APPROXIMATION NUMÉRIQUE DU TEMPS D'EXTINCTION POUR UNE ÉQUATION DE REACTION-DIFFUSION SOUMISE A DES CONDITIONS AUX LIMITES NON LINÉAIRES

Présenté par ASSOVIE BOKA GEDEON RUBEN
Superviseur: Dr YORO Gozo
Encadrant : Dr N'GUESSAN Koffi

UNIVERSITE
NANGUI ABROGOUA

LMI
Laboratoire
de
Mathématiques
et
Informatique

21 mai 2024

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (en abrégé EDP) peuvent être considérée comme l'extension des équations différentielles ordinaires (en abrégé EDO) aux fonctions de plusieurs variables. Elles expriment, sous forme d'égalités, des relations que doivent satisfaire les dérivées partielles d'une certaine fonction inconnue u d'une ou de plusieurs variables afin de décrire un phénomène physique, satisfaire une propriété prescrite, ...etc ... On rencontre de telles équations dès qu'on s'intéresse à des questions de modélisation : en physique, en électromagnétisme, en mécanique du solide et des fluides bien sûr, mais aussi en biologie, en chimie, en économie, en finance...

Les EDP sont classées en fontion de leur type (elliptiques, paraboliques et hyperboliques) et de leur linéarité (linéaire, non-linéaire,semi-linéaire et quasi-linéaire). De ce fait, Les équation de réaction-diffusion sont des EDP paraboliques semi-linéaires

Une équation de réaction-diffusion est un modèle de phénomènes irréversibles dans le temps. Dans ce mémoire, nous étudions une EDP de réaction-diffusion à deux variables que sont l'espace et le temps. Il s'agit de faire une approximation numérique du temps d'extinction de la solution d'une équation de diffusion non-linéaire soumise à des conditions aux limites non-linéaires. A cette fin, nous étudions le phénomène d'extinction pour le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x)(1-u(x,t))^{-p}, \quad 0<x<1, \quad 0<t<T \\ u_x(0,t) = u^{-q}(0,t), \\ u_x(1,t) = 0, \quad 0<t<T \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{1}$$

où p, q sont des constantes positives et T est fini ou infini.
La donnée initiale $u_0(x) : [0,1] \mapsto (0,1)$ satisfait les conditions de compatibilité

$$u_0'(0) = u^{-q}(0), \qquad u_0'(1) = 0.$$

et f est une fonction positive.
Tout au long de ce mémoire, nous supposons également que la donnée initiale satisfait les inégalités

$$u_{xx}(x,0) + f(x)(1 - u(x,0))^{-p} \geq 0, \tag{2}$$

$$u_x(x,0) \geq 0. \tag{3}$$

On dit qu'une solution u du problème (1) s'éteint en un temps fini s'il existe un temps fini T tel que

$$\lim_{t \to T^-} \max_{0 \leq x \leq 1} \{u(x,t)\} = 0.$$

Dans la suite, on désignera par T le temps fini pour l'extinction du problème (1).

Chapitre 1 : ÉTUDE DU PROBLÈME SEMI-DISCRET EN ESPACE

1.1 Schéma semi-discret en espace

1.1.1 Choix du maillage

Soient I un entier supérieur ou égale à 3 et $h = \dfrac{1}{I}$, le pas constant de subdivision de l'intervalle $[0,1]$. Définissons la grille $x_i = ih$ avec $0 \leqslant i \leqslant I$ telle que $h = x_{i+1} - x_i$.

1.1.2 Construction du schéma semi-discret

Dans un premier temps, on remplace x par x_i dans le problème continu (1). Puis, on utilise des développements limités de type TAYLOR en espace et en approximant $u(x_i,t)$ par $U_i(t)$ $\quad i=0,...,I$. On obtient le schéma semi-discret en espace associé au problème continu (1) suivant :

$$
\begin{aligned}
\frac{dU_i}{dt}(t)-\delta^2 U_i(t) &= f(x_i)(1-U_i(t))^{-p}, \quad 1\leqslant i\leqslant I, \quad t\in[0,T[, && (4)\\
\frac{dU_0}{dt}(t)-\delta^2 U_0(t) &= f(x_0)(1-U_0(t))^{-p}-\frac{2}{h}U_0^{-p}(t), \quad t\in[0,T[, && (5)\\
U_i(0) &= \varphi_i, \quad 0\leqslant i\leqslant I, && (6)
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\delta^2 U_i(t) &= \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \ 1 \leqslant i \leqslant I-1, \\
\delta^2 U_0(t) &= \frac{2U_1(t) - 2U_0(t)}{h^2}, \\
\delta^2 U_I(t) &= \frac{2U_{I-1}(t) - 2U_I(t)}{h^2},
\end{aligned}
$$

avec $U_h(t) = \big(U_0(t), U_1(t), \ldots, U_I(t)\big)^T$ et $\varphi_h = (\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_I)^T$.

1.2 Existence et unicité de la solution semi-discrète en espace - Nouvelle écriture du schéma semi-discret

1.2.1 Existence et unicité de la solution semi-discrète en espace

Théorème 1.2.1

Le problème semi-discret en espace (4)-(6) admet une unique solution maximale $\left(\left[0, T_q^h\right[, U_h(\cdot)\right)$, où $T_q^h > 0$ désigne le temps d'existence maximal de la solution maximale U_h.

$[0, T_q^h[$ est l'intervalle de temps maximal sur lequel $\|U_h(t)\|_\infty > 0$ où $\|U_h(t)\|_\infty = \min_{0 \leqslant i \leqslant I} |U_h(t)|$.
Le temps T_q^h peut-être fini ou infini.

1.3 Propriétés du schéma semi-discret en espace

Dans cette section, nous donnons quelques lemmes qui seront utilisés tout au long de notre étude.
Le lemme suivant est une forme semi-discrète du principe du maximum.

Lemme 1.3.1

Soit $\alpha_h \in C^0\left([0,T[,\mathbb{R}^{I+1}\right)$ et soit $V_h \in C^1\left([0,T[,\mathbb{R}^{I+1}\right)$ tels que :

$$\frac{dV_i(t)}{dt} - \delta^2 V_i(t) + \alpha_i(t) V_i(t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant I, \quad t \in]0,T[, \tag{7}$$

$$V_i(0) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant I. \tag{8}$$

Alors, on a $V_i(t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant I, \quad t \in [0,T[$.

Une autre forme du principe du maximum pour les équations semi-discrètes est le lemme de comparaison suivant :

Lemme 1.3.2

Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $V_h, W_h \in C^1\left([0,T[,\mathbb{R}^{I+1}\right)$ sont tels que :

$$\begin{cases} \dfrac{dV_i}{dt}(t) - \delta^2 V_i(t) + f\left(V_i(t),\right) < \dfrac{dW_i}{dt}(t) - \delta^2 W_i(t) + f\left(W_i(t),\right), \quad 0 \leqslant i \leqslant I, \quad t \in]0,T[, \\ V_i(0) < W_i(0), \quad 0 \leqslant i \leqslant I, \end{cases} \tag{9}$$

alors, on a $V_i(t) < W_i(t), \quad 0 \leqslant i \leqslant I, \quad t \in [0,T[$.

Maintenant, énonçons une propriété sur l'opérateur δ^2.

Lemme 1.3.3

Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si $V_h, W_h \in C^1\left([0,T[,\mathbb{R}^{I+1}\right)$ sont tels que :

$$\begin{cases} \dfrac{dV_i}{dt}(t) - \delta^2 V_i(t) + f\left(V_i(t)\right) \leqslant \dfrac{dW_i}{dt}(t) - \delta^2 W_i(t) + f\left(W_i(t)\right), \quad 0 \leqslant i \leqslant I, \quad t \in]0,T[, \\ V_i(0) \leqslant W_i(0), \quad 0 \leqslant i \leqslant I, \end{cases} \tag{10}$$

alors, on a $V_i(t) \leqslant W_i(t), \quad 0 \leqslant i \leqslant I, \quad t \in [0,T[.$

1.4 Convergence de la solution semi-discrète

Dans cette section, nous prouvons que la solution du problème semi-discret en espace converge vers la solution du problème continu lorsque le pas du maillage tend vers zéro.

Théorème 1.4.1

Supposons que le problème (1) a une solution $u \in C^{4,1}([0,1] \times [0, T_0])$ telle que $\sup_{t\in[0,T_0]} \|u(.,t)\|_\infty = \zeta < 1$. Supposons que la donnée initiale (6) vérifie

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \quad \textit{lorsque} \quad h \longrightarrow 0. \tag{11}$$

Alors, pour h suffisamment petit, le problème semi-discret (4)-(6) a une unique solution $U_h \in C^1([0, T_0], \mathbb{R}^{I+1})$ telle que

$$\max_{t\in[0,T_0]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty = O(\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + h) \quad \textit{lorsque} \quad h \longrightarrow 0,$$

Avec $T_0 < \min\{T; T_q^h\}$.

1.5 Extinction de la solution semi-discrète

Dans cette section, sous certaines hypothèses, nous montrons que la solution du problème semi-discret éxplose en un temps fini et nous estimons son temps d'extinction semi-discret.

Théorème 1.5.1

Soit U_h la solution du problème semi-discret (4)-(6). Supposons qu'il existe une constante $\lambda \in]0,1[$ telle que la donnée initiale en (6) satisfait

$$\delta^2\varphi_i + f_i(1-\varphi_i)^{-p} \leq -\lambda\varphi_i^{-q}, \quad 1 \leq i \leq I, \tag{12}$$

$$\delta^2\varphi_0 - \frac{2}{h}\varphi_0^{-q} + f_0(1-\varphi_0)^{-p} \leq -\lambda\varphi_0^{-q}. \tag{13}$$

Alors la solution U_h s'éteint en un temps fini T_q^h et nous avons l'estimation suivante

$$T_q^h \leq \frac{\|\varphi_h\|_\infty^{q+1}}{\lambda(q+1)}.$$

Le résultat suivant concerne la borne inférieure du taux d'extinction.

Théorème 1.5.2

Supposons que (12)-(13) reste vrai ,alors près du temps d'extinction T_q^h, la solution U_h au problème (4)-(6) a une estimation du taux d'extinction suivante $U_0(t) \sim \left(T_q^h - t\right)^{\dfrac{1}{q+1}}$ en ce sens qu'il existe deux constante positive C_1 et C_2 tel que

$$C_1 \left(T_q^h - t\right)^{\dfrac{1}{q+1}} \leq U_0(t) \leq C_2 \left(T_q^h - t\right)^{\dfrac{1}{q+1}} , pour t \in [0, T_q^h[\tag{14}$$

1.6 Convergence du temps d'extinction semi-discret

Dans cette section, nous montrons la Convergence du temps d'extinction semi-discret. Nous voyons que pour chaque intervalle de temps $[0, T]$ où u est défini, la solution U_h du problème semi-discret (4)-(6) se rapproche de u, lorsque le pas du maillage h tend vers zéro.

Théorème 1.6.1

Supposons que la solution u du problème continu (1) s'éteint en un temps fini T tel que $u \in C^{4,1}([0,1] \times [0, T[) telque \| u_h(., t) \|_\infty = \alpha > 0$ et la donnée initiale (6) du problème semi-discret satisfait

$$\| \varphi_h - u_h(0) \|_\infty = o(1) \quad lorsque \quad h \longrightarrow 0. \tag{15}$$

où $u_h(t) = (u_h(x_0, t), ..., u_h(x_I, t))^T, t \in [0, T[$ puis pour h assez petit ,le problème sémi-discret (4)-(6) a une solution $u_h \in C^1([0, T[, \mathbb{R}^{I+1})$ tel que

$$\max_{t \in [0,T]} (\| U_h(t) - u_h(t)(0) \|_\infty) = O\left(\| \varphi_h - u_h(0) \|_\infty + h^2\right) \quad lorsque \quad h \longrightarrow 0$$

Chapitre 2 :RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUES

Dans ce chapitre nous construisons tout d'abord le schéma discret associé au problème continu (1) en utilisant la méthode des différences finies. Ensuite, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution discrète. De plus, nous donnons le schéma explicite et le schéma implicite. Enfin, nous illustrons notre étude par des tableaux et graphiques obtenus par des programmes MATLAB.

2.1 Schéma discret

Soit $I \geqslant 3$ un entier.
Considérons des subdivisions sur $[0,1]$ et $[0,T[, \quad T>0,$
$0 = x_0 < x_1 < ... < x_I = 1,$
$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n+1} < ... \quad .$
Soit $h = x_{i+1} - x_i = \dfrac{1}{I}$, le pas de la discrétisation uniforme en espace et Δt_n le pas de discrétisation en temps tel que $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ avec $x_i = ih$ et $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n, \quad n > 0.$
Dans un premier temps, on remplace x par x_i et t par t_n dans le problème continu (1). Puis, on utilise des développements limités de type TAYLOR et on approxime $u(x_i, t_n)$ par $U_i^{(n)}, \qquad i = 0, ..., I \; n > 0.$ On obtient le schéma discret associé au problème continu (1) suivant :

$$
\begin{cases}
u_t(x_i,t_n) = u_{xx}(x_i,t_n) + f(x_i)(1-u(x_i,t_n))^{-p}, \quad 1 \leqslant i \leqslant I-1, \quad n \geqslant 0, \\
u_x(x_0,t_n) = u^{-q}(x_0,t_n), \quad n \geqslant 0, \\
u_x(x_I,t_n) = 0, \quad n \geqslant 0, \\
u(x_i,0) = u_0(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant I,
\end{cases}
\tag{16}
$$

où

$$
\begin{cases}
\delta_t U_i^{(n)} = \dfrac{U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)}}{\Delta t_n}; \quad 0 \leqslant i \leqslant I, \\
\delta^2 U_i^{(n)} = \dfrac{U_{i-1}^{(n)} - 2U_i^{(n)} + U_{i+1}^{(n)}}{h^2}; \quad 1 \leqslant i \leqslant I-1, \\
\delta^2 U_0^{(n)} = \dfrac{2U_1^{(n)} - 2U_0^{(n)}}{h^2}, \\
\delta^2 U_I^{(n)} = \dfrac{2U_{I-1}^{(n)} - 2U_I^{(n)}}{h^2}.
\end{cases}
\tag{17}
$$

et

$$
U_h^{(n)} = (U_0^{(n)}, U_1^{(n)}, \ldots, U_I^{(n)})^T.
$$

où $n \geqslant 0$ et

$$
\Delta t_n = \min\left\{ \frac{h^2}{2}, \tau \| U_h^{(n)} \|_\infty^{1+q} \right\}, \quad 0 < \tau < 1
$$

Remarquons que la restriction sur le pas de temps $\Delta t_n \leq \dfrac{h^2}{2}$ assure la positivité de la solution discrète.

2.2 Schéma explicite

Le schéma explicite suivant découle du schéma totalement discrétisé où nous avons approximé la solution u de (1) par la solution $U_h^{(n)} = \left(U_0^{(n)}, U_1^{(n)}, ..., U_I^{(n)}\right)^T$.
On a donc :

$$
\begin{aligned}
U_i^{(n+1)} &= \frac{\Delta t_n}{h^2} U_{i-1}^{(n)} + \left(1 - \frac{2\Delta t_n}{h^2}\right) U_i^{(n)} + \frac{\Delta t_n}{h^2} U_{i+1}^{(n)} + \Delta t_n f_i \left(1 - U_i^{(n)}\right)^{-p}, \ 1 \leqslant i \leqslant I-1, \\
U_0^{(n+1)} &= \left(1 - \frac{2\Delta t_n}{h^2}\right) U_0^{(n)} + \frac{2\Delta t_n}{h^2} U_1^{(n)} + f_0 \Delta t_n \left(1 - U_0^{(n)}\right)^{-p} - 2\frac{\Delta t_n}{h} \left(U_0^{(n)}\right)^{-q}, \\
U_I^{(n+1)} &= \frac{2\Delta t_n}{h^2} U_{I-1}^{(n)} + \left(1 - \frac{2\Delta t_n}{h^2}\right) U_I^{(n)} + \Delta t_n f_I \left(1 - U_I^{(n)}\right)^{-p}, \\
U_i^{(0)} &= \varphi_i, \ 0 \leqslant i \leqslant I,
\end{aligned}
$$

2.3 Schéma implicite

En évaluant la dérivée en espace à l'ordre $(n+1)$ du schéma totalement discrétisé, on obtient le schéma implicite suivant :

$$
\begin{aligned}
U_i^{(n)} &= -k_0 U_{i-1}^{(n+1)} + (1+2k_0)U_i^{(n+1)} - k_0 U_{i+1}^{(n+1)} - \Delta t_n f_i \left(1 - U_i^{(n)}\right)^{-p}, \ 1 \leqslant i \leqslant I-1, \\
U_0^{(n)} &= (1+2k_0)U_0^{(n+1)} - 2k_0 U_1^{(n+1)} - \Delta t_n f_0 \left(1 - U_0^{(n)}\right)^{-p} - \frac{2\Delta t_n}{h}\left(U_0^{(n)}\right)^{-q}, \\
U_I^{(n)} &= -2k_0 U_{I-1}^{(n+1)} + (1+2k_0)U_I^{(n+1)} - \Delta t_n f_I \left(1 - U_I^{(n)}\right)^{-p}, \\
U_i^{(0)} &= \varphi_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant I,
\end{aligned}
$$

où $k_0 = \dfrac{2\Delta t_n}{h^2}$ pour $0 \leqslant i \leqslant I, \quad n \geqslant 0$ et $\Delta t_n = \tau \| U_h^{(n)} \|_\infty^{1+q}$, $0 \leq \tau \leq 1$.

2.4 Définition de l'extinction de la solution discrète

Définition 2.4.1

On dit que la solution $U_h^{(n)}$ de (18)-(18) ou (18)-(18) s'éteint en un temps fini si $\|U_h^{(n)}\|_\infty > 0$ pour $n \geqslant 0$, $\lim_{n\to\infty} \|U_h^{(n)}\|_\infty = 0$ et $T(\infty) = \lim_{n\to\infty} T^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j < \infty$. La valeur $T(\infty)$ est appelée le temps d'extinction numérique de la solution $U_h^{(n)}$.

2.5 Tableaux des résultats

Dans les tableaux sous cette forme,

I	T^n	n	CPUt	s

nous présentons :

- T^n, les temps d'extinction numériques ;
- n, les nombres d'itération ;
- *CPUt*, qui est le temps que met la machine avant d'afficher un résultat ;
- s les ordres des approximations correspondant aux mailles de $I = 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$.

Notons que le temps d'extinction numérique $T^n = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j$ est calculé pour la première fois lorsque : $|T^{n+1} - T^n| < 10^{-16}$ et l'ordre s de la méthode est calculé à partir de :

$$s = \frac{\log((T_{4h} - T_{2h})/(T_{2h} - T_h))}{\log(2)}. \tag{18}$$

Tableau 2.1. Temps d'extinction numérique T^n, nombre d'itérations n, le temps CPU(en secondes) et les ordres d'approximation (s) obtenus avec la méthode explicite d'Euler pour $p = 0.5 et q = 0.5$

I	T^n	n	CPUt	(s)
16	0.059068546557882	579	0.015625	-
32	0.057539149428317	1665	0.06250	-
64	0.057043227476775	5395	0.234375	1.62
128	0.056889270441384	19176	1.796875	1.68
256	0.056843051208125	72192	17.078125	1.73

Tableau 2.2. Temps d'extinction numérique T^n, nombre d'itérations n, le temps CPU(en secondes) et les ordres d'approximation (s) obtenus avec la méthode implicite d'Euler pour $p = 0.25 et q = 0.5$

I	T^n	n	CPUt	(s)
16	0.059376372119527	580	0.12500	......
32	0.057622095147511	1666	0.26562	.....
64	0.057064819407938	5397	7.1562	1.65
128	0.056894784829930	19178	88.265625	1.71

2.6 Représentations graphiques

Dans ce qui suit, nous donnons quelques figures pour illustrer notre analyse. Il faut souligner que les représentations graphiques sont faites pour $l = 16$.

Conclusion

Ce mémoire a abordé l’approximation numérique du temps d’extinction pour une équation de réaction-diffusion soumise à des conditions aux limites non linéaires à travers le problème (1).Nous avons réalisé une étude numérique de l’extinction des solutions du problème (1) considéré et avons obtenu de bonnes approximations du temps d’extinction.
Au delà de notre travail, en appliquant les méthodes utilisées dans ce mémoire au même problème,nous pouvons déterminer l’extinction mais avec un pas h qui varie dans l’espace pour voir leurs impacts sur l’extinction.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION