SOUTENANCE DE MÉMOIRE DE MASTER OPTION: ALGÈBRE COMMUTATIVE ET CRYPTOGRAPHIE SPÉCIALITÉ: THÉORIE DES FILTRATIONS

KABLAM Edjabrou Ulrich Blanchard

Université NANGUI ABROGOUA
UFR Sciences Fondamentales Appliquées

10 Juillet 2024

THÈME : **DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES**

Directeur de Mémoire : Mr. ASSAN Abdoulaye, M.C.
Encadrant scientifique : Mr. BROU Kouadjo Pierre, M.A.

PLAN DE PRÉSENTATION

PRÉLIMINAIRE

FILTRATIONS

(a) $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$ si :

- (i) $I_0 = A$
- (ii) $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{Z}$
- (iii) $I_p I_q \subset I_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$

Remarque

On peut remarquer que pour tout $n \leq 0$, $I_n = A$.
En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que $I_0 = A$ (i), il vient $I_n = A, n \leq 0$ car $\forall n \in \mathbb{Z}$, les I_n sont des idéaux de A.
Ainsi au lieu d'étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PRÉLIMINAIRE

CLASSES DES FILTRATIONS

f $I-adique$	$I_n = I^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
f $I-bonne$	$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $II_n = I_{n+1}, \forall n \geqslant n_0.$
f $A.P.$	$\exists\,(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\forall$ n,m $\in \mathbb{N}$, $I_{mk_n} \subset I_n^m$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1$
f f.$A.P.$	$\exists k \geqslant 1, \forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{nk} = I_k^n$
f noeth.	son anneau de Rees $R(A, f)$ est noethérien.
f f. noeth.	$\exists k \geqslant 1, \forall\, m, n \in \mathbb{Z},\ m, n \geqslant k, I_m I_n = I_{m+n}$
f E.P	$\exists N \geqslant 1, \forall\, n \geqslant N,\ I_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p.$

PRÉLIMINAIRE

PROPRIÉTÉ DES FILTRATIONS I-ADIQUES

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{f E.P} & & \\
\text{f I-adique} \arrow[r] & \text{f I-bonne} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & \text{f fortement A.P} \arrow[r] \arrow[d] & \text{f A.P} \\
 & \text{f fortement noethérienne} \arrow[r] & \text{f noethérienne} &
\end{tikzcd}
$$

PRÉLIMINAIRE

DÉMONSTRATION

(i) Supposons que f est $I-adique$ alors peu importe $n_0 \in \mathbb{N}$ choisi, $II^n = I^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc f est $I-bonne$.

(ii) De proche en proche, on a $I^n I_{n_0} = I_{n_0+n}$, pour tout $n \geqslant 1$.
En effet, $II_{n_0} = I_{n_0+1}$, en multipliant par I.
On a : $I^2 I_{n_0} = II_{n_0+1}$ et $I^1 I_{n_0+1} = I_{n_0+2}$.

(iii) Supposons que f est $I-bonne$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant 1$, $I^m I_n = I_{n+m}, \forall n \geqslant n_0$.
Posons $k = n_0 + 1$, soient $m, n \in \mathbb{N}$ alors :

$$I_{m+n} = I^m I_n \subset I_1^m I_n \subset I_m I_n \subset I_{m+n}$$

Donc $\forall\, m, n \in \mathbb{Z},\ \ m, n \geqslant k, I_m I_n = I_{m+n}$.
Par suite f est fortement noethérienne.

(iv) Supposons que f est $I - bonne$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant 1$, $I^m I_n = I_{n+m}, \forall n \geqslant n_0$.
Posons $k = N = n_0 + 1$.

$$\sum_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p = I_{n-1} I_1 + \sum_{p=2}^{N} I_{n-p} I_p$$

Prenons $n \geqslant N = n_0 + 1$ alors $n - 1 \geqslant n_0$.
Alors $I_{n-1} I_1 = I_n$.
D'où $I_n \subset \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p \subset I_n$.
Par suite f est $E.P$

PRÉLIMINAIRE

DÉMONSTRATION

(v) Supposons que f est $I-bonne$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant 1$, $I^m I_n = I_{n+m}, \forall n \geqslant n_0$.
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que $I_{nk} = I_k^n$.
Posons $k = n_0 + 1 \geqslant 1$
Initialisation : n=0, n=1, évident.
Prenons n= 2, $I_{2k} \subset I_k I_k = I_k^2 \subset I_{2k}$, donc $I_{2k} = I_k^2$.
Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $I_{nk} = I_k^n$.
On a : $I_{(n+1)k} = I^k I_k^n \subset I_k I_k^n \subset I_k^{n+1}$, donc $I_{(n+1)k} = I_k^{n+1}$.
Par suite f fortement $A.P$.

PRÉLIMINAIRE

ÉLÉMENT ENTIER ET RÉDUCTION

(i) Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que : $x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^{m} a_i x^{m-i} = 0$, $m \in \mathbb{N}^*$ où $a_i \in I_i$, $\forall i = 1, \cdots, m$.

(ii) f est une β-réduction de g si :

a) $f \leq g$

b) $\exists\, k \geq 1$ tel que $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$.

Soient $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(M)$, $f-$ *compatible*, avec $f \in \mathbb{F}(A)$.

(a) φ est $f-$ **bonne** s'il existe un entier naturel N $\geqslant 1$ tel que :

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p}M_p$$

(b) Une filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite $I-$ *bonne* si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad II_n \subseteq I_{n+1}$;

(ii) $\exists k \in \mathbb{N}, II_n = I_{n+1}, n \geqslant k$.

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

Théorème Principal

Soient A noethérien, $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$.
Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne :

(i) f est une réduction de g.

(ii) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.

(iii) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

Théorème Principal

(iv) g est *entière* sur f.

(iiv) g est *fortement entière* sur f.

(iiiv) g est f − *fine*.

(ivv) g est f − *bonne*.

(vv) g est *faiblement* f − *bonne*.

(viv) $P(f) = P(g)$

1. Propriétés des f_I et réduction minimale des filtrations bonnes
2. Étendre ces résultats aux autres classes de filtration.

MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION