SOUTENANCE DE MÉMOIRE DE MASTER OPTION: ALGÈBRE COMMUTATIVE ET CRYPTOGRAPHIE SPÉCIALITÉ: THÉORIE DES FILTRATIONS

Présenté par M. KABLAM Edjabrou Ulrich Blanchard

Université NANGUI ABROGOUA
Unité de Formation et de Recherche des Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈME : DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

Directeur de Mémoire : M. ASSANE Abdoulaye, Maître de Conférences
Encadrant scientifique : M. BROU Kouadjo Pierre, Maître Assistant

PLAN DE PRÉSENTATION

$f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$ si :

(i) $I_0 = A$;

(ii) $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{Z}$;

(iii) $I_p I_q \subset I_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$.

Exemple

(1) On pose $A = \dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$, $I_0 = A$, $I_1 = I_2 = (\bar{2})$, $I_n = (\bar{0})$ pour tout $n \geqslant 3$.
Ainsi $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration.

(2) On pose $A = \mathbb{Z}[X]$, $I_0 = A$, $I_{2n} = I_{2n-1} = I^n = (X)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.
Ainsi $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration.

Remarque

On peut remarquer que pour tout $n \leq 0, I_n = A$.
En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que $I_0 = A$ (i), il vient $I_n = A, n \leq 0$ car pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les I_n sont des idéaux de A.
Ainsi au lieu d'étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

f $I-adique$	$I_n = I^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1)
f $I-bonne$	$\forall n \in \mathbb{Z}, II_n \subset I_{n+1}$ et $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ II_n = I_{n+1}, \forall n \geqslant n_0$. (2)
f $A.P.$	$\exists\,(k_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall$ n,m $\in \mathbb{N},\ I_{mk_n} \subset I_n^m$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1$. (3)
f f.$A.P.$	$\exists k \geqslant 1, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ I_{nk} = I_k^n$. (4)
f noeth.	son anneau de Rees $R(A, f) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n X^n$ est noethérien. (5)
f f. noeth.	$\exists k \geqslant 1, \forall\, m, n \in \mathbb{Z},\ \ m, n \geqslant k, I_m I_n = I_{m+n}$. (6)
f E.P	$\exists N \geqslant 1, \forall\, n \geqslant N,\ \ I_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p$. (7)

Table : **Classification des Filtrations**

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{f E.P} & & \\
\text{f I-adique} \arrow[r] & \text{f I-bonne} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & \text{f fortement A.P} \arrow[r] \arrow[d] & \text{f A.P} \\
 & \text{f fortement noethérienne} \arrow[r] & \text{f noethérienne} &
\end{tikzcd}
$$

Figure : **Intérêt des Filtrations I-bonnes**

(i) Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^{m} a_i x^{m-i} = 0, \quad (8)$$

$m \in \mathbb{N}^*$ où $a_i \in I_i$, pour tout $i = 1, \cdots, m$.

(ii) f est une β-réduction de g si :

a) $f \leq g$; (9)
b) $\exists\, k \geq 1$ tel que $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$. (10)

Soit M un A-module. On appelle filtration de M toute famille $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-modules de M telle que :

(a) $M_0 = M$;

(b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M_{n+1} \subset M_n$. (11)

La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A et la filtration $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du A-module M sont dites compatibles si :

$$I_p M_q \subset M_{p+q}, \quad \text{pour tout } \; p, q \in \mathbb{Z}. \qquad (12)$$

Soient $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(M)$, $f-$ *compatible*, avec $f \in \mathbb{F}(A)$.

(a) φ est $f-$ **bonne** s'il existe un entier naturel N $\geqslant 1$ tel que :

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p}M_p. \quad (13)$$

Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. Alors :

(b) g est **entière sur** f si $g \leqslant P(f)$. C'est à dire :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, J_n \subset P_n(f).$$

avec pour tout
$k \in \mathbb{N}, P(f) = (P_k(f))_{k\in\mathbb{N}} = \left\{x \in A, x \text{ entier sur } f^{(n)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{N}}\right\}.$

Proposition

Soient A un anneau, I un idéal de A et $x \in A$.

x est entier sur I si et seulement si I est une réduction de $I + (x) = I + xA$.

Démonstration

(i) Supposons que x est entier sur I. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que
$x^n = \sum_{i=1}^{n} (-a_i)x^{n-i}$, avec $a_i \in I^i, i = 1, \cdots, n$.

Ainsi $x^n = \sum_{i=1}^{n} (-a_i)x^{n-i} \in \sum_{i=1}^{n} I^i x^{n-i} = I \sum_{i=0}^{n-1} I^i x^{n-1-i}$. (14)

Alors $x^n \in I(I + (x))^{n-1}$. (15)

Montrons que I est une réduction de $I + (x)$. C'est à dire que
$(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1}$ (16).

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nI = I$. (17)

Ainsi : $(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1} + (x)(I + (x))^{n-1}$. (18)

Démonstration

En prouvant que $(x)(I+(x))^{n-1} \subset I(I+(x))^{n-1}$ (19) on aura :

$$(I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}. \ (20)$$

Démonstration

$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + I\sum_{i=0}^{n-2} I^i(x)^{n-1-i} \subset (x)^n + \sum_{i=0}^{n-1} I^i(x)^{n-1-i}$. (21)
D'où $(x)(I+(x))^{n-1} \subset (x)^n + I(I+(x))^{n-1}$. (22)
En somme $(x)(I+(x))^{n-1} \subset I(I+(x))^{n-1}$. (23)
D'où $(I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}$. (24)
Par conséquent I est une réduction de $I+(x)$.

Démonstration

(ii) Supposons que I est une réduction de $I+(x)$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(I+(x))^{n+1} = I(I+(x))^n$. (25)
On a : $x^{n+1} \in (I+(x))^{n+1} = I(I+(x))^n$. (26)
Alors $x^{n+1} \in I \displaystyle\sum_{i=0}^{n} I^i(x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} I^{i+1}(x)^{n-i}$. (27)
D'où $x^{n+1} \in \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} I^i(x)^{n+1-i}$. (26)
Alors $x^{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i}$, avec $a_i \in I^i$. (28)
Ainsi x est donc entier sur I.

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

Résultats

Soient A noethérien, $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$.
Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne :

(i) f est une réduction de g.

(ii) g est *entière* sur f.

(iii) g est f − *bonne*.

1. Propriétés des filtrations $I - bonnes$.
2. Réduction minimale des filtrations bonnes.
3. Étendre ces résultats aux autres classes de filtrations (noethériennes,...).
4. Étendre ces résultats à des objets algébriques qui ne respectent pas forcement la décroissance.

MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION