



République de Côte d'Ivoire
Union – Discipline – Travail

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique



*Unité de Formation et de Recherche
Sciences Fondamentales et Appliquées*

LMI/MF/

Année universitaire 2023 /2024

MEMOIRE DE MASTER

MENTION: MATHEMATIQUES

OPTION : ALGEBRE COMMUTATIVE ET CRYPTOGRAPHIE

SPECIALITE : THEORIE DES FILTRATIONS

PRESENTE PAR

KABLAM EDJABROU ULRICH BLANCHARD

THEME :

**DEPENDANCE INTEGRALE, REDUCTION
ET FILTRATIONS BONNES**

DIRECTEUR de Mémoire : M. ASSANE ABOULAYE, Maître de Conférences, Université Nangui Abrogoua

Encadrant Scientifique : M. BROU KOUADJO PIERRE, Maître-Assistant, Université Nangui Abrogoua

Soutenu le **Juillet 2024** à l'Université NANGUI ABROGOUA

devant le jury composé de

M. DIAGANA YOUSOUF	Professeur Titulaire, UNA	Président
M. ASSANE ABDOULAYE	Maître de Conférences, UNA	Directeur de mémoire
M. BROU KOUADJO PIERRE	Maître-Assistant, UNA	Encadrant scientifique

Dédicace

Je dédie ce travail

À la mémoire de mon père KABLAM Oi Kablam Simon,
que ce travail soit un témoignage de ma reconnaissance pour tout ce qu'il a fait pour
moi et de mon attachement indéfectible à ses principes et règles.

À ma mère KASSI Ettien Cécile,
qui m'a inculqué des valeurs de persévérance, d'honnêteté et de bonne moralité.
À mes frères et sœurs KABLAM Koua Marc Leroy, KABLAM Ettien Jean-Michel,
KABLAM Aser Daniel, KABLAM Marie Andrée Chantale, KABLAM Adjoua
Hortense Radija et à mon fils KABLAM Brou Régis Emmanuel Mael,
pour leur soutien tout au long de mon parcours.

À mes amis ASSOVIÉ Boka Gédéon Ruben, KOUAME Kouadio Timothé,
KOUADIO Kouadio Fabrice, AMADOU Hari et N'GORAN Mouroua Sophia,
pour leurs encouragements et leurs conseils qui m'ont été d'une immense utilité.

À tous ceux que j'aime.
À tous ceux qui m'aiment.

Remerciements

C'est avec un immense plaisir et une vive émotion que je m'apprête à soutenir mon projet de mémoire de MASTER. Je me donne, à cet effet, au délicat exercice des remerciements.

De prime abord, je rends gloire et louange à Dieu, Seigneur de l'univers, Maître de la destinée, pour la grâce qu'il m'a accordée à pouvoir garder le moral haut le long de mon parcours en dépit de nombreuses péripéties.

La réalisation de ce mémoire est le fruit de plusieurs années de formation et de dévouement. Par ailleurs, ce travail a été possible grâce au soutien et à la contribution de nombreuses personnes que je remercie.

Je souhaite adresser une note spéciale d'appréciation à mon Directeur de mémoire, Monsieur ASSANE Abdoulaye, Maître de Conférences à l'Université Nangui Abrogoua. Il n'a ménagé aucun effort pour donner forme à ce travail. Vos conseils éclairés et vos orientations ont été d'une grande valeur tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Mes remerciements et ma profonde gratitude s'étendent également aux responsables du Laboratoire de Mathématiques et Informatiques qui, par leurs enseignements et leurs discussions, ont influencé ma progression académique.

J'exprime une reconnaissance infinie et mes sincères remerciements à mon encadrant scientifique et enseignant, Monsieur BROU Kouadjo Pierre, Maître Assistant à l'Université Nangui Abrogoua. Ses encouragements, ses conseils, sa disponibilité et ses critiques objectives ont été d'une aide précieuse durant de la réalisation de ce travail. Je souhaite également remercier le Professeur DIAGANA Youssouf, Directeur du Laboratoire de Mathématiques et Informatique de l'UFR-SFA (Unité de Formation et de Recherche Sciences Fondamentales et Appliquées) de l'Université Nangui Abrogoua. Il a été une source d'inspiration pour nous et nous a transmis un véritable amour pour les Mathématiques.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Monsieur BOMISSO Jean-Marc, Maître Assistant à l'Université Nangui Abrogoua, pour ses conseils et ses critiques lors de l'élaboration de ce travail, ainsi que pour son soutien et son assistance envers nous, étudiants de Master, tout au long de notre parcours.

Je souhaite également remercier les membres du jury, notamment Monsieur KPATA Akon Berenger, Maître de Conférences à l'Université Nangui Abrogoua, pour l'honneur qu'il nous fait en faisant partie de notre jury, ainsi que le professeur DIAGANA Youssouf pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également au Directeur de l'Unité de Formation et de Recherche Sciences Fondamentales et Appliquées (UFR-SFA), Monsieur KRE N'Guesan Raymond, Professeur Titulaire, au Vice Doyen de l'UFR-SFA, le Professeur BENIE Anoubilé, ainsi qu'à la secrétaire principale, Madame KOUASSI Bienvenue, qui œuvrent inlassablement pour le bien-être des étudiants de l'UFR-SFA.

Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude envers mes amis et condisciples de parcours depuis mes débuts à l'Université Nangui Abrogoua.

Résumé

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous penchons sur une étude approfondie de la dépendance intégrale et de la réduction dans le contexte des filtrations I-adiques, en reprenant les travaux déjà publiés par divers chercheurs dans le domaine de la théorie des filtrations.

Notre approche consiste à généraliser ces concepts en examinant la dépendance et la réduction au sein de filtrations bonnes, afin d'explorer les subtilités conceptuelles qui y sont associées. En reprenant des travaux antérieurs, notre but principal est d'enrichir les connaissances dans ce domaine en mettant en évidence des structures et des relations qui n'ont pas encore été pleinement explorées, tout en établissant des connexions conceptuelles entre des idées en apparence distinctes.

En somme, notre démarche intellectuelle vise à éclairer les aspects complexes de la dépendance intégrale et de la réduction dans le contexte des filtrations I-adiques, dans le but de mieux comprendre l'ampleur de ces phénomènes et d'apporter une contribution significative à la compréhension globale des filtrations en mathématiques.

Mots-clés : Dépendance intégrale, Réduction, Filtration bonne.

Abstract

In this dissertation, we focus on an in-depth study of integral dependence and reduction in the context of I -adic filtrations, taking up work already published by various researchers in the field of filtrations theory.

Our approach is to generalize these concepts by examining dependence and reduction within good filtrations, in order to explore the conceptual subtleties associated with them. Building on previous work, our main aim is to enrich knowledge in this field by highlighting structures and relationships that have not yet been fully explored, while establishing conceptual connections between seemingly distinct ideas.

In sum, our intellectual approach aims to shed light on the complex aspects of integral dependence and reduction in the context of I -adic filtrations, with the aim of better understanding the scope of these phenomena and making a significant contribution to the overall understanding of filtrations in mathematics.

Keywords : Integral dependence, Reduction, Good filtration.

Table des matières

Remerciements	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Introduction	1
Chapitre 1: GÉNÉRALITÉS	3
1.1 Relation d'équivalence, groupe et sous-groupe	3
1.1.1 Relation d'équivalence	3
1.1.2 Relation d'ordre	3
1.1.3 Groupe	4
1.1.4 Sous-groupe	4
1.2 Anneau, Corps, Espace vectoriel et Morphisme d'anneaux	5
1.2.1 Anneau	5
1.2.2 Corps	5
1.2.3 Espace vectoriel	6
1.2.4 Morphisme d'anneaux	7
1.2.5 Anneau gradué	7
1.3 Module	8
1.4 Idéal	9
1.4.1 Idéal premier	9
1.4.2 Idéal primaire	9
1.4.3 Idéal maximal	9
1.4.4 Radical d'un idéal	10
1.5 Filtrations	10
1.5.1 Filtration sur un anneau	10
1.5.2 Filtration sur un module	11
1.6 Anneaux gradués associés à une filtration	11
1.6.1 Anneau de Rees d'une filtration	11
1.6.2 Anneau gradué d'une filtration	12
1.6.3 Quelques exemples de filtration	13
1.6.4 Classification des filtrations sur un anneau	14

Chapitre 2: DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FIL-	
TRATION I-BONNE	16
2.1 Dépendance intégrale	16
2.1.1 Dépendance intégrale sur les anneaux	16
2.1.2 Dépendance intégrale sur un idéal	22
2.2 Réduction d'un idéal	24
2.2.1 Définitions et propriétés	24
2.2.2 Réduction minimale d'un idéal	29
Chapitre 3: DÉPENDANCE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES	31
3.1 Dépendance intégrale de filtration	31
3.2 Clôture intégrale d'une filtration	32
3.3 Réduction d'une filtration	35
3.3.1 Réduction au sens de Okon-Ratliff	37
3.3.2 Réduction au sens de Dichi-Sangaré	39
3.4 Filtrations f-bonnes	42
Conclusion	45
Bibliographie	47

Introduction

Les notions de dépendance intégrale, de réduction et de filtrations bonnes constituent des axes cruciaux de l'Algèbre Commutative dans le domaine des mathématiques. Leur exploration minutieuse offre une clarté conceptuelle quant aux propriétés structurales des anneaux commutatifs.

La notion d'élément entier sur un idéal I d'un anneau noethérien A a été introduit par Prüfer [2] dans les années 1930. Un élément $x \in A$ est dit entier sur l'idéal I de A s'il vérifie une équation de la forme $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ où a_j appartient à I^j pour tout entier j . La clôture intégrale de l'idéal I est l'idéal I' des éléments $x \in A$ qui sont entiers sur I . L'idéal J de A est dit entier sur l'idéal I si $J \subseteq I'$.

Northcott D.G. et Rees D. dans [4] ont défini dans un anneau local noethérien la notion de réduction d'un idéal sur un autre qui est voisine de la notion d'élément entier sur un idéal introduit par Prüfer. L'idéal I est une réduction de l'idéal J si I est contenu dans J et s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $J^N = IJ^{N-1}$. Les réductions de l'idéal J sont exactement les idéaux de I contenus dans J et ayant la même clôture intégrale que J .

Une filtration de l'anneau A est une suite $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'idéaux de A , décroissante pour l'inclusion et vérifiant $I_0 = A$ et $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$. On note $\mathbb{F}(A)$ l'ensemble des filtrations de l'anneau A . Soit I un idéal de A , une filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dite I -bonne si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $II_n \subseteq I_{n+1}$ et s'il existe k un entier tel que pour tout $n \geq k$, $II_n = I_{n+1}$. Les filtrations les plus courantes sont les filtrations *adiques*. En particulier, toute filtration I -adique est I -bonne pour tout I idéal de A .

Les filtrations bonnes se sont révélées être des structures particulièrement adaptées à l'analyse des propriétés des anneaux locaux, ouvrant ainsi des horizons nouveaux dans la compréhension des propriétés locales des structures algébriques.

En embrassant ce panorama historique et en soulignant les contributions majeures des éminents mathématiciens, cette étude aspire à expliciter les résultats de H. Dichi dans [2] qui constitue une contribution significative à l'édifice des connaissances, en poursuivant le développement et la généralisation des notions de dépendance intégrale, de réduction, et de filtrations bonnes.

Malgré les avancées significatives réalisées dans l'étude des notions de dépendance intégrale, de réduction, et de filtrations bonnes, des questionnements demeurent quant à leur généralisation et à leur interconnexion dans des cadres mathématiques diversifiés. Comment étendre de manière rigoureuse les résultats obtenus dans le contexte restreint de la filtration I -adique à des filtrations de nature plus générale, telles que les filtrations bonnes? Comment ces notions interagissent-elles dans des environnements mathématiques variés, et quelles applications peuvent en découler dans des domaines tels que la géométrie algébrique ou encore la théorie des nombres?

Afin de répondre à ces interrogations, notre démarche s'articulera autour de trois axes majeurs. Dans un premier temps, nous plongerons dans l'étude approfondie de la

dépendance intégrale, en explorant ses origines historiques et en analysant ses implications dans le contexte des anneaux commutatifs. Nous poursuivrons ensuite notre exploration en examinant la réduction au sein de la filtration I-adique, avant d'élargir notre perspective à des filtrations bonnes, mettant en lumière les liens conceptuels et les différences inhérentes à ces contextes variés. En embrassant cette démarche, nous aspirons à contribuer à l'enrichissement des connaissances dans le domaine de l'algèbre commutative, tout en offrant des perspectives nouvelles sur des concepts fondamentaux de la discipline.

Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS

Ce chapitre revêt la forme d'une rétrospective, visant à revisiter et consolider diverses définitions dans [5] et propositions évoquées au sein des Unités d'Enseignement (U.E.) consacrées à l'Algèbre Commutative et à la Théorie des Filtrations. L'ensemble des résultats présentés dans ce chapitre s'enracine dans [6]. Leur maîtrise s'avère incontournable pour une appréhension éclairée des sections à venir. Cependant, il convient de préciser que les démonstrations des propositions énoncées dans ce chapitre ne seront exposées que lorsqu'elles s'avéreront nécessaires.

Dans l'ensemble de ce mémoire, sauf mention contraire, les anneaux considérés sont supposés **commutatifs et unitaires**.

1.1 Relation d'équivalence, groupe et sous-groupe

1.1.1 Relation d'équivalence

Définition 1.1. On appelle relation d'équivalence sur un ensemble non vide E , une relation \mathcal{R} sur E vérifiant les conditions suivantes :

- a) $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ (réflexivité)
- b) $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$ (symétrie)
- c) $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y) \text{ et } (y\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}z)$ (transitivité)

La partie $C_x = \{y \in E, x\mathcal{R}y\}$ de E est appelée la classe d'équivalence modulo \mathcal{R} de $x \in E$. Les classes d'équivalence constituent une partition de E . Notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . La famille $(C_x)_{x \in E}$ constitue un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ appelé l'ensemble quotient de E par \mathcal{R} . On le note E/\mathcal{R} . Dans la suite, la classe de $x \in E$ sera vue essentiellement comme élément de ce nouvel ensemble E/\mathcal{R} et sera notée \bar{x} .

1.1.2 Relation d'ordre

Définition 1.2. On appelle relation d'ordre sur un ensemble non vide E , une relation \mathcal{R} sur E vérifiant les conditions suivantes :

- a) $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ (réflexivité)
- b) $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \iff y = x$ (anti-symétrie)
- c) $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}z) \implies (x\mathcal{R}z)$ (transitivité)

L'ensemble (E, \mathcal{R}) s'appelle alors ensemble ordonné. L'ordre est dit total si deux éléments sont toujours comparables (on dit aussi que l'ensemble est totalement ordonné). Dans le cas contraire, il est dit partiel.

1.1.3 Groupe

Définition 1.3. Soit G un ensemble non vide.

On dit que (G, \star) est un groupe si \star est une loi de composition qui a tout élément de G associe un élément dans G vérifiant :

(i) La loi \star est associative

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star a, \forall (a, b, c) \in G^3,$$

(ii) G possède un élément neutre e

$$\exists ! e \in G, e \star a = e = a \star e, \forall a \in G,$$

(iii) Tout élément a de G admet un symétrique

$$a \star b = e = b \star a, \forall (a, b) \in G^2.$$

(vi) Si de plus la loi \star est commutative,

$$a \star b = b \star a, \forall (a, b) \in G^2,$$

On dit que le groupe (G, \star) est abélien ou commutatif.

1.1.4 Sous-groupe

Définition 1.4. Soit (G, \star) un groupe.

On dit que $H \subset G$ est un sous-groupe de G si et seulement si :

- (i) $e \in H$, où e est l'élément neutre de G
- (ii) La partie H est stable par la loi :

$$\forall (a, b) \in H^2, a \star b \in H$$

(iii) $\forall a \in H, a^{-1} \in H$.

1.2 Anneau, Corps, Espace vectoriel et Morphisme d'anneaux

1.2.1 Anneau

Définition 1.5. Soit A un ensemble non vide muni de deux lois de compositions interne, $(A, +, \times)$. On dit que $(A, +, \times)$ est un anneau si :

- (i) $(A, +)$ est un groupe abélien
- (ii) La loi \times est distributive par rapport à la loi $+$
- (iii) La loi \times est associative.

L'anneau est dit commutatif si la loi \times est commutatif.

Exemple 1.1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ et $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ sont des anneaux commutatifs unitaires.

Remarque 1.1. L'élément neutre de la loi $+$ dans A est noté 0_A . Si de plus il existe un élément neutre pour la loi \times dans A , cet élément est appelé l'élément unité et est noté 1_A . On dit alors que l'anneau A est unitaire.

Définition 1.6. Soient $(A, +, \times)$ un anneau et B un sous-ensemble de A . On dit que B est un sous-anneau de A si :

- (i) $1_A \in B$,
- (ii) Pour tous $x, y \in B$, $x - y \in B$,
- (iii) Pour tous $x, y \in B$, $xy \in B$.

Proposition 1.1. (Anneau noethérien)

Soient A un anneau commutatif unitaire. On dit que A est un anneau noethérien si l'une des trois assertions équivalentes sont vérifiées :

- (i) Tout idéal de A est de type fini,
- (ii) Toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire,
- (iii) Toute famille non vide d'idéaux de A admet un élément maximal pour l'inclusion.

1.2.2 Corps

Définition 1.7. On appelle **corps** (commutatif), la donnée d'un ensemble \mathbb{K} et de deux lois de composition interne l'une notée $+$ et l'autre multiplicative notée \times sur \mathbb{K} telles que :

1. $+$ est un groupe
2. \times vérifie (i), (ii), (iii) pour tout élément **non nul** et distributive (à droite et à gauche) par rapport à la loi $+$ c'est-à-dire :

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c \text{ et } c \times (a + b) = c \times a + c \times b \quad \forall (a, b, c) \in \mathbb{K}^3.$$

3. \times est commutative.

Exemple 1.2. \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} sont des corps.

1.2.3 Espace vectoriel

Définition 1.8. Soit \mathbb{K} un corps et soit E un ensemble (non vide). On appelle **loi externe** sur E la donnée d'une application définie sur le produit cartésien $\mathbb{K} \times E$ et à valeur dans E .

Définition 1.9. Soit \mathbb{K} un corps. On dit qu'un ensemble E est un \mathbb{K} -espace vectoriel lorsqu'il est muni d'une loi de composition interne commutative, notée $+$ et d'une loi externe de \mathbb{K} , notée \times , telle que :

1. $(E, +)$ est un groupe additif d'élément neutre noté 0_E ou 0 .
2. Les lois $+$ et \times sont compatibles entre elles et avec les lois de la structure de corps de \mathbb{K} . C'est-à-dire qu'elle vérifient :
 - (a) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \lambda \times (u + v) = \lambda \times u + \lambda \times v$
 - (b) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda \times \mu) \times u = \lambda \times (\mu \times u)$
 - (c) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \times u = (\lambda \times u) + (\mu \times u)$
 - (d) $\forall u \in E, 1_{\mathbb{K}} \times u = u$

Exemple 1.3. Voici des exemples d'espaces vectoriels :

1. $\{0_E\}$ l'espace vectoriel réduit à 0, sur n'importe quel corps \mathbb{K} .
2. Le corps \mathbb{K} lui-même est un espace vectoriel sur est \mathbb{K} .
3. L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ en une indéterminée X et à coefficients dans \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Remarque 1.2. La notion d'espace vectoriel : pour en donner un aperçu intuitif ce sont des généralisations de l'ensemble \mathbb{R}^n (produit cartésien de \mathbb{R} avec lui-même n fois), et des opérations linéaires sur cet ensemble. Plus précisément un espace vectoriel est défini à partir d'un ensemble E . Les éléments de E sont appelés **vecteurs**. On associe implicitement à E un **corps** de base noté \mathbb{K} dont les éléments sont appelés les **scalaires** (pour \mathbb{R}^n le corps \mathbb{K} est égal à \mathbb{R}). On dit alors que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel si on peut effectuer dans E des opérations \mathbb{K} -linéaires, c'est-à-dire si on sait définir le vecteur $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ à partir des données de deux vecteurs u et v et de deux scalaires λ et μ .

Définition 1.10. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **linéaire** si elle est compatible avec les structures de \mathbb{K} -espaces sur E et sur F . Autrement dit si f vérifie :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(\lambda \times u) = \lambda \times f(u)$
2. $\forall u, v \in E, f(u + v) = f(u) + f(v)$

Remarque 1.3. La notion d'applications linéaires entre espaces vectoriels. Ce sont des applications entre deux espaces vectoriels, disons E et F , sur un même corps de base, disons \mathbb{K} . Pour être appelées linéaires, ces applications doivent être compatibles avec les opérations \mathbb{K} -linéaires. La définition de cette notion est très simple. Mais son utilisation est vraiment au cœur de l'algèbre linéaire. On peut même dire que toute l'algèbre consiste à manipuler des applications compatibles avec les structures algébriques (on parle de "morphismes" dans d'autres contextes)

1.2.4 Morphisme d'anneaux

Définition 1.11. Soient deux anneaux (A, \star, \circ) et $(B, *, \diamond)$.

Une application $f : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'anneaux ou homomorphisme si et seulement si :

$$f(x \star y) = f(x) * f(y) \quad \text{et} \quad f(x \circ y) = f(x) \diamond f(y), \forall (x, y) \in A^2.$$

On dit de plus que f est un :

- Endomorphisme lorsque $A = B$
- Isomorphisme lorsque f admet une fonction réciproque g telle que $f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$

Proposition 1.2. (Théorème d'isomorphisme d'anneaux)

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

Son noyau $Ker(\varphi)$ est un idéal de A et son image $Im(\varphi)$ est un sous-anneau de B .

De plus, on a que :

$$\frac{A}{Ker(\varphi)} \simeq Im(\varphi).$$

Avec $Ker(\varphi) = \{a \in A : \varphi(a) = 0\}$ et $Im(\varphi) = \{\varphi(a) : a \in A\}$.

1.2.5 Anneau gradué

Définition 1.12. Soit A un anneau.

Une **graduation** sur A est une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de sous-groupes stables de $(A, +)$ vérifiant :

$$i) \quad A_p A_q \subset A_{p+q}$$

$$ii) \quad A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

Si $\forall n < 0, A_n = \{0_A\}$, on dit que A est **positivement gradué** ou que A est **gradué de type n** . Ainsi $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Les éléments de A_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont dits de degré n .

De plus $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ si et seulement si :

$$\forall x \in A, \exists x_i \in A, \text{ tel que } x = \sum_{\text{finie}} x_i \text{ (Existence et Unicité).}$$

Remarque 1.4. Si $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ alors :

$$\begin{cases} 1_A \in A_0, \\ A_0 \text{ est un sous-anneau de } A. \end{cases}$$

Exemple 1.4. (*Exemple d'anneau gradué*)

- 1) $A[X] = A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} AX^n$, avec $A_n = AX^n = \{\alpha X^n, \alpha \in A\}$.
- 2) $A[\frac{1}{X}, X] = A[X^{-1}, X] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$, avec $A_n = AX^n, n \in \mathbb{Z}$

1.3 Module

Définition 1.13. Soit A un anneau commutatif unitaire.

Un A -module ou module sur A est un groupe abélien $(M, +)$ muni d'une multiplication externe $A \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto ax$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $\forall a, b \in A, \forall x \in M, (a + b)x = ax + bx$;
- (ii) $\forall a \in A, \forall x, y \in M, a(x + y) = ax + ay$;
- (iii) $\forall x \in M, 1_A x = x$;
- (iv) $\forall a, b \in A, \forall x \in M, a(bx) = (ab)x$.

Remarque 1.5. (i) Si A est un anneau, alors A est un A -module.

- (ii) Un espace vectoriel sur A est un module sur A , si A est un corps.
Cette propriété n'est pas vrai en générale.

Définition 1.14. Soit M un A -module. Un sous-module de M est un sous-ensemble N de M tel que :

- (i) $0_M \in N$;
- (ii) $\forall x, y \in N, x + y \in N$;
- (iii) $\forall x \in N, \forall a \in A, ax \in N$.

Définition 1.15. Soit M un A -module. M est dit de type fini s'il admet un système générateur fini, $\exists x_1, \dots, x_r \in M$ tel que $\forall x \in M, x = \sum_{i=1}^r a_i x_i, a_i \in A$.

Proposition 1.3. (*Module noethérien*)

Soient A un anneau et M un A -module. On dit que M est un module noethérien si l'une des trois assertions équivalentes sont vérifiées :

- (i) Tout sous-module de M est de type fini,
- (ii) Toute suite croissante de sous-modules de M est stationnaire,
- (iii) Tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément maximal pour l'inclusion.

Définition 1.16. (*A -algèbre de type fini*)

Soit A un anneau.

On dit que B est une A -algèbre de type fini si :

- (i) B est un A – module
- (ii) B est un anneau
- (iii) $B = A[b_1, \dots, b_r] \simeq \frac{A[X_1, \dots, X_r]}{J}$, $b_i \in B$, J idéal de $A[X_1, \dots, X_r]$

1.4 Idéal

Définition 1.17. Soit A un anneau.

Un idéal de A est une partie I de A vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $0_A \in I$,
- (ii) pour tout $x, y \in I$, $x + y \in I$
- (iii) pour tout $a \in A$ et $x \in I$, $ax \in I$.

Exemple 1.5.

- (i) Les idéaux de \mathbb{Z} sont de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Si A est un corps (un anneau dans lequel tout élément non nul est inversible) alors $I = (0)$ ou $I = A$

1.4.1 Idéal premier

Définition 1.18. Soit A un anneau. Un idéal P de A est dit **premier** s'il est strict et si pour tout x, y deux éléments de A tels que $xy \in P$ alors :

$$x \in P \quad \text{ou} \quad y \in P$$

On note $\text{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau A .

1.4.2 Idéal primaire

Définition 1.19. Soit A un anneau. Un idéal Q de A est dit **primaire** s'il est strict et si pour tout x, y deux éléments de A tels que $xy \in Q$ alors :

$$x \in Q \quad \text{ou} \quad \exists n \in \mathbb{N}, y^n \in Q$$

.

1.4.3 Idéal maximal

Définition 1.20. Soit A un anneau. Un idéal I de A est dit **maximal** s'il est strict et s'il n'est contenu dans aucun autre idéal strict de A .

Remarque 1.6. Un anneau qui ne possède qu'un seul idéal maximal est appelé **anneau local**.

1.4.4 Radical d'un idéal

Définition 1.21. Soient A un anneau, I un idéal de A . On appelle radical de I

$$\sqrt{I} = \{a \in A, \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\}$$

Proposition 1.4. Soient A un anneau et I un idéal de A .

- (i) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$
- (ii) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$
- (iii) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$
- (iv) Si $P \in \text{Spec}(A)$, $\sqrt{P} = P$

Exemple 1.6. $A = \mathbb{Z}$, $I = 6\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\sqrt{I} &= \sqrt{6\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z} \\ \sqrt{24\mathbb{Z}} &= \sqrt{(2^3 \times 3)\mathbb{Z}} = \sqrt{2^3\mathbb{Z}} \cap \sqrt{3\mathbb{Z}} = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \text{ppcm}(2, 3)\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}\end{aligned}$$

1.5 Filtrations

1.5.1 Filtration sur un anneau

Définition 1.22. Soit A un anneau. On appelle filtration de A toute famille $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'idéaux de A telle que :

- (i) $I_0 = A$
- (ii) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $I_{n+1} \subseteq I_n$.
- (iii) Pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$, $I_p I_q \subseteq I_{p+q}$.

L'ensemble des filtrations de l'anneau A est noté $\mathbb{F}(A)$. Pour tout $f, g \in \mathbb{F}(A)$, cet ensemble est ordonné par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f = (I_n) \leq g = (J_n) \implies I_n \subseteq J_n$$

Remarque 1.7. Dans la définition précédente, il est facile de remarquer que

$$\forall n \leq 0, I^n = A.$$

En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que $I_0 = A$ (i), il vient d'une part que :

$$I_0 \subseteq I_n, \forall n \leq 0 \text{ (ii). Ainsi } A \subseteq I_n.$$

D'autre part, comme $\forall n \in \mathbb{Z}$, les I_n sont des idéaux de A , alors $I_n \subseteq A$.

Donc $I_n = A, n \leq 0$.

Ainsi au lieu d'étudier la famille $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple 1.7. 1. Soit I un idéal de A et $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$I_{3n} = I_{3n-1} = I_{3n-2} = I^n$$

2. Soit $A = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ et $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$I_1 = I_2 = (\bar{2})$$

$$I_n = (\bar{0}) \text{ pour tout } n \geq 3$$

Définition 1.23. On définit pour toutes filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ de A les trois opérations suivantes :

(1) le produit $fg = (I_n J_n)$

(2) l'intersection $f \cap g = (I_n \cap J_n)$

(3) la somme $f + g = (K_n)$ où pour tout entier n , $K_n = \sum_{k=0}^n I_k J_{n-k}$

On vérifie que $fg, f \cap g, f + g$ sont des filtrations de A et pour toutes filtrations $f, g \in \mathbb{F}(A)$:

(4) $\inf(f, g) = f \cap g$

(5) $\sup(f, g) = f + g$

(6) $fg \leq f \cap g \leq f \leq f + g$

1.5.2 Filtration sur un module

Définition 1.24. Soit M un A -module. On appelle filtration de M toute famille $\varphi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de sous-modules de M telle que :

i) $M_0 = M$

ii) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M_{n+1} \subseteq M_n$.

La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de A et la filtration $\varphi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ du A -module M sont dites compatibles si :

$$I_p M_q \subseteq M_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

1.6 Anneaux gradués associés à une filtration

1.6.1 Anneau de Rees d'une filtration

Définition 1.25. Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A .

X est une indéterminée.

On appelle **anneau de Rees** de f , l'anneau gradué noté $R(A, f)$ tel que :

$$R(A, f) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n X^n$$

On appelle **anneau de Rees généralisé** de f , l'anneau gradué noté $\mathcal{R}(A, f)$ tel que :

$$\mathcal{R}(A, f) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} I_n X^n$$

On munit $R(A, f)$ et $\mathcal{R}(A, f)$ d'une structure de sous-anneau gradué de $A[X]$, l'ensemble des polynômes d'indéterminée X à coefficients dans A dont les opérations sont définies par :

1. la multiplication : $(\sum_{n=0}^r a_n X^n)(\sum_{k=0}^s b_k X^k) = \sum_{p=0}^{r+s} c_p X^p = \sum_{p=0}^{r+s} \sum_{q=0}^p a_{p-q} b_q X^p$
2. l'addition : $\sum_{n=0}^r a_n X^n + \sum_{k=0}^s b_k X^k = \sum_{j=0}^r (a_j + b_j) X^j$

1.6.2 Anneau gradué d'une filtration

Définition 1.26. Soient A un anneau, M un A -module

$f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$, $\phi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(M)$ telle que ϕ est f -compatible. On pose :

$$G(A, f) = G_f(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \frac{I_n}{I_{n+1}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{I_n}{I_{n+1}}$$

$$G(A, \phi) = G_\phi(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \frac{M_n}{M_{n+1}}$$

$G_f(A)$ est muni d'une structure d'anneau gradué dont la multiplication est définie par :

Pour tout $a_n + I_{n+1}, b_p + I_{p+1}$, deux éléments homogènes de degré n de $G_f(A)$, On pose :

$$(a_n + I_{n+1})(b_p + I_{p+1}) = a_n b_p + I_{n+p+1}$$

Proposition 1.5. Soient A un anneau, I un idéal de A . Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$ et X une indéterminée.

- (i) $A \subseteq R(A, f) \subseteq A[X]$
- (ii) $R(A, f) \subseteq \mathcal{R}(A, f) \subseteq A[u, X]$ où $u = \frac{1}{X} = X^{-1}$
- (iii) $\mathcal{R}(A, f) = R(A, f)[u]$
- (iv) $u^n \mathcal{R}(A, f) \cap A = I_n, \forall n \in \mathbb{Z}$
- (v) $R(A, f) = A[I_1 X, I_2 X^2, \dots, I_n X^n, \dots]$
- (vi) $u = \frac{1}{X} = X^{-1}$ est régulier de degré -1 dans $\mathcal{R}(A, f)$ et on a :

$$\mathcal{R}(A, f) = A[u, I_1 X, I_2 X^2, \dots, I_n X^n, \dots]$$

$$(vii) \frac{R(A, I)}{IR(A, I)} \simeq G_I(A) \text{ avec } R(A, I) = R(A, f_I) \text{ et } G_I(A) = G_{f_I}(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{I^n}{I^{n+1}}$$

$$(viii) \frac{\mathcal{R}(A, I)}{u \mathcal{R}(A, I)} \simeq G_I(A)$$

$$(ix) \frac{\mathcal{R}(A, I)}{(u-1)\mathcal{R}(A, I)} \simeq A$$

1.6.3 Quelques exemples de filtration

a) Filtration I-adique

Définition 1.27. Soient A un anneau et I un idéal de A .

La famille $f_I = (I^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \leq 0$, $I^n = A$ est une filtration de A appelé **filtration I-adique** et noté f_I

Soit I un idéal de l'anneau A si f_I est la filtration I -adique alors l'anneau de Rees de f_I sera simplement noté $R(A, I)$.

Proposition 1.6. Soient I un idéal de l'anneau A et f_I est la filtration I -adique. Si I est de type fini avec $I = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ alors $R(A, I) = A[a_1X, a_2X, \dots, a_rX]$

Conséquence 1.1. Si A est un anneau **noethérien** alors $R(A, I)$ est aussi **noethérien**.

Cependant, il est important de noter que si A n'est pas noethérien alors $R(A, f)$ n'est pas **nécessairement** noethérien.

Exemple 1.8. En effet, supposons que A n'est pas noethérien. Posons $I = (0)$, l'idéal nul. Alors $R(A, I) = A$ et donc $R(A, I)$ n'est pas noethérien

b) Filtration tronqué d'ordre k de f

Définition 1.28. Soient A un anneau et I un idéal de A .

$f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^{(k)} = (I_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$ et $t_k f = (K_n)$ avec $K_n = I_{n+k}$ si $n \geq 1$ et $K_n = A$ si $n \leq 0$.

Ainsi $t_k f$ est une filtration de A appelé **filtration tronqué d'ordre k de f**.

c) Filtration définie par une graduation

Définition 1.29. Soit $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ un anneau gradué de type n .

Posons $J_n = \bigoplus_{p \geq n} A_p$.

$f = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration de A .

d) Filtration de type fini

Définition 1.30. Soient A un anneau et I un idéal de A .

$f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A .

On dit que f est de type fini si I_n est de type fini pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand.

1.6.4 Classification des filtrations sur un anneau

a) Filtrations I-bonnes

Définition 1.31. Soient A un anneau et I un idéal de l'anneau A .
 $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de A . f est dite *I-bonne* si :

$$i) \quad II_n \subseteq I_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$ii) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } II_n = I_{n+1}, \forall n \geq n_0$$

Consequence 1.2. $II_{n_0} = I_{n_0+1}$, en multipliant par I , on a :
 $I^2 I_{n_0} = II_{n_0+1}$ et $II_{n_0+1} = I_{n_0+2}$.

Ainsi par récurrence, on obtient $I^n I_{n_0} = I_{n_0+n}$, pour tout $n \geq 1$

b) Filtrations A.P.

Définition 1.32. La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **Approximable par Puissances d'idéaux** (en abrégé **A.P.**) s'il existe un entier $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels telle que :

$$(i) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, I_{mk_n} \subset I_n^m$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{n} = 1$$

c) Filtrations fortement A.P.

Définition 1.33. La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **fortement Approximable par Puissances d'idéaux** (en abrégé **fortement A.P.**) s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{nk} = I_k^n$$

d) Filtrations E.P

Définition 1.34. La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **Essentiellement par Puissances d'idéaux** (en abrégé **E.P**) s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que :

$$\forall n \leq N, I_n = \sum_{p=1}^N I_{n-p} I_p.$$

e) Filtrations noethériennes

Définition 1.35. La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **noethérienne** si son anneau de Rees $R(A, f)$ est noethérien.

f) **Filtrations fortement noethériennes**

Définition 1.36. La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **fortement noethérienne** s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, m, n \geq k, I_m I_n = I_{m+n}$$

Remarque 1.8. Il résulte des références [4], [5], [6] que si A est un anneau noethérien et $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) f est une E.P. filtration
- (b) $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que f soit la plus petite filtration ayant pour $k+1$ premiers I_0, I_1, \dots, I_k
- (c) f est noethérienne
- (d) $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall j \geq m, I_{j+m} = I_j I_m$
- (e) L'anneau de Rees $R(A, f)$ de f est une A – algèbre de type fini
- (f) L'anneau de Rees généralisé $\mathcal{R}(A, f)$ de f est une A – algèbre de type fini

Remarque 1.9. ([2])

$\mathcal{R}(A, f)$ est noethérien si et seulement si $R(A, f)$ est noethérien.

Remarque 1.10. ([2])

Dans un anneau noethérien, nous avons la classification suivantes des filtrations classiques f où I est un idéal de l'anneau A :



Chapitre 2

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION I-BONNE

Dans ce second chapitre, notre étude se concentre sur les filtrations I-adiques, également connues sous le terme de filtrations I-bonnes, lesquelles représentent un cas spécifique de filtrations bonnes. Ensuite, dans le troisième chapitre, nous élargirons la portée de ces résultats en les généralisant à toute filtration g-bonne.

2.1 Dépendance intégrale

2.1.1 Dépendance intégrale sur les anneaux

Définition 2.1. (*Élément Entier*)[2]

Soient B un anneau et A un sous-anneau de B ($A \subseteq B$).

Un élément x de B est dit **entier** sur A s'il est **racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans A** .

En d'autres termes, s'ils existent a_1, a_2, \dots, a_n éléments de A tels que :

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (2.1)$$

Cette relation (2.1) est appelée **équation de dépendance intégrale** de x sur A . On dit que B est entier sur A lorsque tous les éléments de B sont entiers sur A .

Exemple 2.1. Posons $B = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Z}$. A est un sous-anneau de B .

- $x = \sqrt{5}$ est solution de l'équation $x^2 - 5$. Donc $\sqrt{5}$ est entier sur \mathbb{Z} .
- $x = \sqrt{2} + 1$ est solution de l'équation $x^2 - 2x - 1$. Donc $x = \sqrt{2} + 1$ est entier sur \mathbb{Z} .
- $\frac{1}{2}$ n'est pas entier sur \mathbb{Z} .

En effet, si $\frac{1}{2}$ est entier sur \mathbb{Z} alors $\frac{1}{2}$ est solution d'une équation de dépendance intégrale. Alors :

$$\exists n \geq 1, \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} = 0, a_i \in \mathbb{Z}$$

$$D'où \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[1 + \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{1}{2}\right)^{-i}\right] = 0$$

Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \neq 0$ alors $1 + \sum_{i=1}^n a_i 2^i = 0 \implies 1 + \sum_{i=1}^n a_i 2^i = 0 \implies 1 = 2(\sum_{i=1}^n -a_i 2^{i-1}) \implies 1 \in 2\mathbb{Z}$. Ce qui est **Absurde**.

Proposition 2.1. Soit $x \in B$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) x est entier sur A ;
- ii) $A[x]$ est un A -module de type fini ;
- iii) Il existe C un sous-anneau de B contenant $A[x]$ tel que C soit un A -module de type fini.

Démonstration. $i \Rightarrow ii$

Supposons que x est un entier sur A .

\Rightarrow il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i \in A$.

\Rightarrow il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $x^n = \sum_{i=1}^n (-a_i) x^{n-i}, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i \in A$.

\Rightarrow il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $x^n \in A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) = A[x]$.

• Montrons que $A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) = A[x]$

a) Par construction, $A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) \subset A[x]$

b) Réciproquement, montrons par récurrence sur m

que pour tout $m \in \mathbb{N}, x^m \in A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$

* si $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors $x^m \in A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$

* si $m \geq n$, alors $m = n + p, p \geq 0$.

Initialisation

si $p = 0$ alors $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0 \Rightarrow x^n = \sum_{i=1}^n (-a_i) x^{n-i}$

Comme $1 \leq i \leq n$, alors $0 \leq n-i \leq n-1$

D'où, $x^n = \sum_{i=1}^n (-a_i) x^{n-i} \in A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$

Donc la propriété est vraie pour $p = 0$

Hérédité

Soit $p \geq 0$. Supposons que $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, x^{n+k} \in A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$.

Montrons que $x^{n+p+1} \in A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$.

$$x^{n+p+1} = x^{p+1} x^n = x^{p+1} \times \sum_{i=1}^n (-a_i) x^{n-i} = \sum_{i=1}^n (-a_i) x^{n+p+1-i}$$

Comme $1 \leq i \leq n$, alors $p+1 \leq n+p+1-i \leq n+p$

Ainsi par hypothèse de récurrence, $x^{n+p+1-i} \in A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$ et par stabilité, il vient $x^{n+p+1} \in A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$.

Par suite, pour tout $m \in \mathbb{N}, x^m \in A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$.

Donc $A(1, x, x^2, \dots, x^{n-1}) = A[x]$

$A[x]$ est donc un A -module de type fini de générateur $(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$.

ii) \Rightarrow iii) Il suffit de poser $A[x] = C$

iii) \Rightarrow i) Supposons qu'il existe C un sous module de B contenant $A[x]$ qui soit un A -module de type fini.

Soit $x \in A$.

$A[x] \subset C = A(y_1, y_2, \dots, y_r)$ de type fini.

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $xy_i \in C$. On a :

$$xy_i = \sum_{j=1}^r a_{ij}y_j \Rightarrow \sum_{j=1}^r a_{ij}y_j - xy_i = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^r (a_{ij} - \delta_{ij}x)y_j = 0 \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{22} & a_{11} - x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & \cdots & a_{rr} - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posons $T = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$, $Y = (y_j)_{1 \leq j \leq r}$

Ainsi $(T - xI_r) \times Y = 0$ où I_r est la matrice identité d'ordre r et 0 est la matrice nulle de dimension $(r, 1)$.

$$(T - xI_r) \times Y = 0 \Rightarrow t_{com}(T - xI_r) \times Y[(T - xI_r) \times Y] = 0$$

$\Rightarrow \det[(T - xI_r)Y] = 0 \Rightarrow \det(T - xI_r)y_i = 0, \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket \Rightarrow P_T(x)y_i = 0, \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$
où P_T est le polynôme caractéristique associé à T .

De plus, $1 \in C$, on peut donc supposer que $\exists i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, tel que $y_i = 1$

D'où $P_T(x) = 0$.

Or P_T est un polynôme unitaire qui s'écrit

$$P_T(x) = x^n - \text{tr}(T)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(T) = x^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{n-i}, \alpha_i \in A.$$

$$\text{Donc } P_T(x) = 0 \Rightarrow x^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{n-i} = 0, \alpha_i \in A \Rightarrow x \text{ est entier sur } A.$$

□

Corollaire 2.1. Soient A et B deux anneaux tels que $A \subseteq B$ et $x_1, x_2, \dots, x_n \in B$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\forall 1 \leq i \leq n, x_i$ est entier sur A ,
- ii) $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ est un A -module de type fini,
- iii) Il existe un A -module de type fini $C \subseteq B$ tel que $x_i C \subseteq C, \forall 1 \leq i \leq n$.

Définition 2.2. Soit $A \subseteq B$ une inclusion d'anneaux.

On qualifie B d'une **A-algèbre** lorsque B peut être appréhendé simultanément en tant que module sur A et en tant qu'anneau.

De plus, B est dit A-algèbre **de type fini** si :

$$B = A[b_1, b_2, \dots, b_r], \quad b_1, b_2, \dots, b_r \in B$$

On admet la proposition suivante :

Proposition 2.2. Soit $A \subseteq B$ une inclusion d'anneaux.

B est une **A-algèbre de type fini** si :

$$B \simeq \frac{A[X_1, X_2, \dots, X_r]}{J}$$

Où J est un idéal de $A[X_1, X_2, \dots, X_r]$

Corollaire 2.2. (*Clôture intégrale d'anneaux*)[2]

Soit $A \subseteq B$ une inclusion d'anneaux.

L'ensemble des éléments de B entiers sur A est un sous anneau de B contenant A appelé **clôture intégrale** de B dans A notée A' .

Démonstration. Il s'agit de montrer que A' est un sous anneau de B .

i) $A \subset A' \subset B$

ii) Soient $x, y \in A'$.

$x \in A'$ alors $A[x]$ est un A -module de type fini.

$y \in A'$ alors $A[y]$ est un A -module de type fini.

Posons $C = A[x, y] = A[x][y]$.

Ainsi $x + y \in C$ et $xy \in C$.

Alors pour tout $z \in C, z = \sum_{i=1}^r \alpha_i y^i, \alpha_i \in A[x]$. Ainsi $\alpha_i = \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} x^j$

D'où $z = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} x^j y^i$

Donc $C = A(x^j y^i)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s}$, est un système de générateur fini de C .

Par suite, C est un A -module de type fini. □

Corollaire 2.3. Soient $A \subseteq B \subseteq C$ deux inclusions d'anneaux.

Si C est entier sur B et B est entier sur A alors C est entier sur A .

Démonstration. Soit $x \in C$.

Comme x est entier sur B alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n = \sum_{i=1}^n (-b_i)x^{n-i}$, pour tout $b_i \in B, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A[b_i]$ est un A -module de type fini (car B entier sur A)

Donc $A[b_1, b_2, \dots, b_n]$ est un A -module de type fini.

Ainsi $A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, \dots, b_n]$ est un A -module de type fini.

Soit $p \geq 0$. Montrons que $x^{n+p} \in A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, \dots, b_n]$

Initialisation ($p = 0$)

$$x^n = \sum_{i=1}^n (-b_i)x^{n-i} \in A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, \dots, b_n]$$

Hérédité ($p \geq 0$)

Supposons que pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $x^{n+k} \in A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, \dots, b_n]$

$$x^{n+p+1} = x^n \times x^{p+1} = \sum_{i=1}^n (-b_i)x^{n+p+1-i}$$

Comme $1 \leq i \leq n$ alors $n + p + 1 - i \leq n + p + 1 - 1 \leq n + p$

Donc par hypothèse de récurrence, $x^{n+p+1-i} \in A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, \dots, b_n]$

Par stabilité, il vient $x^{n+p+1} \in A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, \dots, b_n]$

Donc $x^{n+p} \in A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, \dots, b_n]$

Par suite, $A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, \dots, b_n]$ est un A -module de type fini, c'est à dire

$$A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, \dots, b_n] = A(z_1, z_2, \dots, z_s)$$

Posons $H = A[b_1x^{n-1}, b_2x^{n-2}, \dots, b_n]$ et $H' = A(1, x, \dots, x^{n-1}, z_1, z_2, \dots, z_s)$

H' est un A -module de type fini tel que $A[x] \subset H' \subset C$.

Donc x est entier sur A .

Par suite C entier sur A . □

Proposition 2.3. Soit $A \subseteq B$ une inclusion d'anneaux tel que B entier sur A . Alors :

i) Si J est un idéal de B alors :

$$\frac{B}{J} \text{ est entier sur } \frac{A}{J \cap A}$$

ii) Pour toute partie multiplicative S de A

$$S^{-1}B \text{ est entier sur } S^{-1}A.$$

Démonstration. i) Supposons B entier sur A

Soit $x \in B$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0$, pour tout $a_i \in A, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ainsi $(x + J)^n + \sum_{i=1}^n (a_i + J \cap A)(x + J)^{n-i} = x^n + J + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} + J = (x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}) + J = 0 + J = 0_{J \cap A}$

Donc $x + J$ est entier sur $\frac{A}{J \cap A}$

Donc $\frac{B}{J}$ est entier sur $\frac{A}{J \cap A}$.

ii) Supposons B entier sur A

Soit $\frac{x}{s} \in S^{-1}B$, $x \in B$ et $s \in S$

Comme x est entier sur A alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0$, pour tout $a_i \in A, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

D'où, $(\frac{x}{s})^n + \sum_{i=1}^n (\frac{a_i}{s_i})(\frac{x}{s})^{n-i} = \frac{0}{1}$

Donc $\frac{x}{s}$ est entier sur $S^{-1}A$.

Par suite $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A$. □

Proposition 2.4. Soit $A \subseteq B$ une inclusion d'anneaux tel que B entier sur A .

$$B \text{ corps} \iff A \text{ corps}$$

Démonstration. i) \Rightarrow ii) Supposons B corps.

Soit $x \in A \setminus \{0\}$.

Comme $A \subset B$ alors $x \in B \setminus \{0\}$. Donc x est inversible d'inverse $x^{-1} \in B$.

De plus B entier sur A , alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(x^{-1})^n + \sum_{i=1}^n a_i (x^{-1})^{n-i} = 0$, pour tout $a_i \in A, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ainsi $(x^{-1})^n = \sum_{i=1}^n (-a_i)(x^{-1})^{n-i}$, pour tout $a_i \in A, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$(x^{-1}) \times (x^{-1})^{n-1} = \sum_{i=1}^n (-a_i)(x^{-1})^{n-i}$, pour tout $a_i \in A, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$(x^{-1}) = \sum_{i=1}^n (-a_i)(x^{-1})^{n-i}(x^{-1})^{-n+1}$, pour tout $a_i \in A, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$x^{-1} = \sum_{i=1}^n (-a_i)x^{i-1}$, pour tout $a_i \in A, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme $1 \leq i \leq n$ alors $0 \leq i-1 \leq n-1$

Donc $x^{i-1} \in A$.

Par stabilité $x^{-1} \in A$

Donc A corps.

ii) \Rightarrow i) Supposons que A corps.

Soit $x \in B \setminus \{0\}$.

Comme B entier sur A , alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0$, pour tout $a_i \in A, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Par récurrence sur n , montrons que $x \in A$.

Initialisation ($n = 1$)

l'équation de dépendance intégrale devient, $x + a_1 = 0 \Rightarrow x = -a_1 \in A \setminus \{0\}$

Donc x est inversible dans $A \subset B$. Donc x est inversible dans B .

Hérédité ($n \geq 1$)

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n .

Alors $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0 \Rightarrow x \in A$.

Ainsi $x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i} = 0 \Rightarrow x(x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}) + a_{n+1} = 0 \Rightarrow$

$$x(x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}) = -a_{n+1}$$

* si $-a_{n+1} \neq 0$ alors x est inversible dans $A \subset B$. Donc x est inversible dans B .

* si $-a_{n+1} = 0$, alors $x(x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}) = 0 \Rightarrow x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0$

(car $x \neq 0$ et B intègre)

Ainsi $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0 \Rightarrow x(x^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^{n-1-i}) = -a_{n+2}$

* si $-a_{n+2} \neq 0$ alors x est inversible dans $A \subset B$. Donc x est inversible dans B .

* sinon de proche en proche, il vient que $x + a_1 = 0 \Rightarrow x = -a_1 \in A \setminus \{0\}$

Donc x est inversible dans $A \subset B$. Donc x est inversible dans B

Dans tous les cas, il vient B corps. □

2.1.2 Dépendance intégrale sur un idéal

Définition 2.3. Soient A un anneau commutatif unitaire et I un idéal de A .

Un élément x de A est dit entier sur I s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \text{ avec } a_i \in I^i, \forall i = 1, \dots, m.$$

Lemme 2.1. Soient A un anneau et I un idéal de A .

$$x \text{ entier sur } I \iff \text{Le monôme } xX \in A[X] \text{ est entier sur } R(A, I) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I^n X^n$$

Démonstration. $i) \Rightarrow ii)$

Supposons x entier sur I . Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0$, $a_i \in I^i$.

Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(xX)^n + \sum_{i=1}^n a_i X^i (xX)^{n-i} = 0$, $a_i X^i \in I^i X^i \in R(A, I)$.

D'où xX est entier sur $R(A, I)$.

$ii) \Rightarrow i)$

Supposons que $xX \in A[X]$ est entier sur $R(A, I)$.

Ainsi il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(xX)^n + \sum_{i=1}^n a_i (xX)^{n-i} = 0$, $a_i \in R(A, I)$.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(xX)^n = \sum_{i=1}^n (-a_i)(xX)^{n-i}$, $a_i \in R(A, I)$.

Comme $(xX)^n$ est homogène de degré n , alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\deg[a_i(xX)^{n-i}] = n \Rightarrow \deg(a_i) + n - i = n \Rightarrow \deg(a_i) = i.$$

Donc $a_i \in I^i X^i \Rightarrow a_i = \alpha_i X^i$, avec $\alpha_i \in I^i$.

D'où, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(xX)^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i X^i (xX)^{n-i} = 0$,

il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $X^n [x^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{n-i}] = 0$, avec $\alpha_i \in I^i$.

Par identification des polynômes, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n + \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{n-i} = 0$, avec $\alpha_i \in I^i$.

Donc x est entier sur I . □

Corollaire 2.4. (Clôture intégrale d'idéaux)[2]

Soient A un anneau et I un idéal de A . L'ensemble noté :

$$I' = \{x \in A, x \text{ entier sur } A\} = \bar{I}$$

Est un idéal de A appelé **clôture intégrale de I** .

Démonstration. i) Par construction, $I' \subset A$.

ii) $0^1 + 0 = 0$, donc $0 \in I'$.

iii) Soient $b \in A, x \in I'$.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0$, avec $a_i \in I^i$.

Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $(bx)^n + \sum_{i=1}^n b^i a_i (bx)^{n-i} = 0$, avec $b^i a_i \in I^i$.

Donc bx est entier sur I . D'où $bx \in I'$.

iv) Soient $x, y \in I'$.

Ainsi xX, yX sont entiers sur $R(A, I)$.

Alors $xX + yX = (x + y)X \in A[X]$ est aussi entier sur $R(A, I)$

Donc $x + y \in I'$.

Par suite, I' est un idéal de A . □

Remarque 2.1. (Clôture intégrale d'idéaux et radical)[2]

$$1) I \subseteq J \Rightarrow I' \subseteq J'.$$

$$2) I \subseteq I' \subseteq \sqrt{I}.$$

$$3) \sqrt{I} = \sqrt{I'}.$$

Démonstration. i) Soit $x \in I$.

Alors $x^1 - x = 0$, où $a_1 = -x^1 \in I^1$.

D'où $x \in I'$. Donc $I \subset I'$

ii) Soit $x \in I'$.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0$, avec $a_i \in I^i$.

Ainsi pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i \in I^i \Rightarrow a_i x^{n-i} \in I^i \subset I$

Par stabilité, il vient, qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n = \sum_{i=1}^n (-a_i) x^{n-i} \in I$

Donc $x \in \sqrt{I}$.

D'où, $I' \subset \sqrt{I}$.

Par suite, $I \subset I' \subset \sqrt{I}$.

iii) D'après ce qui précède

$$I \subset I' \subset \sqrt{I} \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{I'} \subset \sqrt{\sqrt{I}} \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{I'} \subset \sqrt{I} \Rightarrow \sqrt{I} = \sqrt{I'}. \quad \square$$

Conséquence 2.1. Soit $x \in A$. Si $x \in I'$ alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^m \in I$.

Définition 2.4. Un idéal I de A est dit **intégralement fermé** si $I = I'$.

2.2 Réduction d'un idéal

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.5. Soient A un anneau commutatif unitaire, I et J deux idéaux de A . On dit que I est une réduction de J si :

- i) $I \subseteq J$,
- ii) $\exists r \in \mathbb{N}^*$, tel que $J^{r+1} = IJ^r$.

Exemple 2.2. 1) I est une réduction de I lui-même.

2) $A = \mathbb{K}[X, Y]$ avec \mathbb{K} corps.

$$I = (X^2, Y^2)$$

$$J = (X, Y)^2 = (X^2, Y^2, XY) \text{ D'où } I \subseteq J.$$

$$\begin{aligned} IJ &= (X^2, Y^2)(X, Y)^2 \\ &= (X^2, Y^2)(X^2, XY, Y^2) \\ &= (X^4, Y^4, X^3Y, XY^3, X^2Y^2) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} J^2 &= (X^2X^2, X^2Y^2, X^3Y, Y^2Y^2, Y^3X) \\ &= (X^4, Y^4, X^2Y^2, X^3Y, XY^3) \end{aligned}$$

Donc $J^{1+1} = J^2 = IJ$ avec $r = 1$.

Par suite I est une réduction de J .

Remarque 2.2. $\forall r \geq n$, on a $J^{r+1} = IJ^r$.

D'une manière générale, $I^m J^n = J^{n+m}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.5. Soient A un anneau, I , J et K trois idéaux de A tels que $I \subseteq J \subseteq K$.

Si I est une réduction de J et J est une réduction de K alors I est une réduction de K .

Démonstration. Supposons que I est une réduction de J et J est une réduction de K . I est une réduction de J alors $I \subseteq J$ et $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^{m+1} = IJ^m$, de même J est une réduction de K alors $J \subseteq K$ et $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $K^{n+1} = JK^n$. Posons $r = mn + n + m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 K^{r+1} &= K^{mn+n+m+1} = (K^{n+1})^{m+1} \\
 &= (K^{n+1})^m (K^{n+1}) \\
 &= (JK^n)^m (JK^n) \\
 &= J^m K^{nm} JK^n \\
 &= J^{m+1} K^{nm+n} \\
 &= J^{m+1} K^n K^{nm} \\
 &= IJ^m K^n K^{nm} \\
 &= I(JK^n)^m K^n \\
 &= I(K^{n+1})^m K^n \\
 &= IK^{mn+n+m} \\
 &= IK^r.
 \end{aligned}$$

Il existe donc $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $K^{r+1} = IK^r$ ainsi I est une réduction de K . □

Lemme 2.2. Soit I_1, I_2, J_1 et J_2 des idéaux de A alors, si I_1 est une réduction de J_1 et I_2 est une réduction de J_2 alors $I_1 + I_2$ est une réduction de $J_1 + J_2$.

Démonstration. Supposons que I_1 est une réduction de J_1 et I_2 est une réduction de J_2 .

I_1 est une réduction de J_1 alors $I_1 \subseteq J_1$ et $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_1^{m+1} = I_1 J_1^m$.

I_2 est une réduction de J_2 alors $I_2 \subseteq J_2$ et $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_2^{n+1} = I_2 J_2^n$.

Posons $r = m + n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
 I_1(J_1 + J_2)^{m+n} &= \sum_{k=0}^{m+n} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k} + \sum_{k=m}^{m+n} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k}
 \end{aligned}$$

Or I_1 est une réduction de J_1 donc $\forall k \geq m$ on a $J_1^{k+1} = I_1 J_1^k$

$$\begin{aligned}
 I_1(J_1 + J_2)^{m+n} &= \sum_{k=0}^{m+n} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{m-1} I_1 J_1^k J_2^{m+n-k} + \sum_{k=m}^{m+n} J_1^{k+1} J_2^{m+n-k}
 \end{aligned}$$

Ainsi donc on a $\sum_{k=m}^{m+n} J_1^{k+1} J_2^{m+n-k} \subseteq I_1(J_1 + J_2)^{m+n}$.

De façon similaire on montre que $\sum_{k=0}^m J_1^k J_2^{m+n-k+1} \subseteq I_2(J_1 + J_2)^{m+n}$

D'où $\sum_{k=m}^{m+n} J_1^{k+1} J_2^{m+n-k} + \sum_{k=0}^m J_1^k J_2^{m+n-k+1} \subseteq I_1(J_1 + J_2)^{m+n} + I_2(J_1 + J_2)^{m+n}$.

Alors $\sum_{k=0}^{m+n+1} J_1^k J_2^{m+n+1-k} = (J_1 + J_2)^{m+n+1} \subseteq (I_1 + I_2)(J_1 + J_2)^{m+n}$

Par hypothèse on a $I_1 \subseteq J_1$ et $I_2 \subseteq J_2 \Rightarrow I_1 + I_2 \subseteq J_1 + J_2$,

Par suite on a $(I_1 + I_2)(J_1 + J_2)^{m+n} \subseteq (J_1 + J_2)^{m+n+1}$

Par conséquent $(J_1 + J_2)^{m+n+1} = (I_1 + I_2)(J_1 + J_2)^{m+n}$, on a donc trouver r tel que $(J_1 + J_2)^{r+1} = (I_1 + I_2)(J_1 + J_2)^r$ ce qui fait de $I_1 + I_2$ une réduction de $J_1 + J_2$. \square

Proposition 2.6. Soient A un anneau, I un idéal de A et $x \in A$.

x est entier sur I si et seulement si I est une réduction de $I + (x) = I + xA$.

Démonstration. Supposons que x est entier sur I . Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$x^n = \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}, \text{ avec } a_i \in I, i = 1, \dots, n.$$

Montrons que I est une réduction de $I + (x)$.

$$(I + (x))^n = (I + (x))(I + (x))^{n-1} = I(I + (x))^{n-1} + (x)(I + (x))^{n-1}$$

En prouvant que $(x)(I + (x))^{n-1} \subseteq I(I + (x))^{n-1}$ on aura,

$$I(I + (x))^{n-1} + (x)(I + (x))^{n-1} = I(I + (x))^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} (x)(I + (x))^{n-1} &= (x) \sum_{i=0}^{n-1} I^i(x)^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} I^i(x)^{n-i} \\ &= (x)^n + \sum_{i=1}^{n-1} I^i(x)^{n-i} \\ &= (x)^n + I \sum_{i=1}^{n-1} I^{i-1}(x)^{n-i} \\ &= (x)^n + I \sum_{i=0}^{n-2} I^i(x)^{n-1-i} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } (x)(I + (x))^{n-1} = (x)^n + \sum_{i=0}^{n-2} I^i(x)^{n-1-i} \subseteq (x)^n + \sum_{i=0}^{n-1} I^i(x)^{n-1-i}$$

$$\text{d'où } (x)(I + (x))^{n-1} \subseteq (x)^n + I(I + (x))^{n-1}$$

$$\text{et comme } x^n = \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} \in \sum_{i=1}^n I^i x^{n-i} \Rightarrow x^n \in I \sum_{i=1}^n I^{i-1} x^{n-i} = I \sum_{i=0}^n I^i x^{n-1-i}$$

$$\text{alors } (x)^n \in I(I + (x))^{n-1} \Rightarrow (x)^n + I(I + (x))^{n-1} = I(I + (x))^{n-1}.$$

En somme $(x)(I + (x))^{n-1} \subseteq I(I + (x))^{n-1} \Rightarrow (I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1}$.

Par conséquent I est une réduction de $I + (x)$.

Supposons que I est une réduction de $I + (x)$.

Alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(I + (x))^{n+1} = I(I + (x))^n$

$$x^{n+1} \in (I + (x))^{n+1} = I(I + (x))^n \Rightarrow x^{n+1} \in I \sum_{i=0}^n I^i (x)^{n-i} = \sum_{i=0}^n I^{i+1} (x)^{n-i}.$$

D'où $x^{n+1} \in \sum_{i=1}^{n+1} I^i (x)^{n+1-i} \Rightarrow x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i}$, avec $a_i \in I^i$. Ainsi x est donc entier sur I . □

Proposition 2.7. Soit A un anneau noethérien, I et J deux idéaux de A tels que $I \subseteq J$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) I est une réduction de J .
- ii) $R(A, J)$ est un $R(A, I)$ -module de type fini.
- iii) $R(A, J)$ est entier sur $R(A, I)$
- iv) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, J^n est entier sur I^n .
- v) J est entier sur I

Démonstration. i) \Rightarrow ii)

Supposons que I est une réduction de J alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^{n+1} = IJ^n$.

$$J^{n+1} = IJ^n \Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}; J^{n+r} = I^r J^n.$$

$$\text{Ainsi } J^{n+r} X^{n+r} = I^r X^r J^n X^n \Rightarrow R(A, J) = R(A, I)(JX, \dots, J^r X^r).$$

$R(A, J)$ est donc un $R(A, I)$ -module de type fini.

ii) \Rightarrow iii)

Supposons que $R(A, J)$ est un $R(A, I)$ -module de type fini.

Soit $z \in R(A, J)$,

$$z \in R(A, J) \Rightarrow (R(A, J)[z]) \text{ est un sous-module de } R(A, J).$$

A est noethérien alors $R(A, I)$ est noethérien, $R(A, J)$ est un $R(A, I)$ -module de type fini alors, $R(A, J)$ est un module noethérien.

$(R(A, J)[z])$ étant un sous-module de $R(A, J)$ qui est noethérien alors $(R(A, J)[z])$ est de type fini. Par suite z est entier sur $R(A, I)$.

iii) \Rightarrow iv)

Supposons que $R(A, J)$ est entier sur $R(A, I)$.

Soit $a \in J^n \Rightarrow aX^n \in R(A, J)$, donc aX^n est entier sur $R(A, I)$.

$$\text{Ainsi il existe } m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } (aX^n)^m = \sum_{i=1}^m b_i (aX^n)^{m-i},$$

$$\text{où } b_i \in I^{ni} X^{ni} \Rightarrow b_i = c_i X^{ni}, c_i \in I^{ni}.$$

$$a^m X^{nm} = \sum_{i=1}^m c_i X^{ni} (aX^n)^{m-i} = \sum_{i=1}^m c_i X^{ni} a^{m-i} X^{mn-ni} = \sum_{i=1}^m c_i a^{m-i} X^{mn}.$$

$$\text{Et donc } a^m X^{nm} = \sum_{i=1}^m c_i a^{m-i} X^{mn} \Rightarrow a^m = \sum_{i=1}^m c_i a^{m-i}, c_i \in I^{ni} = (I^n)^i.$$

J^n est ainsi entier sur I^n .

$iv) \Rightarrow v)$

En prenant $n = 1$, alors pour les mêmes raisons que la preuve $iii) \Rightarrow iv)$ on a le résultat souhaité à savoir J entier sur I .

$v) \Rightarrow i)$

Supposons que J est entier sur I .

L'anneau A étant noethérien alors l'idéal J est de type fini.

Posons $J = (x_1, \dots, x_n)$

$x_1 \in J$ qui est entier sur I donc, x est entier sur I ce qui entraîne que l'idéal I soit une réduction de $I + (x_1)$. De même x_2 est entier sur I donc sur $I + (x_1)$ ainsi, $I + (x_1)$ devient une réduction de $I + (x_1) + (x_2)$.

En répétant le même raisonnement à chaque élément de J , on obtient x_r entier sur I donc nécessairement sur $I + (x_1) + \dots + (x_{r-1})$ ce qui implique que $I + (x_1) + \dots + (x_{r-1})$ est une réduction de $I + (x_1) + \dots + (x_r) = I + J$.

On déduit donc que I est une réduction de J . \square

Proposition 2.8. *Soient A un anneau, I un idéal de A et x un élément de A . Alors : x est entier sur I si et seulement si il existe J un idéal de A de type fini tel que : xJ est contenu dans IJ et pour tout x' élément de A , $x'J$ est égal au module nul entraîne qu'il existe m supérieur ou égal à zéro, tel que $x'^m = 0$*

Corollaire 2.5. *Soient I, J deux idéaux de A . Alors :*

$$I'J' \subseteq (IJ)'$$

Démonstration. contenu... \square

Théorème 2.1. *Soit A un anneau noethérien. Pour tout idéal I de A , il existe un idéal \hat{I} (nécessairement unique) ayant les propriétés suivantes :*

(i) I est une réduction de \hat{I} ;

(ii) tout idéal ayant I comme réduction est contenu dans \hat{I} .

Démonstration. Notons \sum l'ensemble de tous les idéaux qui ont I comme réduction. I étant une réduction de lui-même alors, $I \in \sum$ donc $\sum \neq \emptyset$. Puisque la condition de maximalité des idéaux est valable dans notre anneau, on peut trouver un idéal $\hat{I} \in \sum$ et qui est maximal dans \sum .

Soit $I_1 \in \sum$, alors I est une réduction de I_1 et I est une réduction de \hat{I} . Ainsi d'après le Lemme précédent $I + I = I$ est une réduction de $I_1 + \hat{I}$. Cela montre que $I_1 + \hat{I} \in \sum$. Mais $\hat{I} \subseteq I_1 + \hat{I}$ d'où $\hat{I} = I_1 + \hat{I}$, par choix de \hat{I} donc $I_1 \subseteq \hat{I}$. Ce qui achève la preuve. \square

Corollaire 2.6. *Soient A un anneau noethérien et I, J deux idéaux de A . Si I est une réduction de J , alors $\hat{I} = \hat{J}$.*

Démonstration. D'une part I est une réduction de J et J est une réduction de \hat{J} alors, d'après (1.1.2 Proposition) I est une réduction de \hat{J} par conséquent $\hat{J} \subseteq \hat{I}$, par le Théorème précédent. D'autre part $I \subseteq J \subseteq \hat{J} \subseteq \hat{I}$ et comme I est une réduction de \hat{I} , alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\hat{I}^{n+1} = I\hat{I}^n$.

$I \subseteq J \Rightarrow I\hat{I}^n \subseteq J\hat{I}^n$ or $\hat{I}^{n+1} = I\hat{I}^n$ donc $\hat{I}^{n+1} \subseteq J\hat{I}^n$. De plus $J \subseteq \hat{I} \Rightarrow J\hat{I}^n \subseteq \hat{I}^{n+1}$, ainsi $\hat{I}^{n+1} = J\hat{I}^n$ par conséquent J devient également une réduction de \hat{I} . Il s'ensuit que $\hat{I} \subseteq \hat{J}$, on obtient donc le résultat souhaité. \square

2.2.2 Réduction minimale d'un idéal

La notion d'idéal basique a été introduite et étudiée par Northcott et Rees [4].

Définition 2.6. *Un idéal I de l'anneau local noethérien (A, m) est basique si la seule réduction de I est I lui-même. Northcott et Rees ont aussi défini la notion de réduction minimale d'un idéal J :*

Un idéal I est une réduction minimale de J si I est une réduction de J et si I est minimal au sens de l'inclusion (\subseteq) parmi l'ensemble des réductions de J .

Remarque 2.3. *On prouve dans [2] que la réduction minimale des filtrations I -bonne existe toujours dans un anneau local noethérien. Ce qui n'est pas le cas en générale pour une filtration quelconque.*

Ces notions s'étendent sans difficulté aux filtrations noethériennes d'un anneau noethérien A , non nécessairement local [2].

Les questions naturelles qui se posent sont alors les suivantes :

- (a) Quelles sont les filtrations basiques de A si elles existent ?
- (b) Toute filtration de A admet-elle une réduction minimale ?

Nous avons obtenu une caractérisation des filtrations basiques et avons montré que la réponse à la question (b) est négative.

Pour (a) nous avons obtenu le résultat suivant :

Proposition 2.9. *Une filtration noethérienne f de l'anneau noethérien A est basique si et seulement si f est I -adique avec I idempotent ($I^2 = I$).*

Démonstration. Pour le voir, considérons une filtration $f = (I_n)$ noethérienne et basique.

Il existe alors un entier $k \geq 1$ tel que pour tout entier $n \geq k$, on ait $I_{n+k} = I_k I_n$. Considérons la filtration $h = (H_n)$ de A définie par :

$$H_n = \begin{cases} I_{k-1} & \text{si } 1 \leq n \leq k-1 \\ I_n & \text{pour } n \geq k \end{cases}$$

On a alors pour tout $n \geq k$, $I_{n+k} = I_k H_n$, et par conséquent h est une réduction de f .

Comme f est basique, on en déduit que $I_n = I_k$ pour tout n .

D'autre part, $I_{2k} = I_k^2$ donc $f = f_I$ avec $I = I_k$ et $I^2 = I$.

Réciproquement, si f est I -adique avec $I = I^2$ et si $h = (H_n)$ est une réduction de f , on a pour tout $n \geq 1$, $I = I^n$ et $H_n \subseteq I$.

De plus h étant une réduction de f , il existe un entier $k \geq 1$ tel que $I = I^{k+n} = I^k H_n \subseteq H_n \subseteq I$ pour tout $n \geq k$.

D'où $\forall n \geq k$, $I = H_n$. Or pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq k-1$, on a $H_k = I \subseteq H_n \subseteq I$.

D'où $H_n = I$, $f_I = h$ et f_I est basique. □

Concernant la question (b), nous avons obtenu le résultat suivant :

Proposition 2.10. *Une filtration noethérienne $f = (I_n)$ de l'anneau noethérien A admet une réduction minimale si et seulement s'il existe un entier $r \geq 1$ tel que I_r soit un idéal idempotent.*

Démonstration. Il est facile de voir que la condition est nécessaire. Supposons en effet que $h = (H_n)$ soit une réduction minimale de f . Alors f est noethérienne et basique et d'après le résultat précédent énoncé plus haut, il existe un idéal idempotent I tel que $h = f_I$.

Or l'une des caractérisations de réduction d'une filtration sur une autre assure l'existence d'un entier $N \geq 1$ tel que $I_n^2 = I_n H_n = I_n I$ pour tout $n \geq N$.

De plus, f étant noethérienne, elle est fortement $A.P.$ et il existe un entier $k \geq N$ tel que $I_{nk} = I_k^n$ pour tout entier n .

Ainsi $I_{2k} = I_k^2 = I_k I$ et $I_{2k}^2 = I_{2k} I = I_k I^2 = I_k I = I_{2k}$ donc I_{2k} est idempotent.

La réciproque est plus technique et nous renvoyons aux références citées plus haut. La preuve de la réciproque demande l'utilisation de critères assurant que l'anneau de Rees d'une filtration g soit entier (respectivement soit une algèbre de type fini) sur l'anneau de Rees d'une filtration f . Or, suivant les références, les auteurs ont utilisé soit l'anneau de Rees classique soit l'anneau de Rees généralisé associé à une filtration pour définir et caractériser la dépendance intégrale ou la dépendance intégrale forte d'une filtration sur une autre.

Pour montrer que les propriétés utilisées, portant tantôt sur l'un ou l'autre des anneaux de Rees sont équivalentes, nous avons montré les résultats suivants :

Étant données deux filtrations f, g de A vérifiant $f \leq g$, on a :

- (i) $\mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f) \iff \mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$
- (ii) $\mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$ – algèbre de type fini $\iff \mathcal{R}(A, g)$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$ – algèbre de type fini

Concernant la noethérianité des anneaux de Rees, une preuve astucieuse de l'équivalence entre la noethérianité de l'anneau $\mathcal{R}(A, f)$ et celle de l'anneau $\mathcal{R}(A, f)$ pour toute filtration f de l'anneau noethérien A a été donnée dans [6]. Nous l'exposons brièvement ici. Il est clair que si l'anneau de Rees de f est noethérien, il en est de même de son anneau de Rees généralisé. La réciproque est donc triviale. Par conséquent, l'anneau de Rees $\mathcal{R}(A, f)$ de f est noethérien.

□

Chapitre 3

DÉPENDANCE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

3.1 Dépendance intégrale de filtration

Définition 3.1. Soient A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A et $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^m a_i x^{m-i} = 0, \quad m \in \mathbb{N}^* \text{ où } a_i \in I_i, \forall i = 1, \dots, m.$$

Proposition 3.1. Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$, $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) x est entier sur $f^{(n)} = ((I_{nk})_{k \in \mathbb{N}})$.
- ii) $xX^n (\in A[X])$ est entier sur $R(A, f)$.
- iii) $xX^n (\in A[X])$ est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.

Démonstration. i) \Rightarrow ii)

Supposons x entier sur $f^{(n)}$.

Alors il existe $r \geq 1$, $x^r + \sum_{i=1}^r a_i x^{r-i} = 0$, $a_i \in I_{n_i}$.

Alors il existe $r \geq 1$, $(xX^n)^r + \sum_{i=1}^r a_i X^{n_i} (xX^n)^{r-i} = 0$, $a_i \in X^{n_i} I_{n_i} \subset R(A, f)$.

Donc xX^n est entier sur $R(A, f)$.

ii) \Rightarrow iii) Évident car $R(A, f) \subset \mathcal{R}(A, f)$.

iii) \Rightarrow i) Supposons xX^n est entier sur $\mathcal{R}(A, f)$.

Alors il existe $m \geq 1$, $(xX^n)^m + \sum_{i=1}^m a_i (xX^n)^{m-i} = 0$, $a_i \in \mathcal{R}(A, f)$.

D'où $\deg((xX^n)^m) = nm$ alors $\deg(a_i) = n_i$

Ainsi $a_i \in I_{n_i} X^{n_i}$, alors $a_i = \alpha_i X^{n_i}$, $\alpha_i \in I_{n_i}$

Donc il existe $m \geq 1$, $(xX^n)^m + \sum_{i=1}^m (\alpha_i X^{n_i})(xX^n)^{m-i} = 0$, $\alpha_i \in I_{n_i}$.

Alors, il existe $m \geq 1$, $X^{nm}[x^m + \sum_{i=1}^m \alpha_i x^{m-i}] = 0$, $\alpha_i \in I_{n_i}$.

Par identification des polynômes, il vient, il existe $m \geq 1$, $x^m + \sum_{i=1}^m \alpha_i x^{m-i} = 0$, $\alpha_i \in I_{n_i}$.

Par suite, x est entier sur $f^{(n)}$. □

3.2 Clôture intégrale d'une filtration

Proposition 3.2. Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :
 $f' = (I'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$ appelée **clôture intégrale de f**

Démonstration. Supposons que $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F(A)$.

i) $I'_0 = \{x \in A, x \text{ entier sur } I_0\} = A$

Car $I_0 = A$.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $I_{n+1} \subset I_n$ alors par croissance, $I'_{n+1} \subset I'_n$.

iii) Soient $p, q \in \mathbb{N}$. $I'_q I'_p \subset (I_q I_p)' \subset (I_{p+q})' = I'_{p+q}$ car $I'J' \subset (IJ)'$ pour tout idéaux de A .

Par suite $f' = (I'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F(A)$. □

Corollaire 3.1. Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :

$\forall k \in \mathbb{N}$, on pose : $P_k(f) = \{x \in A, x \text{ entier sur } f^{(k)}\}$ est un idéal de A et la famille $P(f) = (P_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ est une filtration de A appelé **clôture prüferiennes de f** .

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$.

A) Montrons que $P_k(f)$ est un idéal de A .

i) Par définition, $P_k(f) \subset A$.

ii) 0_A est entier sur A , donc $0_A \in P_k(f)$

iii) Soient $x, y \in P_k(f)$.

Comme $x, y \in P_k(f)$ alors xX^k, yX^k sont entiers sur $R(A, f)$

D'où $xX^k + yX^k$ est entier sur $R(A, f)$ car $R(A, f)'$ est un anneau

Donc $x + y$ est entier sur $f^{(k)}$

Par suite $x + y \in P_k(f)$.

iv) Soit $a \in A$, soit $x \in P_k(f)$.

$x \in P_k(f)$ alors xX^k est entier sur $R(A, f)$.

$(ax)X^k$ est entier sur $R(A, f)$

Donc ax est entier sur $f^{(k)}$

D'où $ax \in P_k(f)$

Par suite $P_k(f)$ est un idéal de A .

B) Montrons que $P(f) = (P_k(f))_{k \in \mathbb{N}} \in F(A)$

i) $P_0(f) = \{x \in A, x \text{ entier sur } f^{(0)} = (A, \dots, A) = A\}$

D'où $P_0(f) = A$

ii) Soit $x \in P_{k+1}(f)$.

Ainsi x est entier sur $f^{(k+1)}$.

Alors il existe $n \geq 1$, $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0$, $a_i \in I_{(k+1)i} \subset I_{ki}$.

Donc x est entier sur $f^{(k)}$

Par suite $x \in P_k(f)$.

D'où $P_{k+1}(f) \subset P_k(f)$.

iii) Soient $x \in P_{k_1}(f)$ et $y \in P_{k_2}(f)$.

$xX^{k_1} \in R(A, f)'$ et $yX^{k_2} \in R(A, f)'$.

D'où $xyX^{k_1+k_2} \in R(A, f)'$ car $R(A, f)'$ est un anneau.

Donc $xy \in P_{k_1+k_2}(f)$

Par suite, $P_{k_1}(f) P_{k_2}(f) \subset P_{k_1+k_2}(f)$.

On en déduit que $P(f) = (P_k(f))_{k \in \mathbb{N}} \in F(A)$. □

Remarque 3.1. La clôture intégrale d'un idéal I de A est : $I' = P_1(f_I)$

Proposition 3.3. Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :

- (i) $f \leq f' \leq P(f)$,
- (ii) $P(P(f)) = P(f)$,
- (iii) $P(f) = P(f')$, avec $f' = (I'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la clôture intégrale de f .

Démonstration. i) Il s'agit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset I'_n \subset P_n(f)$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $x \in I_n$.

Posons $r = 1$. Ainsi $x + a_1 = x + (-x) = 0$, $a_1 = -x$

Alors $x \in I'_n$. D'où $I_n \subset I'_n$.

b) Soit $x \in I'_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \in I'_n$ alors il existe $r \geq 1$, $x^r + \sum_{i=1}^r a_i x^{r-i} = 0$, $a_i \in I_n^i$.

Or $I_n^i \subset I_{ni}$, d'où il existe $m = r \geq 1$, $x^m + \sum_{i=1}^m \alpha_i x^{m-i} = 0$, $\alpha_i = a_i \in I_{ni}$.

D'où $x \in P_n(f)$

Donc $I'_n \subset P_n(f)$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \subset I'_n \subset P_n(f)$.

c'est-à-dire que $f \leq f' \leq P(f)$

ii) Montrons que $P(P(f)) = P(f)$.

A) D'après i), $f \leq P(f) \Rightarrow P(f) \subset P(P(f))$ d'où $P(f) \subset P(P(f))$

B) Posons $g = P(f) = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $J_n = P_n(f)$

Donc $P(P(f)) = P(g)$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in P_n(g)$.

$x \in P_n(g)$ alors x est entier sur $g^{(n)}$

$x \in P_n(g)$ alors il existe $s \geq 1$, $x^s + \sum_{i=1}^s a_i x^{s-i} = 0$, $a_i \in J_{ni}$.

Or $J_{ni} = P_{ni}(f)$, ainsi $a_i \in P_{ni}(f)$ pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$.

Ainsi les a_i sont entiers sur $f^{(ni)}$. D'où $a_i X^{ni} \in R(A, f)'$

Alors $(xX^n)^s + \sum_{i=1}^s a_i X^{ni} (xX^n)^{s-i} = 0$, avec $a_i X^{ni} \in R(A, f)'$.

Donc xX^n est entier sur $R(A, f)'$.

D'où $xX^n \in [R(A, f)']' = R(A, f)'$

Par suite xX^n est entier sur $R(A, f)$.

Donc x est entier sur $f^{(n)}$

Par suite $x \in P_n(f)$.

D'où $P_n(g) \subset P_n(f)$.

c'est-à-dire $P(P(f)) \subset P_n(f)$. Donc $P(P(f)) = P_n(f)$.

iii) Montrons que $P(f) = P(f')$

D'après i) on a $f \leq f' \Rightarrow P(f) \leq P(f')$

Réciproquement, $f' \leq P(f) \Rightarrow P(f') \leq P(P(f)) = P(f)$

D'où $P(f) \leq P(f') \leq P(f)$

Par suite $P(f) = P(f')$ □

Définition 3.2. Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :

On dit que f est **intégralement fermée** si $f' = f$; ce qui signifie aussi que I_n est intégralement fermé pour tout n .

Proposition 3.4. Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :

(i) $x \in P_k(f)$ si et seulement si xX^k est entier sur $R(A, f)$,

(ii) $I_k \subseteq P_k(f) \subseteq \sqrt{f}$ et en particulier $\sqrt{(P(f))} = \sqrt{f}$.

Proposition 3.5. Soient $A \subset B$ deux anneaux.

$A' = \{x \in B, x \text{ entier sur } A\}$.

i) $A \subset A' \subset B$,

ii) $A'' = A'$.

Démonstration. i) Montrons que $A \subset A' \subset B$

a) Soit $x \in A$.

On a : $x^1 + a_1 = x^1 + (-x) = 0 \Rightarrow x \in A'$.

Donc $A \subset A'$.

b) Soit $x' \in A'$.

Par construction $x \in B$.

D'où $A' \subset B$.

Par suite $A \subset A' \subset B$

ii) D'après i) $A \subset A' \Rightarrow A' \subset A''$ (Par croissance)

Réciproquement soit $x \in A'' \Rightarrow x$ entier sur A'

Ainsi il existe $n \geq 1$, tel que $x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0, a_i \in A'$.

Alors a_i entier sur A , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

D'où $A[a_i]$ est un A -module de type fini, ainsi $A[a_1, a_2, \dots, a_n]$ est un A -module de type fini.

En effet, si

$$\begin{cases} A[a_1] = A(1_A, a_1, a_1^2, \dots, a_1^{n-1}) \\ A[a_2] = A(1_A, a_2, a_2^2, \dots, a_2^{m-1}) \end{cases}$$

des A -modules de type fini, alors

$$A[a_1, a_2] = A(a_1^i a_2^j)_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq m-1}}$$

En procédant de proche en proche, il vient $A[a_1, a_2, \dots, a_n]$ est un A -module de type fini.

Par suite, $K = A[a_1 x^{n-1}, a_2 x^{n-2}, \dots, a_n]$ est un A -module de type fini.

Soient (y_1, \dots, y_n) les générateurs de K .

Donc $K = A(y_1, \dots, y_n, x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^2, x, 1)$

D'où $A[x] \subset H$.

Par suite x est entier sur A

Donc $x \in A'$

Par suite $A'' \subset A$

Donc $A'' = A$

iii) De la même manière, on montre que $I'' = I'$. □

Définition 3.3. Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}, g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :

(a) g est **entière sur** f si $g \leq P(f)$ (où $P(f)$ est la clôture prüférienne de f). C'est à dire :

$$\forall n \geq 1, J_n \subseteq P_n(f)$$

(b) g est **fortement entière sur** f si $f \leq g$ et si $R(A, g)$ est un $R(A, f)$ -module de type fini.

3.3 Réduction d'une filtration

Définition 3.4. Soient $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ des filtrations de A telles que $f \leq g$. f est une réduction de g s'il existe des entiers $r \geq 1$ et $n_0 \geq 0$ tels que :

$$\forall n \geq n_0, \quad J_{r+n} = J_r I_n.$$

Remarque 3.2. (1) Soient I, J des idéaux de A tels que $I \subseteq J$. Alors f_I est une réduction de $f_J \iff I$ est une réduction de J .

(2) Soit I un idéal de A .

Alors f_I est une réduction de la filtration g de $A \iff g$ est I -bonne.

Proposition 3.6. Soit $f, g \in \mathbb{F}(A)$, telles que $f \leq g$.

- (i) f est une réduction de g si et seulement s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $J_{k+n} = J_k I_n$ pour tout $n \geq k$
- (ii) Si f est une réduction de g et que g est une réduction de $h \in \mathbb{F}(A)$, alors f est une réduction de h .
- (iii) Si f est une réduction de g et si h est une filtration A telle que $f \leq h \leq g$ alors h est une réduction de g

Démonstration. i) Supposons que f soit une réduction de g . Alors :

(a) $f \leq g$

(b) $\exists r \geq 1, n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, J_{r+n} = J_r I_n$

Soit $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que $m_0 r \geq n_0$

Posons $k = m_0 r$

Alors $J_{k+n} = J_{m_0 r + n} = J_{m_0 r} I_n = J_k I_n$ car $k \geq n_0$.

La réciproque est évidente.

ii) Supposons que f est une réduction de g et g une réduction de h .

* $f \leq g \leq h \Rightarrow f \leq h$

* Comme g est une réduction de h alors, il existe $k' \geq 1, H_{k'+n} = H_{k'} J_n$, pour tout $n \geq k'$.

Posons $k'' = k'(k' + 1)$ comme dans (i)

Ainsi en utilisant (i) car f est une réduction de g , il vient $H_{k''+n} = H_{k''} I_n$, pour tout $n \geq k''$.

Par suite f est une réduction de h .

iii) Supposons que f réduction de g et que $f \leq h \leq g$.

Soit k comme dans (i).

Comme $h \leq g$ alors pour tout $n \geq k, J_k H_n \subseteq J_k J_n = J_{k+n} \subseteq J_k H_n$ car $f \leq h$.

Donc $J_{k+n} = J_k H_n$, pour tout $n \geq k$.

Par suite h est réduction de g . □

Proposition 3.7. *Si $f = (I_n)$ est une réduction de $g = (J_n)$ alors :*

(i) f est A.P. et g est fortement A.P

(ii) g est E.P et f — bonne

(iii) En plus, si A est noethérien alors f et g sont noethériennes et g est fortement entière sur f .

Remarque 3.3. *Cependant, le fait que g soit fortement entière sur f n'implique pas nécessairement que f soit une réduction de g , même si f et g sont noethériennes. Or peut le voir sur l'exemple suivant :*

Soit $A = k[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée sur le corps k . Soit $I = XA$.

On considère les filtrations $f = (I_n)$ et $g = (J_n)$ définies par :

$$I_n = \begin{cases} I^{\frac{3n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ I^{\frac{3n+3}{2}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$J_n = \begin{cases} I^{\frac{3n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ I^{\frac{3n+1}{2}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

On vérifie que g est noethérienne et que $f \leq g$. De plus, la filtration g est entière sur f .

En effet pour tout élément $b \in J_n, b^2 \in J_{2n}$ et on a $(bY^n)^2 = b^2 Y^{2n} \in R(A, f)$.

L'anneau $R(A, g)$ est donc entier sur $R(A, f)$. De plus, comme g est noethérienne, il résulte que g est fortement

entière sur f et que f est noethérienne.

Néanmoins, f n'est pas une réduction de g puisqu'on n'a pas $J_{2p+1}^2 = I_{2p+1}J_{2p+1}$, pour p suffisamment grand, condition nécessaire pour qu'une filtration f soit une réduction de g quand l'anneau A est noethérien.

Remarque 3.4. Soit $f \in \mathbb{F}(A)$. On suppose que A est noethérien. Alors f est une réduction de $f \iff f$ est noethérienne.

3.3.1 Réduction au sens de Okon-Ratliff

Définition 3.5. (α -réduction ou réduction au sens de Okon-Ratliff)

Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux filtrations de A .

f est une α -réduction de g si :

$$i) f \leq g$$

$$ii) \exists N \geq 1 \text{ tel que } \forall n \geq N; J_n = \sum_{p=0}^N I_{n-p} J_p.$$

Remarque 3.5. Soit \mathfrak{R} la relation $f \mathfrak{R} g \iff f$ est une α -réduction de g . Notons que cette relation est une relation d'ordre sur l'ensemble des filtrations.

Démonstration. (i) **Réflexivité**

Posons $N = 1$.

$$\sum_{p=0}^1 I_{n-p} I_p = I_n I_0 + I_{n-1} I_1 = I_{n-1} I_1 = I_n \quad (\text{car } I_0 \subset I_1).$$

D'où $f \mathfrak{R} f$

(ii) **Transitivité**

Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $h = (H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des filtrations de A .

Supposons que $f \mathfrak{R} g$ alors $f \leq g$ et il existe $N_1 \geq 1, \forall m \geq N_1, J_m = \sum_{p=0}^{N_1} I_{m-p} J_p$.

Supposons que $g \mathfrak{R} h$ alors $g \leq h$ et il existe $N_2 \geq 1, \forall k \geq N_2, H_k = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p} H_p$. D'où

$f \leq g \leq h$. Donc $f \leq h$.

De plus posons $N = N_1 + N_2$

$$H_k = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p} H_p + \sum_{p=N_2+1}^N J_{k-p} H_p = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p} H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p \text{ pour tout } k \geq N_1 + N_2$$

Comme $k \geq N_1 + N_2$ alors $k - N_2 \geq N_1$ et $p \leq N_2$ alors $k - p \geq N_1$

$$\text{D'où } J_{k-p} = \sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i} J_i$$

$$\text{Ainsi } H_k = \sum_{p=0}^{N_2} \left(\sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i} J_i \right) H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p$$

$$\text{Donc } H_k \subset \sum_{p=0}^{N_2} \sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i} J_i H_{p+i} + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p \text{ car } g \leq h \text{ d'où } J_i \subset H_i \subset H_i H_p \subset H_{i+p}$$

Posons $l = p + i$, ainsi $0 \leq l \leq N_1 + N_2$ car $0 \leq p \leq N_2$ et $0 \leq i \leq N_1$

$$\text{D'où } H_k \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p$$

$$\text{Posons } K = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p$$

$$\text{Comme } p \geq N_2 \text{ alors } H_p = \sum_{i=0}^{N_2} J_{p-i} H_i$$

$$\text{D'où } K = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} \left(\sum_{i=0}^{N_2} J_{p-i} H_i \right) = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} \sum_{i=0}^{N_2} J_{k-p} J_{p-i} H_i$$

$$\text{Donc } K \subset \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} \sum_{i=0}^{N_2} J_{k-i} H_i = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i} H_i \quad K \subset \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i} H_i \text{ or } 0 \leq i \leq N_2 \text{ et } N_1 + N_2 \leq k$$

d'où $k - i \geq N_1$

$$\text{Ainsi } J_{k-i} = \sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l} J_l$$

$$\text{D'où } K \subset \sum_{p=0}^{N_2} \left(\sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l} J_l \right) H_i \subset \sum_{p=0}^{N_2} \sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l} J_l H_i \subset \text{Posons } p = i + l$$

$$\text{D'où } K \subset \sum_{p=0}^{N_1+N_2} I_{k-p} H_p \text{ or } H_k \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p} H_p = \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l + K \subset$$

$$\sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l \text{ car } K \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l$$

$$\text{Donc } H_k \subset H_{k-p} H_p \subset H_k$$

$$\text{Finalement } H_k = \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l} H_l \text{ Par suite } f\mathfrak{R}h.$$

(iii) Anti-symétrie

Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des filtrations de A telles que :

$f\mathfrak{R}g$ alors $f \leq g$ et $g\mathfrak{R}f$ alors $g \leq f$.

D'où $f = g$

On en déduit que R est une relation d'ordre. \square

Proposition 3.8. Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux filtrations de A . $f \geq g$ et chaque J_n est de type fini, alors f est une α -réduction de g si et seulement si $R(A, g)$ est un $R(A, f)$ -module de type fini.

Démonstration. Supposons que f est une α -réduction de g .

$$\text{Alors } f \leq g \text{ et } \exists N \geq 1 \text{ tel que } \forall n \geq N; J_n = \sum_{p=0}^N I_{n-p} J_p.$$

$$\text{Prouvons que } R(A, g) = R(A, f)(J_0, J_1 X_1, \dots, J_N X_N) = M.$$

$$J_n X_n \subseteq R(A, g), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow R(A, f) \subseteq R(A, g) \text{ car } f \leq g, \text{ Donc } M \subseteq R(A, g).$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, J_n X^n \subseteq M$ Si $n \leq N, J_n X^n \subseteq M$, par construction.

Soit $n \geq N$, supposons la propriété vraie et montrons que $J_{n+1} X^{n+1} \subseteq M$.

$$J_{n+1} = \sum_{p=0}^N I_{n+1-p} J_p \Rightarrow J_{n+1} X^{n+1} = \sum_{p=0}^N I_{n+1-p} J_p X^{n+1},$$

$$\text{D'où } J_{n+1} X^{n+1} = \sum_{p=0}^N I_{n+1-p} X^{n+1-p} J_p X^p \subseteq M.$$

Ainsi $R(A, g)$ est un $R(A, f)$ -module de type fini.

Supposons que $R(A, g)$ est un $R(A, f)$ -module de type fini.

Montrons que f est une α -réduction de g .

Par hypothèse on a : $f \leq g$.

Trouvons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N; J_n = \sum_{p=0}^N I_{n-p} J_p$.

$R(A, g)$ étant un $R(A, f)$ -module de type fini alors

$R(A, g) = R(A, f)(1, Z_1, \dots, Z_r)$, $Z_i \in R(A, g)$ et les Z_i sont homogènes de degré i .

Posons $N = r$

Soit $z \in J_n$.

$$z \in J_n \Rightarrow z X^n \in J_n X^n \subseteq R(A, g), \text{ d'où } z X^n = \sum_{p=0}^r h_p Z_p, \text{ } h_p \in R(A, f) \text{ et } Z_0 = 1.$$

h_p homogène de degré $n - p \Rightarrow h_p \in I_{n-p} X^{n-p}$, on déduit de cela que : $h_p = a_{n-p} X^{n-p} \in I_{n-p} X^{n-p}$.

Aussi Z_p est homogène de degré $p \Rightarrow Z_p = b_p X^p \in J_p X^p$.

$$\text{Ainsi } z X^n = \sum_{p=0}^r a_{n-p} X^{n-p} b_p X^p \Rightarrow z X^n = \sum_{p=0}^r a_{n-p} X^n b_p, \text{ ce qui implique que } z =$$

$$\sum_{p=0}^r a_{n-p} b_p \in \sum_{p=0}^r I_{n-p} J_p, \text{ par conséquent } J_n \subseteq \sum_{p=0}^r I_{n-p} J_p \subseteq J_n.$$

En sommes $J_n = \sum_{p=0}^r I_{n-p} J_p$, donc f est une α -réduction de g . □

3.3.2 Réduction au sens de Dichi-Sangaré

Définition 3.6. (β -réduction ou réduction au sens de Dichi-Sangaré)

Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux filtrations de A .

f est une β -réduction de g si :

$$i) f \leq g$$

$$ii) \exists k \geq 1 \text{ tel que } J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k.$$

Remarque 3.6. Si f est une β -réduction de g alors f est une α -réduction de g .

Démonstration. Supposons que f est une β -réduction de g .

Alors $f \leq g$ et $\exists k \geq 1$ tel que $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$.

Posons $N = 2k$

Soit $n \geq N = 2k$,

$$\sum_{p=0}^{2k} I_{n-p} J_p = \sum_{p=0}^{k-1} I_{n-p} J_p + I_{n-k} J_k + \sum_{p=0}^{k+1} I_{n-p} J_p, \text{ or } n \geq 2k \Rightarrow n - k \geq k \text{ et comme } f \text{ est}$$

une β -réduction de g alors, $I_{n-k}J_k = J_n$.

$$\text{Donc } \sum_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p = \sum_{p=0}^{k-1} I_{n-p}J_p + J_n + \sum_{p=0}^{k+1} I_{n-p}J_p \Rightarrow J_n \subseteq \sum_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p.$$

$$\text{De plus on a : } \sum_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p \subseteq J_n, \text{ Par conséquent } J_n = \sum_{p=0}^{2k} I_{n-p}J_p.$$

On déduit donc de tout ce qui précède que f est une α -réduction de g . \square

Proposition 3.9. Soient I et J deux idéaux de A .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- i) I est une réduction de J .
- ii) f_I est une α -réduction de f_J .
- iii) f_I est une β -réduction de f_J .

Démonstration. i) \Rightarrow ii)

Supposons que I est une réduction de J .

Alors $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $J^{N+1} = IJ^N$,

$I \subseteq J \Rightarrow I^n \subseteq J^n, \forall n \in \mathbb{N}$, d'où $f_I \leq f_J$.

Posons $N_0 = N + 1$,

Soit $n \geq N_0$,

$$\sum_{p=0}^{N+1} I^{n-p}J^p = \sum_{p=0}^N I^{n-p}J^p + I^{n-N-1}J^{N+1}, \text{ comme } I \text{ est une réduction de } J \text{ alors, } I^{n-N-1}J^{N+1} =$$

$$J^{n-N-1+N+1} = J^n. \text{ Donc } \sum_{p=0}^{N+1} I^{n-p}J^p = \sum_{p=0}^N I^{n-p}J^p + J^n,$$

$$\text{ainsi } J^n \subseteq \sum_{p=0}^{N+1} I^{n-p}J^p \subseteq J^n.$$

f_I est donc une α -réduction de f_J .

ii) \Rightarrow iii)

Supposons que f_I est une α -réduction de f_J .

$$\text{Alors } f_I \leq f_J \text{ et } \exists N_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N_0, J^n = \sum_{p=0}^{N_0} I^{n-p}J^p.$$

Posons $N = N_0$

Soit $n \geq N$,

$$I^n J^{N_0} = \sum_{p=0}^{N_0} I^n I^{N_0-p} J^p = \sum_{p=0}^{N_0} I^{n+N_0-p} J^p = J^{N_0+n} \Rightarrow I^n J^{N_0} = J^{N_0+n},$$

d'où f_I est une β -réduction de f_J .

iii) \Rightarrow i) Supposons que f_I est une β -réduction de f_J .

$f_I \leq f_J$ et $\exists N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N_0, J^{n+N_0} = I^n J^{N_0}$

$f_I \leq f_J \Rightarrow I \subseteq J$.

Posons $N = 2N_0$

$$J^{N+1} = J^{2N_0+1} = J^{N_0+N_0+1} = I^{N_0+1} J_0^N = I I^{N_0} J^{N_0} = I J^{2N_0}.$$

Donc $J^{N+1} = I J^N$ ce qui fait que I est une réduction de J . \square

Proposition 3.10. Soient A un anneau commutatif unitaire, I un idéal de A et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration de A .

f_I est une β -réduction de g si et seulement si g est I -bonne.

Démonstration. Supposons que f_I est une β -réduction de g .

Cela implique que $f_I \leq g$ et $\exists N_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N_0, J_{n+N_0} = I^n J_{N_0}$.

$f_I \leq g \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, IJ_n \subseteq J_{n+1}$.

Posons $N = 2N_0$

Soit $n \geq N$,

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_{n-N_0-N_0+1} \\ &= J_{n-N_0+1N_0} \\ &= I^{n-N_0+1} J_{N_0} \\ &= II^{n-N_0} J_{N_0} \\ &= IJ_n \end{aligned}$$

D'où $\forall n \geq 2N_0, IJ_n = J_{n+1}$, g est donc I -bonne. \square

Remarque 3.7. En effet bien qu'on puisse parler de réduction minimale pour un idéal quelconque sur un anneau local, cela n'est pas possible pour toutes les filtrations. On montre ainsi dans cet exemple que toutes les filtrations n'admettent pas de réduction minimale.

Exemple 3.1. Soient l'anneau $A = k[X]$ où k est un corps et $I = (X)$ un idéal de A . Considérons la filtration $f = (A, I, I, I^2, I^2, I^3, I^3, \dots)$

$I_{2n} = I_{2n-1} = I^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Montrons que f est une filtration noethérienne mais pas une filtration I -bonne.

• La filtration f est fortement AP car,

en prenant $k = 2$ on a : $I_{2n} = I^n = I_2^n$.

L'anneau A étant noethérien alors la filtration f est noethérienne.

• Supposons que la filtration f est fortement noethérienne alors, il existe $k \geq 1$ tel que pour tous $m, n \geq k$ on a : $I_{m+n} = I_m I_n$.

Posons $m = 2k + 1$ et $n = 2p + 1$ où $p \geq k$

$I_{m+n} = I_{2k+1+2p+1} = I_{2(k+p+1)} = I^{k+p+1}$.

$I_m I_n = I_{2k+1} I_{2p+1} = I_{2(k+1)-1} I_{2(p+1)-1} = I^{k+1} I^{p+1} = I^{k+p+2}$

$$\begin{aligned} I_{m+n} = I_m I_n &\Rightarrow I^{k+p+1} = I^{k+p+2} \\ &\Rightarrow (X)^{k+p+2} = (X)^{k+p+1} \\ &\Rightarrow X^{k+p+1} = QX^{k+p+2} \\ &\Rightarrow 1 = XQ \end{aligned}$$

Ainsi on a donc X inversible ce qui est absurde, par suite la filtration f n'est pas noethérienne. Comme la filtration f n'est pas noethérienne alors elle n'est pas I -bonne. De plus il existe pas d'entier $r \geq 1$ tel que I_r soit idempotent, par conséquent notre filtration f n'admet pas de réduction minimale.

3.4 Filtrations f-bonnes

Définition 3.7. Soient A un anneau et M un A -module.

On suppose que $\varphi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est f -compatible, avec $f \in \mathbb{F}(A)$. Alors :

(a) φ est **faiblement** f -bonne s'il existe un entier naturel $N \geq 1$ tel que :

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=0}^N I_{n-p} M_p$$

(b) φ est f -bonne s'il existe un entier naturel $N \geq 1$ tel que :

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^N I_{n-p} M_p$$

(c) φ est f -fine s'il existe un entier naturel $N \geq 1$ tel que :

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^N I_p M_{n-p}$$

Remarque 3.8. (1) Toute filtration f -bonne est faiblement f -bonne

(2) Soit $f \in \mathbb{F}(A)$. Alors f est faiblement f -bonne.

(3) Soit $f \in \mathbb{F}(A)$. Alors f est f -bonne si et seulement si f est E.P.

(4) Soient $g = (J_n)$ et $f = (I_n) \in \mathbb{F}(A)$ telles que $f \leq g$ alors :

- g est fortement entière sur $f \implies g$ est faiblement f -bonne
- En d'autres termes, si g est faiblement f -bonne alors il existe un entier naturel $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

(5) Soient $\varphi \in \mathbb{F}(M)$ et I un idéal de A . Alors φ est I -bonne $\iff \varphi$ est f_I -bonne, où f_I est la filtration I -adique.

Proposition 3.11. Toute filtration φ de M f -fine est f -bonne

Démonstration. Supposons que $\varphi = (M_n)$ est une filtration de M qui est f -fine, où $f = (I_n)$ une filtration de A .

Alors il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N$, $M_n = \sum_{p=1}^N I_p M_{n-p}$.

Comme $n > N$, posons $n = N + 1$, ainsi

$$M_{N+1} = \sum_{p=1}^N I_p M_{N+1-p} = \sum_{q=1}^N I_{N+1-q} M_q, \text{ avec } q = N + 1 - p.$$

Ainsi, il vient de proche en proche que $M_{N+j} = \sum_{p=1}^N I_{N+j-p} M_p$, pour tout j avec $1 \leq j \leq m$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } M_{N+m} &= \sum_{p=1}^N I_p M_{N+m-p} = \sum_{q=m}^{N+m-1} I_{N+m-q} M_q = \sum_{q=m}^N I_{N+m-q} M_q + \sum_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} M_q = \\ &= \sum_{q=m}^N I_{N+m-q} M_q + \sum_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} \left(\sum_{p=1}^N I_{q-p} M_p \right). \end{aligned}$$

$$\text{Or } \sum_{q=m}^N I_{N+m-q} M_q \subseteq \sum_{p=1}^N I_{N+m-p} M_p \text{ et } \sum_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} \left(\sum_{p=1}^N I_{q-p} M_p \right) = \sum_{p=1}^N \left(\sum_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-p} \right) M_p = \sum_{p=1}^N I_{N+m-p} M_p \subseteq M_{N+m}$$

Par suite φ est f -bonne, l'inclusion inverse étant évidente. \square

Corollaire 3.2. Soient $f, g \in \mathbb{F}(A)$ avec $f \leq g$. Si A est noethérien alors :
 g faiblement f -bonne $\iff g$ est fortement entière sur f

Proposition 3.12. Soient $f = (I_n)$ une filtration E.P. de A et $\varphi = (M_n) \in \mathbb{F}(M)$.
 Nous avons les assertions suivantes :

$$\varphi \text{ est } f\text{-fine} \iff \varphi \text{ est } f\text{-bonne} \iff \varphi \text{ est faiblement } f\text{-bonne}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que φ est faiblement f -bonne si φ est f -fine.
 Supposons que φ est faiblement f -bonne.

Soient $N, N' \geq 1$ des entiers tels que pour tout $n \geq N$, $M_n = \sum_{p=0}^N I_{n-p} M_p$ et pour tout

$n \geq 1$, $I_n = \sum_{p=1}^{N'} I_{n-p} I_p$. Alors pour $n > N'' = N + N'$,

$$M_n = \sum_{p=0}^N I_{n-p} M_p = \sum_{p=0}^N \left(\sum_{q=1}^{N'} I_{n-p-q} I_p \right) M_p = \sum_{q=1}^{N'} I_q \left(\sum_{p=0}^N I_{n-p-q} M_p \right) = \sum_{q=1}^{N'} I_q M_{n-q} \subseteq \sum_{q=1}^{N''} I_q M_{n-q}$$

Donc $M_n = \sum_{q=1}^{N''} I_q M_{n-q}$, l'inclusion inverse étant triviale. \square

Corollaire 3.3. Soient $f, g \in \mathbb{F}(A)$. Si A est noethérien, $f \leq g$ et f noethérien. Alors nous avons les assertions suivantes :

$$g \text{ est } f\text{-fine} \iff g \text{ est } f\text{-bonne} \iff g \text{ est faiblement } f\text{-bonne} \iff g \text{ est fortement entière sur } f$$

Proposition 3.13. Soient $f = (I_n), g = (J_n) \in \mathbb{F}(A)$, tel que $f \leq g$.
 Si g est f -bonne, E.P. et A est noethérien alors f et g sont noethériennes.

Démonstration. Il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N$, $J_n = \sum_{p=1}^N I_{n-p} J_p \subseteq$

$$\sum_{p=1}^N J_{n-p} J_p \subseteq J_n$$

Donc $J_n = \sum_{p=1}^N J_{n-p} J_p$ pour tout $n > N$.

Cette égalité est valable si $1 \leq n \leq N$.

Comme g est E.P. et A noethérien alors g est fortement entière sur f .

Par suite g est noethérien et d'après le théorème de Eakin, f est noethérien. \square

Proposition 3.14. Soient $f = (I_n), g = (J_n) \in \mathbb{F}(A)$, tel que $f \leq g$.

Si g est faiblement f -bonne alors :

f est A.P. $\iff g$ est A.P.

Démonstration. Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}, g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F(A)$.

Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que $I_n \subseteq J_n \subseteq I_{n-N} \subseteq J_{n-N}$ pour tout $N \geq 1$.

Si f est A.P. alors il existe une suite d'entiers $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = 1$ et $I_{k_n m} \subseteq I_n^m$

pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Par suite, $J_{(k_n+N)m} \subseteq J_{k_n m + Nm} \subseteq J_{k_n m + N} \subseteq I_{k_n m + N} \subseteq I_{k_n m} \subseteq I_n^m \subseteq J_n^m$.

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n + N}{n} = 1$, g est A.P.

Réciproquement si g est A.P. alors il existe une suite d'entiers $(k'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à g .

Alors $I_{k'_n + N, m} \subseteq J_{k'_n + N, m} \subseteq J_{n+N}^m \subseteq I_n^m$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k'_n + N}{n} = 1$, f est A.P. □

Corollaire 3.4. Soient $f = (I_n), g = (J_n) \in \mathbb{F}(A)$, tel que $f \leq g$ et A est noethérien. Si f ou g est noethérien alors g est f -bonne $\iff g$ est fortement entière sur f .

Proposition 3.15. Soit A un anneau noethérien. Soient $f, g \in \mathbb{F}(A)$.

Si f est noethérienne alors g est fortement entière sur $f \iff$ il existe un entier naturel $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$.

Proposition 3.16. Soient $f, g \in \mathbb{F}(A)$. Alors :

g est entière sur $f \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, g^{(k)}$ est entière sur $f^{(k)} \iff \exists k \in \mathbb{N}^*, g^{(k)}$ est entière sur $f^{(k)}$

Proposition 3.17. Soit A un anneau noethérien et g une filtration de A fortement entière sur f ou g est fortement A.P. de rang r , alors pour tout entier naturel $m \geq 1$, $g^{(rm)}$ est fortement entière sur $f^{(rm)}$.

Démonstration. Si g est fortement A.P. alors f est fortement A.P. Alors Supposons que seulement f est fortement A.P. de rang r .

Il existe un entier $N \geq 0$ tel que $t_N g \leq f \leq g$.

Posons $f = (I_n), g = (J_n), f_1 = f^{(rm)}, g_1 = g^{(rm)}$.

Nous avons $J_{N+n} \subseteq I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De même $J_{rm(N+n)} \subseteq J_{N+rmn} \subseteq I_{rmn}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'où $t_N g_1 \leq f_1 \leq g_1$.

Or par hypothèse, $f^{(r)} = f_{I_r}$ alors $f^{(rm)} = f_{I_{rm}}$ qui est noethérienne.

Donc g_1 est fortement entière sur f_1 . □

Corollaire 3.5. Soient $f, g \in \mathbb{F}(A)$, tel que $f \leq g$. Si A est noethérien et g est fortement entière sur f . Alors f est fortement A.P $\iff g$ est fortement A.P.

Proposition 3.18. Si f est une filtration I-adique alors nous avons les implications suivantes :

f est fortement A.P $\iff f$ est A.P $\iff f$ est fortement noethérienne $\iff f$ est noethérienne $\iff f$ est E.P

Corollaire 3.6. Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux filtrations de A , tel que $f \leq g$. Si f ou g est noethérienne. Alors :
 g est f – bonne $\iff g$ est fortement intégral sur f

Proposition 3.19. Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux filtrations de A tel que f est une réduction de g alors :
 g est E.P et g est f – bonne.

Proposition 3.20. Lorsque f est une filtration fortement noethérienne et g est une filtration noethérienne de l'anneau noethérien A vérifiant $f = (I_n) \leq g = (J_n)$, on montre que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est une réduction de g
- (ii) $J_n^2 = I_n J_n, \forall n \gg 0$
- (iii) L'idéal I_n est une réduction de l'idéal J_n pour tout $n \gg 0$
- (iv) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que g^k soit I_k – bonne
- (v) $\forall m \geq 1, f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$
- (vi) $\exists m \geq 1$, tel que $f^{(m)}$ soit une réduction de $g^{(m)}$
- (vii) g est entière sur f
- (viii) g est fortement entière sur f
- (ix) g est f – fine
- (xi) g est faiblement f – bonne
- (x) g est f – bonne
- (xii) $\exists m \geq 1$, tel que $t_m f \leq f \leq g$
- (iii) $(P_k(f)) = (P_k(g))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

En particulier, il résulte des équivalences ci-dessus que si f est une filtration I – adique de l'anneau noethérien A et si g est une filtration noethérienne dominée par g , les notions suivantes sont équivalentes :

- (1) f_I est une réduction de g
- (2) g est entière sur f_I .
- (3) g est fortement entière sur f_I
- (4) g est I – bonne

Proposition 3.21. Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux filtrations de A , tel que $f \leq g$. Nous considérons les assertions suivantes :

- (i) g est f – bonne
- (ii) g est fortement entière sur f
- (iii) g est f – fine
- (iv) g est faiblement f – bonne
- (v) $\exists N \geq 1$ un entier tel que $t_N g \leq f \leq g$.

Proposition 3.22. Sous les hypothèses du théorème (3.21) en admettant que A est noethérien et f est noethérienne alors : (i) \iff (ii) \iff (iii) \iff (vi) \iff (v).

Conclusion

L'objectif de ce travail était l'étude de la dépendance intégrale et de la réduction par rapport aux idéaux à travers la filtration I-adique qui est une filtration I-bonne. Ensuite, nous avons montré la dépendance intégrale et la réduction des filtrations bonnes en générale

Comme perspectives, nous projetons d'effectuer :

- Une étude du nombre de réduction sur les filtrations bonnes i.e le nombre de Samuel.
- Une étude de la largeur analytique qui représente le lien entre la dépendance intégrale et la réduction des filtrations bonnes.

Bibliographie

- [1] Dichi H, *Integral dependence over a filtration*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 58, No. 1, 1989, pp. 7-18.
- [2] Dichi H., *Travaux de recherches, en vue de l'habilitation à diriger une recherche*, 1999.
- [3] Dichi H., Sangare D., et Soumare M, *Filtrations, integral dependence, reduction, f-good filtrations*, Communications in Algebra, Vol. 20, No. 8, 1992, pp. 2393-2418.
- [4] Northcott D. G., et Rees D., *Reductions of ideals in local rings*, in Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 50, No. 2, 1954, pp. 145-158.
- [5] Okon J. S., et Ratliff L, *Reductions of filtrations*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 144, No. 1, 1990, pp. 137-154.
- [6] P.Eakin, *The converse to a well known theorem on noetherian rings*, Math. Ann., Vol. 177, 1968, pp. 278-282.
- [7] Ratliff Jr L. J., *Notes on essentially powers filtrations*, Michigan Mathematical Journal, Vol.26, No. 3, 1979, pp. 313-324.