* Rflexivit Posons $N = 1$ $\sum_{p=0}^{1} I_{n-p}I_p = I_nI_0 + I_{n-1}I_1 = I_{n-1}I_1 = I_n$ (car $I_0 \subset I_1$)
D'o $f\Re g$
* Transitivit
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $h = (H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des filtrations de $A$.
Supposons que $f\Re g$
alors $f \le g$ et il existe $N_1 \ge 1, \forall m \ge N_1$, $J_m = \sum_{p=0}^{N_1} I_{m-p}J_p$
Supposons que $g\Re h$
alors $g \le h$ et il existe $N_2 \ge 1, \forall k \ge N_2$, $H_k = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}H_p$
D'o $f \le g \le h$. Donc $f \le h$
De plus posons $N = N_1 + N_2$
$H_k = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N} J_{k-p}H_p = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$ pour tout $k \ge N_1 + N_2$
Comme $k \ge N_1 + N_2$ alors $k - N_2 \ge N_1$ et $p \le N_2$ alors $k - p \ge N_1$
D'o $J_{k-p} = \sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i}J_i$
Ainsi $H_k = \sum_{p=0}^{N_2}(\sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i}J_i)H_p + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$
Donc $H_k \subset \sum_{p=0}^{N_2}\sum_{i=0}^{N_1} I_{k-p-i}J_iH_{p+i} + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$ car $g \le h$ d'o $J_i \subset H_i \subset H_iH_p \subset H_{i+p}$
Posons $l = p + i$, ainsi $0 \le l \le N_1 + N_2$ car $0 \le p \le N_2$ et $0 \le i \le N_1$
D'o $H_k \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$
Posons $K = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p$
Comme $p \ge N_2$ alors $H_p = \sum_{p=0}^{N_2} J_{p-i}H_i$
D'o $K = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}(\sum_{p=0}^{N_2} J_{p-i}H_i) = \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2}\sum_{p=0}^{N_2} J_{k-p}J_{p-i}H_i$
Donc $K \subset \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2}\sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i}H_i = \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i}H_i$
$K \subset \sum_{p=0}^{N_2} J_{k-i}H_i$
or $0 \le i \le N_2$ et $N_1 + N_2 \le k$ d'o $k - i \ge N_1$
Ainsi $J_{k-i} = \sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l}J_l$
D'o $K \subset \sum_{p=0}^{N_2}(\sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l}J_l)H_i \subset \sum_{p=0}^{N_2}\sum_{l=0}^{N_1} I_{k-i-l}J_lH_i \subset$
Posons $p = i + l$
D'o $K \subset \sum_{p=0}^{N_1+N_2} I_{k-p}H_p$
or $H_k \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l + \sum_{p=N_2+1}^{N_1+N_2} J_{k-p}H_p = \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l + K \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l$ car $K \subset \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l$
Donc $H_k \subset H_{k-p}H_p \subset H_k$
Finalement
$H_k = \sum_{l=0}^{N_1+N_2} I_{k-l}H_l$
Par suite $fRh$
* Anti-symtrie
Soient $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des filtrations de $A$ telles que:
$f\Re g$ alors $f \le g$ et $g\Re f$ alors $g \le f$.
D'o $f = g$
On en dduit que $R$ est une relation d'ordre.