Dédicace

Je dédie ce travail
À la mémoire de mon père KABLAM Oi Kablam Simon,
que ce travail soit un témoignage de ma reconnaissance pour tout ce qu'il a fait pour moi et de mon attachement indéfectible à ses principes et règles.
À ma mère KASSI Ettien Cécile,
qui m'a inculqué des valeurs de persévérance, d'honnêteté et de bonne moralité.
À mes frères et sœurs pour leur soutien tout au long de mon parcours.
À mes amis pour leurs encouragements et leurs conseils.
À tous ceux que j'aime.
À tous ceux qui m'aiment.

Remerciements

C'est avec un immense plaisir que je m'apprête à soutenir mon mémoire de MASTER. Je me donne à cet effet, au délicat exercice des remerciements.

Je rends gloire et louange à Dieu, pour la grâce qu'il m'a accordée à pouvoir garder le moral haut le long de mon parcours en dépit de nombreuses péripéties.

Je souhaite remercier le Professeur DIAGANA Youssouf, Directeur du Laboratoire de Mathématiques et Informatique de l'Unité de Formation et de Recherche Sciences Fondamentales et Appliquées (UFR-SFA) de l'Université NANGUI ABROGOUA pour avoir accepté de présider ce jury. Il a été une source d'inspiration pour nous et nous a transmis un véritable amour pour les Mathématiques.

Je souhaite adresser une note spéciale d'appréciation à mon Directeur de mémoire, Docteur ASSANE Abdoulaye, Maître de Conférences à l'Université NANGUI ABROGOUA. Il n'a ménagé aucun effort pour donner forme à ce travail. Vos conseils éclairés et vos orientations ont été d'une grande valeur tout au long de la rédaction de ce mémoire.

J'exprime une reconnaissance infinie et mes sincères remerciements à mon encadrant scientifique, Docteur BROU Kouadjo Pierre, Maître Assistant à l'Université NANGUI ABROGOUA. Ses encouragements, ses conseils, sa disponibilité et ses critiques objectives ont été d'une aide précieuse durant de la réalisation de ce travail.

Je souhaite également remercier les membres du jury, notamment Docteur KOUAKOU Kouassi Vincent, Maître Assistant à l'Université NANGUI ABROGOUA, pour l'honneur qu'il nous fait en faisant partie de notre jury en tant que Examinateur.

Mes remerciements s'adressent également au Directeur de l'Unité de Formation et de Recherche Sciences Fondamentales et Appliquées (UFR-SFA), Monsieur KRE N'Guessan Raymond, Professeur Titulaire, au Vice Doyen de l'UFR-SFA, le Professeur BENIE Anoubilé, ainsi qu'à la secrétaire principale, Madame KOUASSI Bienvenue, qui œuvrent inlassablement pour le bien-être des étudiants de l'UFR-SFA.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude envers mes amis et condisciples de parcours depuis mes débuts à l'Université NANGUI ABROGOUA.

Résumé

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous penchons sur une étude approfondie de la dépendance intégrale et de la réduction dans le contexte des filtrations bonnes en reprenant les travaux déjà publiés par divers chercheurs dans le domaine de la théorie des filtrations.

Notre approche consiste à étudier les concepts de dépendance et de réduction au sein des filtrations I-adiques, afin d'explorer les propriétés qui y sont associées. Nous remarquons que les filtrations I-adiques sous certaines conditions présentent toujours une réduction. Et donc sous certaines hypothèses nous tentons d'élargir ces propriétés aux filtrations f-bonnes de manière générale.

Mots-clés : Dépendance intégrale, Réduction, Filtration bonne.

Abstract

As part of this dissertation, we focus on an in-depth study of integral dependence and reduction in the context of good filtrations by taking up work already published by various researchers in the field of filtration theory.

Our approach consists of studying the concepts of dependence and reduction within I-adic filtrations, in order to explore the properties associated with them. We notice that I-adic filtrations under certain conditions always present a reduction. And so under certain hypotheses we try to extend these properties to f-good filtrations in general.

Keywords : Integral dependence, Reduction, Good filtration.

Notations

$\mathbb{N}^*$	Ensemble des nombres entiers naturels privés de 0
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{K}$	Le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$A[X]$	Anneau des polynômes à coefficients dans A d'indéterminée X
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	Ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{F}(A)$	Ensemble des filtrations sur le module A
$R(A, f)$	Anneau de Rees par rapport à la filtration f de A
$\mathcal{R}(A, f)$	Anneau de Rees généralisé par rapport à la filtration f de A
f_I	La filtration I-adique
e	Élément neutre d'un groupe
0_A	Élément neutre par rapport à la première loi de l'anneau
1_A	Élément neutre par rapport à la deuxième loi de l'anneau
id_A	L'application identité de A
$P(f)$	Clôture prüférienne de f.
$f^{(k)}$	Filtration extraite de f d'ordre k
$t_k f$	Filtration tronquée de f d'ordre k
I_r	Matrice identité d'ordre r
0_r	Matrice nulle de dimension (r,1)
P_T	Polynôme caractéristique associé à T

Table des matières

Introduction

La notion d'élément entier sur un idéal I d'un anneau noethérien A a été introduit par Prüfer [9] dans les années 1930. Un élément $x \in A$ est dit entier sur l'idéal I de A s'il vérifie une équation de la forme $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$, où a_j appartient à I^j pour tout entier j allant de 1 à n.
La clôture intégrale de l'idéal I est l'idéal I' formés des éléments x de A qui sont entiers sur I. L'idéal J de A est dit entier sur l'idéal I si $J \subseteq I'$.
Northcott D.G. et Rees D. dans [7] ont défini dans un anneau local noethérien la notion de réduction d'un idéal sur un autre qui est voisine de la notion d'élément entier sur un idéal introduit par Prüfer. L'idéal I est une réduction de l'idéal J si I est contenu dans J et s'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $J^N = IJ^{N-1}$.
Une filtration de l'anneau A est une suite $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'idéaux de A, décroissante pour l'inclusion et vérifiant $I_0 = A$ et $I_nI_m \subset I_{n+m}$. On note $\mathbb{F}(A)$ l'ensemble des filtrations de l'anneau A. Soit I un idéal de A, une filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite $I-bonne$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $II_n \subseteq I_{n+1}$ et s'il existe k un entier tel que pour tout $n \geqslant k$, $II_n = I_{n+1}$. Les filtrations les plus connues sont les filtrations *adiques*. En particulier, toute filtration $I - adique$ est $I - bonne$ pour tout I idéal de A.

Les filtrations bonnes se sont révélées être des structures particulièrement adaptées à l'analyse des propriétés des anneaux locaux, ouvrant ainsi des horizons nouveaux dans la compréhension des propriétés locales des structures algébriques.

En embrassant ce panorama historique et en soulignant les contributions majeures des éminents mathématiciens, cette étude aspire à expliciter les résultats de Dichi H. dans [3] qui constitue une contribution significative à l'édifice des connaissances, en poursuivant le développement et la généralisation des notions de dépendance intégrale, de réduction, et de filtrations bonnes.

Malgré les avancées significatives réalisées dans l'étude des notions de dépendance intégrale, de réduction et de filtrations bonnes des questionnements demeurent quant à leur généralisation et à leur interconnexion dans des cadres mathématiques diversifiés. Comment étendre de manière rigoureuse les résultats obtenus dans le contexte restreint de la filtration I-adique à des filtrations de nature plus générale, telles que les filtrations bonnes ? Comment ces notions interagissent-elles ?

Afin de répondre à ces interrogations, notre démarche s'articulera autour de trois axes majeurs. Dans un premier temps, nous plongerons dans l'étude approfondie de la dépendance intégrale, en explorant ses origines historiques et en analysant ses implications dans le contexte des anneaux commutatifs. Nous poursuivrons ensuite notre exploration en examinant la réduction au sein de la filtration I-adique, avant d'élargir notre perspective à des filtrations bonnes, mettant en lumière les liens conceptuels et les différences inhérentes à ces contextes variés. En embrassant cette démarche, nous aspirons à contribuer à l'enrichissement des connaissances dans le domaine de l'Algèbre Commutative, tout en offrant des perspectives nouvelles sur des concepts fondamentaux de cette discipline.

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS

Dans ce chapitre, nous posons les bases en rappelant plusieurs définitions et propriétés cruciales vues dans [3] et liées à divers concepts pertinents pour notre étude. Parmi ces éléments, nous explorons les structures algébriques notamment les anneaux et les modules. Ensuite, nous définissons et classifions les différentes types de filtrations. De plus, nous récapitulons quelques résultats importants associés aux filtrations I-bonnes et présentations un lien entre les filtrations I-bonnes et les autres classes de filtrations.

Dans l'ensemble de ce mémoire, sauf mention contraire, les anneaux considérés sont supposés **commutatifs et unitaires**.

1.1 Relation d'équivalence, groupe et sous-groupe

1.1.1 Relation d'équivalence

Définition 1.1. *On appelle relation d'équivalence sur un ensemble non vide E, une relation $\Re$ sur E vérifiant les conditions suivantes :*

a) pour tout $x \in E, x\Re x$ (réflexivité) ;

b) pour tout $x, y \in E, x\Re y \Longleftrightarrow y\Re x$ (symétrie) ;

c) pour tout $x, y, z \in E, (x\Re y)$ et $(y\Re z) \Longrightarrow (x\Re z)$ (transitivité).

La partie $C_x = \{y \in E,\ x\Re y\}$ de E est appelée la classe d'équivalence modulo $\Re$ de $x \in E$. Les classes d'équivalence constituent une partition de E. Notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. La famille $(C_x)_{x\in E}$ constitue un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ appelé l'ensemble quotient de E par R. On le note $E/\Re$. Dans la suite, la classe de $x \in E$ sera vue essentiellement comme élément de ce nouvel ensemble $E/\Re$ et sera notée $\bar{x}$.

1.1.2 Relation d'ordre

Définition 1.2. *On appelle relation d'ordre sur un ensemble non vide E, une relation $\Re$ sur E vérifiant les conditions suivantes :*

a) *pour tout* $x \in E, x\Re x$ *(réflexivité) ;*

b) *pour tout* $x, y \in E, x\Re y$ *et* $y\Re x \Longleftrightarrow y = x$ *(anti-symétrie) ;*

c) *pour tout* $x, y, z \in E, (x\Re y)$ *et* $(y\Re z) \Longrightarrow (x\Re z)$ *(transitivité).*

L'ensemble $(E, \Re)$ *s'appelle alors ensemble ordonné. L'ordre est dit total si deux éléments sont toujours comparables (on dit aussi que l'ensemble est totalement ordonné). Dans le cas contraire, il est dit partiellement ordonné.*

1.1.3 Groupe

Définition 1.3. *Soit* G *un ensemble non vide.*
On dit que $(G, \star)$ *est un groupe si* $\star$ *est une loi de composition qui a tout élément de* G *associe un élément dans* G *vérifiant :*

(i) *La loi* $\star$ *est associative :*

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c, \ \text{pour tout } (a, b, c) \in G^3;$$

.

(ii) G *possède un élément neutre* e *:*

$$\text{il existe } !e \in G, \ e \star a = e = a \star e, \ \text{pour tout } a \in G;$$

.

(iii) *Tout élément* a *de* G *admet un symétrique :*

$$\text{il existe } b \in G, \ a \star b = e = b \star a;$$

(vi) *Si de plus la loi* $\star$ *est commutative :*

$$a \star b = b \star a, \ \text{pour tout } (a, b) \in G^2.$$

On dit que le groupe $(G, \star)$ *est abélien ou commutatif.*

1.1.4 Sous-groupe

Définition 1.4. *Soit* $(G, \star)$ *un groupe.*
On dit que $H \subset G$ *est un sous-groupe de* G *si :*

(i) $e \in H$*, où* e *est l'élément neutre de* G

(ii) *La partie* H *est stable par la loi* $\star$ *:*

$$\text{pour tout } (a, b) \in H^2, a \star b \in H;$$

(iii) *pour tout* $a \in H, a^{-1} \in H$.

1.2 Anneau, Corps, Espace vectoriel et Morphisme d'anneaux

1.2.1 Anneau

Définition 1.5. *Soit A un ensemble non vide muni de deux lois de compositions internes. On dit que $(A, +, \times)$ est un anneau si :*

(i) $(A, +)$ *est un groupe abélien ;*

(ii) La loi $\times$ *est distributive par rapport à la loi* $+$ *;*

(iii) La loi $\times$ *est associative.*

L'anneau est dit commutatif si la loi $\times$ *est commutatif.*

Exemple 1.1. $(\mathbb{Z}, +, .), (\mathbb{R}, +, .)$ *et* $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, .)$ *sont des anneaux commutatifs unitaires.*

Remarque 1.1. *L'élément neutre de la loi* $+$ *dans* A *est noté* 0_A*. Si de plus il existe un élément neutre pour la loi* $\times$ *dans* A*, cet élément est appelé l'élément unité et est noté* 1_A*. On dit alors que l'anneau* A *est unitaire.*

Définition 1.6. *Soient* $(A, +, \times)$ *un anneau et* B *un sous-ensemble de* A*.*
On dit que B *est un sous-anneau de* A *si :*

(i) $1_A \in B$ *;*

(ii) Pour tous $x, y \in B, x - y \in B$ *;*

(iii) Pour tous $x, y \in B, xy \in B$*.*

Proposition 1.1. *(Anneau noethérien)*
Soit A *une anneau commutatif unitaire. On dit que* A *est un anneau noethérien si l'une des trois assertions équivalentes est vérifiée :*

(i) Tout idéal de A *est de type fini ;*

(ii) Toute suite croissante d'idéaux de A *est stationnaire ;*

(iii) Toute famille non vide d'idéaux de A *admet un élément maximal pour l'inclusion.*

1.2.2 Corps

Définition 1.7. *Un* ***corps*** *est un anneau dans lequel tout élément non nul est inversible.*

Exemple 1.2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *sont des corps.*

1.2.3 Espace vectoriel

Définition 1.8. *Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit E un ensemble (non vide). On appelle* ***loi externe*** *sur E la donnée d'une application définie sur le produit cartésien $\mathbb{K} \times E$ et à valeur dans E.*

Définition 1.9. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. On dit qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsqu'il est muni d'une loi de composition interne commutative, notée + et d'une loi externe de $\mathbb{K}$, notée $\times$, telle que :*

1. *$(E, +)$ est un groupe additif d'élément neutre noté 0_E.*
2. *Les lois + et $\times$ sont compatibles entre elles. C'est-à-dire qu'elle vérifient :*
   (a) *pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $u, v \in E, \lambda \times (u + v) = \lambda \times u + \lambda \times v$;*
   (b) *pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, pour tout $u \in E, (\lambda \times \mu) \times u = \lambda \times (\mu \times u)$;*
   (c) *pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, pour tout $u \in E, (\lambda + \mu) \times u = (\lambda \times u) + (\mu \times v)$;*
   (d) *pour tout $u \in E, 1_{\mathbb{K}}.u = u$.*

Exemple 1.3. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Alors :*

(i) $\mathbb{K}^n$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
(ii) $\mathbb{K}[X]$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
(iii) $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est un espace vectoriel.*

Définition 1.10. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si elle est compatible avec les structures de $\mathbb{K}$-espaces sur E et sur F. Autrement dit si f vérifie :

1. *pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $u \in E, f(\lambda \times u) = \lambda \times f(u)$.*
2. *pour tout $u, v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v)$.*

1.2.4 Morphisme d'anneaux

Définition 1.11. *Soient deux anneaux $(A, \star, \circ)$ et $(B, *, \diamond)$.*
Une application $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux ou homomorphisme si :

$$f(x \star y) = f(x) * f(y) \text{ et } f(x \circ y) = f(x) \diamond f(y), \text{ pour tout } (x, y) \in A^2.$$

On dit de plus que f est un :
- Endomorphisme lorsque $A = B$.
- Isomorphisme lorsque f admet une application réciproque g telle que $f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$.

Proposition 1.2. *(Théorème d'isomorphisme d'anneaux)*
Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.
Son noyau Ker(φ) est un idéal de A et son image Im(φ) est un sous-anneau de B.
De plus, on a :

$$\frac{A}{Ker(\varphi)} \simeq Im(\varphi).$$

Avec Ker(φ) $= \{a \in A : \varphi(a) = 0\}$ et Im(φ) $= \{\varphi(a) : a \in A\}$.

1.2.5 Anneau gradué

Définition 1.12. *Soit A un anneau.*
*Une **graduation sur A** est une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-groupes stables de $(A,+)$ vérifiant :*

i) $A_pA_q \subset A_{p+q}$;

ii) $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$.

*Si pour tout $n < 0, A_n$ est nul, on dit que **A est positivement gradué** ou que **A est gradué de type** $\mathbb{N}$. Ainsi $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Les éléments de A_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont dits de degré n.*

Remarque 1.2. *Si $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alors :*

$$\begin{cases} 1_A \in A_0, \\ A_0 \text{ est un sous-anneau de } A. \\ A_+ = \bigoplus_{n\geqslant 1} A_n \text{ est un idéal de } A. \end{cases}$$

Exemple 1.4. *(Exemple d'anneau gradué)*

1) $A[X] = A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} AX^n$, *avec* $A_n = AX^n = \{\alpha X^n, \alpha \in A, n \in \mathbb{N}\}$.

2) $A[X^{-1}, X] = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$, *avec* $A_n = AX^n = \{\alpha X^n, \alpha \in A, n \in \mathbb{Z}\}$.

1.3 Module

Définition 1.13. *Soit A un anneau commutatif unitaire.*
Un A-module ou module sur A est un groupe abélien $(M,+)$ muni d'une multiplication externe $A \times M \to M, (a,x) \mapsto ax$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $a, b \in A$, pour tout $x \in M, (a+b)x = ax + bx$;

(ii) pour tout $a \in A$, pour tout $x, y \in M, a(x+y) = ax + ay$;

(iii) pour tout $x \in M$, $1_Ax = x$;

(iv) pour tout $a, b \in A$, pour tout $x \in M$, $a(bx) = (ab)x$.

Remarque 1.3. *(i) Si A est un anneau, alors A est un $A-$module.*

(ii) Si A est un corps, alors tout $A-$module est un $A-$espace vectoriel.

Exemple 1.5. *1. Si $A = \mathbb{Z}$, tout sous-groupe abélien peut être vu comme un $\mathbb{Z}-$module.*

Définition 1.14. *Soit M un A-module. Un sous-module de M est un sous-ensemble N de M tel que :*

(i) $0_M \in N$;

(ii) *pour tout* $x, y \in N$ $x + y \in N$;

(iii) *pour tout* $x \in N$, *pour tout* $a \in A$ $ax \in N$.

Définition 1.15. *Soit M un A-module. M est dit de type fini s'il admet un système générateur fini :*

$$\text{il existe } x_1, \cdots, x_r \in M \quad \text{tel que} \quad \text{pour tout } x \in M, x = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i,\ a_i \in A.$$

Proposition 1.3. *(Module noethérien)*
Soient A un anneau et M un $A-$module. On dit que M est un module noethérien si l'une des trois assertions équivalentes est vérifiée :

(i) Tout sous-module de M est de type fini ;

(ii) Toute suite croissante de sous-modules de M est stationnaire ;

(iii) Tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément maximal pour l'inclusion.

Définition 1.16. *(A-algèbre de type fini)*
Soit A un anneau.
On dit que B est une $A-$algèbre de type fini si :

(i) B *est un* $A-$*module ;*

(ii) B *est un anneau ;*

(iii) $B = A[b_1, \cdots, b_r] \simeq \dfrac{A[X_1, \cdots, X_r]}{J}$, $b_i \in B$, J *idéal de* $A[X_1, \cdots, X_r]$.

1.4 Idéal

Définition 1.17. *Soit A un anneau.*
Un idéal de A est une partie I de A vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $0_A \in I$;

(ii) Pour tout $x, y \in I, x + y \in I$;

(iii) Pour tout $a \in A$ *et* $x \in I, ax \in I$.

Exemple 1.6.

(i) Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Si A est un corps alors tout idéal I de A est nulle ou I est égale à A tout entier.

1.4.1 Idéal premier

Définition 1.18. *Soit A un anneau. Un idéal P de A est dit* ***premier*** *s'il est strict et si pour tout x, y deux éléments de A tels que $xy \in P$, alors :*

$$x \in P \quad ou \;\; y \in P.$$

On note $Spec(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau A.

1.4.2 Idéal primaire

Définition 1.19. *Soit A un anneau. Un idéal Q de A est dit* ***primaire*** *s'il est strict et si pour tout x, y deux éléments de A tels que $xy \in Q$, $x \notin Q$ alors :*

$$\text{il existe } n \in \mathbb{N}\ , y^n \in Q.$$

1.4.3 Idéal maximal

Définition 1.20. *Soit A un anneau. Un idéal I de A est dit* ***maximal*** *s'il est strict et s'il n'est contenu dans aucun autre idéal strict de A.*

Remarque 1.4. *Un anneau qui ne possède qu'un seul idéal maximal est appelé* ***anneau local****.*

1.4.4 Radical d'un idéal

Définition 1.21. *Soient A un anneau, I un idéal de A. On appelle radical de I*

$$\sqrt{I} = \{a \in A, \text{ il existe } n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}.$$

Remarque 1.5. *Si I est un idéal de A, alors $\sqrt{I}$ est un idéal de A.*

Proposition 1.4. *Soient A un anneau et I un idéal de A.*

(i) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$;

(ii) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$;

(iii) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$;

(iv) *Si* $P \in Spec(A), \sqrt{P} = P$.

Exemple 1.7. $A = \mathbb{Z}$, $I = 6\mathbb{Z}$.
$\sqrt{I} = \sqrt{6\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$.
$\sqrt{24\mathbb{Z}} = \sqrt{(2^3 \times 3)\mathbb{Z}} = \sqrt{2^3\mathbb{Z}} \cap \sqrt{3\mathbb{Z}} = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = ppcm(2,3)\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$.

Proposition 1.5. *Soient A un anneau, I, J des idéaux de A.*
On a :

(i) *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, (I+J)^n = \sum_{k=0}^{n} I^k J^{n-k}$;

(ii) *Si* $I \subset J$ *alors* $I^k \subset J^k$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.

(iii) $nI = I$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

1.5 Filtrations

1.5.1 Filtration sur un anneau

Définition 1.22. *Soit A un anneau. On appelle filtration de A toute famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'idéaux de A telle que :*

(i) $I_0 = A$;

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{Z}, I_{n+1} \subset I_n$;

(iii) Pour tout $p, q \in \mathbb{Z}, I_p I_q \subset I_{p+q}$.

L'ensemble des filtrations de l'anneau A est noté $\mathbb{F}(A)$.
Pour tout $f, g \in \mathbb{F}(A)$, cet ensemble est ordonné par :

$$f = (I_n) \leqslant g = (J_n) \Longleftrightarrow I_n \subseteq J_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 1.6. *Dans la définition (1.22), il est facile de remarquer que pour tout $n \leq 0, I_n = A$.*
En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que $I_0 = A$ (i), il vient d'une part que :
$I_0 \subset I_n$, pour tout $n \leq 0$ (ii).
Ainsi $A \subset I_n$.
D'autre part, comme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les I_n sont des idéaux de A, alors $I_n \subset A$.
Donc $I_n = A, n \leq 0$.

Ainsi au lieu d'étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.8. *1. Soit I un idéal de A et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$I_{3n} = I_{3n-1} = I_{3n-2} = I^n.$$

2. Soit $A = \dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$I_1 = I_2 = (\bar{2})$$

$$I_n = (\bar{0}) \text{ pour tout } n \geqslant 3.$$

Définition 1.23. *On définit pour toutes filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ de A les trois opérations suivantes :*

(1) le produit $fg = (I_n J_n)$;

(2) l'intersection $f \cap g = (I_n \cap J_n)$;

(3) la somme $f + g = (K_n)$ où pour tout entier n, $K_n = \sum_{k=0}^{n} I_k J_{n-k}$.

On vérifie que $fg, f \cap g, f + g$ sont des filtrations de A et pour toutes filtrations $f, g \in \mathbb{F}(A)$:

$$fg \leqslant f \cap g \leqslant f \leqslant f + g.$$

1.5.2 Filtration sur un module

Définition 1.24. *Soit M un A-module. On appelle filtration de M toute famille $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-modules de M telle que :*

i) $M_0 = M$;

ii) *pour tout* $n \in \mathbb{Z}, M_{n+1} \subset M_n$.

La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A et la filtration $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du A-module M sont dites compatibles si :

$$I_pM_q \subset M_{p+q}, \text{ pour tout } p, q \in \mathbb{Z}.$$

1.6 Anneaux gradués associés à une filtration

1.6.1 Anneau de Rees d'une filtration

Définition 1.25. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A, X est une indéterminée.*
On appelle ***anneau de Rees*** *de f, l'anneau gradué noté R(A,f) tel que :*

$$R(A, f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_nX^n.$$

On appelle ***anneau de Rees généralisé*** *de f, l'anneau gradué noté $\mathcal{R}(A, f)$ tel que :*

$$\mathcal{R}(A, f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_nX^n.$$

On munit $R(A, f)$ d'une structure de sous-anneau gradué de $A[X]$, l'ensemble des polynômes d'indéterminée X à coefficients dans A dont les opérations sont définies pour des éléments de $R(A, f)$ par :

1. *La multiplication :* $(\sum_{n=0}^{r} a_nX^n)(\sum_{k=0}^{s} b_kX^k) = \sum_{p=0}^{r+s} c_pX^p = \sum_{p=0}^{r+s}\sum_{q=0}^{p} a_{p-q}b_qX^p$;
2. *L'addition :* $\sum_{n=0}^{r} a_nX^n + \sum_{k=0}^{s} b_kX^k = \sum_{j=0}^{r} (a_j + b_j)X^j$.

1.6.2 Anneau gradué d'une filtration

Définition 1.26. *Soient A un anneau, M un A-module*
$f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$, $\phi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(M)$ *telle que ϕ est $f-$compatible. On pose :*

$$G(A, f) = G_f(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \frac{I_n}{I_{n+1}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \frac{I_n}{I_{n+1}};$$

$$G(A, \phi) = G_\phi(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \frac{M_n}{M_{n+1}}.$$

$G_f(A)$ est muni d'une structure d'anneau gradué dont la multiplication est définie par : Pour tout $a_n + I_{n+1}, b_p + I_{p+1}$, deux éléments homogènes de degré $\mathbb{N}$ de $G_f(A)$, On pose :

$$(a_n + I_{n+1})(b_p + I_{p+1}) = a_nb_p + I_{n+p+1}.$$

Proposition 1.6. *Soient A un anneau, I un idéal de A. Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$ et X une indéterminée.*

(i) $A \subset R(A, f) \subset A[X]$;

(ii) $R(A, f) \subset \mathcal{R}(A, f) \subset A[u, X]$ *où* $u = \dfrac{1}{X} = X^{-1}$;

(iii) $\mathcal{R}(A, f) = R(A, f)[u]$;

(iv) $u^n\mathcal{R}(A, f) \cap A = I_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

(v) $R(A, f) = A[I_1X, I_2X^2, \cdots, I_nX^n, \cdots]$;

(vi) $u = \dfrac{1}{X} = X^{-1}$ *est régulier de degré -1 dans* $\mathcal{R}(A, f)$ *et on a :*

$$\mathcal{R}(A, f) = A[u, I_1X, I_2X^2, \cdots, I_nX^n, \cdots];$$

(vii) $\dfrac{R(A, I)}{IR(A, I)} \simeq G_I(A)$ *avec* $R(A, I) = R(A, f_I)$ *et* $G_I(A) = G_{f_I}(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{I^n}{I^{n+1}}$;

(viii) $\dfrac{\mathcal{R}(A, I)}{u\mathcal{R}(A, I)} \simeq G_I(A)$;

(ix) $\dfrac{\mathcal{R}(A, I)}{(u-1)\mathcal{R}(A, I)} \simeq A.$

1.6.3 Quelques exemples de filtrations

a) Filtration I-adique

Définition 1.27. *Soient A un anneau, I un idéal de A.*
La famille $f_I = (I^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \leqslant 0, I^n = A$ est une filtration de A appelé ***filtration I-adique*** *et noté f_I.*

Remarque 1.7. *Soit I un idéal de l'anneau A si f_I est la filtration $I-adique$ alors l'anneau de Rees de f_I sera simplement noté $R(A, I)$.*

Proposition 1.7. *Soient I un idéal de l'anneau A et f_I est la filtration $I-adique$. Si I est de type fini avec $I = (a_1, a_2, \cdots, a_r)$ alors $R(A, I) = A[a_1X, a_2X, \cdots, a_rX]$.*

Conséquence 1.1. *Si A est un anneau* ***noethérien*** *alors $R(A, I)$ est aussi* ***noethérien****.*

b) Filtration tronqué d'ordre k de f

Définition 1.28. *Soient A un anneau et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A.*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_kf = (K_n)$ avec $K_n = I_{n+k}$ si $n \geqslant 1$ et $K_n = A$ si $n \leqslant 0$.
Ainsi t_kf est une filtration de A appelé ***filtration tronqué d'ordre k de*** *f.*

c) Filtration extraite d'ordre k de f

Définition 1.29. *Soient A un anneau et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A.*
Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$.
Ainsi $f^{(k)}$ est une filtration de A appelé ***filtration extraite d'ordre k de*** *f.*

d) **Filtration définie par une graduation**

Définition 1.30. *Soit* $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *un anneau gradué de type* $\mathbb{N}$.
Posons $J_n = \bigoplus_{n\geqslant p} A_p$.
$f = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une filtration de* A.

e) **Filtration de type fini**

Définition 1.31. *Soient* A *un anneau.*
$f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une filtration de l'anneau* A.
On dit que f *est de type fini si* I_n *est de type fini pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *assez grand.*

1.6.4 Classification des filtrations sur un anneau

a) **Filtrations I-bonnes**

Définition 1.32. *Soient* A *un anneau.*
$f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de* A. f *est dite* I*-bonne si :*

i) $II_n \subset I_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$,

ii) *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $II_n = I_{n+1}$, *pour tout* $n \geqslant n_0$.

Conséquence 1.2. $II_{n_0} = I_{n_0+1}$, *en multipliant par* I, *on a :*
$I^2 I_{n_0} = II_{n_0+1}$ *et* $II_{n_0+1} = I_{n_0+2}$.
Ainsi par récurrence, on obtient $I^n I_{n_0} = I_{n_0+n}$, *pour tout* $n \geqslant 1$.

b) **Filtrations A.P.**

Définition 1.33. *La filtration* $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de l'anneau* A *est dite* ***Approximable par des Puissances d'idéaux*** *(en abrégé* ***A.P.****) s'il existe* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'entiers naturels telle que :*

(i) *pour tout* $n,m \in \mathbb{N}$, $I_{mk_n} \subset I_n^m$;

(ii) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1$.

c) **Filtrations fortement A.P.**

Définition 1.34. *La filtration* $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *de l'anneau* A *est dite* ***fortement Approximable par des Puissances d'idéaux*** *(en abrégé* ***fortement A.P.****) s'il existe un entier* $k \geqslant 1$ *tel que :*

$$\textit{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_{nk} = I_k^n.$$

d) <u>**Filtrations E.P.**</u>

Définition 1.35. *La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **Essentiellement par des Puissances d'idéaux** (en abrégé **E.P**) s'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que :*

$$\text{pour tout } n \geqslant N,\ I_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p}I_p.$$

e) <u>**Filtrations noethériennes**</u>

Définition 1.36. *La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **noethérienne** si son anneau de Rees $R(A, f)$ est noethérien.*

f) <u>**Filtrations fortement noethériennes**</u>

Définition 1.37. *La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **fortement noethérienne** s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que :*

$$\text{pour tout } m, n \in \mathbb{Z},\ m, n \geqslant k,\ \text{entraîne } I_mI_n = I_{m+n}.$$

Remarque 1.8. *Il résulte des références [2] , [4], [5] que si A est un anneau noethérien et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *(a) f est une E.P. filtration ;*
- *(b) il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que f soit la plus petite filtration ayant pour $k + 1$ premiers $I_0, I_1, \dots, I_k$;*
- *(c) f est noethérienne ;*
- *(d) il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $j \geqslant m, I_{j+m} = I_jI_m$;*
- *(e) L'anneau de Rees $R(A, f)$ de f est une $A-$algèbre de type fini ;*
- *(f) L'anneau de Rees généralisé $\mathcal{R}(A, f)$ de f est une $A-$algèbre de type fini.*

Remarque 1.9. *([4])*
$\mathcal{R}(A, f)$ est noethérien si et seulement si $R(A, f)$ est noethérien.

1.6.5 Caractérisation des filtrations

<u>**Caractérisation des filtrations noethériennes**</u>

Proposition 1.8. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$.*
Si A est noethérien, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- *(i) $\mathcal{R}(A, f)$ est noethérien ;*
- *(ii) $R(A, f)$ est noethérien ;*
- *(iii) f est E.P. ;*
- *(iv) il existe $n \geqslant 1$, pour tout $n \geqslant k, I_{n+k} = I_nI_k$.*

Exemple 1.9. *Soit A un anneau noethérien et I un idéal de A.*
Posons $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\begin{cases} I_0 = A; \\ I_{2n} = I_{2n-1} = I^n \ , \ \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$

Montrons que pour tout $n \geq 1, I_{n+2} = I_n I_2$.

Suivant la parité de n, il vient $n = 2p$ ou $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$.

** Si $n = 2p$.*
$I_{2p+2} = I_{2(p+1)} = I^{p+1} = I^p I = I_{2p} I_2$ *(car $I^k \subset I_k$).*
** Si $n = 2p+1$.*
$I_{2p+1+2} = I_{2(p+1)+1} = I_{2(p+2)-1} = I^{p+2} = I^{p+1} I^1 = I_{2(p+1)-1} I_{2\times 1} = I_{2p+1} I_2.$

Dans tous les cas pour tout $n \geq 1, I_{n+2} = I_n I_2$.

On en déduit que f est noethérienne.

Remarque 1.10. *([4])*
Soient A un anneau noethérien, I un idéal de A et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Nous avons les résultats suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & f \ E.P & & \\
f \ I\text{-adique} \arrow[r] & f \ I\text{-bonne} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & f \text{ fortement } A.P \arrow[r] \arrow[d] & f \ A.P \\
 & f \text{ fortement noethérienne} \arrow[r] & f \text{ noethérienne} &
\end{tikzcd}$$

Chapitre 2

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION I-ADIQUE

Dans ce second chapitre, notre étude se concentrera sur les filtrations I-adiques, lesquelles représentent un cas spécifique de filtrations bonnes.

2.1 Dépendance intégrale

2.1.1 Dépendance intégrale sur les anneaux

Définition 2.1. ***(Élément Entier)****[3]*
Soient B un anneau et A un sous-anneau de B $(A \subset B)$.
Un élément x de B est dit ***entier*** *sur A s'il est* ***racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans*** *A.*
En d'autres termes, s'ils existent $a_1, a_2, \cdots, a_n$ éléments de A tels que :

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_i x^{n-i} + \cdots + a_n = x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.1}$$

Cette relation (2.1) est appelée ***équation de dépendance intégrale*** *de x sur A. On dit que B est entier sur A lorsque tous les éléments de B sont entiers sur A.*

Exemple 2.1. *Posons $B = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Z}$. A est un sous-anneau de B.*
• *$x = \sqrt{5}$ est solution de l'équation $x^2 - 5 = 0$. Donc $\sqrt{5}$ est entier sur $\mathbb{Z}$.*
• *$x = \sqrt{2} + 1$ est solution de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.*
Donc $x = \sqrt{2} + 1$ est entier sur $\mathbb{Z}$.

Contre exemple 2.1. *Cependant, $\dfrac{1}{2}$ n'est pas entier sur $\mathbb{Z}$.*
En effet, si $\dfrac{1}{2}$ est entier sur $\mathbb{Z}$, alors $\dfrac{1}{2}$ est solution d'une équation de dépendance intégrale. Alors :

il existe $n \geq 1, \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} = 0$, $a_i \in \mathbb{Z}$.
D'où $\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 + \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{1}{2}\right)^{-i}\right] = 0$.
Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \neq 0$ *alors* $1 + \sum_{i=1}^{n} a_i 2^i = 0$.
D'où $1 + \sum_{i=1}^{n} a_i 2^i = 0$.
Donc $1 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} -a_i 2^{i-1}\right)$.
Par suite, $1 \in 2\mathbb{Z}$. *Ce qui est* ***Absurde***.

Proposition 2.1. *Soient B un anneau et A un sous-anneau de B ($A \subset B$).*
Soit $x \in B$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) x est entier sur A ;

ii) $A[x]$ est un A-module de type fini ;

iii) Il existe C un sous-anneau de B contenant $A[x]$ tel que C soit un A-module de type fini.

Démonstration. $i \implies ii)$

Supposons que x est entier sur A.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$, pour tout $i \in [\![1; n]\!], a_i \in A$.

D'où il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $x^n = \sum_{i=1}^{n}(-a_i)x^{n-i}$, pour tout $i \in [\![1; n]\!], a_i \in A$.

Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $x^n \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1}) = A[x]$.

• Montrons que $A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1}) = A[x]$.
a) Par construction, $A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1}) \subset A[x]$.
b) Réciproquement, montrons par récurrence sur m
que pour tout $m \in \mathbb{N}, x^m \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.

* si $m \in [\![0; n-1]\!]$, alors $x^m \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.
* si $m \geq n$, alors $m = n + p$, $p \geq 0$.

<u>Initialisation</u>

Si $p = 0$ alors $x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ alors $x^n = \sum_{i=1}^{n}(-a_i)x^{n-i}$.
Comme $1 \leq i \leq n$, alors $0 \leq n - i \leq n - 1$.
D'où, $x^n = \sum_{i=1}^{n}(-a_i)x^{n-i} \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.
Donc la propriété est vraie pour $p = 0$.

<u>Hérédité</u>

Soit $p \geq 0$. Supposons que pour tout $k \in [\![0, p]\!], x^{n+k} \in A(1, x, x^2, ..., x^{n-1})$.
Montrons que $x^{n+p+1} \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.

$x^{n+p+1} = x^{p+1}x^n = x^{p+1} \times \sum_{i=1}^{n}(-a_i)x^{n-i} = \sum_{i=1}^{n}(-a_i)x^{n+p+1-i}$.

Comme $1 \leq i \leq n$, alors $p + 1 \leq n + p + 1 - i \leq n + p$.

Ainsi par hypothèse de récurrence, $x^{n+p+1-i} \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$ et par stabilité, il vient $x^{n+p+1} \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.

Par suite, pour tout $m \in \mathbb{N}, x^m \in A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.

Donc $A(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1}) = A[x]$.

$A[x]$ est donc un $A-$module de type fini de générateur $(1_A, x, x^2, ..., x^{n-1})$.

$ii) \implies iii)$ Il suffit de poser $A[x] = C$.

$iii) \implies i)$ Supposons qu'il existe C un sous module de B contenant $A[x]$ qui soit un $A-$module de type fini.

Soit $x \in A$.

$A[x] \subset C = A(y_1, y_2, ..., y_r)$ de type fini.

Ainsi, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, $xy_i \in C$. On a :

$xy_i = \sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}y_j$ alors $\sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}y_j - xy_i = 0$ alors $\sum\limits_{j=1}^{r} (a_{ij} - \delta_{ij}x)y_j = 0$.

Où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j; \\ 0 & sinon. \end{cases}$

D'où $\begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{22} & a_{11} - x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & \cdots & a_{rr} - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Posons $T = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$, $Y = (y_j)_{1 \leq j \leq r}$.

Ainsi $(T - xI_r) \times Y = 0_r$.

$(T - xI_r) \times Y = 0$ ainsi ${}^t com(T - xI_r) \times Y[(T - xI_r) \times Y] = 0$.

Alors $\det[(T - xI_r)Y] = 0$.

D'où $\det(T - xI_r)y_i = 0$, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$.

$P_T(x)y_i = 0$, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$.

De plus, $1_A \in C$, on peut donc supposer qu' il existe $i \in [\![1; r]\!]$, tel que $y_i = 1_A$. D'où $P_T(x) = 0$.

Or P_T est un polynôme unitaire qui s'écrit :

$P_T(x) = x^n - tr(T)x^{n-1} + ... + (-1)^n \det(T) = x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x^{n-i}, \alpha_i \in A$.

Donc $P_T(x) = 0$ alors $x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x^{n-i} = 0, \alpha_i \in A$ alors x est entier sur A.

□

Corollaire 2.1. *Soient A et B deux anneaux tels que $A \subset B$ et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in B$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) pour tout $i \in [\![1; n]\!], x_i$ est entier sur A ;

ii) $A[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ est un A-module de type fini ;

iii) Il existe un $A-$module de type fini $C \subset B$ tel que $x_iC \subset C$, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

Démonstration. En faisant comme démonstration de la proposition (2.1) et en procédant de proche en proche. □

Définition 2.2. *Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux.*
*On qualifie B d'une **A-algèbre** lorsque B peut être appréhendé simultanément en tant*

que module sur A et en tant qu'anneau.
*De plus, B est dit **de type fini** si B est un $A-$ module de type fini.*

Corollaire 2.2. ***(Clôture intégrale d'anneaux)**[3]*
Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux.
*L'ensemble des éléments de B entiers sur A est un sous-anneau de B contenant A appelé **clôture intégrale** de B dans A notée A'.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que A' est un sous anneau de B.
$i)1_B \in A$ et $x - 1_B = 0$ donc $1_B \in A'$, d'où $A \subset A' \subset B$.
$ii)$ Soient $x, y \in A'$.
$x \in A'$ alors $A[x]$ est un $A-$module de type fini.
$y \in A'$ alors $A[y]$ est un $A-$module de type fini.
Posons $C = A[x, y] = A[x][y]$.
Ainsi pour tout $z \in C, z = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i y^i, \alpha_i \in A[x]$. Ainsi $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_{ij} x^j$.
D'où $z = \sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{j=1}^{s} \alpha_{ij} x^j y^i$.
Donc $C = A(x^j y^i)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s,}$ est un système de générateur fini de C.
Par suite, C est un $A-$module de type fini.
De plus $A[x + y] \subset C$ ainsi $A[x + y]$ est de type fini et donc $x + y$ est entier sur A.
Par suite $x + y \in A'$. De même $A[xy]$ est de type fini et donc xy est entier sur A.
Par suite $xy \in A'$.
On en déduit que A' est un sous anneau de B. □

Corollaire 2.3. *Soient $A \subset B \subset C$ deux inclusions d'anneaux.*
Si C est entier sur B et B est entier sur A alors C est entier sur A.

Démonstration. Soit $x \in C$.
Comme x est entier sur B alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-b_i) x^{n-i}$, pour tout $b_i \in B, i \in [\![1; n]\!]$.
Soit $i \in [\![1; n]\!]$, $A[b_i]$ est un $A-$module de type fini (car B entier sur A).
Donc $A[b_1, b_2, ..., b_n]$ est un $A-$module de type fini.
Ainsi $A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$ est un $A-$module de type fini.
Soit $p \geq 0$. Montrons que $x^{n+p} \in A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$.
<u>*Initialisation*</u> ($p = 0$).
$x^n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-b_i) x^{n-i} \in A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$.
<u>*Hérédité*</u> ($p \geq 0$).
Supposons que pour tout $k \in [\![0; p]\!], x^{n+k} \in A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$.
$x^{n+p+1} = x^n \times x^{p+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} (-b_i) x^{n+p+1-i}$.
Comme $1 \leq i \leq r$ alors $n + p + 1 - r \leq n + p + 1 - i \leq n + p$.
Donc par hypothèse de récurrence, $x^{n+p+1-i} \in A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$.
Par stabilité, il vient $x^{n+p+1} \in A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$.
Donc $x^{n+p} \in A[b_1 x^{n-1}, b_2 x^{n-2}, ..., b_n]$.

Par suite, $A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, ..., b_n]$ est un $A-$module de type fini, c'est à dire $A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, ..., b_n] = A(z_1, z_2, ..., z_s)$.
Posons $H = A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, ..., b_n]$ et $H' = A(1, x, ..., x^{n-1}, z_1, z_2, ..., z_s)$.
H' est un $A-$module de type fini tel que $A[x] \subset H' \subset C$.
Donc x est entier sur A.
Par suite C entier sur A. □

Proposition 2.2. *Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux tel que B entier sur A. Si J est un idéal de B alors :*

$$\frac{B}{J} \text{ est entier sur } \frac{A}{J \cap A};$$

Démonstration. $i)$ B entier sur A.
Soit $x \in B$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$, pour tout $a_i \in A, i \in [\![1; n]\!]$.
Ainsi $(x + J)^n + \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + J \cap A)(x + J)^{n-i} = x^n + J + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} + J =$
$(x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}) + J = 0 + J = 0_{J \cap A}$.
Donc $x + J$ est entier sur $\frac{A}{J \cap A}$.
Ainsi $\frac{B}{J}$est entier sur $\frac{A}{J \cap A}$.
□

Proposition 2.3. *Soit $A \subset B$ une inclusion d'anneaux tel que B soit entier sur A.*

B corps si et seulement si A corps.

Démonstration. $i) \implies ii)$ Supposons B corps.
Soit $x \in A \backslash \{0\}$.
Comme $A \subset B$ alors $x \in B \backslash \{0\}$. Donc x est inversible d'inverse $x^{-1} \in B$.
De plus B entier sur A,alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, (x^{-1})^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i (x^{-1})^{n-i} = 0$, pour tout $a_i \in A, i \in [\![1; n]\!]$.
Ainsi $(x^{-1})^n = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i)(x^{-1})^{n-i}$, pour tout $a_i \in A, i \in [\![1; n]\!]$.
$(x^{-1}) \times (x^{-1})^{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i)(x^{-1})^{n-i}$, pour tout $a_i \in A, i \in [\![1; n]\!]$.
$(x^{-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i)(x^{-1})^{n-i}(x^{-1})^{-n+1}$, pour tout $a_i \in A, i \in [\![1; n]\!]$.
$x^{-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} (-a_i) x^{i-1}$, pour tout $a_i \in A, i \in [\![1; n]\!]$.
Comme $1 \leq i \leq n$ alors $0 \leq i - 1 \leq n - 1$.
Donc $x^{i-1} \in A$.
Par stabilité $x^{-1} \in A$.
Donc A est un corps.
$ii) \implies i)$ Supposons que A soit un corps.
Soit $x \in B \backslash \{0\}$.

Comme B entier sur A, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$, pour tout $a_i \in A, i \in [\![1;n]\!]$.

Par récurrence sur n, montrons que $x \in A$.

<u>Initialisation</u> $(n = 1)$.

L'équation de dépendance intégrale devient, $x + a_1 = 0$ alors $x = -a_1 \in A \backslash \{0\}$.

Donc x est inversible dans $A \subset B$. Donc x est inversible dans B.

<u>Hérédité</u> $(n \geq 1)$.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n.

Alors $x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ alors $x \in A$.

Ainsi $x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i} = 0$ alors $x(x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}) + a_{n+1} = 0$ alors $x(x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}) = -a_{n+1}$.

* si $-a_{n+1} \neq 0$ alors x est inversible dans $A \subset B$. Donc x est inversible dans B.

* si $-a_{n+1} = 0$, alors $x(x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}) = 0$ alors $x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ (car $x \neq 0$ et B intègre).

Ainsi $x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ alors $x(x^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^{n-1-i}) = -a_{n+2}$.

* si $-a_{n+2} \neq 0$ alors x est inversible dans $A \subset B$. Donc x est inversible dans B.

* sinon de proche en proche, il vient que $x + a_1 = 0$ alors $x = -a_1 \in A \backslash \{0\}$

Donc x est inversible dans $A \subset B$. Donc x est inversible dans B

Dans tous les cas, il vient B corps. □

2.1.2 Dépendance intégrale sur un idéal

Définition 2.3. *Soient A un anneau commutatif unitaire et I un idéal de A. Un élément x de A est dit entier sur I s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \text{ avec } a_i \in I^i, \text{ pour tout } i = 1, \cdots, m.$$

Proposition 2.4. *Soient A un anneau et I un idéal de A.*

x entier sur I si et seulement si Le monôme $xX \in A[x]$ est entier sur $R(A,I) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n X^n$

Démonstration. $i) \implies ii)$

Supposons x entier sur I. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$, $a_i \in I^i$.

Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}^*, (xX)^n + \sum_{i=1}^{n} a_i X^i (xX)^{n-i} = 0$, $a_i X^i \in I^i X^i \in R(A,I)$.

D'où xX est entier sur $R(A,I)$.

$ii) \implies i)$

Supposons que $xX \in A[X]$ est entier sur $R(A,I)$.

Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}^*, (xX)^n + \sum_{i=1}^{n} a_i (xX)^{n-i} = 0$, $a_i \in R(A,I)$.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, (xX)^n = \sum_{i=1}^{n}(-a_i)(xX)^{n-i},\ a_i \in R(A, I)$.
Comme $(xX)^n$ est homogène de degré n, alors pour tout $i \in [\![1; n]\!]$,
$\deg[a_i(xX)^{n-i}] = n$ alors $\deg(a_i) + n - i = n$ ainsi $\deg(a_i) = i$.
Donc $a_i \in I^i X^i$ alors $a_i = \alpha_i X^i$, avec $\alpha_i \in I^i$.
D'où, il existe $n \in \mathbb{N}^*, (xX)^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X^i (xX)^{n-i} = 0$,
il existe $n \in \mathbb{N}^*, X^n[x^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{n-i}] = 0$, avec $\alpha_i \in I^i$.
Par identification des polynômes, il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{n-i} = 0$,avec $\alpha_i \in I^i$.
Donc x est entier sur I. □

Corollaire 2.4. ***(Clôture intégrale d'idéaux)****[3]*
Soient A un anneau et I un idéal de A. L'ensemble noté :

$$I' = \{x \in A, x \text{ entier sur } I\}$$

est un idéal de A appelé ***clôture intégrale de I****.*

Démonstration. $i)$ Par construction, $I' \subset A$.
$ii)$ $0^1 + 0 = 0$, donc $0 \in I'$.
$iii)$ Soient $b \in A, x \in I'$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$,avec $a_i \in I^i$.
Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}^*, (bx)^n + \sum_{i=1}^{n} b^i a_i (bx)^{n-i} = 0$,avec $b^i a_i \in I^i$.
Donc bx est entier sur I. D'où $bx \in I'$.
$iv)$ Soient $x, y \in I'$.
Ainsi xX, yX sont entiers sur $R(A, I)$.
Alors $xX + yX = (x + y)X \in A[X]$ est aussi entier sur $R(A, I)$
Donc $x + y \in I'$.
Par suite, I' est un idéal de A. □

Remarque 2.1. ***(Clôture intégrale d'idéaux et radical)****[3]*
Soient A un anneau et I et J des idéaux de A.

(i) $I \subset J \implies I' \subset J'$;
(ii) $I \subset I' \subset \sqrt{I}$;
(iii) $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$.

Démonstration. $i)$ Soit $x \in I'$ alors x est entier sur I ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$x^n + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} = 0$, avec $a_k \in I^k$, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.
Or $I \subset J$ d'où $I^k \subset J^k$, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$.
Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$x^n + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} = 0$, avec $a_k \in J^k$.
Donc x est entier sur J.

Par suite, $I' \subset J'$.
ii) Soit $x \in I$.
Alors $x^1 - x = 0$,où $a_1 = -x^1 \in I^1$.
D'où $x \in I'$. Donc $I \subset I'$.
iii) Soit $x \in I'$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$,avec $a_i \in I^i$.
Ainsi pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $a_i \in I^i$ alors $a_i x^{n-i} \in I^i \subset I$.
Par stabilité, il vient, qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*, x^n = \sum\limits_{i=1}^{n}(-a_i)x^{n-i} \in I$.
Donc $x \in \sqrt{I}$.
D'où, $I' \subset \sqrt{I}$.
Par suite, $I \subset I' \subset \sqrt{I}$.
iii) D'après ce qui précède
$I \subset I' \subset \sqrt{I}$ alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{I'} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$ ainsi $\sqrt{I} \subset \sqrt{I'} \subset \sqrt{I}$ d'où $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$. □

Conséquence 2.1. *Soit $x \in A$. Si $x \in I'$ alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^m \in I$.*

Définition 2.4. *Un idéal I de A est dit **intégralement fermé** si $I = I'$.*

2.2 Réduction d'un idéal

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.5. *Soient A un anneau commutatif unitaire, I et J deux idéaux de A. On dit que I est une réduction de J si :*

i) $I \subset J$;

ii) il existe $r \in \mathbb{N}^*$, tel que $J^{r+1} = IJ^r$.

Exemple 2.2. *1) I est une réduction de I lui-même ;*

2) $A = \mathbb{K}[X,Y]$ avec $\mathbb{K}$ corps.
$I = (X^2, Y^2)$.
$J = (X,Y)^2 = (X^2, Y^2, XY)$ D'où $I \subset J$.

$$IJ = (X^2, Y^2)(X,Y)^2.$$
$$IJ = (X^2, Y^2)(X^2, XY, Y^2).$$
$$IJ = (X^4, Y^4, X^3Y, XY^3, X^2Y^2).$$

Et

$$J^2 = (X^2X^2, X^2Y^2, X^3Y, Y^2Y^2, Y^3X).$$
$$J^2 = (X^4, Y^4, X^2Y^2, X^3Y, XY^3).$$

Donc $J^{1+1} = J^2 = IJ$ avec $r = 1$.
Par suite I est une réduction de J.

Remarque 2.2. *Pour tout $r \geq n$, on a $J^{r+1} = IJ^r$.*
D'une manière générale, $I^m J^n = J^{n+m}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.5. *Soient A un anneau, I, J et K trois idéaux de A tels que $I \subset J \subset K$.*
Si I est une réduction de J et J est une réduction de K alors I est une réduction de K.

Démonstration. Supposons que I est une réduction de J et J est une réduction de K. I est une réduction de J alors $I \subset J$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^{m+1} = IJ^m$, de même J est une réduction de K alors $J \subset K$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $K^{n+1} = JK^n$. Posons $r = mn + n + m \in \mathbb{N}^*$.

$$K^{r+1} = K^{mn+n+m+1} = (K^{n+1})^{m+1}.$$
$$K^{r+1} = (K^{n+1})^m (K^{n+1}).$$
$$K^{r+1} = (JK^n)^m (JK^n).$$
$$K^{r+1} = J^m K^{nm} JK^n.$$
$$K^{r+1} = J^{m+1} K^{nm+n}.$$
$$K^{r+1} = J^{m+1} K^n K^{nm}.$$
$$K^{r+1} = IJ^m K^n K^{nm}.$$
$$K^{r+1} = I(JK^n)^m K^n.$$
$$K^{r+1} = I(K^{n+1})^m K^n.$$
$$K^{r+1} = IK^{mn+n+m}.$$
$$K^{r+1} = IK^r.$$

Il existe donc $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $K^{r+1} = IK^r$ ainsi I est une réduction de K. □

Lemme 2.1. *Soit I_1, I_2, J_1 et J_2 des idéaux de A alors, si I_1 est une réduction de J_1 et I_2 est une réduction de J_2 alors $I_1 + I_2$ est une réduction de $J_1 + J_2$.*

Démonstration. Supposons que I_1 est une réduction de J_1 et I_2 est une réduction de J_2.
I_1 est une réduction de J_1 alors $I_1 \subset J_1$ et il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_1^{m+1} = I_1 J_1^m$.
I_2 est une réduction de J_2 alors $I_2 \subset J_2$ et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_2^{n+1} = I_2 J_2^n$.
Posons $r = m + n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_1(J_1 + J_2)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k}.$$
$$I_1(J_1 + J_2)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m-1} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k} + \sum_{k=m}^{m+n} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k}.$$

Or I_1 est une réduction de J_1 donc pour tout $k \geq m$ on a $J_1^{k+1} = I_1 J_1^k$.

$$I_1(J_1+J_2)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k}.$$
$$I_1(J_1+J_2)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m-1} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k} + \sum_{k=m}^{m+n} J_1^{k+1} J_2^{m+n-k}.$$

Ainsi donc on a $\sum_{k=m}^{m+n} J_1^{k+1} J_2^{m+n-k} \subset I_1(J_1+J_2)^{m+n}$.
De façon similaire on montre que $\sum_{k=0}^{m} J_1^k J_2^{m+n-k+1} \subset I_2(J_1+J_2)^{m+n}$.
D'où $\sum_{k=m}^{m+n} J_1^{k+1} J_2^{m+n-k} + \sum_{k=0}^{m} J_1^k J_2^{m+n-k+1} \subset I_1(J_1+J_2)^{m+n} + I_2(J_1+J_2)^{m+n}$.
Alors $\sum_{k=0}^{m+n+1} J_1^k J_2^{m+n+1-k} = (J_1+J_2)^{m+n+1} \subset (I_1+I_2)(J_1+J_2)^{m+n}$.
Par hypothèse on a $I_1 \subset J_1$ et $I_2 \subset J_2$ alors $I_1+I_2 \subset J_1+J_2$.
Par suite on a $(I_1+I_2)(J_1+J_2)^{m+n} \subset (J_1+J_2)^{m+n+1}$.
Par conséquent $(J_1+J_2)^{m+n+1} = (I_1+I_2)(J_1+J_2)^{m+n}$, on a donc trouver r tel que $(J_1+J_2)^{r+1} = (I_1+I_2)(J_1+J_2)^r$ ce qui fait de I_1+I_2 une réduction de J_1+J_2. □

Proposition 2.6. *Soient A un anneau, I un idéal de A et $x \in A$.*
x est entier sur I si et seulement si I est une réduction de $I+(x) = I+xA$.

Démonstration. (i) Supposons que x est entier sur I. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$, avec $a_i \in I^i, i = 1, \cdots, n$.
Montrons que I est une réduction de $I+(x)$.
On a : $(I+(x))^n = (I+(x))(I+(x))^{n-1} = I(I+(x))^{n-1} + (x)(I+(x))^{n-1}$.
En prouvant que $(x)(I+(x))^{n-1} \subset I(I+(x))^{n-1}$ on aura,

$$I(I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}.$$

$$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)\sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-1-i}.$$
$$(x)(I+(x))^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-i}.$$
$$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + \sum_{i=1}^{n-1} I^i (x)^{n-i}.$$
$$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + I\sum_{i=1}^{n-1} I^{i-1} (x)^{n-i}.$$
$$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + I\sum_{i=0}^{n-2} I^i (x)^{n-1-i}.$$

Donc $(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + \sum_{i=0}^{n-2} I^i(x)^{n-1-i} \subset (x)^n + \sum_{i=0}^{n-1} I^i(x)^{n-1-i}$.
d'où $(x)(I+(x))^{n-1} \subset (x)^n + I(I+(x))^{n-1}$.
Et comme,
$x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} \in \sum_{i=1}^{n} I^i x^{n-i}$ alors $x^n \in I \sum_{i=1}^{n} I^{i-1}x^{n-i} = I \sum_{i=0}^{n-1} I^i x^{n-1-i} = I(I+(x))^{n-1}$.
Alors $(x)^n \in I(I+(x))^{n-1}$ alors $(x)^n + I(I+(x))^{n-1} = I(I+(x))^{n-1}$.
En somme $(x)(I+(x))^{n-1} \subset I(I+(x))^{n-1}$ alors $(I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}$.
Par conséquent I est une réduction de $I+(x)$.
(ii) Supposons que I est une réduction de $I+(x)$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(I+(x))^{n+1} = I(I+(x))^n$.
$x^{n+1} \in (I+(x))^{n+1} = I(I+(x))^n$ alors $x^{n+1} \in I \sum_{i=0}^{n} I^i(x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} I^{i+1}(x)^{n-i}$.
D'où $x^{n+1} \in \sum_{i=1}^{n+1} I^i(x)^{n+1-i}$ alors $x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i}$, avec $a_i \in I^i$. Ainsi x est donc entier sur I.

□

Proposition 2.7. *Soit A un anneau noethérien, I et J deux idéaux de A tels que $I \subset J$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) I est une réduction de J ;

ii) $R(A,J)$ est un $R(A,I)$-module de type fini ;

iii) $R(A,J)$ est entier sur $R(A,I)$;

iv) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, J^n est entier sur I^n ;

v) J est entier sur I.

Démonstration. $i) \implies ii)$.
Supposons que I est une réduction de J alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^{n+1} = IJ^n$.
$J^{n+1} = IJ^n$ alors pour tout $r \in \mathbb{N}$; $J^{n+r} = I^r J^n$.
Ainsi $J^{n+r}X^{n+r} = I^r X^r J^n X^n$ alors $R(A,J) = R(A,I)(JX, \cdots, J^r X^r)$.
$R(A,J)$ est donc un $R(A,I)$-module de type fini.
$ii) \implies iii)$.
Supposons que $R(A,J)$ est un $R(A,I)$-module de type fini.
Soit $z \in R(A,J)$,
$z \in R(A,J)$ alors $(R(A,J)[z])$ est un sous-module de $R(A,J)$.
A est noethérien alors $R(A,I)$ est noethérien, $R(A,J)$ est un $R(A,I)$-module de type fini alors, $R(A,J)$ est un module noethérien.
$(R(A,J)[z])$ étant un sous-module de $R(A,J)$ qui est noethérien alors $(R(A,J)[z])$ est de type fini. Par suite z est entier sur $R(A,I)$.
$iii) \implies iv)$.
Supposons que $R(A,J)$ est entier sur $R(A,I)$.
Soit $a \in J^n$ alors $aX^n \in R(A,J)$, donc aX^n est entier sur $R(A,I)$.
Ainsi il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(aX^n)^m = \sum_{i=1}^{m} b_i(aX^n)^{m-i}$,

où $b_i \in I^{ni}X^{ni}$ alors $b_i = c_i X^{ni}, c_i \in I^{ni}$.
$a^m X^{nm} = \sum_{i=1}^{m} c_i X^{ni}(aX^n)^{m-i} = \sum_{i=1}^{m} c_i X^{ni} a^{m-i} X^{mn-ni} = \sum_{i=1}^{m} c_i a^{m-i} X^{mn}$.
Et donc $a^m X^{nm} = \sum_{i=1}^{m} c_i a^{m-i} X^{mn}$ alors $a^m = \sum_{i=1}^{m} c_i a^{m-i}$, $c_i \in I^{ni} = (I^n)^i$.
J^n est ainsi entier sur I^n.
$iv) \implies v)$
En prenant $n = 1$, alors pour les mêmes raisons que la preuve $iii) \implies iv)$ on a le résultat souhaité à savoir J entier sur I.
$v) \implies i)$
Supposons que J est entier sur I.
L'anneau A étant noethérien alors l'idéal J est de type fini.
Posons $J = (x_1, \cdots, x_n)$
$x_1 \in J$ qui est entier sur I donc, x est entier sur I ce qui entraine que l'idéal I soit une réduction de $I + (x_1)$. De même x_2 est entier sur I donc sur $I + (x_1)$ ainsi, $I + (x_1)$ devient une réduction de $I + (x_1) + (x_2)$.
En répétant le même raisonnement à chaque élément de J, on obtient x_r entier sur I donc nécessairement sur $I + (x_1) + \cdots + (x_{r-1})$ ce qui implique que $I + (x_1) + \cdots + (x_{r-1})$ est une réduction de $I + (x_1) + \cdots + (x_r) = I + J$.
On déduit donc que I est une réduction de J. □

Proposition 2.8. *Soient A un anneau, I un idéal de A et x un élément de A. Alors : x est entier sur I si et seulement si il existe J un idéal de A de type fini tel que : xJ est contenu dans IJ et pour tout x' élément de A, x'J est égal au module nul entraîne qu'il existe m supérieur ou égal à zéro, tel que $x'x^m = 0$.*

Corollaire 2.5. *Soient I, J deux idéaux de A. Alors :*

$$I'J' \subset (IJ)'.$$

2.2.2 Réduction minimale d'un idéal

La notion d'idéal basique a été introduite et étudiée par Northcott et Rees [7].

Définition 2.6. *Un idéal I de l'anneau local noethérien (A, m) est basique si la seule réduction de I est I lui-même. Northcott et Rees ont aussi défini la notion de réduction minimale d'un idéal J :*

Un idéal I est une réduction minimale de J si I est une réduction de J et si I est minimal au sens de l'inclusion ($\subset$) parmi l'ensemble des réductions de J.

Remarque 2.3. *Bien qu'on puisse parler de réduction minimale pour un idéal quelconque sur un anneau local, cela n'est pas possible pour toutes les filtrations. On montre ainsi dans cet exemple que toutes les filtrations n'admettent pas de réduction minimale.*

Exemple 2.3. *Soient l'anneau $A = k[X]$ où k est un corps et $I = (X)$ un idéal de A. Considérons la filtration $I_{2n} = I_{2n-1} = I^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Montrons que f est une filtration noethérienne.
•*La filtration f est fortement AP car.*
En prenant $k = 2$ on a : $I_{2n} = I^n = I_2^n$.
L'anneau A étant noethérien alors la filtration f est noethérienne.
• *Supposons que la filtration f est fortement noethérienne alors, il existe $k \geq 1$ tel que pour tous $m, n \geq k$ on a : $I_{m+n} = I_m I_n$.*
Posons $m = 2k+1$ et $n = 2p+1$ où $p \geq k$.
$I_{m+n} = I_{2k+1+2p+1} = I_{2(k+p+1)} = I^{k+p+1}$.
$I_m I_n = I_{2k+1} I_{2p+1} = I_{2(k+1)-1} I_{2(p+1)-1} = I^{k+1} I^{p+1} = I^{k+p+2}$.

$$\begin{aligned} I_{m+n} = I_m I_n &\text{ alors } I^{k+p+1} = I^{k+p+2}. \\ I_{m+n} = I_m I_n &\text{ ainsi } (X)^{k+p+2} = (X)^{k+p+1}. \\ I_{m+n} = I_m I_n &\text{ d'où } QX^{k+p+2} = X^{k+p+1}. \\ I_{m+n} = I_m I_n &\text{ par suite } XQ = 1_A. \end{aligned}$$

Ainsi on a X inversible ce qui est absurde, par suite la filtration f n'est pas fortement noethérienne. Comme la filtration f n'est pas fortement noethérienne alors elle n'est pas I-bonne.
De plus il n'existe pas d'entier $r \geq 1$ tel que I_r soit idempotent, par conséquent notre filtration f n'admet pas de réduction minimale.

Remarque 2.4. *On prouve dans [3] que la réduction minimale des filtrations I-bonnes existe toujours dans un anneau local noethérien. Ce qui n'est pas le cas en générale pour une filtration quelconque.*

Chapitre 3

DÉPENDANCE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

Après avoir étudier les propriétés des filtrations I-bonnes, nous verrons dans ce chapitre les conditions pour étendre ces propriétés aux filtrations bonnes en générale.

3.1 Dépendance intégrale de filtration

Définition 3.1. *Soient A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^{m} a_i x^{m-i} = 0,\ m \in \mathbb{N}^* \text{ où } a_i \in I_i,\ \textit{ pour tout } i = 1, \cdots, m.$$

Proposition 3.1. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A), x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) x est entier sur $f^{(n)} = ((I_{nk})_{k\in\mathbb{N}})$;

ii) $xX^n (\in A[X])$ est entier sur $R(A, f)$;

iii) $xX^n (\in A[X])$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.

Démonstration. i) $\Longrightarrow$ ii)

Supposons x entier sur $f^{(n)}$.

Alors il existe $r \geq 1$, $x^r + \sum_{i=1}^{r} a_i x^{r-i} = 0$, $a_i \in I_{ni}$.

Alors il existe $r \geq 1$, $(xX^n)^r + \sum_{i=1}^{r} a_i X^{ni}(xX^n)^{r-i} = 0$, $a_i \in I_{ni}X^{ni} \subset R(A, f)$.

Donc xX^n est entier sur $R(A, f)$.

ii) $\Longrightarrow$ iii) Évident car $R(A, f) \subset \mathcal{R}(A, f)$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Supposons xX^n est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.

Alors il existe $m \geq 1$, $(xX^n)^m + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(xX^n)^{m-i} = 0$, $a_i \in \mathcal{R}(A, f)$.
D'où $\deg((xX^n)^m) = nm$ alors $\deg(a_i) = ni$.
Ainsi $a_i \in I_{ni}X^{ni}$, alors $a_i = \alpha_i X^{ni}$,$\alpha_i \in I_{ni}$.
Donc il existe $m \geq 1$, $(xX^n)^m + \sum\limits_{i=1}^{m} (\alpha_i X^{ni})(xX^n)^{m-i} = 0$, $\alpha_i \in I_{ni}$.
Alors, il existe $m \geq 1$, $X^{nm}[x^m + \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x^{m-i}] = 0X^{nm}$, $\alpha_i \in I_{ni}$.
Par identification, il existe $m \geq 1$, $x^m + \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x^{m-i} = 0, \alpha_i \in I_{ni}$.
Par suite, x est entier sur $f^{(n)}$. □

3.2 Clôture intégrale d'une filtration

Proposition 3.2. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :*
*$f' = (I'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$ appelée **clôture intégrale de f**.*

Démonstration. Supposons que $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F(A)$.
i) $I'_0 = \{x \in A, x$ entier sur $I_0\} = A$, car $I_0 = A$.
ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $I_{n+1} \subset I_n$ alors par croissance, $I'_{n+1} \subset I'_n$.
iii) Soient $p, q \in \mathbb{N}$. $I'_q I'_p \subset (I_q I_p)' \subset (I_{p+q})' = I'_{p+q}$ car $I'J' \subset (IJ)'$ pour tout idéaux de A.
Par suite $f' = (I'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. □

Corollaire 3.1. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :*
pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $P_k(f) = \left\{x \in A, x \text{ entier sur } f^{(k)}\right\}$ est un idéal de A et la famille
*$P(f) = (P_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ est une filtration de A appelé **clôture prüférienne** de f.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$.
A) Montons que $P_k(f)$ est un idéal de A.
i) Par définition, $P_k(f) \subset A$.
ii) 0_A est entier sur A, donc $0_A \in P_k(f)$.
iii) Soient $x, y \in P_k(f)$.
Comme $x, y \in P_k(f)$ alors xX^k, yX^k sont entiers sur $R(A, f)$.
D'où $xX^k + yX^k$ est entier sur $R(A, f)$ car $R(A, f)'$ est un anneau.
Donc $x + y$ est entier sur $f^{(k)}$.
Par suite $x + y \in P_k(f)$.
iv) Soit $a \in A$, soit $x \in P_k(f)$.
$x \in P_k(f)$ alors xX^k est entier sur $R(A, f)$.
$(ax)X^k$ est entier sur $R(A, f)$.
Donc ax est entier sur $f^{(k)}$.
D'où $ax \in P_k(f)$.
Par suite $P_k(f)$ est un idéal de A.
B) Montrons que $P(f) = (P_k(f))_{k\in\mathbb{N}} \in F(A)$.
i) $P_0(f) = \{x \in A$, x entier sur $f^{(0)} = (A, ..., A) = A\}$.

D'où $P_0(f) = A$.
ii) Soit $x \in P_{k+1}(f)$.
Ainsi x est entier sur $f^{(k+1)}$.
Alors il existe $n \geq 1$, $x^n + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} = 0$, $a_i \in I_{(k+1)i} \subset I_{ki}$.
Donc x est entier sur $f^{(k)}$.
Par suite $x \in P_k(f)$.
D'où $P_{k+1}(f) \subset P_k(f)$.
iii) Soient $x \in P_{k_1}(f)$ et $y \in P_{k_2}(f)$.
$xX^{k_1} \in R(A, f)'$ et $yX^{k_2} \in R(A, f)'$.
D'où $xyX^{k_1+k_2} \in R(A, f)'$ car $R(A, f)'$ est un anneau.
Donc $xy \in P_{k_1+k_2}(f)$.
Par suite, $P_{k_1}(f)\ P_{k_2}(f) \subset P_{k_1+k_2}(f)$.
On en déduit que $P(f) = (P_k(f))_{k\in\mathbb{N}} \in F(A)$. □

Remarque 3.1. *La clôture intégrale d'un idéal I de A est : $I' = P_1(f_I)$.*

Proposition 3.3. *Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :*

(i) $f \leqslant f' \leqslant P(f)$;
(ii) $P(P(f)) = P(f)$;
(iii) $P(f) = P(f')$, *avec $f' = (I'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la clôture intégrale de f.*

Démonstration. i) Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset I'_n \subset P_n(f)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
a) Soit $x \in I_n$.
Posons $r = 1$. Ainsi $x + a_1 = x + (-x) = 0$, $a_1 = -x$.
Alors $x \in I'_n$. D'où $I_n \subset I'_n$.
b) Soit $x \in I'_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \in I'_n$ alors il existe $r \geq 1$, $x^r + \sum_{i=1}^{r} a_i x^{r-i} = 0, \alpha_i \in I_n^i$.
Or $I_n^i \subset I_{ni}$, d'où il existe $m = r \geq 1$, $x^m + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^{m-i} = 0, \alpha_i = a_i \in I_{ni}$. . D'où $x \in P_n(f)$.
Donc $I'_n \subset P_n(f)$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset I'_n \subset P_n(f)$.
c'est-à-dire que $f \leq f' \leq P(f)$.
ii) Montrons que $P(P(f)) = P(f)$.
A) D'après i), $f \leq P(f)$ alors $P(f) \subset P(P(f))$.
B) Posons $g = P(f) = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $J_n = P_n(f)$.
Donc $P(P(f)) = P(g)$.
Soient $n \in N, x \in P_n(g)$.
$x \in P_n(g)$ alors x est entier sur $g^{(n)}$.
$x \in P_n(g)$ alors il existe $s \geq 1$, $x^s + \sum_{i=1}^{s} a_i x^{s-i} = 0, a_i \in J_{ni}$.
Or $J_{ni} = P_{ni}(f)$, ainsi $a_i \in P_{ni}(f)$ pour tout $i \in [\![1, s]\!]$.

Ainsi les a_i sont entiers sur $f^{(ni)}$. D'où $a_iX^{ni} \in R(A,f)'$.
Alors $(xX^n)^s + \sum_{i=1}^{s} a_iX^{ni}(xX^n)^{s-i} = 0$, avec $a_iX^{ni} \in R(A,f)'$.
Donc xX^n est entier sur $R(A,f)'$.
D'où $xX^n \in [R(A,f)']' = R(A,f)'$.
Par suite xX^n est entier sur $R(A,f)$.
Donc x est entier sur $f^{(n)}$.
Par suite $x \in P_n(f)$.
D'où $P_n(g) \subset P_n(f)$.
c'est-à-dire $P(P(f)) \subset P_n(f)$. Donc $P(P(f)) = P_n(f)$.
iii) Montrons que $P(f) = P(f')$.
D'après i) on a $f \leq f'$ alors $P(f) \leq P(f')$.
Réciproquement, $f' \leq P(f)$ alors $P(f') \leq P(P(f)) = P(f)$.
D'où $P(f) \leq P(f') \leq P(f)$.
Par suite $P(f) = P(f')$. □

Proposition 3.4. *Soient $A \subset B$ deux anneaux.*
$A' = \{x \in B, x \text{ entier sur } A\}$.

i) $A \subset A' \subset B$ *;*

ii) $A'' = A'$.

Démonstration. i) Montrons que $A \subset A' \subset B$.
a) Soit $x \in A$.
On a : $x^1 + a_1 = x^1 + (-x) = 0$ alors $x \in A'$.
Donc $A \subset A'$.
b) Soit $x' \in A'$.
Par construction $x \in B$.
D'où $A' \subset B$.
Par suite $A \subset A' \subset B$.
ii) D'après i) $A \subset A'$ alors $A' \subset A''$ (Par croissance).
Réciproquement soit $x \in A''$ alors x entier sur A'.
Ainsi il existe $n \geq 1$, tel que $x^n + \sum_{i=1}^{n} a_ix^{n-i} = 0, a_i \in A'$.
Alors a_i entier sur A, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
D'où $A[a_i]$ est un A-module de type fini, ainsi $A[a_1,a_2,...,a_n]$ est un A-module de type fini.

En effet, si,
$$\begin{cases} A[a_1] = A(1_A, a_1, a_1^2, ...a_1^{n-1}) \\ A[a_2] = A(1_A, a_2, a_2^2, ...a_2^{m-1}) \end{cases}$$
des A-modules de type fini, alors
$A[a_1,a_2] = A(a_1^ia_2^j)_{\substack{0\leq i\leq n-1 \\ 0\leq j\leq m-1}}$.

En procédant de proche en proche, il vient $A[a_1,a_2,...,a_n]$ est un A-module de type fini.

Par suite, $K = A[a_1x^{n-1}, a_2x^{n-2}, ..., a_n]$ est un A-module de type fini.
Soient $(y_1,...,y_n)$ les générateurs de K.

Donc $K = A(y_1, ..., y_n, x^{n-1}, x^{n-2}, ..., x^2, x, 1)$.
D'où $A[x] \subset H$.
Par suite x est entier sur A.
Donc $x \in A'$.
Par suite $A'' \subset A$.
Donc $A'' = A$.
iii) De la même manière, on montre que $I'' = I'$. □

Définition 3.2. *Soit I un idéal de l'anneau A et $f \in \mathbb{F}(A)$.*
On dit que I est entier sur f si tout élément de I est entier sur f.
Ce qui signifie que I est entier sur f si $I \subset P_1(f)$.

Conséquence 3.1. *Soit I un idéal de l'anneau A et $f \in \mathbb{F}(A)$.*
I est entier sur f si et seulement si $f_I \leqslant P(f)$.

Démonstration. $(ii) \Longrightarrow (i)$.
Supposons que $f_I \leq P(f)$. Alors $I^n \subset P_n(f)$, pour tout $n \geq 1$.
En particulier pour $n = 1$, on a $I \subset P_1(f)$. Donc I est entier sur f.
$(i) \Longrightarrow (ii)$.
Supposons que I est entier sur f. Alors $I \subset P_1(f)$. Montrons que $I^n \subset P_n(f)$, pour tout $n \geq 1$.
Initialisation
Comme $I \subset P_1(f)$ alors la propriété est vrai à l'ordre 1.
Hérédité
Soit $n \geq 1$. Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n, c'est à dire $I^n \subset P_n(f)$.
Montrons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $n+1$, c'est à dire $I^{n+1} \subset P_{n+1}(f)$.
On a : $I^n \subset P_n(f) \Longrightarrow I^{n+1} \subset IP_n(f) \subset P_1(f)P_n(f) \subset P_{n+1}(f)$ (car $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$).
D'où $I^{n+1} \subset P_{n+1}(f)$.
Donc la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $n + 1$.
Par suite $I^n \subset P_n(f)$, pour tout $n \geq 1$. Par conséquent $f_I \leq P(f)$. □

Définition 3.3. *Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}, g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :*

*(a) g est **entière sur** f si $g \leqslant P(f)$. C'est à dire :*

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, J_n \subset P_n(f).$$

*(b) g est **fortement entière sur** f si $f \leqslant g$ et si $R(A, g)$ est un $R(A, f)-$module de type fini.*

Proposition 3.5. *Soient f et g deux filtrations de l'anneau A telles que $f \leqslant g$.*
Alors $R(A, g)$ est entier sur $R(A, f)$ si et seulement si $\mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.

Démonstration. Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A telles que $f \leqslant g$. Supposons que $\mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.
Soit $b \in J_n$ alors $bX^n \in \mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$ d'après 3.1, on a bX^n entier sur $R(A, f)$. Par conséquent $R(A, g)$ est entier sur $R(A, f)$. Réciproquement, il suffit de remarquer que $\mathcal{R}(A, f) = R(A, f)[u]$ qui est une algèbre de type fini sur $R(A, f)$. □

Proposition 3.6. *Soient f, g deux filtrations de A telles que $f \leqslant g$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) g est entière sur f ;

(ii) $R(A, g)$ est entier sur $R(A, f)$;

(iii) $\mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.

Démonstration. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), immédiat en utilisant la proposition 3.1.
(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii), immédiat en utilisant la proposition 3.5. □

Proposition 3.7. *[3]*
Soient f, g deux filtrations de A. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) g est entière sur f ;

(ii) pour tout $k \geqslant 1$, g^k est entière sur $f^{(k)}$;

(iii) il existe $k \geqslant 1$, g^k est entière sur $f^{(k)}$.

Démonstration. Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A.
$(i) \Longrightarrow (ii)$.

Supposons que g est entière sur f. Montrons que pour tout $k \geq 1$, $g^{(k)}$ est entière sur $f^{(k)}$.

Soit $k \geq 1$, on a : $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ et $g^{(k)} = (J_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$.

Comme g est entière sur f alors l'idéal J_{nk} est entier sur $f^{(nk)}$.

Or $f^{(nk)} = (f^{(k)})^{(n)}$ donc J_{nk}est entier sur $(f^{(k)})^{(n)}$.

Par conséquent $g^{(k)}$ est entière sur $f^{(k)}$ pour tout $k \geq 1$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ immédiat.

$(iii) \Longrightarrow (i)$.

Supposons qu'il existe $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est entière sur $f^{(k)}$. Montrons que g est entière sur f.

Pour cela il suffit de montrer que pour tout $p \geq 1$, l'idéal J_p est entier sur $f^{(p)}$.

Soit $x \in J_p$. Alors $x^k \in J_p^k \subset J_{pk}$.

Or J_{pk} est entier sur $f^{(pk)} = (f^{(k)})^{(p)}$. D'où il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$(x^k)^n + a_1(x^k)^{n-1} + \cdots + a_j(x^k)^{n-j} + \cdots + a_n = 0$, avec $a_j \in I_{pkj}$.

On a pour tout $j = 1, \cdots, n$, $a_j(x^k)^{n-j} = a_jx^{kn-kj}$, ainsi $x^{kn} + a_1x^{kn-k} + \cdots + a_jx^{kn-kj} + \cdots + a_n = 0$, avec $a_j \in I_{pkj}$.

Posons $m = kn$. On obtient $x^m + a_1x^{m-k} + \cdots + a_jx^{m-kj} + \cdots + a_n = 0$, avec $a_j \in I_{p(kj)}$.

Par suite x est entier sur $f^{(p)}$pour tout $p \geq 1$. Par conséquent pour tout $p \geq 1$ J_p est entier sur $f^{(p)}$.

Donc g est entière sur f.

□

3.3 Réduction d'une filtration

3.3.1 Réduction au sens de Okon-Ratliff

Définition 3.4. *(α-réduction ou réduction au sens de Okon-Ratliff[8])*
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A.
f est une α-réduction de g si :

i) $f \leq g$;

ii) il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N, J_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p}J_p$.

Remarque 3.2. *Soit $\Re$ la relation $f\Re g \Leftrightarrow f$ est une α-réduction de g. Notons que cette relation est une relation d'ordre sur l'ensemble des filtrations.*

Démonstration. (i) **Réflexivité**.
Posons $N = 1$.
$\sum_{p=0}^{1} I_{n-p}I_p = I_nI_0 + I_{n-1}I_1 = I_{n-1}I_1 = I_n$ (car $I_0 \subset I_1$).
D'où $f\Re f$.
(ii) **Transitivité**.
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $h = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des filtrations de A.
Supposons que $f\Re g$. alors $f \leq g$ et il existe $N_1 \geq 1$, pour tout $m \geq N_1$, $J_m = \sum_{p=0}^{N_1} I_{m-p}J_p$. Supposons que $g\Re h$ alors $g \leq h$ et il existe $N_2 \geq 1$, pour tout $k \geq N_2$, $H_k = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}H_p$.
D'où $f \leq g \leq h$. Donc $f \leq h$.
De plus posons $N = N_1 + N_2$.
$H_k = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N} J_{k-p}H_p = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$ pour tout $k \geq N_1+N_2$.
Comme $k \geq N_1 + N_2$ alors $k - N_2 \geq N_1$ et $p \leq N_2$ alors $k - p \geq N_1$.
D'où $J_{k-p} = \sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i}J_i$.
Ainsi $H_k = \sum_{p=0}^{N_2}(\sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i}J_i)H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$.
Donc $H_k \subset \sum_{p=0}^{N_2}\sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i}J_iH_{p+i} + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$ car $g \leq h$.
D'où $J_i \subset H_i \subset H_iH_p \subset H_{i+p}$.
Posons $l = p + i$, ainsi $0 \leq l \leq N_1 + N_2$ car $0 \leq p \leq N_2$ et $0 \leq i \leq N_1$.
D'où $H_k \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$.
Posons $K = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$.

Comme $p \geq N_2$ alors $H_p = \sum_{p=0}^{N_2} J_{p-i}H_i$.
D'où $K = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}(\sum_{p=0}^{N_2} J_{p-i}H_i) = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}J_{p-i}H_i$.
Donc $K \subset \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i}H_i = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i}H_i$ $K \subset \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i}H_i$ or $0 \leq i \leq N_2$ et $N_1 + N_2 \leq k$.
D'où $k - i \geq N_1$.
Ainsi $J_{k-i} = \sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l}J_l$.
D'où $K \subset \sum_{p=0}^{N_2}(\sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l}J_l)H_i \subset \sum_{p=0}^{N_2}\sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l}J_lH_i$.
Posons $p = i + l$.
D'où $K \subset \sum_{p=0}^{N_1+N_2} I_{k-p}H_p$.
Or $H_k \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p = \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l + K \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l$.
Car $K \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l$.
Donc $H_k \subset H_{k-p}H_p \subset H_k$.
Finalement $H_k = \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l$ Par suite $f\Re h$.

(iii) **Anti-symétrie**.
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des filtrations de A telles que :
$f\Re g$ alors $f \leq g$ et $g\Re f$ alors $g \leq f$.
D'où $f = g$.
On en déduit que $\Re$ est une relation d'ordre. □

Proposition 3.8. *Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A. $f \leqslant g$ et chaque J_n est de type fini, alors f est une α-réduction de g si et seulement si $R(A, g)$ est un $R(A, f)$-module de type fini.*

Démonstration. Supposons que f est une α-réduction de g.
Alors $f \leq g$ et il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$; $J_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p}J_p$.
Prouvons que $R(A, g) = R(A, f)(J_0, J_1X_1, \cdots, J_NX_N) = M$.
$J_nX_n \subset R(A, g)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $R(A, f) \subset R(A, g)$ car $f \leq g$, Donc $M \subset R(A, g)$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, J_nX^n \subset M$ Si $n \leq N, J_nX^n \subset M$, par construction.
Soit $n \geq N$, supposons la propriété vraie et montrons que $J_{n+1}X^{n+1} \subset M$.

$J_{n+1} = \sum_{p=0}^{N} I_{n+1-p}J_p$ alors $J_{n+1}X^{n+1} = \sum_{p=0}^{N} I_{n+1-p}J_pX^{n+1}$,

D'où $J_{n+1}X^{n+1} = \sum_{p=0}^{N} I_{n+1-p}X^{n+1-p}J_pX^p \subset M$.

Ainsi $R(A, g)$ est un $R(A, f)$-module de type fini.

Supposons que $R(A, g)$ est un $R(A, f)$-module de type fini.

Montrons que f est une α-réduction de g.

Par hypothèse on a : $f \leq g$.

Trouvons $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N; J_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p}J_p$.

$R(A, g)$ étant un $R(A, f)$-module de type fini alors

$R(A, g) = R(A, f)(1, Z_1, \cdots, Z_r), Z_i \in R(A, g)$ et les Z_i sont homogènes de degré i.

Posons $N = r$.

Soit $z \in J_n$.

$z \in J_n$ alors $zX^n \in J_nX^n \subset R(A, g)$, d'où $zX^n = \sum_{p=0}^{r} h_pZ_p$, $h_p \in R(A, f)$ et $Z_0 = 1$.

h_p homogène de degré $n - p$ alors $h_p \in I_{n-p}X^{n-p}$, on déduit de cela que :

$h_p = a_{n-p}X^{n-p} \in I_{n-p}X^{n-p}$.

Aussi Z_p est homogène de degré p alors $Z_p = b_pX^p \in J_pX^p$.

Ainsi $zX^n = \sum_{p=0}^{r} a_{n-p}X^{n-p}b_pX^p$ alors $zX^n = \sum_{p=0}^{r} a_{n-p}X^nb_p$, ce qui implique que

$z = \sum_{p=0}^{r} a_{n-p}b_p \in \sum_{p=0}^{r} I_{n-p}J_p$, par conséquent $J_n \subset \sum_{p=0}^{r} I_{n-p}J_p \subset J_n$.

En somme, $J_n = \sum_{p=0}^{r} I_{n-p}J_p$, donc f est une α-réduction de g. □

3.3.2 Réduction au sens de Dichi-Sangaré

Définition 3.5. *(β-réduction ou réduction au sens de Dichi-Sangaré [5])*
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A.
f est une β-réduction de g si :

i) $f \leq g$;

ii) *il existe* $k \geq 1$ *tel que* $J_{n+k} = I_nJ_k$, *pour tout* $n \geq k$.

Remarque 3.3. *Si f est une β-réduction de g alors f est une α-réduction de g.*

Démonstration. Supposons que f est une β-réduction de g.

Alors $f \leq g$ et il existe $k \geq 1$ tel que $I_{n+k} = I_nJ_k$, pour tout $n \geq k$.

Posons $N = 2k$.

Soit $n \geq N = 2k$.

$\sum_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p = \sum_{p=0}^{k-1} I_{n-p}J_p + I_{n-k}J_k + \sum_{p=0}^{k+1} I_{n-p}J_p$, or $n \geq 2k$ alors $n - k \geq k$ et comme f

est une β-réduction de g alors, $I_{n-k}J_k = J_n$.
Donc $\sum_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p = \sum_{p=0}^{k-1} I_{n-p}J_p + J_k + \sum_{p=0}^{k+1} I_{n-p}J_p$ alors $J_n \subset \sum_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p$.
De plus on a : $\sum_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p \subset J_n$. Par conséquent $J_n = \sum_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p$.
On déduit donc de tout ce qui précède que f est une α-réduction de g. $\square$

Proposition 3.9. *Soient A un anneau et I , J deux idéaux de A.*
Alors les assertions suivantes sont équivalentes.
i) I est une réduction de J.
ii) f_I est une α-réduction de f_J.
iii) f_I est une β-réduction de f_J.

Démonstration. *i)* $\implies$ *ii)*.
Supposons que I est une réduction de J.
Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^{N+1} = IJ^N$.
$I \subset J$ alors $I^n \subset J^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $f_I \leq f_J$.
Posons $N_0 = N + 1$.
Soit $n \geq N_0$.
$\sum_{p=0}^{N+1} I^{n-p}J^p = \sum_{p=0}^{N} I^{n-p}J^p + I^{n-N-1}J^{N+1}$, comme I est une réduction de J alors
$I^{n-N-1}J^{N+1} = J^{n-N-1+N+1} = J^n$. Donc $\sum_{p=0}^{N+1} I^{n-p}J^p = \sum_{p=0}^{N} I^{n-p}J^p + J^n$.
Ainsi $J^n \subset \sum_{p=0}^{N+1} I^{n-p}J^p \subset J^n$.
f_I est donc une α-réduction de f_J.
ii) $\implies$ *iii)*.
Supposons que f_I est une α-réduction de f_J.
Alors $f_I \leq f_J$ et il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geq N_0$, $J^n = \sum_{p=0}^{N_0} I^{n-p}J^p$.
Posons $N = N_0$.
Soit $n \geq N$.
$I^nJ^{N_0} = \sum_{p=0}^{N_0} I^nI^{N_0-p}J^p = \sum_{p=0}^{N_0} I^{n+N_0-p}J^p = J^{N_0+n}$ alors $I^nJ^{N_0} = J^{N_0+n}$.
D'où f_I est une β-réduction de f_J.
iii) $\implies$ *i)* Supposons que f_I est une β-réduction de f_J.
$f_I \leq f_J$ et il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $J^{n+N_0} = I^nJ^{N_0}$.
$f_I \leq f_J$ alors $I \subset J$.
Posons $N = 2N_0$
$J^{N+1} = J^{2N_0+1} = J^{N_0+N_0+1} = I^{N_0+1}J_0^N = II^{N_0}J^{N_0} = IJ^{2N_0}$.
Donc $J^{N+1} = IJ^N$ ce qui fait que I est une réduction de J. $\square$

Proposition 3.10. *Soient A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de A. f_I est une β-réduction de g si et seulement si g est*

I-bonne.

Démonstration. Supposons que f_I est une β-réduction de g.
Cela implique que $f_I \leq g$ et il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geq N_0$
$J_{n+N_0} = I^n J_{N_0}$.
$f_I \leq g$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}, IJ_n \subset J_{n+1}$.
Posons $N = 2N_0$
Soit $n \geq N$.

$$J_{n+1} = J_{n-N_0-N_0+1}.$$
$$J_{n+1} = J_{n-N_0+1N_0}.$$
$$J_{n+1} = I^{n-N_0+1} J_{N_0}.$$
$$J_{n+1} = II^{n-N_0} J_{N_0}.$$
$$J_{n+1} = IJ_n.$$

D'où pour tout $n \geq 2N_0$, $IJ_n = J_{n+1}$, g est donc I-bonne. □

Remarque 3.4. *La β-réduction étant plus générale que la α-réduction, nous parlerons de β-réduction lorsque nous emploierons le terme réduction.*

Proposition 3.11. *Soit $f, g \in \mathbb{F}(A)$, telles que $f \leqslant g$.*

(i) f est un réduction de g si et seulement s'il existe un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que $J_{k+n} = J_k I_n$ pour tout $n \geqslant k$.
Pour un tel entier k et pour tout $m \geqslant 1$, $J_{mk} = J_{mk+pk-pk} = J_{pk+(m-p)k} = J_{pk} I_{(m-p)k} = J_{pk} J_{(m-p)k} = J_k^p J_{(m-p)k} = J_k^p I_{(m-p)k} = J_k^p J_{(m-p)k}$,
pour tout $p = 1, 2, \cdots, m$;

(ii) Si f est une réduction de g et que g est une réduction de $h \in \mathbb{F}(A)$, alors f est une réduction de h ;

(iii) Si f est une réduction de g et si h est une filtration A telle que $f \leqslant h \leqslant g$ alors h est une réduction de g.

Démonstration. i) Supposons que f soit une réduction de g. Alors :

(a) $f \leqslant g$;

(b) il existe $r \geqslant 1, n_o \geqslant 0$, pour tout $n \geqslant n_0$, $J_{r+n} = J_r I_n$.

Soit $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que $m_0 r \geq n_0$.
Posons $k = m_0 r$.
Alors $J_{k+n} = J_{m_0 r+n} = J_{m_0 r} I_n = J_k I_n$ car $k \geq n_0$.
La réciproque est évidente.
ii) Supposons que f est une réduction de g et g une réduction de h.
* $f \leq g \leq h$ alors $f \leq h$.
* Comme g est une réduction de h alors, il existe $k' \geq 1$, $H_{k'+n} = H_{k'} J_n$, pour tout $n \geq k'$.
Posons $k'' = k'(k'+1)$ comme dans (i).

Ainsi en utilisant (i) car f est une réduction de g, il vient $H_{k''+n} = H_{k''} I_n$, pour tout $n \geq k''$.

Par suite f est une réduction de h.

iii) Supposons que f réduction de g et que $f \leq h \leq g$.
Soit k comme dans (i).
Comme $h \leq g$ alors pour tout $n \geq k$, $J_k H_n \subset J_k J_n = J_{k+n} \subset J_k H_n$ car $f \leq h$.
Donc $J_{k+n} = J_k H_n$, pour tout $n \geq k$.
Par suite h est réduction de g. □

Remarque 3.5. *Cependant, le fait que g soit fortement entière sur f n'implique pas nécessairement que f soit une réduction de g, même si f et g sont noethériennes. On peut le voir sur l'exemple suivant :*
Soit $A = k[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée sur le corps k.
Soit $I = XA$.
On considère les filtrations $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$I_n = \begin{cases} I^{\frac{3n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ I^{\frac{3n+3}{2}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$J_n = \begin{cases} I^{\frac{3n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ I^{\frac{3n+1}{2}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

On vérifie que g est noethérienne et que $f \leq g$.
De plus, la filtration g est entière sur f.
En effet pour tout élément $b \in J_n$, $b^2 \in J_{2n}$ et on a $(bY^n)^2 = b^2 Y^{2n} \in R(A, f)$.
L'anneau $R(A, g)$ est donc entier sur $R(A, f)$. De plus, comme g est noethérienne, il résulte que g est fortement entière sur f et que f est noethérienne.
Néanmoins, f n'est pas une réduction de g puisqu'on n'a pas $J^2_{2p+1} = I_{2p+1} J_{2p+1}$, pour p suffisamment grand, condition nécessaire pour qu'une filtration f soit une réduction de g quand l'anneau A est noethérien.

3.4 Filtrations f-bonnes

Définition 3.6. *Soient A un anneau et M un $A-$module.*
On suppose que $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $f-$compatible, avec $f \in \mathbb{F}(A)$. Alors :

*(a) φ est **faiblement** $f-$ **bonne** s'il existe un entier naturel $N \geqslant 1$ tel que :*

$$\text{pour tout } n > N, M_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p} M_p;$$

*(b) φ est $f-$ **bonne** s'il existe un entier naturel $N \geqslant 1$ tel que :*

$$\text{pour tout } n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} M_p;$$

(c) φ est $f-$ ***fine*** *s'il existe un entier naturel $N \geqslant 1$ tel que :*

$$\text{pour tout } n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_p M_{n-p}.$$

Remarque 3.6. *(1) Toute filtration $f-$bonne est faiblement $f-$ bonne.*

(2) Soit $f \in \mathbb{F}(A)$. Alors f est faiblement $f-$bonne.

(3) Soit $f \in \mathbb{F}(A)$. Alors f est $f-$bonne si et seulement si f est E.P.

(4) Soient $\varphi \in \mathbb{F}(M)$ et I un idéal de A. Alors φ est $I-$bonne si et seulement si φ est f_I-bonne, où f_I est la filtration $I-$adique.

(5) Soit $g \in \mathbb{F}(A)$ telle que $f \leqslant g$. Alors si g est fortement entière alors g est faiblement $f-$bonne.

Démonstration. (1) Soit $f = (I_n)$ une filtration $f-bonne$. Alors il existe $N \geqslant 1$ tel que :

$$\text{pour tout } n > N, I_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p.$$

Ainsi pour $n > N$, $\sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}I_p = I_n + \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p}I_p = I_n + I_n = I_n$.
Donc f est $faiblement\ f-bonne$.
(2) Soit $f = (I_n) \in \mathbb{F}(A)$. Alors :
$I_n \subset \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}I_p$ et $I_{n-p}I_p \subset I_n$ Donc $\sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}I_p \subset I_n$.
Par suite, $I_n = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}I_p$. Et donc f est $faiblement\ f-bonne$.
(3) Par définition toute filtration $f-bonne$ est $E.P.$
(4) Supposons que $\varphi \in \mathbb{F}(M)$ est $I-bonne$. Alors :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $IM_n \subset M_{n+1}$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $IM_n = M_{n+1}$.
On a : $IM_n = Mn + 1$ alors $I^2M_n = M_{n+2}$, d'où $I^{n-p}M_p = M_n$ pour tout $n \geqslant n_0$.
Par suite $\sum\limits_{p=0}^{n_0} I^{n-p}M_p = M_n$ et donc φ est $f_I - bonne$.
Réciproquement supposons que φ est $f_I - bonne$ alors il existe $N \geqslant 1$ tel que pour tout $n > N$, $M_{n+1} = \sum\limits_{p=0}^{N} I^{n+1-p}M_p = I(\sum\limits_{p=0}^{N} I^{n-p}M_p) = IM_n$. Ainsi φ est $I-bonne$.

□

Proposition 3.12. *Si $f = (I_n)$ est une réduction de $g = (J_n)$ alors :*

(i) f est A.P. et g est fortement A.P ;

(ii) g est E.P et $f-$bonne ;

(iii) En plus, si A est noethérien alors f et g sont noethériennes et g est fortement entière sur f.

Démonstration. Supposons que $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une réduction de $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors $f \leq g$ et il existe $k \geq 1$, tel que pour tout $n \geq k$, $J_{n+k} = I_n J_k = J_k J_n$.

i) Nous avons $J_{nk} = J_k^n$ pour tout n. Donc g est *fortement A.P.*
De plus la division euclidienne de n par k donne $n = kq_n + r_n$, avec $0 \leq r_n < k$.
Posons $k_n = k(q_n + 1)$.
Alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{k_n}{n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{kq_n+r_n+k-r_n}{n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 1 + \frac{k-r_n}{n} = 1$.
Par ailleurs, $J_{k_n m} = J_{k_n}^m = J_{k(q_n+1)}^m \subset J_n^m$.
Posons $k'_n = k_{2k+n}$.
Alors $I_{k'_n m} \subset J_{k'_n m} \subset J_{(k_{2k+n})m} = J_{k_{2k+n}}^m = J_k^m I_{k+n}^m \subset I_n^m$.
Par suite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{k'_n}{n} = 1$
Donc f est *A.P.*

ii) Posons $N = 2k$. Alors si $n \geq N$, $n - k \geq k$ et $J_n = I_{n-k} J_k \subset \sum\limits_{p=1}^{2k} I_{n-p} J_p$

Donc $J_n = \sum\limits_{p=1}^{2k} I_{n-p} J_p$ et g est $f-$*bonne* et donc g est *E.P.*

iii) Si A est noethérien alors d'après ii) g et f sont noethérienne. Et donc g est *fortement entière* sur f. □

Proposition 3.13. *Toute filtration φ de M $f-fine$ est $f-bonne$.*

Démonstration. Supposons que $\varphi = (M_n)$ est une filtration de M qui est $f-fine$, où $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de A.

Alors il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N, M_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_p M_{n-p}$.

Comme $n > N$, posons $n = N + 1$, ainsi

$M_{N+1} = \sum\limits_{p=1}^{N} I_p M_{N+1-p} = \sum\limits_{q=1}^{N} I_{N+1-q} M_q$, avec $q = N + 1 - p$.

Ainsi, il vient de proche en proche que $M_{N+j} = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{N+j-p} M_p$, pour tout j avec $1 \leq j \leq m$.

Alors $M_{N+m} = \sum\limits_{p=1}^{N} I_p M_{N+m-p} = \sum\limits_{q=m}^{N+m-1} I_{N+m-q} M_q = \sum\limits_{q=m}^{N} I_{N+m-q} M_q + \sum\limits_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} M_q = \sum\limits_{q=m}^{N} I_{N+m-q} M_q + \sum\limits_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} (\sum\limits_{p=1}^{N} I_{q-p} M_p)$.

Or $\sum\limits_{q=m}^{N} I_{N+m-q} M_q \subset \sum\limits_{p=1}^{N} I_{N+m-p} M_p$ et $\sum\limits_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} (\sum\limits_{p=1}^{N} I_{q-p} M_p) = \sum\limits_{p=1}^{N} (\sum\limits_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-p}) M_p = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{N+m-p} M_p \subset M_{N+m}$

Par suite φ est $f-$*bonne*, l'inclusion inverse étant évidente. □

Corollaire 3.2. *Soient $f, g \in \mathbb{F}(A)$ avec $f \leqslant g$. Si A est noethérien alors :*
g faiblement $f-bonne$ si et seulement si g est fortement entière sur f.

Proposition 3.14. *Soient $f = (I_n)$ une filtration E.P. de A et $\varphi = (M_n) \in \mathbb{F}(M)$. Nous avons les assertions suivantes :*

φ est $f-fine$ si et seulement si φ est $f-$bonne si et seulement si φ est faiblement $f-$bonne.

Démonstration. Il suffit de montrer que φ est faiblement $f-bonne$ si φ est $f-fine$. Supposons que φ est faiblement $f-bonne$.
Soient $N, N' \geqslant 1$ des entiers tels que pour tout $n \geqslant N$, $M_n = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}M_p$ et pour tout $n \geq 1, I_n = \sum\limits_{p=1}^{N'} I_{n-p}I_p$. Alors pour $n > N'' = N + N'$,

$M_n = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p}M_p = \sum\limits_{p=0}^{N}(\sum\limits_{q=1}^{N'} I_{n-p-q}I_p)M_p = \sum\limits_{q=1}^{N'} I_q(\sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p-q}M_p) = \sum\limits_{q=1}^{N'} I_qM_{n-q} \subset \sum\limits_{q=1}^{N''} I_qM_{n-q}$.

Donc $M_n = \sum\limits_{q=1}^{N''} I_qM_{n-q}$, l'inclusion inverse étant triviale. □

Corollaire 3.3. *Soient $f, g \in \mathbb{F}(A)$. Si A est noethérien, $f \leqslant g$ et f noethérien. Alors nous avons les assertions suivantes :*
g est $f-fine$ si et seulement si g est $f-bonne$ si et seulement si g est faiblement $f-bonne$ si et seulement si g est fortement entière sur f.

Proposition 3.15. *Soient $f = (I_n), g = (J_n) \in \mathbb{F}(A)$, tel que $f \leqslant g$.*
Si g est $f-bonne$, E.P. et A est noethérien alors f et g sont noethériennes.

Démonstration. Il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N, J_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p}J_p \subset \sum\limits_{p=1}^{N} J_{n-p}J_p \subset J_n$

Donc $J_n = \sum\limits_{p=1}^{N} J_{n-p}J_p$ pour tout $n > N$.
Cette égalité est valable si $1 \leq n \leq N$.
Comme g est $E.P$ et A noethérien alors g est fortement entière sur f.
Par suite g est noethérien et d'après [6], f est noethérien. □

Proposition 3.16. *Soient $f = (I_n), g = (J_n) \in \mathbb{F}(A)$, tel que $f \leqslant g$.*
Si g est faiblement $f-bonne$ alors :
f est A.P si et seulement si g est A.P.

Démonstration. Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$.
Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que $I_n \subset J_n \subset I_{n-N} \subset J_{n-N}$ pour tout $n > N$.
Si f est $A.P.$ alors il existe une suite d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{k_n}{n} = 1$ et $I_{k_nm} \subset I_n^m$, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$. Par suite, $J_{(k_n+N)m} \subset J_{k_nm+Nm} \subset J_{k_nm+N} \subset I_{k_nm+N} \subset I_{k_nm} \subset I_n^m \subset J_n^m$.
D'où $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{k_n+N}{n} = 1$, g est $A.P.$
Réciproquement si g est $A.P.$ alors il existe une suite d'entiers $(k'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à g.
Alors $I_{k'_n+N.m} \subset J_{k'_n+N.m} \subset J_{n+N}^m \subset I_n^m$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.
Et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{k'_n+N}{n} = 1, f$ est $A.P.$ □

Conclusion et perspectives

L'objectif de ce travail était l'étude de la dépendance intégrale et de la réduction par rapport aux idéaux à travers la filtration I-adique qui est une filtration I-bonne. Ensuite, nous avons montré la dépendance intégrale et la réduction des filtrations bonnes en générale. Nous pouvons donc retenir que dans un anneau local noethérien toutes les filtrations bonnes admettent une réduction minimale. De plus, nous pouvons si certaines conditions sont vérifiées établir des propositions équivalentes entre les notions de réduction, dépendance intégrale et filtrations bonnes.

Comme perspective, nous projetons d'étudier sous quelles hypothèses nous pourrons étendre ces résultats aux autres classes de filtrations notamment les filtrations noethériennes et les filtrations de modules. De plus, pouvons-nous étendre ces résultats à des objets algébriques qui ne sont pas forcement décroissants ?

Bibliographie

[1] Bishop W., Petro J.W., Ratliff Jr L. J. et Rush D., *Note on noetherian filtrations*, Communications in Algebra, Vol.17, No. 2, 1988, pp. 471-485.

[2] Dichi H., *Integral dependence over a filtration*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 58, No. 1, 1989, pp. 7-18.

[3] Dichi H., *Travaux de recherches, en vue de l'habilitation à diriger une recherche*, 1999.

[4] Dichi H., Sangare D., et Soumare M., *Filtrations, integral dependence, reduction, f-good filtrations*, Communications in Algebra, Vol. 20, No. 8, 1992, pp. 2393-2418.

[5] Dichi H. et Sangaré D., *Filtrations, asymptotic ans prüferian closures, cancellation laws*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 113, No. 3, 1991, pp. 617-624.

[6] Eakin P., *The converse to a well known theorem on noetherian rings*, Math. Ann., Vol. 177, 1968, pp. 278-282.

[7] Northcott D. G., et Rees D., *Reductions of ideals in local rings*, in Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 50, No. 2, 1954, pp. 145-158.

[8] Okon J. S., et Ratliff L., *Reductions of filtrations*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 144, No. 1, 1990, pp. 137-154.

[9] Prüfer H., *Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 168, 1932, pp. 1-36.

[10] Ratliff Jr L. J., *Notes on essentially powers filtrations*, Michigan Mathematical Journal, Vol.26, No. 3, 1979, pp. 313-324.

[11] Ratliff Jr L. J. et Rush D., *Note on I-good filtrations and noetherian Rees rings*, Communications in Algebra, Vol.16, No. 5, 1988, pp. 955-975.