SOUTENANCE DE MÉMOIRE DE MASTER OPTION: ALGÈBRE COMMUTATIVE ET CRYPTOGRAPHIE SPÉCIALITÉ: THÉORIE DES FILTRATIONS

KABLAM Edjabrou Ulrich Blanchard

Université NANGUI ABROGOUA UFR Sciences Fondamentales Appliquées

10 Juillet 2024

THÈME : DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

Directeur de Mémoire : Mr. ASSAN Abdoulaye, M.C. Encadrant scientifique : Mr. BROU Kouadjo Pierre, M.A.

PLAN DE PRÉSENTATION

- INTRODUCTION
- DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNES
- CONCLUSION



FILTRATIONS

(a)
$$f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$$
 si :

- (i) $I_0 = A$
- (ii) $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{Z}$
- (iii) $I_pI_q \subset I_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$





INTRODUCTION FILTRATIONS

Remarque

On peut remarquer que pour tout $n \le 0$, $I_n = A$.

En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que $I_0 = A$ (i), il vient $I_n = A$, $n \le 0$ car $\forall n \in \mathbb{Z}$, les I_n sont des idéaux de A.

Ainsi au lieu d'étudier la famille $f=(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f=(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.





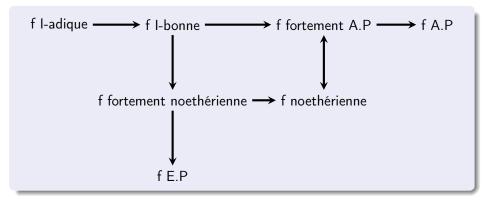
CLASSES DES FILTRATIONS

f I — adique	$I_n = I^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
f I — bonne	$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } II_n = I_{n+1}, \forall n \geqslant n_0.$
f A.P.	$\exists (k_n)_{n \in \mathbb{N}} ext{ tel que } orall ext{ n,m} \in \mathbb{N}, \ I_{mk_n} \subset I_n^m ext{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} rac{k_n}{n} = 1$
f f.A.P.	$\exists k \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}, \ I_{nk} = I_k^n$
f noeth.	son anneau de Rees $R(A, f)$ est noethérien.
f f. noeth.	$\exists k \geqslant 1, \forall m, n \in \mathbb{Z}, \ m, n \geqslant k, I_m I_n = I_{m+n}$
f E.P	$\exists N \geqslant 1, \forall n \geqslant N, \ I_n = \sum_{p=1}^N I_{n-p}I_p.$





PROPRIÉTÉ DES FILTRATIONS I-ADIQUES





ÉLÉMENT ENTIER ET RÉDUCTION

- (i) Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que : $x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^m a_i x^{m-i} = 0$, $m \in \mathbb{N}^*$ où $a_i \in I_i$, $\forall i = 1, \dots, m$.
- (ii) f est une β -réduction de g si :
 - a) $f \leq g$
 - b) $\exists k \geq 1 \text{ tel que } J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k.$



INTRODUCTION FLOURS FRONDES

Soient
$$\varphi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(M)$$
, $f - compatible$, avec $f \in \mathbb{F}(A)$.

(a) φ est f- bonne s'il existe un entier naturel N \geqslant 1 tel que :

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} M_p$$

- (b) Une filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dite I bonne si :
 - (i) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad II_n \subseteq I_{n+1}$;
 - (ii) $\exists k \in \mathbb{N}, II_n = I_{n+1}, n \geqslant k$.





INTRODUCTION PROBLÉMATIQUE ET ANNONCE DU PLAN

- (i) Comment étendre les résultats des filtrations l-adiques aux filtrations bonnes?
- (ii) Comment la dépendance intégrale et la réduction interagissent-elles avec les filtrations bonnes ?



- INTRODUCTION
- DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
- CONCLUSION



DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

ÉNONCE

Théorème Principal

Soient A noethérien, $f=(I_n)_{n\in\mathbb{N}}\leq g=(J_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{F}(A)$.

Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne :

- (i) f est une réduction de g.
- (ii) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.
- (iii) Il existe un entier k > 1 tel que $g^{(k)}$ est $I_k bonne$



DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

ÉNONCE

Théorème Principal

- (iv) g est entière sur f.
- (iiv) g est fortement entière sur f.
- (iiiv) g est f fine.
- (ivv) g est f bonne.
- (vv) g est faiblement f bonne.
- (viv) P(f) = P(g)



- INTRODUCTION
- ② DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
- CONCLUSION



CONCLUSION BILAN ET PERSPECTIVES

- 1 Propriétés des f₁ et réduction minimale des filtrations bonnes
- 2 Étendre ces résultats aux autres classes de filtration.





MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION



