Lorsque f est une filtration fortement noethrienne et g est une filtration noethrienne de l'anneau noethrien A vrifiant $f = (I_n) \leq g = (J_n)$, on montre que les assertions suivantes sont quivalentes:

(i) f est une rduction de g

(ii) $J_n^2 = I_n J_n, \forall n >> 0$

(iii) L'idal I_n est une rduction de l'idal J_n pour tout $n >> 0$

(iv) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que g^k soit $I_k - bonne$

(v) $\forall m \geq 1$, $f^{(m)}$ est une rduction de $g^{(m)}$

(vi) $\exists m \geq 1$, tel que $f^{(m)}$ soit une rduction de $g^{(m)}$

(vii) g est entire sur f

(viii) g est fortement entire sur f

(ix) g est $f - fine$

(xi) g est faiblement $f - bonne$

(x) g est $f - bonne$

(xii) $\exists m \geq 1$, tel que $t_m f \leq f \leq g$

(iii) $(P_k(f)) = (P_k(g))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

En particulier, il rsulte des quivalences ci-dessus que si f est une filtration $I - adique$ de l'anneau noethrien A et si g est une filtration noethrienne domine par g, les notions suivantes sont quivalentes :

(1) f_I est une rduction de g

(2) g est entire sur f_I.

(3) g est fortement entire sur f_I

(4) g est $I - bonne$

1.1.4 Rduction minimale. Rduction basique.

La notion d'idal basique t introduite et tudie par Northcott et Rees:

Un idal I de l'anneau local noethrien (A, m) est basique si la seule rduction de I est I lui-même.

Northcott et Rees ont aussi dfini la notion de rduction minimale d'un idal J:

Un idal I est une rduction minimale de J si I est une rduction de J et si I est *minimal* au sens de l'inclusion parmi l'ensemble des rductions de J.

Il a t montr dans [4] que tout idal J de (A, m) admet une rduction minimale.

Ces notions s'tendent sans difficult aux filtrations noethriennes d'un anneau noethrien A, non ncessairement local [2].

Les questions naturelles qui se posent sont alors les suivantes :

(a) Quelles sont les filtrations basiques de A si elles existent ?

(b) Toute filtration de A admet-elle une rduction minimale?

Nous avons obtenu une caractrisation des filtrations basiques et avons montr que la rponse la question (b) est ngative.

Pour (a) nous avons obtenu le rsultat suivant [2]:

Une filtration noethrienne f de l'anneau noethrien A est basique si et seulement si f est $I - adique$ avec I idempotent $(I^2 = I)$.

Pour le voir, considrons une filtration $f = (I_n)$ noethrienne et basique.

Il existe alors un entier $k \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq k$, on ait $I_{n+k} = I_k I_n$. Considrons la filtration $h = (H_n)$ de A dfinie par:

$$H_n = \begin{cases} I_{k-1} \text{ si } 1 \leq n \leq k-1 \\ \quad I_n \text{ pour } n \geq k \end{cases}$$

On a alors pour tout $n \geq k$, $I_{n+k} = I_k H_n$, et par consquent h est une rduction de f.

Comme f est basique, on en dduit que $I_n = I_k$ pour tout n.

D'autre part, $I_{2k} = I_k^2$ donc $f = f_I$ avec $I = I_k$ et $I^2 = I$.

Rciproquement, si f est $I - adique$ avec $I = I^2$ et si $h = (H_n)$ est une rduction de f, on a pour tout $n \geq 1$, $I = I^n$ et $H_n \subseteq I$.

De plus h tant une rduction de f, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $I = I^{k+n} = I^k H_n \subseteq H_n \subseteq I$ pour tout $n \geq k$.

D'o $\forall n \geq k$,$I = H_n$. Or pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq k-1$, on a $H_k = I \subseteq H_n \subseteq I$.

D'o $H_n = I$, $f_I = h$ et f_I est basique.

Concernant la question (b), nous avons obtenu le rsultat suivant [2]:

Une filtration noethrienne $f = (I_n)$ de l'anneau noethrien A admet une rduction minimale si et seulement s'il existe un entier $r \geq 1$ tel que I_r soit un idal idempotent.

Il est facile de voir que la condition est ncessaire. Supposons en effet que $h = (H_n)$ soit une rduction minimale de f. Alors f est noethrienne et basique et d'aprs le rsultat prcdent nonce plus haut, il existe un idal idempotent I tel que $h = f_I$.

Or l'une des caractrisations de rduction d'une filtration sur une autre assure l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que $I_n^2 = I_n H_n = I_n I$ pour tout $n \geq N$.

De plus, f tant noethrienne, elle est fortement $A.P.$ et il existe un entier $k \geq N$ tel que $I_{nk} = I_k^n$ pour tout entier n.

Ainsi $I_{2k} = I_k^2 = I_k I$ et $I_{2k}^2 = I_{2k} I = I_k I^2 = I_k I = I_{2k}$ donc I_{2k} est idempotent.

La rciproque est plus technique et nous renvoyons aux rfrences cites plus haut. La preuve de la rciproque demande l'utilisation de critres assurant que l'anneau de Rees d'une filtration g soit entier (respectivement soit une algbre de type fini) sur l'anneau de Rees d'une filtration f. Or, suivant les rfrences, les auteurs ont utilis soit l'anneau de Rees classique soit l'anneau de Rees gnralis associ une filtration pour dfinir et caractriser la dpendance intgrale ou la dpendance intgrale forte d'une filtration sur une autre. Pour montrer que les proprits utilises, portant tantôt sur l'un ou l'autre des anneaux de Rees sont quivalentes, nous avons montr les rsultats suivants [2] :

tant donnes deux filtrations f, g de A vrifiant $f \leq g$, on a:

(i) $R(A, g)$ est entier sur $R(A, f) \Longleftrightarrow$ R(A,g) est entier sur R(A,f)

(ii) $R(A, g)$ est entier sur $R(A, f)-$ algbre de type fini $\Longleftrightarrow$ R(A,g) est entier sur R(A,f)-algbre de type fini

Concernant la noethrianit des anneaux de Rees, une preuve astucieuse de l'quivalence entre la noethrianit de l'anneau $R(A, f)$ et celle de l'anneau $R(A, f)$ pour toute filtration f de l'anneau noethrien A a t donne par K.Kurano. Nous l'exposons brivement ici. Il est clair que si l'anneau de Rees de f est noethrien, il en est de même de son anneau de Rees gnralis. La rciproque est donc triviale. Par consquent, l'anneau de Rees $R(A, f)$ de f est noethrien.