Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et propriétés nécessaires pour la compréhension des autres chapitres.

1.1 Notion de filtration sur un anneau

Définition 1.1

Soit A un anneau commutatif unitaire. On appelle filtration de A toute famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'idéaux de A telle que :

i) $I_0 = A$;

ii) $I_{n+1} \subseteq I_n$, pour tout n dans $\mathbb{Z}$;

iii) Pour tous p, q appartenant à $\mathbb{Z}$, $I_pI_q \subseteq I_{p+q}$.

Conséquence : $I_n = A$ pour tout $n \leq 0$.

Exemple 1.1

1) Soit I un idéal de l'anneau A, la famille $f = (I^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration de A. Cette filtration est dite filtration I-adique de A. Elle est notée f_I.

2) Si $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration de l'anneau A alors pour tout $k \geq 1$, $f^{(k)} = (I_{kn})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration de A.

3) Si $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration de l'anneau A alors $f^k = (I_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration.

4) $f_A = (\ldots, A, A, \ldots)$ et $f_0 = (\ldots, A, A, (0), (0), \ldots)$ sont aussi des filtrations de l'anneau A.

L'ensemble des filtrations de l'anneau A est noté $\mathcal{F}(A)$. $\mathcal{F}(A)$ est ordonné par $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ si $I_n \subseteq J_n$ pour deux éléments f,g de $\mathcal{F}(A)$.

Opération sur $\mathcal{F}(A)$

Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux filtrations sur l'anneau A.

- Le produit de f et g est la filtration $fg = (I_nJ_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

- La somme de f et g est la filtration $f + g = \left(\sum_{k=0}^{n} I_kJ_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.

- L'intersection de f et g est la filtration $f \cap g = (I_n \cap J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

1.2 Notion de filtration sur un module

Définition 1.2

Soit M un A-module. On appelle filtration de M toute famille $\Phi = (N_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-modules de M vérifiant

i) $N_0 = M$,

ii) $N_{n+1} \subseteq N_n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A et la filtration $\Phi = (N_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de M sont dites compatibles si

iii) pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, $I_mN_n \subseteq N_{m+n}$.

L'ensemble des filtrations du module M est noté $\mathcal{F}(M)$. $\mathcal{F}(M)$ est ordonné par $\Phi = (N_n)_{n\in\mathbb{Z}} \leq \Psi = (V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ si $N_n \subseteq V_n$ pour deux éléments Φ,Ψ de $\mathcal{F}(M)$.

Opération sur $\mathcal{F}(M)$

Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de A, et $\Phi = (N_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\Psi = (V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux filtrations de M.

- Le produit externe de f et Φ est la filtration $f\Phi = (I_nN_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de M.

- L'intersection de Φ et Ψ est la filtration $\Phi \cap \Psi = (N_n \cap V_n)$ de M.

Exemple 1.2 *(Filtration induite et filtration quotient).*

1) Soient B un anneau, A un sous-anneau de B. Soit $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de B. On pose $I_n = J_n \cap A$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. f est une filtration de A dite induite par g sur A.

2) Soit I un idéal de A et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de A. On pose $g = (J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $J_n = \frac{I_n+I}{I}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. g est une filtration de A/I. Elle est appelée filtration quotient et est notée $g = \frac{f}{I}$.

1.3 Anneau de Rees d'une filtration

Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de A. On appelle anneau de Rees de la filtration f, l'anneau gradué $\mathrm{R}(A, f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_nX^n$ où X est une indéterminée et $I_nX^n = \{aX^n : a \in I_n\}$ pour tout $n \geq 0$. $\mathrm{R}(A, f)$ est un sous anneau gradué de l'anneau des polynômes $A[X]$.
On appelle anneau de Rees généralisé de la filtration f de A, l'anneau gradué $\mathcal{R}(A, f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_nX^n$. Posons $u = \frac{1}{X}$, alors $\mathcal{R}(A, f)$ est un sous anneau gradué de $A[X, u]$.

En particulier si I est un idéal de A et si $f = f_I$, alors $\mathrm{R}(A, f_I) = \mathrm{R}(A, I) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^nX^n$.

Proposition 1.1
Si $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration de A, alors pour tout n, $u^n\mathcal{R}(A, f) \cap A = I_n$.

B.K.P

1.4 Classification et comparaison des filtrations

Dans cette partie nous allons rappeler les définitions de certaines filtrations particulières et donner quelques propriétés qui les lient.

1.4.1 Filtration I-adique, filtration I-bonne

Définition 1.3

- *Soient I un idéal de l'anneau A, $f = (I^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration sur l'anneau A. Cette filtration est appelée filtration I-adique de l'anneau A.*

- *$f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite I-bonne si*

i) Pour tout $n \geq 0$, $I.I_n \subseteq I_{n+1}$;

ii) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $I.I_n = I_{n+1}$.

Conséquence :

$I.I_{n_0} = I_{n_0+1}$, en multipliant par I on a $I^2 I_{n_0} = I.I_{n_0+1}$ et $I.I_{n_0+1} = I_{n_0+2}$. Par récurrence on obtient $I^n I_{n_0} = I_{n_0+n}$, pour tout $n \geq 1$.

Proposition 1.2

Toute filtration I-adique est I-bonne.

1.4.2 Filtration approximable par des puissances d'idéaux

Définition 1.4

Soit A un anneau commutatif unitaire. Une filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A est dite AP (approximable par des puissances d'idéaux) s'il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :

i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = 1$;

ii) Pour tous m, n appartenant à $\mathbb{N}$, $I_{k_n m} \subseteq I_n^m$.

La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite fortement AP (fortement approximable par des puissances d'idéaux), s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout n

appartenant à $\mathbb{N}$, $I_{nk} = I_k^n$.
Ainsi si $p = qk$ alors $I_{pm} = (I_p)^n$, pour tous p, q appartenant à $\mathbb{N}$.
Si on pose $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{Z}}$ alors f est fortement AP si et seulement si il existe $k \geq 1$ tel que $f^{(k)} = f_{I_k}$. Dans ce cas f est fortement AP de rang k.

Exemple 1.3

1) Soit $A = k[X]$ où k est un corps, soit $I = (X)$, soit $f = (I_n)$ telle que $I_{2n} = I^n$ et $I_{2n+1} = I^{n+1}$. On vérifie que f est une filtration de A. $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration fortement AP car : $f = (A, I, I, I^2, I^2, I^3, I^3, ...) = (A = I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, ...)$ et on voit que $I_{2n} = I_2^n$ pour tout n, donc f est fortement approximable par des puissances d'idéaux de rang 2.

2) Les filtrations I-adiques et les filtrations I-bonnes font partie des filtrations fortement approximables par des puissances d'idéaux.

1.4.3 Filtration noethérienne

Définition 1.5
Soient A un anneau commutatif unitaire et $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de A.

1) f est dite noethérienne si l'anneau de Rees généralisé $\mathcal{R}(A, f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_n X^n$ est noethérien.

Cette terminologie est introduite par D. Rees [22].

2) f est dite fortement noethérienne si A est noethérien et si il existe un entier $k \geq 1$ tel que $I_m I_n = I_{m+n}$ pour tous $m, n \geq k$ (voir [13]).

De tout ce qui précède on a les résultats suivants :

Proposition 1.3
Dans tout anneau commutatif unitaire A on a les implications suivantes :

$$f\ I-\text{adique} \Rightarrow f\ I-\text{bonne} \Rightarrow f\ \text{fortement}\ AP \Rightarrow f\ AP,$$

où I est un idéal de l'anneau A et f une filtration sur A.

Dans tout ce qui va suivre nous allons considérer l'anneau A noethérien.

Proposition 1.4
Soient A un anneau noethérien et I un idéal de A. Si f est I-bonne, alors f est fortement noethérienne.

En outre il est facile de voir que toute filtration fortement noethérienne est noethérienne. Par ailleurs chaque filtration noethérienne est fortement AP (voir [17,2]). Ainsi dans un anneau noethérien A nous avons le diagramme suivante, pour toute filtration f sur A :

$$\begin{array}{ccccccc} f\ I\text{-adique} & \Longrightarrow & f\ I\text{-bonne} & \Longrightarrow & f \text{ fortement AP} & \Longrightarrow & f \text{ AP} \\ & & \Downarrow & & & \Updownarrow & \\ & & f \text{ fortement noethérienne} & \Rightarrow & & f \text{ noethérienne} & \end{array}$$

1.5 Exemples [5]

Soit $A = k[X]$, où k est un corps et X une indéterminée. A est alors un anneau noethérien.

1) Soit p un entier ≥ 2 et soit $f = (I_n)$ où $I_0 = A$, et

$$I_n = \begin{cases} (X^n), & \text{si} \quad n \geq p+1, \\ (X^p), & \text{si} \quad 1 \leq n \leq p. \end{cases}$$

Montrons que f est une filtration de A.

- $I_0 = A$ par hypothèse.

- $\forall n \geq 0 \quad I_{n+1} \subseteq I_n$ car :

- Si $n \geq p+1 \quad I_n = (X^n)$ ainsi $n+1 \geq p+1$ et $I_{n+1} = (X^{n+1}) = (X)(X^n) \subseteq (X^n) = I_n$.

- Si $1 \leq n = p$ alors $I_n = (X^p)$, et $n+1 > p$ alors $I_{n+1} = (X^{n+1})$ ainsi $I_{n+1} = (X^{n+1}) \subseteq (X^n) = (X^p) = I_n$ et $I_{n+1} \subseteq I_n$.

- Si $1 \leq n < p$ alors $I_n = (X^p)$, et $n+1 \leq p$ alors $I_{n+1} = (X^p)$ ainsi $I_{n+1} = (X^p) = I_n$.

- $n = 0$, $n+1 = 1$ et $I_0 = A$ et $I_1 = (X^p)$.Comme $I_1 = (X^p) \subseteq A = I_0$, alors $I_{n+1} \subseteq I_0$.

Dans tous les cas $I_{n+1} \subseteq I_n \quad \forall n \geq 0$.

- $\forall n \geq 0, \quad \forall m \geq 0 \quad I_n I_m \subseteq I_{n+m}$.

- Si $n \geq p+1$ et $m \geq p+1$, alors $I_n = (X^n)$ et $I_m = (X^m)$, $I_n I_m = (X^{n+m}) = I_{n+m}$ car $n+m \geq p+1$.

- Si $n \geq p+1$ et $m = p$, $I_n = (X^n)$ et $I_m = (X^p)$, ainsi $I_n I_m = (X^n)(X^p) = (X^{n+p}) = I_{n+m}$ car $n+p = n+m \geq p+1$.

- Si $n \geq p+1$ et $1 \leq m < p$ alors $I_n = (X^n)$, $I_m = (X^p)$ ainsi $I_n I_m = (X^{n+p}) \subseteq (X^{n+m}) = I_{n+m}$ car $n+m > p+1$ et $p > m$.

- Si $n = p$ et $m = p$, alors $I_n = (X^p)$ et $I_m = (X^p)$, ainsi $I_n I_m = (X^{n+m}) = I_{n+m}$.

- Si $1 \leq n < p$ et si $1 \leq m < p$, alors $I_n = (X^p)$ et $I_m = (X^p)$ ainsi $I_n I_m = (X^{p+p}) = I_{p+p} \subseteq I_{n+m}$ à cause de la décroissance de (I_n) et du fait que $p+p \geq p+1$.

Dans tous les cas $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$, $\forall n \geq 0$ et $\forall m \geq 0$.
On conclut alors que $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration de A.

Montrons que $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fortement noethérienne.

Posons $k = p+1$, pour tous $n \geq p+1$, $m \geq p+1$, $n+m \geq p+1$ et on a $I_n I_m = (X^n)(X^m) = (X^{n+m}) = I_{n+m}$ donc $I_n I_m = I_{n+m}$ et puisque l'anneau $A = k[X]$ est noethérien, on conclut que la filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fortement noethérienne. Donc f est noethérienne, ce qui implique que f est fortement approximable par des puissances d'idéaux .

2) Soit $f = (I_n)$ où $I_0 = A$ et $I_n = (X^{n+1})$ pour $n \geq 1$.

- Montrons que f est une filtration sur A.

- $I_0 = A$.

- $I_{n+1} = (X^{n+1+1}) \subseteq (X^{n+1}) = I_n$, d'où $I_{n+1} \subseteq I_n$ $\forall n \geq 1$.

- Pour tous $n, m \geq 0$ on a $I_n = (X^{n+1})$, $I_m = (X^{m+1})$ donc $I_nI_m = (X^{n+1+m+1}) = (X^{(n+m+1)+1}) \subseteq (X^{(n+m)+1}) = I_{n+m}$ donc $I_nI_m \subseteq I_{n+m}$ $\forall n, m \geq 0$, d'où f est une filtration de A.

• f est une filtration approximable par des puissances d'idéaux car : Posons $k_n = n+1$, $\forall n \geq 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n} = 1$ et $I_{k_n m} = (X^{k_n m}) = (X^{(n+1)m}) = (X^{n+1})^m = (I_n)^m = I_n^m$, donc $I_{k_n m} = I_n^m$ $\forall n, m \geq 0$.

En conclusion f est AP.

3) Soit $I = (X)$ $\quad I_n = \begin{cases} I^n, & \text{si } n \text{ est pair.} \\ I^{n+1}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Soit $f = (I_n)_{n \geq 0}$, f est une filtration sur A. En effet :

- $I_0 = I^0 = A$.

- Si n est pair, alors $n+1$ est impair. $I_{n+1} = I^{n+2} = (X^{n+2}) \subseteq (X^{n+1}) \subseteq (X^n) = I_n$.

Si n est impair, alors $n+1$ est pair. $I_{n+1} = I^{n+1} = I_n$ car n est impair d'où $I_{n+1} = I_n$.

On voit que quelle que soit la parité de n, $I_{n+1} \subseteq I_n$ pour tout $n \geq 0$.

• Montrons que pour tous $n, m \geq 0$ $I_nI_m \subseteq I_{n+m}$.

- Si n est pair et m pair, alors $n+m$ est pair et on a $I_nI_m = I^nI^m = I^{n+m} = I_{n+m}$.

- Si n est pair et m est impair, alors $n+m$ est impair, $I_nI_m = I^nI^{m+1} = I^{(n+m)+1} = I_{n+m}$.

- Si n est impair et m est impair, alors $n+m$ est pair, $I_nI_m = I^{n+1}I^{m+1} = I^{n+m+1+1} \subseteq I^{n+m} = I_{n+m}$.

Dans tous les cas $I_nI_m \subseteq I_{n+m}$ pour tous $n, m \geq 0$.
Donc $f = (I_n)$ est une filtration sur A.

De plus f est fortement approximable par des puissances d'idéaux. On voit que $I_0 = A$, $I_1 = I^2$, $I_2 = I^2$, $I_3 = I^4$, $I_4 = I^4$, $I_5 = I^6, \dots$.
Posons $k = 2$ ainsi $\forall n \geq 0$ $I_{kn} = I_{2n} = (I^2)^n = (I_2)^n = I_k^n$, donc f est fortement AP dans l'anneau $A = k[X]$ qui est noethérien donc f est noethérien.
On conclut que f est une filtration noethérienne sur A.