

Vrtavka

Bor Kokovnik

Maj 2024

1 Uvod

Vrtavko imenujemo rotirajoče togo telo, katerega os lahko spreminja smer v prostoru in je vpeta (podprta) le v eni točki. Pri analizi gibanja vrtavke je potrebno definirati tri različne osi:

Geometrijska os vrtavke \mathbf{z} . Vrtavka je v našem primeru rotacijsko simetrično togo telo, ki ima eno glavno os tenzorja vztrajnostnega momenta J_{33} v smeri simetrijske osi, drugi dve glavni osi pa sta pravokotni nanjo. Vztrajnostna momenta okrog teh dveh osi sta enaka ($J_{11} = J_{22}$). Ostale komponente tenzorja so enake 0.

Vektor kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ določa trenutno smer osi vrtenja.

Tretjo os določa vektor vrtilne količine $\boldsymbol{\Gamma} = (\Gamma_i)$, ki je s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega} = (\omega_i)$ povezan preko vztrajnostnega tenzorja J_{ij} z enačbo $\Gamma_i = J_{ij}\omega_j$. Izbrati si je treba še primeren koordinatni sistem. Gibanje opazujemo v laboratorijskem sistemu x', y' in z' . Os z' ima smer navpičnice, enačbe gibanja pa najlažje zapišemo v lastnem sistemu telesa x, y in z . Koordinatne osi so vezane na togo telo in imajo smeri glavnih osi tenzorja vztrajnostnega momenta. V tem sistemu ima torej ta tenzor diagonalno obliko in vrtilna količina je:

$$\Gamma_x = J_{11}\omega_x, \quad \Gamma_y = J_{22}\omega_y, \quad \Gamma_z = J_{33}\omega_z. \quad (1)$$

Za simetrično vrtavko velja, da vsi trije vektorji \mathbf{z} , $\boldsymbol{\omega}$ in $\boldsymbol{\Gamma}$ vedno ležijo v eni ravnini, ki jo npr. določata $\boldsymbol{\omega}$ in \mathbf{z} .

Za simetrično vrtavko pod vplivom težnosti je še mogoče dobiti točne rešitve Eulerjevih enačb, to je enačb, ki opisujejo gibanje vrtavke. Gibanje je precej zapleteno in ga opišemo s tem, kako se os vrtavke giblje v prostoru (določena je s kotoma θ in φ). Vektor $\boldsymbol{\Gamma}$ ni več konstanten, ohranja pa se energija in tudi ω_z je konstanta gibanja, saj okoli vzdolžne osi vrtavke ni navora.

Pri tej vaji bomo obravnavali primer hitre vrtavke, za katero velja, da je kinetična energija mnogo večja od potencialne ($1/2 J \omega_z^2 \gg 2mgl$). Naklonski kot θ se spreminja med θ_0 in θ_1 in v tem približku hitre vrtavke dobimo

$$\cos(\theta_0) - \cos(\theta_1) \approx \frac{J_{11}}{J_{33}} \frac{2mgl}{J_{33}\omega_z^2} \sin^2(\theta_0). \quad (2)$$

Način gibanja kota θ je seveda odvisen od začetnih pogojev in od dušenja. Vrtavka niha med skrajnima vrednostma kota θ z nutacijsko kotno hitrostjo ω_N :

$$\omega_N = \frac{J_{33}}{J_{11}} \omega_z, \quad (3)$$

in se obenem giblje okrog osi z' (navpičnice v prostoru) s precesijsko kotno hitrostjo ω_{pr} :

$$\omega_{pr} = \frac{mgl}{J_{33}\omega_z} \quad (4)$$

Na splošno dobimo obe vrsti gibanja osi: nutacijo in precesijo. Frekvenca nutacije (3) bo v našem primeru primerljiva s frekvenco vrtenja vrtavke in se zmanjšuje pri večjih oddaljenostih uteži od težišča. Čim hitreje se vrti vrtavka, tem težje je vzbuditi nutacijo in je tudi bolj dušena. Nutacija je dušena zaradi trenja.

2 Potrebščine

- krogla s podnožjem in priborom (palica, utež in ploščica z vzorcem)
- kompresor
- stroboskop
- stoparica

3 Naloga

Izmeri precesijsko (ω_{pr}) in nutacijsko kotno hitrost (ω_N) v odvisnosti od kotne hitrosti (ω_z) vrtavke. Meri pri različnih frekvencah vrtenja in različnih pozicijah uteži.

4 Obdelava meritev

Datum izvedbe: 23. 5. 2024

Za izračun vztrajnostnih momentov upoštevamo formule za vztrajnostne momente različnih teles:

$$\begin{aligned} J_{krogla} &= \frac{2}{5}mr^2, \\ J_{valj,z} &= \frac{1}{2}mr^2, \\ J_{valj,x,y} &= m\left(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{12}h^2\right). \end{aligned}$$

Upoštevati moramo še težišče telesa, katerega dobimo preko enačbe

$$l = \frac{\sum_i m_i r_i^*}{\sum_i m_i},$$

in Steinerjev izrek

$$J = J^* + mr^{*2}.$$

Pri vztrajnostnem momentu okoli z osi ne potrebujemo težišča ali Steinerjevega izreka, ker so vsa telesa osno simetrična. Ko uporabimo zgornje enačbe dobimo:

$$\begin{aligned} J_{33} &= 1388,4 \text{ g cm}^2 \\ J_{11} &= 3280,3 \text{ g cm}^2 + L^2 18 \text{ g} \\ l &= 0,426 \text{ cm} + 0,031L \end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo pričakovane vrednosti frekvenc in jih primerjamo z izmerjenimi. Podatki so prikazani v tabeli 1.

Tabela 1: Tabela izmerjenih in izračunanih vrednosti precesijske in nutacijske frekvenc pri različnih parametrih vrtavke.

ν [RPM] ± 10 RPM	Izmerjeno		Izračunano	
	ω_n [1/s]	ω_{pr} [1/s]	ω_n [1/s]	ω_{pr} [1/s]
Utež na dnu, $L = 3,8$ cm				
500	11 ± 1	18 ± 3	$16,4 \pm 0,5$	$4,2 \pm 0,1$
600	19 ± 3	$4,3 \pm 0,2$	$19,6 \pm 0,5$	$3,52 \pm 0,09$
800	$27,3 \pm 6$	$2,90 \pm 0,07$	$26,2 \pm 0,5$	$2,64 \pm 0,07$
Utež na sredini, $L = 5,54$ cm				
500	$7,4 \pm 0,4$	$6,8 \pm 0,4$	$19,0 \pm 0,6$	$4,6 \pm 0,1$
600	16 ± 2	$4,8 \pm 0,2$	$22,8 \pm 0,6$	$3,9 \pm 0,1$
800	25 ± 5	$3,17 \pm 0,08$	$30,3 \pm 0,6$	$2,90 \pm 0,05$
Utež na vrhu, $L = 8,04$ cm				
500	$8,4 \pm 0,6$	$9,0 \pm 0,6$	$20,5 \pm 0,6$	$5,2 \pm 0,2$
600	$10,8 \pm 0,9$	$6,3 \pm 0,3$	$24,6 \pm 0,6$	$4,4 \pm 0,1$
800	18 ± 3	$3,5 \pm 0,1$	$32,9 \pm 0,6$	$3,3 \pm 0,06$

5 Zaključek

Med meritvami in izračunanimi vrednostmi vidimo veliko odstopanje. Največje je, ko je utež na vrhu, kar je pričakovano, saj je takrat veliko težje zavrteti vrtavko in se slabše vidi opazovane procese, tako da je bila natančnost meritev slabša. Manjše odstopanje vidimo pri višjih frekvencah, kar je ponovno pričakovano, saj je takrat vrtavka stabilnejša in je približek hitre vrtavke bolj natančen.