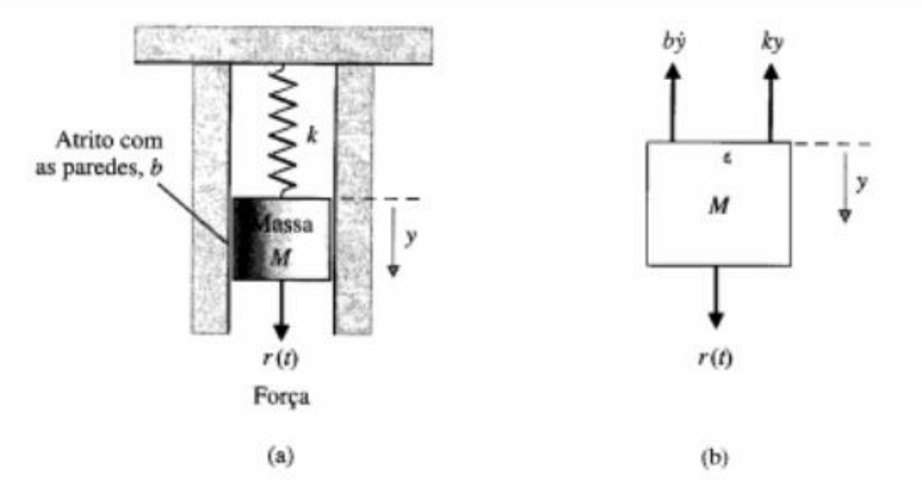
REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS POR VARIÁVEIS DE ESTADO

1. Introdução: Sistemas dinâmicos podem ser representados por equações diferenciais. Se o sistema for L.I.T (linear invariante no tempo) então a equação ou conjunto de equações são lineares com coeficientes constantes.

Considere por exemplo o sistema massa-mola-com atrito. As relações constitutivas envolvidas são:



$$F = M\frac{dy^2(t)}{dt^2}$$
$$F_b = b\frac{dy(t)}{dt}$$
$$F_k = ky(t)$$
$$F = -F_b - F_k + r(t)$$
Logo,
$$M\frac{dy^2(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t)$$

Onde as relações para F_b e F_k só são lineares dentro de uma faixa escolhida. Se a massa *M*, o coeficiente de atrito viscoso *b* e a constante de mola *k* forem constantes então a equação final descreve um sistema linear e invariante no tempo.

Se tomarmos a Transformada de Laplace desta equação podemos obter uma outra forma de representação para este sistema denominada função de transferência *G(s)*:

$$M\frac{dy^2(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t)$$
$$Y(s)\left(Ms^2 + bs + k\right) = R(s)$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1/M}{s^2 + \frac{b}{M}s + \frac{k}{M}}$$

2. MODELAMENTO POR VARIÁVEIS DE ESTADO: Empregando um procedimento de transformação de variáveis podemos obter ainda outra forma de representação para um sistema. Considere novamente a equação diferencial para o massa-mola-atrito:

$$M\frac{dy^2(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=r(t)$$

definindo:

$$x_1(t) \triangleq y(t)$$

$$x_2(t) \triangleq \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t)$$

Podemos reescrever a equação,

$$\dot{x}_2(t)=\frac{r(t)}{M}-\frac{k}{M}x_1(t)-\frac{b}{M}x_2(t)$$

E em seguida formar o sistema,

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\
&\dot{x}_2(t)=\frac{r(t)}{M}-\frac{k}{M}x_1(t)-\frac{b}{M}x_2(t)\\
&y(t)=x_1(t)
\end{aligned}$$

Escrevendo estas equações na forma matricial,

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}\times r(t) \qquad \textit{equação de estado}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} \qquad \textit{equação de saída}$$

A forma geral das equações de estado para sistemas contínuos, lineares e invariantes no tempo é:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \qquad \textit{equação de estado}$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t) \qquad \textit{equação de saída}$$

Onde:

x(t) = vetor de estados (n×1)

u(t) = vetor de entrada (r×1)

y(t) = vetor de saída (p×1)

A = matriz do sistema (n×n)

B = matriz de entrada (n×r)

C = matriz de saída (p×n)

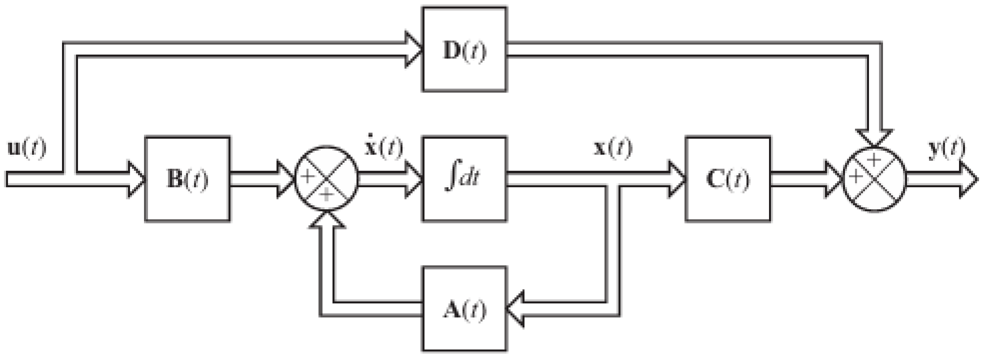
D = matriz de acoplamento direto entrada/saída (p×r)

Então, para um sistema com uma entrada e uma saída:

A(n × n); B(n × 1); C(1 × n); D(1 × 1)

x(n × 1); y(1 × 1); u(1 × 1)

Representação por diagrama de blocos das equações de estado no tempo de um sistema LIT



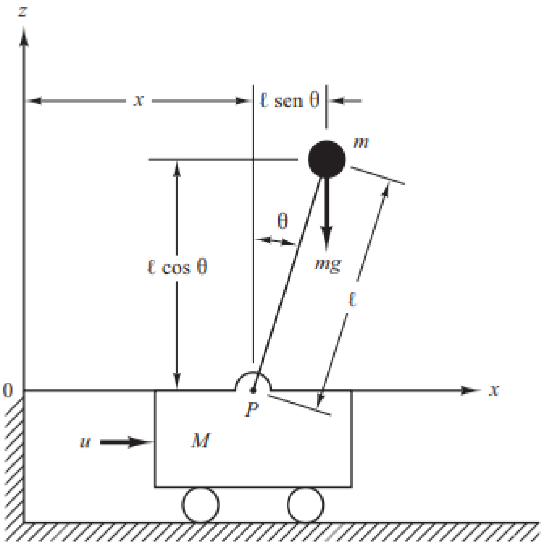
Do diagrama podemos escrever diretamente:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Observe que a matriz D corresponde a uma conexão direta entre a entrada e a saída do sistema.

Exemplo de representação de um sistema multivariável - Pêndulo invertido:



Considere o pêndulo invertido da figura acima. O sistema possui um entrada, u e duas saídas, x e θ.

Empregando o método de Newton, ou o método de Lagrange podemos obter para este sistema as equações linearizadas a seguir [1]:

$$Ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u \quad \text{e} \quad M\ddot{x} = -mg\theta + u$$

Vamos então obter a representação por variáveis de estado para o pêndulo invertido:

Escolhendo,

$x_1 = \theta$

$x_2 = \dot{\theta} = \dot{x}_1$

$x_3 = x$

$x_4 = \dot{x} = \dot{x}_3$

Substituindo nas equações acima:

$$\dot{x}_2 = \frac{(M+m)g}{Ml} x_1 - \frac{u}{Ml}$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{u}{M}$$

$y_1 = \theta$ e $y_2 = x$

Escrevendo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \\ 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Considere ainda o sistema descrito pelas equações diferenciais acopladas a seguir, onde identificamos duas entradas e duas saídas:

$$\ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_1 + k_2 y_1 = u_1 + k_3 u_2$$

$$\dot{y}_2 + k_4 y_2 + k_5 \dot{y}_1 = k_6 u_1$$

Definindo,

$$x_1 \underset{=}{\Delta} y_1$$

$$x_2 \underset{=}{\Delta} \dot{y}_1 = \dot{x}_1$$

$$x_3 = y_2$$

Podemos escrever as equações,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -k_2 x_1 - k_1 x_2 + u_1 + k_3 u_2$$

$$\dot{x}_3 = -k_5 x_2 - k_4 x_3 + k_6 u_1$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3$$

Escrevendo na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_5 & -k_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k_3 \\ k_6 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \textit{equação de estado}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \quad \textit{equação de saída}$$

3. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE ESTADO A PARTIR DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

A expressão geral para uma função de transferência estritamente própria de ordem *n* é:

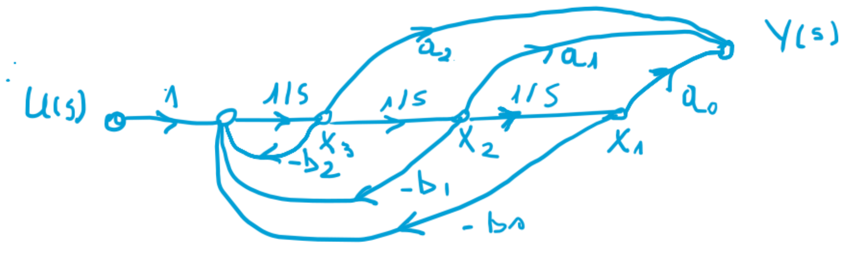
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + . \quad . \quad . \quad + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + . \quad . \quad . \quad + b_1 s + b_0}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por s^{-n},

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_{n-1}s^{-1} + a_{n-2}s^{-2} + . \quad . \quad . \quad + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + . \quad . \quad . \quad + b_1 s^{-n+1} + b_0 s^{-n}}$$

A partir de G(s) podemos então fazer um diagrama de fluxo de sinal (D.F.S.) conforme exemplificado a seguir para um sistema de 3ª ordem:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}}{1 + b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}}$$



Observe que o emprego da fórmula de Mason ao diagrama resulta na função de transferência G(s).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} M_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}}{1 + b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

Do diagrama podemos escrever:

$$\dot{X}_1 = X_2$$

$$\dot{X}_2 = X_3$$

$$\dot{X}_3 = U - b_0 X_1 - b_1 X_2 - b_2 X_3$$

e

$$Y = a_0 X_1 + a_1 X_2 + a_2 X_3$$

Ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times U(s) \quad equação \quad de \quad estado$$

$$y = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad equação \quad de \quad saída$$

Observe que esta representação não é única. Dada um a matriz P quadrada qualquer, com a mesma dimensão de A com $det\,(P) \neq 0$, uma outra representação de estados equivalente pode ser encontrada empregando as equações:

$$A_P = P^{-1}AP; \qquad B_P = P^{-1}B; \qquad C_P = CP; \qquad D_P = D$$

<u>NOTA:</u> A inversa de uma matriz é dada por: $P^{-1} = \frac{(cof[P])^T}{det\,[P]}$

4. OBTENÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA A PARTIR DAS EQUAÇÕES DE ESTADO

Considere um sistema SISO estritamente próprio (D = 0) na representação por variáveis de estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Tomando a transformada de Laplace das equações e considerando condições iniciais nulas x(0) = 0,

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \qquad Y(s) = CX(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$
$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s)$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B$$

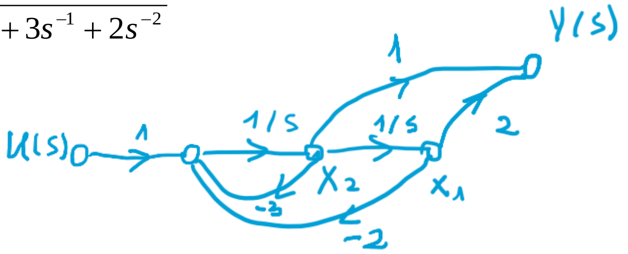
<u>Exercício</u>: Para o sistema a seguir, representado por sua função de transferência:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 2}$$

a) Encontre a representação por variáveis de estado.

b) A partir das equações de estado obtenha novamente G(s).

a) $G(s) = \dfrac{s^{-1} + 2s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}}$



Do diagrama:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(s) \\ \dot{X}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times U(s)$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

5. RELAÇÃO ENTRE AS RAÍZES DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA E OS AUTOVALORES DA MATRIZ A

Da álgebra linear sabemos que a equação característica de uma matriz A é definida pelo determinante:

$$|sI - A| = 0$$

E os valores característicos (autovalores) de uma matriz A são as raízes da equação característica,

$$|sI - A| = (z - z_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0$$

Exemplo: Seja a matriz,

$A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 1 \\ 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, então, $sI = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ $\quad e \quad sI - A = \begin{bmatrix} s - 0{,}8 & -1 \\ 0 & s - 0{,}9 \end{bmatrix}$

$$|sI - A| = (s - 0{,}8)(s - 0{,}9) = 0$$

Portanto, s= $0{,}8$ e $s = 0{,}9$ são os autovalores de A.

6. Solução Recursiva para um sistema na forma matricial (variáveis de estado):

Considere um sistema representado na forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Como: $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Podemos discretizar esta equação escrevendo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x_1 - x_0}{T} \qquad \textit{onde } x_0 \text{ é } \textit{o estado atual e } x_1 \textit{ o novo estado a ser calculado.}$$

Assim podemos escrever as equações de estado como:

$$\frac{x_1 - x_0}{T} = Ax_0 + Bu_0$$

$$y_0 = Cx_0$$

Então:

$$x_1 = (Ax_0 + Bu_0) \times T + x_0$$

$$y_1 = Cx_1$$

Portanto, podemos fazer um código que resolva de forma recursiva qualquer representação por variáveis de estado, com qualquer número de entradas e saídas. Mesmo a representação por variáveis de estado de um sistema não linear também pode ser resolvida por esse método.

Exemplo 1: O código Matlab a seguir resolve recursivamente a representação por variáveis de estado para o sistema massa mola com atrito.

```
% Equação Matricial Comparação entre a solução recursiva e a função
% “lsim” do Matlab.
clear;
M=1; b=0.5; k =1.5;
A = [0 1; -k/M -b/M]; B = [0; 1/M]; C = [1 0]; D = 0
fa = 100; Ta = 1/fa;
t = 0:Ta:20; N = length(t);
u = ones(N,1);
[n,d] = ss2tf(A,B,C,D);
y = lsim(n,d,u,t); % Solução da função lsim (não recursiva para usuário)
x0=[zeros(length(A),1)]; x1=[zeros(length(A),1)];
for i = 1:N;
  x1 = (A*x0 + B*u(i))*Ta + x0;
  y1(i) = C*x1;
  x(:,i) = x1;
  x0 = x1;
end;
figure(1),plot(t,y,t,y1),grid;
title('Comparação solução recursiva (verm) com solução "lsim" Matlab (azul)');
```

```
figure(2),plot(t,x(1,:)),grid;
title('Resposta ao degrau (estado x1)');
figure(3),plot(t,x(2,:)),grid;
title('Resposta ao impulso (estado x2)');
figure(4),plot(t,x),grid;
title('Estado x1 (azul) estado x2 (vermelho)');
```

Exemplo 2: O código Matlab a seguir resolve recursivamente as equações de Lorenz que descrevem a trajetória de um ponto *p(x,y,z)* num sistema de coordenadas 3D. As equações contém três parâmetros (σ, ρ, β) Para $\sigma = 10,\ \beta = 8/3\ e\ \rho = 28$ ou valores próximos, a trajetória exibe um comportamento caótico e a figura resultante é conhecida como "atrator de Lorenz" ou "borboleta".

Equações:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x); \qquad \frac{dy}{dt} = x(\rho - z); \qquad \frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

Observe que as equações não são lineares devido aos produtos xz e xy.

```
% ATRATOR DE LORENZ CÓDIGO RECURSIVO
%
clear,clc;
% parâmetros das equações
sigma = 10; beta = 8/3; rho = 26;
fa = 100; Ta = 1/fa;
t =0:Ta:50; N = length(t);
u = [1 zeros(1,N-1)]; % impulso para partida, força = 1*Ta = 0.01

% Equação Matricial solução recursiva
x1=[0 0 0]'; x0=[0 0 0]'; k1 = 0; k2 = 0; % condições iniciais
A = [-sigma sigma 0; rho -1 -k1; k2 0 -beta];
B = [1 0 0]'; C = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1];
for i = 1:N;
  x1 = (A*x0 +B*u(i))*Ta + x0;
  saida(:,i) = C*x0;
  x(i) = x1(1);
  y(i) = x1(2);
  z(i) = x1(3);
  k1 = x(i);
  k2 = y(i);
  x0 = x1;
  A = [-sigma sigma 0; rho -1 -k1; k2 0 -beta];
  figure(1),plot3(x,y,z);
end;
```

<u>Exercício 1</u>: Para o sistema descrito pela equação diferencial:

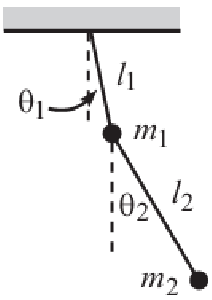
$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 9\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 26\frac{dy(t)}{dt} + 24y(t) = 24u(t)$$

a) Encontre a função de transferência.
b) Esboce o Diagrama de Fluxo de Sinal (DFS)
b) Determine a representação por variáveis de estado.

<u>Exercício 2</u>: Considere o pêndulo duplo da figura abaixo. Para uma resposta natural (excitação nula), as equações dinâmicas linearizadas para a esse sistema são:

$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g\theta_1 = 0$

$l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0$



Considerando, $l_1 = l_2 = 1$, $m_1 = 5$ e $m_2 = 10$, encontre a representação por variáveis de estado para esse sistema.

REFERÊNCIAS

[1] Katsuhiko Ogata “Engenharia de Controle Moderno 4ª edição”

[2] Nise Norman S. “Engenharia de Sistemas de Controle 6ª edição”

[3] Dorf Richard C., Bishop H. Robert “Sistemas de Controle Modernos 8a edição”