Soit I un idéal de l'anneau A et f appartenant à $\mathbb{F}(A)$.*
On dit que I est entier sur f si tout élément de I est entier sur f.
Ce qui signifie que I est entier sur f si I est contenu dans $P_1(f)$.

Conséquence 3.1. *Soit I un idéal de l'anneau A et $f \in \mathbb{F}(A)$.*
I est entier sur f si et seulement si $f_I \leqslant P(f)$.

Démonstration. $(ii) \Longrightarrow (i)$.

Supposons que $f_I \leq P(f)$. Alors I^n est contenu dans $P_n(f)$, pour tout $n \geq 1$.

En particulier pour $n = 1$, on a I est contenu dans $P_1(f)$. Donc I est entier sur f.

$(i) \Longrightarrow (ii)$.

Supposons que I est entier sur f. Alors I est contenu dans $P_1(f)$. Montrons que I^n est contenu dans $P_n(f)$, pour tout $n \geq 1$.

Initialisation

Comme I est contenu dans $P_1(f)$ alors la propriété est vrai à l'ordre 1.

Hérédité

Soit $n \geq 1$. Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n, c'est à dire I^n est contenu dans $P_n(f)$.

Montrons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $n + 1$, c'est à dire I^{n+1} est contenu dans $P_{n+1}(f)$.

On a : $I^n \subset P_n(f) \Longrightarrow I^{n+1} \subset IP_n(f) \subset P_1(f)P_n(f) \subset P_{n+1}(f)$ (car $(P_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$).

D'où $I^{n+1} \subset P_{n+1}(f)$.

Donc la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $n + 1$.

Par suite $I^n \subset P_n(f)$, pour tout $n \geq 1$. Par conséquent $f_I \leq P(f)$. □

Définition 3.3. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{F}(A)$. Alors :*

*(a) g est **entière sur** f si $g \leqslant P(f)$. C'est à dire :*

$$\forall n \geqslant 1, J_n \subset P_n(f).$$

*(b) g est **fortement entière sur** f si $f \leqslant g$ et si $R(A, g)$ est un $R(A, f)-$module de type fini.*

Proposition 3.4. *Soient f et g deux filtrations de l'anneau A telles que $f \leqslant g$. Alors $R(A, g)$ est entier sur $R(A, f)$ si et seulement si $\mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.*

Démonstration. Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A telles que $f \leqslant g$. Supposons que $\mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.
Soit $b \in J_n$ alors $bX^n \in \mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$ d'après 3.1, on a bX^n entier sur $R(A, f)$. Par conséquent $R(A, g)$ est entier sur $R(A, f)$. Réciproquement, il suffit de remarquer que $\mathcal{R}(A, f) = R(A, f)[u]$ qui est une algèbre de type fini sur $R(A, f)$. □

Proposition 3.5. *Soient f, g deux filtrations de A telles que $f \leqslant g$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) g est entière sur f ;

(ii) $R(A, g)$ est entier sur $R(A, f)$;

(iii) $\mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.

Démonstration. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), immédiat en utilisant la proposition 3.1.
(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii), immédiat en utilisant la proposition 3.4. □

Proposition 3.6. *[3]*
Soient f, g deux filtrations de A. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) g est entière sur f ;

(ii) $\forall k \geqslant 1$, g^k est entière sur $f^{(k)}$;

(iii) $\exists k \geqslant 1$, g^k est entière sur $f^{(k)}$.

Démonstration. Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A.
$(i) \Longrightarrow (ii)$.

Supposons que g est entière sur f. Montrons que pour tout $k \geq 1$, $g^{(k)}$ est entière sur $f^{(k)}$.

Soit $k \geq 1$, on a : $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ et $g^{(k)} = (J_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme g est entière sur f alors l'idéal J_{nk} est entier sur $f^{(nk)}$.
Or $f^{(nk)} = (f^{(k)})^{(n)}$ donc J_{nk}est entier sur $(f^{(k)})^{(n)}$.
Par conséquent $g^{(k)}$ est entière sur $f^{(k)}$ pour tout $k \geq 1$.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$ immédiat.
$(iii) \Longrightarrow (i)$.

Supposons qu'il existe k supérieur ou égal à 1 tel que $g^{(k)}$ est entière sur $f^{(k)}$. Montrons que g est entière sur f.

Pour cela il suffit de montrer que pour tout $p \geq 1$, l'idéal J_p est entier sur $f^{(p)}$.

Soit $x \in J_p$. Alors $x^k \in J_p^k \subset J_{pk}$.

Or J_{pk} est entier sur $f^{(pk)} = (f^{(k)})^{(p)}$. D'où il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$(x^k)^n + a_1(x^k)^{n-1} + \cdots + a_j(x^k)^{n-j} + \cdots + a_n = 0$, avec $a_j \in I_{pkj}$.

On a pour tout $j = 1, \cdots, n$, $a_j(x^k)^{n-j} = a_j x^{kn-kj}$, ainsi $x^{kn} + a_1 x^{kn-k} + \cdots + a_j x^{kn-kj} + \cdots + a_n = 0$, avec $a_j \in I_{pkj}$.

Posons $m = kn$. On obtient $x^m + a_1 x^{m-k} + \cdots + a_j x^{m-kj} + \cdots + a_n = 0$, avec $a_j \in I_{p(kj)}$.

Par suite x est entier sur $f^{(p)}$pour tout $p \geq 1$. Par conséquent pour tout $p \geq 1$ J_p est entier sur $f^{(p)}$.

Donc g est entière sur f.

□

3.3 Réduction d'une filtration

3.3.1 Réduction au sens de Okon-Ratliff

Définition 3.4. *(α-réduction ou réduction au sens de Okon-Ratliff[8])*
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A.
f est une α-réduction de g si :

i) $f \leq g$;

ii) $\exists\, N \geq 1$, $\forall n \geq N, J_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} I_{n-p}J_p$.

Remarque 3.2. *Soit $\Re$ la relation $f\Re g \Leftrightarrow f$ est une α-réduction de g. Notons que cette relation est une relation d'ordre sur l'ensemble des filtrations.*

Démonstration. (i) **Réflexivité**.
Posons $N = 1$.
$\displaystyle\sum_{p=0}^{1} I_{n-p}I_p = I_nI_0 + I_{n-1}I_1 = I_{n-1}I_1 = I_n$ (car $I_0 \subset I_1$).

D'où $f\Re f$.

(ii) **Transitivité**.
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des filtrations de A.
Supposons que $f\Re g$. alors $f \leq g$ et il existe $N_1 \geq 1$, pour tout $m \geq N_1$, $J_m = \displaystyle\sum_{p=0}^{N_1} I_{m-p}J_p$. Supposons que $g\Re h$ alors $g \leq h$ et il existe $N_2 \geq 1$, pour tout $k \geq N_2$, $H_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}H_p$.
D'où $f \leq g \leq h$. Donc $f \leq h$.
De plus posons $N = N_1 + N_2$.
$H_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N} J_{k-p}H_p = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$ pour tout $k \geq N_1+N_2$.

Comme $k \geq N_1 + N_2$ alors $k - N_2 \geq N_1$ et $p \leq N_2$ alors $k - p \geq N_1$.
D'où $J_{k-p} = \sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i} J_i$.
Ainsi $H_k = \sum_{p=0}^{N_2} (\sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i} J_i) H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p$.
Donc $H_k \subset \sum_{p=0}^{N_2} \sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i} J_i H_{p+i} + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p$ car $g \leq h$.
D'où $J_i \subset H_i \subset H_i H_p \subset H_{i+p}$.
Posons $l = p + i$, ainsi $0 \leq l \leq N_1 + N_2$ car $0 \leq p \leq N_2$ et $0 \leq i \leq N_1$.
D'où $H_k \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p$.
Posons $K = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p$.
Comme $p \geq N_2$ alors $H_p = \sum_{p=0}^{N_2} J_{p-i} H_i$.
D'où $K = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} (\sum_{p=0}^{N_2} J_{p-i} H_i) = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p} J_{p-i} H_i$.
Donc $K \subset \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i} H_i = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i} H_i$ $K \subset \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i} H_i$ or $0 \leq i \leq N_2$ et $N_1 + N_2 \leq k$.
D'où $k - i \geq N_1$.
Ainsi $J_{k-i} = \sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l} J_l$.
D'où $K \subset \sum_{p=0}^{N_2} (\sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l} J_l) H_i \subset \sum_{p=0}^{N_2} \sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l} J_l H_i$.
Posons $p = i + l$.
D'où $K \subset \sum_{p=0}^{N_1+N_2} I_{k-p} H_p$.
Or $H_k \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p = \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l + K \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l$.
Car $K \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l$.
Donc $H_k \subset H_{k-p} H_p \subset H_k$.
Finalement $H_k = \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l$ Par suite $f \Re h$.

(iii) **Anti-symétrie**.
Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des filtrations de A telles que :
$f \Re g$ alors $f \leq g$ et $g \Re f$ alors $g \leq f$.
D'où $f = g$.

On en déduit que $\Re$ est une relation d'ordre. $\square$

Proposition 3.7. *Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A. $f \leqslant g$ et chaque J_n est de type fini, alors f est une α-réduction de g si et seulement si $R(A, g)$ est un $R(A, f)$-module de type fini.*

Démonstration. Supposons que f est une α-réduction de g.
Alors $f \leq g$ et il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N; J_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p}J_p$.
Prouvons que $R(A, g) = R(A, f)(J_0, J_1X_1, \cdots, J_NX_N) = M$.
$J_nX_n \subset R(A, g)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $R(A, f) \subset R(A, g)$ car $f \leq g$, Donc $M \subset R(A, g)$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, J_nX^n \subset M$ Si $n \leq N, J_nX^n \subset M$, par construction.
Soit $n \geq N$, supposons la propriété vraie et montrons que $J_{n+1}X^{n+1} \subset M$.
$J_{n+1} = \sum_{p=0}^{N} I_{n+1-p}J_p$ alors $J_{n+1}X^{n+1} = \sum_{p=0}^{N} I_{n+1-p}J_pX^{n+1}$,
D'où $J_{n+1}X^{n+1} = \sum_{p=0}^{N} I_{n+1-p}X^{n+1-p}J_pX^p \subset M$.
Ainsi $R(A, g)$ est un $R(A, f)$-module de type fini.
Supposons que $R(A, g)$ est un $R(A, f)$-module de type fini.
Montrons que f est une α-réduction de g.
Par hypothèse on a : $f \leq g$.
Trouvons $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N; J_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p}J_p$.
$R(A, g)$ étant un $R(A, f)$-module de type fini alors
$R(A, g) = R(A, f)(1, Z_1, \cdots, Z_r), Z_i \in R(A, g)$ et les Z_i sont homogènes de degré i.
Posons $N = r$.
Soit $z \in J_n$.
$z \in J_n$ alors $zX^n \in J_nX^n \subset R(A, g)$, d'où $zX^n = \sum_{p=0}^{r} h_pZ_p$, $h_p \in R(A, f)$ et $Z_0 = 1$.
h_p homogène de degré $n - p$ alors $h_p \in I_{n-p}X^{n-p}$, on déduit de cela que :
$h_p = a_{n-p}X^{n-p} \in I_{n-p}X^{n-p}$.
Aussi Z_p est homogène de degré p alors $Z_p = b_pX^p \in J_pX^p$.
Ainsi $zX^n = \sum_{p=0}^{r} a_{n-p}X^{n-p}b_pX^p$ alors $zX^n = \sum_{p=0}^{r} a_{n-p}X^nb_p$, ce qui implique que
$z = \sum_{p=0}^{r} a_{n-p}b_p \in \sum_{p=0}^{r} I_{n-p}J_p$, par conséquent $J_n \subset \sum_{p=0}^{r} I_{n-p}J_p \subset J_n$.
En somme, $J_n = \sum_{p=0}^{r} I_{n-p}J_p$, donc f est une α-réduction de g. $\square$

3.3.2 Réduction au sens de Dichi-Sangaré

Définition 3.5. *(β-réduction ou réduction au sens de Dichi-Sangaré [5])*
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A.
f est une β-réduction de g si :

i) $f \leq g$;

ii) $\exists\, k \geq 1$, $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$.

Remarque 3.3. *Si f est une β-réduction de g alors f est une α-réduction de g.*

Démonstration. Supposons que f est une β-réduction de g.
Alors $f \leq g$ et il existe $k \geq 1$ tel que $I_{n+k} = I_n J_k$, pour tout $n \geq k$.
Posons $N = 2k$.
Soit $n \geq N = 2k$.
$\sum\limits_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p = \sum\limits_{p=0}^{k-1} I_{n-p}J_p + I_{n-k}J_k + \sum\limits_{p=0}^{k+1} I_{n-p}J_p$, or $n \geq 2k$ alors $n-k \geq k$ et comme f est une β-réduction de g alors, $I_{n-k}J_k = J_n$.
Donc $\sum\limits_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p = \sum\limits_{p=0}^{k-1} I_{n-p}J_p + J_k + \sum\limits_{p=0}^{k+1} I_{n-p}J_p$ alors $J_n \subset \sum\limits_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p$.
De plus on a : $\sum\limits_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p \subset J_n$. Par conséquent $J_n = \sum\limits_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p$.
On déduit donc de tout ce qui précède que f est une α-réduction de g. □

Proposition 3.8. *Soient A un anneau et I , J deux idéaux de A.*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes.
i) I est une réduction de J.
ii) f_I est une α-réduction de f_J.
iii) f_I est une β-réduction de f_J.

Démonstration. $i) \implies ii)$.
Supposons que I est une réduction de J.
Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^{N+1} = IJ^N$.
$I \subset J$ alors $I^n \subset J^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $f_I \leq f_J$.
Posons $N_0 = N + 1$.
Soit $n \geq N_0$.
$\sum\limits_{p=0}^{N+1} I^{n-p}J^p = \sum\limits_{p=0}^{N} I^{n-p}J^p + I^{n-N-1}J^{N+1}$, comme I est une réduction de J alors
$I^{n-N-1}J^{N+1} = J^{n-N-1+N+1} = J^n$. Donc $\sum\limits_{p=0}^{N+1} I^{n-p}J^p = \sum\limits_{p=0}^{N} I^{n-p}J^p + J^n$.
Ainsi $J^n \subset \sum\limits_{p=0}^{N+1} I^{n-p}J^p \subset J^n$.
f_I est donc une α-réduction de f_J.
$ii) \implies iii)$.
Supposons que f_I est une α-réduction de f_J.

Alors $f_I \leq f_J$ et il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geq N_0$, $J^n = \sum_{p=0}^{N_0} I^{n-p}J^p$.

Posons $N = N_0$.

Soit $n \geq N$.

$I^nJ^{N_0} = \sum_{p=0}^{N_0} I^nI^{N_0-p}J^p = \sum_{p=0}^{N_0} I^{n+N_0-p}J^p = J^{N_0+n}$ alors $I^nJ^{N_0} = J^{N_0+n}$.

D'où f_I est une β-réduction de f_J.

iii) $\implies$ *i)* Supposons que f_I est une β-réduction de f_J.

$f_I \leq f_J$ et il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_0, J^{n+N_0} = I^nJ^{N_0}$.

$f_I \leq f_J$ alors $I \subset J$.

Posons $N = 2N_0$

$J^{N+1} = J^{2N_0+1} = J^{N_0+N_0+1} = I^{N_0+1}J_0^N = II^{N_0}J^{N_0} = IJ^{2N_0}$.

Donc $J^{N+1} = IJ^N$ ce qui fait que I est une réduction de J. □

Proposition 3.9. *Soient A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de A. f_I est une β-réduction de g si et seulement si g est I-bonne.*

Démonstration. Supposons que f_I est une β-réduction de g.

Cela implique que $f_I \leq g$ et il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geq N_0$

$J_{n+N_0} = I^nJ_{N_0}$.

$f_I \leq g$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}, IJ_n \subset J_{n+1}$.

Posons $N = 2N_0$

Soit $n \geq N$.

$$\begin{aligned}
J_{n+1} &= J_{n-N_0-N_0+1}.\\
J_{n+1} &= J_{n-N_0+1N_0}.\\
J_{n+1} &= I^{n-N_0+1}J_{N_0}.\\
J_{n+1} &= II^{n-N_0}J_{N_0}.\\
J_{n+1} &= IJ_n.
\end{aligned}$$

D'où pour tout $n \geq 2N_0$, $IJ_n = J_{n+1}$, g est donc I-bonne. □

Remarque 3.4. *La β-réduction étant plus générale que la α-réduction, nous parlerons de β-réduction lorsque nous emploierons le terme réduction.*

Proposition 3.10. *Soit $f, g \in \mathbb{F}(A)$, telles que $f \leqslant g$.*

(i) f est un réduction de g si et seulement s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $J_{k+n} = J_kI_n$ pour tout $n \geqslant k$.
Pour un tel entier k et pour tout $m \geqslant 1$, $J_{mk} = J_{mk+pk-pk} = J_{pk+(m-p)k} = J_{pk}I_{(m-p)k} = J_{pk}J_{(m-p)k} = J_k^pJ_{(m-p)k} = J_k^pI_{(m-p)k} = J_k^pJ_{(m-p)k}$,
pour tout $p = 1, 2, \cdots, m$;

(ii) Si f est une réduction de g et que g est une réduction de $h \in \mathbb{F}(A)$, alors f est une réduction de h ;

(iii) Si f est une réduction de g et si h est une filtration A telle que $f \leqslant h \leqslant g$ alors h est une réduction de g.

Démonstration. i) Supposons que f soit une réduction de g. Alors :

(a) $f \leqslant g$;

(b) $\exists r \geqslant 1, n_o \geqslant 0, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad J_{r+n} = J_r I_n$.

Soit $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que $m_0 r \geq n_0$.

Posons $k = m_0 r$.

Alors $J_{k+n} = J_{m_0 r+n} = J_{m_0 r} I_n = J_k I_n$ car $k \geq n_0$.

La réciproque est évidente.

ii) Supposons que f est une réduction de g et g une réduction de h.

* $f \leq g \leq h$ alors $f \leq h$.

* Comme g est une réduction de h alors, il existe $k' \geq 1$, $H_{k'+n} = H_{k'} J_n$, pour tout $n \geq k'$.

Posons $k'' = k'(k'+1)$ comme dans (i).

Ainsi en utilisant (i) car f est une réduction de g, il vient $H_{k''+n} = H_{k''} I_n$, pour tout $n \geq k''$.

Par suite f est une réduction de h.

iii) Supposons que f réduction de g et que $f \leq h \leq g$.

Soit k comme dans (i).

Comme $h \leq g$ alors pour tout $n \geq k$, $J_k H_n \subset J_k J_n = J_{k+n} \subset J_k H_n$ car $f \leq h$.

Donc $J_{k+n} = J_k H_n$, pour tout $n \geq k$.

Par suite h est réduction de g. □

Remarque 3.5. *Cependant, le fait que g soit fortement entière sur f n'implique pas nécessairement que f soit une réduction de g, même si f et g sont noethériennes. On peut le voir sur l'exemple suivant :*
Soit $A = k[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée sur le corps k.
Soit $I = XA$.
On considère les filtrations $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$I_n = \begin{cases} I^{\frac{3n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ I^{\frac{3n+3}{2}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$J_n = \begin{cases} I^{\frac{3n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ I^{\frac{3n+1}{2}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

On vérifie que g est noethérienne et que $f \leq g$.
De plus, la filtration g est entière sur f.
En effet pour tout élément $b \in J_n$, $b^2 \in J_{2n}$ et on a $(bY^n)^2 = b^2 Y^{2n} \in R(A, f)$.

L'anneau $R(A, g)$ est donc entier sur $R(A, f)$. De plus, comme g est noethérienne, il résulte que g est fortement entière sur f et que f est noethérienne.
Néanmoins, f n'est pas une réduction de g puisqu'on n'a pas $J_{2p+1}^2 = I_{2p+1} J_{2p+1}$, pour p suffisamment grand, condition nécessaire pour qu'une filtration f soit une réduction de g quand l'anneau A est noethérien.

3.4 Filtrations f-bonnes

Définition 3.6. *Soient A un anneau et M un $A-$module.*
On suppose que $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $f-$compatible, avec f appartenant à $\mathbb{F}(A)$. Alors :

(a) *φ est faiblement $f-$ bonne s'il existe un entier naturel N supérieur ou égal à 1 tel que :*
$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p}M_p;$$

(b) *φ est $f-$ bonne s'il existe un entier naturel N supérieur ou égal à 1 tel que :*
$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p}M_p;$$

(c) *φ est $f-$ fine s'il existe un entier naturel N supérieur ou égal à 1 tel que :*
$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_pM_{n-p}.$$

Remarque 3.6. *(1) Toute filtration $f-$bonne est faiblement $f-$ bonne.*

(2) Soit $f \in \mathbb{F}(A)$. Alors f est faiblement $f-$bonne.

(3) Soit $f \in \mathbb{F}(A)$. Alors f est $f-$bonne si et seulement si f est E.P.

(4) Soient $\varphi \in \mathbb{F}(M)$ et I un idéal de A. Alors φ est $I-$bonne si et seulement si φ est f_I-bonne, où f_I est la filtration $I-$adique.

(5) Soit $g \in \mathbb{F}(A)$ telle que $f \leqslant g$. Alors si g est fortement entière alors g est faiblement $f-$bonne.

Démonstration. (1) Soit $f = (I_n)$ une filtration $f-bonne$. Alors il existe $N \geqslant 1$ tel que :
$$\forall n > N, I_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p}I_p.$$

Ainsi pour $n > N$, $\sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}I_p = I_n + \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p}I_p = I_n + I_n = I_n$.
Donc f est $faiblement\ f-bonne$.
(2) Soit $f = (I_n) \in \mathbb{F}(A)$. Alors :
$I_n \subset \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}I_p$ et $I_{n-p}I_p \subset I_n$ Donc $\sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}I_p \subset I_n$.
Par suite, $I_n = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}I_p$. Et donc f est $faiblement\ f-bonne$.
(3) Par définition toute filtration $f-bonne$ est $E.P$.
(4) Supposons que $\varphi \in \mathbb{F}(M)$ est $I-bonne$. Alors :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $IM_n \subset M_{n+1}$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $IM_n = M_{n+1}$.
On a : $IM_n = Mn + 1$ alors $I^2M_n = M_{n+2}$, d'où $I^{n-p}M_p = M_n$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Par suite $\sum\limits_{p=0}^{n_0} I^{n-p}M_p = M_n$ et donc φ est $f_I - bonne$.
Réciproquement supposons que φ est $f_I - bonne$ alors il existe $N \geqslant 1$ tel que pour tout $n > N$, $M_{n+1} = \sum\limits_{p=0}^{N} I^{n+1-p}M_p = I(\sum\limits_{p=0}^{N} I^{n-p}M_p) = IM_n$. Ainsi φ est $I - bonne$.

□

Proposition 3.11. *Si $f = (I_n)$ est une réduction de $g = (J_n)$ alors :*

(i) f est A.P. et g est fortement A.P ;

(ii) g est E.P et $f - bonne$;

(iii) En plus, si A est noethérien alors f et g sont noethériennes et g est fortement entière sur f.

Démonstration. Supposons que $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une réduction de $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors $f \leq g$ et il existe $k \geq 1$, tel que pour tout $n \geq k$, $J_{n+k} = I_nJ_k = J_kJ_n$.
i) Nous avons $J_{nk} = J_k^n$ pour tout n. Donc g est $fortement\ A.P.$
De plus la division euclidienne de n par k donne $n = kq_n + r_n$, avec $0 \leq r_n < k$.
Posons $k_n = k(q_n + 1)$.
Alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{k_n}{n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{kq_n+r_n+k-r_n}{n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 1 + \frac{k-r_n}{n} = 1$.
Par ailleurs, $J_{k_nm} = J_{k_n}^m = J_{k(q_n+1)}^m \subset J_n^m$.
Posons $k'_n = k_{2k+n}$.
Alors $I_{k'_nm} \subset J_{k'_nm} \subset J_{(k_{2k+n})m} = J_{k_{2k+n}}^m = J_k^mI_{k+n}^m \subset I_n^m$.
Par suite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{k'_n}{n} = 1$
Donc f est $A.P.$
ii) Posons $N = 2k$. Alors si $n \geq N$, $n - k \geq k$ et $J_n = I_{n-k}J_k \subset \sum\limits_{p=1}^{2k} I_{n-p}J_p$
Donc $J_n = \sum\limits_{p=1}^{2k} I_{n-p}J_p$ et g est $f - bonne$ et donc g est $E.P.$
iii) Si A est noethérien alors d'après ii) g et f sont noethérienne. Et donc g est $fortement\ entière$ sur f. □

Proposition 3.12. *Toute filtration φ de M $f - fine$ est $f - bonne$.*

Démonstration. Supposons que $\varphi = (M_n)$ est une filtration de M qui est $f - fine$, où $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de A.

Alors il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N, M_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_pM_{n-p}$.

Comme $n > N$, posons $n = N + 1$, ainsi

$M_{N+1} = \sum\limits_{p=1}^{N} I_pM_{N+1-p} = \sum\limits_{q=1}^{N} I_{N+1-q}M_q$, avec $q = N + 1 - p$.

Ainsi, il vient de proche en proche que $M_{N+j} = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{N+j-p}M_p$, pour tout j avec $1 \leq j \leq m$.

Alors $M_{N+m} = \sum\limits_{p=1}^{N} I_p M_{N+m-p} = \sum\limits_{q=m}^{N+m-1} I_{N+m-q} M_q = \sum\limits_{q=m}^{N} I_{N+m-q} M_q + \sum\limits_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} M_q = \sum\limits_{q=m}^{N} I_{N+m-q} M_q + \sum\limits_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} (\sum\limits_{p=1}^{N} I_{q-p} M_p)$.

Or $\sum\limits_{q=m}^{N} I_{N+m-q} M_q \subset \sum\limits_{p=1}^{N} I_{N+m-p} M_p$ et $\sum\limits_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} (\sum\limits_{p=1}^{N} I_{q-p} M_p) = \sum\limits_{p=1}^{N} (\sum\limits_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-p}) M_p = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{N+m-p} M_p \subset M_{N+m}$

Par suite φ est $f-bonne$, l'inclusion inverse étant évidente. □

Corollaire 3.2. *Soient $f, g \in \mathbb{F}(A)$ avec $f \leqslant g$. Si A est noethérien alors :*
g faiblement $f-bonne$ si et seulement si g est fortement entière sur f.

Proposition 3.13. *Soient $f = (I_n)$ une filtration E.P. de A et $\varphi = (M_n) \in \mathbb{F}(M)$. Nous avons les assertions suivantes :*

φ est $f-fine$ si et seulement si φ est $f-$bonne si et seulement si φ est faiblement $f-$bonne.

Démonstration. Il suffit de montrer que φ est faiblement $f-bonne$ si φ est $f-fine$.
Supposons que φ est faiblement $f-bonne$.
Soient $N, N' \geqslant 1$ des entiers tels que pour tout $n \geqslant N$, $M_n = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p} M_p$ et pour tout $n \geq 1, I_n = \sum\limits_{p=1}^{N'} I_{n-p} I_p$. Alors pour $n > N'' = N + N'$,

$M_n = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p} M_p = \sum\limits_{p=0}^{N} (\sum\limits_{q=1}^{N'} I_{n-p-q} I_p) M_p = \sum\limits_{q=1}^{N'} I_q (\sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p-q} M_p) = \sum\limits_{q=1}^{N'} I_q M_{n-q} \subset \sum\limits_{q=1}^{N''} I_q M_{n-q}$.

Donc $M_n = \sum\limits_{q=1}^{N''} I_q M_{n-q}$, l'inclusion inverse étant triviale. □

Corollaire 3.3. *Soient $f, g \in \mathbb{F}(A)$. Si A est noethérien, $f \leqslant g$ et f noethérien. Alors nous avons les assertions suivantes :*
g est $f-fine$ si et seulement si g est $f-bonne$ si et seulement si g est faiblement $f-bonne$ si et seulement si g est fortement entière sur f.

Proposition 3.14. *Soient $f = (I_n), g = (J_n) \in \mathbb{F}(A)$, tel que $f \leqslant g$.*
Si g est $f-bonne$, E.P. et A est noethérien alors f et g sont noethériennes.

Démonstration. Il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N, J_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} J_p \subset \sum\limits_{p=1}^{N} J_{n-p} J_p \subset J_n$

Donc $J_n = \sum\limits_{p=1}^{N} J_{n-p} J_p$ pour tout $n > N$.
Cette égalité est valable si $1 \leq n \leq N$.
Comme g est $E.P$ et A noethérien alors g est fortement entière sur f.
Par suite g est noethérien et d'après [6], f est noethérien. □

Proposition 3.15. *Soient $f = (I_n), g = (J_n) \in \mathbb{F}(A)$, tel que $f \leqslant g$.*
Si g est faiblement $f-$ bonne alors :
f est A.P si et seulement si g est A.P.

Démonstration. Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$.

Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que $I_n \subset J_n \subset I_{n-N} \subset J_{n-N}$ pour tout $n > N$.

Si f est *A.P.* alors il existe une suite d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{k_n}{n} = 1$ et $I_{k_n m} \subset I_n^m$, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$. Par suite, $J_{(k_n+N)m} \subset J_{k_n m+Nm} \subset J_{k_n m+N} \subset I_{k_n m+N} \subset I_{k_n m} \subset I_n^m \subset J_n^m$.

D'où $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{k_n+N}{n} = 1$, g est *A.P.*

Réciproquement si g est *A.P.* alors il existe une suite d'entiers $(k_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ associée à g.

Alors $I_{k_n'+N.m} \subset J_{k_n'+N.m} \subset J_{n+N}^m \subset I_n^m$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{k_n'+N}{n} = 1$, f est *A.P.* □

Proposition 3.16. *Soient A un anneau noethérien, $f = (I_n), g = (J_n)$ deux filtrations de A. Si f est noethérienne alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) g est fortement entière sur f ;

(ii) Il existe un entier $N \geqslant 1$, tel que $t_N g \leqslant f \leqslant g$.

Démonstration. D'après 3.6 (3), il suffit de montrer que (*ii*) alors (*i*). Ce qui est une conséquence de 3.2 et de ([8],2.9) □

Voyons à présent le théorème principal de ce mémoire.

Théorème 3.1. *Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des filtrations sur l'anneau A.*
Nous considérons les assertions suivantes :

i) f est une réduction de g.

ii) $J_n^2 = I_n J_n$ pour tout n assez grand.

iii) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.

iv) Il existe un entier s supérieur ou égal à 1 tel que pour tout n supérieur ou égal à s, $J_{s+n} = J_s J_n$,

$I_{s+n} = I_s I_n$, $J_s^2 = I_s J_s$, $J_{s+p} I_s = I_{s+p} J_s$ pour tout $p = 1, 2, ..., s-1$

v) Il existe un entier k supérieur ou égal à 1 tel que $g^{(k)}$ est $I_k -$ bonne

vi) Il existe un entier r supérieur ou égal à 1 tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$.

vii) Pour tout entier m supérieur ou égal à 1 tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.

viii) g est entière sur f.

ix) g est fortement entière sur f.

x) g est $f-fine$.

xi) g est $f-$ bonne.

xii) g est faiblement $f-$ bonne.

xiii) Il existe un entier N supérieur ou égal à 1 tel que $t_N g \leq f \leq g$

xiv) Il existe un entier N supérieur ou égal à 1 tel que $t_N g' \leq t_N f'$.

xv) $P(f) = P(g)$.

1) On a :

(i) $\Longleftrightarrow$ *(vii)* ; *(v)* $\Longleftrightarrow$ *(vi)* ; *(viii)* $\Longleftrightarrow$ *(xv)* ; *(ii)* $\Longrightarrow$ *(iii)* ; *(iv)* $\Longrightarrow$ *(i)* $\Longrightarrow$ *(v)* ; *(ix)* $\Longrightarrow$ *(vii)*, *(xii)* *et* *(xiii)* ;

(i) $\Longrightarrow$ *(x)* $\Longrightarrow$ *(xi)* $\Longrightarrow$ *(xii)* $\Longrightarrow$ *(xiii)*

2) Si de plus on suppose A noethérien, alors :

(i) $\Longleftrightarrow$ *(xiv)* ; *(i)* $\Longrightarrow$ *(ix)* $\Longleftrightarrow$ *(xii)* ; *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*

3) Par ailleurs, si f est noethérienne, alors A est noethérien et les assertions suivantes sont équivalentes :

(ix) $\Longleftrightarrow$ *(x)* $\Longleftrightarrow$ *(xi)* $\Longleftrightarrow$ *(xii)* $\Longleftrightarrow$ *(xiii)*

4) Si f et g sont noethériennes alors nous avons :

(iii) $\Longrightarrow$ *(viii)* $\Longleftrightarrow$ *(ix)* ; *(vi)* $\Longrightarrow$ *(ix)*

5) Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les quinze (15) assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne

(i) $\Longleftrightarrow$ *(ii)* $\Longleftrightarrow$ *(iii)* $\Longleftrightarrow$ *(iv)* $\Longleftrightarrow$ *(v)* $\Longleftrightarrow$ *(vi)* $\Longleftrightarrow$ *(vii)* $\Longleftrightarrow$ *(viii)* $\Longleftrightarrow$ *(ix)* $\Longleftrightarrow$ *(x)* $\Longleftrightarrow$ *(xi)* $\Longleftrightarrow$ *(xii)* $\Longleftrightarrow$ *(xiii)* $\Longleftrightarrow$ *(xiv)* $\Longleftrightarrow$ *(xv)*.

Démonstration. 1)

$(i) \Longleftrightarrow (vii)$.

Supposons (i) et choisissons k comme dans 3.10 (i) alors pour tout entiers $m \geq 1$ et $n \geq k$, $J_{m(k+n)} = J_{mk}I_{mn}$, ce qui entraîne (vii).

La réciproque est évidente.

$(v) \Longrightarrow (vi)$.

Posons $f^{(k)} = (H_n)$; $g^{(k)} = (K_n)$; $H_n = I_{nk}$; $K_n = J_{nk}$; $H_1 = I_k$;

Par hypothèse, $H_1K_n \subset K_{n+1}$ pour tout entier n et il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $H_1K_n = K_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.

Pour tout entier $m \geq 0$, $K_{n_0+m} = H_1^m K_{n_0} \subset H_m K_{n_0} \subset K_{n_0+m}$.

Donc $K_{n_0+m} = K_{n_0}H_m$ pour tout entier m. Et donc $f^{(k)}$ est une réduction de $g^{(k)}$.

$(vi) \Longrightarrow (v)$.

Il suffit de montrer que si f est une réduction de g alors il existe $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$.

Posons k comme dans 3.10 (i), alors pour tout entiers $m \geq 1$ et $J_{k(m+1)} = J_{mk}I_k$, donc $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$.

Donc $(vi) \Longrightarrow (v)$.

$(viii) \Longleftrightarrow (xv)$.

Si g est entière sur f alors $f \leq g \leq P(f)$, ainsi $P(f) \leq P(g) \leq P(P(f)) = P(f)$, donc $P(g) = P(f)$.

Réciproquement si $P(f) = P(g)$ alors $g \leq P(g) = P(f)$ et donc g est entière sur f.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$.

Évident.

$(iv) \Longrightarrow (i)$.

Posons $n \geq 2s$ et $n = qs + p$ avec $0 \leq p < s$.

Alors $J_{s+n} = J_{(q-2)s+2s+(s+p)} = J_s^{q-2}J_{2s+(s+p)} = J_s^{q-2}J_s^2J_{s+p} = J_s^{q-1}I_sJ_{s+p} = J_s^{q-1}J_sI_{s+p} = J_s^qI_{s+p} = J_sI_s^{q-1}I_{s+p} \subset J_sI_n \subset J_{s+n}$.

Par suite $J_{s+n} = J_sI_n$ pour tout $n \geq 2s$. Donc $J_{2s+n} = J_{2s}I_n$ pour tout $n \geq 2s$. D'où (i).

$(i) \Longrightarrow (v)$

Évident car $(vi) \Longrightarrow (v)$.

$(ix) \Longrightarrow (viii)$

Évident

$(ix) \Longrightarrow (xii) \Longrightarrow (xiii)$ en utilisant 3.6 (5)

$(i) \Longrightarrow (x)$.

Pour tout entier $n \geq N = 2k-1$, posons $n = qk + r$, avec $0 \leq r < k$ où k est comme dans (4.3) (i).

Alors $J_n = J_{k(q-1)} I_{k+r}$.

Ainsi $1 \leq k + r < 2k - 1$, $J_n \subset \sum\limits_{p=1}^{N} I_p J_{n-p} \subset J_n$, d'où $J_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_p J_{n-p}$ pour tout $n \geq N = 2k - 1$.

Ce qui prouve que g est $f - fine$.

$(x) \Longrightarrow (xi)$ par 3.12

$(xi) \Longrightarrow (xii)$ par 3.6 (1).

2)

On suppose maintenant que A est noethérien.

Alors $(i) \Longrightarrow (ix)$ en utilisant 3.11.

$(i) \Longrightarrow (ii)$

f est noethérienne par 3.11 donc il existe un entier k' tel que $I_{n+k'} = I_n I_{k'}$, pour tout $n \geq k'$.

Choisissons k comme dans 3.10 (i) nous pouvons supposons que $k = k'$ et même prendre kk' à la place de k ou k' si nécessaire.

Pour tout $n \geq 3k$, posons $n = qk + r$, avec $0 \leq r < k$. Alors $q = E(\frac{n}{k}) \geq 3$.

$J_n = J_k I_{(q-1)k+r} = J_k I_k^{q-2} I_{k+r}$.

$J_n^2 = J_k^2 I_k^{q-3} (I_k^{q-1} I_{k+r}) I_{k+r} \subset J_{2k} I_{(q-3)k} I_n I_{k+r}$.

D'où $J_n^2 \subset J_n I_n$

Donc $J_n^2 = J_n I_n$ pour tout $n \geq 3k$.

$(i) \Longleftrightarrow (iv)$.

D'après 1) il suffit de montrer que $(i) \Longrightarrow (iv)$.

Nous avons vu que $(i) \Longrightarrow (ii)$. Alors il existe un entier $k' \geq 1$ tel que $J_n^2 = I_n J_n$ pour tout $n \geq k'$.

Dans la preuve de la même implication, nous avons aussi montrer qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $J_{k+n} = J_k I_n = J_k J_n$ et que $I_{k+n} = I_k I_n$ pour tout $n \geq k$.

Posons $n \geq 2kk' = s$, $k" = kk'$ et $n = qk" + r$ avec $0 \leq r < k"$. Alors $q \geq 2$ et :

$J_{s+n} = J_{(q+2)k"+r} = J_{k"}^3 J_{(q-1)k"+r} = I_{k"}^2 J_{k"} J_{(q-1)k"+r} = I_s J_n$.

$J_{s+n} = J_s I_n = J_s J_n$

$I_{s+n} = I_s I_n$

$J_s^2 = I_s J_s$

D'où (iv).

$(ix) \Longleftrightarrow (xii)$ d'après 3.2

$(iii) \Longleftrightarrow (xiv)$

Nous savons que pour tout idéal $I \subset J$ d'un anneau noethérien, I est une réduction de J si et seulement si $I' = J'$, où I'est la clôture intégrale de I. D'où l'équivalence.

3) Supposons que f est noethérienne.

Alors d'après 3.16, $(ix) \Longleftrightarrow (xiii)$ et d'après 3.3,

$(ix) \Longleftrightarrow (x) \Longleftrightarrow (xi) \Longleftrightarrow (xii) \Longleftrightarrow (xiii)$

4) Supposons que f et g sont noethériens. Alors $(viii) \Longleftrightarrow (ix)$ d'après ([2], 3.6,(b)).

$(iii) \Longrightarrow (viii)$.

Supposons que I_n est une réduction de J_n pour tout $n \geq n_0$.

f et g sont noethérien d'où fortement $A.P.$ à partir d'un rang commun k.

L'idéal J_{n_0k} est entière sur l'idéal I_{n_0k}. D'où g est entière sur f d'après ([2], 4.5).

$(vi) \Longrightarrow (ix)$.

Si $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$ alors $g^{(r)}$ est fortement entière sur $f^{(r)}$ d'après 3.11 (iii) et g est fortement entière sur f d'après 2.1

5) Supposons que f est fortement noethérienne. D'après l'implication précédente il est facile de montrer que $(xii) \Longrightarrow (i)$.

Supposons que (xii), alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N$, $J_n = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}J_p$.

f étant fortement noethérienne, il existe un entier $N' \geq 1$ tel que $I_mI_n = I_{m+n}$ pour tout $m, n \geq N'$.

Posons $n \geq k = N + N'$.

Si $0 \leq p \leq N$, alors $N' = k - N \leq k - p \leq n - p$, $J_{n+k} = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n+k-p}J_p = \sum\limits_{p=0}^{N} I_nI_{k-p}J_p = I_nJ_k$, et f est une réduction de g.

Pour compléter la preuve, nous avons montrer par exemple que si f est une réduction de g et si f est fortement noethérienne alors g est fortement noethérien.

Soient k, k' des entiers ≥ 1 tel que $J_{k+n} = J_kI_n$ pour tout $n \geq k$ et $I_{m+n} = I_mI_n$ pour tout $m, n \geq k'$.

Posons $m, n \geq k'$. Alors $J_mJ_n \subset J_{m+n} = J_kI_{m+(n-k)} = J_kI_mI_{n-k} \subset J_mJ_n$, d'où $J_{m+n} = J_mJ_n$ pour tout $m, n \geq k + k'$ et g est fortement noethérienne. $\square$

Conclusion et perspectives

L'objectif de ce travail était l'étude de la dépendance intégrale et de la réduction par rapport aux idéaux à travers la filtration I-adique, qui est une filtration I-bonne.

Ensuite, nous avons examiné la dépendance intégrale et la réduction dans le contexte des filtrations bonnes en général. Nous pouvons donc retenir que dans un anneau local noethérien, toutes les filtrations bonnes admettent une réduction minimale. De plus, sous certaines conditions vérifiées, nous pouvons établir des propositions équivalentes entre les notions de réduction, de dépendance intégrale et de filtrations bonnes.

En tant que perspectives, nous envisageons d'étudier sous quelles hypothèses nous pourrons étendre ces résultats aux autres classes de filtrations, notamment les filtrations noethériennes et les filtrations de modules. De plus, nous nous interrogeons sur la possibilité d'étendre ces résultats à des objets algébriques qui ne sont pas nécessairement décroissants.

Bibliographie

[1] Bishop W., Petro J.W., Ratliff Jr L. J. et Rush D., *Note on noetherian filtrations*, Communications in Algebra, Vol.17, No. 2, 1988, pp. 471-485.

[2] Dichi H., *Integral dependence over a filtration*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 58, No. 1, 1989, pp. 7-18.

[3] Dichi H., *Travaux de recherches, en vue de l'habilitation à diriger une recherche*, 1999.

[4] Dichi H., Sangare D., et Soumare M., *Filtrations, integral dependence, reduction, f-good filtrations*, Communications in Algebra, Vol. 20, No. 8, 1992, pp. 2393-2418.

[5] Dichi H. et Sangaré D., *Filtrations, asymptotic ans prüferian closures, cancellation laws*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 113, No. 3, 1991, pp. 617-624.

[6] Eakin P., *The converse to a well known theorem on noetherian rings*, Math. Ann., Vol. 177, 1968, pp. 278-282.

[7] Northcott D. G., et Rees D., *Reductions of ideals in local rings*, in Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 50, No. 2, 1954, pp. 145-158.

[8] Okon J. S., et Ratliff L., *Reductions of filtrations*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 144, No. 1, 1990, pp. 137-154.

[9] Prüfer H., *Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 168, 1932, pp. 1-36.

[10] Ratliff Jr L. J., *Notes on essentially powers filtrations*, Michigan Mathematical Journal, Vol.26, No. 3, 1979, pp. 313-324.

[11] Ratliff Jr L. J. et Rush D., *Note on I-good filtrations and noetherian Rees rings*, Communications in Algebra, Vol.16, No. 5, 1988, pp. 955-975.