SOUTENANCE DE MÉMOIRE DE MASTER OPTION: ALGÈBRE COMMUTATIVE ET CRYPTOGRAPHIE SPÉCIALITÉ: THÉORIE DES FILTRATIONS

KABLAM Edjabrou Ulrich Blanchard

Université NANGUI ABROGOUA
UFR Sciences Fondamentales Appliquées

10 Juillet 2024

THÈME : **DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES**

Directeur de Mémoire : Mr. ASSAN Abdoulaye, M.C.
Encadrant scientifique : Mr. BROU Kouadjo Pierre, M.A.

PLAN DE PRÉSENTATION

PRÉLIMINAIRES

FILTRATIONS

$f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$ si :

(i) $I_0 = A$;

(ii) $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{Z}$;

(iii) $I_p I_q \subset I_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$.

PRÉLIMINAIRES
FILTRATIONS

Remarque

On peut remarquer que pour tout $n \leq 0, I_n = A$.
En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que $I_0 = A$ (i), il vient $I_n = A, n \leq 0$ car pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les I_n sont des idéaux de A.
Ainsi au lieu d'étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PRÉLIMINAIRES

CLASSES DES FILTRATIONS

f $I-adique$	$I_n = I^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
f $I-bonne$	$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $II_n = I_{n+1}, \forall n \geqslant n_0$.
f $A.P.$	$\exists\,(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\forall$ n,m $\in \mathbb{N}$, $I_{mk_n} \subset I_n^m$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{k_n}{n} = 1$
f f.$A.P.$	$\exists k \geqslant 1, \forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{nk} = I_k^n$
f noeth.	son anneau de Rees $R(A,f)$ est noethérien.
f f. noeth.	$\exists k \geqslant 1, \forall\, m,n \in \mathbb{Z},\ m,n \geqslant k, I_mI_n = I_{m+n}$
f E.P	$\exists N \geqslant 1, \forall\, n \geqslant N,\ I_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p}I_p$.

PRÉLIMINAIRES
PROPRIÉTÉ DES FILTRATIONS I-BONNES

$$\begin{tikzcd}
& \text{f E.P} & & \\
\text{f I-adique} \arrow[r] & \text{f I-bonne} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & \text{f fortement A.P} \arrow[r] \arrow[d] & \text{f A.P} \\
& \text{f fortement noethérienne} \arrow[r] & \text{f noethérienne} &
\end{tikzcd}$$

PRÉLIMINAIRES

ÉLÉMENT ENTIER ET RÉDUCTION

(i) Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que : $x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^{m} a_i x^{m-i} = 0$, $m \in \mathbb{N}^*$ où $a_i \in I_i$, $\forall i = 1, \cdots, m$.

(ii) f est une β-réduction de g si :

  a) $f \leq g$
  b) $\exists\, k \geq 1$ tel que $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$.

Soient $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(M)$, $f-$ *compatible*, avec $f \in \mathbb{F}(A)$.

(a) φ est $f-$ **bonne** s'il existe un entier naturel N $\geqslant 1$ tel que :

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} M_p$$

(b) Une filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite $I-$ *bonne* si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad II_n \subseteq I_{n+1}$;

(ii) $\exists k \in \mathbb{N}, II_n = I_{n+1}, n \geqslant k$.

PRÉLIMINAIRES

RELATION ENTRE ÉLÉMENT ENTIER, RÉDUCTION ET FILTRATION I-ADIQUE

Proposition

Soient A un anneau, I un idéal de A et $x \in A$.

x est entier sur I si et seulement si I est une réduction de $I + (x) = I + xA$.

Démonstration

(i) Supposons que x est entier sur I. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que
$x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$, avec $a_i \in I^i, i = 1, \cdots, n$.
Montrons que I est une réduction de $I + (x)$.
$(I + (x))^n = (I + (x))(I + (x))^{n-1} = I(I + (x))^{n-1} + (x)(I + (x))^{n-1}$
En prouvant que $(x)(I + (x))^{n-1} \subset I(I + (x))^{n-1}$ on aura :

Démonstration

$$I(I+(x))^{n-1}+(x)(I+(x))^{n-1}=I(I+(x))^{n-1}.$$

$$\begin{aligned}
(x)(I+(x))^{n-1} &= (x)\sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-i} \\
&= (x)^n + \sum_{i=1}^{n-1} I^i (x)^{n-i} \\
&= (x)^n + I\sum_{i=1}^{n-1} I^{i-1} (x)^{n-i} \\
&= (x)^n + I\sum_{i=0}^{n-2} I^i (x)^{n-1-i}
\end{aligned}$$

Démonstration

Donc $(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + \sum_{i=0}^{n-2} I^i (x)^{n-1-i} \subset (x)^n + \sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-1-i}$

d'où $(x)(I+(x))^{n-1} \subset (x)^n + I(I+(x))^{n-1}$

et comme

$x^n = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} \in \sum_{i=1}^{n} I^i x^{n-i} \Rightarrow x^n \in I \sum_{i=1}^{n} I^{i-1} x^{n-i} = I \sum_{i=0}^{n} I^i x^{n-1-i}$

alors $(x)^n \in I(I+(x))^{n-1} \Rightarrow (x)^n + I(I+(x))^{n-1} = I(I+(x))^{n-1}$.

En somme $(x)(I+(x))^{n-1} \subset I(I+(x))^{n-1} \Rightarrow (I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}$.

Par conséquent I est une réduction de $I+(x)$.

Démonstration

(ii) Supposons que I est une réduction de $I+(x)$.
Alors $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(I+(x))^{n+1} = I(I+(x))^n$ $x^{n+1} \in (I+(x))^{n+1} = I(I+(x))^n \Rightarrow x^{n+1} \in I \displaystyle\sum_{i=0}^{n} I^i (x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} I^{i+1}(x)^{n-i}$.
D'où $x^{n+1} \in \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} I^i (x)^{n+1-i} \Rightarrow x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i}$, avec $a_i \in I^i$.
Ainsi x est donc entier sur I.

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

Théorème Principal

Soient A noethérien, $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$.
Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne :

(i) f est une réduction de g.

(ii) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.

(iii) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

Théorème Principal

(iv) g est *entière* sur f.

(v) g est *fortement entière* sur f.

(vi) g est $f-$ *fine*.

(vii) g est $f-$ *bonne*.

(viii) g est *faiblement* $f-$ *bonne*.

(ix) $P(f) = P(g)$

1. Propriétés des f_I et réduction minimale des filtrations bonnes
2. Étendre ces résultats aux autres classes de filtration.

MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION