# SOUTENANCE DE MÉMOIRE DE MASTER OPTION: ALGÈBRE COMMUTATIVE ET CRYPTOGRAPHIE SPÉCIALITÉ: THÉORIE DES FILTRATIONS


*Présenté par M. KABLAM Edjabrou Ulrich Blanchard*

**Université NANGUI ABROGOUA**
**Unité de Formation et de Recherche des Sciences Fondamentales et Appliquées**


## *THÈME :* DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES


Directeur de Mémoire : M. ASSANE Abdoulaye, Maître de Conférences
Encadrant scientifique : M. BROU Kouadjo Pierre, Maître Assistant

# PLAN DE PRÉSENTATION

$f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(A)$ si :

(i) $I_0 = A$ ;

(ii) $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{Z}$ ;

(iii) $I_p I_q \subset I_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$.

## Exemple

(1) On pose $A = \dfrac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$, $I_0 = A$, $I_1 = I_2 = (\bar{2})$, $I_n = (\bar{0})$ pour tout $n \geqslant 1$.
Ainsi $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration ;

(2) On pose $A = \mathbb{Z}[X]$, $I_0 = A$, $I_{2n} = I_{2n-1} = I^n = (X)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.
Ainsi $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration.

## Remarque

On peut remarquer que pour tout $n \leq 0, I_n = A$.
En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que $I_0 = A$ (i), il vient $I_n = A, n \leq 0$ car pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les $I_n$ sont des idéaux de $A$.
Ainsi au lieu d'étudier la famille $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

| | |
|---|---|
| f $I-adique$ | $I_n = I^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1) |
| f $I-bonne$ | $\forall n \in \mathbb{Z}, II_n \subset I_{n+1}$ et $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ II_n = I_{n+1}, \forall n \geqslant n_0$. (2) |
| f $A.P.$ | $\exists\,(k_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall$ n,m $\in \mathbb{N},\ I_{mk_n} \subset I_n^m$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{k_n}{n} = 1$. (3) |
| f f.$A.P.$ | $\exists k \geqslant 1, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ I_{nk} = I_k^n$. (4) |
| f noeth. | son anneau de Rees $R(A,f) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n X^n$ est noethérien. (5) |
| f f. noeth. | $\exists k \geqslant 1, \forall\, m,n \in \mathbb{Z},\ \ m,n \geqslant k, I_m I_n = I_{m+n}$. (6) |
| f E.P | $\exists N \geqslant 1, \forall\, n \geqslant N,\ \ I_n = \sum\limits_{p=1}^{N} I_{n-p} I_p$. (7) |

Table : **Classification des Filtrations**

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{f E.P} & & \\
\text{f I-adique} \arrow[r] & \text{f I-bonne} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & \text{f fortement A.P} \arrow[r] \arrow[d] & \text{f A.P} \\
 & \text{f fortement noethérienne} \arrow[r] & \text{f noethérienne} &
\end{tikzcd}
$$

Figure : **Intérêt des Filtrations I-bonnes**

(i) Un élément $x$ de $A$ est dit entier sur $f$ s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^{m} a_i x^{m-i} = 0, \quad (8)$$

$m \in \mathbb{N}^*$ où $a_i \in I_i$, pour tout $i = 1, \cdots, m$.

(ii) $f$ est une $\beta$-réduction de $g$ si :

a) $f \leq g$ ; (9)
b) $\exists\, k \geq 1$ tel que $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$. (10)

Soit $M$ un $A$-module. On appelle filtration de $M$ toute famille $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-modules de $M$ telle que :

(a) $M_0 = M$ ;

(b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M_{n+1} \subset M_n$. (11)

La filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $A$ et la filtration $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ du $A$-module $M$ sont dites compatibles si :

$$I_p M_q \subset M_{p+q}, \quad \text{pour tout } \; p, q \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Soient $\varphi = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}(M)$, $f-$ *compatible*, avec $f \in \mathbb{F}(A)$.

(a) $\varphi$ est $f-$ **bonne** s'il existe un entier naturel N $\geqslant 1$ tel que :

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^{N} I_{n-p}M_p. \quad (13)$$

### Proposition

Soient $A$ un anneau, $I$ un idéal de $A$ et $x \in A$.

$x$ est entier sur $I$ si et seulement si $I$ est une réduction de $I + (x) = I + xA$.

# Démonstration

$(i)$ Supposons que $x$ est entier sur $I$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que
$x^n = \sum_{i=1}^{n} (-a_i)x^{n-i}$, avec $a_i \in I^i, i = 1, \cdots, n$.

Ainsi $x^n = \sum_{i=1}^{n} (-a_i)x^{n-i} \in \sum_{i=1}^{n} I^i x^{n-i} = I \sum_{i=0}^{n-1} I^i x^{n-1-i}$. (14)

Alors $x^n \in I(I + (x))^{n-1}$.

Montrons que $I$ est une réduction de $I + (x)$. C'est à dire que
$(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1}$ (15).

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}, nI = I$.

Ainsi : $(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1} + (x)(I + (x))^{n-1}$. (16)

# Démonstration

En prouvant que $(x)(I+(x))^{n-1} \subset I(I+(x))^{n-1}$ (17) on aura :

$$(I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}. \ (18)$$

# Démonstration

$$(x)(I+(x))^{n-1} = (x)^n + I\sum_{i=0}^{n-2} I^i (x)^{n-1-i} \subset (x)^n + \sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-1-i}. \ (19)$$

D'où $(x)(I+(x))^{n-1} \subset (x)^n + I(I+(x))^{n-1}$. (20)

En somme $(x)(I+(x))^{n-1} \subset I(I+(x))^{n-1}$. (21)

D'où $(I+(x))^n = I(I+(x))^{n-1}$. (22)

Par conséquent $I$ est une réduction de $I+(x)$.

# Démonstration

$(ii)$ Supposons que $I$ est une réduction de $I+(x)$.
Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(I+(x))^{n+1} = I(I+(x))^n$. (23)
On a : $x^{n+1} \in (I+(x))^{n+1} = I(I+(x))^n$. (24)

Alors $x^{n+1} \in I \displaystyle\sum_{i=0}^{n} I^i (x)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} I^{i+1}(x)^{n-i}$. (25)

D'où $x^{n+1} \in \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} I^i (x)^{n+1-i}$. (26)

Alors $x^{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i}$, avec $a_i \in I^i$. (27)

Ainsi $x$ est donc entier sur $I$.

1. PRÉLIMINAIRES
2. DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
3. CONCLUSION

# DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

## Résultats

Soient $A$ noethérien, $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{F}(A)$.
Si $f$ est fortement noethérienne et $g$ est noethérienne alors les assertions sont équivalentes et dans ce cas $g$ est fortement noethérienne :

(i) $f$ est une réduction de $g$.

(ii) $g$ est *entière* sur $f$.

(iii) $g$ est $f-$ *bonne*.

(iv) $P(f) = P(g)$

1. Propriétés des filtrations $I - bonnes$.
2. Réduction minimale des filtrations bonnes.
3. Étendre ces résultats aux autres classes de filtrations (noethériennes,...).
4. Étendre ces résultats à des objets algébriques qui ne respectent pas forcement la décroissance.

*MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION*