1 DÉCOMPOSITION DE CALDERON ZYGMUND

Théorème 1. *On suppose que $f \in L^1_{loc}$ tel que $Mf \in L^p$, $p \leq 1$ et α un nombre réel positif. Alors f se décompose comme suit : $f = g + b$ où $b = \sum b_k$ et une famille de $(Q_k^*)_k$ tel que :*

(i) g soit borné avec $g(x) \leq c\alpha$

(ii) Chaque b_k est à support dans Q_k^*, $\int\limits_{R^n} \mu_0(b_k)^p(x)dx \leq \int\limits_{Q_k^*} Mf(x)^p dx$ et $\int b_k dx = 0$.

(iii) La famille (Q_k^*) à la propriété d'intersection nulle à l'infini et $\cup_{k\in\mathbb{N}} Q_k^* = \{x : Mf(x) > \alpha\}$.

Remarque 1. $Mf(x) = \sup\limits_{\phi \in S_F} |f(x)\phi(x)|$, $S_F = \{\phi \in S : \|\phi\|_{\alpha_i,\beta_i} \leq 1, \forall \|.\|_{\alpha,\beta} \in F\}$ *avec* $F = \{\|.\|_{\alpha_i,\beta_i}\}$.

Démonstration. • On pose $O = \{x : Mf(x) > \alpha\} = Mf^{-1}(]-\infty;\alpha[)$ qui est un ouvert car image réciproque par Mf une application continue.

D'après le théorème de la décomposition de Whitney, $\exists (Q_k)_k$ de boules tel que :

(a) les Q_k soient disjoints

(b) $\cup_{k\in\mathbb{N}} Q_k^* = 0 = c_F$

(c) $Q_k^{**} \cap F \neq \varnothing, \forall k \in \mathbb{N}$, où $Q_k^* = Q_k(x_k, c^* l_k)$, $\widetilde{Q_k} = Q_k(x_k, c^{**} l_k)$, avec $1 < c^* < c^{**}$ et $Q_k \subset Q_k^* \subset \widetilde{Q_k}$

D'où le iii)

• Soit ξ une fonction positive fixé telle que : $\xi = 1$ sur $c(0,1)$.

On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $\xi_k(x) = \xi(\frac{[x-x_k]}{l_k})$ et $\eta_k = \frac{\xi_k}{\sum\limits_j \xi_j}$

* η_k est bien définie $\forall k \in \mathbb{N}$.

Car $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{[x-x_{j_0}]}{l_{j_0}} \in Q_{j_0} \Longrightarrow \xi_{j0}(x) = 1$, aussi $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \xi_j \neq 0$

* $(\eta_k)_k$ forment une partition de l'unité subordonnée à la famille $(\widetilde{Q_k})$

- $\cup_{k\in\mathbb{N}} \widetilde{Q_k} \subset O$
- $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \eta_k = 1$
- η_k est de classe C^∞ et sup $\eta_k \subset \widetilde{Q_k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

On a donc $\chi_0 = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \eta_k$ car $\forall x \in O, \exists! k_0 \in \mathbb{N}, x_k \in \widetilde{O_{k_0}}$ ainsi $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \eta_k(x) = \eta_{k_0}(x) = 1$.

$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \left|\partial^\beta \eta_k(x)\right| \leq c_\beta l_k^{-|\beta|}, \forall k \in \mathbb{N}$

car $\left|\partial^\beta \eta_k(x)\right| = \left|\partial^\beta (\frac{\xi_k(x)}{\sum\limits_j \xi_j(x)})\right| = \left|\partial^\beta (\frac{\xi(\frac{[x-x_k]}{l_k})}{\sum\limits_j \xi(\frac{[x-x_j]}{l_j})})\right| =$

$$\left|\sum_{|\gamma|\leq|\beta|} \frac{\beta!}{\gamma!(\beta-\gamma)!} \partial^\gamma (\xi(\frac{[x-x_k]}{l_k})) \partial^{\beta-\gamma} (\frac{1}{\sum\limits_j \xi(\frac{[x-x_j]}{l_j})})\right| =$$

$$\left|\sum_{|\gamma|\leq|\beta|}\frac{\beta!}{\gamma!(\beta-\gamma)!}\partial^{\gamma}(\frac{[x-x_k]}{l_k})(\partial^{\gamma}\xi)(\frac{[x-x_k]}{l_k})\partial^{\beta-\gamma}(\frac{1}{\sum_j\xi(\frac{[x-x_j]}{l_j})})\right|\leq c_\beta l_k^{-|\beta|}$$

On définit b_k par $b_k=(f-c_k)\eta_k$ où les constantes $c_k=\frac{\int f\eta_k}{\int\eta_k}$ ainsi

En effet : $\exists j_0\in\mathbb{N}$ tel que $\sup\eta_{j_0}\subset\tilde{Q}_{j_0}$ et $\forall x\in\tilde{Q}_{j_0}$ $,\eta_{j_0}(x)=1$

D'où $\int b_k dx=\int(f-\frac{\int f\eta_k}{\int\eta_k})\eta_k dx=\int f dx-\int f\eta_k dx=\int f(1-\eta_k)dx$ $,\forall k\in\mathbb{N}$.

$\forall k\in\mathbb{N},\exists j_0\in\mathbb{N}$ tel que $Q_k\subset\tilde{Q}_{j_0}$et $\sup\eta_{j_0}\subset\tilde{Q}_{j_0}$ $,\eta_{j_0}(x)=1$

D'où $\int b_k dx=\int_{\tilde{Q}_{j_0}} f(1-\eta_k)dx=0$

$\forall\beta\in\mathbb{N}^d,\left|\partial^\beta\eta_k(x)\right|\leq c_\beta l_k^{-|\beta|},\forall k\in\mathbb{N}$. $|\int_{\mathbb{R}^n}\eta_k(x)dx|=\left|\int_{Q_k^*}\eta_k(x)dx\right|\leq\int_{Q_k^*}|\eta_k(x)|\,dx\leq$ $\int_{Q_k^*}c_\beta l_k^{-|\beta|}dx$ $,\beta=(0,...,0)$

$|\int_{\mathbb{R}^n}\eta_k(x)dx|\leq\ c\,|Q_k^*|=cc^{*n}l_k^n$

$|\int_{\mathbb{R}^n}\eta_k(x)dx|\leq\ c'l_k^n$

D'où $|\int_{\mathbb{R}^n}\eta_k(x)dx|\simeq|Q_k^*|\simeq l_k^n$

On a : $\forall k\in\mathbb{N},|c_k|\leq c\alpha$ (2.2)

En effet, si $\bar{x}\in O^c$ tel que $d(\bar{x},a_k)\simeq l_k$.

Alors d'après (21), comme η_k est une fonction continue à support dans Q_k^*.

On prend $\phi=\eta_k$ et $B=B(x_k,cl_k)$ avec c assez grand de sorte que $Q_k^*\subset B_k$, $\bar{x}\in B_k$ et conformément à (21) (du document), on a :

$\int f\eta_k\leq c\mu f(\bar{x}),\ \bar{x}\in B_k$

$|c_k|=|\int f\eta_k\,|\int\eta_k||\leq\frac{c}{\int\eta_k}\mu f(\bar{x})$ faisant correspondre Q_k^* à Q_k et B_k à (23)

Q_k^* on obtient $|c_k|\leq c\mu f(\bar{x}),\forall\bar{x}\in Q_k^*$

A présent, on définit g comme suit :

$$g(x)=\begin{cases} f(x) \text{ si } x\notin O\\ \sum_k c_k\eta_k \text{ si } x\in O\end{cases}$$

* $x\notin O=\{x:Mf(x)>\alpha\}$

$Mf(x)\leq\alpha$ alors $\forall t>0,\ f^*\phi_t(x)\leq c\alpha$

Par construction de $(\phi_t)_{t>0}$, on obtient $\lim_{t\longrightarrow0}f^*\phi_t=f$

$f(x)\leq c\alpha$ d'où $g(x)\leq c\alpha$

* $x\in O$

$\exists k_0\in\mathbb{N}$,tel que $x\in Q_{k_0}^*$

$|g(x)|=\left|\sum_k c_k\eta_k(x)\right|=|c_{k_0}\eta_{k_0}(x)|\leq|c_{k_0}|\leq c\alpha$ d'après (22)

$\forall x,\ g(x)\leq c\alpha$ d'où (i)

On distingue deux cas.

Cas 1 : $\frac{n}{n+1}<p\leq1$

$\forall x\in O,\ \mu_0(b_k)(x)=\mu_0(f\eta_k)-\mu_0(c_k\eta_k)$

* $\mu_0(b_k)(x)\leq c\mu f(x)$ si $x\in Q_k^*$ (24)

En effet : $\forall k\in\mathbb{N},\ (f\eta_k^*\Phi_t)(x)=\int f(y)\eta_k(y)\Phi_t(x-y)dy$

Pour $x\in Q_k^*$, on a soit $t\leq l_k$ soit $t>l_k$

- Si $t\leq l_k$, On pose $\phi(y)=\eta_k(y)\Phi_t(x-y)$

ϕ est une fonction continue et à support dans $B(x,t)$ car $\sup p\Phi \subset B(0,1)$

Aussi $|x-y| \leq t \leq l_k$ d'où $B(x,t) \subset Q_k^*$

En appliquant comme (21), où $\int \phi \times f \leq c\mu f(x)\,,\ x \in Q_k^*$

c'est à dire, $(f_{x_k^*}\Phi_t)(x) \leq c\mu f(x)\,,\ x \in Q_k^*$

- Si $t > l_k$, on prend $B = B(x_B, cl_k)$ tel que $Q_k^* \subset B$, ceci montre que

$\mu_0 f(x_k)(x) = \sup\limits_{t>l_k} |f\eta_k^*\Phi_t(x)| \leq c\mu f(x)\,,\ x \in Q_k^*$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mu_0(c_k x_k)(x) = \sup\limits_{t>0} |c_k\eta_k^*\Phi_t(x)| \leq |c_k| \sup\limits_{t>0} |c_k\eta_k^*\Phi_t(x)| \leq c\mu f(x)\,,$ d'après (23)

Aussi $\mu_0(b_k)(x) \leq c'\mu f(x)$

$-\mu_0(b_k)(x) \leq c\alpha \frac{l^{n+1}}{|x-x_k|^{n+1}}$ si $x \notin Q_k^*$.

On a : $\int b_k(y)\Phi_t(x-y)dy = \int b_k(y)[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)]dy$ car x alors $x - x_k \notin Q_k^* - x_k$

D'où $|(x-x_k)| > tl_k$ d'où $x - x_k \notin B(x,t)$ ainsi $\Phi_t(x-x_k) = 0$.

On pose $I_1 = \int f\eta_k[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)]dy$ et $I_2 = \int c_k\eta_k[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)]dy$

Ainsi $\int b_k\eta_k\Phi_t(x-y)dy = I_1 - I_2$

On rappelle que sup $\eta_k \subset \widetilde{Q}_{j_0}$ et nous avions pris $tQ_k \subset Q_k^*$. Alors si $x \notin Q_k^*$ alors $x - x_k \notin Q_k^* - x_k$

$x - x_k \notin tQ_k - x_k$ désignent la boule centrée à l'origine de rayon tl_k

Aussi $x - y \notin Q_k^* - y \subset Q_k^* - x_k$

D'où $\exists \alpha > 0$ tel que $|x - x_k| < \alpha\,|x-y|$

$|x - x_k| \simeq |x-y|$

Et la propriété du support de Φ impose que t vérifie : $t \geq c\,|x - x_k|$

Maintenant on prend $\phi(y) = \eta_k(y)[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)]$

$\partial^\alpha\phi(y) = \partial^\alpha(\eta_k(y)[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)]) = \partial^\alpha(t^{-n}\eta_k(y)[\Phi(t^{-1}(x-y)) - \Phi_t(t^{-1}(x-x_k))]) =$

$t^{-n}\partial^\alpha(\eta_k(y)[\Phi(t^{-1}(x-y)) - \Phi_t(t^{-1}(x-x_k))])$

On a : $t^{-n} \leq c^{-n}\,|x-x_k|^{-n}$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\partial^\alpha\eta_k(x)| \leq c_\alpha l_k^{-|\alpha|}$

$|\partial^\alpha\eta_k(x)| = \left| t^{-n} \sum\limits_{|k'| \leq |\alpha|} \frac{\alpha!}{k'!(\alpha-k')!} \partial^{k'}\eta_k(x)\partial^{\alpha-k'}\Phi(t^{-1}(x-y)) \right| \leq$

$c^{-n} \sum\limits_{|k'| \leq |\alpha|+1} \frac{\alpha!}{k'!(\alpha-k')!} \left|\partial^{k'}\eta_k(x)\right| \left\|\partial^{\alpha-k'}\Phi(t^{-1}(x-y))\right\| \leq c^{-n} \times c_\alpha\,|x-x_k|^{-n-|\alpha|+1} l_k \leq a_\alpha \frac{1}{|x-x_k|^n} l_k^{-|\alpha|+1}$ (26)

Soit $x \notin Q_k^*$

$|I_1| = |\int f\eta_k[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)]dy|$

On a :

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\partial^\alpha\phi(y)| \leq a_\alpha \frac{l_k}{|x-x_k|^n} l_k^{-|\alpha|}$ d'où $|\phi(y)| \leq c\frac{l_k}{|x-x_k|^{n+1}}$

$|I_1| \leq \int\limits_{Q_k^*} |f(y)|\,|\phi(y)|\,dy \leq c\frac{l_k}{|x-x_k|^{n+1}} \int\limits_{Q_k^*} |f(y)|\,dy$ d'après (21) $|I_1| \leq c'\alpha\frac{l_k}{|x-x_k|^{n+1}}$

Combinant (26) et (22), on obtient $I_2 = I_1 - \int b_k(y)[(x-y) - \Phi_t(x-x_k)]dy$

$|I_2| \leq |\int c_k(y)\eta_k(y)[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)]dy| \leq |c_k| \times |\int \eta_k(y)[\Phi_t(x-y) - \Phi_t(x-x_k)]dy| \leq c\alpha\frac{l_k}{|x-x_k|^{n+1}}$ d'après (22) et (26) car $|c_k| \leq c\alpha$

Soit $x \notin Q_k^*$

$|\mu_0(b_k)(x)| = |\mu_0(f\eta_k)(x) - \mu_0(c_k\eta_k)(x)| = \left|\sup\limits_{t>0}|f\eta_k^*\Phi_t(x)| - \sup\limits_{t>0}|c_k\eta_k^*\Phi_t(x)|\right| = |I_1 - I_2|$ car ne dépend pas de t

D'où $|\mu_0(b_k)(x)| = |I_1| + |I_2| \leq 2c\alpha\frac{l_k}{|x-x_k|^{n+1}}$, $x \notin Q_k^*$

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_0(b_k)^p dx = \int\limits_{Q_k^*} \mu_0(b_k)^p dx + \int\limits_{Q_k^{*c}} \mu_0(b_k)^p dx$

Pour la première intégrale (24) et la seconde intégrale (25)

(24)$\mu_0(b_k)(x) \leq c\mu f(x)$, $x \in Q_k^*$

$\int\limits_{Q_k^*} \mu_0(b_k)^p(x)dx \leq c^p \int\limits_{Q_k^*} \mu f(x)^p dx$

$\int\limits_{Q_k^*} \mu_0(b_k)^p(x)dx \leq c^p\alpha^p \int\limits_{Q_k^{*c}} (\frac{l'_k}{|x-x_k|})^{p(n+1)}dx$ avec $Q_k^{*^c} = \{x : |x - x_k| \geq cl_k\}$

$\int\limits_{Q_k^*} \mu_0(b_k)^p(x)dx \leq c'\alpha^p l_k^n = c\alpha^p |Q_k^*|$ car $x \longmapsto \frac{1}{|x-x_k|^{p(n+1)}}$ est intégrable dans $Q_k^{*^c}$, $p(n+1) > n$

et comme $x \in Q'_k$ alors $Mf(x) \geq \alpha$ d'où $Mf^p(x) \geq \alpha^p$. Ainsi $\int\limits_{Q'_k} Mf^p(x)dx \geq \alpha^p |Q'_k|$ et $\frac{1}{|x-x_k|} \leq c^{-1}l_k^{-1}$

D'où $(\frac{l_k}{|x-x_k|})^{p(n+1)} \leq (l_k c^{-1} l_k^{-1})^{p(n+1)}$

Ainsi $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_0(b_k)^p dx \leq \int\limits_{Q_k^*} Mf^p dx$

Cas 2 : $\frac{n}{n+1} \geq p > 0$

Ici nous considérons c_k comme un polynôme ayant pour degré $\leq d$, ceci avec la condition : $\int(f - c_k c_k)q dx = 0$ pour tout polynôme q de degré $\leq d$.

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_k$ l'espace Hilbertien des fonctions sur Q_k^* avec, $\|f\|^2 = \frac{\int|f(x)|^2\eta_k(x)dx}{\int \eta_k(x)dx}$

Dans $\mathcal{H}$, considérons les sous-espaces de dimension finie défini $\mathcal{H}_{k,d}$ avec les polynômes ayant pour degré $\leq d$. Soit P_k la projection orthogonale sur le $\mathcal{H}_{k,d}$ sous-espace. Alors $c_k = p_k(f)$.

De (22) et (23) on a :

(22') $|c_k\eta_k| \leq c\alpha$,cette inégalité reste valable car c_k s'écrivant comme polynôme et chaque élément étant dominé comme dans (22) et (23). On a $(22')$ et $(23')$, $|c_k\eta_k| \leq c\mu f(x)$, $\forall x \in Q_k^*$

On note (27) $\sup\limits_{x\in Q_k^*} |\partial^\alpha q(x)| \leq c_\alpha l_k^{-|\alpha|} \|q\|$, pour tout polynôme de degré $\leq d$

Soit $p(x,y) \in Ker(P_k)$

Alors $p(x,y) = \sum\limits_j e_j(x)\bar{e_j}(y)$ avec $(e_j)_j$ une base de $\mathcal{H}_{k,d}$ et d'après (27), On a :

$\sup\limits_{x\in Q_k^*,\, y\in Q_k^*} |\partial^\alpha p(x,y)| \leq c_\alpha l_k^{-|\alpha|}$

or $c_k(x) = p_k(f)(x) = \int p(x,y)f(y)\eta_k(y)dy$

On obtient donc la justification de (22) et de (23) ce qui prouve qu'en se servant de ce qu'on a montré plus haut que : $\int b_k q d(x) = 0$ (28)

Chaque fois que q est un polynôme de degré $\leq d$.

Soit $x \notin Q_k^*$, on pose : $\phi(y) = \eta_k(y)[\Phi_t(x-y) - q(y)]$

On effectue le développement de Taylor au voisinage de $x_k = y$.

Ainsi $|\partial^\alpha \phi(y)| \leq c_\alpha \frac{l_k^{d-|\alpha|}}{|x-x_k|^{n+d+1}}$
Le résultat est donc :
$\mu_0(b_k)(x) \leq c\alpha \frac{l_k^{n+d+1}}{|x-x_k|^{n+d+1}}$, si $x \notin Q_k^*$ (25')
En choisissant d assez grand, on a $(n+d+1)p > n$
d'où $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_0(b_k)^p(x)dx \leq (c\alpha)^p \int (\frac{l_k^{n+1}}{|x-x_k|})^{p(n+d+1)}dx$
Comme dans le cas 1, on a :
$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_0(b_k)^p(x)dx \leq c \int_{Q_k^{*c}} \mu f^p(x)dx$ $\square$