SOUTENANCE DE MÉMOIRE DE MASTER OPTION: ALGÈBRE COMMUTATIVE ET CRYPTOGRAPHIE SPÉCIALITÉ: THÉORIE DES FILTRATIONS

KABLAM Edjabrou Ulrich Blanchard

Université NANGUI ABROGOUA
UFR Sciences Fondamentales Appliquées

10 Juillet 2024

THÈME : **DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES**

Directeur de Mémoire : Mr. ASSAN Abdoulaye

Encadrant scientifique : Mr. BROU Kouadjo Pierre

PLAN DE PRÉSENTATION

1. INTRODUCTION
2. DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNES
3. CONCLUSION

INTRODUCTION
FILTRATIONS

(i) Une filtration de l'anneau A est une suite $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'idéaux de A, décroissante pour l'inclusion et vérifiant $I_0 = A$ et $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$.

(ii) Une filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite $I - bonne$ si pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad II_n \subseteq I_{n+1}$ et s'il existe k un entier tel que pour tout $n \geqslant k$, $II_n = I_{n+1}$.

INTRODUCTION

PROPRIÉTÉ DE LA FILTRATION I-ADIQUE

$$f \text{ I-adique} \Longrightarrow f \text{ I-bonne} \Longrightarrow f \text{ fortement A.P.} \Longrightarrow f \text{ A.P.}$$

(i) Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que : $x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^{m} a_i x^{m-i} = 0$, $m \in \mathbb{N}^*$ où $a_i \in I_i, \forall i = 1, \cdots, m$.

(ii) f est une β-réduction de g si :

a) $f \leq g$

b) $\exists\, k \geq 1$ tel que $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$.

(i) Comment étendre de manière rigoureuse les résultats obtenus dans le contexte restreint de la filtration I-adique à des filtrations bonnes

(i) Comment ces notions interagissent-elles dans des environnements mathématiques variés ?

1. INTRODUCTION
2. DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
3. CONCLUSION

Théorème Principal (1/11)

Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des filtrations sur l'anneau A. Nous considérons les assertions suivantes :

(i) f est une réduction de g.

(ii) $J_n^2 = I_n J_n$ pour tout n assez grand.

(iii) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.

(iv) Il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_s J_n$, $I_{s+n} = I_s I_n$, $J_s^2 = I_s J_s$, $J_{s+p} I_s = I_{s+p} J_s$ pour tout $p = 1, 2, ..., s-1$

(v) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$

Théorème Principal (2/11)

(vi) Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$.

(vii) Pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.

(viii) g est *entière* sur f.

(ix) g est *fortement entière* sur f.

(x) g est $f-$*fine*.

Théorème Principal (3/11)

(xi) g est $f - bonne$.

(xii) g est *faiblement* $f - bonne$.

(xiii) Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

(xiv) Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g' \leq t_N f'$ où f' est la clôture intégrale de f.

(xv) $P(f) = P(g)$, où $P(f)$ est la clôture prüférienne de f.

Théorème Principal (4/11)

On a les résultats suivants :

(1)

(a) f est une réduction de g si et seulement si pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.

(b) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$ si et seulement s'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$.

(c) g est *entière* sur f si et seulement si $P(f) = P(g)$

Théorème Principal (5/11)

On a les résultats suivants :

(1)

(d) Si $J_n^2 = I_n J_n$ pour tout n assez grand alors I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.

(e) S'il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_s J_n$, $I_{s+n} = I_s I_n$, $J_s^2 = I_s J_s$, $J_{s+p} I_s = I_{s+p} J_s$ pour tout $p = 1, 2, ..., s-1$ alors f est une réduction de g.

(f) Si f est une réduction de g alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$

Théorème Principal (6/11)

On a les résultats suivants :

(1)

(g) Si g est fortement entière sur f alors :

- Pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.
- g est *faiblement* f − *bonne*.
- Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

Théorème Principal (7/11)

On a les résultats suivants :

(1)

(h) f est une réduction de $g \implies g$ est $f-fine \implies g$ est $f-bonne$

(i) g est $f-bonne \implies g$ est $faiblement\ f-bonne \implies$ Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

Théorème Principal (8/11)

On a les résultats suivants :

(2) Si de plus on suppose A noethérien, alors :

(j) Il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_s J_n$, si et seulement s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g' \leq t_N f'$ où f' est la clôture intégrale de f.

(k) f est une réduction de g si $J_n^2 = I_n J_n$ pour tout n assez grand.

(l) f est une réduction de g $\Longrightarrow$ g est *fortement entière* sur f $\Longleftrightarrow$ g est *faiblement* f *− bonne*.

Théorème Principal (9/11)

On a les résultats suivants :
(3) Par ailleurs, si f est noethérienne, alors A est noethérien et les assertions suivantes sont équivalentes :

(m) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand $\Longleftrightarrow$ g est $f-$*fine* $\Longleftrightarrow$ g est $f-$*bonne* $\Longleftrightarrow$ g est *faiblement* $f-$*bonne* $\Longleftrightarrow$ Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

RÉSULTATS

Théorème Principal (10/11)

On a les résultats suivants :

(4) Si f et g sont noethériennes alors nous avons :

(n) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand $\Longrightarrow$ g est entière sur f $\Longleftrightarrow$ g est fortement entière sur f

(o) Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$ $\Longrightarrow$ g est fortement entière sur f

Théorème Principal (11/11)

On a les résultats suivants :
(5) Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les quinze (15) assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne.

Démonstration

1) $(i) \Longleftrightarrow (vii)$. Supposons f est une réduction de g et choisissons un entier k, $k \geqslant 1$ tel que $J_{k+n} = J_k I_n$ pour tout $n \geqslant k$. Pour un tel entier k et pour tout $m \geqslant 1$, $J_{mk} = J_k^p J_{(m-p)k}$ pour tout $p = 1, 2, \cdots, m$ alors pour tout entiers $m \geq 1$ et $n \geq k$, $J_{m(k+n)} = J_{mk} I_{mn}$, ce qui entraîne que pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$. La réciproque est évidente.

Démonstration

$(v) \Longrightarrow (vi)$. Supposons qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$. Posons $f^{(k)} = (H_n)$; $g^{(k)} = (K_n)$; $H_n = I_{nk}$; $K_n = J_{nk}$; $H_1 = I_k$;
Par hypothèse, $H_1 K_n \subseteq K_{n+1}$ pour tout entier n et il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $H_1 K_n = K_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.
Pour tout entier $m \geq 0$, $K_{n_0+m} = H_1^m K_{n_0} \subseteq H_m K_{n_0} \subseteq K_{n_0+m}$.
Donc $K_{n_0+m} = K_{n_0} H_m$ pour tout entier m. Donc $f^{(k)}$ est une réduction de $g^{(k)}$.

Démonstration

$(vi) \Longrightarrow (v)$.

Supposons qu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$. Il suffit de montrer que si f est une réduction de g alors il existe $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$.

Posons un entier k, $k \geqslant 1$ tel que $J_{k+n} = J_k I_n$ pour tout $n \geqslant k$. Pour un tel entier k et pour tout $m \geqslant 1$, $J_{mk} = J_k^p J_{(m-p)k}$ pour tout $p = 1, 2, \cdots, m$, alors pour tout entiers $m \geq 1$ et $J_{k(m+1)} = J_{mk} I_k$, donc $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$.

Démonstration

$(viii) \Longleftrightarrow (xv)$.
Si g est entière sur f alors $f \leq g \leq P(f)$, ainsi
$P(f) \leq P(g) \leq P(P(f)) = P(f)$, donc $P(g) = P(f)$.
Réciproquement si $P(f) = P(g)$ alors $g \leq P(g) = P(f)$ et donc g est entière sur f.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Évident.

Démonstration

$(iv) \Longrightarrow (i)$.

Supposons qu'il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_s J_n$, $I_{s+n} = I_s I_n$, $J_s^2 = I_s J_s$, $J_{s+p} I_s = I_{s+p} J_s$ pour tout $p = 1, 2, ..., s-1$.

Posons $n \geq 2s$ et $n = qs + p$ avec $0 \leq p < s$.

Alors $J_{s+n} = J_{(q-2)s+2s+(s+p)} = J_s^{q-2} J_{2s+(s+p)} = J_s^{q-2} J_s^2 J_{s+p} = J_s^{q-1} I_s J_{s+p} = J_s^{q-1} J_s I_{s+p} = J_s^q I_{s+p} = J_s I_s^{q-1} I_{s+p} \subseteq J_s I_n \subseteq J_{s+n}$.

Par suite $J_{s+n} = J_s I_n$ pour tout $n \geq 2s$. Donc $J_{2s+n} = J_{2s} I_n$ pour tout $n \geq 2s$. D'où f est une réduction de g.

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

RÉSULTATS

Démonstration

$(i) \Longrightarrow (v)$

Évident car $(vi) \Longrightarrow (v)$.

$(ix) \Longrightarrow (viii)$

Évident

$(ix) \Longrightarrow (xii) \Longrightarrow (xiii)$ en utilisant la proposition 3.6 (5)

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

RÉSULTATS

Démonstration

$(i) \Longrightarrow (x)$.

Supposons que f est une réduction de g.

Pour tout entier $n \geq N = 2k - 1$, posons $n = qk + r$, avec $0 \leq r < k$ où k est $k \geqslant 1$ tel que $J_{k+n} = J_k I_n$ pour tout $n \geqslant k$. Pour un tel entier k et pour tout $m \geqslant 1$, $J_{mk} = J_k^p J_{(m-p)k}$ pour tout $p = 1, 2, \cdots, m$

Alors $J_n = J_{k(q-1)} I_{k+r}$.

Ainsi $1 \leq k + r < 2k - 1$, $J_n \subseteq \sum_{p=1}^{N} I_p J_{n-p} \subseteq J_n$, d'où $J_n = \sum_{p=1}^{N} I_p J_{n-p}$ pour tout $n \geq N = 2k - 1$.

Ce qui prouve que g est $f - fine$.

$(x) \Longrightarrow (xi)$ car toute filtration f-bonne est f-fine

$(xi) \Longrightarrow (xii)$ en utilisant la proposition 3.6 (1)

1 INTRODUCTION
2 DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
3 CONCLUSION

CONCLUSION

PERSPECTIVES

Comme perspectives, nous projetons d'effectuer :

1. Une étude du nombre de réduction sur les filtrations bonnes i.e le nombre de Samuel.
2. Une étude de la largeur analytique qui représente le lien entre la dépendance intégrale et la réduction des filtrations bonnes.

MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION