Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Oddelek za fiziko

Matematika III

Zapiski predavanj doc. dr. Oliverja Dragičevića
Občasno nadomeščala izr. prof. dr. Sašo Strle
in doc. dr. Klemen Šivic

Študijsko leto 2022/2023
Zimski semester

Avtorji:

Simon Bukovšek
Vito Levstik
Lev Podbregar
Urša Mati Djuraki

Zadnja sprememba: 23. oktober 2023

Pred vami leži dokument, ki vsebuje zapiske predavanj doc. dr. Oliverja Dragičevića pri predmetu Matematika III za dodiplomske študente fizike Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani v zimskem semestru študijskega leta 2022/2023. Zaradi občasne odsotnosti profesorja sta del snovi predavala tudi izr. prof. dr. Sašo Strle in doc. dr. Klemen Šivic, ki sta nam zagotovila, da nam predavata karseda enako, kot piše v Dragičevićevih zapiskih. Vsebina zapiskov je v veliki meri dobeseden prepis s table, občasno pa je kakšna stvar parafrazirana, kakšen račun, ki ga je profesor prepustil študentom, do konca izračunan, kakšen dokaz več napisan, kakšen komentar dodan in kakšna domača naloga rešena. Za zadnje podpoglavje o Fourierovi vrsti nam je pri pouku zmanjkalo časa, zato sem si pri tem pomagal s posnetki predavanj izpred dveh let.

Četudi je vsebina povzeta po predavanjih, ki so bila popolnoma korektna, so se v te zapiske nedvomno prikradle raznovrstne napake – tipkarske, slovnične in vsebinske. Ne vzemite vsega, kar notri piše, za sveto, saj smo avtorji le študentje fizike. Če opazite kakršnokoli napako, mi jo prosim javite na simon.bukovsek@gmail.com.

V teh zapiskih se uporabljajo naslednje označbe. Vektorji in vektorske funkcije so označene s krepko pokončno pisavo $\mathbf{v}$ in ne s puščico, razen v poglavju vektorskih prostorov, kjer so označujejo kot navadni skalarji: v. Skalarni produkt je večinoma označen s pikico $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, kadar je očitno, da se množita dva vektorja. Če to ni očitno iz konteksta in v poglavju o Hilbertovih prostorih, je skalarni produkt označen z lomljenimi oklepaji $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$. Integrali po zaprtih ploskvah in sklenjenih krivuljah so posebej označeni s krožci: $\oint$ in $\oiint$. Komplement množice A je označen kot A^{C}, pogoji pri definiciji množice pa so od prvega dela ločeni bodisi s podpičjem, bodisi z navpično črto (odvisno kateri profesor je predaval). Imaginarni del števila z je $\Im z$, realni del je $\Re z$.

Čeprav sem večji del skripte napisal sam, so mi pri pisanju veliko pomagali sošolci Lev Podbregar, Urša Mati Djuraki, Vito Levstik in Nejc Funtek, za kar jim se jim iskreno zahvaljujem.

Simon Bukovšek

Kazalo

1 Integrali s parametrom

V tem poglavju bomo obravnavali integrale (oz. integralske funkcije) oblike

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

kjer so $-\infty \leq a < b \leq \infty$ in f dani. Spremenljivko t imenujemo *parameter*. Zanimajo nas lastnosti F in kako so odvisne od lastnosti f in parametra t.

Zgled 1.1. Poglejmo si primer $F(t) = \int_0^1 \exp(-tx)\,\mathrm{d}x = \frac{1-\exp(-t)}{t}$. Ta primer je analitično rešljiv in zato nezanimiv.

Zgled 1.2. Sedaj si poglejmo en neelementaren integral:

$$F(t) \coloneqq \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Izkaže se, da ta integral konvergira za vse $t > 0$. Hitro se lahko prepričamo, da velja $F(1) = 1$, $F(2) = 1$ in $F(3) = 2$. Še več, velja $F(n+1) = nF(n)$.

Lastnosti, ki nas bodo zanimale, so zveznost, odvedljivost in integrabilnost.

Definicija 1.3. Funkcija f je *zvezna v točki x*, če $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni: |x-t| < \delta \implies |f(x)-f(t)| < \varepsilon$.

Definicija 1.4. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *enakomerno zvezna* na intervalu [a,b], če $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni: |x-t| < \delta \implies |f(x) - f(t)| < \varepsilon\ \forall x \in [a,b]$.

Če od tu naprej definiramo interval (a,b), avtomatsko predpostavljamo obstoj $a, b \in \mathbb{R}$ in $a < b$.

Izrek 1.5 (Lagrange). *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna na intervalu $[a,b]$ in odvedljiva na intervalu (a,b). Tedaj $\exists c \in (a,b) \ni: f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Dokaz. Glej zapiske iz Matematike I. □

Z drugimi besedami nam Lagrangev izrek pove, da na funkciji med a in b zagotovo obstaja točka $c \in (a,b)$, pri kateri ima funkcija enak odvod, kot je naklon premice skozi $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

Trditev 1.6. *Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ in $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj je $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, dana s predpisom $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$, tudi zvezna.*

Z besedo zvezna seveda mislimo na zveznost po točkah na celotnem definicijskem območju.

Dokaz. Očitno F obstaja, saj je f zvezna na zaprtem intervalu, torej je integrabilna. Vzemimo $t_0 \in [c,d]$ in $\varepsilon > 0$. Želimo dokazati, da velja $\exists \delta > 0 \ni: |t - t_0| < \delta \implies |F(t) - F(t_0)| < \varepsilon$. Poglejmo si naslednje:

$$|F(t) - F(t_0)| = \left| \int_a^b (f(x,t) - f(x,t_0))\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|\,\mathrm{d}x.$$

Pri tem smo uporabili dejstvo, da je vsota integrala enaka integralu vsote, in trikotniško neenakost. Sedaj uporabimo izrek, da je zvezna funkcija na kompaktni množici tudi enakomerno zvezna. V $\mathbb{R}^n$ so kompaktne vse omejene in zaprte množice, kar je tudi definicijsko območje f. Iz tega sledi, da je f enakomerno zvezna. To pomeni, da za poljubni točki $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in [a,b] \times [c,d]\ \exists \delta > 0 \ni: |(x_1, t_1) - (x_2, t_2)| < \delta \implies$

$|f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. S tem smo povedali točno definicijo enakomerne zveznosti, le da smo namesto ε vzeli $\varepsilon/(b-a)$. Poglejmo naslednje: $|(x,t)-(x,t_0)| = |t-t_0|$, kar vemo, da je manjše od δ. To pomeni

$$\int_a^b |f(x,t)-f(x,t_0)|\,\mathrm{d}x < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x = \varepsilon.$$

Dobili smo, da ob $|t-t_0| < \delta$ velja $|F(t)-F(t_0)| < \varepsilon$, torej je F zvezna. $\square$

Trditev 1.7. *Naj bo $P = [a,b]\times[c,d]$ in $f : P \to \mathbb{R}$. Privzemimo, da je f zvezna, da obstaja parcialni odvod $\frac{\partial f}{\partial t}$, in da je ta odvod zvezen na P. Tedaj je $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ odvedljiva in velja*

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Z drugimi besedami, odvod se lahko ob danih pogojih prestavi znotraj integrala:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Dokaz. Vzemimo $t \in [c,d]$ in $\varepsilon > 0$. Naj bo $h \in \mathbb{R}$ tak, da je $t+h \in [c,d]$. Tedaj velja

$$\frac{1}{h}[F(t+h)-F(t)] = \int_a^b \frac{1}{h}[f(x,t+h)-f(x,t)]\,\mathrm{d}x.$$

Ocenimo razliko

$$\int_a^b [\frac{1}{h}(f(x,t+h)-f(x,t)) - f_t'(x,t)]\,\mathrm{d}x.$$

Po Lagrangevem izreku za vsak posamezen $x \in [a,b]$ obstaja $\theta \in [0,h]$ kot funkcija x, t in h, tako da

$$\frac{1}{h}[f(x,t+h)-f(x,t)] = f_t'(x,t+\theta).$$

Sledi

$$\int_a^b \left(\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t'(x,t)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b [f_t'(x,t+\theta)-f_t'(x,t)]\,\mathrm{d}x.$$

Ker je f_t' zvezna na P, je tudi *enakomerno* zvezna, zato velja (po definiciji):

$$\exists\delta > 0 \ni: |(x_1,t_1)-(x_2,t_2)| < \delta \implies |f_t'(x_1,t_1)-f_t'(x_2,t_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Sedaj vzemimo $|h| < \delta$. Potem velja $|(x,t+\theta)-(x,t)| = |\theta| \leq |h| < \delta$, zato

$$\int_a^b [f_t'(x,t+\theta)-f_t'(x,t)]\,\mathrm{d}x < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}x = \varepsilon.$$

S tem smo dokazali, da za vsaka $t \in [c,d]$ in $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da

$$h \in [-\delta,\delta],\ t+h \in [c,d] \implies \left|\frac{F(t+h)-F(t)}{h}\right| - \int_a^b f_t'(x,t)\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

To pomeni, da je odvod F res enak izrazu na desni. $\square$

Posledica 1.8. *Naj bo $P = [a,b] \times [c,d]$. Naj bo $f : P \to \mathbb{R}$ zvezna na P in zvezno odvedljiva na P. Naj bosta $\alpha, \beta : [c,d] \to [a,b]$ odvedljivi funkciji. Tedaj je*

$$F(t) \coloneqq \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

odvedljiva in velja

$$F'(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x + f(\beta(t),t)\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\alpha'(t).$$

Dokaz. Uporabimo verižno pravilo. Označimo $G(s,u,v) = \int_u^v f(x,s)\,\mathrm{d}x$. Lahko zapišemo $F = G \circ (\mathrm{id}, \alpha, \beta)$, zato velja

$$\begin{aligned} F'(t) =& G'_s(t,\alpha(t),\beta(t)) \cdot t' + G'_u(t,\alpha(t),\beta(t)) \cdot \alpha'(t) + G'_v(t,\alpha(t),\beta(t)) \cdot \beta'(t) \\ =& \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x - f(\alpha(t),t) \cdot \alpha'(t) + f(\beta(t),t) \cdot \beta'(t). \end{aligned}$$

□

Zgled 1.9. Poglejmo si primer

$$F(t) \coloneqq \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2+t^2}.$$

Integral znamo analitično izračunati, rezultat pride $F(t) = \frac{\pi}{4t}$. Poglejmo si dovod $F'(t)$:

$$F'(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{t^2+t^2} = -2\int_0^t \frac{t}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2t^2} = -\frac{\pi}{4t^2}.$$

Rezultat smo že vedeli, saj je samo odvod analitične rešitve $F(t)$. Na ta način smo posredno ugotovili vrednost integrala

$$\int_0^t \frac{1}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right) t^{-3}.$$

Izrek 1.10 (Fubini)**.** *Naj bo $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj velja*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

Dokaz. Naj bo $y \in [c,d]$, $\psi(s,y) = \int_c^y f(s,t)\,\mathrm{d}t$ in $\varphi(t) = \int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}s$. Označimo naslednje:

$$G(y) \coloneqq \int_a^b \left(\int_c^y f(s,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s = \int_a^b \psi(s,y)\,\mathrm{d}s$$

in

$$H(y) \coloneqq \int_c^y \left(\int_a^b f(s,t)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t = \int_c^y \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Očitno velja $G(c) = H(c) = 0$ in dokazati moramo $G(d) = H(d)$. Zadosti bo, če pokažemo $G' = H'$:

$$H'(y) = \varphi(y) = \int_a^b f(s,y)\,\mathrm{d}s,$$

$$G'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_a^b \psi(s,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \psi(s,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(s,y)\,\mathrm{d}s = H'(y).$$

□

Definicija 1.11. Zaporedje (f_n) *konvergira enakomerno* na množici U k funkciji $f : U \to \mathbb{R}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako velik $N \in \mathbb{N}$, da za vsako naravno število $n > N$ in za vsak $x \in U$ velja $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Definicija 1.12. Definirajmo *izlimitirani integral* $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ kot

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x,$$

če limita obstaja.

Definicija 1.13. Naj bo $f : [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna. Integrali $\int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x$ so *enakomerno konvergentni* na $[c,d]$, če $\forall \varepsilon > 0\ \exists M_0 \geq a \ni$: $\int_M^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x < \varepsilon\ \forall M \geq M_0$ in $\forall t \in [c,d]$.

Zgled 1.14. Naj bo

$$F(t) := \int_0^\infty \exp(-tx)\,\mathrm{d}x$$

za $t \in [c,d]$, $c > 0$. Poglejmo si, če so dani integrali enakomerno konvergentni. Izračunajmo

$$\left| \int_M^\infty \exp(-tx)\,\mathrm{d}x \right| = \frac{1}{t}\exp(-tM) \leq \frac{1}{c}\exp(-cM).$$

Pri konstantnem c vrednost zgornjega izraza konvergira k ničli, ko gre $M \to \infty$, torej so integrali enakomerno konvergentni.

Trditev 1.15. *Naj bo $f : [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna. Naj obstaja taka integrabilna funkcija $\Phi : [a,\infty) \to [0,\infty) \ni$: $\forall x \geq a, \forall t \in [c,d]$ $|f(x,t)| \leq \Phi(x)$ (Φ je enakomerna integrabilna majoranta). Tedaj je $F(t) := \int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x$ enakomerno konvergentna na $[c,d]$.*

Dokaz. Velja

$$\left| \int_M^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_M^\infty |f(x,t)|\,\mathrm{d}x \leq \int_M^\infty \Phi(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon \quad \forall M \geq M_0,$$

če je M_0 dovolj velik, saj je Φ integrabilna. $\square$

Trditev 1.16. *Če je $f : [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna in $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x$ enakomerno konvergentna na $[c,d]$, potem je F zvezna na $[c,d]$.*

Dokaz. Vzemimo $\varepsilon > 0$. Zaradi enakomerne konvergence obstaja $M_0 \geq a$, tako da

$$\left| \int_M^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za } \forall M \geq M_0 \text{ in za } \forall u \in [c,d].$$

Za izbran M je $f : [a,M] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ enakomerno zvezen, zato obstaja $\delta > 0$, tako da za poljubne $t, t_0 \in [c,d], |t - t_0| < \delta$ velja

$$|f(x,t) - f(x,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3(M-a)}.$$

Velja pa tudi

$$\begin{aligned}
|F(t)-F(t_0)| &= \left|\int_a^\infty [f(x,t)-f(x,t_0)]\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_a^M |f(x,t)-f(x,t_0)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_M^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_M^\infty f(x,t_0)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3(M-a)}(M-a) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Izrek 1.17 (Fubini)**.** *Če je $f : [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ zvezna in $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x$ enakomerno konvergentna na $[c,d]$, potem je F integrabilna na $[c,d]$ in velja*

$$\int_a^\infty \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Dokaz. F je integrabilna, ker je zvezna na zaprtem intervalu (po Trditvi 1.16). Po Fubinijevem izreku (Izrek 1.10) že vemo, da za $\forall b > a$ velja

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Označimo

$$F_b(t) \coloneqq \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Iz predpostavke izreka sledi, da $F(t) = \lim_{b\to\infty} F_b(t)$ *enakomerno* za $t \in [c,d]$, v smislu Definicije 1.11. To pa tudi pomeni, da velja

$$\lim_{b\to\infty} \int_c^d F_b(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d F(t)\,\mathrm{d}t.$$

S tem smo dokazali, da limita desne strani Enačbe (1.2) obstaja. Seveda pa potem tudi limita leve strani Enačbe (1.2) obstaja in je enaka limiti desne strani. Hkrati je po definiciji izlimitiranega integrala (1.12) ta limita enaka levi strani v (1.1). □

Zgled 1.18. Spet obravnavajmo integral oblike $F(t) \coloneqq \int_0^\infty e^{-tx}\,\mathrm{d}x$ za $0 < c \leq t \leq d < \infty$. Dokazali smo že, da je F enakomerno konvergenten na intervalu $[c,d]$, zato je na tem intervalu tudi zvezen in posledično integrabilen. Torej velja

$$\int_c^d F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \int_c^d e^{-tx}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-dx}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Po drugi strani pa je to preprosto enako $\int_c^d t^{-1}\,\mathrm{d}t = \ln(d/c)$. S tem smo na zanimiv način dokazali, da velja

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-dx}}{x} = \ln(d/c)\ \forall c,d > 0,$$

kar bi bilo bistveno težje, če bi se lotili z neposredno integracijo.

Izrek 1.19. *Naj bo $P = [a,\infty) \times [c,d]$ in naj bo $f : P \to \mathbb{R}$ taka, da velja:*

- *f je zvezna po točkah na P,*
- *obstaja $\frac{\partial f}{\partial t}$, ki je zvezen na P,*
- *$\forall t \in [c,d]\ \exists F(t) := \int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x$ in*
- *$G(t) := \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x$ je enakomerno konvergentna na intervalu $[c,d]$.*

Tedaj je F odvedljiva na intervalu $[c,d]$ in velja $F' = G$. Drugače povedano,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int_a^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Dokaz. Vemo, da je G zvezna, torej je integrabilna na $[c,d]$. Definirajmo $H : [c,d] \to \mathbb{R}$ s predpisom $H(u) := \int_c^u G(t)\,\mathrm{d}t$. Osnovni izrek analize pove, da je H odvedljiva in $H' = G$. Torej zadošča dokazati, da velja $F = H + \alpha$ za nek $\alpha \in \mathbb{R}$. Velja naslednje:

$$\begin{aligned}
H(u) &= \int_c^u G(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^u \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(1)}{=} \int_a^\infty \int_c^u \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(2)}{=} \int_a^\infty f(x,t)\Big|_{t=c}^{t=u}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x - \int_a^\infty f(x,c) = F(u) - F(c) \\
H(u) &= F(u) + \alpha.
\end{aligned}$$

Pri izračunu smo uporabili Trditev 1.17 (1) in osnovni izrek analize (2). S tem smo dokazali, da velja $F'(u) = H'(u) = G(u)$. $\square$

Zgled 1.20. Vzemimo $b > 0$ in definirajmo $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$F(a) := \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Označimo jedro s $f(x,a)$. Funkcijo f lahko razširimo na $[0,\infty) \times (0,\infty)$ na naslednji način. Definirajmo zvezno funkcijo $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty)$,

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{1}{u}(1 - e^{-u}) & ;\ x \neq 0, \\ 1 & ;\ x = 0. \end{cases}$$

Sedaj lahko f zapišemo s pomočjo φ kot $f(x,a) = a\varphi(ax) - b\varphi(bx)$. Najprej si poglejmo odvod f po a: $\partial_a f(x,a) = -e^{-ax}$. Funkcija $G(a) = -\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ je, kot smo dokazali v prejšnjem zgledu, lokalno enakomerno konvergentna na $(0,\infty)$. To pomeni, da je F odvedljiva na $(0,\infty)$, torej

$$F'(a) = -\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}.$$

Sledi $F(a) = C - \ln a$. Ker je $F(b) = 0$, je $C = \ln b$. S tem smo dokazali, da velja

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \forall b > 0.$$

Zgled 1.21. Obravnavajmo integral oblike

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Najprej dokažimo, da $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ divergira. To je zelo preprosto dokazati. Vzamemo lahko neko konstanto $1 > c > 0$, za katero zagotovo velja, da je $\sin x > c$ na neskončno enako dolgih intervalih $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, ... Integral lahko ocenimo takole:

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{j=1}^\infty \int_{\mathcal{I}_j} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{j=1}^\infty \int_{\mathcal{I}_j} \frac{c}{x}\,\mathrm{d}x \gtrsim \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j}.$$

Očitno izraz divergira. Znak $\gtrsim$ pomeni, da je izraz na levi večji od desnega dela pomnoženega z neko pozitivno konstanto. To bi sicer lahko pomenilo, da je izraz na levi manjši od izraza na desni, vendar nam zapis zagotavlja enako hitro rast – če izraz na desni divergira, to velja tudi za izraz na levi.

Sedaj se vprašajmo pomembnejše vprašanje: ali dan integral sploh konvergira? Z drugimi besedami, ali obstaja $K = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$? Na to bomo odgovorili v dveh delih. Najprej bomo pokazali, če obstaja $L = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi n} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$, potem obstaja tudi K in velja $L = K$, ter potem, da L res obstaja. (To je precej nenavaden vrstni red dokazovanja – kaj če dokažemo, da velja $K = L$, in potem da L divergira? Ampak za enkrat se bomo zanašali na dejstvo, da primera verjetno ne bi obravnavali, če limita ne bi obstajala.)

Najprej predpostavimo, da L obstaja (seveda tega še nismo dokazali). Vzemimo $\varepsilon > 0$. Po predpostavki, da L obstaja, obstaja tudi tak $n_0 \in \mathbb{N} \ni\colon n_0 > \frac{\varepsilon}{2}$ in $|\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $\forall n \geq n_0$. Nenavadna izbira epsilonov je pomembna, da se dokaz lepo izide. Definirajmo $M_0 \coloneqq \pi n_0$. Tedaj za $M \geq M_0$ in $n \coloneqq \lfloor \frac{M}{\pi} \rfloor$ velja

$$\left| \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - L \right| \leq \left| \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - L \right| + \left| \int_{n\pi}^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \right|.$$

Ker je $n \geq n_0 = \lfloor \frac{M_0}{\pi} \rfloor$, je prvi izraz na desni strani manjši od $\frac{\varepsilon}{2}$. Hkrati pa je

$$\left| \int_{n\pi}^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_{n\pi}^M \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \leq \int_{n\pi}^M \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{M - n\pi}{n\pi} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pri tem smo uporabili prej definiran pogoj za n_0, ki se je do zdaj zdel nenavaden, ter očitno dejstvo, da je $M - n\pi < 1$. Če sedaj združimo zadnji dve ugotovitvi, dobimo

$$\left| \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

S tem smo dokazali, da velja $\lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = L$, če $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = L$.

Naslednji korak je dokazati, da $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ sploh konvergira. Nič lažjega! Poglejmo sledeče:

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin u}{u + k\pi}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k.$$

V drugem koraku smo naredili substitucijo $x = u + k\pi$. Prišli smo do alternirajoče vrste, kjer so vsi členi $a_k > 0$ in $\lim_{k\to\infty} = 0$. Sedaj uporabimo Leibnizovo pravilo, ki nam zagotovi, da vrsta $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k$ konvergira, v našem primeru k L. S tem smo dokazali, da integral na začetku vprašanja zares obstaja. Naravno pa se nam takoj postavi vprašanje, kakšna je njegova vrednost.

Definirajmo

$$I(t) \coloneqq \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\,\mathrm{d}x$$

za $t > 0$. Da lahko s to funkcijo naredimo kaj uporabnega, moramo najprej dokazati, da obstaja, in da je odvedljiva.

Naj bo $f(x,t) \coloneqq \frac{\sin x}{x} e^{-tx} = \varphi(x) e^{-tx}$, kjer je

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ;\ x \neq 0, \\ 1 & ;\ x = 0, \end{cases}$$

ki je zvezna na $\mathbb{R}$. To pomeni, da je $f(x,t)$ zvezna na $\mathbb{R}^2$. Odvod f po t je enak $\partial_t f(x,t) = -e^{-tx}\sin x$, ki torej očitno obstaja in je zvezen na $\mathbb{R}^2$. Navedeni pogoji zagotavljajo, da $I(t)$ obstaja.

Če si želimo pomagati z odvodi, bomo morali uporabiti Izrek 1.19, to pa pomeni, da moramo še preveriti, ali je funkcija

$$G(t) := \int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x$$

vsaj lokalno enakomerno konvergentna na $(0,\infty)$. Tega ni težko preveriti. Za $x \geq 0$ in $t \geq c$ ocenimo

$$|e^{-tx}\sin x| \leq e^{-cx}$$

in uporabimo Trditev 1.6. Dokazali smo enakomerno konvergenco na intervalu $[c,\infty)$ za poljuben $c > 0$.

S tem so predpostavke za uporabo Izreka 1.19 izpolnjene:

$$\begin{aligned} I'(t) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,\mathrm{d}x \\ =& \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin x}{x}e^{-tx}\,\mathrm{d}x \\ =& -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x \\ =& -\left.\frac{e^{-tx}(t\sin x - \cos x)}{t^2+1}\right|_0^\infty \\ =& -\frac{1}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Integriramo in dobimo:

$$I(t) = \int_{c_0}^t -\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2+1} = C - \arctan t, \quad t > 1.$$

Za določitev konstante si poglejmo limito v neskončosti:

$$\lim_{t\to\infty}|I(t)| \leq \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = 0.$$

Po drugi strani je limita arctan enaka $\frac{\pi}{2}$, torej mora veljati $C = \frac{\pi}{2}$.

$$I(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t) = \operatorname{arccot}(t), \quad t > 0.$$

Kako nerodno, toliko truda smo vložili, da smo dobili vrednost $I(t)$ za vsa pozitivna števila, ko je bilo vse, kar smo potrebovali, vrednost v ničli. Če hočemo dobiti vrednost $I(0)$, moramo dokazati, da je funkcija $I(t)$ zvezna v točki $t = 0$. Po Trditvi 1.16 je dovolj dokazati, da je $I(t)$ enakomerno konvergenten na intervalu $[0,\sigma]$, za nek $\sigma > 0$. Dokazali pa bomo, da je $I(t)$ enakomerno konvergenten kar na $[0,\infty)$. Zadošča vedeti, da za $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni$: $n \geq n_0 \implies |\int_{n\pi}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x| < \varepsilon\ \forall t \geq 0$. Z besedami povedano, najti moramo tak n, da bo absolutna vrednost integrala enakomerno poljubno majhna za vse nenegativne t. Velja:

$$\left|\int_{n\pi}^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \overset{(1)}{=} \left|\sum_{k=n}^\infty (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin u}{u+k\pi}e^{-t(u+k\pi)}\,\mathrm{d}u\right| \overset{(2)}{\leq} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u+n\pi}e^{-t(u+n\pi)}\,\mathrm{d}u \leq \int_0^\pi \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}.$$

Pri tem smo uporabili substitucijo enako kot prej v dokazu (1) in dejstvo, da je ostanek konvergenčne alternirajoče vrste manjši ali enak absolutni vrednosti prvega izpuščenega člena (2). Ker je $1/n$ lahko poljubno majhen, smo dokazali enakomerno konvergenco $I(t)$ na intervalu $[0,\infty)$, zato je po Trditvi 1.16 I zvezen v 0. Sledi $I(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$ za $\forall t \geq 0$, torej:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

1.1 Eulerjevi funkciji Γ in B

Definicija 1.22. Za $t > 0$ definirajmo *Eulerjevo Γ funkcijo* kot

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x.$$

Zgornji integral je *lokalno enakomerno konvergenten* na $(0, \infty)$.

Dokaz. Izberemo $M > 1$, iz česar sledi $x \geq 1$. Tako dobimo neenakost:

$$\int_M^\infty x^{t-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x \leq \int_M^\infty x^{|t-1|} e^{-x} \,\mathrm{d}x \leq \int_M^\infty x^{\gamma} e^{-x} \,\mathrm{d}x.$$

Pri tem smo označili $\gamma = \max|t-1| = \max(|c-1|, |d-1|);\ t \in [c, d]$. Zgornji izraz konvergira k 0 za dovolj velik M za katerokoli končno realno število γ, saj eksponentna funkcija raste hitreje kot katerakoli potenčna funkcija. $\square$

Posledično velja:

- Γ je zvezna na $(0, \infty)$,
- $$\Gamma'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(x^{t-1} e^{-x}) \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty (x^{t-1} e^{-x} \ln(x)) \,\mathrm{d}x,$$

  kar je spet lokalno enakomerno konvergenten integral. Torej velja $\Gamma \in C^1(0, \infty)$ (je zvezno odvedljiva), z indukcijo pa lahko preprosto pokažemo, da je tudi gladka: $\Gamma \in C^\infty(0, \infty)$.

Velja: $\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x} \,\mathrm{d}x$, kar lahko integriramo z metodo per partes ($\mathrm{d}u = tx^{t-1} \,\mathrm{d}x, v = -e^{-x}$) in dobimo

$$\Gamma(t+1) = \underbrace{-x^{t-1} e^{-x} \Big|_0^\infty}_{0+0} + t \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x = t \cdot \Gamma(t);\ t > 0.$$

Ker je $\Gamma(1) = 1$, velja $\Gamma(n+1) = n!;\ n \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.23. Za $p, q > 0$ definirajmo *Eulerjevo B funkcijo* kot

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \,\mathrm{d}x.$$

Z uporabo substitucije $u = 1 - x$ lahko hitro ugotovimo, da velja $B(p, q) = B(q, p)$.

Trditev 1.24. *Za $\alpha, \beta > 0$ je*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} x \cos^{\beta-1} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right).$$

Dokaz. Uvedemo novo spremenljivko $u = \sin^2 x$. ... $\square$

Izrek 1.25 (*Fubini-Tonelli*). *Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ in naj bo $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če je $f(x, y) \geq 0$ za $\forall x \in [a, b]$ in $\forall y \in [c, d]$ ali $\int_a^b \int_c^d |f(x, y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x < \infty$, potem obstajata $\int_a^b \int_c^d f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$ in $\int_c^d \int_a^b f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ ter velja*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Ta izrek bomo dokazali kasneje.

Trditev 1.26. *Za $p, q > 0$ velja*

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1 + u)^{p+q}} \,\mathrm{d}u.$$

Dokaz. V definicijo B funkcije vpeljemo novo spremenljivko u, da velja $x = \frac{u}{u+1}$. ... □

Trditev 1.27. *Za $p, q > 0$ velja*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

Dokaz. Zapišimo $\Gamma(p + q)$ v integralni obliki kot $\int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x} \,\mathrm{d}x$. Za poljuben $u > 0$ uvedemo novo spremenljivko y s predpisom $x = (1 + u)y$. Dobimo sledeče:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p + q) &= \int_0^\infty (1 + u)^{p+q-1} y^{p+q-1} e^{-(1+u)y} (1 + u) \,\mathrm{d}y \\
\Gamma(p + q) \frac{u^{p-1}}{(1 + u)^{p+q}} &= u^{p-1} \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+u)y} \,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

V prvem koraku smo naredili substitucijo, kjer smo pridobili en faktor $(1 + u)$, meje pa se niso spremenile, saj je $1 + u > 0$, v drugem koraku pa smo iz integrala izpostavili določen konstantni faktor, ga nesli na drugo stran in obe strani množili z u^{p-1}. Sedaj integriramo obe strani po spremenljivki u od 0 do ∞:

$$\Gamma(p + q) \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1 + u)^{p+q}} \,\mathrm{d}u = \int_0^\infty u^{p-1} \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-y} e^{-uy} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}u.$$

Na levi strani opazimo B funkcijo, na desni pa lahko uporabimo Fubini-Tonellijev izrek 1.25. V nadaljnjem koraku uporabimo substitucijo $s = uy$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(p + q)B(p, q) &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{p-1} y^{p-1} y^q e^{-y} e^{-uy} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty s^{p-1} e^{-s} y^{-1} \,\mathrm{d}s \; e^{-y} y^q \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty y^{q-1} e^{-y} \Gamma(p) \,\mathrm{d}y \\
&= \Gamma(p)\Gamma(q).
\end{aligned}$$

□

Poglejmo si naslednje:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^0 x \cos^0 x \,\mathrm{d}x = 2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \pi.$$

Kako nenavadno, pravkar smo dokazali, da velja:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Ne samo to, s pomočjo tega lahko dobimo točno vrednost $\Gamma(n/2)$ za katerikoli $n \in \mathbb{N}$. Na primer $\Gamma(11/2) = 945\sqrt{\pi}/35$.

Trditev 1.28. *Za* $0 < p < 1$ *velja*

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Zanima nas, če lahko Γ funkcijo aproksimiramo s kakšno elementarno. Težava nastane, ker funkcija izredno hitro narašča. Večina šolskih kalkulatorjev ne more izračunati vrednosti večjih od $\Gamma(70)$ in $\Gamma(1000000)$ ima že več kot 5 milijonov števk. Pri izpeljavi iskane aproksimacije nam bo pomagalo vprašanje, kako numerično izračunati integral logaritma od 0 do nekega $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_1^n \ln(x) \, \mathrm{d}x \approx \sum_{j=2}^{n} \frac{\ln(j) + \ln(j-1)}{2} \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \frac{\ln(n)}{2} = \ln(n!) - \ln(\sqrt{n}).$$

Po drugi strani, če integral analitično izvrednotimo, dobimo $n \ln(n) - n + 1$. Ko to sestavimo skupaj in antilogaritmiramo, dobimo:

$$n \ln n - n + 1 \doteq \ln n! - \ln \sqrt{n},$$

$$n! \doteq e \cdot n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

Ta približek je točen samo toliko, kolikor je točno trapezno pravilo pri integriranju. Recimo, da ne zaupamo faktorju e spredaj, ampak sumimo, da bi morda bil boljši kakšen drug faktor.

Izrek 1.29 (Stirling)**.**

$$\lim_{x \to \infty} \Gamma(x) \sqrt{x} \left(\frac{e}{x} \right)^x = \sqrt{2\pi}.$$

Drugače povedano, velja $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$. Sicer pa faktor $\sqrt{2\pi} \approx 2{,}51$ sploh ni tako daleč od $e \approx 2{,}72$.

2 Riemann-Darbouxov integral v $\mathbb{R}^n$

Za začetek se omejimo na dve dimenziji. Veliko definicij in izrekov bo zelo podobnih tistim iz Matematike I.

Naj bo $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Naj bo $f : P \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Pravokotnik razdelimo na manjše pravokotnike P_{ij}, tako da izberemo *delitev* na sledeč način:

$$a_1 = x_0 < x_1 < ... < x_n = b_1,$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < ... < y_m = b_2,$$

$$\mathcal{D} := \{P_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j];\ i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, , ..., m\}.$$

Označimo ploščino P_{ij} s $|P_{ij}| = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$. Za vsak i in j označimo:

$$m_{ij} = \inf(f(x, y)) \text{ in } M_{ij} = \sup(f(x, y)), \quad (x, y) \in P_{ij}.$$

Definicija 2.1. *Spodnja Darbouxova vsota* za f prirejena delitvi $\mathcal{D} = \{P_{ij} \mid i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m\}$ za pravokotnik P je

$$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} |P_{ij}|.$$

Zgornja Darbouxova vsota za f prirejena delitvi $\mathcal{D} = \{P_{ij} \mid i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m\}$ za pravokotnik P je

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} |P_{ij}|.$$

Če poleg delitve $\mathcal{D}$ v vsakemu pravokotniku P_{ij} izberemo še testno točko $\xi_{ij} \in P_{ij}$, imenujemo nabor vseh takih točk ξ *usklajen nabor*.

Definicija 2.2. *Riemannova vsota* za f, prirejena delitvi $\mathcal{D}$ na pravokotniku P in usklajenemu naboru testnih točk ξ, je

$$R(f, \mathcal{D}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}) |P_{ij}|.$$

Definicija 2.3. Delitev $\mathcal{D}'$ je *finejša* od delitve $\mathcal{D}$, če je vsak pravokotnik iz $\mathcal{D}$ unija nekaterih pravokotnikov iz $\mathcal{D}'$.

Trditev 2.4. *Naj bo f omejena funkcija na pravokotniku $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Če je $\mathcal{D}'$ finejša delitev kot $\mathcal{D}$, potem je*

$$s(f, \mathcal{D}) \leq s(f, \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}).$$

Dokaz. Na vsakem pravokotniku bo infimum manjši ali enak supremumu, zato mora biti zgornja Darbouxova vsota večja ali enaka spodnji. Ko razdelimo pravokotnik na več delov, zagotovo ne more biti infimum katerega od delov manjši od infimuma celotnega dela, zato je poljubni člen $m_{ij}|P_{ij}|$ delitve $\mathcal{D}$ zagotovo manjši ali enak vsoti členov delitve $\sum m_{i'j'}|P_{i'j'}|$ delitve $\mathcal{D}'$, katerih unija je P_{ij}. Iz tega sledi, da mora veljati $s(f, \mathcal{D}) \leq s(f, \mathcal{D}')$. Za zgornje vsote je argument ravno simetričen. □

Posledica 2.5. *Za poljubni delitvi $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$ velja $s(f, \mathcal{D}_1) \leq S(f, \mathcal{D}_2)$.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{D}$ delitev, ki je finejša od $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$. Velja:

$$s(f,\mathcal{D}_1) \leq s(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}_2).$$

$\square$

Definicija 2.6. Naj bo $s(f) = \sup s(f,\mathcal{D})$ po vseh delitvah $\mathcal{D}$ pravokotnika P. Naj bo $S(f) = \inf S(f,\mathcal{D})$ po vseh delitvah $\mathcal{D}$ pravokotnika P.

Iz posledice 2.5 sledi, da je $s(f) \leq S(f)$.

Definicija 2.7. Naj bo $P \subset \mathbb{R}^2$ pravokotnik in funkcija $f : P \to \mathbb{R}$ omejena. Funkcija f je *integrabilna v Darbouxovem smislu*, če velja $s(f) = S(f)$. To skupno vrednost imenujemo (dvojni) integral funkcije f po pravokotniku P, označimo pa jo z

$$\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Zgled 2.8. Naj bo $P = [a,b] \times [c,d]$ in $f : P \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = k$, $k \in \mathbb{R}$ za $\forall (x,y) \in P$. Naj bo $\mathcal{D}$ poljubna delitev pravokotnika P. Velja $m_{ij} = k$ in $M_{ij} = k$, za $\forall i,j$:

$$s(f,\mathcal{D}) = \sum_{i,j} m_{ij}|P_{ij}| = k\sum_{i,j}|P_{ij}| = k|P|,$$

$$S(f,\mathcal{D}) = \sum_{i,j} m_{ij}|P_{ij}| = k\sum_{i,j}|P_{ij}| = k|P|.$$

Sledi $s(f) = S(f)$, torej je konstantna funkcija integrabilna:

$$\iint_P k\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k|P|.$$

Zgled 2.9. Naj bo $P = [0,1] \times [0,1]$ in $f : P \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f = \begin{cases} 1; & (x,y) \in \mathbb{Q}^2, \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Taki funkciji se reče karakteristična funkcija za racionalna števila. Ker vsak interval vsebuje racionalna in iracionalna števila, so v vsakem pravokotniku z neprazno notranjostjo tako točke, ki pripadajo $\mathbb{Q}^2$, kot tudi take, ki ne. Za poljubno delitev $\mathcal{D} = \{P_{ij}|i,j\}$ za pravokotnik P je $m_{ij} = 0$ in $M_{ij} = 1$ za $\forall i,j$. Sledi $s(f,\mathcal{D}) = 0$ in $S(f,\mathcal{D}) = 1$ in $s(f) = 0$ in $S(f) = 1$, torej f ni integrabilna (v Darbouxovem smislu) na intervalu P.

Vse zgornje argumente lahko posplošimo v $\mathbb{R}^n$ z naslednjo zamenjavo:

$$\text{pravokotnik } P \subset \mathbb{R}^2 \to \text{ kvader } K \subset \mathbb{R}^n,$$

$$[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to [a_1,b_1] \times ... \times [a_n,b_n].$$

Delitev kvadra K je razrez na manjše kvadre, dan z delitvami intervalov $[a_i,b_i]$. $\mathcal{D} = \{K_i|i = 1,...,m\}$. Kvadre v delitvi oštevilčimo samo z enim indeksom. Volumen kvadra je enak:

$$|K| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Definicija 2.10. Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $f : K \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Za poljubno delitev $\mathcal{D} = \{K_i | i = 1, ..., n\}$ kvadra K in usklajeno izbiro testnih točk $\xi_i \in K_i$ je *Riemannova vsota*

$$R(f, \mathcal{D}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|K_i|.$$

f je *Riemannovo integrabilna*, če obstaja limita Riemannovih vsot, ko gre delitev proti 0, neodvisno od izbire testnih točk ξ. Bolj formalno to pomeni, da $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, da vsaka delitev $\mathcal{D} = \{K_i | i = 1, ..., n\}$, za katero je velikost stranic K_i manjša od δ za vse i in za poljubno usklajeno izbiro testnih točk $\xi = (\xi_i)$ velja $|R(f, \mathcal{D}, \xi) - I| < \varepsilon$. Če ta limita obstaja, jo imenujemo Riemannov integral funkcije f na kvadru K.

Trditev 2.11. *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $f : K \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Funkcija f je integrabilna v Darbouxovem smislu natanko tedaj, ko je Riemannovo integrabilna.*

V levo je to zelo lahko dokazati, ker za vsako delitev $\mathcal{D}$ in izbiro testnih točk ξ velja $s(f, \mathcal{D}) \leq R(f, \mathcal{D}, \xi) \leq S(f, \mathcal{D})$, celotnega dokaza za ekvivalenco pa ne bomo navajali.

Oznaka za integral v $\mathbb{R}^3$ po kvadru K je:

$$\iiint_K f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Namesto integrabilnosti v Darbouxovem smislu pa je pogosto lažje preveriti naslednji pogoj.

Trditev 2.12. *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $f : K \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Tedaj je f integrabilna na K, natanko tedaj ko $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ delitev $\mathcal{D}$ za K, da je $S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Ker je f integrabilna, je $s(f) = S(f)$. Vemo tudi, da je $s(f) = \sup(s(f, \mathcal{D}))$ in $S(f) = \inf(S(f, \mathcal{D}))$. Izberemo $\varepsilon > 0$. Iščemo delitev $\mathcal{D}$, da bo $S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon$. Po definiciji supremuma $\exists \mathcal{D}_1$, da je $s(f, \mathcal{D}_1) > s(f) - \frac{\varepsilon}{2}$. Prav tako po definiciji infimuma $\exists \mathcal{D}_2$, da je $S(f, \mathcal{D}_2) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2}$. Naj bo $\mathcal{D}$ finejša delitev od $\mathcal{D}_1$ in $\mathcal{D}_2$. Potem je

$$s(f, \mathcal{D}) \geq s(f, \mathcal{D}_1) > s(f) - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}_2) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

To pomeni, da je

$$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < S(f) + \frac{\varepsilon}{2} - s(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

torej

$$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon.$$

($\Longleftarrow$) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \mathcal{D}$, da je $S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon$. Ker je $s(f, \mathcal{D}) \leq s(f)$ in $S(f, \mathcal{D}) \geq S(f)$, velja:

$$0 \leq S(f) - s(f) \leq S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon$$

za $\forall \varepsilon > 0$. Iz tega sledi, da je $S(f) = s(f)$, torej je f integrabilna. $\square$

Ta dokaz pa nikakor ne pomeni, da obstaja takšna delitev $\mathcal{D}$, za katero bi veljalo $s(f, \mathcal{D}) = S(f, \mathcal{D})$.

Izrek 2.13. *Če je $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $f : K \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, potem je f integrabilna na kvadru K.*

Dokaz. Ker je K kompaktna množica (omejena in zaprta v $\mathbb{R}^n$), je f na K omejena in posledično enakomerno zvezna. To pomeni, da za $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni$: $x, y \in K,\ |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon/|K|$. Izberimo delitev $\mathcal{D}$ za K, tako da je premer vseh kvadrov K_i iz $\mathcal{D}$ manjši od δ. Velja:

$$m_i = \inf_{x \in K_i} f(x) = \min_{x \in K_i} f(x),$$

$$M_i = \sup_{x \in K_i} f(x) = \max_{x \in K_i} f(x).$$

Ker je funkcija omejena, smo lahko supremum in infimum zamenjali z minimum in maksimum. Ker sta m_i in M_i vrednosti f v nekih točka znotraj K_i, mora veljati $0 \le M_i - m_i < \varepsilon/|K|$, saj sta točki manj kot δ narazen. Sledi:

$$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) = \sum_i (M_i - m_i)|K_i| \le \sum_i \frac{\varepsilon}{|K|}|K_i| = \frac{\varepsilon}{|K|}\sum_i |K_i| = \frac{\varepsilon}{|K|}|K| = \varepsilon.$$

□

Označimo

$$\mathcal{I}(K) = \{f : K \to \mathbb{R} | f \text{ je integrabilna na } K\}.$$

Velja

$$\mathcal{C}(K) \subsetneq \mathcal{I}(K) \subsetneq \{\text{omejene funkcije na } K\}.$$

Trditev 2.14 (Lastnosti integrala)**.**

1. *Če sta f in g integrabilni na kvadru K, potem je tudi $f + g$ integrabilna na K in velja*

$$\int_K (f+g)\,\mathrm{d}V = \int_K f\,\mathrm{d}V + \int_K g\,\mathrm{d}V.$$

2. *Če je f integrabilna na K in je $c \in \mathbb{R}$, potem je tudi cf integrabilna na K in velja*

$$\int_K cf\,\mathrm{d}V = c\int_K f\,\mathrm{d}V.$$

3. *[monotonost] Če sta f in g integrabilni na kvadru K in je $f \le g$ za vse točke iz K, potem je*

$$\int_K f\,\mathrm{d}V \le \int_K g\,\mathrm{d}V.$$

4. *[trikotniška neenakost] Če je f integrabilna na K, potem je tudi $|f|$ integrabilna na K in velja*

$$\left|\int_K f\,\mathrm{d}V\right| \le \int_K |f|\,\mathrm{d}V.$$

Opomba: prvi dve točki povesta, da je $\mathcal{I}(K)$ vektorski prostor in integral $\int_K$ je linearni funkcional.

Dokaz. Vaja – uporabi integral z Riemannovimi vsotami in upoštevaj enakosti končnih vrst ... □

2.1 Integracija po omejenih podmnožicah v $\mathbb{R}^n$

Zaenkrat znamo integrirati le po kvadrih, v tem poglavju pa si bomo ogledali integriranje na omejenih podmnožicah poljubnih oblik. To bomo zmogli z razširitvjo poljubne podmnožice na podmnožice oblike kvadrov, ki jih že znamo integrirati.
Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ poljubna omejena množica in $f : A \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Ker je A omejen, obstaja kvader $K \subset \mathbb{R}^n \ni$: $A \subseteq K$. Funkcijo f razširimo na $K \ni$:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & ; \quad x \in A, \\ 0 & ; \quad x \notin A. \end{cases}$$

Zgornja notacija naj velja za naslednje definicije.

Definicija 2.15. Definirajmo integral na omejeni podmnožici A kot

$$\int_A f \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n := \int_K \tilde{f} \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n,$$

če desni integral obstaja.

Opomba: definicija $\int_A f$ je neodvisna od izbire K.

Definicija 2.16. Za omejeno podmnožico $A \subset \mathbb{R}^n$ definirajmo njeno *karakteristično funkcijo*:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & ; \quad x \in A, \\ 0 & ; \quad x \notin A. \end{cases}$$

Definicija 2.17. Omejena podmnožica $A \subset \mathbb{R}^n$ ima *n-razsežno prostornino*, če je konstanta 1 integrabilna na A. Tedaj označimo

$$V(A) = V_n(A) = \int_A 1 \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \int_K \chi_A \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n,$$

kjer je $A \subseteq K$.

Zgled 2.18.

1. Naj bo
$$A = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0,1] \times [0,1]).$$
Vemo, da
$$\int_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{[0,1]\times[0,1]} \chi_A \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
ne obstaja, zato A nima 2-razsežne prostornine.

2. $$A = [0,1] \subset \mathbb{R} \to V_1(A) = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = 1.$$

3. Naj bo
$$A = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}.$$
Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$ in definirajmo pravokotnik $P = [0,1] \times [0, \varepsilon]$ in ocenimo:
$$0 \leq \int_P \chi_A \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \leq 1 \cdot |P| = \varepsilon \to \int_P \chi_A \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0.$$

Sedaj se lahko vprašamo: kdaj ima neka omejena podmnožica prostornino? Poglejmo si naslednje trditve.

Opomba: vsaka omejena podmnožica $A \subset \mathbb{R}^n$ je omejena z nekim robom, ki ga bomo označili z ∂A in ga imenujemo *rob* omejene množice A.

Lema 2.19. *Naj bo Q kvader, ki seka tako A kot $A^{\complement}$. Potem Q seka ∂A.*

Dokaz. Izberimo $a \in A \cap Q$ in $b \in A^{\complement} \cap Q$. Naj bo $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ parametrizacija daljice od a do b. Naj bo

$$t_0 = \inf\{t \in [0,1];\ \gamma(t) \in A^{\complement}\}.$$

Točka $\gamma(t_0)$ pripada ∂A. Poljubna okolica (ε-krogla) okoli $\gamma(t_0)$ po definiciji vsebuje točke iz $A^{\complement}(\gamma(t); t > t_0)$, prav tako vsebuje točke iz A. V posebnem primeru, če je $\gamma(t_0) = a$, sledi $\gamma(t_0) \in A$. □

Opomba: obratno ni nujno res! Namreč, če Q seka ∂A, ne seka nujno A in $A^{\complement}$.

Trditev 2.20. *Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena podmnožica. A ima n-razsežno prostornino, če in samo če $V_n(\partial A) = 0$.*

Dokaz. Naj bo K kvader, tako da velja $A \subseteq K$ in naj bo $\mathcal{D} = \{K_i | i = 1, ..., m\}$ delitev kvadra. Označimo množico kvadrov, ki sekajo A in $A^{\complement}$ z E. Opazujmo:

$$S(\chi_A, \mathcal{D}) - s(\chi_A, \mathcal{D}) = \sum_i (M_i - m_i)|K_i|,$$

zaradi lastnosti funkcije χ_A:

$$M_i - m_i = \begin{cases} 0 & ; \quad K_i \subseteq A, \\ 0 & ; \quad K_i \nsubseteq A, \\ 1 & ; \quad K_i \in E. \end{cases}$$

Kar pomeni, da je razlika integralskih vsot večja od nič le na ∂A in velja:

$$S(\chi_A, \mathcal{D}) - s(\chi_A, \mathcal{D}) = \sum_E |K_i|.$$

Za dovolj fine delitve je torej razlika $S - s$ poljubno majhna. S pomočjo Leme 2.19 in opombe pod dokazom lahko množici E dodamo tudi kvadre, ki se le dotikajo roba ∂A. Tako lahko definiramo novo množico W, ki vsebuje vse K_i iz $\mathcal{D}$, ki sekajo ∂A. Zdaj spet ocenimo razliko vsot:

$$S(\chi_A, \mathcal{D}) - s(\chi_A, \mathcal{D}) \leq \sum_W |K_i| = S(\chi_{\partial A}, \mathcal{D}).$$

Od tu sledi: če je $V_n(\partial A) = 0$, potem obstaja $V_n(A)$. □

Trditev 2.21. *Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena podmnožica. $V(A) = 0$, če in samo če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja končno mnogo kvadrov s skupno prostornino manj od ε, katerih unija vsebuje A.*

Dokaz. Ker je $0 \leq \chi_A \leq 1$, je $s(\chi_A, \mathcal{D}) \geq 0$ za vsako delitev $\mathcal{D}$, torej je tudi $s(\chi_A) \geq 0$. Ker velja $V(A) = 0 \iff s(\chi_A) = S(\chi_A) = 0$ in $S(\chi_A) \geq s(\chi_A) \geq 0$, velja že samo $V(A) = 0 \iff S(\chi_A) = 0$. Zgornja Darbouxova vsota pa je enaka nič natanko tedaj, ko $\forall \varepsilon > 0$ obstaja delitev $\mathcal{D} = \{K_i | i = 1, ..., n\}$ za kvader $K \supseteq A$, da je $S(\chi_A, \mathcal{D}) < \varepsilon$. Velja namreč

$$S(\xi_A, \mathcal{D}) = \sum_i M_i |K_i| = \sum_{i | K_i \cap A \neq \emptyset} |K_i| < \varepsilon.$$

□

Posledica 2.22. *Končna unija množic s prostornino 0 je množica s prostornino 0.*

Dokaz. Naj bodo $A_1, ..., A_k \subset \mathbb{R}^n$ omejene množice s prostornino 0, tako da velja $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Izberimo $\varepsilon > 0$, tako da za vsak A_i obstaja končno mnogo kvadrov s skupno prostornino $\frac{\varepsilon}{k}$, katerih unija vsebuje A_i. Iz tega sledi, da unija vseh kvadrov vsebuje A in je njihova prostornina $V(A) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$. □

Zgled 2.23.

1. Naj bo $A = \{a_1, ...a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ množica samih točk. $V(A) = 0$, zato, ker lahko vsako od točk zapremo v poljubno majhen kvader.
2. Naj bo $A = \partial([0,1] \times [0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ unija stranic kvadrata. $V(A) = 0$, saj je A unija 4 daljic.

Trditev 2.24. *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kvader in funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ integrabilna. Tedaj ima graf $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n | x \in K\}$ n-razsežno prostornino enako 0.*

Dokaz. Izberimo $\varepsilon > 0$. Ker je f integrabilna, obstaja delitev $\mathcal{D} = \{K_i | i = 1, ..., m\}$ za kvader K, da velja $S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon$. Naj bo $Q_i = K_i \times [m_i, M_i]$. Velja

$$\sum_i |Q_i| = \sum_i (M_i - m_i)|K_i| = S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon.$$

Torej je družina kvadrov Q_i končen nabor s prostornino manjšo od ε, hkrati pa je Γ_f v celoti vsebovana v uniji teh kvadrov, saj za vsak K_i velja $m_i \leq f(x) \leq M_i$. □

Trditev 2.25. *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader, $A \subseteq K$ množica s prostornino 0 in $f : K \to \mathbb{R}$ omejena funkcija, ki je izven A enaka 0. Tedaj $\int_K f \, \mathrm{d}V$ obstaja in je enak 0.*

Dokaz. Naj bo $M = \sup_K |f| = \sup_A |f|$. Ker je $V(A) = 0$, za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja končna družina kvadrov $Q_1, ..., Q_l$, da je $A \subset \bigcup_i Q_i$ in $\sum_i |Q_i| < \varepsilon$. Privzeti smemo, da je $Q_i \subseteq K$ za vsak i. Sedaj obstaja delitev $\mathcal{D} = \{K_i | i = 1, ..., m\}$ za kvader K, ki je usklajena s kvadri Q_i v smislu, da je vsak Q_i unija nekaterih kvadrov K_i. Velja

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_i \sup_{K_i} f \cdot |K_i| \leq M \sum_i |K_i| \leq M \sum_j |Q_j| < M\varepsilon.$$

Podobno pokažemo, da je $s(f, D) > -M\varepsilon$, tako da dobimo

$$S(f, D) - s(f, D) < 2M\varepsilon \text{ za } \forall \varepsilon > 0.$$

To pa pomeni, da tak integral obstaja in je enak 0. □

Trditev 2.26. *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $f : K \to \mathbb{R}$ omejena funkcija, ki je integrabilna na K. Če za $A \subseteq K$ velja $V(A) = 0$ in če za omejeno funkcijo $\tilde{f} : K \to \mathbb{R}$ velja $f = \tilde{f}$ na $K \setminus A$, tedaj je $\tilde{f}$ integrabilna in velja*

$$\int_K \tilde{f} \, \mathrm{d}V = \int_K f \, \mathrm{d}V$$

ne glede na definicijo $\tilde{f}$ na A.

Dokaz. Uporabimo Trditev 2.25 na $f - \tilde{f}$. □

Definicija 2.27. Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ poljubna množica (ne nujno omejena). Pravimo, da ima A *n-dimenzionalno (Lebesguovo) mero* 0, če $\forall \varepsilon > 0$ obstaja števna družina kvadrov $\{A_j ; j \in \mathbb{N}\}$, da velja

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{in} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |A_j| < \varepsilon.$$

To označimo z $m(a) = 0$.

Če ima A prostornino 0, je iz do sedaj povedanih izrekov zelo očitno, da ima tudi mero nič.

Zgled 2.28.

1. Premica v $\mathbb{R}^2$ ima mero 0:
   vzemimo premico $\mathbb{R}\times\{0\}$. Vzemimo neskončno pravokotnikov dolžine 1 in širine $\varepsilon 2^{-n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Začnimo pri v izhodišču in okoli premice podolgem zlagajmo pravokotnike izmenično enega na levo in enega na desno. Vsak odsek $(m, m+1)$; $m \in \mathbb{N}$ bo zagotovo vsebovan v kateremkoli pravokotniku. Na ta način ovijemo celotno premico v pravokotnike, katerih skupna prostornina je $\sum_n \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon$, torej je njena mera nič.

2. $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ nima prostornine v $\mathbb{R}$, velja pa $m(A) = 0$:
   Ker je A števna, lahko pišemo $A = \{q_1, q_2, ...\}$. Naj bo $\mathcal{I}_j = (q_j - \varepsilon 2^{-j-1}, q_j + \varepsilon 2^{-j-1})$. Tedaj je $\{\mathcal{I}_j; j \in \mathbb{N}\}$ pokritje za množico A s površino ε.

3. Podobno velja $m(\mathbb{Q}) = 0$ v $\mathbb{R}$.

Trditev 2.29. *Števna unija množic z mero 0 ima mero 0.*

Dokaz. Naj bodo $B_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$ množice z mero 0. Vzemimo $\varepsilon > 0$. Naj bo $\{A_{jk}; k \in \mathbb{N}\}$ pokritje za B_j s prostornino $\varepsilon 2^{-j}$. Tako pokritje očitno obstaja, saj je mera B_j enaka 0. Tedaj je $\{A_{jk}; j, k \in \mathbb{N}\}$števno pokritje $\bigcup_j B_j$ s kvadri skupne prostornine ε. □

Izrek 2.30 (Lebesgue)**.** *Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $f : K \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Tedaj je f integrabilna natanko tedaj, ko ima množica nezveznosti f mero 0.*

Izreka ne bomo dokazovali, ker je dokaz predolg. Karakteristična funkcija za racionalna števila ni zvezna nikjer, to pomeni, da ima množica nezveznosti mero neskončno, in zato ni integrabilna. Lahko pa nakuhamo funkcijo, ki je nezvezna natanko v vseh racionalnih številih, recimo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{če } x \in \mathbb{Q} \text{ in je } x = \frac{n}{m} \text{ okrajšan ulomek;} \\ 0, & \text{če } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ta funkcija se imenuje Thomaejeva funkcija.

Definicija 2.31. Pravimo, da lastnost $\mathcal{L}$ velja *skoraj povsod* na množici $X \subset \mathbb{R}^n$, če velja povsod razen na množici z mero nič. Simbolno povedano: $m(\{x \in X; \mathcal{L} \text{ ne velja v } x\}) = 0$. To označimo z s. p. ali a. e. ali p. p. (iz francoske *presque partout*).

Posledica 2.32. *Če je $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena množica, tedaj $V(A) = \int \chi_A \, \mathrm{d}V$ obstaja $\iff$ χ_A je zvezna skoraj povsod na $\mathbb{R}^n$ $\iff$ $m(\partial A) = 0$.*

Definicija 2.33. Množica $K \subset M^{\text{metrični prostor}}$ je *kompaktna*, če za vsako odprto pokritje obstaja končno podpokritje.

Vemo že, da je množica $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktna, natanko takrat ko je zaprta in omejena.

Trditev 2.34. *Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ kompaktna množica. Tedaj je $V(A) = 0 \iff m(A) = 0$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Implikacijo v desno smo že dokazali.
($\Longleftarrow$) Najprej uvedimo novo oznako. Če je K kvader, naj bo $2K$ odprt kvader z istim središčem in dvakratnim radijem. Vzemimo $\varepsilon > 0$. Ker je $m(a) = 0$, obstajajo zaprti kvadri $\{A_1, A_2, ...\}$, tako da

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ in } \sum_{j=1}^{\infty} V(A_j) < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

kjer je n dimenzija. Sedaj odprti kvadri $2A_j$ pokrivajo A. Ker je A kompaktna množica, obstaja $N \in \mathbb{N}$ tako da že končna unija $\{2A_j; j = 1, ..., N\}$ pokriva A. Sldedi, da je

$$\sum_{j=1}^{N} V(2A_j) = \sum_{j=1}^{N} 2^n V(A_j) \leq 2^n \sum_{j=1}^{\infty} V(A_j) < \varepsilon.$$

Ker je $\varepsilon > 0$ poljuben, je $V(A) = 0$. □

Definicija 2.35. Če za vsako točko x iz množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$ velja, da obstaja taka okolica točke x, ki je vsa znotraj A, potem pravimo, da je A *odprta* (in ne vsebuje svojega roba). Če je komplement množice A odprt, je A *zaprta* (in vsebuje cel svoj rob).

Definicija 2.36. Če $V(A)$ obstaja in je strogo večji od nič, tedaj za $f \in \mathcal{I}(A)$ označimo

$$\langle f \rangle_a := \frac{1}{V(A)} \int_A f(x)\,\mathrm{d}x.$$

To je *povprečna vrednost (povprečje)* funkcije f na množici A.

Izrek 2.37 (Lastnosti integrala)**.** *Naj bo množica $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena:*

1. $f, g \in \mathcal{I}(A) \implies f + g \in \mathcal{I}(A)$ *in*
$$\int_A (f+g)\,\mathrm{d}V = \int_A f\,\mathrm{d}V + \int_A g\,\mathrm{d}V.$$
2. *Za vsak $c \in \mathbb{R}$ je $cf \in \mathcal{I}(A)$ in*
$$c\int_A f\,\mathrm{d}V = \int_A cf\,\mathrm{d}V.$$
3. $f, g \in \mathcal{I}(A)$ *in* $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in A \implies$
$$\int_A f\,\mathrm{d}V \leq \int_A g\,\mathrm{d}V$$
.
4. $f \in \mathcal{I}(A) \implies |f| \in \mathcal{I}(A)$ *in*
$$\left|\int_A f\,\mathrm{d}V\right| \leq \int_A |f|\,\mathrm{d}V.$$
5. $f \in \mathcal{I}(A)$ *in A ima prostornino* $\implies$
$$\int_A |f|\,\mathrm{d}V \leq V(A) \sup_A |f|.$$
6. *Privzemimo:*
   - $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ *omejeni množici;*
   - $V(A_1 \cap A_2) = 0$*;*
   - $f : A_1 \cup A_2 \to \mathbb{R}$ *je omejena;*
   - $f \in \mathcal{I}(A_1) \cap \mathcal{I}(A_2)$.

   Tedaj je $f \in \mathcal{I}(A_1 \cup A_2)$ in
$$\int\limits_{A_1 \cup A_2} f\,\mathrm{d}V = \int\limits_{A_1} f\,\mathrm{d}V + \int\limits_{A_2} f\,\mathrm{d}V.$$

Dokaz. Dokazali bomo samo 6. Ostalo je vaja. Karakteristično funkcijo na $A_1 \cup A_2$ lahko zapišemo kot

$\chi_{A_1\cup A_2} = \chi_{A_1} + \chi_{A_2} - \chi_{A_1\cap A_2}$. Iz tega sledi

$$\int\limits_{A_1\cup A_2} f\,\mathrm{d}V = \int\limits_{A_1} f\,\mathrm{d}V + \int\limits_{A_2} f\,\mathrm{d}V - \int\limits_{A_1\cap A_2} f\,\mathrm{d}V = \int\limits_{A_1} f\,\mathrm{d}V + \int\limits_{A_2} f\,\mathrm{d}V,$$

ker je $V(A_1\cap A_2) = 0 \implies \int_{A_1\cap A_2} f\,\mathrm{d}V = 0$. □

Trditev 2.38. *Naj bo $K\subset\mathbb{R}^n$ kvader in $f : K\to[0,\infty)$. Tedaj $\int_K f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies f(x) = 0$ skoraj povsod.*

Dokaz. Definirajmo $K_n = \{x\in K; f(x)\le \frac{1}{n}\}$. Tedaj

$$\frac{1}{n}V(K_n) = \int_{K_n}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}x \le \int_{K_n} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_K f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Torej $V(K_n) = 0$ za vse n, zato $m(K_n) = 0\ \forall n\in\mathbb{N}$. Sledi $m(\{x\in K; f(x)\ne 0\}) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n) = 0$. □

2.2 Fubini-Tonellijev izrek

Izrek 2.39 (Fubini-Tonelli)**.** *Naj bo $f : [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ integrabilna. Privzemimo, da je $\forall x\in[a,b]$ funkcija $f(x,\bullet) : [c,d]\to\mathbb{R}$, $y\mapsto f(x,y)$ integrabilna na $[c,d]$. Tedaj je*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Levi strani rečemo dvojni integral, desni pa iterirani integral.

Posledica 2.40. *Če sta f in $f(\bullet,y)$ (z ekvivalentno definicijo kot zgoraj) integrabilni, je*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Posledica 2.41. *Če je $f : [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ zvezna, potem je*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Dokaz. Definirajmo $g : [a,b]\to\mathbb{R}$ s predpisom $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$, ki obstaja po predpostavki. Označimo $I = [a,b]$ in $J = [c,d]$. Želimo

$$\int\limits_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_I g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Izberimo delitvi $\mathcal{D}_1 = \{I_i = [x_{i-1},x_i];\ i = 1,...,m\}$ za I in $\mathcal{D}_2 = \{J_j = [y_{j-1},y_j];\ j = 1,...,n\}$ za J. Naj bo $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1\times\mathcal{D}_2 = \{P_{ij} = I_i\times J_j; i = 1,...,m; j = 1,...,n\}$ delitev za $I\times J$. Označimo še $m_{ij}(f) = \inf_{P_{ij}} f$ in $M_{ij}(f) = \sup_{P_{ij}} f$. Velja

$$s(f,\mathcal{D}) = \sum_{i,j} m_{ij}(f)|P_{ij}| = \sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n m_{ij}(f)|J_j|\right)|I_i|.$$

Izberemo $i \in \{1, ..., m\}$ in $x \in I_i$. Tedaj je

$$m_{ij}(f) = \inf_{\xi \in I_i; y \in J_j} f(\xi, y) \leq \inf_{y \in J_j} f(x, y) = m_j(f(x, \bullet)).$$

Za izbrana x in i sledi

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(f)|J_j| \leq \sum_{j=1}^{n} m_j(f(x, \bullet))|J_j| = s(f(x, \bullet), \mathcal{D}_2) \leq \int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y = g(x)$$

$\forall i \in \{1, ..., m\}$ in $\forall x \in I_i$. Tedaj za $\forall i \in \{1, ..., m\}$ velja tudi

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(f)|J_j| \leq \inf_{x \in I_i} g(x),$$

saj neenakost velja za vsak x iz intervala I_i. Združimo to dognanje s prejšnjim:

$$s(f, \mathcal{D}) \leq \sum_{i=1}^{m} \inf_{x \in I_i} g(x)|I_i| = s(g, \mathcal{D}_1).$$

Simetrični postopek naredimo s supremumi in dobimo

$$s(f, \mathcal{D}) \leq s(g, \mathcal{D}_1) \leq S(g, \mathcal{D}_1) \leq S(f, \mathcal{D})$$

za vse delitve $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ za pravokotnik $I \times J$. Izberimo $\varepsilon > 0$. Ker je f integrabilna, po Trditvi 2.12 obstaja takšna delitev $\mathcal{D}$, da je $S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon$. Direktna posledica tega in zgoraj dokazanega pa je $S(g, \mathcal{D}_1) - s(g, \mathcal{D}_1) < \varepsilon$. Po Trditvi 2.12 je tudi g integrabilna in integrala sta enaka. $\square$

Zgled 2.42.

1. Naj bo $P = [-1, 1] \times [-2, 2] \subset \mathbb{R}^2$ pravokotnik in $f(x, y) = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}$. Zanima nas integral $I = \iint_P f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$. Ker je f zvezna, lahko po posledici 2.41 dvojni integral izračunamo kot iterirani integral v kateremkoli vrstnem redu:

$$I = \int_{-2}^{2} \left(\int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{y}{2}\right) \mathrm{d}y = 8$$

   ali

$$I = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x = 8.$$

2. Naj bo $P = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ in $A = P \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x\}$. Naj bo $g(x, y) = x$. Definirajmo $f(x, y) = g(x, y)\chi_A(x, y)$ za $\forall(x, y) \in P$. Tedaj je

$$I = \iint_A g(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_A x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_P x\chi_A(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_P f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

   Funkcija f je nezvezna kvečjemu na daljici med $(0, 0)$ in $(1, 1)$, torej je po Lebesguovem izreku 2.30 integrabilna. Prav tako sta $f(x, \bullet)$ in $f(\bullet, y)$ integrabilni. Torej je

$$I \overset{F.T.}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 x\chi_A(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x \int_0^1 \chi_A(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

   ali

$$I \overset{F.T.}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 x\chi_A(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1 - y^2}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{3}.$$

Trditev 2.43. *Naj bodo $I = [a, b]$ interval, funkciji $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ zvezni in takšni, da velja $\alpha \leq \beta$, množica $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in I, y \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$ in funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj velja:*

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

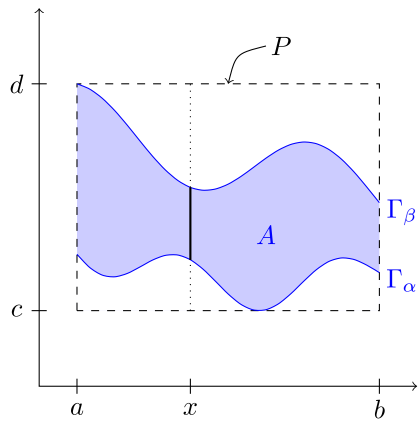
Dokaz. Pri dokazu nam lahko pomaga Slika 2.1. Ker sta α, β zvezni sta na I omejeni, obstaja pravokotnik $P \subset \mathbb{R}^2$, tako da je $A \subset P = [a, b] \times [c, d]$. Definirajmo funkcijo $\tilde{f} : P \to \mathbb{R}$, tako da

$$\tilde{f}(x, y) \coloneqq \begin{cases} f(x, y) & ; \quad (x, y) \in A, \\ 0 & ; \quad (x, y) \notin A. \end{cases}.$$

Točke nezveznosti $\tilde{f}$ so vsebovane v $\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$. Po Trditvi 2.24 imata Γ_α in Γ_β prostornino 0 v $\mathbb{R}^2$, torej velja tudi $V(\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta) = 0$. To pomeni, da je $\tilde{f}$ zvezna povsod, razen v množici z mero 0, kar po izreku 2.30 (Lebesgue) pomeni, da je funkcija $\tilde{f}$ integrabilna na P. Podobno velja, da je za vsak $x \in I$ funkcija $y \to \tilde{f}(x, y)$ odsekoma zvezna in integrabilna na $[c, d]$. Uporabimo Izrek 2.39 (Fubini):

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_P \tilde{f}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \tilde{f}(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

ker je $\tilde{f} = 0$ razen na $y \in [\alpha(x), \beta(x)]$. □



Slika 2.1: Dvojni integral

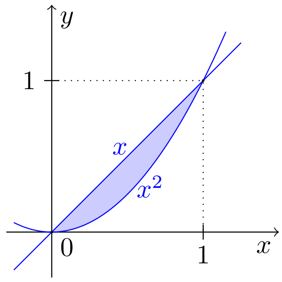
Podoben izrek velja tudi za obratni vrstni red x in y.

Zgled 2.44. Naj bo D območje v $\mathbb{R}^2$ omejeno z : $y = x$ in $y = x^2$. Območje je prikazano na Sliki 2.2. Izračunajmo integral funkcije $f(x, y) = x + y$ na D. Uporabimo zgornjo Trditev 2.43:

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{x^2}^x (x + y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 (x^3 - x^2 + x^4/2 - x^2/2)\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{20}$$

Lahko pa tudi obrnemo vrstni red in dobimo:

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (y\sqrt{y} - y^2 + y/2 - y^2/2)\,\mathrm{d}y = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{3}{20}.$$



Slika 2.2: Integracijsko območje v nalogi 2.44.

Posplošitev na višje dimenzije

Izrek 2.45. *Naj bosta $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m; m, n \in \mathbb{N}$ kvadra in funkcija $f : A \times B \to \mathbb{R}$ integrabilna. Za vsak $x \in A$ naj bo funkcija $y \to f(x, y)$ integrabilna na B. Tedaj velja:*

$$\iint\limits_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_A \left(\int\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Posledica 2.46. *Naj bo funkcija $F : K = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj velja:*

$$\iiint\limits_K F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \int\limits_e^f F(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \int\limits_e^f F(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Trditev 2.47. *Naj bodo $A \subset \mathbb{R}^2$ množica, funkciji $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$ zvezni in takšni, da velja $\alpha \le \beta$ na A, množica $B = \{(x, y, z) \in A \times \mathbb{R} | \alpha(x, y) \le z \le \beta(x, y)\}$ in funkcija $f : B \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj velja:*

$$\iiint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_A \left(\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}S(x,y).$$

Zgled 2.48.

1. Imamo množico $A = [0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 1]$. Izračunajmo vrednost integrala funkcije $f(x, y, z) = x + y + z$ na množici A:

$$\iiint\limits_A (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 \int\limits_0^1 (x+y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_{-1}^1 (x+y+1/2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x = 2$$

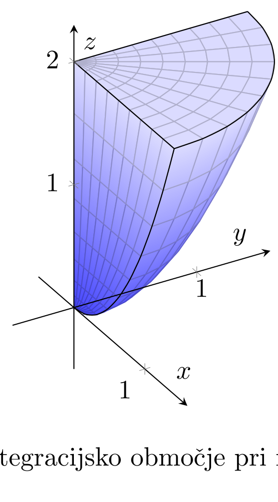
2. Naj bo T tetraeder z oglišči $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Izračunajmo vrednost integrala funkcije $f(x, y, z) = (x+y+z)^2$. T predstavimo kot območje med dvema grafoma (ploskvama) $A \subset \mathbb{R}^2$; $A :=\{(x, y) \mid y \le 1 - x \wedge 0 \le x \le 1\}$. Spodnja ploskev je tako del ravnine $z = 0$ in zgornja $x + y + z = 1$.

Zdaj uporabimo zgornjo trditev in dobimo:

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_T (x+y+z)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint\limits_A \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}S\,(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (x+y+z)^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_{x+y}^1 t^2 \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (1-(x+y)^3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int\limits_0^1 \int\limits_x^1 (1-w^3)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \int\limits_0^1 (1-x-(1-x^4)/4)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{20} = \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

3. Naj bo telo $T \subset \mathbb{R}^3$ omejeno z $x = 0, y = 0, z = 2, 2 = x^2 + y^2$ in $x, y \geq 0$. Torej je telo T med $A = \{(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty); x^2+y^2 \leq 2\}$ in med grafoma funkcij $z = \alpha(x,y) = x^2+y^2, z = \beta(x,y) = 2$. Prikazano je na Sliki 2.3 Zdaj lahko s pomočjo trditve izračunamo naslednji integral:

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_T x\,\mathrm{d}V = \iint\limits_A \int\limits_{x^2+y^2}^2 x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}S\,(x,y) &= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} \int\limits_{x^2+y^2}^2 x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(x(2-x^2)\sqrt{2-x^2} - \frac{x}{3}\sqrt{2-x^2}^3\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}\int\limits_0^{\sqrt{2}} x(2-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int\limits_2^0 t^{1/3}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}
$$



Slika 2.3: Integracijsko območje pri nalogi 2.48.3.

2.3 Uvedba nove spremenljivke

Izrek 2.49. *Naj bodo $I \subset \mathbb{R}$ interval, funkcija $\varphi : [a, b] \to I$ zvezno odvedljiva in funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ zvezna. Tedaj velja:*

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(\varphi(x))\,\dot{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definicija 2.50. Naj bo $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in za $j = 1, \ldots m \in \mathbb{N}$ definiramo funkcije $\varphi_j : U \to \mathbb{R}$, ki so parcialno odvedljive na vse spremenljivke. Tedaj *Jacobijevo matriko* za $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\varphi_1, \ldots \varphi_m)$ definiramo kot matriko vseh odvodov po vseh spremenljivkah:

$$J\boldsymbol{\varphi} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Izrek 2.51. *Naj velja*

- *$A \subset \mathbb{R}^n$ omejena odprta množica s prostornino,*
- *$\boldsymbol{\varphi} : A \to \mathbb{R}^n$ injektivna funkcija iz razreda $\mathcal{C}^1$,*
- *$\det(J\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) \neq 0$ za $\forall \mathbf{x} \in A$,*
- *$x \mapsto \det(J\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))$ je omejena na A,*
- *$\varphi(A)$ je omejena in ima prostornino,*
- *$f : \boldsymbol{\varphi}(A) \to \mathbb{R}$ je integrabilna.*

Tedaj je tudi $x \mapsto f(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))|\det J\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})|$ integrabilna in velja

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}(A)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t}))|\det J\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})|\,\mathrm{d}\mathbf{t}.$$

Dokaz. (Skica dokaza za $n = 2$). Naj bo A pravokotnik in $\{P_{ij}\}$ delitev za A. Velja

$$\iint\limits_{\boldsymbol{\varphi}(A)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{(1)}{=} \sum_{i,j} \iint\limits_{\boldsymbol{\varphi}(P_{ij})} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i,j} \langle f\rangle_{\boldsymbol{\varphi}(P_{ij})} |\varphi(P_{ij})|.$$

Enakost (1) velja, ker smo predpostavili, da je $\boldsymbol{\varphi}$ injektivna. Po izreku o srednji vrednosti obstajata taka točka $(u_{ij}, v_{ij}) \in P_{ij}$, da je

$$\langle f\rangle_{\boldsymbol{\varphi}(P_{ij})} = f(\boldsymbol{\varphi}(u_{ij}, v_{ij})).$$

Predpostavimo, da ima pravokotnik P_{ij} dolžino Δu in širino Δv, ter da je njegova leva spodnja točka (u, v). Če je pravokotnik dovolj majhen, lahko čudno obliko v katero se slika aproksimiramo s paralelogramom (v višjih dimenzijah s primerno dimenzionalnim paralelepipedom), ki ga karakterizirajo točke $\boldsymbol{\varphi}(u, v)$, $\boldsymbol{\varphi}(u + \Delta u, v)$ in $\boldsymbol{\varphi}(u, v + \Delta v)$. Tak paralelogram ima gotovo neničelno in končno površino, saj Jacobijeva matrika ni nikjer enaka nič in nikjer ni neskončno.

$$|\boldsymbol{\varphi}(P_{ij})| \approx |(\boldsymbol{\varphi}(u + \Delta u, v) - \boldsymbol{\varphi}(u, v)) \times (\boldsymbol{\varphi}(u, v + \Delta v) - \boldsymbol{\varphi}(u, v))| \overset{(2)}{\doteq} \left|\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(u, v)\Delta u \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(u, v)\Delta v\right| =$$

$$= |\boldsymbol{\varphi}_u \times \boldsymbol{\varphi}_v|\Delta u \Delta v = |\det J\boldsymbol{\varphi}(u_{ij}, v_{ij})|\ |P_{ij}|.$$

V koraku (2) smo uporabili Lagrangev izrek in dejstvo, da se pri zelo majhnih pravokotnikih odvod po širini zelo malo spremeni. Če zadnji dve dognanji združimo, dobimo:

$$\sum_{i,j} \langle f\rangle_{\boldsymbol{\varphi}(P_{ij})} |\boldsymbol{\varphi}(P_{ij})| \approx \sum_{i,j} f(\boldsymbol{\varphi}(u_{ij}, v_{ij}))|\det J\boldsymbol{\varphi}(u_{ij}, v_{ij})|\ |P_{ij}|.$$

To pa je ravno Riemannova vsota za integral $\iint_A f(\varphi(x, y))|\det J\varphi(x, y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. □

2.4 Cilindrične koordinate v $\mathbb{R}^3$

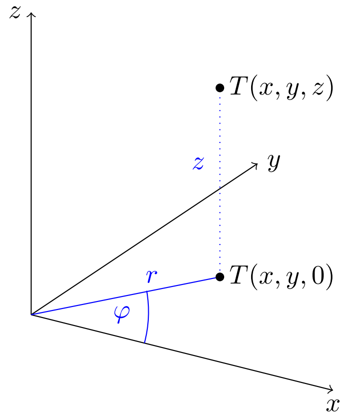
Funkcija, ki pretvori cilindrične v kartezične koordinate, je podana na naslednji način: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in

$$\mathbf{f}(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}.$$

Za cilindrične koordinate velja naslednje: $r \geq 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$ ali $[0, 2\pi)$ in $z \in \mathbb{R}$. Koordinate imajo tako ime, ker so ploskve z enakimi vrednostmi r neskončni valji z osjo na osi z. Jacobijeva matrika pretvorbe med cilindričnimi in kartezičnimi koordinatami ima obliko:

$$J\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Absolutna vrednost Jacobijeve determinante je $|\det J\mathbf{f}(r, \varphi, z)| = r$.



Slika 2.4: Grafični prikaz cilindričnih koordinat.

Zgled 2.52.

1. Imejmo $0 \leq \rho \leq R$ in naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ množica, omejena s ploskvama $x^2+y^2+z^2 = R^2$ in $x^2+y^2 = \rho^2$. Torej gre za presek krogle s polmerom R in valja s polmerom ρ. Zanima nas volumen $V(\Omega)$:

$$V(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\rho}\int\limits_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\rho} 2r\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{R^2}^{R^2-\rho^2} -\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} -\frac{2}{3}\left[(R^2-\rho^2)^{3/2} - R^3\right]\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}\left[1 - \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

2. Naj bo P paralelepiped napet na vektorje $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 1)$ in $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$. Naj bo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ standardna baza na $\mathbb{R}^3$. Definirajmo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{v}_j$, ali drugače povedano

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Velja $P = T([0,1] \times [0,1] \times [0,1]) = T(K)$ (K je enotska kocka). Ker je $T(x, y, z) = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$, sledi $JT = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = T$. Torej

$$V(P) = \iiint_P 1\,\mathrm{d}V = \iiint_{T(K)} |\det JT|\,\mathrm{d}V = |\det T| = 2.$$

Za linearno preslikavo $\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ velja $J\Lambda = \Lambda$.

2.5 Sferične koordinate v $\mathbb{R}^3$

Za kartezične koordinate velja naslednje: $\mathbf{\Phi}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in

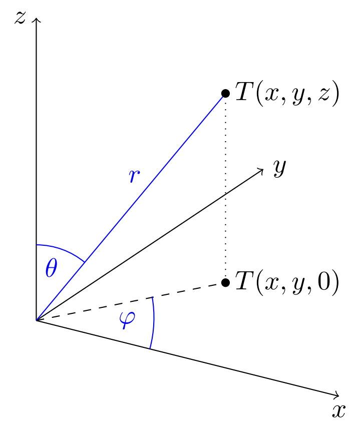
$$\mathbf{\Phi}(r,\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Velja $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ in $\theta \in [0,\pi]$. Jacobijeva matrika pretvorbe med sferičnimi in kartezičnimi koordinatami je

$$J\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Absolutna vrednost njene determinante je $r^2\sin\theta$. V fiziki se tipično kot θ označuje od osi z navzdol (kot v našem primeru), matematiki pa pogosto označujejo θ kot kot nad ali pod ravnino xy. V tem primeru postane Jacobijeva determinanta $r^2\cos\theta$. Sferične koordinate imajo tako ime, ker točke z enakimi vrednostmi r tvorijo sfere s središčem v izhodišču. Zelo so prikladne za integriranje funkcij po okroglih množicah:

$$\iiint_{\mathcal{K}(0,R)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$



Slika 2.5: Grafični prikaz sferičnih koordinat.

Zgled 2.53. Obravnavajmo enako telo kot v prejšnjem zgledu (presek krogle in valja), le da se ga tokrat lotimo s sferičnimi koordinatami. Vpeljemo novo konstanto $\theta_0 = \arcsin(\rho/R)$.

$$\begin{aligned}
V(\Omega) = &\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\left[\left(\int_0^{\theta_0}\mathrm{d}\theta + \int_{\pi-\theta_0}^{\pi}\mathrm{d}\theta\right)\int_0^R r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r + \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho/\sin\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\right] \\
=&2\pi\left[\frac{R^3}{3}\left(\int_0^{\theta_0}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi-\theta_0}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right) + \frac{\rho^3}{3}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}\frac{1}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\right] \\
=&2\pi\left[\frac{R^3}{3}(-\cos\theta_0 + 1 + 1 - \cos\theta_0) + \frac{\rho^3}{3}(\cot\theta_0 + \cot\theta_0)\right] \\
=&\frac{4\pi R^3}{3}\left(-\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}} + 1 + \frac{\rho^2}{R^2}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}}\right) \\
=&\frac{4\pi R^3}{3}\left[1-\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]
\end{aligned}$$

Definicija 2.54. Naj ima telo $T \subset \mathbb{R}^3$ gostoto $\rho = \rho(x, y, z)$. Če je $\rho = \text{const.}$, pravimo, da je telo *homogeno*. *Masa* telesa T je definirana kot

$$m(T) = \iiint_T \rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Definicija 2.55. *Težišče* telesa T je točka $(x_T, y_T, z_T) \in \mathbb{R}^3$, kjer je

$$x_T = \frac{1}{m(T)} \iiint_T x\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

$$y_T = \frac{1}{m(T)} \iiint_T y\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

$$z_T = \frac{1}{m(T)} \iiint_T z\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Kompaktnejše lahko to napišemo kot

$$\mathbf{x}_T = \frac{1}{m(T)} \int_T \mathbf{x}\rho(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Definicija 2.56. *Vztrajnostni moment* telesa $T \subset \mathbb{R}^3$ pri vrtenju okoli osi $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ je enak

$$J_\gamma = \int_T d(\mathbf{x}, \gamma)^2 \rho(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

kjer je $d(\mathbf{x}, \gamma)$ oddaljenost točke $\mathbf{x} = (x, y, z)$ od osi γ. V posebnem primeru velja:

$$J_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Zgornje definicije lahko podobno definiramo za dve dimenziji.

Zgled 2.57. Izračunajmo maso in težišče homogenega polkroga z gostoto ρ in radijem R. Mase ni težko izračunati in je $m = \frac{\pi R^2}{2}\rho$. Težišče v smeri x je $x_T = 0$, saj je telo simetrično glede na os y. Težišče v smeri y je

$$y_T = \frac{1}{m} \iint_P y\rho\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \frac{2}{\pi R^2 \rho} \int_0^\pi \int_0^R r \sin\varphi \rho r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \frac{4R}{3\pi} \approx 0{,}4R.$$

Zgled 2.58. Izračunajmo vztrajnostni moment torusa v $\mathbb{R}^3$ okoli osi z. Parametrizacijo torusa dobimo tako, da parametrizacijo kroga premaknjenega za a iz izhodišča po osi x pomnožimo z rotacijsko matriko okoli osi z.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + r\cos\theta \\ 0 \\ r\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (a + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{bmatrix},$$

pri čemer je $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ in $\varphi \in [0, 2\pi]$. Preden se lotimo vrednotenja integrala, izračunajmo Jacobijevo matriko:

$$J\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -(a + r\cos\theta)\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & (a + r\cos\theta)\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobimo, da je absolutna vrednost determinante enaka

$$|\det J\mathbf{T}| = r(a + r\cos\theta).$$

Velja:

$$
\begin{aligned}
J_z &= \iiint_T (x^2+y^2)\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R (a+r\cos\theta)^2 |\det J\mathbf{T}| \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R (a+r\cos\theta)^3 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\rho \int_0^R r \int_0^{2\pi} (a^3+3a^2 r\cos\theta + 3ar^2\cos^2\theta + r^3\cos^3\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\rho \int_0^R r(2\pi a^3 + 3\pi a r^2)\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi^2\rho a \int_0^R (2a^2 r + 3r^3)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{a\pi^2 R^2 \rho}{2}(4a^2+3R^2) = \frac{m}{4}(4a^2+3R^2).
\end{aligned}
$$

2.6 Posplošeni Riemann-Darbouxov integral v $\mathbb{R}^n$

V eni dimenziji velja

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \coloneqq \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,\mathrm{d}x$$

za neomejen interval, če limita na desni obstaja, in

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \coloneqq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

za neomejeno funkcijo, če limita na desni obstaja.

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ki ni nujno omejena.

- Naj bo $f : D \to [0,\infty)$ omejena funkcija. Tedaj definiramo

$$\int\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x \coloneqq \lim_{a\to\infty} \int\limits_{D\cap[-a,a]^n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

  če vsi izrazi na desni obstajajo. S tem pravniško intoniranim dostavkom se znebimo vseh težav s potencialnim neobstojem limit.

- Naj bo $f : D \to [0,\infty)$ neomejena. Tedaj definiramo

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\int_D \min\{f(x), M\}\,\mathrm{d}x,$$

  če vsi izrazi na desni obstajajo. Če je interval neomejen, si pomagamo s prvo točko.

- Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, ne nujno pozitivna. Sedaj definiramo

$$f_+ \coloneqq \max\{f, 0\}$$

  in

$$f_- \coloneqq \max\{-f, 0\}.$$

  Sledi $f_\pm : D \to [0,\infty)$ ter $f = f_+ - f_-$ in $|f| = f_+ + f_-$. Če obstaja $\int_D |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$, potem velja

$$\int_D f(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_D f_-(x)\,\mathrm{d}x.$$

  Z zgornjo predpostavko smo se prepričali, da ne odštevamo neskončno od neskončno.

3 Krivulje v $\mathbb{R}^3$

Definicija 3.1. *Pot* v $\mathbb{R}^3$ je zvezna preslikava $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ interval (lahko si ga predstavljamo kot časovni interval). Tako je $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Definicija 3.2. Sliko poti, torej $\mathbf{r}(I) \subset \mathbb{R}^3$, imenujemo *tir*. Običajno ga označimo z Γ.

Definicija 3.3. Pot je *gladka*, če je $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1(I)$, torej če so vse komponente zvezno odvedljive.

Definicija 3.4. *Gladka krivulja* v $\mathbb{R}^3$ je gladka pot $\mathbf{r} = (x, y, z) : I \to \mathbb{R}^3$, za katero velja $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0$ za $\forall t \in I$. Pogosto je s tem mišljeno tudi, da $\mathbf{r}(t)$ nima samopresečišč, torej je $\mathbf{r}\big|_{\text{int} I}$ injektivna. Taki parametrizaciji krivulje rečemo tudi *regularna parametrizacija* gladke krivulje $\Gamma = \mathbf{r}(I)$.

Trditev 3.5. *Vseh regularnih parametrizacij za vsako gladko krivuljo je neskončno mnogo.*

Dokaz. Imejmo neko regularno parametrizacijo $\mathbf{r} : I \to \Gamma$. Obstaja neskončno mnogo različnih bijektivnih funkcij $\tilde{h} : J \to I$ iz $\mathcal{C}^1(J)$, tako da $\tilde{h}(t) \neq 0$ za vse $t \in J$. Vsak tak $\tilde{h}$ nam iz $\mathbf{r}$ naredi novo regularno parametrizacijo $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} \circ \tilde{h} : J \to \Gamma$ za krivuljo Γ. □

3.1 Dolžina krivulje

Poskusimo poiskati intuitivno pot do definicije dolžine krivulje. Naredimo delitev intervala $I = [a, b]$, tako da je $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Dolžino krivulje med $\mathbf{r}(t_{j-1})$ in $\mathbf{r}(t_j)$ lahko aproksimiramo z dolžino daljice med tema dvema točkama $|\mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(t_{j-1})|$. Po Lagrangevem izreku je to približno enako $|\dot{\mathbf{r}}(\xi_j)|(t_j - t_{j-1})$ za nek $\xi_j \in (t_{j-1}, t_j)$. Beseda približno je bila uporabljena, ker Lagrangev izrek deluje v eni dimenziji, mi pa obravnavamo tri. Seštejmo vse take koščke:

$$\sum_{j=0}^{n} |\dot{\mathbf{r}}(\xi_j)|(t_j - t_{j-1}),$$

kar je ravno Riemannova vsota za funkcijo $|\dot{\mathbf{r}}| : [a, b] \to [0, \infty)$. Iz tega lahko zapišemo definicijo za dolžino krivulje.

Definicija 3.6. Če je $\mathbf{r} : [a, b] \to [0, \infty)$ gladka krivulja, katere tir označimo z Γ, je dolžina Γ definirana kot

$$l(\Gamma) := \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Ta integral gotovo obstaja, saj je $\mathbf{r} \in \mathcal{C}^1$, torej je $\dot{\mathbf{r}}$ zvezna in posledično njena absolutna vrednost.

Trditev 3.7. *Definicija 3.6 je dobra (torej je neodvisna od izbrane parametrizacije).*

Dokaz. Naj bo $\boldsymbol{\rho} : J \to \Gamma$ neka druga regularna parametrizacija za Γ. Vemo, da je $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} \circ h$ za neko preslikavo $h \in \mathcal{C}^1 : J \to I$, $J = [\alpha.\beta]$. Tedaj je

$$\int_\alpha^\beta |\boldsymbol{\rho}'(u)| \, \mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta |\dot{\mathbf{r}}(h(u))| \, |h'(u)| \, \mathrm{d}u \overset{t=h(u)}{=} \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Glede absolutne vrednosti pri odvodu h ni potrebno paziti na predznak, saj sta zaradi bijektivnosti h oba $h'(u)$ in $\dot{\mathbf{r}}(h(u))$ bodisi pozitivna bodisi negativna. □

Običajno bo pika nad oznako za krivuljo pomenila odvod po parametru t, črtica pa odvod po kakem drugem, običajno naravnem parametru.

Definicija 3.8. *Naravna parametrizacija* $\boldsymbol{\rho}(s)$ je parametrizacija, za katero velja $|\boldsymbol{\rho}'(s)| = 1$.

Privzemimo, da krivulja nima samopresečišč in naj bo parametrizirana z parametrizacijo $\mathbf{r}(t)$. Naj bo $\boldsymbol{\rho} : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ neka druga parametrizacija, za katero želimo, da je naravna. Zaradi injektivnosti parametrizacije $\mathbf{r}$ je tudi funkcija $S := \boldsymbol{\rho}^{-1} \circ \mathbf{r}$ injektivna in velja bodisi $S' > 0$ ali $S' < 0$ povsod. Privzemimo, da velja $S' > 0$ in odvajajmo $\mathbf{r}$ po t:

$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = |\dot{\boldsymbol{\rho}}(S(t))|\dot{S}(t).$$

Ker zahtevamo $|\dot{\boldsymbol{\rho}}(t)| = 1$, mora veljati $\dot{S}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|$. Od tod sledi

$$S(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau.$$

Temu rečemo *naravni parameter*.

Zgled 3.9. Vzemimo $a, b > 0$ in definirajmo

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Krivulja $\Gamma = \mathbf{r}(\mathbb{R})$ se imenuje *vijačnica*. Velja

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

in

$$s = S(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Iz tega izrazimo t kot $t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ in naravno parametrizacijo vijačnice

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

Definicija 3.10. Vektorju

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}$$

pravimo *enotski tangentni vektor* na Γ v točki $\mathbf{r}(t)$. V naravni parametrizaciji je ta vektor enak $\boldsymbol{\rho}'(s)$.

Zgled 3.11. Naj bo $\mathbf{r} = (t, t^2, t^3)$ in $T = \mathbf{r}(1) = (1, 1, 1)$. Odvod po parametru parametrizacije $\mathbf{r}$ je $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 2t, 3t^2)$. Enotski tangentni vektor v točki T je $\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}}$.

Definicija 3.12. *Tangenta* na Γ v točki $\mathbf{r}(t)$ je premica v $\mathbb{R}^3$, ki poteka skozi $\mathbf{r}(t)$ in je vzporedna $\dot{\mathbf{r}}(t)$:

$$(x, y, z) = \mathbf{r}(t) + \lambda\dot{\mathbf{r}}(t); \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definicija 3.13. *Normalna ravnina* na Γ v točki $\mathbf{r}(t)$ je ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje točko $\mathbf{r}(t)$ in je pravokotna na $\dot{\mathbf{r}}(t)$ oziroma na tangento na Γ v točki $\mathbf{r}(t)$. To lahko zapišemo kot

$$\langle (x, y, z) - \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle = 0$$

ali

$$x\dot{x}(t) + y\dot{y}(t) + z\dot{z}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Zgled 3.14. Vzemimo vijačnico iz Zgleda 3.9 in točko $\mathbf{r}(0) = (a, 0, 0)$. Odvod v tej točki je $\dot{\mathbf{r}}(0) = (0, a, b)$, tangenta ima obliko $(x, y, z) = (a, \lambda a, \lambda b)$ za $\lambda \in \mathbb{R}$, normalna ravnina pa se zapiše kot $ay + bz = 0$.

3.2 Pritisnjena ravnina

Izrek 3.15. *Naj bo $\boldsymbol{\gamma}$ regularna parametrizacija $\mathcal{C}^2$ neke krivulje v $\mathbb{R}^3$. Za poljuben $t_0 \in \mathbb{R}$ privzamemo, da je $(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}})(t_0) \neq 0$. Tedaj obstaja $\delta > 0$, tako da so za poljubni točki $t_1, t_2 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, kjer so t_1, t_2 in t_0 različne, točke $\boldsymbol{\gamma}(t_1)$, $\boldsymbol{\gamma}(t_2)$ in $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ nekolinearne.*

Dokaza za ta izrek ne podajamo.

Naj bodo $\boldsymbol{\gamma}$, t_0, δ, t_1 in t_2 definirani enako kot v zgornjem izreku. Naj bo $\mathbf{v}_0 := (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}})(t_0)$. S $\Pi(t_1, t_2)$ označimo ravnino skozi $\boldsymbol{\gamma}(t_1)$, $\boldsymbol{\gamma}(t_2)$ in $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$. Takšna ravnina po zgornjem izreku obstaja in je enolično določena. Enotske normale $\mathbf{n}(t_1, t_2)$ na ravnini $\Pi(t_1, t_2)$ limitirajo k $\pm\frac{v_0}{|v_0|}$, ko gre δ proti 0 (brez dokaza).

Definicija 3.16. Ravnini skozi $T_0 = \boldsymbol{\gamma}(t_0)$ in z normalo $(\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}})(t_0) \neq 0$ pravimo *pritisnjena ravnina* na krivuljo $\boldsymbol{\gamma}$ v točki T_0.

Izrek 3.17. *Če je $\Pi = \Pi(t_0)$ pritisnjena ravnina na $\boldsymbol{\gamma}$ v točki $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$, velja*

$$d(\boldsymbol{\gamma}(t_0 + h), \Pi) = o(h^2),$$

ko gre h proti 0.

Opomba:

$$f(h) = o(g(h)) \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0.$$

Tako na primer $x^3 = o(x^2)$ in $x^2 \neq o(x^2)$.

Dokaz. Vemo, da je razdalja v $\mathbb{R}^3$ med točko $\mathbf{R}$ in ravnino skozi točko $\mathbf{r}_0$ in normalo $\mathbf{n}$ enaka $\frac{1}{|\mathbf{n}|}|\langle \mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}\rangle|$. Sledi:

$$d(\boldsymbol{\gamma}(t_0 + h), \Pi) = |\langle \boldsymbol{\gamma}(t_0 + h) - \boldsymbol{\gamma}(t_0), \hat{\mathbf{v}}_0\rangle| = |\langle h\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0) + h^2\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t_0)/2 + o(h^2), \hat{\mathbf{v}}_0\rangle| = |\langle o(h^2), \hat{\mathbf{v}}_0\rangle| \leq o(h^2).$$

Pri tem smo uporabili Taylorjev izrek in dejstvo, da sta tako $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ kot $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ pravokotna na $\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}$. $\square$

Enačba pritisnjene ravnine je podana z mešanim produktom

$$((x, y, z) - \mathbf{r}(t_0), \dot{\mathbf{r}}(t_0), \ddot{\mathbf{r}}(t_0)) = 0.$$

če je $\dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0) \neq 0$.

Zgled 3.18. Imejmo neko krivuljo, ki se nahaja samo v xy ravnini:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0).$$

Velja

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0)$$

in

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), 0).$$

Normala pritisnjene ravnine je

$$\mathbf{n}(t) = (\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})(t) = (0, 0, \dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)).$$

Pritisnjena ravnina je za vse t enaka xy ravnini, saj je enotska normala $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$.

Zgled 3.19. Spet obravnavajmo vijačnico:

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),$$

pri čemer sta prvi in drugi odvod enaka

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

in

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0).$$

Vektorski produkt prvega in drugega odvoda je

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})(t) = a(-b\sin t, -b\cos t, a).$$

V $t = 0$ dobimo

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})(0) = a(0, -b, a)$$

in enačbo pritisnjene ravnine kot

$$by - az = 0.$$

3.3 Fleksijska in torzijska ukrivljenost ter Frenet-Serretov trieder

Definicija 3.20. Če je $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \neq 0$, potem vektorju

$$\mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}$$

pravimo *vektor binormale*. Označimo s $\mathbf{T} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$ enotski tangentni vektor. Tedaj vektorju

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$$

pravimo *vektor glavne normale*. Trojica $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ se imenuje *spremljajoči (Frenet-Serretov) trieder*.

Trditev 3.21. *Naj bodo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ za $t \in [\alpha, \beta]$ regularna $\mathcal{C}^2$ parametrizacija za krivuljo Γ in $s = f(t) = \int_\alpha^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$ pridruženi naravni parameter. Označimo z $\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(f^{-1}(s))$ naravno parametrizacijo za Γ. Sedaj velja:*

1. *Če je $F(s) = G(f(s)) = G(t)$ za neki funkciji F in G, potem je*

$$F'(s) = \frac{\dot{G}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}.$$

2. $$\mathbf{R}'(s) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}.$$

3. *Velja $\mathbf{R}'' \perp \mathbf{R}'$ in še več,*

$$\mathbf{R}'' = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^4} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} \cdot \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}|}.$$

Definicija 3.22. Količini

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

rečemo *fleksijska ukrivljenost* krivulje Γ v točki $\mathbf{r}$.

Velja torej

$$\mathbf{R}'' = \kappa\mathbf{N} \text{ in } \kappa = |\mathbf{R}''|.$$

Dokaz.

1. $\dot{G}(t) = F'(f(t))\dot{f}(t) = F'(s)|\dot{\mathbf{r}}(t)|$.
2. Uporabimo točko 1) na $G = \mathbf{r}$ in $F = \mathbf{R}$.
3. Velja

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}''(s) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{R}'(s) \\
=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}\right] \quad \text{(po točki 2)} \\
=& \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}\right] \quad \text{(po točki 1)} \\
=& \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}\left(\ddot{\mathbf{r}}|\dot{\mathbf{r}}| - \dot{\mathbf{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\mathbf{r}}|\right) \\
=& \frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}\left(\ddot{\mathbf{r}}|\dot{\mathbf{r}}| - \dot{\mathbf{r}}\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}\right) \\
=& \frac{|\dot{\mathbf{r}}|^2\ddot{\mathbf{r}} - \langle \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}\rangle \dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^4} \\
=& \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^4}.
\end{aligned}$$

Ker velja $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, je $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{a}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{a}|$, zato

$$\mathbf{R}''(s) = \frac{|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^4} \cdot \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}|} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} \cdot \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}|} = \kappa\mathbf{N}.$$

□

Izrek 3.23. *Naj bodo $\boldsymbol{\gamma}$, t_0, $\mathbf{v}_0$, δ, t_1 in t_2 definirani kot v Izreku 3.15. Tedaj:*

1. *Obstaja natanko ena ($\exists!$) krožnica $\mathcal{K}(t_0, t_1, t_2) \subset \mathbb{R}^3$, ki vsebuje točke $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$, $\boldsymbol{\gamma}(t_1)$ in $\boldsymbol{\gamma}(t_2)$.*
2. *Označimo s $S(t_0, t_1, t_2)$ središče te krožnice. Limita*

$$S(t_0) = \lim_{t_1, t_2 \to t_0} S(t_0, t_1, t_2)$$

obstaja.

3. *Točka $S(t_0)$ leži v pritisnjeni ravnini krivulje Γ v točki $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ in sicer na oddaljenosti $\rho := \frac{1}{\kappa}$ od točke $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$ in sicer v smeri glavne normale.*

Tega izreka ne bomo dokazovali.

Definicija 3.24. Krožnico s središčem v $S(t_0)$ in radijem $\frac{1}{\kappa}$, ki leži v pritisnjeni ravnini, imenujemo *pritisnjena krožnica*.

Zgled 3.25. Vzemimo parametrizacijo krožnice s polmerom $R > 0$ v xy ravnini: $\mathbf{r} = (R\cos t, R\sin t, 0)$. Hitro se lahko prepričamo, da velja $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = R$ in $|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)| = R^2$, zato

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \frac{1}{R}$$

in $\rho = R$. Res bi bilo nenavadno, če to ne bi bilo res, saj ne bi želeli definicije pritisnjene krožnice take, ki krožnici s polmerom R ne pritisne krožnice s polmerom R.

Sedaj se vprašajmo, kam kaže vektor $\mathbf{B}'$. Ker velja $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, lahko zapišemo

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T}' \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \mathbf{N}' = \kappa\mathbf{N} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \mathbf{N}' = \mathbf{T} \times \mathbf{N}'.$$

Torej velja $\mathbf{B}' \perp \mathbf{T}$. Vemo, da je $|\mathbf{B}| = 1$, zato

$$0 = (|\mathbf{B}|^2)' = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle' = 2\langle \mathbf{B}', \mathbf{B} \rangle,$$

torej velja tudi $\mathbf{B}' \perp \mathbf{B}$. Ker pa je $\mathbf{B}'$ pravokoten tako na $\mathbf{T}$, kot na $\mathbf{B}$, mora veljati $\mathbf{B}' \parallel \mathbf{N}$.

Definicija 3.26. Ker vemo $\mathbf{B}' \parallel \mathbf{N}$, lahko pišemo

$$\mathbf{B}' = -\omega \mathbf{N}.$$

Faktorju ω rečemo *torzijska ukrivljenost*.

Zgled 3.27. Spet vzemimo vijačnico podano z naravnim parametrom:

$$\mathbf{r}(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

Velja

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\rho}'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(-a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

in

$$\mathbf{T}' = \boldsymbol{\rho}''(s) = \frac{a}{a^2+b^2} \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0 \right).$$

Kar je v oklepajih prepoznamo kot vektor glavne normale, torej mora biti faktor pred oklepajem fleksijska ukrivljenost:

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \Longrightarrow \quad \rho = \frac{a^2+b^2}{a}.$$

Pazi na zapis: $\boldsymbol{\rho}$ je naravna parametrizacija, ρ pa je krivinski radij. Izračunajmo vektor binormale:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(b\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -b\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a \right)$$

in njen odvod

$$\mathbf{B}' = -\frac{b}{a^2+b^2} \left(-\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), 0 \right).$$

Na levi je spet vektor glavne normale, torej je sprednji faktor fleksijska ukrivljenost:

$$\omega = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Trditev 3.28. *Regularna $\mathcal{C}^2$ parametrizacija krivulje Γ je ravninska, natanko tedaj ko velja $\omega = 0$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Privzemimo, da Γ leži kar v ravnini $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Parametrizacija je

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0),$$

njena odvoda pa

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0)$$

in

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), 0).$$

Velja

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = (0, 0, \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})$$

in

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}(0, 0, \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) \in \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}.$$

Ker je $\mathbf{r}$ zvezna in dvakrat zvezno odvedljiva, je tudi $\mathbf{B}$ zvezen. To pomeni, da je bodisi $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ povsod ali $\mathbf{B} = (0, 0, -1)$ povsod. Iz tega sledi, da je $\mathbf{B}' = 0$ povsod, kar pa je lahko samo v primeru, če velja $\omega = 0$. Vzemimo poljubno ravninsko krivuljo in jo transformirajmo z ortogonalno transformacijo $A \in SO(3)$, tako da bo ležala v ravnini $z = 0$: $\mathbf{R} = A\mathbf{r}$. Ker se A ne spreminja s t, velja $\dot{\mathbf{R}} = A\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{R}} = A\ddot{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{R}} \times \ddot{\mathbf{R}} = A(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})$ in $|A\mathbf{n}| = |\mathbf{n}|$ za $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$. Vidimo torej, da se ukrivljenost z ortogonalno preslikavo ne spremeni. Če lahko krivuljo ortogonalno transformiramo na xy ravnino, ima torzijsko ukrivljenost 0.

($\Longleftarrow$) Če je $\omega = 0$, je $\mathbf{B}' = 0$ in je $\mathbf{B} = \text{const}$. To pomeni, da je pritisnjena ravnina na to krivuljo povsod ista, torej je krivulja ravninska. $\square$

Zgled 3.29. Imejmo graf funkcije ene spremenljivke $\Gamma = \{(x, f(x)); x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$. Parameter je x, odvod parametra pa $\dot{x} = 1$ in $\dot{y} = f'(x)$. Dobimo

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Zgled 3.30. Elipsa je podana kot

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ali pa parametrično

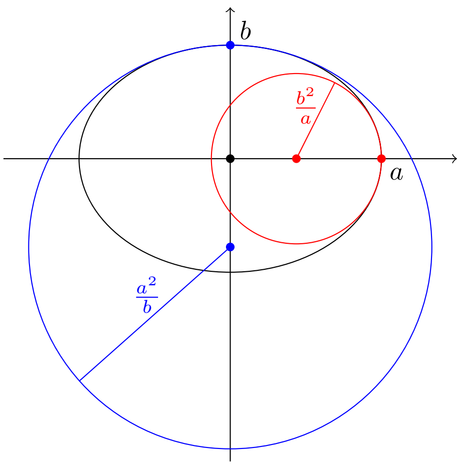
$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Fleksijska ukrivljenost (torzijske sploh ni) je enaka

$$\kappa = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}.$$

V dveh posebnih primerih je (glej sliko 3.1)

$$\rho(t = 0) = \frac{b^2}{a} \quad \rho(t = \pi/2) = \frac{a^2}{b}.$$



Slika 3.1: Skica pritisnjenih krogov v elipsi

Trditev 3.31. $\kappa = 0 \iff$ *krivulja je premica.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Če je $\kappa = 0$, potem $|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| = 0$, torej velja $\ddot{\mathbf{r}} \parallel \dot{\mathbf{r}}$ in zato lahko pišemo $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \alpha(t)\dot{\mathbf{r}}(t)$ za neko skalarno funkcijo $\alpha(t)$. Če zapišemo $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, velja $\ddot{r}_j = \alpha \dot{r}_j$ za $j \in \{1,2,3\}$. Zapišimo to zvezo kot $\frac{\ddot{r}}{\dot{r}} = \alpha$, pri čemer se nam ponuja ideja, da to zapišemo kot odvod logaritma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \dot{r}_j = \alpha.$$

Ta izraz integriramo:

$$\ln \dot{r}_j = \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \beta(t) + c_j,$$

pri čemer sta c_j nova konstanta in $\beta(t)$ nova skalarna funkcija. Izraz antilogaritmiramo in še enkrat integriramo:

$$r_j = \int_{t_0}^{t} e^{c_j + \beta(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = d_j \delta(t) + f_j,$$

pri čemer je $d_j = e^{c_j}$, f_j in $\delta(t)$ pa sta nova konstanta in skalarna funkcija. Ker vse našteto velja za $j \in \{1,2,3\}$, lahko pišemo $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ in $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ in dobimo $\mathbf{r}(t) = \mathbf{d}\delta(t) + \mathbf{f}$, kar je premica skozi $\mathbf{f}$ s smernim vektorjem $\mathbf{d}$.

($\Longleftarrow$) Če je $\mathbf{r}(t) = \mathbf{d}\delta(t) + \mathbf{f}$, je $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{d}\dot{\delta}(t)$ in $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{d}\ddot{\delta}(t)$. Torej sta $\dot{\mathbf{r}} \parallel \ddot{\mathbf{r}}$ in $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$ iz česar sledi $\kappa = 0$. □

Trditev 3.32. *Naj bo Γ regularna $\mathcal{C}^2$ krivulja v $\mathbb{R}^3$ in naj bo $\boldsymbol{\rho}$ v naravni parametrizaciji. Velja:*

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\rho}',$$

$$\mathbf{N} = \frac{\boldsymbol{\rho}''}{|\boldsymbol{\rho}''|}$$

in

$$\mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}''}{|\boldsymbol{\rho}''|}.$$

Dokaz. V poljubni parametrizaciji je $\mathbf{T} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$, $\mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}$ in $\mathbf{N} = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}|}$. Če je $\boldsymbol{\rho}$ naravna parametrizacija je $|\boldsymbol{\rho}'| = 1$ in $\mathbf{T} = \boldsymbol{\rho}'$. Zdaj odvajamo $|\boldsymbol{\rho}'|$ po naravnem parametru in dobimo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}' \rangle = 2\langle \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'' \rangle = 0$, od koder sledi $\boldsymbol{\rho}' \perp \boldsymbol{\rho}''$. Kar pomeni, da velja

$$|\boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}''| = \underbrace{|\boldsymbol{\rho}'|}_{1}\,|\boldsymbol{\rho}''| \implies \mathbf{B} = \frac{\boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}''}{|\boldsymbol{\rho}''|}.$$

Podobno naredimo, še za normalni vektor:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}''|}((\boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}'') \times \boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{|\boldsymbol{\rho}''|}(\underbrace{\langle \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}' \rangle}_{1}\boldsymbol{\rho}'' - \underbrace{\langle \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'' \rangle}_{0}\boldsymbol{\rho}') = \frac{\boldsymbol{\rho}''}{|\boldsymbol{\rho}''|}.$$

□

Trditev 3.33. *Naj bo $\mathbf{r}(t)$ regularna $\mathcal{C}^3$ parametrizacija krivulje Γ za katero je $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \neq 0$. Tedaj je torzijska ukrivljenost enaka:*

$$\omega = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2};$$

kjer je $(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}) = \langle \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}} \rangle$. Posebej, če je $\boldsymbol{\rho}(s)$ naravna parametrizacija je

$$\omega = \frac{(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'', \boldsymbol{\rho}''')}{|\boldsymbol{\rho}''|^2}.$$

Dokaz. Obravnavajmo le primer z naravno parametrizacijo, zato velja $\mathbf{B}' = -\omega\mathbf{N}$ in $\boldsymbol{\rho}'' = \kappa\mathbf{N}$, iz česar sledi $\kappa = |\boldsymbol{\rho}''|$. Ker je

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \boldsymbol{\rho}' \times \frac{\boldsymbol{\rho}''}{\kappa},$$

sledi

$$\kappa\mathbf{B} = \boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}''$$

Dobljeno odvajamo po s:

$$\underbrace{\boldsymbol{\rho}'' \times \boldsymbol{\rho}''}_{0} + \boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}''' = \kappa\mathbf{B}' + \kappa'\mathbf{B}.$$

Levo stran skalarno množimo z $\boldsymbol{\rho}''$, desno pa z $\kappa\mathbf{N}$ (kar seveda lahko naredimo, saj velja $\boldsymbol{\rho}'' = \kappa\mathbf{N}$). Dobimo:

$$(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}''', \boldsymbol{\rho}'') = \kappa^2\langle \mathbf{B}', \mathbf{N}\rangle + \kappa\kappa' \underbrace{\langle \mathbf{B}, \mathbf{N}\rangle}_{0} = -\omega\kappa^2 = -\omega|\boldsymbol{\rho}''|^2,$$

kjer smo uporabili $\mathbf{B}' = \omega\mathbf{N}$. Ko spremenimo vrstni red v mešanem produktu, spremenimo tudi predznak, zato velja $(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}'', \boldsymbol{\rho}''') = -(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}''', \boldsymbol{\rho}'') = \omega|\boldsymbol{\rho}''|^2$. □

Izrek 3.34 (Frenet-Serretove formule)**.** *V naravni parametrizaciji velja:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Prvi dve vrstici smo že dokazali:

$$\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N} \quad \text{in} \quad \mathbf{B}' = -\omega\mathbf{N}.$$

Dokazati moramo le še $\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \omega\mathbf{B}$. Ker je $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N}\rangle = 1$, velja $2\langle \mathbf{N}', \mathbf{N}\rangle = 0$, torej $\mathbf{N}' \perp \mathbf{N}$. Iz tega sledi, da mora biti $\mathbf{N}'$ linearna kombinacija vektorjev $\mathbf{T}$ in $\mathbf{B}$, saj $\{\mathbf{N}, \mathbf{B}, \mathbf{T}\}$ sestavljajo ortonormirano bazo. Sledi

$$\mathbf{N}' = \langle \mathbf{N}', \mathbf{T}\rangle\mathbf{T} + \langle \mathbf{N}', \mathbf{B}\rangle\mathbf{B}.$$

Vemo, da je $\langle \mathbf{N}, \mathbf{T}\rangle = 0$, zato po odvajanju dobimo $\langle \mathbf{N}', \mathbf{T}\rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{T}'\rangle = 0$. Zato

$$\langle \mathbf{N}', \mathbf{T}\rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{T}'\rangle = -\langle \mathbf{N}, \kappa\mathbf{N}\rangle = -\kappa.$$

Vemo, da je $\langle \mathbf{N}, \mathbf{B}\rangle = 0$, zato po odvajanju dobimo $\langle \mathbf{N}', \mathbf{B}\rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{B}'\rangle = 0$. Zato

$$\langle \mathbf{N}', \mathbf{B}\rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{B}'\rangle = -\langle \mathbf{N}, -\omega\mathbf{N}\rangle = \omega.$$

□

Ponovimo Frenet-Serretov trieder.

	ime	formula	v naravni parametrizaciji
$\mathbf{T}$	tangentni vektor	$\dfrac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}$	$\boldsymbol{\rho}'$
$\mathbf{N}$	vektor glavne normale	$\dfrac{(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}}{\|(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) \times \dot{\mathbf{r}}\|}$	$\dfrac{\boldsymbol{\rho}''}{\|\boldsymbol{\rho}''\|}$
$\mathbf{B}$	vektor binormale	$\dfrac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}$	$\dfrac{\boldsymbol{\rho}' \times \boldsymbol{\rho}''}{\|\boldsymbol{\rho}''\|}$

Tabela 3.1: Frenet-Serretov trieder v splošni in naravni parametrizaciji.

4 Ploskve v $\mathbb{R}^3$

Imejmo omejeno območje $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in funkcijo dveh spremenljivk $f : D \to \mathbb{R}$. Pričakujemo, da je graf te funkcije $\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D\}$ ploskev.

Definicija 4.1. Ploskev v $\mathbb{R}^3$ je podana s parametrizacijo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) : D \to \mathbb{R}^3$, kjer je D neko območje v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$ neka preslikava razreda vsaj $\mathcal{C}^1$. Zahtevamo še, da je $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$. V tem primeru pravimo, da je parametrizacija *regularna* . Pravimo, da sta u in v *krivočrtni koordinati* na ploskvi $M = \{\mathbf{r}(u, v); (u, v) \in D\}$.

Parcialni odvod $\mathbf{r}$ po u lahko označimo na naslednje načine: $\mathbf{r}_u$, $\dot{\mathbf{r}}_u$, $\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{r}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\partial_u \mathbf{r}$...

Naj bo $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$. Poglejmo si, kaj pomeni $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$. Matematično je to ekvivalentno

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Obravnavajmo primer, ko sta prvi dve komponenti tega vektorskega produkta enaki 0, tretja pa je neničelna, torej:

$$\begin{vmatrix} X_u & Y_u \\ X_v & Y_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

V okolici točke $\mathbf{r}(u, v)$ velja:

$$X(u + h, v + k) \approx X(u, v) + X_u(u, v)h + X_v(u, v)k$$
$$Y(u + h, v + k) \approx Y(u, v) + Y_u(u, v)h + Y_v(u, v)k$$

Ker znamo izračunati X in Y v poljubni točki, lahko zgornji enačbi pogledamo kot sistem 2 linearnih enačb z dvema neznankama h in k. Vemo, da bo imel sistem realno rešitev natanko tedaj, ko bo matrika sistema enačb neničelna, torej:

$$\begin{vmatrix} X_u(u, v) & Y_u(u, v) \\ X_v(u, v) & Y_v(u, v) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Neznanki h in k takrat lahko izrazimo z X in Y. V okolici točke $\mathbf{r}(u, v)$ je $Z = Z(u+h(X, Y), v+k(X, Y))$, se pravi, da je lokalno okoli točke $\mathbf{r}(u, v)$ koordinato Z možno izraziti z X, in Y. Pogoj $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ torej pomeni, da je mogoče ploskev lokalno predstaviti kot graf neke funkcije dveh spremenljivk.

4.1 Tangentna ravnina

V območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$ imejmo krivuljo $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, kjer je $t \in I$, I pa je interval. Krivuljo γ slikamo na ploskev $M = \{\mathbf{r}(u, v); (u, v) \in D\}$. Definirajmo $\mathbf{R}(t) := \mathbf{r}(\gamma(t)) = \mathbf{r}(\underbrace{\alpha(t)}_{u}, \underbrace{\beta(t)}_{v})$ Odvajamo po t

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{r}_u\,(\alpha(t), \beta(t))\,\dot{\alpha}(t) + \mathbf{r}_v\,(\alpha(t), \beta(t))\,\dot{\beta}(t)$$

in dobimo tangento na krivuljo $\mathbf{r} \circ \gamma$. Za poljubno krivuljo na ploskvi M, ki gre skozi točko $\mathbf{r}(u, v)$, bo tangenta na to krivuljo v točki $\mathbf{r}(u, v)$ oblike $a\,\mathbf{r}_u(u, v) + b\,\mathbf{r}_v(u, v)$ za neki števili a in b.

Definicija 4.2. *Tangentno ravnino* na ploskev M v točki $m = \mathbf{r}(u, v) \in M$ definiramo kot unijo vseh tangentnih vektorjev vseh krivulj v M skozi točko m, premaknjeno za m. Ta ravnina je torej enaka:

$$m + \underbrace{\mathrm{Lin}\{\mathbf{r}_u(u, v), \mathbf{r}_v(u, v)\}}_{\text{linearna ogrinjača}}$$

Normala tangentne ravnine mora biti pravokotna na $\mathbf{r}_u(u, v), \mathbf{r}_v(u, v)$, zato za normalo vzamemo $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)$. Enačba tangentne ravnine je tedaj:

$$\langle (x, y, z) - \mathbf{r}(u, v),\ \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\rangle = 0$$

Ploskve, podane kot graf funkcije

Poglejmo si poseben primer, ko je ploskev graf funkcije. Imejmo $f : D \to \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Ploskev je

$$M = \Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D\}.$$

Parametra sta x in y, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x)$$
$$\mathbf{r}_y = (0, 1, f_y)$$

Normala tangentne ravnine je

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1).$$

Zgled 4.3. Rotacijski paraboloid lahko predstavimo kot graf funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (-2x, -2y, 1)$$

Zanima nas enačba tangentne ravnine v točki $\mathbf{r}(1, 3) = (1, 3, 10)$. Normala na ravnino je $(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_v)(1, 3) = (-2, -6, 1)$. Enačba tangentne ravnine na dani rotacijski paraboloid v točki $\mathbf{r}(1, 3)$ je

$$\langle (x - 1, y - 3, z - 10),\ (-2, -6, 1)\rangle = 0$$

oziroma

$$-2x - 6y + z = -10.$$

Implicitno podane ploskve

Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija 3 spremenljivk. Ploskev definiramo kot nivojnico

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) = 0\}.$$

Dodamo še pogoj $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \neq 0$ (ekvivalenten pogoju $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ pri regularni parametrizaciji ploskve).

Poglejmo enačbo tangentne ravnine za implicitno podano ploskev. Imejmo funkcijo $F = F(u, v, w)$, neko točko na ploskvi $m \in M$ in neko krivuljo na ploskvi $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, ki poteka skozi točko m in leži na ploskvi M za vsak t. Vemo:

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

za vsak t. Odvajamo obe strani po t in dobimo

$$F_u(\mathbf{r}(t))\dot{x}(t) + F_v(\mathbf{r}(t))\dot{y}(t) + F_w(\mathbf{r}(t))\dot{z}(t) = 0,$$

kar lahko zapišemo kot

$$\langle \nabla F(\mathbf{r}(t)),\ \dot{\mathbf{r}}(t)\rangle = 0.$$

Recimo, da je naša točka $m = \mathbf{r}(t_0)$. Potem dobimo

$$\langle \nabla F(m),\ \dot{\mathbf{r}}(t_0)\rangle = 0,$$

kjer je $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ tangentni vektor krivulje, ki leži na ploskvi M, torej ta vektor leži v tangentni ravnini na ploskev M v točki m. Vektor $\nabla F(m)$ je nanj pravokoten (in ni odvisen od izbrane krivulje), torej je normalni vektor tangentne ravnine. Enačba tangentne ravnine na ploskev M v točki m je:

$$\langle (x, y, z) - \mathbf{r}(t_0),\ \nabla F(\mathbf{r}(t_0))\rangle = 0$$

Rotacijsko invariantne ploskve

Ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$ lahko dobimo tudi tako, da krivuljo Γ v xz-ravnini zavrtimo okoli z-osi. Naj bo krivulja Γ podana parametrično: $\Gamma = (x(t), 0, z(t))$ za $t \in I$, I je interval v $\mathbb{R}$. Krivuljo zavrtimo okoli z-osi (jo pomnožimo z leve z rotacijsko matriko):

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t)\cos\phi \\ x(t)\sin\phi \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

Za $(t, \phi) \in D = I \times [0, 2\pi)$ je $(x(t)\cos\phi, x(t)\sin\phi, z(t))$ parametrizacija ploskve M.

Zgled 4.4. Za **plašč valja** s polmerom osnovne ploskve a okoli z-osi zavrtimo premico $x = a$.

Parametrizacija premice: $(a, 0, t)$ za $t \in I \subset \mathbb{R}$

Parametrizacija plašča valja: $(a\cos\phi, a\sin\phi, t)$ za $t \in I, \phi \in [0, 2\pi)$

Zgled 4.5. Za **stožec** okoli z-osi zavrtimo premico $z = ax$ za nek $a \in \mathbb{R}$.

Parametrizacija premice: $(t, 0, at)$ za $t \in I \subset \mathbb{R}$

Parametrizacija plašča stožca: $(t\cos\phi, t\sin\phi, at)$ za $t \in I, \phi \in [0, 2\pi)$

Zgled 4.6. Za **sfero** s polmerom a okoli z-osi zavrtimo polovico krožnice s središčem v $(0, 0, 0)$.

Parametrizacija polovice krožnice: $(a\cos t, 0, a\sin t)$ za $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

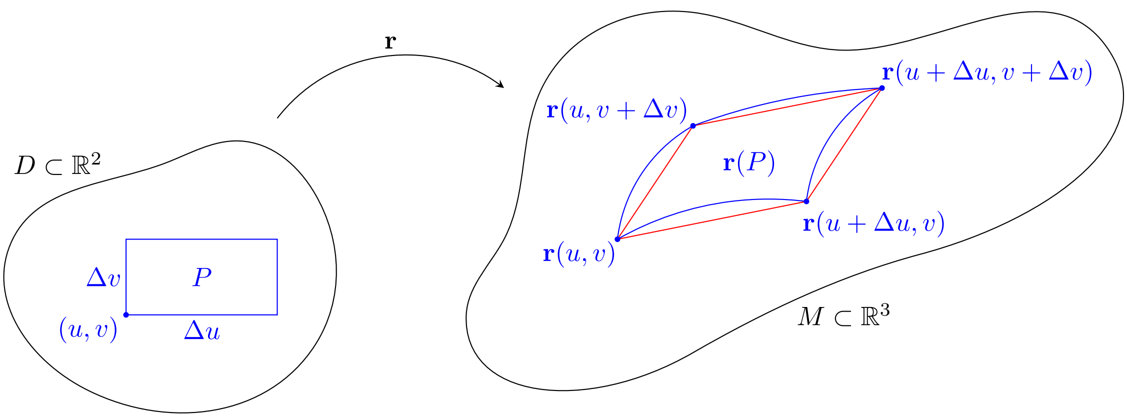
Parametrizacija sfere: $(\cos t\cos\phi, \cos t\sin\phi, \sin t)$ za $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \phi \in [0, 2\pi)$

Zgled 4.7. Za **torus** okoli z-osi zavrtimo krog s središčem v točki $(R, 0, 0)$ in polmerom a.

Parametrizacija kroga: $(R + a\cos t, 0, a\sin t)$ za $t \in [0, 2\pi)$

Parametrizacija torusa: $((R + a\cos t)\cos\phi, ((R + a\cos t)\sin\phi, a\sin t)$ za $t \in [0, 2\pi), \phi \in [0, 2\pi)$

4.2 Površina ploskve



Slika 4.1: Prikaz, kako se pravokotnik slika v paralelogram.

Vzemimo pravokotnik P v množici $D \subset \mathbb{R}^2$, s spodnjim levim kotom v (u, v), širino Δv in dolžino Δu (glej sliko 4.1). Ploščina $\mathbf{r}(P)$ je približno enaka ploščini paralelograma $\mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{r}(u+\Delta u, v)$ in $\mathbf{r}(u, v+\Delta v)$. Dolžina spodnje stranice je $\mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v)$, kar lahko po Lagrangevem izreku aproksimiramo z $\mathbf{r}_u(u + \xi\Delta u, v)\Delta u$ za nek $\xi \in (0, 1)$. Če je Δu majhen, lahko rečemo $\mathbf{r}_u(u + \xi\Delta u, v) \approx \mathbf{r}_u(u, v)$. Pri tem smo upoštevali, da je parametrizacija $\mathcal{C}^1$, torej da so odvodi zvezni. Stranici paralelograma sta približno enaki vektorjema $\mathbf{r}_u(u, v)\Delta u$ in $\mathbf{r}_v(u, v)\Delta v$. Ploščina paralelograma je zato približno enaka $|\mathbf{r}_u(u, v) \times$

$\mathbf{r}_v(u,v)|\Delta u \Delta v$. Ta ploščina pa je približno enaka površini območja $\mathbf{r}(P)$. Ta izpeljava ni točna, a nam da pravo intuicijo za površino ploskve.

Definicija 4.8. Površina ploskve M podane z regularno parametrizacijo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ je

$$P(M) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Velja

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{|\mathbf{r}_u|^2 |\mathbf{r}_v|^2 - \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle^2}.$$

Če označimo z $E = |\mathbf{r}_u|^2$, $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle$ in $G = |\mathbf{r}_v|^2$, dobimo

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{EG - F^2},$$

kar je pogosto lažje izračunati kot vektorski produkt.

Trditev 4.9. *Definicija za površino ploskve je dobra (torej je neodvisna od parametrizacije).*

Dokaz. Imejmo dve parametrizaciji $\mathbf{r} : D \to M$ in $\boldsymbol{\rho} : \Delta \to M$. Naj bo $\mathbf{\Phi}$ bijekcija razreda $\mathcal{C}^1$ med domenama $\mathbf{\Phi} : \Delta \to D$. Na Δ naj bosta koordinati x in y in naj bo $\mathbf{\Phi} = (U,V)$, kjer sta $U = U(x,y)$ in $V = V(x,y)$ funkciji dveh spremenljivk na Δ.

Velja $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} \circ \mathbf{\Phi}$, torej $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}(\mathbf{\Phi}) = \mathbf{r}(U(x,y), V(x,y))$. Imamo $\boldsymbol{\rho}_x = \mathbf{r}_u U_x + \mathbf{r}_v V_x$ in $\boldsymbol{\rho}_y = \mathbf{r}_u U_y + \mathbf{r}_v V_y$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_x \times \boldsymbol{\rho}_y &= U_x U_y \underbrace{(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_u)}_{0} + U_x V_y (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) + U_y V_x (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u) + V_x V_y \underbrace{(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_v)}_{0} \\
&= (U_x V_y - U_y V_x) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = \begin{vmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{vmatrix} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = \det(J\mathbf{\Phi}) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \\
&= (\det J\mathbf{\Phi}) \cdot [\mathbf{r}_u(U(x,y), V(x,y)) \times \mathbf{r}_v(U(x,y), V(x,y))] = (\det J\mathbf{\Phi}) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \circ (\mathbf{\Phi}(x,y))
\end{aligned}$$

Pike v zgornjem računu ne označujejo skalarnega produkta. V integral $P(M) = \iint_D (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ uvedemo novi spremenljivki preko preslikave $\mathbf{\Phi}$ in upoštevamo pravkar dobljeni rezultat:

$$P(M) = \iint_D (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \iint_\Delta |(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_u)(\mathbf{\Phi}(x,y))| |\det J\mathbf{\Phi}| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_\Delta |\boldsymbol{\rho}_x \times \boldsymbol{\rho}_y| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

□

Če je M graf funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $M = \Gamma_f = \{(x,y,f(x,y)); (x,y) \in D\}$, velja

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, f_x) \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y)$$

in

$$E = 1 + f_x^2 \quad G = 1 + f_y^2 \quad F = f_x f_y.$$

Dobimo

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2},$$

zato

$$P(\Gamma_f) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Zgled 4.10. Imamo rotacijski paraboloid podan kot $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ in naj bo $D = \mathcal{K}(0,1)$ (krog z radijem 1 s središčem v izhodišču). Velja:

$$P(\Gamma_f) = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{1 + r^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \pi \int_1^2 \sqrt{t} \, \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

4.3 Orientacija

Definicija 4.11. *Lokalna orientacija* gladke regularne krivulje brez samopresečišč v točki $\gamma \in \Gamma$ je podana z izbiro enotskega tangentnega vektorja v točki γ (imamo samo dve možnosti: $+$ ali $-$).
Globalna orientacija je podana z zvezno izbiro enotskega tangentnega vektorja za vsak $\gamma \in \Gamma$.

Opomba: (skoraj trditev, ampak ne bomo dokazovali) Vsaka regularna (povezana) krivulja Γ brez samopresečišč ima globalno orientacijo oz. natanko dve orientaciji. To lahko posplošimo na odsekoma gladke krivulje. Naj bo Γ unija krivulj $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$, ki se stikajo v krajiščih. Orientacija Γ je usklajena izbira orientacij Γ_i, kjer je končna točka Γ_i začetna točka Γ_{i+1}.

Definicija 4.12. *Lokalna orientacija* gladke regularne ploskve $M \subset \mathbb{R}^3$ v točki $m \in M$ je izbira enotske normale na M v točki m.
Globalna orientacija ploskve M je zvezna izbira lokalnih orientacij, to je zvezna izbira enotskih normal na M:
$$\mathbf{n} : M \to \mathcal{S}^2; \quad m \mapsto \mathbf{n}(m).$$

Če je M povezana, potem ima lahko največ dve orientaciji, $\mathbf{n}$ in $-\mathbf{n}$, ni pa nujno da orientacija sploh obstaja.

Zgled 4.13.

1. Kolobar (ali kak drug topološko homeomorfen primer, npr. plašč valja) očitno ima orientacijo, zato je *orientabilen*.
2. Möbiusov trak nima orientacije, zato je neorientabilen.

Inducirana orientacija

Ideja je, da orientacija ploskve določa orientacijo njenega roba. Ploskev ima dve vrsti točk:

- **notranje**, za katerih okolico obstaja lokalna parametrizacija kot bijekcija z enotskega kroga na ploskev: $B(0,1) \to M;\ 0 \mapsto m$ in
- **robne**, za katerih okolico obstaja lokalna parametrizacija z enotskega polkroga na ploskev: $B_+(0,1) = B(0,1) \cap \{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\} \to M;\ 0 \mapsto m$.

V obeh primerih je slika parametrizacije okolica točke m.

Opomba: (skoraj trditev, ampak ne bomo dokazovali) množica robnih točk je krivulja oziroma disjunktna unija krivulj.

Ideja je, da orientacija ploskve določa orientacijo robnih krivulj, tako da, če hodimo po robni krivulji v smeri inducirane orientacije na tisti strani kamor kaže normala, je ploskev na levi.

Definicija 4.14. Naj bo M orientabilna ploskev z robom ∂M. Za vsako točko $m \in \partial M$ naj bo $\boldsymbol{\mu}$ tisti enotski vektor iz tangentne ravnine $T_m M$, ki je pravokoten na $T_m \partial M$ (tangentno premico na rob ∂M v točki m) in kaže ven iz M, ter naj bo $\mathbf{n}$ enotski normalni vektor na M v točki m. Potem vektor $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\mu}$ določa lokalno orientacijo roba ∂M v točki m.

5 Temeljni diferencialni operatorji na skalarnih in vektorskih poljih

Definicija 5.1. Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. *Skalarno polje* na Ω je funkcija $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Vektorsko polje* na Ω je preslikava $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Označimo $(x, y, z) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, skalarno polje $u = f(x, y, z)$ in vektorsko polje $\mathbf{F}(x, y, z) = (U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z))$. Na $\mathbb{R}^3$ poznamo parcialne odvode po spremenljivkah x, y in z, ki jih lahko označimo kot $\partial_x f$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ali f_x. Simbol

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

imenujemo *nabla*.

Definicija 5.2. *Gradient* skalarnemu polju f priredi vektorsko polje ∇f na sledeč način

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y, f_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Definicija 5.3. *Divergenca* vektorskemu polju $\mathbf{F} = (U, V, W)$ priredi skalarno polje $\nabla \cdot \mathbf{F}$ na sledeč način

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \mathrm{div}(U, V, W) = U_x + V_y + W_z = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Definicija 5.4. *Rotor* vektorskemu polju $F = (U, V, W)$ priredi vektorsko polje $\nabla \times \mathbf{F}$ na sledeč način

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \mathrm{rot}(U, V, W) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & V & W \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Definicija 5.5. Če je V vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in endomorfizem $A : V \to V$ linearna preslikava, potem je njena *adjungirana preslikava* A^* določena z zahtevo

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, A^* w\rangle \text{ za } \forall v, w \in V.$$

Definicija 5.6. *Nosilec* funkcije f je

$$\mathrm{supp} f = \overline{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ f(x, y, z) \neq 0\}}.$$

Z besedami povedano je to zaprta množica vseh točk, ki jih f ne slika v 0. Črta nad množico označuje zaprtje.

Trditev 5.7. *Za zgornje diferencialne operatorje veljajo naslednje izjave:*

a) $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$, *oziroma* $\nabla \times (\nabla f) = 0$, *za* $\forall f \in \mathcal{C}^2$*;*

b) $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$, *oziroma* $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ *za* $\forall \mathbf{F} \in \mathcal{C}^2$*;*

c) $\mathrm{div} \circ \mathrm{grad} = \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ *se imenuje Laplacian, v fiziki se označi z* ∇^2*;*

d) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$*;*

e) $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$*;*

f) $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$*;*

g) $\nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f(\nabla \times \mathbf{F})$*;*

h) $\mathrm{div} = -\nabla^*$ *v smislu*

$$\int_\Omega \langle \nabla f, \mathbf{F} \rangle \,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \langle f, \nabla \cdot \mathbf{F} \rangle \,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega f \ \mathrm{div}\mathbf{F} \,\mathrm{d}\Omega$$

za f *in* $\mathbf{F}$ *s kompaktnim nosilcem v notranjosti* Ω*;*

i) $\mathrm{rot} = \mathrm{rot}^*$ *v smislu*

$$\int_\Omega \langle \nabla \times \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle \,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \langle \mathbf{F}, \nabla \times \mathbf{G} \rangle \,\mathrm{d}\Omega$$

za $\mathbf{F}$ *in* $\mathbf{G}$ *s kompaktnim nosilcem v notranjosti* Ω*.*

Dokaz.

a) $\nabla \times (\nabla f) = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = (0,0,0)$, pri čemer smo upoštevali, da vrstni red parcialnih odvodov ni pomemben.

b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = W_{yx} - V_{zx} + U_{zy} - W_{xy} + V_{xz} - U_{yz} = 0$, kjer smo spet uporabili zamenjavo vrstnega reda parcialnih odvodov.

c) Sledi direktno iz definicije.

d) – g) Naslednje štiri izjave so posplošena Leibnizova pravila za produkt odvoda. Dokaz za DN.

h) Ker je nosilec kompakten, lahko izven njega razširimo f in $\mathbf{F}$ kot ničelni preslikavi na $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Tako lahko Ω zapremo v veliko kocko $K = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$, na robu katere sta tako f kot tudi $\mathbf{F}$ enaka 0. Razpišimo skalarni produkt

$$\langle \nabla f, \mathbf{F} \rangle = f_x U + f_y V + f_z W.$$

Posvetimo se samo prvemu členu produkta ($f_x U$):

$$\int_\Omega f_x U \,\mathrm{d}V = \int_K f_x U \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} f_x U \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z \,\mathrm{d}y.$$

Integriramo po delih in upoštevamo, da sta f in $\mathbf{F}$ enaka nič na robu kocke:

$$\int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} \left(fU\Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} fU_x \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z \,\mathrm{d}y = -\iiint_K fU_x \,\mathrm{d}V = -\int_\Omega fU_x \,\mathrm{d}V.$$

Za ostala dva člena storimo podobno in na koncu združimo člene skupaj:

$$\int_\Omega \langle \nabla f, \mathbf{F} \rangle \,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega f(U_x + V_y + W_z) \,\mathrm{d}V = -\int_\Omega f \ \nabla \cdot \mathbf{F} \,\mathrm{d}\Omega.$$

i) Nismo dokazali.

□

5.1 Standardni diferencialni operatorji v poljubnih ortogonalnih koordinatah

Namesto kartezičnih nam lahko kdaj bolj koristijo kake druge (krivočrtne) koordinate. Želimo si pravilo za izračun operatorjev v teh koordinatah.

Označimo krivočrtne koordinate z $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ in kartezične z $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Nove koordinate $\boldsymbol{\xi}$ parametrizirajo $\mathbf{R}^3$, kartezične pa z njimi izražamo s pomočjo funkcije $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}).$$

Na primer v cilindričnih koordinatah imamo

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

Definirajmo tangentne vektorje na koordinatne krivulje:

$$\mathbf{r}_j \coloneqq \mathbf{r}_j(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_j}(\boldsymbol{\xi}).$$

Funkcije $\mathbf{r}_j$ so za $j = 1, 2, 3$ vektorska polja. Ortogonalnost koordinat pomeni, da so ti trije vektorji paroma pravokotni. Na primer za cilindrične koordinate velja:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0),$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0),$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1).$$

Očitno velja tudi $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r_2} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = 0$, torej so koordinate ortogonalne.

Potrebno je biti pazljiv na notacijo, namreč $\mathbf{x}$ označuje kartezične koordinate in x_1 označuje prvo od kartezičnih koordinat, ki se najpogosteje označi z x. Podobno $\mathbf{r}$ označuje preslikavo med krivočrtnimi in kartezičnimi koordinatami, $\mathbf{r_1}$ označuje odvod $\mathbf{r}$ po prvi krivočrtni koordinati ξ_1, ki se v cilindričnem in sferičnem koodrinatnem sistemu označi z r.

Definicija 5.8. *Laméjevi koeficienti* (nobene zveze z Laméjevimi koeficienti iz fizike trdne snovi) so definirani kot

$$H_j \coloneqq |\mathbf{r}_j| = \sqrt{\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_j}$$

in

$$H = H_1 H_2 H_3.$$

Definirajmo še

$$\boldsymbol{\eta}_j \coloneqq \frac{\mathbf{r}_j}{H_j},$$

ki so enotski tangentni vektorji na koordinatne krivulje.

Opomba: kot vidimo je H volumen kvadra, ki ga sestavljajo vektorji $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ in $\mathbf{r}_3$, kar pa je ob predpostavki, da so te vektorji med seboj paroma pravokotni, enako volumnu paralelepipeda, ki ga določajo (pravokoten paralelepiped je kvader). Tako je H enak Jacobijevi determinanti preslikave $\mathbf{r}$.

Naj bo $u : \Omega \to \mathbb{R}$ skalarno polje, podano glede na kartezične koordinate $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Glede na krivočrtne koordinate $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ se to polje izraža kot

$$U(\boldsymbol{\xi}) \coloneqq u(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})).$$

Sedaj želimo izraziti gradient u-ja po spremenljivkah $\mathbf{x}$ z odvodi U-ja po spremenljivkah ξ.

Trditev 5.9. *Za vsak ortogonalen $\boldsymbol{\xi}$ velja*

$$(\nabla_{\mathbf{x}} u) \circ \mathbf{r} = \left\langle \nabla_{\boldsymbol{\xi}} U, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1/H_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2/H_2 \\ \boldsymbol{\eta}_3/H_3 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{\partial U}{\partial \xi_1}\frac{\boldsymbol{\eta}_1}{H_1} + \frac{\partial U}{\partial \xi_2}\frac{\boldsymbol{\eta}_2}{H_2} + \frac{\partial U}{\partial \xi_3}\frac{\boldsymbol{\eta}_3}{H_3} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial \xi_j}\frac{\boldsymbol{\eta}_j}{H_j}.$$

Dokaz. Uporabimo verižno pravilo na $U = u \circ \mathbf{r}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial r_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial r_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial r_3}{\partial \xi_1}, \\
\frac{\partial U}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial r_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial r_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial r_3}{\partial \xi_2}, \\
\frac{\partial U}{\partial \xi_3} &= \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial r_1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial r_2}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial r_3}{\partial \xi_3}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da lahko vsako vrstico zapišemo kot

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_j}(\boldsymbol{\xi}) = \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_j}(\boldsymbol{\xi}) \right\rangle = H_j(\boldsymbol{\xi}) \langle \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})), \boldsymbol{\eta}_j(\boldsymbol{\xi}) \rangle$$

za $j = 1, 2, 3$. Ker je $\boldsymbol{\xi}$ ortogonalen in ker so $\boldsymbol{\eta}_j$ normirane, je $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$. Iz linearne algebre vemo, da če je $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortonormirana baza, potem lahko poljuben vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ razvijemo v tej bazi kot

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{3} \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}_j.$$

Sledi

$$(\nabla_{\mathbf{x}} u) \circ \mathbf{r} = \sum_{j=1}^{3} \langle \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})), \boldsymbol{\eta}_j(\boldsymbol{\xi}) \rangle \boldsymbol{\eta}_j(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{H_j}\frac{\partial U}{\partial \xi_j} \boldsymbol{\eta}_j(\xi) = \left\langle \nabla_{\boldsymbol{\xi}} U, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1/H_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2/H_2 \\ \boldsymbol{\eta}_3/H_3 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

□

Na ta način lahko izrazimo $\nabla_{\mathbf{x}} u$ glede na spremenljivke $\boldsymbol{\xi}$. Koordinate lahko spremenimo nazaj v kartezične, če funkcijo komponiramo z inverzom od $\mathbf{r}$. Namreč, preslikavo $\mathbf{r} : \boldsymbol{\xi} \to \mathbf{x}$ lahko vsaj lokalno obrnemo in dobimo $\mathbf{r}^{-1} = \mathbf{R} : \mathbf{x} \to \boldsymbol{\xi}$. Zgornji izrek lahko zato zapišemo tudi kot:

$$\nabla_{\mathbf{x}} u = \left\langle \nabla_{\boldsymbol{\xi}} U, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1/H_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2/H_2 \\ \boldsymbol{\eta}_3/H_3 \end{bmatrix} \right\rangle \circ \mathbf{R}.$$

Spet si za primer vzemimo cilindrične koordinate. Velja:

$$\mathbf{r}(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

in

$$\mathbf{R}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x) + k\pi, z).$$

Izrek 5.10. *V krivočrtnih koordinatah ξ, ki so ortogonalne, podane z zvezo $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})$, za skalarno polje u, ki določa $U = u \circ \mathbf{r}$, velja naslednja izjava za Laplaceov operator:*

$$(\Delta_x u) \circ \mathbf{r} = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{H}{H_j^2} \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \right).$$

Dokaz. Vaja ali pa glej datoteko na spletni učilnici. □

Zgled 5.11. Vzemimo spet cilindrične koordinate $\boldsymbol{\xi} = (r, \varphi, z)$ s preslikavo v kartezične koordinate $(x, y, z) = \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. Tangentni vektorji, Laméjevi koeficienti in enotski tangentni vektorji na koordinatne krivulje so:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), & H_1 &= 1, & \boldsymbol{\eta}_1 &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0);\\
\mathbf{r}_2(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0), & H_2 &= r, & \boldsymbol{\eta}_2 &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0);\\
\mathbf{r}_3(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1), & H_3 &= 1, & \boldsymbol{\eta}_3 &= (0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Velja $H = H_1H_2H_3 = r$, kar je enako kot Jacobijeva determinanta funkcije $\mathbf{r}$. Poglejmo si gradient, kjer vzamemo $U(r, \varphi, z) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. Računamo po Izreku 5.9:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{x}} u) \circ \mathbf{r} =& \frac{\partial U}{\partial r}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{1}{r}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) + \frac{\partial U}{\partial z}(0, 0, 1)\\
=& \left(\cos\varphi\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \sin\varphi\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Izračunajmo Laplacian po Izreku 5.10:

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\mathbf{x}} u) \circ \mathbf{r} =& \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)\\
=& \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Naj bo $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, torej je $U(r, \varphi, z) = r^2 + z^2$. Velja:

$$(\nabla_{\mathbf{x}} u)(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

in

$$(\nabla_{\mathbf{x}} u)(\mathbf{r}(r, \varphi, z)) = 2r(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + \frac{1}{3} \cdot 0 + 2z(0, 0, 1) = (2r\cos\varphi, 2r\sin\varphi, 2z),$$

kar vidimo, da je enako. (Še dobro; če ne bi bilo, bi bilo nekaj narobe z Izrekom 5.9.) Velja tudi:

$$(\Delta_{\mathbf{x}} u)(x, y, z) = 2 + 2 + 2 = 6$$

in

$$(\Delta_{\mathbf{x}} u)(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})) = \frac{1}{r} \cdot 2 \cdot 2r + 0 + 2 = 6.$$

Zgled 5.12. Vzemimo sedaj sferične koordinate $\boldsymbol{\xi} = (r, \varphi, \theta)$ s preslikavo v kartezične koordinate $(x, y, z) = \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$. Tangentni vektorji, Laméjevi koeficienti in enotski tangentni vektorji na koordinatne krivulje so:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), & H_1 &= 1, & \boldsymbol{\eta}_1 &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta);\\
\mathbf{r}_2(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0), & H_2 &= r\sin\theta, & \boldsymbol{\eta}_2 &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0);\\
\mathbf{r}_3(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta), & H_3 &= r, & \boldsymbol{\eta}_3 &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta).
\end{aligned}$$

Velja $H = H_1H_2H_3 = r^2\sin\theta$, kar je enako kot Jacobijeva determinanta funkcije $\mathbf{r}$. Lahko se hitro prepričamo, da res velja

$$\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{\eta}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_3 = \boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_3 = 0.$$

Poglejmo si gradient, kjer vzamemo $U(r, \varphi, \theta) = u(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$. Računamo po Izreku 5.9:

$$(\nabla_{\mathbf{x}} u) \circ \mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\boldsymbol{\eta}_1}{H_1} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\boldsymbol{\eta}_2}{H_2} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\boldsymbol{\eta}_3}{H_3}$$

$$= \frac{\partial U}{\partial r}(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) + \frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{1}{r}(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta).$$

Izračunajmo Laplacian po Izreku 5.10:

$$\begin{aligned}(\Delta_{\mathbf{x}} u)\circ\mathbf{r} =& \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\right] \\ =& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right).\end{aligned}$$

Naj bo $u = x^2 + y^2 + z^2$ in zato $U = r^2$. Velja:

$$(\nabla_{\mathbf{x}} u)\circ\mathbf{r} = 2r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = 2(x, y, z)$$

in

$$(\Delta_{\mathbf{x}} u)\circ\mathbf{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(2r^3) + 0 + 0 = 6.$$

Oba rezultata se ujemata z ugotovitvami iz kartezičnih koordinat.

Zgornje formule so uporabne, če je izražava polja u v krivočrtnih koordinatah zelo preprosta. Prav tako so določeni problemi taki, da zahtevajo določene koordinate in takrat želimo diferencialne operatorje izraziti v teh koordinatah.

Naredimo hitro ponovitev temeljnih diferencialnih operatorjev. Indeksi pri nablah so izpuščeni, saj so vedno mišljene tiste koordinate, v katerih sta definirana f ali $\mathbf{F}$. Zaradi preglednosti so gradienti in rotorji zapisani, kot da slikajo nazaj v iste koordinate v katerih sta definirana f in $\mathbf{F}$. Če želimo prehajati med koordinatami, uporabimo preslikavo $\mathbf{r}$ ali njen inverz.

Kartezične koordinate

Naj bo $f(x, y, z)$ skalarno polje in $\mathbf{F}(x, y, z) = (U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z))$ vektorsko polje. Velja $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ in:

Gradient: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$;

Divergenca: $\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$;

Rotor: $\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$;

Laplacian: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Cilindrične koordinate

Naj bo $f(r, \varphi, z)$ skalarno polje in $\mathbf{F}(r, \varphi, z) = (R(r, \varphi, z), \Phi(r, \varphi, z), Z(r, \varphi, z))$ vektorsko polje. Velja $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$ in:

Gradient: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$;

Divergenca: $\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rR)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{\partial Z}{\partial z}$;

Rotor: $\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial(r\Phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial\varphi}\right)$;

Laplacian: $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Sferične koordinate

Naj bo $f(r,\varphi,\theta)$ skalarno polje in $\mathbf{F}(r,\varphi,\theta) = (R(r,\varphi,\theta),\Phi(r,\varphi,\theta),\Theta(r,\varphi,\theta))$ vektorsko polje. Velja $\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ in:

Gradient: $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right);$$

Divergenca: $$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2R)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sin\varphi\Theta}{\partial\theta};$$

Rotor: $$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\sin\theta\Phi)}{\partial\theta}\right], \frac{1}{r}\left[\frac{\partial R}{\partial\theta} - \frac{\partial(r\Theta)}{\partial r}\right], \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\Phi)}{\partial r} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial R}{\partial\varphi}\right]\right);$$

Laplacian: $$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right).$$

6 Integracija po krivuljah in ploskvah v $\mathbb{R}^3$

6.1 Krivuljni integral

Naj bo $\mathbf{r}: I \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija neke krivulje Γ in naj bo $u: \Gamma \to \mathbb{R}$ skalarno polje na Γ.

Definicija 6.1. *Integral skalarnega polja* u na krivulji Γ definiramo kot

$$\int_\Gamma u \, \mathrm{d}s = \int_I u(\mathbf{r}(t)) |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Trditev 6.2. *Zgornja Definicija 6.1 je dobra (neodvisna od parametrizacije).*

Dokaz. Naj bosta I, J intervala ter $\mathbf{r}: I \to \mathbb{R}^3, \mathbf{R}: J \to \mathbb{R}^3$ parametrizaciji za krivuljo Γ. Parametrizaciji sta povezani z odvedljivo in injektivno preslikavo $\varphi: J \to I; \mathbf{R} = \mathbf{r} \circ \varphi$. Ker je $\varphi(s)$ injektivna in velja $\dot{\varphi}(s) \neq 0$, to pomeni da je $\dot{\varphi}(s)$ ali povsod negativna $\dot{\varphi}(s) < 0$ ali pozitivna $\dot{\varphi}(s) > 0$. Ta lastnost nam olajša delo pri absolutnih vrednosti v naslednjih integralih, namreč ni nam treba paziti, da se bo predznak $|\dot{\varphi}(s)|$ zamenjal. Kljub temu bi morali za rigorozen dokaz pogledati oba primera($\dot{\varphi}(s) < 0$ in $\dot{\varphi}(s) > 0$), a je to trivialno, ker se v nasprotnem primeru v integralih le obrnejo meje. Z uporabo verižnega pravila dobimo $\dot{\mathbf{R}}(s) = \dot{\mathbf{r}}(\varphi(s))\dot{\varphi}(s)$. Zdaj lahko zapišemo:

$$\int_J u(\mathbf{R}(s)) |\dot{\mathbf{R}}(s)| \, \mathrm{d}s = \int_J u(\mathbf{r}(\varphi(s))) |\dot{\mathbf{r}}(\varphi(s))| |\dot{\varphi}(s)| \, \mathrm{d}s = \int_I u(\mathbf{r}(t)) |\dot{\mathbf{r}}(t)| \, \mathrm{d}t,$$

kjer smo na koncu uvedli novo spremenljivko $\varphi(s) = t$ in $\mathrm{d}t = \dot{\varphi}(s) \, \mathrm{d}s$. □

Zgled 6.3. Izračunajmo težišče homogene polkrožne žice (Γ) s polmerom a. Iz simetrije ugotovimo, da velja $x_T = 0$, y_T pa izračunamo kot:

$$y_T = \frac{1}{m(\Gamma)} \int_\Gamma y \, \mathrm{d}m = \frac{1}{\pi a \rho} \int_\Gamma y\rho \, \mathrm{d}s.$$

Izberimo parametrizacijo za Γ kot $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a \sin t)$ za $t \in [0, \pi]$. Očitno je $|\dot{\mathbf{r}}(t)| = a$, zato

$$y_T = \frac{1}{\pi a} \int_0^\pi a \sin t a \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} a.$$

Integriranje vektorskih polj po krivuljah lahko definiramo na dva načina. Ena možnost je, da integriramo po vsaki komponenti posebej kot po skalarnem polju in kot rezultat dobimo vektor. Pogosteje pa nas zanima samo tangentni del vektorskega polja.

Definicija 6.4. Naj bo Γ gladka krivulja z regularno parametrizacijo $\mathbf{r}: I \to \Gamma$ in $\mathbf{F}: \Gamma \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = (U, V, W)$ zvezno vektorsko polje. *Integral vektorskega polja vzdolž* Γ je

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_I \langle \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle \, \mathrm{d}t.$$

Če zapišemo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, je $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ in $\mathrm{d}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}(t) \, \mathrm{d}t = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$. Dobimo:

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\Gamma U \, \mathrm{d}x + V \, \mathrm{d}y + W \, \mathrm{d}z = \int_I [U(\mathbf{r}(t))\dot{x}(t) + V(\mathbf{r}(t))\dot{y}(t) + W(\mathbf{r}(t))\dot{z}(t)] \, \mathrm{d}t.$$

Trditev 6.5. *Če v Definiciji 6.4* $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ *nadomestimo parametrizacijo* $\mathbf{r}$ *z neko drugo regularno parametrizacijo* $\mathbf{R}$*, potem je novi integral* $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{R}$*:*

- *enak prvotnemu, če* $\mathbf{r}$ *in* $\mathbf{R}$ *določata isto orientacijo* Γ*;*
- *nasprotno enak prejšnjemu, če* $\mathbf{r}$ *in* $\mathbf{R}$ *določata nasprotno orientacijo* Γ*.*

Dokaz. Dokaz je zelo podoben dokazu Trditve 6.2, zato je prepuščen kot vaja bralcu. $\square$

Zgled 6.6. Izračunajmo

$$I = \int_\Gamma x\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z,$$

kjer je parametrizacija krivulje dana kot $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ za $t \in [0,1]$. Velja $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 2t, 3t^2)$ in $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, x+z, z^2)$.

$$I = \int_0^1 (t \cdot 1 + (t+t^3)\cdot 2t + t^6 \cdot 3t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{5} + 3\frac{1}{9} = \frac{19}{10}.$$

Zgled 6.7. Izračunajmo integral

$$I = \int_\Gamma (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y,$$

kjer je Γ odsekoma ravna krivulja od $(0,0)$ prek $(1,0)$ in $(0,1)$ do $(0,0)$. Vektorsko polje je $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - y^2, -2xy)$. Γ lahko zapišemo kot unijo treh gladkih krivulj $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$:

$$\Gamma_1 = (t, 0),\ \ t \in [0,1],$$
$$\Gamma_2 = (1-t, t),\ \ t \in [0,1],$$
$$\Gamma_3 = (0, 1-t),\ \ t \in [0,1].$$

Dobimo

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 [-((1-t)^2 - t^2) - 2t(1-t)]\,\mathrm{d}t + \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0 = 0.$$

Definicija 6.8. Vektorsko polje $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, kjer je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ odprta množica, je *potencialno*, če obstaja skalarno polje $u : \Omega \to \mathbb{R}$, da je $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u = \nabla u$. Funkcijo u imenujemo *potencial* polja $\mathbf{F}$.

Trditev 6.9. *Naj bo Γ regularna krivulja med točkama $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$ in naj bo $\mathbf{F} = \nabla u$ potencialno vektorsko polje. Potem je*

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = u(\mathbf{B}) - u(\mathbf{A}).$$

Ta trditev je v eni dimenziji ekvivalentna osnovnemu izreku analize. Omenimo še, da ob tem spoznanju rezultat iz Zgleda 6.7 ni tako presenetljiv, saj je polje po katerem smo integrirali gradient funkcije $u(x,y) = x^3/3 - xy^2$.

Dokaz. Naj bo $I = [t_1, t_2]$ interval na katerem je definirana krivulja Γ s parametrizacijo $\mathbf{r}$, tako da velja $\mathbf{r}(t_1) = A$ in $\mathbf{r}(t_2) = B$. Imamo:

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_I \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \nabla u(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_I [u_x(\mathbf{r}(t))\dot{x}(t) + u_y(\mathbf{r}(t))\dot{y}(t) + u_z(\mathbf{r}(t))\dot{z}(t)]\,\mathrm{d}t = \int_I \frac{\mathrm{d}u(\mathbf{r}(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = u(\mathbf{r}(t))\Big|_{t_1}^{t_2} = u(B) - u(A).$$

V predzadnjem koraku smo uporabili verižno pravilo v obratni smeri in potem uporabili osnovni izrek analize. $\square$

Trditev 6.10. *Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ povezana odprta množica in $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ neko zvezno vektorsko polje. Naslednje trditve so ekvivalentne.*

1. *Polje $\mathbf{F}$ je potencialno.*
2. *Integral $\mathbf{F}$ po poljubni sklenjeni krivulji je enak nič.*
3. *Za $A, B \in \Omega$ je integral polja $\mathbf{F}$ neodvisen od izbire poti Γ v Ω od A do B.*

Dokaz.

(1) $\implies$ (2) Naj bo Γ sklenjena krivulja in $A \in \Gamma$ začetna in končna točka. Potem je po prejšnji Trditvi 6.9

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = u(A) - u(A) = 0.$$

(2) $\implies$ (3) Naj bosta Γ_1 in Γ_2 različni krivulji, ki imata začetno točko v A in končno točko v B. Ti dve krivulji lahko sestavimo v skupno krivuljo Γ, tako da najprej potujemo po Γ_1 od A do B, nato pa po Γ_2 od B do A. Torej $\Gamma = \Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_2}$. Velja:

$$0 = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\overline{\Gamma_2}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Pri tem smo uporabili 6.5 in spremenili predznak za spremembo orientacije krivulje Γ_2. Sledi

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

(3) $\implies$ (1) Spomnimo se prejšnje trditve: če je $\mathbf{F} = \nabla u$ in Γ pot od A do B, je $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = u(B) - u(A)$. Recimo, da fiksiramo točko A in definiramo funkcijo

$$u(B) = u(A) + \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$

pri čemer je $u(A)$ konstanta. Če je $\mathbf{F} = \nabla(u)$, je tudi $\nabla(u + C) = \mathbf{F}$, za katerokoli konstanto $C \in \mathbb{R}$. Z drugimi besedami, gradient je določen do aditivne konstante natančno, zato lahko rečemo $u(A) = 0$. Tako za točko $T = (x, y, z)$ definiramo

$$u(T) = \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$

kjer je Γ poljubna pot od A do T znotraj Ω. Po predpostavki je ta integral dobro definiran, torej je neodvisen od izbire poti Γ. Pokazali bomo, da velja $\nabla u = \mathbf{F}$, oziroma $(u_x, u_y, u_z) = \mathbf{F} = (U, V, W)$. Dokazali bomo samo za prvo komponento, za ostale je dokaz analogen.

Najprej si poglejmo definicijo parcialnega odvoda u po spremenljivki x:

$$u_x = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u(x+h, y, z) - u(x, y, z)) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\right),$$

kjer je Γ_1 pot od A od (x, y, z) in Γ_2 poljubna pot od A do $(x+h, y, z)$. Ker je Γ_2 lahko poljubna, jo lahko zapišemo kot $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, kjer je Γ_3 daljica od (x, y, z) do $(x + h, y, z)$. To lahko parametriziramo kot $\mathbf{r}(t) = (x + ht, y, z)$, $t \in [0, 1]$. Velja še $\dot{\mathbf{r}}(t) = (h, 0, 0)$. Integral po krivulji Γ_1 skoraj v celoti izniči integral po Γ_2, ostane samo še integral po Γ_3:

$$u(x + h, y, z) - u(x, y, z) = \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 U(x + th, y, z)h\,\mathrm{d}t.$$

Tako je

$$u_x(x, y, z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 U(x + th, y, z)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 U(x, y, z)\,\mathrm{d}t = U(x, y, z).$$

V drugem koraku smo uporabili dejstvo, da je U zvezna, torej je tudi integral zvezen, torej je limita kar enaka funkcijski vrednosti. $\square$

Zgled 6.11. Delec z maso m se giblje vzdolž poti γ po površju Zemlje. Položaj delca označimo z $\mathbf{r}$, pri čemer je izhodišče v središču Zemlje. Na delec deluje gravitacijska sila

$$\mathbf{F}_g = -GMm\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3},$$

kjer je M masa Zemlje in $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$. Vedeti želimo, ali je $\mathbf{F}_g$ potencialno polje, torej ali obstaja tako skalarno potencialno polje u, da bo veljalo $\mathbf{F}_g = \nabla u$. Ker je $\mathbf{F}_g$ odvisen samo od r, bo tudi u odvisen samo od r. Iščemo torej tak u, da bo veljalo

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{GMm}{r^2}.$$

Uganemo rezultat

$$u = \frac{GMm}{r}$$

in lahko preverimo, da res velja $\mathbf{F}_g = \nabla(GMm/r)$, torej je $\mathbf{F}_g$ res potencialno. Delo, ki ga sila opravi pri gibanju po poti γ od $\gamma(0)$ do $\gamma(1)$ je

$$A = \int_\gamma \mathbf{F}_g \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\gamma \nabla\left(\frac{GMm}{r}\right) \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{GMm}{r_1} - \frac{GMm}{r_0},$$

kjer sta $r_1 = |\mathbf{r}(1)|$ in $r_0 = |\mathbf{r}(0)|$. Na površju Zemlje velja $r_1 \doteq r_0$ oziroma $r_1 = r_0 + \Delta r$:

$$A = \frac{GMm\Delta r}{r_0(r_0 + \Delta r)}.$$

Upoštevamo, da je $\Delta r \ll r_0$, zato je $r_1 = r_0 + \Delta r \doteq r_0 = R$, čemur rečemo srednji polmer Zemlje ($R = 6371\,\mathrm{km}$).

$$A = -\frac{GMm}{R^2}\Delta r = gm\Delta r,$$

kar nam je pa že zelo poznano iz fizike (g je v tem primeru negativen, ker kaže proti izhodišču).

Izrek 6.12. *Delo rezultante vseh sil, ki delujejo na delec, je enako spremembi kinetične energije. Ker je celotna energija enaka vsoti kinetične in potencialne energije, je delo enako negativni spremembi potencialne energije $A = -\Delta U = U(r_0) - U(r_1)$.*

Pri tem je U nek fizikalni potencial, na primer gravitacijski: $U(r) = -u(r) = -GMm/r$. Iz formule vidimo, da je $U(r)$ enako delu, ki ga moramo opraviti, da prinesemo točkast objekt z maso m iz neskončnosti do točke $\mathbf{r}$. To teorijo lahko uporabimo tudi pri delovanju gravitacije Sonca na planete.

Pri fiziki se ta celoten postopek naredi samo z enim krajšim razmislekom. Velja

$$\mathbf{F} = -\nabla U,$$

kjer je $\mathbf{F}$ potencialno polje in U primeren potencial. Minus je zaradi tega, ker sila kaže v smeri manjšanja potenciala, gradient pa v smeri večanja. S tem se pride do enakih zaključkov kot z zgornjim, bolj matematično obarvanim postopkom.

Vprašajmo se naslednje: ali lahko z neposrednim računom preverimo, če je polje $\mathbf{F}$ potencialno? Vemo, da velja $\nabla \times \nabla u = 0$, za vsako dvakrat odvedljivo skalarno polje u, torej potencialno polje $\mathbf{F}$ zagotovo implicira $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Na žalost pa ne moremo govoriti o ekvivalenci. To demonstrira naslednji zgled.

Zgled 6.13. Na dvodimenzionalnem zgledu pokažimo, da $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ne pomeni nujno, da je polje $\mathbf{F}$ potencialno, vendar pa da za potencialno polje $\mathbf{F}$ zagotovo velja $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

Naj bo $\mathbf{F} = (U, V, 0)$ vektorsko polje. Velja $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, V_x - U_y)$. Če je $\mathbf{F}$ potencialno, torej obstaja tak $u \in \mathcal{C}^2$, da je $\mathbf{F} = \nabla u$, potem je $V_x - U_y = (u_x)_y - (u_y)_x = 0$, zato je $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

Poglejmo si polje $\mathbf{F} = (U, V, 0)$, kjer je $U = \frac{-y}{x^2+y^2}$ in $V = \frac{x}{x^2+y^2}$. Velja $V_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ in $U_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Torej $V_x - U_y = 0$ in posledično $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Pokažimo, da $\mathbf{F}$ ni potencialno. Po Trditvi 6.10 je dovolj dokazati, da integral tega polja po neki sklenjeni poti ni enak nič. Nekam sumljiva se nam zdi točka $(0, 0)$, kjer $\mathbf{F}$ ni definiran, zato se nam morda splača integrirati po krivulji, ki obkroži izhodišče, na primer po enotski krožnici v xy ravnini: $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, za $t \in [0, 2\pi]$. Velja $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t)$ in

$$\oint_{\partial\mathcal{K}(0,1)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t}, \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t}, 0\right) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi \neq 0.$$

Kot vidimo, polje $\mathbf{F}$ ni potencialno.

Problem nastane takrat, ko ima območje Ω, na katerem je $\mathbf{F}$ definiran, luknje. V zgornjem primeru je bilo definicijsko območje $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Integral je obkrožil to singularnost.

Definicija 6.14. Območje $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je *zvezdasto*, če obstaja taka točka A_0 s krajevnim vektorjem $\mathbf{w}_0$, da za poljubno točko $A \in \Omega$ daljica med A_0 in A celotna leži v Ω.

Če A predstavimo z vektorjem $\mathbf{w}$, je daljica enaka

$$A_0A = \{(1-t)\mathbf{w}_0 + t\mathbf{w};\ t \in [0,1]\}.$$

Temu rečemo tudi konveksna kombinacija vektorjev $\mathbf{w}$ in $\mathbf{w}_0$.

Vsaka konveksna množica je zvezdasta, saj daljica med poljubnima dvema točkama leži v celoti v tej množici, torej za A_0 lahko izberemo poljubno točko.

Izrek 6.15. *Naj bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ zvezdasto območje (povezana odprta množica) in naj bo $\mathbf{F}$ zvezno odvedljivo vektorsko polje na Ω. Če je $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, potem je $\mathbf{F}$ potencialno.*

Dokaz. Ker je Ω zvezdasta, obstaja A_0, da za vsak $A \in \Omega$ daljica med A_0 in A leži v Ω. Definirati želimo potencial $u : \Omega \to \mathbb{R}$ za $\mathbf{F}$, da bo veljalo $\nabla u = \mathbf{F}$. Za poljuben $A \in \Omega$ bomo definirali u v točki A kot integral polja $\mathbf{F}$ po daljici od A_0 do A. Naj bo $\mathbf{w}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ krajevni vektor točke A_0 in $\mathbf{w} = (x, y, z)$ krajevni vektor točke A. Izberemo parametrizacijo daljice $\mathbf{r}(t) = \mathbf{w}_0 + t(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)$ za $t \in [0,1]$, pri čemer velja še $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Naj bo

$$u(A) = u(x,y,z) = \int_{A_0A} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Trdimo, da je u res potencial $\mathbf{F}$ oziroma

$$\nabla u(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) \right).$$

Posvetimo se samo prvi komponenti. Najprej preverimo, da je u sploh odvedljiv. To pomeni, da mora biti integrand zgornjega integrala odvedljiv. Vidimo, da res je, saj je $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1$, $\mathbf{r}$ pa je tudi odvedljiv. Predstavljali si bomo, da je $\mathbf{F}$ odvisen od koordinat ξ, η in ζ, ki so po vrsti komponente krivulje $\mathbf{r}$. Torej

$\mathbf{F}(\xi,\eta,\zeta)=(U(\xi,\eta,\zeta),V(\xi,\eta,\zeta),W(\xi,\eta,\zeta))$, kjer je $\xi=r_1=x_0+t(x-x_0)$ in podobno za η in ζ. Velja:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot(\mathbf{w}-\mathbf{w}_0)\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[U(\xi,\eta,\zeta)(x-x_0)+V(\xi,\eta,\zeta)(y-y_0)+W(\xi,\eta,\zeta)(z-z_0)\right]\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \Bigg[\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial r_1(t)}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial r_2(t)}{\partial x}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{\partial r_3(t)}{\partial x}}_{0}\right)(x-x_0)+U(\mathbf{r}(t))\frac{\partial(x-x_0)}{\partial x}\\
&\quad+\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\frac{\partial r_1(t)}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial V}{\partial \eta}\frac{\partial r_2(t)}{\partial x}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial r_3(t)}{\partial x}}_{0}\right)(y-y_0)+V(\mathbf{r}(t))\underbrace{\frac{\partial(y-y_0)}{\partial x}}_{0}\\
&\quad+\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\frac{\partial r_1(t)}{\partial x}+\underbrace{\frac{\partial W}{\partial \eta}\frac{\partial r_2(t)}{\partial x}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial W}{\partial \zeta}\frac{\partial r_3(t)}{\partial x}}_{0}\right)(z-z_0)+W(\mathbf{r}(t))\underbrace{\frac{\partial(z-z_0)}{\partial x}}_{0}\Bigg]\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1\left[\frac{\partial U}{\partial \xi}t(x-x_0)+\frac{\partial V}{\partial \xi}t(y-y_0)+\frac{\partial W}{\partial \xi}t(z-z_0)+U\right]\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Upoštevamo še, da velja $\nabla\times\mathbf{F}=0$, torej $W_\xi=U_\zeta$ in $V_\xi=U_\eta$. Nadaljujemo z izpeljavo:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\left[\frac{\partial U}{\partial \xi}t(x-x_0)+\frac{\partial U}{\partial \eta}t(y-y_0)+\frac{\partial U}{\partial \zeta}t(z-z_0)+U\right]\,\mathrm{d}t\\
=&\int_0^1\left[t\frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial \xi}\dot r_1(t)+t\frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial \eta}\dot r_2(t)+t\frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial \zeta}\dot r_3(t)+U(\mathbf{r}(t))\right]\,\mathrm{d}t\\
=&\int_0^1\left[t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\mathbf{r}(t))+U(\mathbf{r}(t))\right]\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(tU(\mathbf{r}(t))\right)\,\mathrm{d}t\\
=&U(\mathbf{r}(1))=U(\mathbf{w})=U(x,y,z).
\end{aligned}$$

S tem smo dokazali, da velja $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)=U(x,y,z)$. Analogno lahko pokažemo še, da velja $\frac{\partial u}{\partial y}=V$ in $\frac{\partial u}{\partial z}=W$, torej res velja $\nabla u=\mathbf{F}$. □

6.2 Ploskovni integral

Definicija 6.16. Naj bo $M\subset\mathbb{R}^n$ neka regularna ploskev in $f:M\to\mathbb{R}$ zvezno skalarno polje. *Ploskovni integral* skalarnega polja f po ploskvi M je

$$\int_M f\,\mathrm{d}S=\int_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kjer je $\mathbf{r}:D\to M$ poljubna regularna parametrizacija za M.

Če je $f=1$, ta integral predstavlja površino ploskve, $\mathrm{d}S$ pa diferencial površine.

Trditev 6.17. *Zgornja Definicija 6.16 je dobra (torej neodvisna od parametrizacije $\mathbf{r}$).*

Dokaz. Dokaz je analogen dokazu Trditve 4.9, zato je namenjen kot vaja bralcu. □

Zgled 6.18. Naj bo M zgornja polovica homogene sfere v $\mathbb{R}^3$ z radijem a. Izračunajmo težišče $T=$

(x_T, y_T, z_T). Iz simetrije takoj sledi, da je $x_T = y_T = 0$. Označimo z ρ površinsko gostoto. Imamo:

$$z_T = \frac{1}{m(M)} \int_M z \, \mathrm{d}m = \frac{1}{2\pi a^2 \rho} \int_M z\rho \, \mathrm{d}S = \frac{1}{2\pi a^2} \int_M z \, \mathrm{d}S,$$

kjer je $2\pi a^2 \rho$ masa polsfere. Polsfero parametriziramo s sferičnimi koordinatami: $\mathbf{r}(u, v) = (a\cos\varphi \sin\theta, a\sin\varphi\sin\theta, a\cos\theta)$ kjer je $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$. Vrednost $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ je kar enaka Jacobijevi determinanti za sferične koordinate. Velja:

$$z_T = \frac{1}{2\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} a\cos\theta a^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = a \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{a}{2}.$$

Definicija 6.19. Naj bo M ploskev z orientacijo $\mathbf{N}$. *Ploskovni integral zveznega vektorskega polja* $\mathbf{F} : M \to \mathbb{R}^3$ je definiran s predpisom:

$$\iint_M \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_M \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, \mathrm{d}S.$$

Predznak integrala je odvisen od izbire smeri orientacije.

Če je $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) : D \to M$ neka regularna parametrizacija za M, lahko vzamemo

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

in sledi

$$\int_M \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Integral ni odvisen od parametrizacije.

6.3 Gaussov in Stokesov izrek

Vzemimo za motivacijo osnovni izrek matematične analize, ki pravi

$$\int_a^b f'(x) \, \mathrm{d}x = f(b) - f(a) \approx \oint_{\partial[a,b]} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Zadnji korak je nekoliko nenavaden, saj integriramo funkcijo f samo v dveh točkah, vendar se tudi tak integral da rigorozno definirati (na primer z Diracovo mero). Integral na intervalu smo torej preoblikovali v integral po robu tega intervala. Želeli bi si nekaj podobnega, vendar v višjih dimenzijah.

Izrek 6.20 (Gaussov izrek)**.** *Naj bo Ω odprta omejena množica v $\mathbb{R}^3$ z (odsekoma) gladkim robom (torej je $\partial\Omega$ odsekoma gladka ploskev z orientacijo $\mathbf{N}$, ki kaže ven iz Ω – imenuje se zunanja normala). Naj bo $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1$ vektorsko polje v okolici $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$. Tedaj je*

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V.$$

Dokaz. Kar sledi ni popoln dokaz, ampak samo za območja Ω, ki jih lahko zapišemo kot območje med dvema grafoma za vse tri koordinate. Pišimo $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$, torej $\nabla \cdot \mathbf{F} = X_x + Y_y + Z_z$. Označimo z $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ zunanjo enotsko normalo na $\partial\Omega$. Dokazati želimo, da velja

$$\oiint_{\partial\Omega} (XN_1 + YN_2 + ZN_3) \, \mathrm{d}S = \iiint_\Omega (X_x + Y_y + Z_z) \, \mathrm{d}V.$$

Označimo levo stran tega izraza z LS in desno stran z DS. Dovolj je dokazati samo eno komponento, recimo zadnjo: $\oiint_{\partial\Omega} ZN_3 \, \mathrm{d}S = \iiint_\Omega Z_z \, \mathrm{d}V$. Formulirajmo Ω kot $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y) \in D, f(x, y) < z < g(x, y)\}$ za dve funkciji $f, g : D \to \mathbb{R}$.

$$\mathrm{LS}_z = \oiint_{\partial\Omega} ZN_3 \, \mathrm{d}S = \left(\iint_{\Gamma_f} ZN_3 \, \mathrm{d}S + \iint_{\Gamma_g} ZN_3 \, \mathrm{d}S + \iint_{\text{navp. del}} ZN_3 \, \mathrm{d}S \right).$$

Tretji člen je enak nič, saj normala navpičnega dela leži v ravnini xy, torej je njena z komponenta enaka 0. Parametriziramo graf Γ_f kot $\mathbf{r} = (x, y, f(x, y))$ in $(x, y) \in D$. Imamo $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1)$, torej je

$$\iint_{\Gamma_f} ZN_3 \, \mathrm{d}S = \iint_D Z(x, y, f(x, y)) \frac{(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)_z}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

pri čemer je $(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)_z = -1$ (z komponenta vektorskega produkta) za f in 1 za g. Velja:

$$\mathrm{LS}_z = \iint_D [Z(x, y, g(x, y)) - Z(x, y, f(x, y))] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Imamo še:

$$\mathrm{DS}_z = \iiint_\Omega Z_z \, \mathrm{d}V = \iint_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} Z_z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_D (Z(x, y, g(x, y)) - Z(x, y, f(x, y))) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \mathrm{LS}_z.$$

□

Zgled 6.21. Naj bo $\Omega = \mathcal{K}(0, 1)$ enotska krogla v $\mathbb{R}^3$. Označimo $\mathbf{F} = (x, y, z) = \mathrm{id}$. Izračunamo

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V = 3V(\Omega)) = 4\pi.$$

Zgled 6.22. Naj bo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$, kar je plašč stožca, in naj bo $\mathbf{F} = (y^2, z^3, x^2)$. Izračunajmo integral

$$I = \iint_M \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Velja $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Če želimo uporabiti Gaussov izrek, vzamemo za Ω tako telo v $\mathbb{R}^3$, za katero velja, da je M del $\partial\Omega$. Za nas je tak Ω cel stožec. Naj bo K njegova zgornja ploskev orientirana navzven. Tedaj je $\partial\Omega = M \cup K$. Velja

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_M \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_K \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V = 0.$$

Iz tega sledi, da je

$$\iint_M \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\iint_K \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\iint_K \mathbf{F} \cdot (0, 0, 1) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r \cos\varphi)^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Posledica 6.23. *Operator divergence je neodvisen od izbire ortonormirane baze v* $\mathbb{R}^3$.

Dokaz. Če je $\mathbf{F} = (U, V, W)$ vektorsko polje, ki je definirano v okolici točke $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$, je

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_0) = (\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z})(\mathbf{r}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \nabla \cdot \mathbf{F} \rangle_{\mathcal{K}^3(\mathbf{r}_0, \varepsilon)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{V(\mathcal{K}^3(\mathbf{r}_0, \varepsilon))} \iiint_{\mathcal{K}^3} \nabla \cdot \mathbf{F} \, \mathrm{d}V = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{c\varepsilon^3} \iint_{\mathcal{S}^2(\mathbf{r}_0, \varepsilon)} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S},$$

kar je neodvisno od izbire koordinatnega sistema. □

Izrek 6.24 (Greenova formula)**.** *Predpostavimo sledeče:*

- $D \subset \mathbb{R}^2$ *z (odsekoma) gladkim robom (∂D je končna unija odsekoma gladkih krivulj, orientirana skladno z normalo $(0, 0, +1)$ na D);*
- $\mathbf{F} = (X, Y)$ *je vektorsko polje iz $\mathcal{C}^1$ na okolici $\overline{D}$.*

Tedaj je:

$$\oint_{\partial D} X \, \mathrm{d}x + Y \, \mathrm{d}y = \iint_D (Y_x - X_y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Dokaz. (Bolj komentar kot eksakten dokaz). Greenovo formulo lahko razumemo kot reformulacijo dvodimenzionalne oblike Gaussovega izreka

$$\oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} \, \mathrm{d}s = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{G} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Če bi imeli $\mathbf{T}$ (tangento) namesto $\mathbf{N}$ (normale), bi bila leva stran izraza integral $\mathbf{G}$ po krivulji ∂D. Zato poiščemo polje $\mathbf{H}$, za katero velja $\mathbf{H} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}$. Ker je tangenta pravokotna na normalo, velja $\mathbf{T} = R\mathbf{N}$, pri čemer je

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

rotacijska matrika za $\pi/2$ v $\mathbb{R}^2$. Torej velja $\mathbf{N} = R^{-1}\mathbf{T}$ in $\mathbf{G} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{G} \cdot (R^{-1}\mathbf{T}) = (R\mathbf{G}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{T}$. Sledi

$$\oint_{\partial D} \mathbf{G} \cdot \mathbf{N} \, \mathrm{d}s = \oint_{\partial D} \mathbf{H} \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}s = \oint_{\partial D} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\partial D} (-V \, \mathrm{d}x + U \, \mathrm{d}y).$$

Pri tem smo označili $\mathbf{G} = (U, V)$, iz česar sledi $\mathbf{H} = (-V, U)$. Hkrati je

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{G} \, \mathrm{d}S = \iint_D (U_x + V_y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Za $(U, V) = (Y, -X)$ sledi Greenova formula. □

Izrek 6.25 (*Stokesov izrek*)**.** *Predpostavimo sledeče:*

- $M \subset \mathbb{R}^3$ *omejena (odsekoma) gladka orientirana ploskev z (odsekoma) gladkim robom (∂M je končna unija (odsekoma) gladkih krivulj, ki so orientirane skladno z M);*
- $\mathbf{F}$ *vektorsko polje iz $\mathcal{C}^1$, definirano v okolici $\overline{M}$.*

Tedaj je

$$\oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Dokaz. (Skica dokaza) Gledamo primer, ko je M graf funkcije $\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y));\ (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$. Pišimo še $\mathbf{F} = (X, Y, Z)$, kjer so $X, Y, Z : M \to \mathbb{R}$ funkcije v $\mathcal{C}^1$. Imamo

$$\oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\partial M} X \, \mathrm{d}x + Y \, \mathrm{d}y + Z \, \mathrm{d}z = \oint_{\partial M} X(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}x + Y(\mathbf{r}) \, \mathrm{d}y + Z(\mathbf{r})[f_x \, \mathrm{d}x + f_y \, \mathrm{d}y].$$

Pri tem je parametrizacija za ∂M podana z zožitvijo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$ na ∂D. Zgornji izraz lahko prepišemo v obliko

$$\oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\partial D} (X(\mathbf{r}) + Z(\mathbf{r})f_x) \, \mathrm{d}x + (Y(\mathbf{r}) + Z(\mathbf{r})f_y) \, \mathrm{d}y.$$

Funkcije X, Y in Z so vse funkcije treh spremenljivk u, v in w. Na tem izrazu zdaj uporabimo Greenovo formulo:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_D \Bigg\{ & \left[Y_u(\mathbf{r}) \frac{\partial x}{\partial x} + Y_v(\mathbf{r}) \frac{\partial y}{\partial x} + Y_w(\mathbf{r}) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right. \\ & \left. + \left(Z_u(\mathbf{r}) \frac{\partial x}{\partial x} + Z_v(\mathbf{r}) \frac{\partial y}{\partial x} + Z_w(\mathbf{r}) \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) f_y + Z(\frac{\partial f_y}{\partial x}) \right] \\ & - \left[X_u(\mathbf{r}) \frac{\partial x}{\partial y} + X_v(\mathbf{r}) \frac{\partial y}{\partial y} + X_w(\mathbf{r}) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right. \\ & \left. + \left(Z_u(\mathbf{r}) \frac{\partial x}{\partial y} + Z_v(\mathbf{r}) \frac{\partial y}{\partial y} + Z_w(\mathbf{r}) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) f_x + Z(\frac{\partial f_x}{\partial y}) \right] \Bigg\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = I. \end{aligned}$$

Upoštevamo, da velja $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y$ in $f_{xy} = f_{yx}$. Dobimo:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \iint_D [(-f_x)(Z_v - Y_w) + (-f_y)(X_w - Z_u) + (Y_u - X_v)] \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})) \cdot (-f_x, -f_y, 1) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.
\end{aligned}$$

□

Opomba: tudi rotor je neodvisen od izbire ortonormirane baze v $\mathbb{R}^3$. Dokaže se s pomočjo Stokesovega izreka tako, da se pokaže, da je $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$ neodvisen od izbire ortonormirane baze za vsak $\mathbf{n}$.

Zgled 6.26. Naj bo M zgornja polovica enotske sfere v $\mathbb{R}^3$, torej graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Za $\mathbf{F}(x, y, z) = (3yz, -xz, xy)$ izračunajmo

$$I = \iint_M (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

- Izračunajmo direktno. Velja $\nabla \times \mathbf{F} = (2x, 2y, -4z)$. Imamo

$$I = \iint_M (2x, 2y, -4z) \cdot (x, y, z) \,\mathrm{d}S = \iint_M (2x^2 + 2y^2 - 4z^2) \,\mathrm{d}S =$$

$$= 6 \iint_M (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}S - 4 \iint_M (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}S = 6 \iint_M (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}S - 4 \cdot 2\pi =$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (r \cos\theta)^2 r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi - 8\pi = 12\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta - 8\pi = 8\pi - 8\pi = 0.$$

- Izračunajmo s pomočjo Stokesovega izreka:

$$I = \oint_{\partial M} (3yz, -xz, xy) \cdot (\dot{r}_x, \dot{r}_y, \dot{r}_z) \,\mathrm{d}s = \oint_{\partial M} (0, 0, xy) \cdot (\dot{r}_x, \dot{r}_y, 0) \,\mathrm{d}s = 0.$$

Spomnimo: če je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, u zvezna realna funkcija, definirana na okolici točke $\mathbf{v}$, in $\mathbf{a} \in \mathcal{S}^3(0, 1)$ enotski vektor, je *smerni odvod* funkcije u v točki $\mathbf{v}$ in v smeri $\mathbf{a}$ definiran kot

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{u(\mathbf{v} + h\mathbf{a}) - u(\mathbf{v})}{h},$$

če limita obstaja. Velja tudi

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{a}} = \nabla u \cdot \mathbf{a}.$$

Izrek 6.27 (*Greenovi identiteti*)**.** *Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ odprta množica z odsekoma gladkim robom in u, v skalarni polji razreda $\mathcal{C}^2$ na neki odprti okolici zaprtja $\overline{\Omega}$.*
Prva Greenova identiteta:

$$\oiint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \,\mathrm{d}S = \iiint_\Omega (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) \,\mathrm{d}V.$$

Druga Greenova identiteta:

$$\oiint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \mathrm{d}S = \iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \,\mathrm{d}V,$$

kjer je $\mathbf{n}$ enotska zunanja normala na $\partial\Omega$.

Dokaz. Prvo dokažemo tako, da vzamemo $\mathbf{F} = u\nabla v$ in uporabimo Gaussovo formulo:

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \,\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) \,\mathrm{d}V.$$

Po drugi strani pa je

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oiint_{\partial\Omega} (u\nabla v \cdot \mathbf{n}) \,\mathrm{d}S = \oiint_{\partial\Omega} u(\nabla v \cdot \mathbf{n}) \,\mathrm{d}S = \oiint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \,\mathrm{d}S.$$

Druga identiteta sledi iz prve z zamenjavo vlog u in v ter odštevanjem. □

Posledica 6.28. *Če je $v = 1$, velja*

$$\oiint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \Delta u \,\mathrm{d}V.$$

7 Navadne diferencialne enačbe

Diferencialne enačbe so naloge/enačbe, v katerih nastopajo odvodi iskane funkcije. Če je $F = F(v, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ neka funkcija $n + 2$ spremenljivk in je odvisna od u_n, potem je

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

diferencialna enačba n-tega reda.

Zgled 7.1.

- $y' = 3 \sin y + x^5$ je diferencialna enačba 1. reda,
- $y'^6 + yy''' = -8 \log |x|$ je diferencialna enačba 3. reda. Lahko jo zapišemo kot $F(v, u_0, u_1, u_2, u_3) = u_1^6 + u_0 u_3 + 8 \log |v| = 0$, kjer seveda velja $v = x$, $u_0 = y$, $u_1 = y'$, $u_2 = y''$ in $u_3 = y'''$.

Pri obravnavi diferencialnih enačb se bomo spraševali naslednja vprašanja.

- Ali rešitev obstaja?
- Kje je definirana?
- Ali je enolična?
- Ali jo znamo zapisati?
- Kakšne so lastnosti rešitve?

Enačbe prvega reda delimo na dve vrsti:

- Eksplicitno podane: $y' = f(x, y)$,
- Implicitno podane: $F(x, y, y') = 0$.

Zgled 7.2.

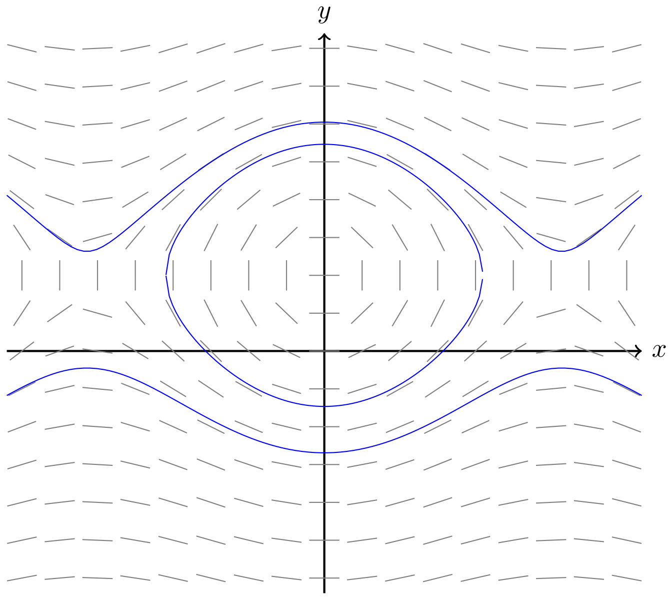
- $y' = f(x)$. Takšne enačbe smo obširno spoznali v prvem letniku in zanje poznamo vse odgovore na zgornja vprašanja. Rešitev je
$$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- $y'' = f(x)$. To lahko prevedemo na zgornjo enačbo:
$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C = g(x).$$
Nova enačba je $y' = g(x)$, ki pa jo spet znamo rešiti:
$$y(x) = \int_{x_1}^{x} g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + D = \int_{x_1}^{x} \int_{x_0}^{\zeta} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\zeta + Cx + D.$$
Opazimo, da ima rešitev dva parametra C in D.
- $y' = y$. To diferencialno enačbo tudi lahko preoblikujemo v zgornjo, namreč $(\ln |y|)' = 1$, iz česar sledi
$$y(x) = De^x$$
za $D \in \mathbb{R}$.

Slutimo, da je število parametrov enako redu diferencialne enačbe. Pogosto poleg osnovne enačbe zahtevamo še začetne/robne pogoje:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Taki nalogi rečemo *Cauchyjev problem (CP)*.

Če imamo diferencialno enačbo prvega reda podano eksplicitno, lahko narišemo *polje smeri*. To je koordinatni sistem, ki ima v točkah narisane kratke črtice z naklonom $f(x, y)$, kar je ravno odvod iskane funkcije $y(x)$. S tem si lahko vizualno predstavljamo rešitev enačbe, saj nam jo prikazuje smer črtic. Primer polja smeri je na sliki 7.1.



Slika 7.1: Primer polja smeri za diferencialno enačbo $y' = \sin x/(1-y)$. Zgornja krivulja predstavlja rešitev z začetno vrednostjo $y(0) = 1 + \sqrt{41/10}$, spodnja pa rešitev z začetno vrednostjo $y(0) = 1 - 3/\sqrt{2}$. Srednja rešitev je sestavljena iz dveh funkcij z začetnima vrednostma $y(0) = 1 \pm \sqrt{3}$.

Eulerjeva metoda

Imejmo Cauchyjevo nalogo $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Iščemo $y : I \to \mathbb{R}$, kjer je I nek interval v okolici x_0. Privzemimo, da je funkcija f definirana na $J \times \mathbb{R}$. Izberimo $x \in J$. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ razdelimo interval $[x, x_0]$ (oziroma $[x_0, x]$) na n enakih delov (rečemo, da naredimo mrežo velikosti $h = (x - x_0)/n$). Označimo $x_j = x_0 + jh$. Če je h majhen (n velik), potem je na $[x_0, x_1]$ funkcija y, ki naj reši Cauchyev problem, približno enaka svoji tangenti:

$$Y - y_0 = y'(x_0)(X - x_0).$$

Na ta način dobimo približek za $y_1 = y(x_1)$, torej je

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

S postopkom nadaljujemo na $[x_1, x_2]$, tako do gledamo nov Cauchyjev problem $y' = f(x, y)$ in $y(x_1) = y_1$. Dobimo rekurzivni formuli:

$$x_j = x_{j-1} + h$$

in

$$y_j = y_{j-1} + hf(x_{j-1}, y_{j-1}),$$

za $j = 1, ..., n$. Ker je $x_n = x$, je y_n približek za $y(x)$. Na koncu pošljemo $h \to 0$ oziroma $n \to \infty$, če se to da. Temu postopku rečemo *Eulerjeva metoda*.

Zgled 7.3. Naj bo $y' = y$ in $y(0) = 1$. Sledi $x_j = jh$, $y_0 = 1$ in $y_1 = y_0 + hy_0 = 1 + h$. Če računamo naprej po Eulerjevi metodi, dobimo $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = (h+1)^2$. Z indukcijo se lahko pokaže, da velja $y_j = (1+h)^j$. Končni rezultat bo

$$y_n = (1+h)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

V limiti $n \to \infty$ dobimo $y = e^x$, kar je natanko to, kar smo dobili, ko smo enačbo rešili neposredno.

7.1 Diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami

Diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami so vse enačbe, ki jih lahko zapišemo v obliki:

$$y'(x) = \frac{P(x)}{Q(y)}$$

za neki funkciji P in Q. Tako enačbo lahko preoblikujemo v obliko

$$y'Q(y) = P(x),$$

kar je ekvivalentno izrazu

$$\int Q(y)\,\mathrm{d}y = \int P(x)\,\mathrm{d}x,$$

kar je tudi način za iskanje rešitev take enačbe. Označimo levo stran z $F(y)$ in desno z $G(x)$. Če odvajamo po x, iz $F(y) = G(x)$ dobimo $F'(y)y' = G'(x)$, kar je $Q(y)y' = P(x)$. Seveda ni nujno, da so vsi integrali elementarni.

Zgled 7.4.

- $y' = y$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x,$$
$$\ln|y| + c_1 = x + c_2,$$
$$y = De^x, \quad D \in \mathbb{R}.$$

- Imejmo enačbo $y' = 3y^{2/3}$, z začetnim pogojem $y(0) = 0$. Funkcije $y^{2/3}$ ne smemo razumeti kot $|y|^{2/3}$. Pišimo $z = y^{1/3}$. Tedaj je $y = z^3$ za nek $z = z(x) \geq 0$. Velja $y' = 3z^2z'$ in $3y^{2/3} = 3z^2$. Iz tega dobimo enačbo $z^2(z' - 1) = 0$. Bodisi je $z = 0$ ali $z' = 1$ in $z = x + c$, kjer je $c = 0$ zaradi začetnega pogoja. Netrivialna rešitev za CP je torej $y(x) = \max\{x^3, 0\}$. Ta primer demonstrira, da lahko dobimo različne rešitve za različne interpretacije začetnih funkcij. Če bi si funkcijo $y^{2/3}$ interpretirali kot $|y|^{2/3}$, bi dobili rešitev $y(x) = x^3$ za $x \in \mathbb{R}$. Skupno pa so tako štiri veljavne rešitve: 0, x^3, $\max\{x^3, 0\}$ in $\min\{x^3, 0\}$.

7.2 Linearne diferencialne enačbe

Definicija 7.5. *Linearna diferencialna enačba (LDE)* prvega reda je enačba oblike

$$y' + py = q, \tag{7.1}$$

kjer sta p in q dani integrabilni funkciji, y pa iščemo.

Trditev 7.6. *Rešitve 7.1 so afin prostor: če je y_0 neka (katerakoli) rešitev in je R prostor vseh rešitev, je $R - y_0 = \{y - y_0; y \in R\}$ linearen vektorski prostor.*

Dokaz. Označimo $Ly \coloneqq y' + py$. Rešujemo enačbo oblike $Ly = q$. Vzemimo y_1 in y_2 iz $R - y_0$. Trdimo, da je $y_1 + y_2 \in R - y_0$ in $\lambda y_1 \in R - y_0$ za vse $\lambda \in \mathbb{R}$, ker je vektorski prostor določen z zaprtostjo za seštevanje in množenje s skalarjem. Z drugimi besedami, trdimo, da $y_0 + y_1 + y_2$ reši Enačbo 7.1. Imamo

$$L(y_0 + y_1 + y_2) = L(y_1 + y_0) + L(y_2 + y_0) - L(y_0) = q + q - q = q.$$

Pri tem smo upoštevali, da je operator L linearen. Podobno dokažemo , da je $\lambda y_1 \in R - y_0$. □

Opazimo, da so $R - Y_0$ ravno rešitve enačbe $Ly = 0$.

Posledica 7.7. *Prostor R vseh rešitev za 7.1 lahko zapišemo kot*

$$R = y_0 + \{h;\ Lh = 0\}.$$

V tem primeru imenujemo y_0 partikularna rešitev, množico v oklepaju pa rešitev pripadajoče homogene enačbe.

Reševanje: razmislimo, kako bi rešili enačbo oblike $y' + py = q$. Najprej poskusimo rešiti pripadajočo homogeno enačbo $y' + py = 0$, ki ima ločljive spremenljivke. Dobimo

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)' = -p(x),$$

$$y(x) = De^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi} \quad D \in \mathbb{R}.$$

Poskusimo sedaj rešiti $Ly = q$ s pomočjo *variacije parametrov*. To pomeni, da si bomo konstanto D predstavljali kot funkcijo $D(x)$ in pogledali, če nam to pomaga rešiti celo enačbo. Označimo še $\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi = P(x)$ in imamo

$$y(x) = D(x)e^{-P(x)}.$$

Poglejmo si odvod te funkcije:

$$y' = D'e^{-P} + De^{-P}(-P') = (D' - pD)e^{-P}.$$

Vstavimo v Enačbo 7.1:

$$q = y' + py = (D' - pD)e^{-P} + pDe^{-P} = D'e^{-P}.$$

Ugotovili smo, da je $D' = qe^{P}$. Končna rešitev je

Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe prvega reda

Rešitev enačbe $y' + py = q$:

$$y(x) = e^{-P(x)}\left(\int_{x_0}^{x} q(s)e^{P(s)}\,\mathrm{d}s + C\right),$$

kjer sta

$$P(x) := \int_{x_0}^{x} p(\xi)\,\mathrm{d}\xi \text{ in } C \in \mathbb{R}.$$

To, da se lahko rešitev za kakšen tip diferencialne enačbe zapiše eksplicitno, se zgodi izjemno redko, zato so te enačbe izredno uporabne. Še več – ne samo da nam ta enačba da rešitev, ampak nam da *vse možne* rešitve (za to poskrbi konstanta C v rešitvi), tako da smo lahko prepričani, da na ta način nismo zgrešili nobene.

Obstaja pa še en, bolj intuitiven način za izpeljavo te formule. Kaj, če bi lahko zapisali $p = g'/g$ in $q = h/g$ za neki funkciji g in h? Dobili bi

$$y' + \frac{g'}{g}y = \frac{h}{g}$$

oziroma

$$gy' + g'y = h$$

Pri tem pa lahko uporabimo Leibnizovo pravilo za produkt odvoda:

$$(gy)' = h.$$

Rešitev te enačbe znamo izračunati:

$$y = \frac{\int h\,\mathrm{d}x}{g}.$$

Iz definicije g dobimo

$$g = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

in

$$h = qg.$$

7.3 Bernoullijeva diferencialna enačba

Bernoullijeva diferencialna enačba je enačba oblike

$$y' + py = qy^\alpha,$$

kjer sta p in q dani integrabilni funkciji. Za $\alpha \in \{0, 1\}$ je to linearna diferencialna enačba, zato privzamemo, da $\alpha \notin \{0, 1\}$. Delimo z y^α in vpeljemo novo spremenljivko $z = y^{1-\alpha}$:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + pz = q.$$

Ta enačba je linearna, zato jo znamo rešiti.

7.4 Homogene nelinearne diferencialne enačbe

Definicija 7.8. Naj bo $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Pravimo, da je funkcija **F** *homogena reda* α, če za vsak par $x, y \in \mathbb{R}$ in za vsak $t > 0$ velja

$$F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y).$$

Posledično je F določena z zožitvijo na enotsko sfero. Primeri homogenih funkcij so polinomi z enakimi potencami, na primer $x^2y + y^3$.

Definicija 7.9. *Homogena diferencialna enačba* je enačba oblike

$$y' = f(x, y), \tag{7.2}$$

kjer je f homogena funkcija reda 0, torej $f(x, y) = f(1, y/x)$, če $x \neq 0$.

Reševanje: vpeljemo $z = y/x$ oziroma $y = zx$. Sledi $y' = z + xz'$, zato lahko 7.2 zapišemo kot

$$xz' = f(1, z) - z$$

oziroma

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{f(1, z) - z} = \ln|x|.$$

Zgled 7.10. Rešimo enačbo

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Dobimo $f(1, z) = \frac{1+z}{1-z}$ in

$$\ln|x| = \int \frac{\mathrm{d}z}{\frac{1+z}{1-z} - z} = \arctan(z) - \ln\sqrt{1+z^2} + C.$$

To lahko zapišemo kot

$$\arctan z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + C,$$

kar se v polarnih koordinatah izraža kot

$$r = De^\varphi.$$

To je eksponentna spirala. Ker funkcija ni definirana za $x = y$, je rešitev sestavljena iz odprtih intervalov $(\pi/4, 5\pi/4) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ker ima vsak interval svojo konstanto za spiralo.

7.5 Riccatijeva diferencialna enačba

Riccatijeva diferencialna enačba je enačba oblike

$$y' = ay^2 + by + c,$$

kjer so a, b in c podane integrabilne funkcije. Če je $a = 0$ imamo LDE, če je $c = 0$ imamo Bernoullijevo enačbo.

Reševanje: če poznamo (uganemo) eno rešitev y_1, potem lahko splošno rešitev dobimo s substitucijo $y = z + y_1$:

$$z' + y_1' = az^2 + 2azy_1 + ay_1^2 + bz + by_1 + c.$$

Ker je y_1 rešitev, velja $y_1' = ay_1^2 + by_1 + c$, zato lahko pišemo

$$z' = az^2 + (b + 2ay_1)z,$$

kar pa je Bernoullijeva enačba, ki jo znamo rešiti. Sistematičen način, da najdemo y_1, pa ne obstaja.

7.6 Prvi integral in eksaktna enačba

Definicija 7.11. *Prvi integral* diferencialne enačbe $F(x, y, y') = 0$ je takšna funkcija $u = u(x, y)$, da za vsako rešitev $y(x)$ velja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x, y(x)) = 0,$$

oziroma $u(x, y(x)) = C$, za neki $C \in \mathbb{R}$. Seveda pa je C lahko odvisen od y.

Tedaj je graf $\{(x, y(x);\ x \in I)\}$ rešitve y vsebovan v nivojnici $\{u = C\}$ funkcije u. Enačba $u(x, y) = C$ je impliciten opis rešitve $F = 0$.

Zgled 7.12. $y' = y/x$ ima rešitev $x^2 + y^2 = C$, zato je prvi integral funkcija $u(x, y) = x^2 + y^2$. $y' = y$ ima rešitev $y = Ce^x$, zato je prvi integral $u(x, y) = ye^{-x}$.

Poglejmo si, kako najdemo prvi integral za $y' = f(x, y)$. Naj bo $u = u(a, b)$. Odvajajmo $u(x, y) = C$ po x. Dobimo:

$$u_a(x, y) + u_b(x, y)y' = 0$$

Enačbo $y' = f(x, y)$ želimo zapisati kot $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, kjer je polje (P, Q) potencialno, torej $(P, Q) = \nabla u$ za nek u. Tak u bo potem prvi integral.

Potreben pogoj, da tak u obstaja, je, da velja $P_y = Q_x$. Drugače pa to lahko povemo kot

$$\langle (P, Q), (1, y') \rangle = 0.$$

Vektor (P, Q) je smer gradienta u, vektor $(1, y')$ pa je smer tangente na graf y, kar je smer nivojnice grafa u. Vemo pa, da velja $\nabla u \perp \{u = C\}$.

Definicija 7.13. Enačbi

$$P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = 0,$$

kjer je $P_y = Q_x$, pravimo *eksaktna*.

Zgornjo izjavo lahko formuliramo tudi na tak način: če je $P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = 0$ eksaktna, potem je njena rešitev (idealno) podana z $u(x, y) = C$, kjer je u potencialno polje polja (P, Q).

Zgled 7.14. Rešujemo enačbo $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$. Napišemo $(2xy^3) + (3x^2y^2)y' = 0$ in vidimo, da je $(P, Q) = \nabla u$, kjer je $u = x^2y^3$, zato je $x^2y^3 = C$ rešitev.

Naj bo $P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = 0$ eksaktna enačba. Tedaj za neko funkcijo μ enačba $(\mu P) \,\mathrm{d}x + (\mu Q) \,\mathrm{d}y = 0$ verjetno ni več eksaktna, množica rešitev pa je ista. Velja $(\mu P)_y = \mu P_y + \mu_y P$, $(\mu Q)_x = \mu Q_x + \mu_x Q$ in

$Q_x = P_y$. To pomeni, če želimo, da je tudi $(\mu P, \mu Q)$ eksaktno polje, mora veljati $P\mu_y = Q\mu_x$, kar pa očitno ni nujno res.

Ideja: neeksaktno polje (P, Q) (torej enačbo $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$) poskusimo pomnožiti s tako funkcijo μ, da bo $(\mu P, \mu Q)$ postalo eksaktno. Takemu μ pravimo *integrirajoči množitelj*.

Vidimo, da mora μ zadoščati enačbi $(P_y - Q_x)\mu + P\mu_y - Q\mu_x = 0$, kar je parcialna diferencialna enačba, ki je ne bomo reševali.

Poglejmo nekaj posebnih primerov:

- μ je odvisen le od x: $\mu(x, y) = \eta(x)$. Dobimo $(P_y - Q_x)\eta - Q\eta' = 0$, ki ima rešitev
$$\frac{\eta'}{\eta}(x) = \frac{P_y - Q_x}{Q} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}\,\mathrm{d}x}.$$
Vidimo, da je integrirajoči množitelj odvisen samo od x, če je $(P_y - Q_x)/Q$ odvisen samo od x.
- μ je odvisen le od y: $\mu(x, y) = \eta(y)$. Dobimo $(Q_x - P_y)\eta - P\eta' = 0$, ki ima rešitev
$$\frac{\eta'}{\eta}(y) = \frac{Q_x - P_y}{P} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P}\,\mathrm{d}y}.$$
Vidimo, da je integrirajoči množitelj odvisen samo od y, če je $(Q_x - P_y)/P$ odvisen samo od y.
- Druge možnosti, na primer $\mu(x, y) = \eta(x^2 + y^2)$ in podobno.

Zgled 7.15. Rešimo enačbo
$$(xy^2 - 1)\,\mathrm{d}x + (-x^2 y)\,\mathrm{d}y = 0.$$
Vidimo, da $P_y \neq Q_x$. Poskusimo $\mu = \eta(x)$:
$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{4xy}{-x^2 y} = -\frac{4}{x}.$$
Predpostavka velja in hitro se lahko prepričamo, da velja $\eta(x) = x^{-4}$. Dobimo
$$2x^{-3}y^2 - 2x^{-4} - x^{-2}yy' = 0$$
in
$$(-x^{-2}y^2)' + (\frac{2}{3}x^{-3})' = 0,$$
$$x^{-2}y^2 - \frac{2}{3}x^{-3} = C.$$

7.7 Implicitno podane diferencialne enačbe

Namesto splošne enačbe $F(x, y, y') = 0$ obravnavamo posebna primera *implicitno podanih diferencialnih enačb*: $F(x, y') = 0$ in $F(y, y') = 0$. Rešitve iščemo v parametrični obliki $x = x(t)$ in $y = y(t)$ sočasno za $t \in J$.

Velja
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$
Rigorozna izpeljava za to se dokaže s pomočjo verižnega pravila.

1. $F(x, y') = 0$: nivojnico $\{F = 0\}$ parametriziramo z $(\psi(t), \vartheta(t))$ za $t \in J$. Zahtevamo, da (x, y') leži na $\{F = 0\}$. Torej je $x = \psi(t)$ in $y' = \vartheta(t)$ za neki t, zato $\dot{y}(t) = \dot{x}(t)y'(t) = \dot{\psi}(t)\vartheta(t)$. Rešitev je tako
$$x(t) = \psi(t), \quad y(t) = \int \dot{\psi}(t)\vartheta(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Podobno iz $F(y, y') = 0$ dobimo $y(t) = \psi(t)$, $y'(t) = \vartheta(t)$ in $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)/y'(t) = \dot{\psi}(t)/\vartheta(t)$. Rešitev je
$$x(t) = \int \frac{\dot{\psi}(t)}{\vartheta(t)}\,\mathrm{d}t, \quad y(t) = \psi(t).$$

Zgled 7.16. Rešimo enačbo

$$x = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

To lahko zapišemo kot $F(x,y') = 0$ za $F(u,v) = u - \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$. Parametriziramo z $v = \cot s$ in $u = \cos(s)\,\mathrm{sgn}(\sin s)$. Dobimo $x = \cos s$ in

$$y = \int (-\sin s)\cot s \,\mathrm{d}s = C - \sin s.$$

Obe možni rešitvi sta

$$(x,y) = (0,C) + (\cos s, -\sin s), \quad \text{za } s \in (0,\pi)$$

in

$$(x,y) = (0,C) + (\cos t, \sin t), \quad \text{za } t \in (-\pi,0),$$

kar obakrat predstavlja isto množico rešitev – spodnje polovice enotskih krožnic premaknjene za neko konstanto v y smeri. Enačbo lahko rešimo tudi direktno. Preoblikujemo jo v

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

in dobimo rešitev $y : (-1,1) \to \mathbb{R}$ ter

$$y = C - \sqrt{1-x^2}.$$

Zgled 7.17. Rešimo enačbo

$$y = \sqrt{1+y'^2}.$$

To lahko zapišemo kot $F(y,y') = 0$ za $F(u,v) = u - \sqrt{1-v^2}$. Parametriziramo kot $u = \cosh t$ in $v = \sinh t$ ter dobimo $y = \cosh t$ in $x = t + C$. Končna rešitev se glasi

$$y(x) = \cosh(x+C), \quad \text{za } t \in \mathbb{R}.$$

7.8 Singularne rešitve

Obravnavajmo enačbo $y' = f(x,y)$. Privzemimo, da ima splošna rešitev obliko $y = \psi(x,C)$, $x \in J$, $C \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}$. *Singularna rešitev*, če obstaja, je podana z zahtevo, da v vsaki točki seka kakšno izmed krivulj $y = \psi(x,C)$.

Iz pogojev $y' = f(x,y)$, $z' = f(x,z)$ in $y(x_0) = z(x_0)$ sledi $y'(x_0) = f(x_0,y(x_0)) = f(x_0,z(x_0)) = z'(x_0)$. Drugače povedano, dve rešitvi iste diferencialne enačbe, ki gresta skozi isto točko, morata biti v tisti točki tangentni. Torej je graf singularne rešitve *ovojnica* splošnih rešitev – tangentna na vse grafe iz te družine.

Ovojnico bomo dobili tako, da bomo za vsak x vzeli drugo funkcijo iz družine rešitev, torej drug parameter C, ki bo po novem odvisen od x. Naša ovojnica bo imela obliko $\phi(x) = \psi(x,C(x))$. Kako to dobimo? Pišimo $\psi = \psi(u,v)$. Iz definicije $C(x)$, torej $\phi(x) = \psi(x,C(x))$, sledi

$$\phi'(x) = \frac{\partial}{\partial u}\psi(x,C(x))\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\psi(x,C(x))\frac{\partial C(x)}{\partial x}. \tag{7.3}$$

Hkrati mora veljati tudi, da $\phi(x)$ in $y = \psi(x,C(x_0))$, kjer je x_0 poljubna konstanta iz množice možnih vrednosti x, rešita enačbo $y' = f(x,y)$, zato imata v x_0 enaka odvoda:

$$\phi'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}\psi(x,C(x_0))}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \frac{\partial\psi}{\partial u}(x_0,C(x_0)).$$

Sedaj iz (7.3) sledi

$$\frac{\partial\psi(x,C(x))}{\partial v}C'(x) = 0 \quad \forall x \in J.$$

To zagotovimo, če zahtevamo $\frac{\partial\psi}{\partial v}(x,C) = 0$. To je enačba, iz katere izračunamo $C = C(x)$ in pridobimo formulo za singularno rešitev. Definicijo ovojnice lahko razširimo tudi na implicitno podane krivulje. Če nam funkcija $g(x,y,t) = 0$ podaja družino krivulj s parametrom t, je ovojnica tista krivulja, ki zadošča $g(x,y,t) = 0$ in $g_t(x,y,t) = 0$ za vsak t.

7.9 Clairautova diferencialna enačba

To je enačba oblike

$$y = xy' + f(y'),$$

kjer je f zvezna funkcija na odprtem intervalu $J \subset \mathbb{R}$.

Trditev 7.18. *Splošna rešitev Clairautove enačbe je dana z*

$$y = Cx + f(C)$$

za $C \in J$. Če je f tudi odvedljiva je

$$x = -f'(t), \quad y = -f'(t)t + f(t)$$

singularna rešitev Clairautove enačbe.

Dokaz. Enačbo odvedemo po x in dobimo

$$y' = xy'' + y' + f'(y')y''$$

oziroma

$$y''(x + f'(y')) = 0.$$

Prva možnost je, da velja $y'' = 0$, ki da rešitev $y(x) = kx + n$. Ko to vstavimo v prvotno enačbo, dobimo $n = f(k)$, zato je

$$y(x) = kx + f(k).$$

Druga možnost je $f'(y') = -x$, kar lahko zapišemo kot $F(x, y') = 0$ za $F(u, v) = u + f'(v)$. Krivuljo $\{F = 0\}$ parametriziramo kot $v = t = \vartheta(t)$ in $u = -f'(t) = \psi(t)$. Sledi $x = -f'(t)$ in

$$y = \int (\psi\dot{\vartheta})(t)\,\mathrm{d}t = \int (-f''(t))t\,\mathrm{d}t = -f'(t)t + f(t).$$

Dokažimo, da je to singularna rešitev. Vemo, da singularno rešitev dobimo tako, da splošno rešitev odvajamo po parametru in enačimo z 0:

$$\frac{\partial}{\partial C}[Cx + f(C)] = 0.$$

Dobimo $x = -f'(C)$ in $y = C(-f'(C)) + f(C)$, torej je to res singularna rešitev. □

Zgled 7.19. Rešimo enačbo $y = xy' + y'^2$. To je Clairautova enačba za $f(t) = t^2$. Dobimo $y_C(x) = CX + C^2 = C(x + C)$. Lahko opazimo, da velja $y_{-C}(x) = y_C(-x)$, kar pomeni, da bo singularna rešitev soda. Za singularno rešitev dobimo $x = -2t$ in $y = -2t \cdot t + t^2 = -t^2$, zato $y = -x^2/4$.

7.10 Diferencialne enačbe višjih redov

Diferencialna enačba višjega reda je v splošnem podana kot:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Poglejmo si nekaj posebnih primerov.

1. V redkih primerih, ko je $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}) = 0$, vpeljemo $z = y^{(k)}$ in dobimo enačbo prvega reda $F(x, z, z') = 0$.
   Primer: $y^{(4)} - y^{(5)} = 1$. Nova spremenljivka je $z = y^{(4)}$ in enačba se prepiše na $z - z' = 0$. Rešitev je $y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + x^4/24 + c_5e^x$.
2. Če v diferencialni enačbi ne nastopa x, zapišemo y' kot funkcijo y. Dobimo $y' = z(y)$, $y'' = z'(y)y' = (zz')(y)$, $y''' = (zz')'(y)y' = (z(zz')')(y)$ itn.
   Primer: $2yy' - y'' = 0$. Dobimo $z(2y - z') = 0$. Če je $z = 0$, imamo $y = \text{const.}$, če pa je $2y = z'$, pa sledi $z = y^2 + c = y'$ z rešitvijo $y(x) = \sqrt{c}\tan(d + \sqrt{c}x)$.

3. Če imamo eksplicitno enačbo reda n:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{7.4}$$

jo lahko zapišemo kot sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= z_3 \\ &\vdots \\ z_n' &= f(x, z_1, ..., z_n), \end{aligned} \tag{7.5}$$

s prehodom $z_j = y^{(j-1)}$ za $j = 1, ..., n$.

Trditev 7.20. *Definirajmo*

$$\mathbf{N}(y) = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Tedaj je funkcija $\mathbf{N} : \{$*rešitve za 7.4*$\} \to \{$*rešitve za 7.5*$\}$ *bijektivna.*

Dokaz. Ker je bijekcija, bomo dokazali injektivnost v obe smeri. Naj najprej y reši Enačbo 7.4 in naj bodo $(z_1, z_2, ..., z_n) = \mathbf{N}(y)$. Sledi $z_1' = y' = z_2$, $z_2' = y'' = z_3$, ..., $z_{n-1}' = y^{(n-1)} = z_n$. Nazadnje velja še $z_n' = y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = f(x, z_1, ..., z_n)$.
Naj zdaj $(z_1, ..., z_n) = \mathbf{N}(y)$ reši sistem 7.5 za nek y. Sedaj je edina možnost, da velja, $y = z_1$, $y' = z_1' = z_2$ (zaradi 7.5), ..., $y^{(n-1)} = z_{n-1}' = z_n$ (zaradi 7.5) in na koncu še $y^{(n)} = z_n' = f(x, z_1, ..., z_n) = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$. □

7.11 Eksistenčni izrek za diferencialne enačbe 1. reda

Definicija 7.21. Naj bodo $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ter $a, b > 0$. Označimo $P = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Funkcija $f = f(u, v) : P \to \mathbb{R}$ je *(enakomerno) Lipschitzova* v 2. spremenljivki, če $\exists \gamma > 0 \ni$: $|f(u, v_1) - f(u, v_2)| \leq \gamma |v_1 - v_2|$ za $\forall (u, v_1) \in P$ in $\forall (u, v_2) \in P$. Če je funkcija enakomerno Lipschitzova, γ ne sme biti odvisen od u, sicer je lahko.

Trditev 7.22 (Picard-Lindelöf)**.** *Imejmo* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ *in pravokotnik* $P = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. *Funkcija* $f = f(u, v) : P \to \mathbb{R}$ *naj bo zvezna in enakomerno Lipschitzova v drugi spremenljivki. Tedaj ima Cauchyjev problem* $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ *natanko eno rešitev* $y = y(x) : I \to [y_0 - b, y_0 + b]$, *kjer je* I *nek interval, vsebovan v* $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Opomba: Lipschitzov pogoj bo izpolnjen že, če bo $|\frac{\partial f}{\partial v}| \leq \gamma$ na P. To se pokaže z Lagrangevim izrekom. Zgornji trditvi rečemo tudi *eksistenčni izrek*.

Dokaz. Za dokaz eksistenčnega izreka najprej Cauchyjevo nalogo prepišimo v integralno obliko:

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, \mathrm{d}\xi = \int_{x_0}^{x} y'(\xi)\, \mathrm{d}\xi = y(x) - y_0.$$

Ta izraz je ekvivalenten Cauchyjevemu problemu, saj ga lahko odvajamo in dobimo nazaj CP. Dokazujemo torej, da obstaja natanko ena zvezna funkcija $y : I \to [y_0 - b, y_0 + b]$, tako da je

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, \mathrm{d}\xi. \tag{CPi}$$

Imenujmo ta zapis. Problem zadošča rešiti na zaprtem intervalu $I\delta$, ki je interval I za δ skrajšan na vsaki strani. Pri tem je I enolično določen z $I = \bigcup_\delta I\delta$. Fiksirajmo δ. Desno stran CPi si poglejmo kot *operator* F na y:

$$F(y) : x \to y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, \mathrm{d}\xi.$$

Za definicijsko območje F vzemimo prostor $\mathcal{M} = \mathcal{M}\delta$ vseh zveznih funkcij $I\delta \to [y_0 - b, y_0 + b]$ z *maksimum normo*. To je metrika, ki poljubnima funkcijama $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$ pripiše vrednost

$$d(\varphi, \psi) = \max_{x \in I\delta} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

Sedaj lahko CPi izrazimo takole: obstaja natanko eden $y \in \mathcal{M}$, tako da je $F(y) = y$. Drugače povedano, trdimo, da ima $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ eno samo fiksno točko. Da to dokažemo, uporabimo Banachov izrek o fiksni (negibni) točki.

Banachov izrek o fiksni točki: če je $(\mathcal{M}, d)$ poln metrični prostor in $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ skrčitev, potem ima F natanko eno fiksno točko.

Spomnimo, da je skrčitev F definirana tako, da za vsaka $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$ obstaja $\gamma' \in (0, 1)$, da $d(F(\varphi), F(\psi)) \leq \gamma' d(\varphi, \psi)$. Za metrični prostor je potrebna metrika, to je funkcija $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, ki je vedno nenegativna, enaka nič, samo če sta argumenta enaka, ne spremeni vrednosti, če zamenjamo argumenta in upošteva trikotniško neenakost. Poln metrični prostor je tak, v katerem je vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno (v $\mathbb{R}^n$ so to vsi zaprti omejeni intervali).

Sedaj moramo preveriti, da je naš $\mathcal{M}$ res poln metrični prostor (za DN) in da je F res skrčitev. Imamo:

$$\begin{aligned}
|F(\varphi) - F(\psi)| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))]\, \mathrm{d}\xi \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))|\, \mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \gamma |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|\, \mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \gamma d(\varphi, \psi)\, \mathrm{d}\xi = (x - x_0)\gamma d(\varphi, \psi) \\
&= \gamma(|I| - 2\delta) d(\varphi, \psi).
\end{aligned}$$

V drugi vrstici smo uporabili Lipschitzovost funkcije f. Vzamemo tak δ, da je $\gamma(|I| - 2\delta) < 1$. Tedaj imamo skrčitev in lahko uporabimo Banachov izrek, s čimer je eksistenčni izrek dokazan. $\square$

Zgled 7.23. Ali ima Cauchyjev problem $y' = f(x, y) = \frac{y^2 + e^y x + \sin xy}{1 + x^2 + y^2 + e^{2y}}$, $y(0) = 10$ rešitev v okolici točke 0? Vidimo, da rešitve problema ne znamo poiskati, zato uporabimo eksistenčni izrek. Preveriti moramo ali je funkcija Lipschitzova v 2. spremenljivki. Označimo $f(u, v) = \frac{v^2 + e^u v + \sin uv}{1 + u^2 + v^2 + e^{2v}}$. Dovolj je preveriti, ali je $\frac{\partial f}{\partial v}$ omejen okoli točke $(0, 10)$.

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{(2v + ue^v + u\cos uv)(1 + u^2 + v^2 + e^{2v}) - (v^2 + ue^v + \sin uv)(2v + 2^{2v})}{(1 + u^2 + v^2 + e^{2v})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, v) = \frac{2v(1 + e^2 v - v e^2 v)}{(1 + e^2 v + v^2)^2}$$

Vidimo, da je $\frac{\partial f}{\partial v}(0, v)$ na okolici točke $v = 10$ definirana, zvezna in omejena. Podobno preverimo, da je $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ omejena na neki okolici točke $(0, 10)$. Eksistenčni izrek torej smemo uporabiti in ugotovimo, da dani Cauchyjev problem ima rešitev na neki okolici dane točke.

7.12 Linearni sistemi diferencialnih enačb 1. reda

Pri sistemih linearnih diferencialnih enačb iščemo n-terico funkcij $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ (kjer je I nek interval), ki hkrati zadoščajo:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Pri tem so $\{a_{ik};\ i,k = 1, \ldots n\}$ ter $\{b_j;\ j = 1, \ldots n\}$ dane zvezne funkcije: $I \to \mathbb{R}$. Krajše lahko sistem zapišemo kot

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \tag{7.7}$$

kjer so $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\intercal$, $\mathbf{y}' = (y_1', \ldots, y_n')^\intercal$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^\intercal$ vektorske funkcije in

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrična funkcija. Če je $\mathbf{b} = 0$, pravimo, da je sistem *homogen*.

Zgled 7.24. $(n = 2)$
Iščemo $y_1 = y_1(x)$ in $y_2 = y_2(x)$, tako da velja

$$y_1' = xy_1 + y_2 + 1$$

in

$$y_2' = y_1 + 2e^x y_2 + \sin x.$$

Enako kot zgoraj označimo

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 2e^x \end{bmatrix}.$$

Iščemo torej $\mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, tako da velja $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$.

Trditev 7.25. *Naj bo $\mathbf{y}_0$ neka vektorska funkcija, ki reši Enačbo 7.7. Tedaj velja*

$$\{\textit{rešitve za } \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}\} = \{\textit{rešitve za } \mathbf{y}' = A\mathbf{y}\} + \mathbf{y}_0.$$

Reševanje Enačbe 7.7 torej razbijemo na dva dela: reševanje *homogenega dela* $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ in iskanje *partikularne rešitve* enačbe $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$.

Homogeni del
Pri LDE smo rešitev enačbe $y' = ay$ dobili kot $y = Ce^{\int a(x)\,dx}$. Rešitev sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ podobno dobimo kot $\mathbf{y} = \mathbf{c}e^{\int A(x)\,dx}$ Rešitev sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ je *vektorski prostor*.

Izrek 7.26. *Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ omejen odprt interval in $A : \bar{J} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ matrična funkcija z zveznimi koeficienti. Vzamemo $x_0 \in J$ ter $\boldsymbol{\xi}_0 \in \mathbb{R}^n$. Tedaj obstaja natanko ena rešitev sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\xi}_0$ definirana povsod na J.*

Dokaz. Dokaz je na voljo v `.pdf` dokumentu na spletni učilnici. □

Iskanje partikularne rešitve za sistem $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$:
velja, da rešitve homogenega sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ tvorijo n-dimenzionalen vektorski prostor. Tedaj lahko izberemo linearno neodvisne rešitve $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ za $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Tvorimo *fundamentalno matriko*

$$Y = [\mathbf{y}_1\ \mathbf{y}_2\ \ldots\ \mathbf{y}_n].$$

Torej velja $Y' = AY$.

Trditev 7.27 (variacija konstante). *Matrična funkcija*

$$\mathbf{y}_p = Y \int Y^{-1}\mathbf{b}\,\mathrm{d}x$$

reši (nehomogen) sistem $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}$. *To pomeni, da je*

$$\mathbf{y}_p(x) = Y(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\xi)\mathbf{b}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

iskana partikularna rešitev.

Dokaz. Uporabimo Leibnizovo pravilo in ga apliciramo na vektorskih funkcijah:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_p' =& Y' \int Y^{-1}\mathbf{b}\,\mathrm{d}x + Y\left(\int Y^{-1}\mathbf{b}\,\mathrm{d}x\right)' \\
=& (AY)\int Y^{-1}\mathbf{b}\,\mathrm{d}x + Y(Y^{-1}\mathbf{b}) \\
=& A\left(Y\int Y^{-1}\mathbf{b}\,\mathrm{d}x\right) + (YY^{-1})\mathbf{b} \\
=& A\mathbf{y}_p + \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

□

Definicija 7.28. Če so $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n$ n-razsežne vektorske funkcije na nekem odprtem intervalu $I \subset \mathbb{R}$, torej $\mathbf{y}_j : I \to \mathbb{R}^n$ za $\forall j = 1, 2, ..., n$, potem se $W = \det Y$, kjer je $Y = [\mathbf{y}_1 \ \dots \ \mathbf{y}_n] : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, imenuje *determinanta Wrońskega*.

Spomnimo: *sled* matrike $B = [b_{ij}]_{i,j=1,2,...,n}$ je vsota diagonalnih členov $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{sl}(B) = \sum_{k=1}^{n} b_{kk}$.

Izrek 7.29 (*Liouvilleova formula*). *Naj bo* $Y : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *matrična funkcija, ki reši enačbo* $Y' = AY$. *Tedaj za* $W := \det Y$ *in* $\forall x_0, x \in I$ *velja*

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}(\mathrm{tr}\,A)(\xi)\,\mathrm{d}\xi}.$$

Dokaz. (za $n = 2$) Pišimo

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}.$$

Sledi, da $\mathbf{y}_1 = (y_{11},\ y_{21})^\intercal$ in $\mathbf{y}_2 = (y_{12},\ y_{22})^\intercal$ že rešita enačbo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Pišimo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Velja $W = \det Y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$ in $\mathbf{y}_1' = A\mathbf{y}_1$ oz.

$$\begin{bmatrix} y_{11}' \\ y_{21}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix},$$

torej $y_{11}' = a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21}$ in analogno za vse ostale komponente. Zato je

$$\begin{aligned}W' =& y_{11}'y_{22} + y_{11}y_{22}' - y_{12}'y_{21} - y_{12}y_{21}' = \\ =&(a_{11}y_{11} + a_{12}y_{21})y_{22} + y_{11}(a_{21}y_{12} + a_{22}y_{22}) \\ &- (a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22})y_{21} - y_{21}(a_{21}y_{11} + a_{22}y_{21}) = \\ =&\underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\operatorname{tr} A}\underbrace{(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21})}_{W}\end{aligned}$$

Po integraciji dobimo Liouvilleovo formulo. □

Zgled 7.30. Iščemo $x = x(t), y = y(t)$, ki rešita sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} =& x - \frac{y}{t} + 1 \\ \dot{y} =& (1+t)x - y + t.\end{aligned}$$

Tega lahko ekvivalentno zapišemo kot enačbo $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{b}$, kjer so $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ 1+t & -1 \end{bmatrix}$ in $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$. Eno rešitev homogenega sistema $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ lahko uganemo: $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)^\intercal = (1, t)^\intercal$. Iščemo še drugo linearno neodvisno rešitev. Vidimo $\operatorname{tr} A = 0$.

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & x_2(t) \\ t & y_2(t) \end{bmatrix} = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t 0 \, \mathrm{d}\tau} = W(t_0)$$

Za $W(t_0)$ lahko vzamemo kar $W(t_0) = 1$, saj rešitvi x_2, y_2 lahko pomnožimo s poljubnim realnim številom (rešitve homogene enačbe so vektorski prostor). Dobimo enačbo $y_2(t) - tx_2(t) = 1$, ki jo vstavimo v enačbi homogenega sistema in dobimo rešitvi $x_2 = -\ln t$ in $y_2 = 1 - t\ln t$. Naši linearno neodvisni rešitvi homogenega sistema sta $Z = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ln t \\ t & t\ln t - 1 \end{bmatrix}$. Izračunajmo še partikularno rešitev:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_p =& Z(t)\int_{t_0}^t Z^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\ =& \begin{bmatrix} 1 & \ln t \\ t & t\ln t - 1 \end{bmatrix}\int_{t_0}^t \begin{bmatrix} 1 - \tau\ln\tau & \ln\tau \\ \tau & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \tau \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau = \\ =& \begin{bmatrix} 1 & \ln t \\ t & t\ln t - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t + C \\ D \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Splošna rešitev sistema je $\mathbf{z} = \mathbf{z}_h + \mathbf{z}_p$.

7.13 Sistemi linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti

Rešitev navadne homogene diferencialne enačbe $y' = ay$ je podana z

$$y(x) = y(x_0)e^{\int_{x_0}^x a(\xi)\,\mathrm{d}\xi}.$$

Podobno pričakujemo za sisteme, le da se funkcija $a \to A$ spremeni v matrično funkcijo.
Ponovimo: kaj je $f(B)$, kjer je f poljubna funkcija in B matrika? Če je $f = p$ polinom $p(x) = \sum_{j=0}^m a_jx^j$, potem za matriko velja $p(B) = \sum_{j=0}^m a_jB^j$. Če je funkcija *realno analitična*, jo lahko zapišemo s Taylorjevo vrsto $f(x) = \sum_{j=0}^\infty a_jx^j$. To lastnost uporabimo, da izračunamo vrednost funkcije poljubne $n \times n$ matrike. Da to utemeljimo, potrebujemo nekakšno mero (metriko), ki nam pove velikost matrike. Za to izberemo *operatorsko normo*.

Oznaka: Če je $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, označimo

$$\|B\| = \sup_{|\boldsymbol{\xi}|=1} |B\boldsymbol{\xi}|,$$

kjer je $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ poljuben enotski vektor.

Definicija 7.31. Če je $A : \tilde{J} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ matrična funkcija z zveznimi koeficienti, potem definirajmo normo matrične funkcije kot

$$\|A\| := \sup_{u\in\tilde{J}} \|A(u)\|.$$

Posledica 7.32. *Za poljubna $u \in \tilde{J}$ in vektor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ velja*

$$|A(u)\boldsymbol{\xi}| \leq \|A\||\boldsymbol{\xi}|.$$

Definicija 7.33. Naj bo $f(x) = e^x$. Za $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiramo

$$e^B := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}.$$

Utemeljitev: označimo $s_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{B^j}{j!}$. Pokazati moramo, da je $\|s_n - s_m\|$ poljubno majhen za velika m in n. Recimo, da velja $n > m$. Sledi:

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} \frac{B^j}{j!} \right\| = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\|B\|^j}{j!},$$

kar za velika m in n limitira k 0. Slednje velja, ker je prostor $\mathbb{R}^{n\times n}$ z metriko $\|\cdot\|$ poln. Sledi, da je s_n konvergentno in limiti rečemo e^B.

Izrek 7.34. *Če $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ komutirata ($AB = BA$), potem je*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Spomnimo se: $f'(x)$ je odvod funkcije $f(x)$ natanko tedaj, ko velja

$$\lim_{h\to 0} \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = 0$$

.

Trditev 7.35. *Vzemimo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Funkcija $Y : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^{n\times n}, \|\cdot\|), x \mapsto e^{xA}$ je odvedljiva v smislu, da obstaja tak $Y'(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tako da*

$$\lim_{h\to 0} \left\| Y'(x) - \frac{Y(x+h) - Y(x)}{h} \right\| = 0$$

in velja $Y'(x) = AY(x)$.

Dokaz.

$$\frac{Y(x+h) - Y(x)}{h} - AY(x) = \frac{e^{(x+h)A} - e^{xA}}{h} - Ae^{xA} = e^{xA}\left(\frac{e^{hA} - I}{h} - A\right) =$$

$$= e^{xA}\left(\frac{1}{h}\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(hA)^j}{j!}\right) = e^{xA}\left(hA^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(hA)^m}{(m+2)!}\right)$$

Upoštevali smo, da xA in hA komutirata, saj sta x, h realni števili in matrika sama s seboj seveda komutira.

$$\left\| \frac{Y(x+h)-Y(x)}{h} - AY(x) \right\| \leq |h| \underbrace{\|A^2\| \, \|e^{xA}\|}_{\substack{\text{končna vrednost,} \\ \text{neodvisna od } h}} \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(hA)^m}{(m+2)!} \right\|$$

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(hA)^m}{(m+2)!} \right\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|(hA)^m\|}{(m+2)!} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|h|^m \|A\|^m}{(m+2)!} \overset{(1)}{\leq} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\|A\|^m}{(m+2)!} \leq \underbrace{e^{\|A\|}}_{\substack{\text{končna vrednost,} \\ \text{neodvisna od } h}}$$

Pri tem smo upoštevali $\|BC\| \leq \|B\| \, \|C\|$ in $\|\lambda B\| \leq |\lambda| \, \|B\|$. Ker je h poljubno majhen, lahko predpostavimo, da velja $|h| < 1$, iz česar sledi neenakost (1). Velja torej

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{Y(x+h)-Y(x)}{h} - AY(x) \right\| \leq \lim_{h\to 0} |h| \underbrace{\|A^2\| \, \|e^{xA}\| \, e^{\|A\|}}_{\substack{\text{končna vrednost,} \\ \text{neodvisna od } h}} = 0.$$

□

Posledica 7.36. *$Y(x) = e^{xA}$ reši (matrični) Cauchyjev problem $Y' = AY$ in $Y(0) = I$.*

Definicija 7.37. Tak $Y(x)$ se imenuje *fundamentalna rešitev*.

Posledica 7.38. *Splošna rešitev sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, kjer je $\mathbf{y} : J \to \mathbb{R}^n$, je podana z*

$$\mathbf{y}(x) = e^{xA}\mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz. Ker je $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_n)^\intercal = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{e}_j$, kjer so $\mathbf{e}_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ enotski vektorji, velja

$$e^{xA}\mathbf{c} = \sum_{j=1}^{n} c_j (e^{xA}\mathbf{e_j}).$$

Vektorji v oklepaju so neodvisni, zato je množica izrazov $e^{xA}\mathbf{c}$ n-dimenzionalen vektorski prostor. Hkrati pa tudi vemo, da je prostor rešitev za $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ n-dimenzionalen. To pomeni, da je zgornja formula ekspliciten opis tega prostora. □

Posledica 7.39. *Za vsako konstantno matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja, da je*

$$\det(e^{xA}) = e^{(\operatorname{tr} A)x}.$$

Dokaz. (samo skica) Dokaz sledi iz Liouvilleove formule, ker se za $x = 0$ leva in desna stran ujemata. □

Kako pa sploh izračunamo e^{xA}? Imamo dve možnosti.

i) Če lahko zapišemo A kot $A = PDP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko P in neko diagonalno matriko D (to lahko naredimo, če je matrika A diagonalizabilna), potem je $A^n = PD^nP^{-1}$. Posledično je

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = Pe^DP^{-1}.$$

ii) V splošnem se A ne da diagonalizirati. Lahko pa poljubni matriki priredimo *Jordansko obliko* (ali Jordanovo kanonično formo). To pomeni, da lahko zapišemo $A = PJP^{-1}$, kjer je P neka obrnljiva matrika, J pa bločno diagonalna, sestavljena iz *Jordanskih kletk*, to je osnovnih matrik oblike

$$\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_j & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Torej ima vsaka Jordanska kletka na diagonali enake elemente, na prvi naddiagonali so same enice, povsod drugod pa ničle. Velja:

- vključno z večkratnostjo so na diagonali Jordanske matrike lastne vrednosti;
- vsota dimenzij kletk, ki pripadajo lastni vrednosti λ_j, je enaka potenci člena $(\lambda - \lambda_j)$ v karakterističnem polinomu (to je *algebraična kratnost* lastne vrednosti λ_j);
- število kletk, ki pripadajo lastni vrednosti λ_j je enako $\dim\ker(A - \lambda_j)$ (to je *geometrijska kratnost*). Dimenziji jedra matrike rečemo tudi *defekt*.

Da povzamemo, eno lastno vrednost lahko predstavlja več kletk, vsaki pa pripada natanko en lasten vektor.

Velja $e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1}$. Pišimo

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + N.$$

Pri tem je

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad N^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

in $N^n = 0$. To pomeni, da je N *nilpotentna matrika*. Velja:

$$e^{xJ} = e^{x\lambda I + xN} = e^{x\lambda I} e^{xN} = e^{x\lambda} I \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(xN)^j}{j!} = e^{x\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} N^j = e^{x\lambda} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & x^2/2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & x \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jordanovo matriko potenciramo tako, da potenciramo vsako kletko posebej.

Zgled 7.40. Rešimo sistem enačb

$$y' = y + 4z$$
$$z' = y + z.$$

Pišemo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrike A je $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$. Lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_1 = -1$ je $(2, -1)$, lastni vektor za lastno vrednost $\lambda_2 = 3$ je $(2, 1)$. Velja:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

in torej

$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\mathbf{c}$ poljuben vektor iz $\mathbb{R}^2$ in P^{-1} avtomorfizem, je $P\mathbf{c}$ tudi poljuben vektor iz $\mathbb{R}^2$, ki ga bomo označili z (α, β). Rešitev je tedaj enaka:

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(x) = e^{xA}\mathbf{c} = Pe^{xD}P^{-1}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{3x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha e^{-x} + 2\beta e^{3x} \\ -\alpha e^{-x} + \beta e^{3x} \end{bmatrix}.$$

Zgled 7.41. Rešimo sistem enačb

$$y' = y + z$$
$$z' = -y + 3z.$$

Matrika koeficientov je enaka $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom je $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, torej je $\lambda_{1,2} = 2$. Imamo $\ker(A - 2I) = \operatorname{Lin}\{(1, 1)\}$. To pomeni, da je algebraična kratnost lastne vrednosti 2 enaka 2, geometrijska kratnost pa 1. Torej A ni diagnoalizabilen in imamo eno Jordansko kletko dimenzije 2:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sedaj potrebujemo najti še drugi vektor (poleg lastnega), ki bo šel v prehodno matriko P. Takemu vektorju rečemo *korenski vektor*. To je tak vektor, ki ni v jedru matrike $(A - 2I)$, je pa v jedru njenega kvadrata (ali v splošnem neke višje potence). Če je $\mathbf{v}$ lastni vektor, je korenski vektor $\mathbf{w}$ definiran kot

$$(A - 2I)\mathbf{w} = \mathbf{v}.$$

Ker velja $(A - 2I)\mathbf{v} = 0$, mora veljati tudi $(A - 2I)^2\mathbf{w} = 0$. Ker $(A - 2I)^2 \neq 0$, lahko vzamemo poljuben $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, ki ni v jedru matrike $(A - 2I)$ in šele nato definiramo $\mathbf{v} := (A - 2I)\mathbf{w}$. Vzamemo $\mathbf{w} = (-1, 0)$, tako da je $\mathbf{v} = (1, 1)$. Velja

$$e^{xJ} = e^{2x}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad P = [\mathbf{v}\ \mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev je

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(x) = Pe^{xJ}P^{-1}\mathbf{c} = e^{2x}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x}(\alpha + \beta(x - 1)) \\ e^{2x}(\alpha + \beta x) \end{bmatrix}.$$

Zgled 7.42. Rešimo sistem

$$y' = y - z$$
$$z' = y + z.$$

Matrika koeficientov je enaka $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, karakteristični polinom pa je $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + 1$. Lastni vrednosti sta torej $\lambda_\pm = 1 \pm i$ in lastna vektorja sta $\mathbf{w}_\pm = (1, \mp i)$. Sledi

$$D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

in torej

$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}.$$

Velja:

$$e^{xA} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{x\lambda_+} & 0\\ 0 & e^{x\lambda_-}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{bmatrix} e^x\left(\cos x\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + i\sin x\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right) =$$

$$= e^x\left(\cos x\, I + i\sin x\, i\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right) = e^x\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}.$$

Da dobimo rešitev, pomnožimo slednje s poljubnim vektorjem (α, β).

Trditev 7.43. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:*

(i) če je $\lambda \in \mathbb{C}$ lastna vrednost za A z lastnim vektorjem $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, potem $\mathbf{y}(x) := e^{\lambda x}\mathbf{v}$ reši enačbo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Naj bo sedaj A realna:

(ii) če je $\lambda \in \mathbb{C}$ lastna vrednost za A z lastnim vektorjem $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, potem je tudi $\overline{\lambda}$ lastna vrednost za A z lastnim vektorjem $\overline{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^n$;

(iii) če funkcija $\mathbf{y}$ reši enačbo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, potem jo rešita tudi $\Re\mathbf{y}$ in $\Im\mathbf{y}$.

Dokaz. (ii) Iz $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ takoj sledi $A\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}$, ker je $\overline{A} = A$.

(iii) Pišimo $\mathbf{y} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$. Tedaj je $\mathbf{y}' = \mathbf{a}' + i\mathbf{b}'$ in ker velja $A\mathbf{y} = A\mathbf{a} + iA\mathbf{b}$, je edina možnost $\mathbf{a}' = A\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}' = A\mathbf{b}$.

□

7.14 Linearne diferencialne enačbe višjih redov

Linearne diferencialne enačbe višjih redov so diferencialne enačbe oblike

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b,$$

kjer so $a_0, ..., a_n$ in b dane funkcije. To enačbo lahko zapišemo tudi krajše: $Ly = b$, pri čemer je L primeren diferencialni operator. Kot pri enačbah 1. reda ali sistemih, je rešitev vsota partikularne rešitve in rešitev homogene enačbe. Definirajmo

$$A = A(a_1, ..., a_n) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{a_0}{a_n} & \frac{a_1}{a_n} & \cdots & \frac{a_{n-1}}{a_n}\end{bmatrix}.$$

Trditev 7.44. *Preslikava*

$$N : y \mapsto \begin{bmatrix}y\\ \vdots\\ y^{(n-1)}\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix} := \mathbf{z}$$

slika za dano funkcijo f in A, kot je definiran zgoraj,

$$\{\text{rešitve za } Ly = f\} \xrightarrow{N} \{\text{rešitve za } \mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{g}\},$$

kjer je $\mathbf{g} = (0, ..., 0, f/a_n)$, in sicer bijektivno.

Naj bodo $\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_n$ linearno neodvisne rešitve homogenega sistema $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$. Definiramo $Y = [\mathbf{z_1} \ ... \ \mathbf{z_n}]$. Vemo že, da

$$\mathbf{z}_p = Y\int Y^{-1}\mathbf{g}\,\mathrm{d}x$$

reši nehomogen sistem $\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{g}$. Če so $y_1, ..., y_n$ linearno neodvisne rešitve za $Ly = 0$ (ki vemo, da obstajajo) in tvorimo funkcijo $\mathbf{z_1} = N(y_1), ..., \mathbf{z_n} = N(y_n)$ ter matrično funkcijo

$$Y = [\mathbf{z}_1 \ ... \ \mathbf{z}_n] = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix},$$

potem je partikularna rešitev za $Ly = f$ podana kot prva komponenta matrike (vektorske funkcije)

$$Z = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

kjer je

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\xi) g(\xi) \, \mathrm{d}\xi.$$

Ob tem pa velja tudi

$$Y^{-1} g = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f/a_n \end{bmatrix} = \frac{f}{a_n} Y_n^{-1},$$

kjer Y_n^{-1} označuje zadnji stolpec matrike Y^{-1}. Povedano povzamemo v naslednjem izreku.

Izrek 7.45. *Če so $y_1, ..., y_n$ linearno neodvisne rešitve $Ly = 0$, potem je partikularna rešitev nehomogenega dela enačbe $Ly = f$ dana z $c_1 y_1 + ... + c_n y_n$, kjer je*

$$(c_1, ..., c_n)^\mathsf{T}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi)}{a_n(\xi)} Y_n^{-1}(\xi) \, \mathrm{d}\xi$$

in je Y_n^{-1} zadnji stolpec matrike Y^{-1}, pri čemer je

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Za skalarno funkcijo $W(x) = \det Y(x)$ velja

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}}{a_n}(\xi) \, \mathrm{d}\xi}.$$

Zgled 7.46. Rešimo enačbo

$$(1 - \ln x) y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x^2}.$$

Označimo $a_2 = 1 - \ln x$, $a_1 = x^{-1}$, $a_0 = -x^{-2}$ in $b = x^{-2}$. Hitro opazimo, da je ena možnost za homogeno rešitev kar $y_1 = x$. Izračunajmo še drugo. Imamo:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = x y_2' - y_2 = \left(\frac{y_2}{x}\right)' x^2$$

in

$$W = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(\xi)}{a_2(\xi)} \, \mathrm{d}\xi\right) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(1 - \ln \xi)}\right) = e^{\ln|1 - \ln x|} = 1 - \ln x.$$

Dobimo

$$\left(\frac{y_2}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' \quad \Longrightarrow \quad y_2 = \ln x.$$

Sedaj, ko imamo toliko neodvisnih rešitev homogene enačbe, kot je najvišji red diferencialne enačbe, lahko poiščemo partikularno rešitev, ki bo oblike $c_1y_1 + c_2y_2$. Najprej izračunajmo Y^{-1}:

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-\ln x} \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & -\ln x \\ -1 & x \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$Y_2^{-1} = \frac{1}{1-\ln x} \begin{bmatrix} -\ln x \\ x \end{bmatrix}.$$

Imamo

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{b(\xi)}{a_2(\xi)} Y_2^{-1}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\xi^2(1-\ln\xi)^2} \begin{bmatrix} -\ln\xi \\ \xi \end{bmatrix} \mathrm{d}\xi = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x(1-\ln x)} \\ \frac{1}{1-\ln x} \end{bmatrix}.$$

Partikularna rešitev je tedaj

$$y_p = -\frac{x}{x(1-\ln x)} + \frac{\ln x}{1-\ln x} = -1.$$

To je očitno res partikularna rešitev in bi se jo dalo celo uganiti, kar bi nam prihranilo mnogo dela.

7.15 Homogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti

Definicija 7.47. *Karakteristična enačba* homogene linearne diferencialne enačbe

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = 0, \quad a_j \in \mathbb{R} \tag{7.8}$$

je definirana kot

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j = 0.$$

Trditev 7.48. *Če je λ ničla karakterističnega polinoma*

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j,$$

potem je $y(x) = e^{\lambda x}$ rešitev Enačbe 7.8.

Dokaz. To je direktna posledica dejstva, da je $y^{(j)}(x) = \lambda^j e^{\lambda x}$. □

Trditev 7.49. *Če je*

$$p(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} ... (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

karakteristični polinom homogene diferencialne enačbe, potem bazo prostora tvorijo naslednje funkcije:

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, ..., x^{k_1 - 1}e^{\lambda_1 x},$$
$$\vdots$$
$$e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, ..., x^{k_m - 1}e^{\lambda_m x},$$

oziroma $\{x^{l-1}e^{\lambda_j x};\ j = 1, ..., m \ \&\ l = 1, ..., k_j\}$.

Dokaz. Za domačo nalogo. □

Zgled 7.50. Rešimo enačbo
$$y'' + y = x.$$
Karakteristični polinom je $p(\lambda) = (\lambda + i)(\lambda - i)$, zato sta možni rešitvi homogenega dela
$$y_1 = e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
in
$$y_2 = e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$
Ker ima enačba realne koeficiente, jo po izreku 7.43 rešita tudi $\Re y_1 = \cos x$ in $\Im y_1 = \sin x$. Splošna rešitev je $y_p = C \cos x + D \sin x$. Za partikularno lahko uganemo, da deluje $y_p = x$, zato je splošna rešitev
$$y_s = x + C \cos x + D \sin x.$$

Zgled 7.51. Rešimo enačbo
$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = e^x + e^{-x}.$$
Karakteristični polinom je $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, zato je homogena rešitev
$$y_h = Ae^x + Bxe^x + Ce^{2x}.$$
Nastavek za partikularno rešitev je eksponenten, vendar ni $\alpha e^x + \beta e^{-x}$, ker je e^x v jedru homogene enačbe, zato mora biti nastavek $\alpha x^2 e^x + \beta e^{-x}$. Partikularna rešitev je
$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

7.16 Eulerjeva diferencialna enačba

Eulerjeva diferencialna enačba je diferencialna enačba oblike
$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{(j)}(x) = b(x),$$
kjer so a_j realni koeficienti in $b(x)$ podana funkcija. S substitucijo $s = -x$ in $w(s) = y(-s)$ dobimo enako enačbo, zato jo je dovolj reševati za $x > 0$.

Trditev 7.52. *Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ razreda $\mathcal{C}^k$. Definirajmo $z \in \mathcal{C}^k$ s predpisom $z(t) = y(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$. Označimo $D \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Tedaj za vsak $x = e^t > 0$ velja*
$$x^k y^{(k)}(x) = [D(D - I)(D - 2I)...(D - (k - 1)I)z](t) = [p_k(D)z](t),$$
kjer je
$$p_k(D) = \prod_{j=0}^{k-1}(D - jI).$$

Dokaz. Dokaz je za domačo nalogo. □

Vidimo lahko, da velja $p_0(D)z = Dz = \dot{z}$, $p_1(D)z = D(D-I)z = \ddot{z} - \dot{z}$ in $p_2(D)z = D(D-I)(D-2I)z = \dddot{z} - 3\ddot{z} + 2\dot{z}$ in tako naprej. Opaziti je, da so ti izrazi homogeni s konstantnimi koeficienti, kar pa že znamo rešiti. Torej Eulerjeva enačba ob substituciji $z(t) = y(e^t)$ postane linearna diferencialna enačba
$$\left[\sum_{k=0}^{n} a_k p_k(D)\right] z(t) = b(e^t).$$

8 Variacijski račun

Obravnavamo *funkcionale* oblike:

$$I(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x,$$

kjer je $L = L(u, v, w)$ dana realna funkcija na podmnožici $\mathbb{R}^3$, y pa pripada $\mathcal{C}^1(J)$, kjer je $J = [a, b]$. L imenujemo *Lagrangevo jedro* ali *Lagrangian*.

Pogosto jemljemo funkcije iz razreda

$$X = \{y \in \mathcal{C}^1(J);\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta\}.$$

V tem primeru imamo *nalogo s fiksnimi krajišči*, sicer pa *nalogo z gibljivimi krajišči*.

Definicija 8.1. (Lokalni) ekstrem oziroma *ekstremala* funkcionala I definiramo kot funkcijo $y \in X$, v kateri ima I v vseh "smereh" svoj ekstrem. To pomeni, da ima za vsako gladko funkcijo η, za katero je $y + \varepsilon\eta \in X$ za vse dovolj majhne $\varepsilon \in \mathbb{R}$, funkcija $\varepsilon \mapsto I(y + \varepsilon\eta)$, ki je definirana na realnih številih, ekstrem v $\varepsilon = 0$. Stacionarna točka za I je funkcija, v kateri ima I vse "smerne odvode" enake nič:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} I(y + \varepsilon\eta)\bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

To imenujemo *prva variacija* funkcionala I v smeri η.

Označimo $\mathcal{C}_0^1(J) = \{\eta \in \mathcal{C}^1(J);\ \eta(a) = \eta(b) = 0\}$.

Lema 8.2 (*variacijska lema*)**.** *Naj bo $J = [a, b]$ zaprt omejen interval v $\mathbb{R}$ in $f \in \mathcal{C}(J)$. Če za vsako funkcijo $\eta \in \mathcal{C}_0^1$ velja*

$$\int f\eta\,\mathrm{d}x = 0,$$

potem je $f = 0$ povsod na J.

Dokaz. Dokažimo s protislovjem. Denimo, da $f \neq 0$. Tedaj obstaja $c \in J$, ki ni a ali b, tako da $f(c) \neq 0$. Recimo, da $f(c) > 0$. Ker je f zvezna, obstaja okolica točke c $(c - \delta, c + \delta) = J_\delta$ za neki $\delta > 0$, tako da je $f(x) > 0$ za vsak $x \in J_\delta$. Sedaj izberemo tako η, da je $\eta(x) = 0$ za $x \in J_\delta^\complement = J \setminus J_\delta$ (torej $\operatorname{supp}(\eta) \subset J_\delta$) in $\eta(x) > 0$ na J_δ. Primer take funkcije na intervalu J_δ je $\exp(1/((x - c)^2 - \delta^2))$, ki se celo gladko zlije z ničelno funkcijo v $c + \delta$ in $c - \delta$. Tedaj je

$$\int_J f\eta\,\mathrm{d}x = \int_{J_\delta^\complement} f\eta\,\mathrm{d}x + \int_{J_\delta} f\eta\,\mathrm{d}x > 0.$$

$\square$

Pišimo $F(\varepsilon) := I(y + \varepsilon\eta)$ in izračunajmo $F'(0)$. Imamo

$$F(\varepsilon) = \int_a^b L(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')\,\mathrm{d}x.$$

Označimo še $L = L(u, v, w)$ in $(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') = \mathbf{v}$. Sledi:

$$\begin{aligned}
F'(\varepsilon) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial\varepsilon} L(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\frac{\partial L(\mathbf{v})}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L(\mathbf{v})}{\partial v}\frac{\partial (y+\varepsilon\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial L(\mathbf{v})}{\partial w}\frac{\partial (y'+\varepsilon\eta')}{\partial \varepsilon} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial L(\mathbf{v})}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial L(\mathbf{v})}{\partial v}\eta + \frac{\partial L(\mathbf{v})}{\partial w}\eta' \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\partial L(\mathbf{v})}{\partial v}\eta\,\mathrm{d}x + \frac{\partial L(\mathbf{v})}{\partial w}\eta\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L(\mathbf{v})}{\partial w}\eta\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial L(x,y,y')}{\partial v} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L(x,y,y')}{\partial w} \right)\eta\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{C}_0^1(J).
\end{aligned}$$

Iz druge v tretjo vrstico smo uporabili integracijo po delih na zadnjem členu, iz tretje v četrto vrstico pa dejstvo, da je $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Pogosto (skoraj vedno) označimo $L_v = L_y$ in $L_w = L_{y'}$. Upoštevamo variacijsko Lemo 8.2 in dobimo *Euler-Lagrangevo enačbo*:

Euler-Lagrangeva enačba

$$\frac{\partial L(x,y,y')}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L(x,y,y')}{\partial y'}. \tag{EL}$$

Izrek 8.3. *Označimo $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Naj bo funkcija $L : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva na vse spremenljivke, naj bo $X \subset \mathcal{C}^1(J)$ in naj bo $y \in X$ takšna funkcija, da je $y + \mathcal{C}_0^1(J) \subset X$. Če je y stacionarna točka za funkcional $I : X \to \mathbb{R}$, definiran s predpisom*

$$I(y) = \int_a^b L(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

potem y ustreza Euler-Lagrangevemu pogoju

$$L_y(x, y, y') = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_{y'}(x, y, y').$$

Dokaz. Dokaz za nekoliko strožje pogoje ($L \in \mathcal{C}^2(J)$) je podan zgoraj. Izkaže pa se, da ob tako definiranem Largangianu iz enkratne zvezne odvedljivosti sledi dvakratna zvezna odvedljivost. □

Potrebno pa se je zavedati, da je Euler-Lagrangeva enačba zgolj potreben pogoj za ekstremalo.

Gibljiva krajišča: označimo $X = \mathcal{C}^1(J)$. V primeru gibljivih krajišč je $y + \varepsilon\eta \in X$ za vsak $\eta \in \mathcal{C}^1(J)$. Če želimo, da Euler-Lagrangeva enačba še vedno drži, moramo poskrbeti, da je

$$L_{y'}\eta\big|_a^b = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{C}^1(J).$$

To dosežemo tako, da dodamo *pogoj transverzalnosti*:

$$\frac{\partial L(\mathbf{v}(a))}{\partial y'} = \frac{\partial L(\mathbf{v}(b))}{\partial y'} = 0.$$

Posebni primeri: Če Lagrangian ni funkcija y ampak samo x in y' ($L = L(x, y')$), potem je levi del EL enačbe enak nič in dobimo

$$\frac{\partial L(x,y')}{\partial y'} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Če pa Lagrangian ni funkcija x ($L = L(y, y')$), potem velja sledeče:

$$(L - y'L_{y'})' = \left(L_u \cdot 1 + L_v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + L_w\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} \right) - \left(y''L_w + y'\frac{\mathrm{d}L_w}{\mathrm{d}x} \right) =$$

$$= 0 \cdot 1 + L_v y' + L_w y'' - L_w y'' - y' \frac{\mathrm{d}L_w}{\mathrm{d}x} = y' \left(L_v - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_w \right) = y' \cdot 0 = 0.$$

Tako dobimo *Beltramijevo identiteto*:

$$L(x, y, y') - y' \frac{\partial L(x, y, y')}{\partial y'} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

8.1 Euler-Lagrangeva enačba za sisteme funkcij

Označimo $J = [a, b]$ in naj $\mathcal{C}^1(J \to \mathbb{R}^2)$ označuje urejene pare zvezno odvedljivih funkcij $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

Definicija 8.4. Naj bo X podrazred v $\mathcal{C}^1(J \to \mathbb{R}^2)$ in $I : J \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ funkcional. Pravimo, da je $\mathbf{y} \in X$ lokalni ekstrem (ekstremala) funkcionala I, če za vsako vektorsko funkcijo $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{C}^1(J \to \mathbb{R}^2)$, za katero je $\mathbf{y} + \varepsilon\boldsymbol{\eta} \in X$ za majhne ε, funkcija $\varepsilon \mapsto I(y + \varepsilon\eta)$ doseže lokalni ekstrem v $\varepsilon = 0$.

Izrek 8.5. *Naj bo $L = L(u, v_1, v_2, w_1, w_2) : J \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva funkcija na vse spremenljivke. Na X definiramo funkcional*

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b L(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\,\mathrm{d}x.$$

Če je $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ekstremala za I, potem $\mathbf{y}$ reši sistem enačb

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y_1'} \quad \text{in} \quad \frac{\partial L}{\partial y_2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y_2'}.$$

Zgled 8.6 (izoperimetrični problem)**.** Naj bo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ter $0 < b - a \leq l \leq \pi(b - a)/2$. Označimo $J = [a, b]$. Med vsemi pozitivnimi funkcijami $y \in \mathcal{C}^1(J)$, za katere velja $y(a) = y(b) = 0$ in da je dolžina loka grafa nad J enaka l, iščemo tisto, ki maksimizira ploščino lika pod grafom.

Maksimiziramo

$$I(y) := \int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x,$$

pri čemer iščemo le med pozitivnimi funkcijami $y \in \mathcal{C}^1(J)$, za katere je $y(a) = y(b) = 0$ ter

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = l.$$

Ker zaradi omejene dolžine loka funkcija ne more nikjer preseči vrednosti l, je ploščina pod likom zagotovo manjša od $l(b - a)$, torej je funkcional I omejen. Za zdaj tega primera še ne znamo rešiti, saj imamo še dodatno omejitev. K temu primeru se vrnemo kasneje.

V splošnem torej iščemo ekstremale funkcije

$$I(y) = \int_a^b L(x, y, y')\,\mathrm{d}x,$$

kjer je $y \in X = \{y \in \mathcal{C}^1(J);\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta,\ \mathcal{I}(y) = C \in \mathbb{R}\}$ in

$$\mathcal{I}(y) = \int_a^b \mathcal{L}(x, y, y')\,\mathrm{d}x.$$

Reševanje: problem nastane, ker novi pogoj $\mathcal{I}(y) = C$ ob perturbaciji ni nujno ohranjen:

$$\mathcal{I}(y) = C \not\Rightarrow \mathcal{I}(y + \epsilon\eta) = C.$$

Na primer, če vzamemo $\eta = y$ dobimo

$$\mathcal{I}(y) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x < \int_a^b \sqrt{1+(1+\varepsilon)^2 y'^2}\,\mathrm{d}x = \mathcal{I}(y+\varepsilon\eta).$$

Ideja je, da vzamemo dva parametra in dve perturbaciji $y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2$:

$$F(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = I(y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2) = \int_a^b L(x, y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2, y'+\varepsilon_1\eta_1'+\varepsilon_2\eta_2')\,\mathrm{d}x,$$

kjer je

$$G(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \coloneqq \mathcal{I}(y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2) = C \quad \text{nivojnica funkcije } G.$$

Dodatno zahtevamo, da y ni lokalen ekstrem za $\mathcal{I}$.

Definicija 8.7. Naj bosta $I, \mathcal{I}$ definirana kot prej. Privzemimo, da y ni lokalni ekstrem za $\mathcal{I}$. Funkcija y je lokalni ekstrem (ali ekstremala) za I, če ima za vsak par $(\eta_1,\eta_2) \in \mathcal{C}^1(J)$, za katerega pri nekaterih dovolj majhnih ε_1 in ε_2 velja $y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2 \in X$ in $\mathcal{I}(y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2) = C$, funkcija $F(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \coloneqq I(y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2)$ lokalni ekstrem v točki $(0,0)$.

Torej mora F, zožena na $G(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = C$, doseči ekstrem v $(0,0)$. S tem smo nalogo prevedli na primer vezanega ekstrema. Vemo, da za neki $\lambda \in \mathbb{R}$ velja

$$\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial\varepsilon_1} = \frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial\varepsilon_2} = 0,$$

oziroma $\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}(F+\lambda G) = 0$. Dobimo:

$$\int_a^b [(L_y+\lambda\mathcal{L}_y)(\mathbf{v})\eta_1 + (L_{y'}+\lambda\mathcal{L}_{y'})(\mathbf{v})\eta_1']\,\mathrm{d}x = 0$$

in

$$\int_a^b [(L_y+\lambda\mathcal{L}_y)(\mathbf{v})\eta_2 + (L_{y'}+\lambda\mathcal{L}_{y'})(\mathbf{v})\eta_2']\,\mathrm{d}x = 0.$$

Zdi se, kot da je $\lambda = \lambda(\eta_1,\eta_2)$, vendar to ni res. Zgornji enačbi se lahko zapišeta kot

$$\frac{\int_a^b (L_y\eta_1 + L_{y'}\eta_1')\,\mathrm{d}x}{\int_a^b (\mathcal{L}_y\eta_1 + \mathcal{L}_{y'}\eta_1')\,\mathrm{d}x} = -\lambda = \frac{\int_a^b (L_y\eta_2 + L_{y'}\eta_2')\,\mathrm{d}x}{\int_a^b (\mathcal{L}_y\eta_2 + \mathcal{L}_{y'}\eta_2')\,\mathrm{d}x}.$$

Imenovalca nista enaka nič, saj y po predpostavki ni ekstremala za $\mathcal{I}$. Ker lahko λ zapišemo kot funkcijo samo η_1 in kot funkcijo samo η_2, λ ni odvisna niti od η_1 niti od η_2.

Izrek 8.8. *Vzemimo $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Naj bosta $L, \mathcal{L} : J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezno parcialno odvedljivi funkciji na vse spremenljivke. Definirajmo funkcional $\mathcal{I} : \mathcal{C}^1(J) \to \mathbb{R}$ s predpisom*

$$\mathcal{I}(y) = \int_a^b \mathcal{L}(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

ter za neke $a, b, \alpha, \beta, C \in \mathbb{R}$ množico

$$X = \{y \in \mathcal{C}^1(J);\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta,\ \mathcal{I}(y) = C\}.$$

Če je y ekstremala za $I : X \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$I(y) = \int_a^b L(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

in hkrati ni ekstremala za $\mathcal{I}$, potem obstaja $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da y ustreza Enačbi EL z $L + \lambda\mathcal{L}$ v vlogi L.

Zgled 8.9 (Rešitev izoperimetričnega problema)**.** V našem primeru je $L = y$ in $\mathcal{L} = \sqrt{1+y'^2}$, torej imamo $L + \lambda\mathcal{L} = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}$. Ker Lagrangian ni neposredno odvisen od x, je EL enačba ekvivalentna Beltramijevi identiteti:

$$\begin{aligned} (L+\lambda\mathcal{L}) - y'(L+\lambda\mathcal{L})_{y'} &= D \\ y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \lambda y'\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} &= D \\ y\sqrt{1+y'^2} + \lambda &= D\sqrt{1+y'^2} \\ \lambda + (y-D)\sqrt{1+y'^2} &= 0, \quad \text{za nek } D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Če uvedemo novo spremenljivko $w = y - D$, dobimo $\lambda + w\sqrt{1+w'^2} = 0$. To je enačba oblike $F(w, w') = 0$, kjer je $F(u,v) = \lambda + u\sqrt{1+v^2}$. Parametriziramo kot $v = \tan t$ za $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, s čimer pokrijemo vsa realna števila v. Velja

$$u = -\frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2}} = -\lambda\cos t \quad \text{za } t \in (\pi/2, \pi/2).$$

Dobimo

$$\begin{aligned} y(t) &= D + u(t) = D - \lambda\cos t, \\ x(t) &= \int \frac{\dot{u}(t)}{v(t)}\,\mathrm{d}t = \int \lambda\cos t\,\mathrm{d}t = \lambda\sin t + C_1. \end{aligned}$$

Iskana krivulja leži na krožnici

$$(x-C_1)^2 + (y-D)^2 = \lambda^2$$

in sicer na zgornji polovici, če je $\lambda < 0$, ali na spodnji polovici, če je $\lambda > 0$. Označimo polmer krožnice z $\rho = -\lambda$ in z nekaj geometrijskega razmisleka dobimo naslednje izražave:

$$C_1 = \frac{a+b}{2}, \quad D = -\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}, \quad \frac{l}{b-a} = \frac{2\rho}{b-a}\arcsin\left(\frac{b-a}{2\rho}\right) = \psi\left(\frac{2\rho}{b-a}\right),$$

kjer je $\psi(t) = t\arcsin(1/t)$ za $|t| > 1$. Analizirajmo funkcijo ψ: je strogo padajoča na intervalu $[1,\infty)$ in $\psi(t) \leq \psi(1) = \pi/2$. Ker je bijektivna, obstaja njen inverz $\psi^{-1} : (1, \pi/2] \to [1, \infty)$. Hkrati imamo predpostavko $l/(b-a) < \pi/2$, zato dobimo

$$\rho = \frac{b-a}{2}\psi^{-1}\left(\frac{l}{b-a}\right).$$

Da povzamemo, izbrana krivulja $y = (x)$ je del krožnice s središčem $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ in polmerom ρ, kjer je

$$\rho = \frac{b-a}{2}\psi^{-1}\left(\frac{l}{b-a}\right) \quad \text{za } \psi(t) = t\arcsin(1/t) : [1,\infty) \to (1, \pi/2],$$

$$s_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{in} \quad s_2 = -\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}.$$

Končna rešitev ima obliko

$$y(x) = s_2 + \sqrt{\rho^2 - (x-s_1)^2} = \frac{b-a}{2}\left(\sqrt{\psi^{-1}\left(\frac{l}{b-a}\right)^2 - \left(\frac{b+a-2x}{b-a}\right)^2} - \sqrt{\psi^{-1}\left(\frac{l}{b-a}\right)^2 - 1}\right).$$

Zgled 8.10 (Brahistokrona)**.** Iz grščine: $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$: brahistos - najkrajši + $\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$: kronos - čas. Iščemo krivuljo, ki povezuje točki $A = (a, \alpha)$ in $B = (b, \beta)$ in ima naslednjo lastnost: če spustimo iz točke A kroglico le pod vplivom geometrije brez trenja, prispe v točko B v najkrajšem možnem času. Parametrizirajmo krivuljo kot

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

in
$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)).$$
Naj bo krivulja dana še z $y = f(x)$, torej
$$y(t) = f(x(t))$$
,
$$\dot{y}(t) = f'(x(t))\dot{x}(t)$$
in
$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} = \sqrt{1 + f'(x(t))^2}\dot{x}(t).$$
Velja ohranitev energije:
$$\frac{mv(0)^2}{2} + gmy(0) = \frac{mv(t)^2}{2} + mgy(t),$$
$$g\alpha = \frac{v(t)^2}{2} + gf(x(t)),$$
$$v(t) = \sqrt{2g(\alpha - f(x(t)))}.$$
Enačimo oba izraza za $v(t)$:
$$\sqrt{2g(\alpha - f(x(t)))} = \sqrt{1 + f'(x(t))^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$
Dobimo
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{\alpha - f(x)}}\,\mathrm{d}x$$
in
$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x(0)}^{x(T)}\sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{\alpha - f(x)}}\,\mathrm{d}x.$$
Obravnavamo funkcional
$$I(y) = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{\alpha - y}}\,\mathrm{d}x$$
na prostoru funkcij $X = \{y \in \mathcal{C}^1([a,b]);\ y < \alpha \text{ na } (a,b],\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta\}$. Rešitev lahko dobimo v parametrični obliki:
$$x = a + (b-a)g(\kappa),$$
$$y = \alpha - (b-a)g'(\kappa),$$
za $\kappa \in [0, \kappa_0]$, kjer je
$$g(\kappa) = \frac{\kappa - \sin\kappa}{\kappa_0 - \sin\kappa_0}$$
in je κ_0 določen kot edina rešitev iz $(0, 2\pi)$ enačbe
$$\frac{\kappa - \sin\kappa}{1 - \cos\kappa} = \frac{b-a}{\beta - \alpha}.$$

Rešitev predstavlja lok *cikloide*, to je krivulje, ki jo ob kotaljenju po ravnini opiše točka na obsegu kroga.

9 Hilbertovi prostori

Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{K}$ (to je $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$).

Definicija 9.1. *Skalarni produkt* na V je poljubna preslikava

$$\langle\bullet,\bullet\rangle : V \times V \to \mathbb{K},$$

ki zadošča naslednjim pogojem:
1. $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$;
2. $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$;
3. $\forall y \in V$ je preslikava $x \mapsto \langle x, y\rangle$ linearna na V (torej $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle \quad \forall x_1, x_2 \in V$ in $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{K}$);
4. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \quad \forall x, y \in V$.

Tedaj V imenujemo prostor, opremljen s skalarnim produktom.

Definicija 9.2. *Norma*, ki izhaja iz skalarnega produkta $\langle\bullet,\bullet\rangle$, je preslikava $\|\bullet\| : V \to [0, \infty)$, definirana s predpisom

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Iz definicije za skalarni produkt sledijo lastnosti norme (oziroma aksiomi zanje):
- i) $\|x\| \geq 0$;
- ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad \forall x \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$;
- iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Norma ni nujno porojena s skalarnim produktom, ampak je vsaka preslikava za katero veljajo zgornje štiri izjave.

Trditev 9.3 (*Cauchy-Schwarz-Bunjakovski*)**.**

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Enakost velja, če sta x in y kolinearna.

Dokaz. Vemo, da za poljubna $x, y \in V$ in $\lambda \in \mathbb{K}$ velja:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle y + \lambda x, y + \lambda x\rangle \\ &= \langle y, y\rangle + \langle \lambda x, y\rangle + \langle y, \lambda x\rangle + \langle \lambda x, \lambda x\rangle \\ &= \|y\|^2 + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda\langle x, y\rangle} + |\lambda|^2\|x\|^2 \end{aligned}$$

Privzemimo, da je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dobimo:

$$\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \geq 0.$$

To je kvadratna enačba, ki je obrnjena navzgor. Večja ali enaka nič bo samo v primeru, če bo y koordinata temena večja od 0:

$$\|y\|^2 - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\|x\|^2} \geq 0$$

oziroma

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Če imamo enakost, velja

$$0 = \langle y + \lambda x, y + \lambda x\rangle$$

oziroma $y + \lambda x = 0$ in $y = -\lambda x$. $\square$

Pri $\lambda = 1$ in $\lambda = -1$ dobimo

$$\|y+x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle,$$

$$\|y-x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle.$$

Če to odštejemo, dobimo *polarizacijsko enakost* v realnih številih:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\| - \|x-y\|\right],$$

s pomočjo katere lahko rekonstruiramo skalarni produkt, če norma izhaja iz njega. Če pa zgornji enačbi seštejemo, dobimo *paralelogramsko identiteto*:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Vsaka norma porodi metriko/razdaljo:

$$d : V \times V \to [0, \infty) : \; d(x, y) = \|x - y\|.$$

Aksiomi za metriko:

a) $d(x, y) \geq 0$;

b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

c) $d(x, y) = d(y, x)$;

d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Metrika ni nujno porojena iz norme, dovolj je, da veljajo zgornji aksiomi.

Definicija 9.4. Prostor V s skalarnim produktom je *Hilbertov*, če je v inducirani metriki poln.

To pomeni, da je vsako Cauchyjevo zaporedje $(a_n)_n$ konvergentno, kjer limito definiramo kot

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \iff \lim_{n\to\infty} d(a, a_n) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \sqrt{\langle a - a_n, a - a_n\rangle} = 0.$$

Primeri Hilbertovih prostorov

1. $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_i$.
2. $\mathbb{C}^n$, $u = (u_1, ..., u_n)$, $v = (v_1, ..., v_n)$, $u_i, v_i \in \mathbb{C}$ $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$. Poznamo pa tudi drugačne vrste norm; do sedaj smo vedno uporabljali *Evklidsko normo*:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt[2]{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}.$$

Lahko pa za poljuben $p \geq 1$ definiramo p-normo:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Iz paralelogramske identitete sledi, da je od p-norm samo Evklidska inducirana iz skalarnega produkta.

3. $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $V := \mathcal{C}(J)$, $f, g \in V$;

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Izkaže se, da $(\mathcal{C}(J), \langle\bullet,\bullet\rangle)$ ni Hilbertov prostor. Za protiprimer se omejimo na interval $[-1,1]$. Sestavimo zaporedje funkcij oblike

$$f_n = \begin{cases} nx; & |x| \leq 1/n, \\ 1; & x \in (1/n, 1], \\ -1; & x \in [-1, -1/n). \end{cases}$$

Za $m < n$ lahko ocenimo

$$\|f_n, f_m\|_2^2 = 2\int_0^{1/n} ((n-m)x)^2 \, \mathrm{d}x + 2\int_{1/n}^{1/m} (1-mx)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\frac{m}{n^2} + \frac{2}{3m} - \frac{4}{3n} < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right).$$

Za dovolj pozne m in n se ta vrednost približuje ničli, kar pomeni, da je zgornje funkcijsko zaporedje Cauchyjevo. Dokažimo, da za $\forall\varepsilon > 0$ točka $(\varepsilon, 1)$ leži na grafu limite zgornjega zaporedja. Preprosto vzamemo tak n_0, da je $1/n_0 < \varepsilon$. Grafi vseh funkcij f_n, kjer je $n > n_0$ bodo vsebovali točko $(\varepsilon, 1)$, in zato tudi limita. Podobno pokažemo, da limita vsebuje točko $(-\varepsilon, -1)$. Edina funkcija, ki ustreza tem pogojem, je *Heavisideova funkcija*:

$$H(x) = \begin{cases} 1; & x > 0, \\ 0; & x = 0, \\ -1; & x < 0. \end{cases}$$

Ta funkcija pa ni zvezna, kar pomeni da prostor $\mathcal{C}(J)$ ni poln v metriki, inducirani z zgoraj opisanim skalarnim produktom, torej ni Hilbertov.

4. Poglejmo si prostor

$$L^2 := \left\{ f : J \to \mathbb{C};\ \|f\|_2 := \sqrt{\int_J |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x} < \infty \right\}.$$

To niso vse zvezne funkcije, ampak vse Lebesgueovo merljive in s kvadratom integrabilne funkcije oziroma ekvivalenčni razredi glede na relacijo "skoraj povsod." To pomeni, da se funkciji, ki se razlikujeta samo na množici z Lebesgueovo mero nič, smatrata za ekvivalentni, oziroma da implikacija $\|f\|_2 = 0 \implies f = 0$ drži samo skoraj povsod. L^2 je vektorski in tudi Hilbertov prostor.

5. Poglejmo si množico vseh s kvadratom sumabilnih zaporedij:

$$l^2 = \left\{ (a_n)_n;\ a_n \in \mathbb{C} \text{ in } \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty \right\}.$$

Na taki množici lahko definiramo skalarni produkt

$$\langle a, b\rangle := \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b_j}.$$

l^2 je Hilbertov prostor. Ta prostor je osnovni model za separabilne Hilbertove prostore.

Definicija 9.5. Metrični prostor M je *separabilen*, če vsebuje števno gosto množico.

Definicija 9.6. Množica $N \subset M$ je *gosta* v M, če za vsak $x \in M$ in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $y \in N$, tako da je $d(x,y) < \varepsilon$.

Množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ je gosta v $\mathbb{R}$, saj za katerokoli realno število lahko najdemo racionalno število, ki je poljubno blizu. Zato so realna števila separabilen prostor.

Tudi l^2 je separabilen prostor. Vzamemo lahko namreč množico Q vseh zaporedij, ki imajo na začetku končno mnogo racionalnih števil, za tem pa same ničle. To je števna podmnožica v l^2 (dokaz za to je enak kot dokaz, da je polinomov z racionalnimi koeficienti števno neskončno), ki pa je gosta v l^2. Dokaz, za to je za domačo nalogo.

Definicija 9.7. Naj bo X vektorski prostor opremljen s skalarnim produktom in $x, y \in X$. x in y sta pravokotna, natanko tedaj ko velja $\langle x, y\rangle = 0$. To označimo $x \perp y$.

Trditev 9.8 (Pitagora)**.** $x \perp y \implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Dokaz.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\Re\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 0 + \|y\|^2.$$

□

Podobno velja za n-terice med seboj pravokotnih vektorjev:

$$x_i \perp x_j \ \forall i, j = 1, ..., n \implies \|x_1 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + ... + \|x_n\|^2.$$

Definicija 9.9. Naj bo $A \subseteq X$ poljubna podmnožica vektorskega prostora X. Označimo

$$A^\perp := \{y \in X;\ y \perp a \ \forall a \in A\}.$$

Temu rečemo *ortogonalni komplement*.

Trditev 9.10. *$A^\perp$ je zaprt vektorski prostor.*

Dokaz. Dokaz, da je $A^\perp$ res vektorski prostor je za DN. Če pa želimo dokazati, da je še zaprt, pa lahko dokažemo, da vsebuje svoj rob ($\partial A^\perp \subset A^\perp$), ali da ima vsako konvergentno zaporedje v $A^\perp$ tudi limito v $A^\perp$. Naj za vse $a \in A$ velja $\langle y, a\rangle = 0$. Dovolj je dokazati, da $\langle y, a\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle y_n, a\rangle$. Po Cauchy-Schwarzevi neenakosti velja

$$\lim_{n\to\infty} |\langle y - y_n, a\rangle| \leq \lim_{n\to\infty} \|y - y_n\| \cdot \|a\| = 0,$$

iz česar sledi, da je $\langle y, a\rangle - \lim_{n\to\infty}\langle y_n, a\rangle = 0$, torej je $y \in A^\perp$. □

Definicija 9.11. Naj bo $Y \subseteq X$ vektorski podprostor vektorskega prostora X in $x \in X$. Pravimo, da je $y \in Y$ *ortogonalna projekcija* vektorja x na podprostor Y, če je $x - y \perp Y$ oziroma $x - y \in Y^\perp$. Označimo $y = P_Y x$, pri čemer rečemo, da je $P_Y : X \to Y$ *ortogonalen projektor* prostora X na podprostor Y.

Trditev 9.12. *Naj bo X vektorski prostor, opremljen s skalarnim produktom, in $Y \subseteq X$ vektorski podprostor. Denimo, da za $\forall x \in X$ obstaja neka projekcija $P_Y x$, definirana kot prej. Tedaj:*

i) $P_Y x$ je enolično določen;
ii) $P_Y x$ je najboljši približek za x v Y v smislu

$$\|x - P_Y x\| = d(x, Y) := \inf_{y\in Y} \|x - y\|;$$

iii) P_Y je linearna preslikava;
iv) P_Y je zvezen in $\|P_Y x\| \leq \|x\|$;
v) Y je zaprt v X.

Dokaz. i) Denimo, da obstajata $y_1, y_2 \in Y$, tako da velja $x - y_1 \perp Y$ in $x - y_2 \perp Y$. Če odštejemo, dobimo $y_2 - y_1 \perp Y$, kar pa lahko velja samo, če $y_1 = y_2$, saj neničelen vektor iz množice ne more biti pravokoten na to množico.

ii) Vzamemo $y \in Y$. Velja
$$x - y = (x - P_Y x) + (P_Y x - y).$$
Levi člen je element $Y^\perp$, desni člen pa je element Y. Ker sta pravokotna, lahko uporabimo Pitagorov izrek
$$\|x - y\|^2 = \|x - P_Y x\|^2 + \|P_Y - y\|^2 \geq \|x - P_Y x\|^2.$$
Enakost velja natanko tedaj, ko je $y = P_Y x$.

iii) Pišimo $P = P_Y$. Vzemimo $x_1, x_2 \in X$. Ker je $x_1 - Px_1, x_2 - Px_2 \in Y^\perp$, je tudi $(x_1 + x_2) - (Px_1 + Px_2) \in Y^\perp$. Ker je $Px_1, Px_2 \in Y$, mora biti tudi $Px_1 + Px_2 \in Y$, saj je Y zaprt vektorski prostor. Vemo tudi, da je $P(x_1 + x_2)$ edini element iz Y, da velja $(x_1 + x_2) - P(x_1 + x_2) \in Y^\perp$. Kot smo ugotovili je $P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2$. S tem je dokazana aditivnost, homogenost se dokaže podobno.

iv) Zapišimo $x = (x - Px) + Px$, ki je vsota dveh pravokotnih vektorjev. Po Pitagorovem izreku sledi
$$\|x\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2 \geq \|Px\|^2.$$

v) Naj za $(y_n)_n \subset Y$ velja $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ za neki $x \in X$. Dokazati moramo, da velja $x \in Y$. Po točki iv) sledi, da je tudi $\lim_{n\to\infty} Py_n = Px$. Ker pa je $Py_n = y_n \in Y$, mora biti tudi $x \in Y$.

□

Trditev 9.13. *Naj bo Y končno dimenzionalen vektorski prostor in $\{e_j;\ j = 1, ..., n\}$ baza, sestavljena iz paroma ortogonalnih normalnih vektorjev:*
$$\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1; & j = k, \\ 0; & j \neq k. \end{cases}$$
Tedaj je:
$$P_Y x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j.$$

Dokaz. Poglejmo si naslednje:
$$\left\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j, e_k \right\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \langle e_j, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle \delta_{jk} = \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle = 0.$$
Zato velja:
$$y = \left(x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j \right) \perp e_k \quad \forall k \in \{1, ..., n\}.$$
Posledično je $y \perp \mathrm{Lin}\{e_1, ..., e_n\} = Y$, zato mora biti zgornja vsota res enaka $P_Y x$. □

Definicija 9.14. Pravimo, da je neskončna družina vektorjev $\{e_j;\ j \in \mathbb{N}\} \subset X$ *ortonormiran sistem (ONS)*, če velja $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$ za $\forall j, k \in \mathbb{N}$.

Trditev 9.15 (*Besselova neenakost*). *Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{e_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ ortonormiran sistem v X. Tedaj za $\forall x \in X$ velja*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

oziroma $(\langle x, e_j\rangle_{j\in\mathbb{N}})_n \in l^2$.

Dokaz. Naj bo $Y_n := \mathrm{Lin}\{e_1, ..., e_n\}$. Po Trditvi 9.13 je

$$P_{Y_n} x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j.$$

Po Pitagorovem izreku velja:

$$\|P_{Y_n} x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

Po Trditvi 9.12 iv) vemo, da je $\|P_{Y_n} x\| \leq \|x\|$. Sledi

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n.$$

Zaporedje delnih vsot

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j\rangle|^2$$

je omejeno (z $\|x\|$) in naraščajoče, zato je konvergentno in ima limito

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

Trditev 9.16. *Naj bo X Hilbertov prostor, $\{e_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ ortornormiran sistem in $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$ s kvadratom sumabilno zaporedje. Tedaj obstaja tako zaporedje $x \in l^2$, tako da velja $c_j = \langle x, e_j\rangle$ za $\forall j \in \mathbb{N}$. Velja še, da naslednja limita obstaja (konvergira) v X in je enaka:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j e_j = x_j.$$

Opomba: zadnji dve trditvi povesta, da v Hilbertovem prostoru za podan ONS $\{e_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ vrsta $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ konvergira natanko tedaj, ko je $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$.

Dokaz. Definirajmo delne vsote

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} c_j e_j.$$

Če lahko dokažemo, da je zaporedje $(s_n)_n$ Cauchyjevo v X, bo veljalo, da zagotovo obstaja $x := \lim_{n\to\infty} s_n$, saj je X poln. Da dokažemo, da je $(s_n)_n$ Cauchyjevo, si poglejmo naslednje ($m > n$):

$$s_m - s_n = \sum_{j=n+1}^{m} c_j e_j$$

in

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} c_j e_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} \|c_j e_j\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |c_j|^2 = \sigma_m - \sigma_n,$$

kjer smo definirali

$$\sigma_N \coloneqq \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2.$$

Toda $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ konvergira, zato je $(\sigma_n)_n$ Cauchyjevo. Ker je $\|s_m - s_n\|^2 = \sigma_m - \sigma_n$, je tudi $(s_n)_n$ Cauchyjevo. $\square$

Definicija 9.17. Naj bo X Hilbertov prostor, $x \in X$ in $\mathcal{E} \coloneqq \{e_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ ortornormiran sistem.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

se imenuje *Fourierova vrsta* za x glede na ONS $\mathcal{E}$ in $\langle x, e_j \rangle$ se imenujejo *Fourierovi koeficienti*. Rečemo, da je $\mathcal{E}$ *kompleten ortonormiran sistem*, če je ONS in za vsak $x \in X$ velja

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Trditev 9.18. *Naj bo X Hilbertov prostor in $\mathcal{E} \coloneqq \{e_j;\ j \in \mathbb{N}\}$ ortornormiran sistem. Naslednje izjave so ekvivalentne:*

1. *$\mathcal{E}$ je kompleten ONS;*
2. *$\forall x, y \in X$ je*
$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle};$$
3. *$\forall x \in X$ je*
$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2; \qquad \text{(\textit{Parsevalova identiteta})}$$
4. *$\mathcal{E}$ ni vsebovan v nobenem strogo večjem ONS;*
5. *$\mathcal{E}^\perp = \{0\}$.*

Dokaz.
1. $\implies$ 2. Naj bo

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j, \qquad y_n = \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j \rangle e_j$$

in $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ter $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Velja

$$\lim_{n\to\infty} |\langle x, y \rangle - \langle x_n, y_n \rangle| \leq \lim_{n\to\infty} \left(|\langle x - x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y - y_n \rangle|\right) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\|x - x_n\|\|y\| + \|x_n\|\|y - y_n\|\right) = 0.$$

Posledično je $\langle x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle$ in zato

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}.$$

2. $\implies$ 3. Sledi, če vzamemo $y = x$.
3. $\implies$ 4. Denimo, da obstaja $\mathcal{F} \subset X$, tako da je $\mathcal{F}$ ortonormiran sistem in $\mathcal{E} \subsetneq \mathcal{F}$. Vzemimo $f_0 \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{E}$ in naj bo $x = f_0$. Tedaj je $\langle x, e_j \rangle = 0$ za $\forall j \in \mathbb{N}$. Hkrati pa je $\|x\| = 1$. To pomeni, da točka 3. ne velja

za x.
4. $\implies$ 5. Spet uporabimo protislovje. Naj bo $f_0 \in \mathcal{E}^\perp \setminus \{0\}$. Lahko privzamemo, da je $\|f_0\| = 1$. Sedaj je $\mathcal{F} \coloneqq \mathcal{E} \cup \{f_0\}$ spet ONS, ki pa je strogo večji od $\mathcal{E}$, kar pa je v protislovju s predpostavko 4., zato tak f_0 ne more obstajati.
5. $\implies$ 1. Vzemimo poljuben $x \in X$. Definirajmo

$$h \coloneqq x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Velja $\langle h, e_k \rangle = 0$ za $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$h = x - \lim_{N\to\infty} x_N, \text{ kjer je } x_N = \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Za $N > k$ je

$$\langle x - x_N, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle = 0.$$

Sledi $h = x - x_N = 0$. $\square$

Opomba: v neskončno dimenzionalnih prostorih se t. i. linearna dimenzija lahko ne ujema s koordinatnostjo kompletnega ortonormiranega sistema.

9.1 Fourierove vrste v $L^2(0, 1)$

Ideja: aproksimirati poljubno funkcijo s preprostejšimi funkcijami:

- "Vsaka funkcija je limita polinomov." (Taylor)
- "Vsaka funkcija je limita trigonometričnih funkcij (valovanj)." (Fourier, Bernoulli, Euler)

Seveda se moramo povprašati po pomenu besed "vsaka" in "limita."

Za vsak $n \in \mathbb{Z}$ definirajmo $e_n : \mathbb{R} \to \{\zeta \in \mathbb{C};\ |\zeta| = 1\}$ s predpisom

$$e_n \coloneqq e^{2\pi i n x}.$$

To so enoperiodične funkcije ($e_n(x + 1) = e_n(x)$); imenujemo jih *osnovne trigonometrične funkcije*. Spomnimo se formule

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Pogoj, da lahko f aproksimiramo z e_n, je ta, da je tudi f enoperiodična. Takšne funkcije lahko enačimo s funkcijami, ki so definirane na enotski krožnici v $\mathbb{C}$. Alternativno lahko gledamo funkcije, ki so definirane na intervalu $I = [0, 1]$ s pogojem $f(0) = f(1)$. Spomnimo, da je skalarni produkt na $L^2(I)$ definiran kot

$$\langle f, g \rangle_{L^2(I)} \coloneqq \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Hitro lahko vidimo, da je $\mathcal{E} \coloneqq \{e_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormiran sistem v $L^2(I)$, saj velja

$$\int_0^1 e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i m x}\, \mathrm{d}x = \delta_{mn}.$$

Izkaže pa se celo, da je $\mathcal{E}$ kompleten ONS (KONS) v $L^2(I)$.

Definicija 9.19. Za $f \in L^2(I)$ je njen n-ti *Fourierov koeficient* definiran kot

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} \, \mathrm{d}x.$$

Fourierova vrsta za f v točki $x \in I$ je tedaj vrsta

$$\begin{aligned} Sf(x) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \\ &= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{f}(n) e^{2\pi i n x} + \hat{f}(-n) e^{-2\pi i n x} \right] \\ &= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x) \right], \end{aligned}$$

kjer sta

$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2\pi n x) \, \mathrm{d}x$$

in

$$b_n = i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] = 2 \int_0^1 f(x) \sin(2\pi n x) \, \mathrm{d}x.$$

Velja še $\hat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$ in $\hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + i b_k)$.

Posledica 9.20. *Iz tega, da je $\mathcal{E}$ KONS v $L^2(I)$, sledi, da za vsak $f \in L^2(I)$ velja*

$$\lim_{N \to \infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e_n \right\|_{L^2(I)} = 0.$$

Obstajajo tudi nekoliko drugačni prostori, na primer za $p > 1$ lahko definiramo

$$L^p(I) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C};\ \|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Izrek 9.21. *Za $1 < p < \infty$ velja*

$$\lim_{N \to \infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e_n \right\|_{L^p(I)} = 0.$$

Dokaz. Dokaz za poljuben p je bistveno težji in daljši kot za $p = 2$. □

Izrek 9.22 (L. Carleson, 1966)**.** *Če je $f \in L^2(I)$, potem $S_N f$ konvergira po točkah k f skoraj povsod na $I = [0,1]$.*

Izrek 9.23. *Naj bo $f : I \to \mathbb{C}$. Privzamemo naslednje lastnosti:*

- *f je odsekoma zvezna (torej zvezna povsod na I razen v končno mnogo točkah $X = x_1, ..., x_n$), v katerih pa ima levo in desno limito: $f(x^+) := \lim_{\delta\searrow 0} f(x+\delta)$ in $f(x^-) := \lim_{\delta\searrow 0} f(x-\delta)$. Točkam nezveznosti rečemo tudi skoki funkcije f;*
- *na $I \setminus X$ je funkcija odvedljiva in je odvod f' omejen.*

(Lahko pa namesto tega damo eno močnejšo predpostavko: funkcija je odsekoma zvezno odvedljiva.) Tedaj

$$\lim_{N\to\infty} S_N f = \frac{f(x^+) + f(x-)}{2} \quad \forall x \in I.$$

Opomba: sklep ni odvisen od tega, kako izberemo $f(x_j)$. Trditev pove tudi to, da ob danih predpostavkah v točkah $x \in I$, kjer je f zvezna, sledi $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$.

Parsevalova identiteta za $\mathcal{E}$ nam pove: če je $f \in L^2(I)$, potem

$$\|f\|^2_{L^2(I)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Zgled 9.24. Naj bo $f = \chi_{[0,1/2]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ (glej Definicijo karakteristične funkcije 2.16). Tedaj je

$$\|f\|^2_{L^2(I)} = \int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \chi_{[0,1/2]} \,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Za $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx} \,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} e^{-2\pi inx} \,\mathrm{d}x = \frac{e^{-2\pi inx}}{-2\pi in}\bigg|_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1-e^{-i\pi n}}{2\pi in} = \frac{1-(-1)^n}{2\pi in} = \frac{1}{\pi in}\begin{cases} 1; & n \text{ lih}, \\ 0; & n \text{ sod} \end{cases}$$

in

$$\hat{f}(0) = \int_0^1 f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Sedaj iz Parsevalove identitete sledi

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{n \text{ lih} \\ n\in\mathbb{Z}}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} 2 \sum_{\substack{n \text{ lih} \\ n\in\mathbb{N}}} \frac{1}{n^2}.$$

Dobili smo

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}.$$

Označimo

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Imamo

$$s = \sum_{n \text{ lih}} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ sod}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{s}{4}.$$

Sledi še

$$s = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Izračunali smo, da je vsota kvadratov inverzov vseh naravnih števil enaka $\pi^2/6$. To je samo poseben primer bolj splošne funkcije, imenovane *Riemannova ζ funkcija*, ki je definirana kot $\zeta : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Domeno funkcije se da enostavno razširiti na vsa kompleksna števila z realnim delom večjim od ena, z nekaj več truda pa tudi na skoraj celotno kompleksno ravnino. Poglejmo si še, kakšni so nekateri $S_N f$. Velja (samo za lihe n, za sode je $a_n = b_n = 0$):

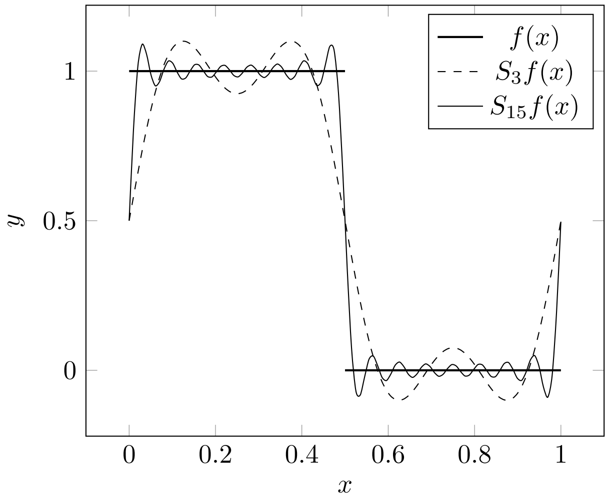
$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = 0,$$

$$b_n = i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] = \frac{2}{n\pi}.$$

Fourierova vrsta je torej

$$\chi_{[0,1/2]} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin(2\pi(2n-1)x).$$

Nekaj približkov je prikazanih na sliki 9.1.



Slika 9.1: Graf prikazuje funkcijo $f = \chi_{[0,1/2]}$ (z debelo), Fourierovo delno vsoto $S_3 f(x)$ (z črtkano) in Fourierovo delno vsoto $S_{15} f(x)$ (s polno). Razvidno je, da več členov v vrsti da boljši približek.

Lema 9.25 (*Riemann-Lebesgueva lema*)**.** *Za vsak $f \in L^2(I)$ velja*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = 0$$

in

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = 0$$

Dokaz. Dovolj je dokazati za realne funkcije f. Če je f kompleksna, sta $\Re f, \Im f \in L^2$, zato lahko uporabimo izrek na vsakem delu posebej, saj

$$\int_0^1 F(x)\cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Re F(x)\cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x + i\int_0^1 \Im F(x)\cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x.$$

Naj bo sedaj f realna. Velja $\hat{f}(n) = a_n/2 - ib_n/2$. Hkrati iz $f \in L^2$ po Parsevalovi identiteti sledi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty.$$

Iz tega sledi

$$\lim_{n\to\infty} |\hat{f}(n)|^2 = 0,$$

torej tudi $\frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2)$ limitira proti nič. Velja tudi $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, saj je f realna. Iz tega naredimo oceno

$$0 \leq a_n^2 \leq 4|\hat{f}(n)|^2.$$

Ker desni člen limitira k ničli, mora tudi a_n in podobno velja za b_n. □

Izrek 9.26 (*Wilbraham-Gibbsov fenomen*)**.** *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odsekoma zvezno odvedljiva funkcija na $I = [0, 1]$. Naj ima v neki točki $x_0 \in (0, 1)$ levo limito $f(x_0^-)$, desno limito $f(x_0^+)$ in v točki x_0 skok velikosti a:*

$$f(x_0^+) - f(x_0^-) = a \neq 0.$$

Velja

$$\lim_{n\to\infty} S_N f\left(x_0 + \frac{1}{2N}\right) = f(x_0^+) + a \cdot 0{,}0895...,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_N f\left(x_0 - \frac{1}{2N}\right) = f(x_0^-) - a \cdot 0{,}0895...$$

in

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Izrek nam pove, da bo v točki nezveznosti Fourierova vrsta "poskočila" za okoli 9 % višine skoka stran od smeri skoka pred in po skoku. Fenomen je moč opaziti na sliki 9.1. Številka 9 % pride iz izraza:

$$0{,}089\,489\,872\,235... = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{Si}(\pi)}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Stvarno kazalo