1 A RETENIR

Définition 1. *(Filtration tronqué d'ordre k de f)*
Soient A un anneau et I un idéal de A. $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de l'anneau A. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ et $t_k f = (K_n)$ avec $K_n = I_{n+k}$ si $n \geqslant 1$ et $K_n = A$ si $n \leqslant 0$.
*Ainsi $t_k f$ est une filtration de A appelé **filtration tronqué d'ordre k de** f.*

Définition 2. *(Filtrations I-bonnes)*
Soient A un anneau et I un idéal de l'anneau A.
$f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A. f est dite I-bonne si :

i) $II_n \subseteq I_{n+1}\, \forall n \in \mathbb{Z}$.

ii) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $II_n = I_{n+1}, \forall n \geqslant n_0$

Définition 3. *(Filtrations A.P.)*
*La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **Approximable par Puissances d'idéaux** (en abrégé **A.P.**) s'il existe un entier $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels telle que :*

(i) $\forall\ n,m \in \mathbb{N},\ I_{mk_n} \subset I_n^m$

(ii) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1$

Définition 4. *(Filtrations fortement A.P.)*
*La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **fortement Approximable par Puissances d'idéaux** (en abrégé **fortement A.P.**) s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{nk} = I_k^n$$

Définition 5. *(Filtrations E.P.)*
*La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **Essentiellement par Puissances d'idéaux** (en abrégé **E.P**) s'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que :*

$$\forall\, n \geqslant N,\ I_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p.$$

Définition 6. *(Filtrations noethériennes)*
*La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **noethérienne** si son anneau de Rees $R(A,f)$ est noethérien.*

Définition 7. *(Filtrations fortement noethériennes)*
*La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'anneau A est dite **fortement noethérienne** s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que :*

$$\forall\, m,n \in \mathbb{Z},\ m,n \geqslant k, I_m I_n = I_{m+n}$$

Proposition 1. *(Caractérisation des filtrations noethériennes)*
Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$, si A est noethérien, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{R}(A, f)$ *est noethérien*

(ii) $R(A, f)$ *est noethérien*

(iii) f *est E.P.*

(iv) $\exists n \geqslant 1, \forall n \geqslant k, I_{n+k} = I_n I_k$

Corollaire 1. *(Clôture prüférienne)*
Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$. *Alors :*
$\forall k \in \mathbb{N}$, *on pose :* $P_k(f) = \left\{x \in A, x \text{ entier sur } f^{(k)}\right\}$ *est un idéal de A et la famille* $P(f) = (P_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$ *est une filtration de A appelé* ***clôture prüférienne*** *de* f.

Remarque 1. *(Clôture intégrale et clôture prüférienne)*
La clôture intégrale d'un idéal I *de* A *est :* $I' = P_1(f_I)$

Définition 8. *(filtration entière et fortement entière)*
Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$ *et soit* $k \geq 1$, *on a :* $f^{(k)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{Z}}$ *et* $g^{(k)} = (J_{nk})_{n\in\mathbb{Z}}$. *Alors :*

(a) g *est* ***entière sur*** f *si* $g \leqslant P(f)$ *(où* $P(f)$ *est la clôture prüférienne de* f*). C'est à dire :*
$$\forall n \geqslant 1, J_n \subseteq P_n(f)$$

(b) g *est* ***fortement entière sur*** f *si* $f \leqslant g$ *et si* $R(A, g)$ *est un* $R(A, f)-$*module de type fini.*

Définition 9. *(réduction basique et réduction minimale)*
Un idéal I *de l'anneau local noethérien* (A, m) *est basique si la seule réduction de* I *est* I *lui-même. Northcott et Rees ont aussi défini la notion de réduction minimale d'un idéal* J *:*

Un idéal I *est une réduction minimale de* J *si* I *est une réduction de* J *et si* I *est minimal au sens de l'inclusion (* $\subseteq$ *) parmi l'ensemble des réductions de* J.

Remarque 2. *On prouve dans [**?**] que la réduction minimale des filtrations* I*-bonne existe toujours dans un anneau local noethérien. Ce qui n'est pas le cas en générale pour une filtration quelconque.*

Définition 10. *(α-réduction ou réduction au sens de Okon-Ratliff)*
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux filtrations de* A.
f *est une* α*-réduction de* g *si :*

i) $f \leq g$

ii) $\exists\, N \geq 1$ *tel que* $\forall n \geq N; J_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p} J_p$.

Définition 11. *(β-réduction ou réduction au sens de Dichi-Sangaré)*
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux filtrations de* A.
f *est une* β*-réduction de* g *si :*

i) $f \leq g$

ii) $\exists\, k \geq 1$ *tel que* $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$.

Remarque 3. *(α-réduction et β-réduction)*
Si f est une β-réduction de g alors f est une α-réduction de g.

Définition 12. *(faiblement f-bonne, f-bonne et f-fine)*
Soient A un anneau et M un $A-$module.
On suppose que $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est $f-$compatible, avec $f \in \mathbb{F}(A)$. Alors :

*(a) φ est **faiblement** $f-$ **bonne** s'il existe un entier naturel $N \geqslant 1$ tel que :*

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p} M_p$$

*(b) φ est $f-$ **bonne** s'il existe un entier naturel $N \geqslant 1$ tel que :*

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} M_p$$

*(c) φ est $f-$ **fine** s'il existe un entier naturel $N \geqslant 1$ tel que :*

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_p M_{n-p}$$

Théorème 1. *Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des filtrations sur l'anneau A. Nous considérons les assertions suivantes :*

i) f est une réduction de g.

ii) $J_n^2 = I_n J_n$ pour tout n assez grand.

iii) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.

iv) Il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_s J_n$, $I_{s+n} = I_s I_n$, $J_s^2 = I_s J_s$, $J_{s+p} I_s = I_{s+p} J_s$ pour tout $p = 1, 2, ..., s-1$

v) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k-bonne$

vi) Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$.

vii) Pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.

viii) g est entière sur f.

ix) g est fortement entière sur f.

x) g est $f-fine$.

xi) g est $f-bonne$.

xii) g est $faiblement$ $f-bonne$.

xiii) Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

xiv) Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g' \leq t_N f'$ où f' est la clôture intégrale de f.

xv) $P(f) = P(g)$, où $P(f)$ est la clôture prüférienne de f.

1) On a :

$(i) \Longleftrightarrow (vii)$; $(v) \Longleftrightarrow (vi)$; $(viii) \Longleftrightarrow (xv)$; $(ii) \Longrightarrow (iii)$; $(iv) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (v)$; $(ix) \Longrightarrow (vii), (xii)$ et $(xiii)$;

$(i) \Longrightarrow (x) \Longrightarrow (xi) \Longrightarrow (xii) \Longrightarrow (xiii)$

2) Si de plus on suppose A noethérien, alors :

$(i) \Longleftrightarrow (xiv)$; $(i) \Longrightarrow (ix) \Longleftrightarrow (xii)$; $(i) \Longrightarrow (ii)$

3) Par ailleurs, si f est noethérienne, alors A est noethérien et les assertions suivantes sont équivalentes :

$(ix) \Longleftrightarrow (x) \Longleftrightarrow (xi) \Longleftrightarrow (xii) \Longleftrightarrow (xiii)$

4) Si f et g sont noethériennes alors nous avons :

$(iii) \Longrightarrow (viii) \Longleftrightarrow (ix)$; $(vi) \Longrightarrow (ix)$

5) Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les quinze (15) assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne

$(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv) \Longleftrightarrow (v) \Longleftrightarrow (vi) \Longleftrightarrow (vii) \Longleftrightarrow (viii) \Longleftrightarrow (ix) \Longleftrightarrow (x) \Longleftrightarrow (xi) \Longleftrightarrow (xii) \Longleftrightarrow (xiii) \Longleftrightarrow (xiv) \Longleftrightarrow (xv)$.