1 A RETENIR

Introduction

Évaluateur : Excellence Monsieur le président du Jury, Honorable membres du Jury $\Longrightarrow$ évaluation du travail.

Collaborateur : Mr Assan A. (MC), Mr Brou K.P. (M.A) $\Longrightarrow$ l'accompagnement dans l'élaboration de ce mémoire.

Famille : Parents, amis, connaissance $\Longrightarrow$ déplacement et soutien.

Thème : Dépendance intégrale, réduction et filtrations bonnes.

Utilité : Structure des Anneaux et Modules, Étude des équation, Suite d'éléments algébriques.

Plan : Cas particulier et lien entre ces 3 notions et cas général des filtrations bonnes et liens.

Référence :

1. (Filtration) Dichi H., *Travaux de recherches, en vue de l'habilitation à diriger une recherche*
2. (Entier) Prüfer H., *Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern* - 1930.
3. ($\beta - reduction$) Dichi H., Sangare D., et Soumare M., *Filtrations, integral dependence, reduction, f-good filtrations.*
4. ($\alpha - reduction$) Okon J. S., et Ratliff L., *Reductions of filtrations*

Relation : Ordre (R.A.T.) et Équivalence (R.S.T.) $\Longrightarrow$ L'ordre est dit total si deux éléments sont toujours comparables.

Outro

Bilan : Étude sur les filtrations I-adiques puis proposition. $\Longrightarrow$ Filtrations bonnes et liens.

Perspectives : Dans un anneau local noethérien, la réduction minimale des filtrations I-bonnes existe toujours. $\Longrightarrow$ Est ce que toute les filtrations admettent une réduction minimal ? $\Longrightarrow$ Une filtration noethérienne admet une réduction minimale si et seulement s'il existe $r \geqslant 1, I_r$ soit idempotent.

Remerciement : Excellence Monsieur le président du Jury, Honorable membres du Jury. $\Longrightarrow$ Nullement avoir cerné tous les contours $\Longrightarrow$ remarques et suggestions.

Théorème 1. *Soient* $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des filtrations sur l'anneau A. Nous considérons les assertions suivantes :*

i) f *est une réduction de* g.

ii) $J_n^2 = I_n J_n$ *pour tout* n *assez grand.*

iii) I_n *est une réduction de* J_n *pour tout* n *assez grand.*

iv) Il existe un entier $s \geq 1$ *tel que pour tout* $n \geq s$, $J_{s+n} = J_s J_n$, $I_{s+n} = I_s I_n$, $J_s^2 = I_s J_s$, $J_{s+p} I_s = I_{s+p} J_s$ *pour tout* $p = 1, 2, ..., s-1$

v) Il existe un entier $k \geq 1$ *tel que* $g^{(k)}$ *est* $I_k - bonne$

vi) Il existe un entier $r \geq 1$ *tel que* $f^{(r)}$ *est une réduction de* $g^{(r)}$.

vii) Pour tout entier $m \geq 1$ *tel que* $f^{(m)}$ *est une réduction de* $g^{(m)}$.

viii) g *est entière sur* f.

ix) g *est fortement entière sur* f.

x) g *est* $f - fine$.

xi) g *est* $f - bonne$.

xii) g *est* $faiblement\ f - bonne$.

xiii) Il existe un entier $N \geq 1$ *tel que* $t_N g \leq f \leq g$

xiv) Il existe un entier $N \geq 1$ *tel que* $t_N g' \leq t_N f'$ *où* f' *est la clôture intégrale de* f.

xv) $P(f) = P(g)$, *où* $P(f)$ *est la clôture prüférienne de* f.

1) On a :

$(i) \Longleftrightarrow (vii)$; $(v) \Longleftrightarrow (vi)$; $(viii) \Longleftrightarrow (xv)$; $(ii) \Longrightarrow (iii)$; $(iv) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (v)$; $(ix) \Longrightarrow (vii), (xii)$ *et* $(xiii)$;

$(i) \Longrightarrow (x) \Longrightarrow (xi) \Longrightarrow (xii) \Longrightarrow (xiii)$

2) Si de plus on suppose A noethérien, alors :

$(i) \Longleftrightarrow (xiv)$; $(i) \Longrightarrow (ix) \Longleftrightarrow (xii)$; $(i) \Longrightarrow (ii)$

3) Par ailleurs, si f *est noethérienne, alors A est noethérien et les assertions suivantes sont équivalentes :*

$(ix) \Longleftrightarrow (x) \Longleftrightarrow (xi) \Longleftrightarrow (xii) \Longleftrightarrow (xiii)$

4) Si f *et* g *sont noethériennes alors nous avons :*

$(iii) \Longrightarrow (viii) \Longleftrightarrow (ix)$; $(vi) \Longrightarrow (ix)$

5) Si f *est fortement noethérienne et* g *est noethérienne alors les quinze (15) assertions sont équivalentes et dans ce cas* g *est fortement noethérienne*

$(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv) \Longleftrightarrow (v) \Longleftrightarrow (vi) \Longleftrightarrow (vii) \Longleftrightarrow (viii) \Longleftrightarrow (ix) \Longleftrightarrow (x) \Longleftrightarrow (xi) \Longleftrightarrow (xii) \Longleftrightarrow (xiii) \Longleftrightarrow (xiv) \Longleftrightarrow (xv)$.