Soit $m_0 \in \mathbb{N}$, tel que $m_0 r \geq n_0$

Posons $k = m_0 r$

Alors $J_{k+n} = J_{m_0 r+n} = J_{m_0 r} I_n = J_k I_n$ car $k \geq n_0$.

La rciproque est vidente.

ii) Supposons que f est une rduction de g et g une rduction de h.

* $f \leq g \leq h \Rightarrow f \leq h$

* Comme g est une rduction de h alors, il existe $k' \geq 1$, $H_{k'+n} = H_{k'} J_n$, pour tout $n \geq k'$.

Posons $k'' = k'(k'+1)$ comme dans (i)

Ainsi en utilisant (i) car f est une rduction de g, il vient $H_{k''+n} = H_{k''} I_n$, pour tout $n \geq k''$.

Par suite f est une rduction de h

iii) Supposons que f rduction de g et que $f \leq h \leq g$.

Soit k comme dans (i).

Comme $h \leq g$ alors pour tout $n \geq k$, $J_k H_n \subseteq J_k J_n = J_{k+n} \subseteq J_k H_n$ car $f \leq h$.

Donc $J_{k+n} = J_k H_n$, pour tout $n \geq k$.

Par suite h est rduction de g.