SOUTENANCE DE MÉMOIRE DE MASTER OPTION: ALGÈBRE COMMUTATIVE ET CRYPTOGRAPHIE SPÉCIALITÉ: THÉORIE DES FILTRATIONS

KABLAM Edjabrou Ulrich Blanchard

Université NANGUI ABROGOUA
UFR Sciences Fondamentales Appliquées

10 Juillet 2024

THÈME : **DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES**

Directeur de Mémoire : Mr. ASSAN Abdoulaye, M.C.

Encadrant scientifique : Mr. BROU Kouadjo Pierre, M.A.

PLAN DE PRÉSENTATION

INTRODUCTION
FILTRATIONS

(i) $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$, décroissante pour l'inclusion et vérifiant $I_0 = A$ et $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$.

(ii) Une filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite $I - bonne$ si pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad II_n \subseteq I_{n+1}$ et s'il existe k un entier tel que pour tout $n \geqslant k$, $II_n = I_{n+1}$.

INTRODUCTION

PROPRIÉTÉ DES FILTRATIONS I-ADIQUES

$$
\begin{tikzcd}
\text{f I-adique} \arrow[r] & \text{f I-bonne} \arrow[r] \arrow[d] & \text{f fortement A.P} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \text{f A.P} \\
 & \text{f fortement noethérienne} \arrow[r] & \text{f noethérienne} &
\end{tikzcd}
$$

INTRODUCTION
ÉLÉMENT ENTIER ET RÉDUCTION

(i) Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que : $x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^{m} a_i x^{m-i} = 0$, $m \in \mathbb{N}^*$ où $a_i \in I_i$, $\forall i = 1, \cdots, m$.

(ii) f est une β-réduction de g si :

a) $f \leq g$
b) $\exists\, k \geq 1$ tel que $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$.

INTRODUCTION

FILTRATIONS f-BONNES

Soient $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(M)$, $f-$ *compatible*, avec $f \in \mathbb{F}(A)$.
φ est $f-$ **bonne** s'il existe un entier naturel N $\geqslant$ 1 tel que :

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} M_p$$

(i) Comment étendre les résultats des filtrations I-adiques aux filtrations bonnes ?

(ii) Comment la dépendance intégrale et la réduction interagissent-elles avec les filtrations bonnes ?

Théorème Principal (1/11)

Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des filtrations sur l'anneau A. Nous considérons les assertions suivantes :

(i) f est une réduction de g.

(ii) $J_n^2 = I_nJ_n$ pour tout n assez grand.

(iii) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.

(iv) Il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_sJ_n$, $I_{s+n} = I_sI_n$, $J_s^2 = I_sJ_s$, $J_{s+p}I_s = I_{s+p}J_s$ pour tout $p = 1, 2, ..., s-1$

(v) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$

Théorème Principal (2/11)

(vi) Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$.

(vii) Pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.

(viii) g est *entière* sur f.

(ix) g est *fortement entière* sur f.

(x) g est f − *fine*.

Théorème Principal (3/11)

(xi) g est $f - bonne$.

(xii) g est *faiblement* $f - bonne$.

(xiii) Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

(xiv) Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g' \leq t_N f'$ où f' est la clôture intégrale de f.

(xv) $P(f) = P(g)$, où $P(f)$ est la clôture prüférienne de f.

Théorème Principal (4/11)

On a les résultats suivants :

(1)

(a) f est une réduction de g si et seulement si pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.

(b) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$ si et seulement s'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$.

(c) g est *entière* sur f si et seulement si $P(f) = P(g)$

Théorème Principal (5/11)

On a les résultats suivants :

(1)

(d) Si $J_n^2 = I_nJ_n$ pour tout n assez grand alors I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.

(e) S'il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_sJ_n$, $I_{s+n} = I_sI_n$, $J_s^2 = I_sJ_s$, $J_{s+p}I_s = I_{s+p}J_s$ pour tout $p = 1, 2, ..., s-1$ alors f est une réduction de g.

(f) Si f est une réduction de g alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$

Théorème Principal (6/11)

On a les résultats suivants :

(1)

(g) Si g est fortement entière sur f alors :

- Pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.
- g est *faiblement* $f-$ *bonne*.
- Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

Théorème Principal (7/11)

On a les résultats suivants :

(1)

(h) f est une réduction de $g \implies g$ est $f-fine \implies g$ est $f-bonne$

(i) g est $f-bonne \implies g$ est $faiblement\ f-bonne \implies$ Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

Théorème Principal (8/11)

On a les résultats suivants :

(2) Si de plus on suppose A noethérien, alors :

(j) Il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_s J_n$, si et seulement s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g' \leq t_N f'$ où f' est la clôture intégrale de f.

(k) f est une réduction de g si $J_n^2 = I_n J_n$ pour tout n assez grand.

(l) f est une réduction de g $\Longrightarrow$ g est *fortement entière* sur f $\Longleftrightarrow$ g est *faiblement f − bonne*.

Théorème Principal (9/11)

On a les résultats suivants :
(3) Par ailleurs, si f est noethérienne, alors A est noethérien et les assertions suivantes sont équivalentes :

(m) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand $\Longleftrightarrow$ g est $f-$*fine* $\Longleftrightarrow$ g est $f-$*bonne* $\Longleftrightarrow$ g est *faiblement* $f-$*bonne* $\Longleftrightarrow$ Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

Théorème Principal (10/11)

On a les résultats suivants :

(4) Si f et g sont noethériennes alors nous avons :

(n) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand $\Longrightarrow$ g est entière sur f $\Longleftrightarrow$ g est fortement entière sur f

(o) Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$ $\Longrightarrow$ g est fortement entière sur f

Théorème Principal (11/11)

On a les résultats suivants :
(5) Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les quinze (15) assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne.

Démonstration

1) $(i) \Longleftrightarrow (vii)$. Supposons f est une réduction de g et choisissons un entier k, $k \geqslant 1$ tel que $J_{k+n} = J_k I_n$ pour tout $n \geqslant k$. Pour un tel entier k et pour tout $m \geqslant 1$, $J_{mk} = J_k^p J_{(m-p)k}$ pour tout $p = 1, 2, \cdots, m$ alors pour tout entiers $m \geq 1$ et $n \geq k$, $J_{m(k+n)} = J_{mk} I_{mn}$, ce qui entraîne que pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$. La réciproque est évidente.

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

RÉSULTATS

Démonstration

$(v) \Longrightarrow (vi)$. Supposons qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$. Posons $f^{(k)} = (H_n)$; $g^{(k)} = (K_n)$; $H_n = I_{nk}$; $K_n = J_{nk}$; $H_1 = I_k$;
Par hypothèse, $H_1 K_n \subseteq K_{n+1}$ pour tout entier n et il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $H_1 K_n = K_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.
Pour tout entier $m \geq 0$, $K_{n_0+m} = H_1^m K_{n_0} \subseteq H_m K_{n_0} \subseteq K_{n_0+m}$.
Donc $K_{n_0+m} = K_{n_0} H_m$ pour tout entier m. Donc $f^{(k)}$ est une réduction de $g^{(k)}$.

Démonstration

$(vi) \Longrightarrow (v)$.

Supposons qu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$. Il suffit de montrer que si f est une réduction de g alors il existe $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$.

Posons un entier k, $k \geqslant 1$ tel que $J_{k+n} = J_k I_n$ pour tout $n \geqslant k$. Pour un tel entier k et pour tout $m \geqslant 1$, $J_{mk} = J_k^p J_{(m-p)k}$ pour tout $p = 1, 2, \cdots, m$, alors pour tout entiers $m \geq 1$ et $J_{k(m+1)} = J_{mk} I_k$, donc $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$.

Démonstration

$(viii) \iff (xv)$.
Si g est entière sur f alors $f \leq g \leq P(f)$, ainsi
$P(f) \leq P(g) \leq P(P(f)) = P(f)$, donc $P(g) = P(f)$.
Réciproquement si $P(f) = P(g)$ alors $g \leq P(g) = P(f)$ et donc g est entière sur f.
$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Évident.

Démonstration

$(iv) \Longrightarrow (i)$.
Supposons qu'il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_s J_n$, $I_{s+n} = I_s I_n$, $J_s^2 = I_s J_s$, $J_{s+p} I_s = I_{s+p} J_s$ pour tout $p = 1, 2, ..., s-1$.
Posons $n \geq 2s$ et $n = qs + p$ avec $0 \leq p < s$.
Alors $J_{s+n} = J_{(q-2)s+2s+(s+p)} = J_s^{q-2} J_{2s+(s+p)} = J_s^{q-2} J_s^2 J_{s+p} = J_s^{q-1} I_s J_{s+p} = J_s^{q-1} J_s I_{s+p} = J_s^q I_{s+p} = J_s I_s^{q-1} I_{s+p} \subseteq J_s I_n \subseteq J_{s+n}$.
Par suite $J_{s+n} = J_s I_n$ pour tout $n \geq 2s$. Donc $J_{2s+n} = J_{2s} I_n$ pour tout $n \geq 2s$. D'où f est une réduction de g.

Démonstration

$(i) \Longrightarrow (v)$
Évident car $(vi) \Longrightarrow (v)$.
$(ix) \Longrightarrow (viii)$
Évident
$(ix) \Longrightarrow (xii) \Longrightarrow (xiii)$ en utilisant la proposition 3.6 (5)

Démonstration

$(i) \Longrightarrow (x)$.

Supposons que f est une réduction de g.

Pour tout entier $n \geq N = 2k - 1$, posons $n = qk + r$, avec $0 \leq r < k$ où k est $k \geqslant 1$ tel que $J_{k+n} = J_k I_n$ pour tout $n \geqslant k$. Pour un tel entier k et pour tout $m \geqslant 1$, $J_{mk} = J_k^p J_{(m-p)k}$ pour tout $p = 1, 2, \cdots, m$

Alors $J_n = J_{k(q-1)} I_{k+r}$.

Ainsi $1 \leq k + r < 2k - 1$, $J_n \subseteq \sum_{p=1}^{N} I_p J_{n-p} \subseteq J_n$, d'où $J_n = \sum_{p=1}^{N} I_p J_{n-p}$ pour tout $n \geq N = 2k - 1$.

Ce qui prouve que g est $f - fine$.

$(x) \Longrightarrow (xi)$ car toute filtration f-bonne est f-fine

$(xi) \Longrightarrow (xii)$ en utilisant la proposition 3.6 (1)

CONCLUSION

BILAN ET PERSPECTIVES

1. Propriétés des f_I et réduction minimale des filtrations bonnes
2. Étendre ces résultats aux autres classes de filtration.

MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION