DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

Présenté par M. KABLAM Edjabrou Ulrich Blanchard
Directeur de Mémoire: M. ASSANE Abdoulaye, Maître de Conférences
Encadrant Scientifique: M. BROU Kouadjo Pierre, Maître-Assistant

UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

LMI
Laboratoire
de
Mathématiques
et
Informatique

Unité de Formation et de Recherche des Sciences Fondamentales et Appliquées

PLAN DE PRÉSENTATION

INTRODUCTION

1. Historique de la notion de dépendance intégrale.
2. Historique de la notion de réduction.
3. Utilité des filtrations.
4. Problématique et plan de travail.

Définition 1

$f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une filtration de A si :

(i) $I_0 = A$;

(ii) $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{Z}$;

(iii) $I_p I_q \subset I_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$.

Exemple

(1) On pose
$A = \dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, I_0 = A, I_1 = I_2 = (\bar{2}), I_n = (\bar{0})\ ,\forall\ n \geqslant 3.$
Ainsi $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration.

(2) On pose
$A = \mathbb{Z}[X], I_0 = A, I_{2n} = I_{2n-1} = I^n = (X)^n, \forall\ n \geqslant 1.$
Ainsi $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration.

Remarque

On peut remarquer que pour tout entier n négatif, I_n est égal à A.
En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que I_0 est égal à A (i), il vient I_n est égal A, pour tout entier n négatif car pour tout entier relatif n, les I_n sont des idéaux de A.
Ainsi au lieu d'étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

f $I-adique$	$I_n = I^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1)
f $I-bonne$	$\forall n \in \mathbb{Z}, II_n \subseteq I_{n+1}$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ II_n = I_{n+1}, \forall n \geqslant n_0$. (2)
f $A.P.$	$\exists\,(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall$ n,m $\in \mathbb{N}$, $I_{mk_n} \subset I_n^m$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1$. (3)
f f.$A.P.$	$\exists k \geqslant 1, \forall\, n \in \mathbb{N},\ I_{nk} = I_k^n$. (4)
f noeth.	son anneau de Rees $R(A,f) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n X^n$ est noethérien. (5)
f f. noeth.	$\exists k \geqslant 1, \forall\, m,n \in \mathbb{Z},\ m,n \geqslant k, I_m I_n = I_{m+n}$. (6)
f E.P.	$\exists N \geqslant 1, \forall\, n \geqslant N,\ I_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p$. (7)

Table : **Classification des Filtrations**

PRÉLIMINAIRES

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{f E.P} & & \\
\text{f I-adique} \arrow[r] & \text{f I-bonne} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & \text{f fortement A.P} \arrow[r] \arrow[d] & \text{f A.P} \\
 & \text{f fortement noethérienne} \arrow[r] & \text{f noethérienne} &
\end{tikzcd}
$$

Figure : **Liens entre les différentes classes des filtrations**

Définition 2

(i) Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier m appartenant à $\mathbb{N}$ tel que

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^{m} a_i x^{m-i} = 0, \quad (8)$$

$m \in \mathbb{N}^*$, $a_i \in I_i, \forall i = 1, \cdots, m.$

Définition 3

(ii) f est une β-réduction de g si :

a) $f \leq g$; (9)
b) $\exists\, k \geq 1$, $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$. (10)

(iii) I est une réduction de J si :

a) $I \subseteq J$; (11)
b) $\exists\, k \geq 1$, $J^{k+1} = IJ^k$. (12)

Définition 4

Soit M un A-module. On appelle filtration de M toute famille $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-modules de M telle que :

(a) $M_0 = M$;

(b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}, M_{n+1} \subset M_n$. (13)

La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de A et la filtration $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du A-module M sont dites compatibles si :

$$I_p M_q \subset M_{p+q}, \forall\, p, q \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Définition 5

Soit $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une filtration de module M, $f-$ *compatible*, avec f, une filtration d'anneau A.

(a) φ est $f-$ bonne s'il existe un entier naturel N supérieur ou égal à 1 tel que

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p} M_p. \quad (15)$$

Définition 6

Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}, g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A. Alors :

(b) g est entière sur f si $g \leqslant P(f)$. Autrement dit,

$$\forall n \geqslant 1, J_n \subset P_n(f). \quad (16)$$

$\forall k \in \mathbb{N}, P(f) = (P_k(f))_{k\in\mathbb{N}} = \left\{x \in A, x \text{ entier sur } f^{(n)} = (I_{nk})_{n\in\mathbb{N}}\right\}.$

Proposition 1

Soient A un anneau, I un idéal de A et $x \in A$.

x est entier sur I si et seulement si I est une réduction de $I + (x) = I + xA$.

Démonstration

(i) Supposons que x est entier sur I. Alors il existe n appartenant à $\mathbb{N}^*$ tel que

$$x^n = \sum_{i=1}^{n} (-a_i)x^{n-i},\ a_i \in I^i, i = 1, \cdots, n.$$

Ainsi

$$x^n = \sum_{i=1}^{n} (-a_i)x^{n-i} \in \sum_{i=1}^{n} I^i x^{n-i} = I \sum_{i=0}^{n-1} I^i x^{n-1-i}. \quad (17)$$

Alors

$$x^n \in I(I + (x))^{n-1}. \quad (18)$$

Ainsi $(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1} + (x)(I + (x))^{n-1}. \quad (19)$

Montrons que I est une réduction de $I+(x)$. (20)
On rappelle que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*, nI = I$. (21)
En prouvant que $(x)(I+(x))^{n-1}$ est contenu dans $I(I+(x))^{n-1}$ (22) on aura

$$(I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}. \ (23)$$

Démonstration

$$(x)(I+(x))^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-i}$$

$$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + I\sum_{i=0}^{n-2} I^i (x)^{n-1-i} \subset (x)^n + I\sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-1-i}. \ (24)$$

D'où

$$(x)(I+(x))^{n-1} \subset (x)^n + I(I+(x))^{n-1}. \ (25)$$

En utilisant (18), il vient

$$(x)(I+(x))^{n-1} \subset I(I+(x))^{n-1}. \ (26)$$

D'où

$$(I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}. \ (27)$$

Par conséquent I est une réduction de $I+(x)$.

(ii) Supposons que I est une réduction de $I + (x)$.
Alors il existe n appartenant à $\mathbb{N}^*$ tel que
$(I + (x))^{n+1} = I(I + (x))^n$. (28)
On a
$x^{n+1} \in (I + (x))^{n+1} = I(I + (x))^n$.
Alors

$$x^{n+1} \in I \sum_{i=0}^{n} I^i (x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} I^{i+1} (x)^{n-i}. \quad (29)$$

D'où

$$x^{n+1} \in \sum_{i=1}^{n+1} I^i (x)^{n+1-i}. \quad (30)$$

Alors

$$x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i}, \; a_i \in I^i. \quad (31)$$

Ainsi x est donc entier sur I.

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

Proposition 2

Soient A noethérien, $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux filtrations de A. Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne :

(i) f est une réduction de g.

(ii) g est *entière* sur f.

(iii) g est $f - bonne$.

1. Propriétés des filtrations $I - bonnes$.
2. Réduction minimale des filtrations bonnes.
3. Étendre ces résultats aux autres classes de filtrations (noethériennes,...).
4. Étendre ces résultats à des objets algébriques qui ne respectent pas forcement la décroissance.

MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION