3.3.

Supposons que $\varphi = (M_n)$ est une filtration de M qui est $f - fine$, o $f = (I_n)$ une filtration de A.

Alors il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_p M_{n-p}$.

Comme $n > N$, posons $n = N + 1$, ainsi

$M_{N+1} = \sum_{p=1}^{N} I_p M_{N+1-p} = \sum_{q=1}^{N} I_{N+1-q} M_q$, avec $q = N + 1 - p$.

Ainsi, il vient de proche en proche que $M_{N+j} = \sum_{p=1}^{N} I_{N+j-p} M_p$, pour tout j avec $1 \leq j \leq m$.

Alors $M_{N+m} = \sum_{p=1}^{N} I_p M_{N+m-p} = \sum_{q=m}^{N+m-1} I_{N+m-q} M_q = \sum_{q=m}^{N} I_{N+m-q} M_q + \sum_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} M_q = \sum_{q=m}^{N} I_{N+m-q} M_q + \sum_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} (\sum_{p=1}^{N} I_{q-p} M_p)$.

Or $\sum_{q=m}^{N} I_{N+m-q} M_q \subseteq \sum_{p=1}^{N} I_{N+m-p} M_p$ et $\sum_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-q} (\sum_{p=1}^{N} I_{q-p} M_p) = \sum_{p=1}^{N} (\sum_{q=N+1}^{N+m-1} I_{N+m-p}) M_p = \sum_{p=1}^{N} I_{N+m-p} M_p \subseteq M_{N+m}$

Par suite φ est $f - bonne$, l'inclusion inverse Ã©tant Ã©vidente.

3.5

$M_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p} M_p$ et pour tout $n \geq 1, I_n = \sum_{p=1}^{N'} I_{n-p} I_p$. Alors pour $n > N'' = N + N'$,

$M_n = \sum_{p=0}^{N} I_{n-p} M_p = \sum_{p=0}^{N} (\sum_{q=1}^{N'} I_{n-p-q} I_p) M_p = \sum_{q=1}^{N'} I_q (\sum_{p=0}^{N} I_{n-p-q} M_p) = \sum_{q=1}^{N'} I_q M_{n-q} \subseteq \sum_{q=1}^{N''} I_q M_{n-q}$

Donc $M_n = \sum_{q=1}^{N''} I_q M_{n-q}$, l'inclusion inverse Ã©tant triviale.

3.7

Il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N, J_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} J_p \subseteq \sum_{p=1}^{N} J_{n-p} J_p \subseteq J_n$

Donc $J_n = \sum_{p=1}^{N} J_{n-p} J_p$ pour tout $n > N$.

Cette galit est valable si $1 \leq n \leq N$.

Comme g est $E.P$ et A nothrien alors g est fortement entière sur f.

Par suite g est nothrien et d'après le thorème de Eakin f est noethrien.

3.8

Soient $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}, g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F(A)$.

Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que $I_n \subseteq J_n \subseteq I_{n-N} \subseteq J_{n-N}$ pour tout $N \geq 1$.

Si f est $A.P.$ alors il existe une suite d'entiers $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = 1$ et $I_{k_n m} \subseteq I_n^m$

pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Par suite, $J_{(k_n+N)m} \subseteq J_{k_n m + Nm} \subseteq J_{k_n m + N} \subseteq I_{k_n m + N} \subseteq I_{k_n m} \subseteq I_n^m \subseteq J_n^m$.

D'o $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{k_n + N}{n} = 1$, g est $A.P.$

Rciproquement si g est $A.P.$ alors il existe une suite d'entiers $(k_n^{'})_{n \in \mathbb{N}}$ associe g.

Alors $I_{k_n^{'} + N.m} \subseteq J_{k_n^{'} + N.m} \subseteq J_{n+N}^m \subseteq I_n^m$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{k'_n+N}{n}=1$, f est $A.P.$