Corollaire 0.1. *Soient* $f = (I_n), g = (J_n) \in \mathbb{F}(A)$, *tel que* $f \leqslant g$ *et* A *est noethérien. Si* f *ou* g *est noethérien alors* g *est* $f-bonne \Longleftrightarrow g$ *est fortement entière sur* f.

Proposition 0.1. *Soit* A *un anneau noethérien. Soient* $f, g \in \mathbb{F}(A)$.
Si f *est noethérienne alors* g *est fortement entière sur* $f \Longleftrightarrow$ *il existe un entier naturel* $N \geqslant 1$ *tel que* $t_N g \leqslant f \leqslant g$.

Proposition 0.2. *Soient* $f, g \in \mathbb{F}(A)$. *Alors :*

$$g \text{ est entière sur } f \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, g^{(k)} \text{est entière sur } f^{(k)} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, g^{(k)} \text{est entière sur } f^{(k)}$$

Corollaire 0.2. *Soient* $f, g \in \mathbb{F}(A)$, *tel que* $f \leqslant g$. *Si* A *est noethérien et* g *est fortement entière sur* f. *Alors* f *est fortement A.P* $\Longleftrightarrow$ g *est fortement A.P.*

Proposition 0.3. *Si* $f = f_I$ *alors :*
f *est fortement A.P* $\Longleftrightarrow$ f *est A.P* $\Longleftrightarrow$ f *est fortement noethérienne* $\Longleftrightarrow$ f *est noethérienne* $\Longleftrightarrow$ f *est E.P*

Corollaire 0.3. *Soient* $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux filtrations de* A,
tel que $f \leqslant g$. *Si* f *ou* g *est noethérienne. Alors :*
g *est* $f-bonne \Longleftrightarrow g$ *est fortement intégral sur* f

Proposition 0.4. *Soient* $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux filtrations de* A *tel que* f *est une réduction de* g *alors :* g *est E.P et* g *est* $f-bonne$.

Proposition 0.5. *Lorsque* f *est une filtration fortement noethérienne et* g *est une filtration noethérienne de l'anneau noethérien* A *vérifiant* $f = (I_n) \leq g = (J_n)$, *on montre que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est une réduction de* g
(ii) $J_n^2 = I_n J_n, \forall n >> 0$
(iii) L'idéal I_n *est une réduction de l'idéal* J_n *pour tout* $n >> 0$
(iv) Il existe un entier $k \geq 1$ *tel que* g^k *soit* $I_k - bonne$
(v) $\forall m \geq 1$, $f^{(m)}$ *est une réduction de* $g^{(m)}$
(vi) $\exists m \geq 1$, *tel que* $f^{(m)}$ *soit une réduction de* $g^{(m)}$
(vii) g *est entière sur* f
(viii) g *est fortement entière sur* f
(ix) g *est* $f - fine$
(xi) g *est faiblement* $f - bonne$
(x) g *est* $f - bonne$
(xii) $\exists m \geq 1$, *tel que* $t_m f \leq f \leq g$
(iii) $(P_k(f)) = (P_k(g))$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$

En particulier, il résulte des équivalences ci-dessus que si f *est une filtration* $I-$ *adique de l'anneau noethérien* A *et si* g *est une filtration noethérienne dominée par* g, *les notions suivantes sont équivalentes :*

(1) f_I *est une réduction de* g
(2) g *est entière sur* f_I.
(3) g *est fortement entière sur* f_I
(4) g *est* $I - bonne$

Théorème 0.1. *Soient* $f = (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq g = (J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des filtrations sur l'anneau* A. *Nous considérons les assertions suivantes :*

i) f *est une réduction de* g.

ii) $J_n^2 = I_nJ_n$ *pour tout* n *assez grand.*

iii) I_n *est une réduction de* J_n *pour tout* n *assez grand.*

iv) Il existe un entier $s \geq 1$ *tel que pour tout* $n \geq s$, $J_{s+n} = J_sJ_n$, $I_{s+n} = I_sI_n$, $J_s^2 = I_sJ_s$, $J_{s+p}I_s = I_{s+p}J_s$ *pour tout* $p = 1, 2, ..., s-1$

v) Il existe un entier $k \geq 1$ *tel que* $g^{(k)}$ *est* $I_k - bonne$

vi) Il existe un entier $r \geq 1$ *tel que* $f^{(r)}$ *est une réduction de* $g^{(r)}$.

vii) Pour tout entier $m \geq 1$ *tel que* $f^{(m)}$ *est une réduction de* $g^{(m)}$.

viii) g *est entière sur* f.

ix) g *est* $fortement$ *entière sur* f.

x) g *est* $f - fine$.

xi) g *est* $f - bonne$.

xii) g *est* $faiblement$ $f - bonne$.

xiii) Il existe un entier $N \geq 1$ *tel que* $t_Ng \leq f \leq g$

xiv) Il existe un entier $N \geq 1$ *tel que* $t_Ng' \leq t_Nf'$ *où* f' *est la clôture intégrale de* f.

xv) $P(f) = P(g)$, *où* $P(f)$ *est la clôture prüférien de* f.

1) On a :

$(i) \Longleftrightarrow (vii)$; $(v) \Longleftrightarrow (vi)$; $(viii) \Longleftrightarrow (xv)$; $(ii) \Longrightarrow (iii)$; $(iv) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (v)$; $(ix) \Longrightarrow (vii), (xii)$ *et* $(xiii)$;

$(i) \Longrightarrow (x) \Longrightarrow (xi) \Longrightarrow (xii) \Longrightarrow (xiii)$

2) Si de plus on suppose A *noethérien, alors :*

$(i) \Longleftrightarrow (xiv)$; $(i) \Longrightarrow (ix) \Longleftrightarrow (xii)$; $(i) \Longrightarrow (ii)$

3) Par ailleurs, si f *est noethérienne, alors* A *est noethérien et les assertions suivantes sont équivalentes :*

$(ix) \Longleftrightarrow (x) \Longleftrightarrow (xi) \Longleftrightarrow (xii) \Longleftrightarrow (xiii)$

4) Si f *et* g *sont noethériennes alors nous avons :*

$(iii) \Longrightarrow (viii) \Longleftrightarrow (ix)$; $(vi) \Longrightarrow (ix)$

5) Si f *est fortement noethérienne et* g *est noethérien alors les quinze (15) assertions sont équivalentes et dans ce cas* g *est fortement noethérienne.*

$(i) \Longleftrightarrow (ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv) \Longleftrightarrow (v) \Longleftrightarrow (vi) \Longleftrightarrow (vii) \Longleftrightarrow (viii) \Longleftrightarrow (ix) \Longleftrightarrow (x) \Longleftrightarrow (xi) \Longleftrightarrow (xii) \Longleftrightarrow (xiii) \Longleftrightarrow (xiv) \Longleftrightarrow (xv)$.

Démonstration. 1)

$(i) \Longleftrightarrow (vii)$.

Supposons (i) et choisissons k comme dans **??** (i) alors pour tout entiers $m \geq 1$ et $n \geq k$, $J_{m(k+n)} = J_{mk}I_{mn}$, ce qui entraîne (vii).

La réciproque est évidente.

$(v) \Longrightarrow (vi)$.

Posons $f^{(k)} = (H_n)$; $g^{(k)} = (K_n)$; $H_n = I_{nk}$; $K_n = J_{nk}$; $H_1 = I_k$;

Par hypothèse, $H_1K_n \subseteq K_{n+1}$ pour tout entier n et il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $H_1K_n = K_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.

Pour tout entier $m \geq 0$, $K_{n_0+m} = H_1^mK_{n_0} \subseteq H_mK_{n_0} \subseteq K_{n_0+m}$.

Donc $K_{n_0+m} = K_{n_0}H_m$ pour tout entier m. Et donc $f^{(k)}$ est une réduction de $g^{(k)}$.

$(vi) \Longrightarrow (v)$.

Il suffit de montrer que si f est une réduction de g alors il existe $k \geq 1$ tel que $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$.

Posons k comme dans **??** (i), alors pour tout entiers $m \geq 1$ et $J_{k(m+1)} = J_{mk}I_k$, donc $g^{(k)}$ est $I_k - bonne$.

Donc $(vi) \Longrightarrow (v)$.

$(viii) \Longleftrightarrow (xv)$.

Si g est entière sur f alors $f \leq g \leq P(f)$, ainsi $P(f) \leq P(g) \leq P(P(f)) = P(f)$, donc $P(g) = P(f)$.

Réciproquement si $P(f) = P(g)$ alors $g \leq P(g) = P(f)$ et donc g est entière sur f.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$.

Évident.

$(iv) \Longrightarrow (i)$.

Posons $n \geq 2s$ et $n = qs + p$ avec $0 \leq p < s$.

Alors $J_{s+n} = J_{(q-2)s+2s+(s+p)} = J_s^{q-2}J_{2s+(s+p)} = J_s^{q-2}J_s^2J_{s+p} = J_s^{q-1}I_sJ_{s+p} = J_s^{q-1}J_sI_{s+p} = J_s^qI_{s+p} = J_sI_s^{q-1}I_{s+p} \subseteq J_sI_n \subseteq J_{s+n}$.

Par suite $J_{s+n} = J_sI_n$ pour tout $n \geq 2s$. Donc $J_{2s+n} = J_{2s}I_n$ pour tout $n \geq 2s$. D'où (i).

$(i) \Longrightarrow (v)$

Évident car $(vi) \Longrightarrow (v)$.

$(ix) \Longrightarrow (viii)$

Évident

$(ix) \Longrightarrow (xii) \Longrightarrow (xiii)$ en utilisant **??** (5)

$(i) \Longrightarrow (x)$.

Pour tout entier $n \geq N = 2k - 1$, posons $n = qk + r$, avec $0 \leq r < k$ où k est comme dans (4.3) (i).

Alors $J_n = J_{k(q-1)}I_{k+r}$.

Ainsi $1 \leq k + r < 2k - 1$, $J_n \subseteq \sum_{p=1}^{N} I_pJ_{n-p} \subseteq J_n$, d'où $J_n = \sum_{p=1}^{N} I_pJ_{n-p}$ pour tout $n \geq N = 2k - 1$.

Ce qui prouve que g est $f - fine$.

$(x) \Longrightarrow (xi)$ par **??**

$(xi) \Longrightarrow (xii)$ par **??** (1).

2)

On suppose maintenant que A est noethérien.

Alors $(i) \Longrightarrow (ix)$ en utilisant **??**.

$(i) \Longrightarrow (ii)$

f est noethérienne par **??** donc il existe un entier k' tel que $I_{n+k'} = I_nI_{k'}$, pour tout $n \geq k'$.

Choisissons k comme dans **??** (i) nous pouvons supposons que $k = k'$ et même prendre kk' à la place de k ou k' si nécessaire.

Pour tout $n \geq 3k$, posons $n = qk + r$, avec $0 \leq r < k$. Alors $q = E(\frac{n}{k}) \geq 3$.

$J_n = J_k I_{(q-1)k+r} = J_k I_k^{q-2} I_{k+r}$.
$J_n^2 = J_k^2 I_k^{q-3}(I_k^{q-1} I_{k+r}) I_{k+r} \subseteq J_{2k} I_{(q-3)k} I_n I_{k+r}$.
D'où $J_n^2 \subseteq J_n I_n$
Donc $J_n^2 = J_n I_n$ pour tout $n \geq 3k$.
$(i) \Longleftrightarrow (iv)$.
D'après 1) il suffit de montrer que $(i) \Longrightarrow (iv)$.
Nous avons vu que $(i) \Longrightarrow (ii)$. Alors il existe un entier $k' \geq 1$ tel que $J_n^2 = I_n J_n$ pour tout $n \geq k'$.

Dans la preuve de la même implication, nous avons aussi montrer qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $J_{k+n} = J_k I_n = J_k J_n$ et que $I_{k+n} = I_k I_n$ pour tout $n \geq k$.

Posons $n \geq 2kk' = s$, $k" = kk'$ et $n = qk" + r$ avec $0 \leq r < k"$. Alors $q \geq 2$ et :
$J_{s+n} = J_{(q+2)k"+r} = J_{k"}^3 J_{(q-1)k"+r} = I_{k"}^2 J_{k"} J_{(q-1)k"+r} = I_s J_n$.
$J_{s+n} = J_s I_n = J_s J_n$
$I_{s+n} = I_s I_n$
$J_s^2 = I_s J_s$
D'où (iv).
$(ix) \Longleftrightarrow (xii)$ d'après **??**
$(iii) \Longleftrightarrow (xiv)$
Nous savons que pour tout idéal $I \subseteq J$ d'un anneau noethérien, I est une réduction de J si et seulement si $I' = J'$, où I'est la clôture intégrale de I. D'où l'équivalence.

3) Supposons que f est noethérienne.
Alors d'après **??**, $(ix) \Longleftrightarrow (xiii)$ et d'après **??**,
$(ix) \Longleftrightarrow (x) \Longleftrightarrow (xi) \Longleftrightarrow (xii) \Longleftrightarrow (xiii)$

4) Supposons que f et g sont noethériens. Alors $(viii) \Longleftrightarrow (ix)$ d'après ([**?**], **??**,(b)).
$(iii) \Longrightarrow (viii)$.
Supposons que I_n est une réduction de J_n pour tout $n \geq n_0$.
f et g sont noethérien d'où fortement $A.P.$ à partir d'un rang commun k.
L'idéal J_{n_0k} est entière sur l'idéal I_{n_0k}. D'où g est entière sur f d'après ([**?**], 4.5).
$(vi) \Longrightarrow (ix)$.
Si $f^{(r)}$ est un réduction de $g^{(r)}$ alors $g^{(r)}$ est fortement entière sur $f^{(r)}$ d'après **??** (iii) et g est fortement entière sur f d'après **??**

5) Supposons que f est fortement noethérienne. D'après l'implication précédente il est facile de montrer que $(xii) \Longrightarrow (i)$.

Supposons que (xii), alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n > N$, $J_n = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n-p} J_p$.

f étant fortement noethérienne, il existe un entier $N' \geq 1$ tel que $I_m I_n = I_{m+n}$ pour tout $m, n \geq N'$.

Posons $n \geq k = N + N'$.

Si $0 \leq p \leq N$, alors $N' = k - N \leq k - p \leq n - p$, $J_{n+k} = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n+k-p} J_p = \sum\limits_{p=0}^{N} I_{n+} I_{k-p} J_p = I_n J_k$, et f est une réduction de g.

Pour compléter la preuve, nous avons montrer par exemple que si f est une réduction de g et si f est fortement noethérienne alors g est fortement noethérien.

Soient k, k' des entiers ≥ 1 tel que $J_{k+n} = J_k I_n$ pour tout $n \geq k$ et $I_{m+n} = I_m I_n$ pour tout $m, n \geq k'$.

Posons $m, n \geq k'$. Alors $J_m J_n \subseteq J_{m+n} = J_k I_{m+(n-k)} = J_k I_m I_{n-k} \subseteq J_m J_n$, d'où $J_{m+n} = J_m J_n$ pour tout $m, n \geq k + k'$ et g est fortement noethérienne. $\square$