

SOUTENANCE DE MÉMOIRE DE MASTER OPTION: ALGÈBRE COMMUTATIVE ET CRYPTOGRAPHIE SPÉCIALITÉ: THÉORIE DES FILTRATIONS

Présenté par M. KABLAM Edjabrou Ulrich Blanchard

Université NANGUI ABROGOUA

Unité de Formation et de Recherche des Sciences Fondamentales et Appliquées

10 Juillet 2024

THÈME : DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET
FILTRATIONS BONNES

Directeur de Mémoire : M. ASSANE Abdoulaye, M.C.

Encadrant scientifique : M. BROU Kouadio Pierre, M.A

PLAN DE PRÉSENTATION

- ① PRÉLIMINAIRES
- ② DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
- ③ CONCLUSION

PRÉLIMINAIRES

FILTRATIONS

$f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$ si :

- (i) $I_0 = A$;
- (ii) $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{Z}$;
- (iii) $I_p I_q \subset I_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$.



Remarque

On peut remarquer que pour tout $n \leq 0$, $I_n = A$.

En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que $I_0 = A$ (i), il vient $I_n = A$, $n \leq 0$ car pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les I_n sont des idéaux de A .

Ainsi au lieu d'étudier la famille $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



PRÉLIMINAIRES

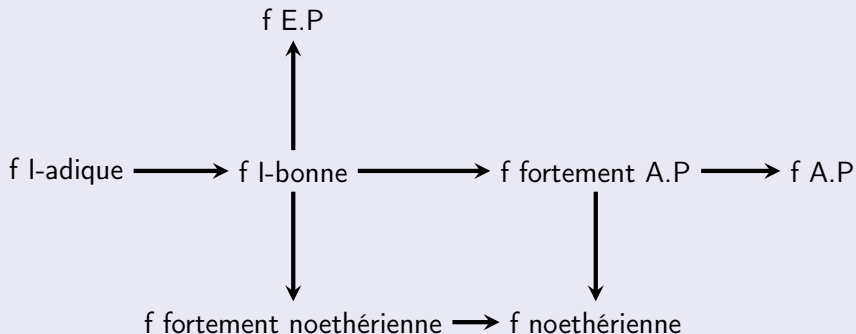
CLASSES DES FILTRATIONS

f I – adique	$I_n = I^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$
f I – bonne	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = I_{n+1}, \forall n \geq n_0.$
f A.P.	$\exists (k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\forall n, m \in \mathbb{N}, I_{mk_n} \subset I_n^m$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{n} = 1.$
f f.A.P.	$\exists k \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, I_{nk} = I_k^n.$
f noeth.	son anneau de Rees $R(A, f)$ est noethérien.
f f. noeth.	$\exists k \geq 1, \forall m, n \in \mathbb{Z}, m, n \geq k, I_m I_n = I_{m+n}.$
f E.P	$\exists N \geq 1, \forall n \geq N, I_n = \sum_{p=1}^N I_{n-p} I_p.$



PRÉLIMINAIRES

PROPRIÉTÉ DES FILTRATIONS I-BONNES



PRÉLIMINAIRES

ÉLÉMENT ENTIER ET RÉDUCTION

- (i) Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que : $x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^m a_i x^{m-i} = 0$,
 $m \in \mathbb{N}^*$ où $a_i \in I_i$, pour tout $i = 1, \dots, m$.
- (ii) f est une β -réduction de g si :
 - a) $f \leq g$;
 - b) $\exists k \geq 1$ tel que $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$.



PRÉLIMINAIRES

FILTRATIONS SUR UN MODULE

Soit M un A -module. On appelle filtration de M toute famille $\varphi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de sous-modules de M telle que :

(a) $M_0 = M$;

(b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M_{n+1} \subset M_n$.

La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de A et la filtration $\varphi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ du A -module M sont dites compatibles si :

$$I_p M_q \subset M_{p+q}, \text{ pour tout } p, q \in \mathbb{Z}.$$



Soient $\varphi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(M)$, f – compatible, avec $f \in \mathbb{F}(A)$.

(a) φ est f – **bonne** s'il existe un entier naturel $N \geq 1$ tel que :

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^N l_{n-p} M_p$$

(b) Une filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dite f – **bonne** si :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \subseteq I_{n+1}$;
- (ii) $\exists k \in \mathbb{N}, I_n = I_{n+1}, n \geq k$.



Proposition

Soient A un anneau, I un idéal de A et $x \in A$.

x est entier sur I si et seulement si I est une réduction de $I + (x) = I + xA$.



(i) Supposons que x est entier sur I . Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$x^n = \sum_{i=1}^n (-a_i)x^{n-i}, \text{ avec } a_i \in I^i, i = 1, \dots, n.$$

Montrons que I est une réduction de $I + (x)$. C'est à dire que $(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1}$. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nI = I$.

Ainsi :

$$(I + (x))^n = (I + (x))(I + (x))^{n-1} = I(I + (x))^{n-1} + (x)(I + (x))^{n-1}.$$

En prouvant que $(x)(I + (x))^{n-1} \subset I(I + (x))^{n-1}$ on aura :

$$(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1}.$$

$$(x)(I + (x))^{n-1} = (x) \sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-1-i}.$$

$$(x)(I + (x))^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-i}.$$

$$(x)(I + (x))^{n-1} = (x)^n + I \sum_{i=1}^{n-1} I^{i-1} (x)^{n-i}.$$

Démonstration

$$\text{Donc } (x)(I + (x))^{n-1} = (x)^n + I \sum_{i=0}^{n-2} I^i (x)^{n-1-i} \subset (x)^n + \sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-1-i}.$$

$$\text{d'où } (x)(I + (x))^{n-1} \subset (x)^n + I(I + (x))^{n-1}.$$

$$\text{De plus, } x^n = \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} \in \sum_{i=1}^n I^i x^{n-i}.$$

$$\text{Ainsi } x^n \in I \sum_{i=1}^n I^{i-1} x^{n-i} = I \sum_{i=0}^{n-1} I^i x^{n-1-i} = I(I + (x))^{n-1}.$$

$$\text{alors } (x)^n \in I(I + (x))^{n-1}.$$



En somme $(x)(I + (x))^{n-1} \subset I(I + (x))^{n-1}$.

D'où $(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1}$.

Par conséquent I est une réduction de $I + (x)$.



(ii) Supposons que I est une réduction de $I + (x)$.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(I + (x))^{n+1} = I(I + (x))^n$.

On a : $x^{n+1} \in (I + (x))^{n+1} = I(I + (x))^n$.

$$\text{Alors } x^{n+1} \in I \sum_{i=0}^n I^i(x)^{n-i} = \sum_{i=0}^n I^{i+1}(x)^{n-i}.$$

$$\text{D'où } x^{n+1} \in \sum_{i=1}^{n+1} I^i(x)^{n+1-i}.$$

$$\text{Alors } x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i}, \text{ avec } a_i \in I^i.$$

Ainsi x est donc entier sur I .



- ① PRÉLIMINAIRES
- ② DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
- ③ CONCLUSION



DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

Résultats

Soient A noethérien, $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$.

Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne :

- (i) f est une réduction de g .
- (ii) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.
- (iii) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est I_k – bonne



DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

Résultats

- (iv) g est *entière* sur f .
- (v) g est *fortement entière* sur f .
- (vi) g est f – *fine*.
- (vii) g est f – *bonne*.
- (viii) g est *faiblement* f – *bonne*.
- (ix) $P(f) = P(g)$



- ① PRÉLIMINAIRES
- ② DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
- ③ CONCLUSION



CONCLUSION

BILAN ET PERSPECTIVES

- 1 Propriétés des filtrations I – *bonnes*.
- 2 Réduction minimale des filtrations bonnes.
- 3 Étendre ces résultats aux autres classes de filtrations (noethériennes,...).
- 4 Étendre ces résultats à des objets algébriques qui ne respectent pas forcément la décroissance.



MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION

