1 Continuité & Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

1.1 Continuité

À retenir :

Pour montrer qu'une fonction est continue, il suffit de montrer qu'elle est une combinaison (somme, différences, produit ou quotient) de :

1. fonctions de référence
2. polynômes
3. fonctions rationnelles
4. fonctions racines carrés et inverses

1.2 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

A) Montrer que $f(x) = m$ admet au moins une solution sur $[a, b]$

Méthode :

1. **montrer que :** f est continue sur $[a, b]$
2. **montrer que :** $m \in [f(a), f(b)]$
3. **Conclure : Alors** d'après le TVI $f(x) = m$ admet **au moins** une solution sur $[a, b]$

B) Montrer que $f(x) = m$ admet une unique solution sur $[a, b]$

Méthode :

1. **Montrer que :** f est continue sur $[a, b]$
2. **Montrer que :** $m \in [f(a), f(b)]$
3. f est strictement monotone sur $[a, b]$
4. Conclure : **Alors** d'après le TVI $f(x) = m$ admet une solution **unique** sur $[a, b]$

Exemple

Montrer que $f(x) = 5$ **admet une unique solution avec** $f(x) = 3x^2$**sur** $[0, 2]$

$$\textbf{On a} \begin{cases} f \text{ est continue sur } [0,2] \\ 5 \in [f(0), f(2)] = [0, 12] \\ f \text{ est strictment croissante sur } [0,2] \text{ car } f'(x) > 0 \end{cases}$$

Alors d'après le (TVI), $f(x) = 5$ **admet UNE solution UNIQUE sur** $[0, 2]$

x	0	α	2
f'		$+$	
f	0	5	12

Table IV.1: Tableau de variation de f sur $[0, 2]$