SOUTENANCE DE MÉMOIRE DE MASTER OPTION: ALGÈBRE COMMUTATIVE ET CRYPTOGRAPHIE SPÉCIALITÉ: THÉORIE DES FILTRATIONS

KABLAM Edjabrou Ulrich Blanchard

Université NANGUI ABROGOUA
UFR Sciences Fondamentales Appliquées

10 Juillet 2024

THÈME : **DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES**

Directeur de Mémoire : Mr. ASSAN Abdoulaye

Encadrant scientifique : Mr. BROU Kouadjo Pierre

PLAN DE PRÉSENTATION

INTRODUCTION

FILTRATIONS

(i) Une filtration de l'anneau A est une suite $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'idéaux de A, décroissante pour l'inclusion et vérifiant $I_0 = A$ et $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$.

(ii) Une filtration $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dite $I - bonne$ si pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad II_n \subseteq I_{n+1}$ et s'il existe k un entier tel que pour tout $n \geqslant k$, $II_n = I_{n+1}$.

f I-adique $\Longrightarrow f$ I-bonne $\Longrightarrow f$ fortement A.P $\Longrightarrow f$ A.P.

(i) Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que : $x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^{m} a_i x^{m-i} = 0$, $m \in \mathbb{N}^*$ où $a_i \in I_i$, $\forall i = 1, \cdots, m$.

(ii) f est une β-réduction de g si :

a) $f \leq g$

b) $\exists\, k \geq 1$ tel que $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$.

(i) Comment étendre de manière rigoureuse les résultats obtenus dans le contexte restreint de la filtration I-adique à des filtrations bonnes

(i) Comment ces notions interagissent-elles dans des environnements mathématiques variés ?

Théorème Principal (1/4)

Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des filtrations sur l'anneau A. Nous considérons les assertions suivantes :

(i) f est une réduction de g.

(ii) $J_n^2 = I_nJ_n$ pour tout n assez grand.

(iii) I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.

(iv) Il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_sJ_n$, $I_{s+n} = I_sI_n$, $J_s^2 = I_sJ_s$, $J_{s+p}I_s = I_{s+p}J_s$ pour tout $p = 1, 2, ..., s-1$

(v) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$

Théorème Principal (2/4)

(vi) Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$.

(vii) Pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.

(viii) g est *entière* sur f.

(ix) g est *fortement entière* sur f.

(x) g est $f-$*fine*.

Théorème Principal (3/4)

(xi) g est $f - bonne$.

(xii) g est *faiblement* $f - bonne$.

(xiii) Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

(xiv) Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g' \leq t_N f'$ où f' est la clôture intégrale de f.

(xv) $P(f) = P(g)$, où $P(f)$ est la clôture prüférienne de f.

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

RÉSULTAT

Théorème Principal (4/4)

On a les résultats suivants :

(1)

(a) f est une réduction de g si et seulement si pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.

(b) Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$ si et seulement s'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $f^{(r)}$ est une réduction de $g^{(r)}$.

(c) g est *entière* sur f si et seulement si $P(f) = P(g)$, où $P(f)$ est la clôture prüférienne de f.

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATION BONNE

RÉSULTAT

Théorème Principal (5/4)

On a les résultats suivants :

(1)

(d) Si $J_n^2 = I_n J_n$ pour tout n assez grand alors I_n est une réduction de J_n pour tout n assez grand.

(e) S'il existe un entier $s \geq 1$ tel que pour tout $n \geq s$, $J_{s+n} = J_s J_n$, $I_{s+n} = I_s I_n$, $J_s^2 = I_s J_s$, $J_{s+p} I_s = I_{s+p} J_s$ pour tout $p = 1, 2, ..., s-1$ alors f est une réduction de g.

(f) Si f est une réduction de g alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$

Théorème Principal (6/4)

On a les résultats suivants :

(1)

(g) Si g est fortement entière sur f alors :

- Pour tout entier $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}$ est une réduction de $g^{(m)}$.
- g est *faiblement* f − *bonne*.
- Il existe un entier $N \geq 1$ tel que $t_N g \leq f \leq g$

MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION