Prva domača naloga iz Matematike 3

Fizika, 2. letnik

9. november 2023

1.) [20] Naj bo $\vec{r}$ neka C^2 parametrizacija krivulje $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ in Π dana ravnina v $\mathbb{R}^3$. Privzemimo, da za neki $t \in \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{h\to 0} \frac{d(\vec{r}(t+h),\Pi)}{h^2} = 0,$$

kjer $d(\vec{x},\Pi)$ predstavlja oddaljenost točke $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ od ravnine Π.

Dokaži, da je tedaj Π pritisnjena ravnina za krivuljo γ v točki $\vec{r}(t)$.

2.) [5+25+10] Naj bo $\vec{r}$ neka C^2 parametrizacija krivulje $\gamma \subset \mathbb{R}^3$. Privzemimo, da za neki $t_0 \in \mathbb{R}$ velja

$$\vec{v}_0 := \dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0) \neq 0.$$

Na predavanjih smo dokazali, da tedaj obstaja $\delta > 0$, tako da za vse pare različnih števil $t_1, t_2 \in (t_0-\delta, t_0+\delta)\backslash\{t_0\} =: M_\delta$ velja, da so točke $\vec{r}(t_0), \vec{r}(t_1), \vec{r}(t_2)$ nekolinearne. Označimo s $\pi(t_1,t_2)$ ravnino v $\mathbb{R}^3$ skozi te tri točke.

(a) Zapiši formulo za enotsko normalo $\vec{n}(t_1,t_2)$ na ravnino $\pi(t_1,t_2)$, ki je zvezno odvisna od $(t_1,t_2) \in M_\delta \times M_\delta$.

(b) Naj bo $\varepsilon > 0$. Dokaži, da lahko $\delta > 0$ po potrebi zmanjšamo, tako da za vsak par $(t_1,t_2) \in M_\delta \times M_\delta$ velja ocena

$$\sin\Psi(t_1,t_2) \leqslant \frac{|\dot{\vec{r}}(t_0)| + |\ddot{\vec{r}}(t_0)|}{|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)|}\,\varepsilon,$$

kjer je $\Psi(t_1,t_2)$ kot med $\vec{v}_0$ in $\vec{n}(t_1,t_2)$.

Nasvet: s pomočjo funkcije

$$f(t) := \langle \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0),\, \vec{n}(t_1,t_2)\rangle$$

in Rolleovega izreka oceni $|\vec{v}_0 \times \vec{n}(t_1,t_2)|$.

(c) S pomočjo prejšnje točke sklepaj, da je

$$\lim_{t_1,t_2\to t_0} \vec{n}(t_1,t_2) = \pm\frac{\vec{v}_0}{|\vec{v}_0|}.$$

V tem smislu razumemo pritisnjeno ravnino kot "limito" ravnin $\pi(t_1,t_2)$.

3.) [5+25+15] Označimo

$$F(\alpha,\beta) := \int_0^\alpha \frac{dv}{(1-v)v^\beta}\,.$$

i) Za katere $\alpha, \beta > 0$ je $F(\alpha,\beta)$ dobro definirana?

ii) Dokaži ekvivalenco

$$\int_0^\alpha \frac{dv}{(1-v)v^\beta} \sim \frac{\alpha^{1-\beta}}{1-\beta} + \log\frac{1}{1-\alpha}\,. \tag{1}$$

Oznaka

$$F(\alpha,\beta) \sim G(\alpha,\beta)$$

pomeni, da obstajata konstanti $c, C > 0$, ki sta **neodvisni** od α, β in za kateri velja

$$cF(\alpha,\beta) \leqslant G(\alpha,\beta) \leqslant CF(\alpha,\beta) \qquad \text{za vse } \alpha, \beta.$$

Pomagaš si lahko tako, da:

- najprej obravnavaš primer $\alpha \leqslant 1/2$, kjer uporabiš, da je $1 - v \sim 1$ ter da je za vsak $c \in (0,1)$ funkcija $x \mapsto c^x/x$ padajoča na $(0,1)$;
- nato obravnavaš primer $\alpha \geqslant 1/2$, pri čemer integral razdeliš na dela

  $$\int_0^{1/4} + \int_{1/4}^\alpha = I_1 + I_2,$$

  ki ju obravnavaš ločeno. V oceni za I_1 upoštevaj, da za vsak $x > 0$ velja $x^{1-\beta} \sim 1$ enakomerno v β, ter spet $1 - v \sim 1$. V oceni za I_2 pa uporabi ekvivalenco $v^\beta \sim 1$, ki velja enakomerno v v ter β.

Vse predlagane lastnosti preveri.

Opomba. Iskano zvezo lahko razumemo kot varianto "logaritemsko-produktne formule za integrale". Namreč, (1) lahko zapišemo kot

$$\int fg \sim \int f + \int g$$

za $f(v) = (1-v)^{-1}$, $g(v) = v^{-\beta}$ in $\int \varphi = \int_0^\alpha \varphi(v)\,dv$, kar spominja na znano elementarno pravilo $\log(fg) = \log f + \log g$.

iii) Izračunaj (oz. poenostavi, kolikor se da) izraz

$$\frac{d}{d\alpha}F(\alpha,\alpha).$$

Izračun utemelji. Lahko si pomagaš s substitucijo $u = 1/v$.

4.) [5+5+5] Naj bo $P \subset \mathbb{R}^n$ kvader. Z $\mathcal{I}(P)$ označimo družino vseh omejenih realnih funkcij na P, ki so v Riemannovem smislu integrabilne. Z uporabo definicije Riemann-Darbouxovega integrala pokaži:

(a) Če sta $f, g \in \mathcal{I}(P)$, tedaj je tudi $f + g \in \mathcal{I}(P)$ in

$$\int_P (f+g)(x)\,dx = \int_P f(x)\,dx + \int_P g(x)\,dx\,.$$

(b) Če sta $f, g \in \mathcal{I}(P)$ in je $f \leqslant g$, tedaj je

$$\int_P f(x)\,dx \leqslant \int_P g(x)\,dx\,.$$

(c) Če je $f \in \mathcal{I}(P)$, je tudi $|f| \in \mathcal{I}(P)$ in velja

$$\left|\int_P f(x)\,dx\right| \leqslant \int_P |f(x)|\,dx.$$

5.) [25] Imejmo naslednja telesa v $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} C_x &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, y^2 + z^2 \leqslant 1\big\} \\ C_y &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + z^2 \leqslant 1\big\} \\ C_z &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}\,. \end{aligned}$$

Izračunaj $V(C_x \cap C_y \cap C_z)$.

6.) [20+10] Vzemimo $0 < a < b$. Naj bo $S_{a,b}$ homogeno območje med sferama $S(0,a)$ ter $S(0,b)$ v $\mathbb{R}^3$.

(a) Izračunaj povprečno oddaljenost d točke iz $S_{a,b}$ do težišča območja.

(b) Kako se d primerja s povprečjem obeh polmerov (je manjši, večji)? Ali je d lahko enak povprečju obeh polmerov?

7.) [10+10+10] Označimo $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

(a) Imejmo $a, b > 0$. Izračunaj ploščino lika

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2\,;\, x^a + y^b \leqslant 1\big\}\,.$$

(b) Imejmo $a, b, c > 0$. Izračunaj volumen telesa

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3\,;\, x^a + y^b + z^c \leqslant 1\big\}\,.$$

(c) Imejmo $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Izračunaj volumen telesa

$$\big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n\,;\, x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \ldots + x_n^{a_n} \leqslant 1\big\}\,.$$

Navodila: Rešujte samostojno. Vsak korak dobro utemeljite, bodisi z računom bodisi z navedbo rezultatov, ki smo jih dokazali na predavanjih. Vse zahtevane količine izračunajte eksplicitno, če se da, oz. poenostavite, kolikor lahko. Ni pa nujno, da imajo vse naloge elementarne rešitve. Tutorji bodo ocenjevali tudi prezentacijo. To pomeni, da morajo biti rešitve tudi s stilskega vidika dobro napisane: pričakujemo jasnost v izražanju in argumentiranju, nedvoumnost in doslednost oznak, smiselno izbiro vrstnega reda posameznih delov dokaza, doslednost v podrobnostih, popolno čitljivost (če bodo rešitve napisane na roko) itd.

Točkovanje: Število točk, ki ga prinese brezhibna rešitev posamezne naloge oz. katerega izmed njenih delov, je navedeno v oglatem oklepaju na začetku formulacije naloge. Največje število točk, ki ga lahko dosežete, je 100. Končni rezultat dobite takole:

- Seštejete rezultate pri vseh posameznih nalogah. Ker seštevek točk po posameznih nalogah presega 100, to pomeni, da lahko do maksimuma pridete z različnimi izbirami nalog, ki jih rešujete. Število nalog, ki se jih smete lotiti, ni omejeno s seštevkom točk ali kako drugače.
- Vzamete maksimum z 100.
- Odštejete število točk, ki vam iz skupnega rezultata 1. in 2. naloge manjka do 25. Npr. če imate po prvih dveh korakih 80 točk, hkrati ste pa pri 1. in 2. nalogi skupaj dosegli 15 točk, je vaš končni rezultat enak $80 - (25 - 15) = 70$. Če ste pa pri 1. in 2. nalogi dosegli vsaj 25 točk, tedaj vaš rezultat ostane nespremenjen (80).

Rok za oddajo je nedelja, 26. novembra 2023, ob 6. uri.