

# Piezoelektričnost

Bor Kokovnik

Januar 2024

## 1 Uvod

Kristali v feroelektričnem stanju so tudi piezoelektrični: mehanska obremenitev spremeni električno polarizacijo, in obratno, zunanje električno polje, v katerem je kristal, povzroči deformacijo kristala. Vzrok za to je sklopitev med mehansko in električno energijo kristala. Piezoelektrični efekt dobimo pri kristalih, ki nimajo centra simetrije. V praksi pogosto srečujemo podskupino piezoelektrikov imenovana piroelektriki, ki pa imajo polarno os in njihova polarizacija je temperaturno odvisna.

Piezoelektriki se odzovejo na deformacijo s polarizacijo snovi. Lokalno deformacijo povzročeno v neki točki s silo  $d\mathbf{F} = (d\mathbf{F}_i)$ ;  $i = 1, 2, 3$ , podamo z napetostnim tenzorjem  $T_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ , definiranim z enačbo (1):

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{dF_i}{dS_j} + \frac{dF_j}{dS_i} \right) \quad (1)$$

kjer so  $dS_i$ ;  $i = 1, 2, 3$  tri med seboj pravokotno-orientirane površine delovanja sile  $d\mathbf{F}$ . Elemente tenzorja  $T_{ij}$ , ki so v splošnem odvisni od pozicije v kristalu, dobimo tako: izberemo majhno ravno ploskvico velikosti  $dS$ , tako da je njena normala orientirana v določeno smer. Na tej ploskvici deluje en del kristala na drugega z majhno silo  $dF$ , katere smer se v splošnem ne ujema s smerjo normale na ploskvico. V izbranem koordinatnem sistemu postavimo na izbranem mestu v kristalu tri ploskvice, tako da so njihove normale vzporedne s koordinatnimi osmi. Te ploskvice označimo z  $dS_x$ ,  $dS_y$  in  $dS_z$ : npr. ploskvica  $dS_x$  je pravokotna na os  $x$ . Na vsaki od treh ploskvic deluje en del kristala na drugega s silo, ki ima komponente v smeri vseh treh osi. Pri oznaki komponente tenzorja  $T_{ij}$  pomenita indeksa po eno od treh koordinat, npr.  $T_{xy}$ . Odvod sile po ploskvi v izrazu za  $T_{ij}$ , npr.  $dF_x/dS_y$ , pomeni količnik med komponento  $x$  sile, ki deluje na ploskvico z normalo v smeri osi  $y$ , ter velikostjo te ploskvice. Pri piezoelektrikih je zveza med polarizacijo kristala  $\mathbf{P}$  in mehansko napetostjo  $T_{ij}$  linearna in v splošnem določena s tenzorjem 3. reda iz enačbe (2):

$$P_i = d_{ijk} T_{jk} \quad (2)$$

Pri tem upoštevamo Einsteinovo konvencijo, da na desni strani enačbe seštevamo po ponavljajočih indeksih  $j$  in  $k$ .

Elemente tenzorja  $d_{ijk}$  imenujemo "piezoelektrični moduli". Praktično jih merimo v izbranih smereh kristala. Električni naboj merimo na izbrani ploskvi, mehanska obremenitev pa je lahko tlak na ploskev, upogib ali torzija. Piezoelektrične materiale uporabljamo za merjenje sprememb tlaka in sil, kot mikrofone in generatorje ultrazvoka. Piezoelektriki so

pomembni tudi pri delovanju sodobnega vrstičnega tunelskega mikroskopa.

V primeru piezoelektrične keramike ima tenzor  $d_{ijk}$  tri neodvisne elemente. To so  $d_{131}$ ,  $d_{311}$  in  $d_{333}$ , če je os  $z$  izbrana vzporedno z začetno polarizacijo keramike. V našem primeru s silo  $\mathbf{F}$ , pravokotno na ploskev  $S$ , ustvarjamo (tlačno) napetost  $T = T_{33} = F/S$  in povzročimo nastanek polarizacije  $P_3 = d_{333}T_{33} = dT$ . V snovi vzdolž  $z$ -smeri velja med polarizacijo  $P_3$  in gostoto električnega polja  $D$  zveza po enačbi (3):

$$D = \epsilon\epsilon_0 E + dT \quad (3)$$

kjer je  $\epsilon$  dielektrična konstanta piezoelektrika pri konstantni napetosti in temperaturi in  $d = d_{333}$ . Naboj na eni ploskvi kondenzatorja oz. ploščice keramike je  $q = DS$  in z upoštevanjem povezave med električno jakostjo in napetostjo  $E = U/b$  dobimo, da je naboj dobljen po enačbi (4):

$$q = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{b} U + dF \quad (4)$$

Opazimo, da je prvi člen le drug način, da napišemo naboj na ploščatem kondenzatorju ploščine  $S$  in debeline  $b$  s kapaciteto, izračunano po enačbi (5):

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{b} \quad (5)$$

Z upoštevanjem tega naboja na kondenzatorju izrazimo z enačbo (6):

$$q = CU + dF \quad (6)$$

Kondenzator se prazni preko upornika  $R$  s tokom  $I = -\dot{q}$ . Upor  $R$  je v našem primeru enak  $(5,0 \pm 0,1) \text{ G}\Omega$ . Kot je prikazano na sliki 1, padec napetosti na uporniku, izračunan po enačbi (7):

$$U = RI = -R\dot{q} \quad (7)$$

spremljamo na osciloskopu preko povratno vezanega operacijskega ojačevalca (napetostnega sledilnika).

Iz enačb (6) in (7) dobimo diferencialno enačbo za časovni potek napetosti, enačbo (8):

$$\dot{U} = -\frac{1}{\tau}U - \frac{d}{C}\dot{F} \quad (8)$$

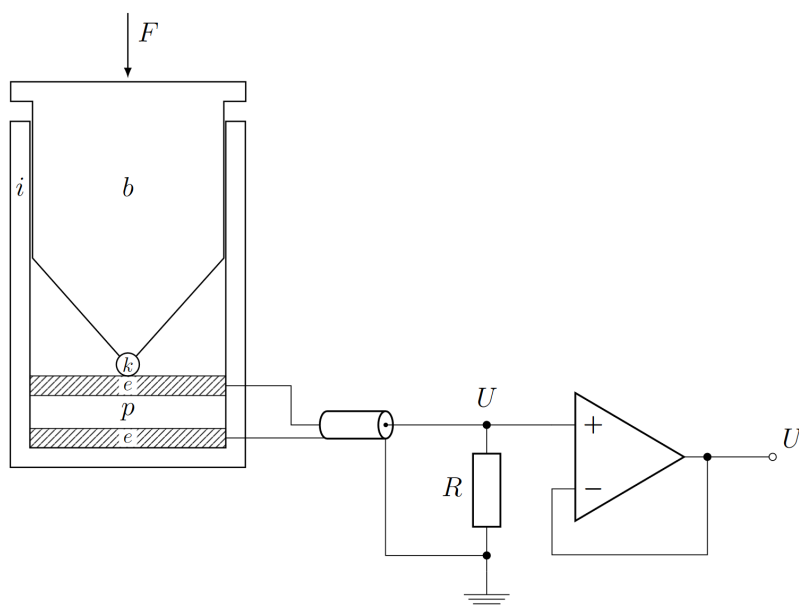
pri čemer uvedemo časovno konstanto  $\tau = RC$ . Sedaj obravnavajmo oba predvidena scenarija spremembe napetosti na kristalu, za katere velja enačba (9):

$$F_S(t) = F_0\Theta(st) \quad (9)$$

kjer je  $F_0$  teža uteži, predznak  $s = +$  pa ustreza obremenjevanju in  $s = -$  razbremenjevanju kristala. Tukaj uporabimo še enotsko stopnico  $\Theta$ . Sedaj vstavimo časovni potek sile (9) v enačbo za napetost (8) in jo rešimo pri začetnem pogoju  $U(0^-) = 0$ . Z uvedbo konstante  $U_0 = -dF_0/C$  dobimo rešitev, enačbo (10):

$$U_S(t) = sU_0e^{-t/\tau} \quad (10)$$

veljavno za  $t > 0$ . Opazimo, da je pri obremenjevanju in razbremenjevanju skok napetosti v nasprotnih smereh.



Slika 1: Shema meritve. V valjasti posodi iz izolacijskega materiala ( $i$ ) je okrogla plošča iz piezokeramike ( $p$ ) s premerom  $= (38,0 \pm 0,2)$  mm in debelino  $= (6,5 \pm 0,2)$  mm med dvema elektrodama ( $e$ ), od katerih je spodnja ozemljena. Sila  $F$  se prenaša preko bata ( $b$ ) in kroglice ( $k$ ) na piezoelektrik. Napetost merimo preko operacijskega ojačevalca.

## 2 Potrebščine

- merilna valjasta posoda s piezoelektrično keramiko s premerom  $2R = (38,0 \pm 0,2)$  mm in debelino  $h = (6,5 \pm 0,2)$  mm
- baterijsko napajanje elektrometrski ojačevalnik s preduporom  $R = (5.0 \pm 0.1)$  G
- digitalni osciloskop Siglent SDS 1104X-E
- USB ključ
- uteži za približno 200 g, 500 g in 1 kg

## 3 Naloga

1. Določi dielektrično konstanto  $\epsilon$  vzorca iz piezoelektrične keramike.
2. Izračunaj piezoelektrični koeficient  $d$  keramike.

## 4 Meritve

Datum Izvedbe eksperimenta: 4. 12. 2023

Mase, uporabljene za obremenitve in razbremenitve:  $m_1 = 196$  g,  $m_2 = 504$  g,  $m_3 = 1008$  g, vse z negotovostjo  $\pm 1$  g.

Za iskanje vrednosti  $\tau$  s pomočjo tangente na izmerjene podatke sem se najprej znebil šuma s pomočjo Savitzky-Golay filtra in nato numerično poiskal naklon tangente. Na podlagi točke  $t_2$ , kjer tangenta seka  $x$ -os, upoštevajoč odmik grafa vzdolž  $y$ -osi, in vrednosti na  $x$ -osi  $t_1$ , pri kateri je bila tangenta določena sem po enačbi  $\tau = t_2 - t_1$  določil iskano vrednost. Za vsak graf sem postopek ponovil pri 12 različnih vrednostih  $t_1$  in izračunal povprečno vrednost. Negotovost sem ocenil na podlagi standardne deviacije vseh teh vrednosti.

Tabela 1: Tabela vrednosti  $\tau$  grafov iz slik 3, določenih preko tangent.

Pripadajoči graf	$\tau$ [s]
3a	$(7,6 \pm 0,4)$
3b	$(7,83 \pm 0,08)$
3c	$(7,5 \pm 0,4)$
3d	$(7,2 \pm 0,4)$
3e	$(8,0 \pm 1)$
3f	$(7,8 \pm 0,2)$

Drugi način, da določimo časovno konstanto  $\tau$  je s pomočjo fita enačbe (10). Negotovost fitanega parametra je prišla iz kovariančne matrike, ki jo vrne python funkcija `curve_fit`, a je nižja, kot bi pričakoval, več o tem v naslednjem delu poročila. Vrednost  $U_0$  je bila določena ročno iz grafov 3 tako, da da sem poiskal točko, kjer fitana krivulja seka navpični skok ob obremenitvi oz. razbremenitvi. Negotovost sem ocenil glede na natančnost odčitavanja grafa.

Tabela 2: Tabela vrednosti  $\tau$  in  $U_0$  grafov iz slik 3, določenih preko fita.

Pripadajoči graf	$\tau$ [s]	$U_0$ [V]
3a	$(7,8972 \pm 0,0003)$	$(0,66 \pm 0,5)$
3b	$(7,8579 \pm 0,0005)$	$(-0,66 \pm 0,5)$
3c	$(7,3579 \pm 0,0004)$	$(0,27 \pm 0,5)$
3d	$(7,1702 \pm 0,0005)$	$(-0,23 \pm 0,5)$
3e	$(7,9236 \pm 0,0004)$	$(1,32 \pm 0,5)$
3f	$(7,9022 \pm 0,0004)$	$(-1,31 \pm 0,5)$

Preko obeh metod pridemo do različnih vrednosti  $\tau$  in posledično različnih izračunanih  $\epsilon$  in  $C$ , kot vidimo iz tabel 1 in 2, vseeno pa se intervali negotovosti prekrivajo. Iz povprečnih vrednosti  $\tau$  vsake od metod lahko izračunamo pripadajoči vrednosti  $\epsilon$  in  $C$  preko definicije  $\tau$  in enačbe (5):

$$\begin{aligned}
\epsilon_{tang} &= (1000 \pm 40) \\
\epsilon_{fit} &= (1000 \pm 40) \\
C_{tang} &= (1,55 \pm 0,03) \text{ nF} \\
C_{fit} &= (1,55 \pm 0,03) \text{ nF}
\end{aligned}$$

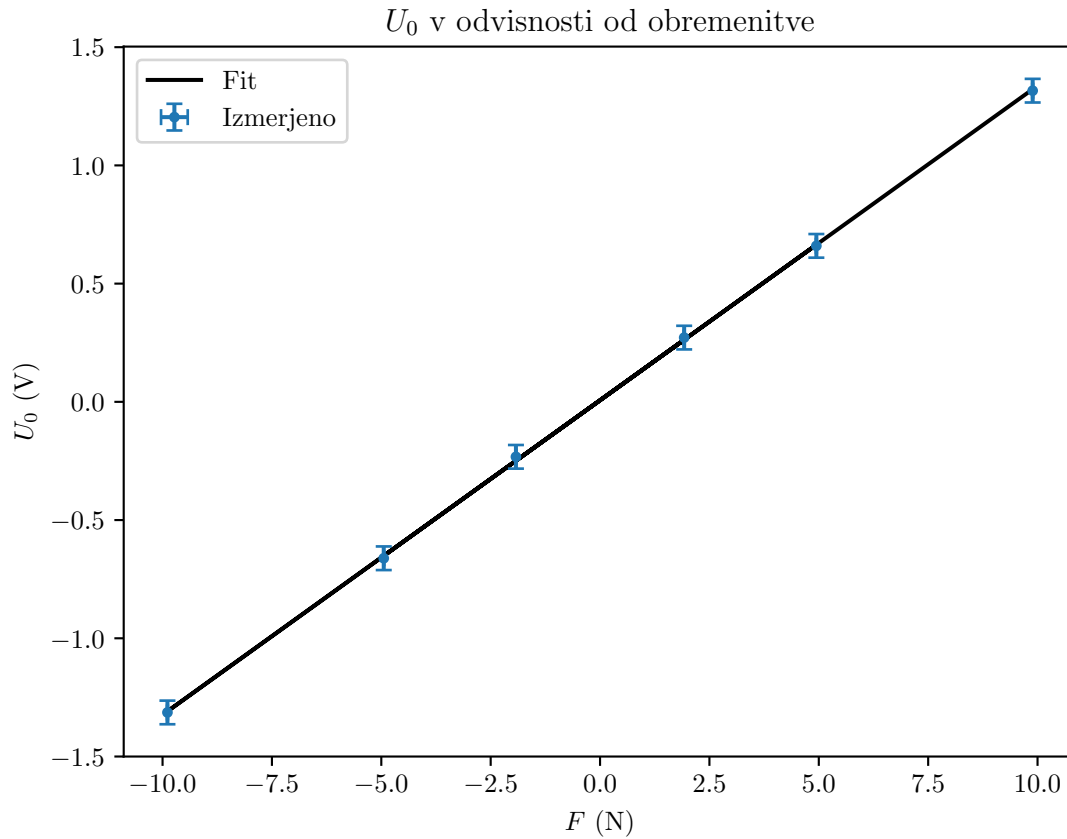
Indeks "tang" označuje vrednost, izračunano iz podatkov, določenih preko metode s tangentami, indeks "fit" pa tiste, ki so določeni preko fitanja. Vidimo, da so vrednosti znotraj negotovosti identične. Razlog, da so končne negotovosti tako podobne je visoka negotovost podanih vrednosti, kot so upornost in dimenzije materiala, ki prevladajo nad nižjimi

negotovostmi meritev.

Iz vrednosti  $U_0$  iz tabele 2 v odvisnosti od obremenitve lahko določimo koeficient  $k$ , preko katerega bomo izračunali  $d$  po enačbi, ki jo izpeljemo iz enačbe (6):

$$d = kC$$

kjer je  $C$  kapacitivnost in  $k$  naklon fitane premice na sliki 2.

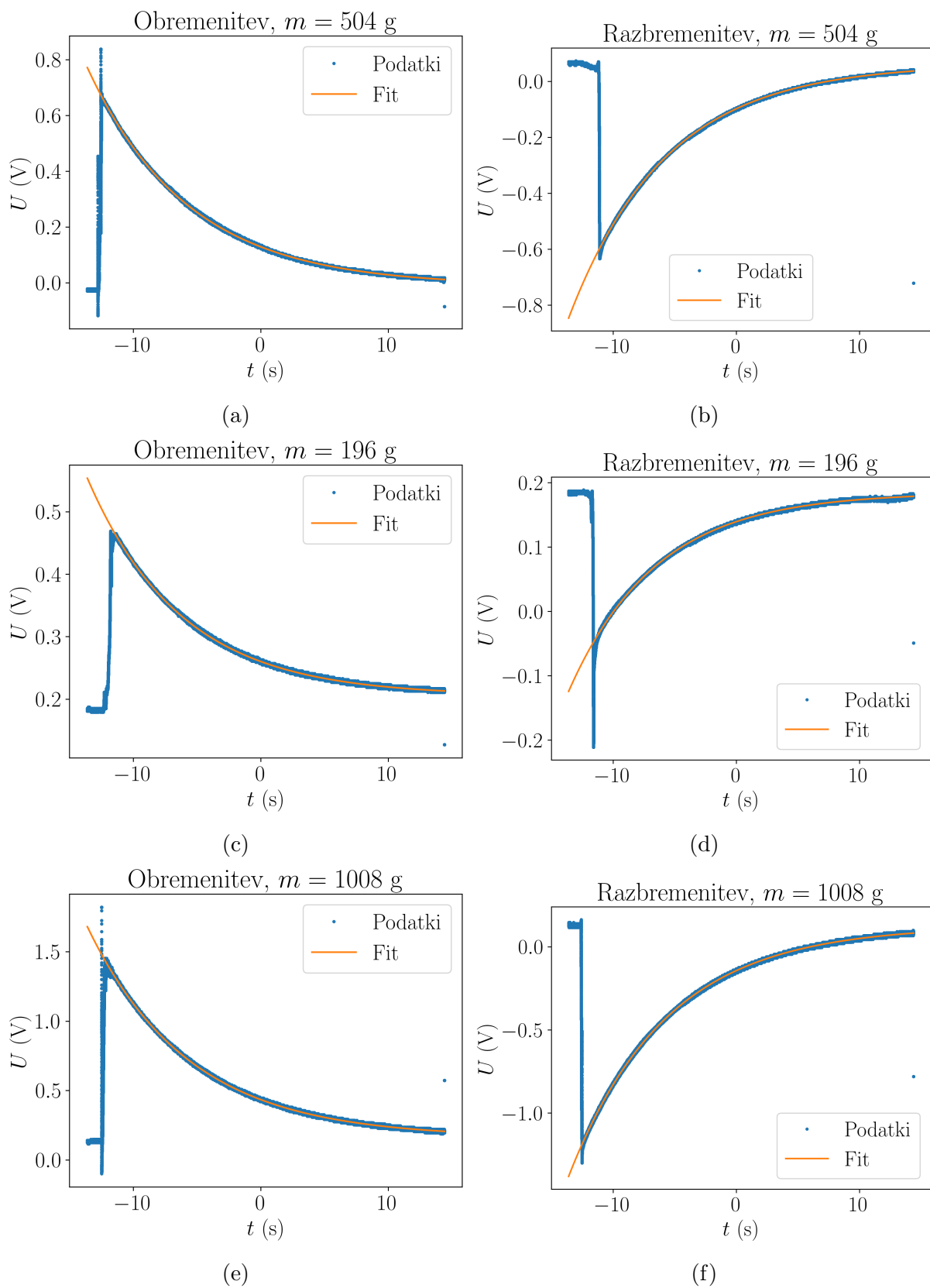


Slika 2: Graf napetosti  $U_0$  v odvisnosti od obremenitve.

$$k = (0,1330 \pm 0,0007) \frac{\text{V}}{\text{N}}$$

$$d_{tang} = (0,207 \pm 0,004) \frac{\text{nm}}{\text{V}}$$

$$d_{fit} = (0,206 \pm 0,004) \frac{\text{nm}}{\text{V}}$$



Slika 3: Časovne odvisnosti napetosti pri obremenitvah, (a), (c), (e), in razbremenitvah, (b), (d), (f), pri različnih masah. Fiti na podatke so označeni z oranžno krivuljo.

## 5 Analiza rezultatov

Vse izmerjene in izračunane vrednosti so smiselne in se znotraj intervalov negotovosti ujemajo med sabo, ko jih določimo z različnimi metodami, in s pričakovanimi.

Negotovosti za vrednosti  $\tau$  v tabeli 2 so nižje, kot bi ocenil da so. Odčitane so bile iz kovariančne matrike, ki jo vrne python funkcija `curve_fit` skupaj s fitanimi parametri. Razlog za to bi bila lahko korelacija med parametri fita, ki bi močno vplivala na vrednost negotovosti. Negotovost bi lahko določil po kakšni bolj reprezentativni metodi, a sem jo kar zanemaril, ker vidimo, da je negotovost ostalih podatkov, ki so nam podani v nalogi toliko višja, da je relativno nizka negotovost fita zanemarljiva.