

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

Présenté par **M. KABLAM** Edjabrou Ulrich Blanchard
Directeur de Mémoire: **M. ASSANE** Abdoulaye, Maître de Conférences

Encadrant Scientifique: **M. BROU** Kouadjo Pierre, Maître-Assistant



UNIVERSITÉ
NANGUI ABROGOUA

LMI
Laboratoire
de
Mathématiques
et
Informatique



*Unité de Formation et de
Recherche des Sciences
Fondamentales et Appliquées*



PLAN DE PRÉSENTATION

- ① INTRODUCTION
- ② PRÉLIMINAIRES
- ③ DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
- ④ CONCLUSION

INTRODUCTION

- ① Historique de la notion de dépendance intégrale
- ② Historique de la notion de réduction
- ③ Utilité des filtrations
- ④ Problématique et plan de travail

- ① INTRODUCTION
- ② **PRÉLIMINAIRES**
- ③ DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
- ④ CONCLUSION

Définition 1

$f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une filtration de A si :

- (i) $I_0 = A$;
- (ii) $I_{n+1} \subset I_n, \forall n \in \mathbb{Z}$;
- (iii) $I_p I_q \subset I_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}$.

PRÉLIMINAIRES

EXEMPLE DE FILTRATIONS

Exemple

(1) On pose

$$A = \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, l_0 = A, l_1 = l_2 = (\bar{2}), l_n = (\bar{0}), \forall n \geq 3.$$

Ainsi $f = (l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration.

(2) On pose

$$A = \mathbb{Z}[X], l_0 = A, l_{2n} = l_{2n-1} = l^n = (X)^n, \forall n \geq 1.$$

Ainsi $f = (l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration.

Remarque

On peut remarquer que pour tout entier n négatif, I_n est égal à A .
En effet, en utilisant la décroissance des idéaux (ii) et que I_0 est égal à A (i), il vient I_n est égal A , pour tout entier n négatif car pour tout entier relatif n , les I_n sont des idéaux de A .
Ainsi au lieu d'étudier la famille $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ nous pouvons nous ramener à étudier la famille $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

PRÉLIMINAIRES

CLASSES DES FILTRATIONS

f I – adique	$I_n = I^n, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$
f I – bonne	$\forall n \in \mathbb{Z}, I_n \subseteq I_{n+1}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, I_n = I_{n+1}, \forall n \geq n_0. \quad (2)$
f A.P.	$\exists (k_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n, m \in \mathbb{N}, I_{mk_n} \subset I_n^m, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{n} = 1. \quad (3)$
f f.A.P.	$\exists k \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, I_{nk} = I_k^n. \quad (4)$
f noeth.	son anneau de Rees $R(A, f) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n X^n$ est noethérien. (5)
f f. noeth.	$\exists k \geq 1, \forall m, n \in \mathbb{Z}, m, n \geq k, I_m I_n = I_{m+n}. \quad (6)$
f E.P.	$\exists N \geq 1, \forall n \geq N, I_n = \sum_{p=1}^N I_{n-p} I_p. \quad (7)$

Table : Classification des Filtrations

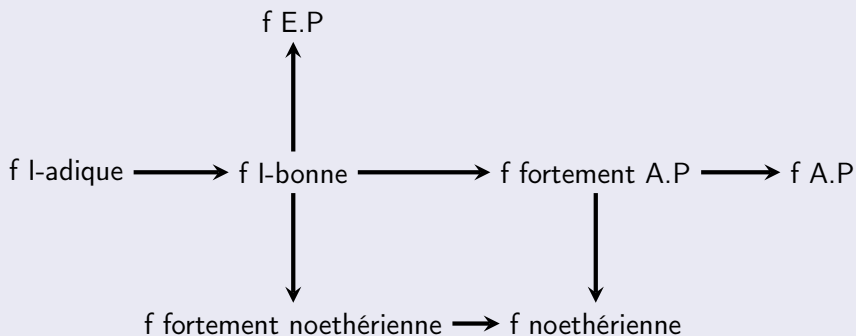


Figure : Liens entre les différentes classes des filtrations

Définition 2

- (i) Un élément x de A est dit entier sur f s'il existe un entier m appartenant à \mathbb{N} tel que

$$x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = x^m + \sum_{i=1}^m a_i x^{m-i} = 0, \quad (8)$$

$$m \in \mathbb{N}^*, \quad a_i \in I_i, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Définition 3

- (ii) f est une β -réduction de g si :
- a) $f \leq g$; (9)
 - b) $\exists k \geq 1$, $J_{n+k} = I_n J_k, \forall n \geq k$. (10)
- (iii) I est une réduction de J si :
- a) $I \subseteq J$; (11)
 - b) $\exists k \geq 1$, $J^{k+1} = IJ^k$. (12)

Définition 4

Soit M un A -module. On appelle filtration de M toute famille $\varphi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de sous-modules de M telle que :

- (a) $M_0 = M$;
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M_{n+1} \subset M_n$. (13)

La filtration $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de A et la filtration $\varphi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ du A -module M sont dites compatibles si :

$$I_p M_q \subset M_{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Définition 5

Soit $\varphi = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une filtration de module M , f -compatible, avec f , une filtration d'anneau A .

(a) φ est f -bonne s'il existe un entier naturel N supérieur ou égal à 1 tel que

$$\forall n > N, M_n = \sum_{p=1}^N I_{n-p} M_p. \quad (15)$$

Définition 6

Soit $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux filtrations de A . Alors :

(b) g est entière sur f si $g \leq P(f)$. Autrement dit,

$$\forall n \geq 1, J_n \subset P_n(f). \quad (16)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(f) = (P_k(f))_{k \in \mathbb{N}} = \{x \in A, x \text{ entier sur } f^{(n)} = (I_{nk})_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

CAS PARTICULIER DES FILTRATIONS I-ADIQUES

Proposition 1

Soient A un anneau, I un idéal de A et $x \in A$.

x est entier sur I si et seulement si I est une réduction de $I + (x) = I + xA$.



(i) Supposons que x est entier sur I . Alors il existe n appartenant à \mathbb{N}^* tel que

$$x^n = \sum_{i=1}^n (-a_i)x^{n-i}, \quad a_i \in I^i, i = 1, \dots, n.$$

Ainsi

$$x^n = \sum_{i=1}^n (-a_i)x^{n-i} \in \sum_{i=1}^n I^i x^{n-i} = I \sum_{i=0}^{n-1} I^i x^{n-1-i}. \quad (17)$$

Alors

$$x^n \in I(I + (x))^{n-1}. \quad (18)$$

$$\text{Ainsi : } (I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1} + (x)(I + (x))^{n-1}. \quad (19)$$

Montrons que I est une réduction de $I + (x)$. C'est à dire que $(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1}$ (20).

On rappelle que pour tout n appartenant à \mathbb{N} , $nI = I$. (21)

En prouvant que $(x)(I + (x))^{n-1}$ est contenu dans $I(I + (x))^{n-1}$ (22) on aura

$$(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1}. \quad (23)$$

$$(x)(I + (x))^{n-1} = (x)^n + I \sum_{i=0}^{n-2} I^i (x)^{n-1-i} \subset (x)^n + \sum_{i=0}^{n-1} I^i (x)^{n-1-i}. \quad (24)$$

D'où

$$(x)(I + (x))^{n-1} \subset (x)^n + I(I + (x))^{n-1}. \quad (25)$$

En somme

$$(x)(I + (x))^{n-1} \subset I(I + (x))^{n-1}. \quad (26)$$

D'où

$$(I + (x))^n = I(I + (x))^{n-1}. \quad (27)$$

Par conséquent I est une réduction de $I + (x)$.

(ii) Supposons que I est une réduction de $I + (x)$.

Alors il existe n appartenant à \mathbb{N}^* tel que

$$(I + (x))^{n+1} = I(I + (x))^n. \quad (28)$$

On a

$$x^{n+1} \in (I + (x))^{n+1} = I(I + (x))^n.$$

Alors

$$x^{n+1} \in I \sum_{i=0}^n I^i(x)^{n-i} = \sum_{i=0}^n I^{i+1}(x)^{n-i}. \quad (29)$$

D'où

$$x^{n+1} \in \sum_{i=1}^{n+1} I^i(x)^{n+1-i}. \quad (30)$$

Alors

$$x^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x^{n+1-i}, \quad a_i \in I^i. \quad (31)$$

Ainsi x est donc entier sur I .

DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES

Proposition 2

Soient A noethérien, $f = (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux filtrations de A . Si f est fortement noethérienne et g est noethérienne alors les assertions sont équivalentes et dans ce cas g est fortement noethérienne :

- (i) f est une réduction de g .
- (ii) g est *entière* sur f .
- (iii) g est f – *bonne*.

- ① INTRODUCTION
- ② PRÉLIMINAIRES
- ③ DÉPENDANCE INTÉGRALE, RÉDUCTION ET FILTRATIONS BONNES
- ④ CONCLUSION

CONCLUSION

BILAN ET PERSPECTIVES

- 1 Propriétés des filtrations I – *bonnes*.
- 2 Réduction minimale des filtrations bonnes.
- 3 Étendre ces résultats aux autres classes de filtrations (noethériennes,...).
- 4 Étendre ces résultats à des objets algébriques qui ne respectent pas forcément la décroissance.

MERCI POUR VOTRE AIMABLE ATTENTION

