

Preslikave z uklonsko lečo

Bor Kokovnik

December 2023

1 Uvod

Pri izdelavi leč za zelo kratke valovne dolžine (žarke X, gama žarke) se ne moremo zanašati na lomni količnik materialov. Za omenjeni del spektra elektromagnetnega valovanja pa lahko uporabimo uklonske leče. S primerno obliko uklonskih odprtin lahko namreč dosežemo ojačanje (fokusiranje) svetlobe v izbrani smeri.

Za lažjo izvedbo vaje bomo namesto svetlobe uporabili ultrazvok. Zvočno valovanje v plinih in tekočinah opiše tlačno polje $p(\mathbf{r}) = p_0 + \delta p(\mathbf{r})$, kjer je p_0 ravnovesna vrednost zračnega tlaka in $p(\mathbf{r})$ zvočni tlak. Zvočni tlak v razdalji r od točkastega izvora, ki seva valovanje s krožno frekvenco ω zapišemo po enačbi (1):

$$\delta p(r, t) = A \frac{\exp[i(kr - \omega t)]}{r}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1)$$

kjer je k valovni vektor in λ valovna dolžina. Valovni vektor k in krožna frekvenca ω sta povezana s formulo $\omega = ck$, pri čemer je c hitrost zvoka. V adiabatnem približku je hitrost c dana z enačbo (2):

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}} \quad (2)$$

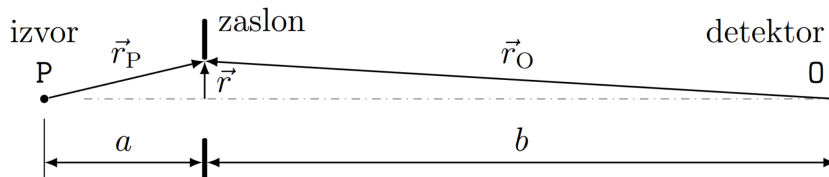
V zgornji enačbi je κ razmerje specifičnih toplot in za zrak znaša 1,4, R je plinska konstanta, T je absolutna temperatura in M povprečna molska masa, ki je za zrak približno 29 kg/kmol^{-1} .

Pri obravnavi uklona si lahko pomagamo z razumevanjem interference valovanja in s Huygensovim principom, ki pravi, da lahko vsako točko, do katere je valovanje že prišlo, obravnavamo kot izvor novega (sekundarnega) krogelnega valovanja. Vsaka točka na valovni fronti seva kot točkast izvor. Nova fronta je ovojnica krožnic, ki imajo sredice na valovni fronti in radij valovne dolžine. Ko valovna fronta naleti na zaslon z odprtino, se valovanje na zaslonu delno odbije in absorbira, v območju odprtine pa lahko spet uporabimo Huygensov princip, iz katerega sledi, da imamo tam sekundarne izvore valovanja. Na ta način konstruirane valovne fronte se širijo tudi v področje geometrijske sence, čemur pravimo uklon.

Valovanje iz različnih točk v zasloni odprtini interferira za zaslonom in s tem dobimo značilne uklonske slike. V posebnem primeru točkastega izvora izračunamo zvočni tlak v poljubni točki za zaslonom z enačbo (3):

$$\delta p(r_O) = C \int_{\text{odprtina}} \frac{\exp[ik(r_P + r_O)]}{r_P r_O} dS \quad (3)$$

kjer sta r_P in r_O razdalji od izvora do točke v odprtini zaslona in od te točke do opazovalca. Enačba (3) je približek in dobro velja, kadar so koti med vektorji r_O , r_P in pravokotnico na zaslon majhni.



Slika 1: Enostaven primer uklona, ko sta izvor in detektor na osi okrogle odprtine v velikem zaslonu. Oddaljenosti od zaslona do izvora in detektorja sta a in b .

Iz enačbe (3) vidimo, da vse točke v odprtini, ki so od osi enako oddaljene (npr. za r), prispevajo v integral deleže z enako fazo, saj sta zanje razdalji r_P in r_O konstantni. Okroglo odprtino zato lahko razdelimo s koncentričnimi krožnicami na kolobarje (Fresnelove cone), ki sevajo valovanje s približno enako fazo. Postopek je naslednji. Povečujemo od 0 radij okrogle odprtine in opazujemo, kaj se godi z razliko faz delnih valovanj, ki gresta skozi center odprtine in tik mimo roba. Fazo izračunamo v približku majhne odprtine po enačbi 4:

$$\Delta\Phi = k \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (4)$$

Če je razlika faz manjša ali enaka π , potem vsa delna valovanja med seboj konstruktivno interferirajo. Radiju r_1 , ki ustreza temu pogoju ($\Delta\Phi(r_1) = \pi$), bomo rekli radij prve Fresnelove cone. Kolobarju z notranjim radijem r_1 in zunanjim r_2 , za katerega je fazna razlika (4) enaka 2π , pravimo druga Fresnelova cona. Tudi za to Fresnelovo cono velja, da vsa delna valovanja, ki gredo skozi njo, konstruktivno interferirajo. Povprečna faza valovanja, ki doseže detektor skozi prvo Fresnelovo cono pa je za π različna od faze valovanja, ki ga prispeva prva cona. Radiji krožnic, ki ločujejo Fresnelove cone, si sledijo po enačbi (5):

$$r_n = \sqrt{n\lambda f}, \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (5)$$

kjer smo z f označili goriščno razdaljo leče po analogiji z enačbo leče pri optiki. Površina vseh Fresnelovih con je enaka, zato so tudi amplitude prispevkov s posameznih Fresnelovih con skoraj enake in vedno v proti-fazi glede na sosednje cone. vzdolž osi, bližje in dalj od točke O , pada amplituda počasneje, hitrost padanja pa podaja globinsko ostrino leče. Razdalji med točko maksimuma in točko na osi, v kateri pade amplituda valovanja na 70 %, rečemo globinska ostrina leče. Z njo ocenimo, za koliko smemo premakniti ravnino slike, da ostane slika še vedno zadovoljivo ostra. Ločljivost leče imenujemo najmanjši kot med točkastima izvoroma, ki ju v ravnini slike zaznamo kot dve ločeni točki.

2 Potrebščine

- Uklonski zaslon s premičnimi kolobarji (Fresnelovimi conami) v leseni škatli z zvočno izolacijo. Zunanji polmeri zaporednih Fresnelovih con so podani:

r_n	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
(mm)	48,7	68,9	84,4	97,4	108,9	119,3	128,9	137,8	146,1	154,1

- Ultrazvočni izvor in detektor, nameščena na mehanskih nosilcih s translatorji.
- Enota z elektroniko: generator sinusne napetosti s frekvenco (40.20 ± 0.04) kHz, predajačevalnik signala z detektorja, filter in ojačevalnik signala.
- Osciloskop in računalnik.

3 Naloga

1. zmeri valovno dolžino ultrazvoka in določi goriščno razdaljo uklonske leče.
2. Izmeri amplitudo in fazo zvočnega polja na mestu pričakovane slike izvora. Kot lečo uporabi najprej vsak posamezni kolobar in potem najmanj šest različnih kombinacij kolobarjev. (npr. [1, 2], [2, 4], [1, 3, 4], [1, 2, 3, 4], [6, 7, 8], [3, 5, 7])
3. Sestavi sodo ali liho uklonsko lečo in zanjo izmeri prečni in vzdolžni prerez uklonske slike. Iz meritev oceni kvaliteto preslikave.
4. Izmeri prečni profil uklonske slike za izvor, ki je izmaknjen z osi.

4 Meritve

Datum Izvedbe eksperimenta: 13. 11. 2023

4.1 Meritev valovne dolžine in goriščne razdalje

d [mm]	N
35,5	4
34,0	4
35,5	4

Tabela 1: Tabela števila prehodov maksimumov skozi izhodišče po določenem premiku merilnika.

Iz tabele 1 lahko določimo valovno dolžino, iz te pa preko enačbe (5) še goriščno razdaljo f in b :

$$\begin{aligned}\lambda &= (8,76 \pm 0,07) \text{ mm} \\ f &= (27,8 \pm 0,2) \text{ cm} \\ b &= (53,4 \pm 0,9) \text{ cm}\end{aligned}$$

4.2 Amplitude in faze različnih con

Meritve amplitud in faz posameznih con so prikazane v tabeli 2.

Meritve amplitud in faz kombinacij različnih con so prikazane v tabeli 3.

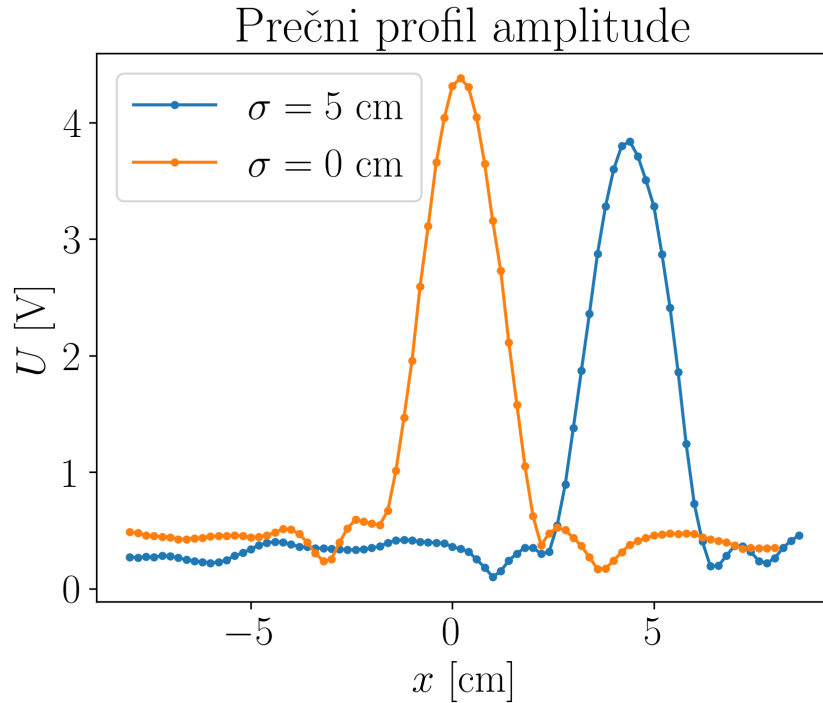
Cona	U_{p2p} [V] $\pm 0,02$ V	δ [rad] $\pm \frac{\pi}{4}$
1	3,02	0
2	2,22	π
3	2,30	0
4	2,42	π
5	2,54	0
6	2,46	π
7	2,26	0
8	2,32	π
9	1,82	0
10	2,06	π

Tabela 2: Tabela amplitud in faznih zamikov, kjer je odprta le ena cona.

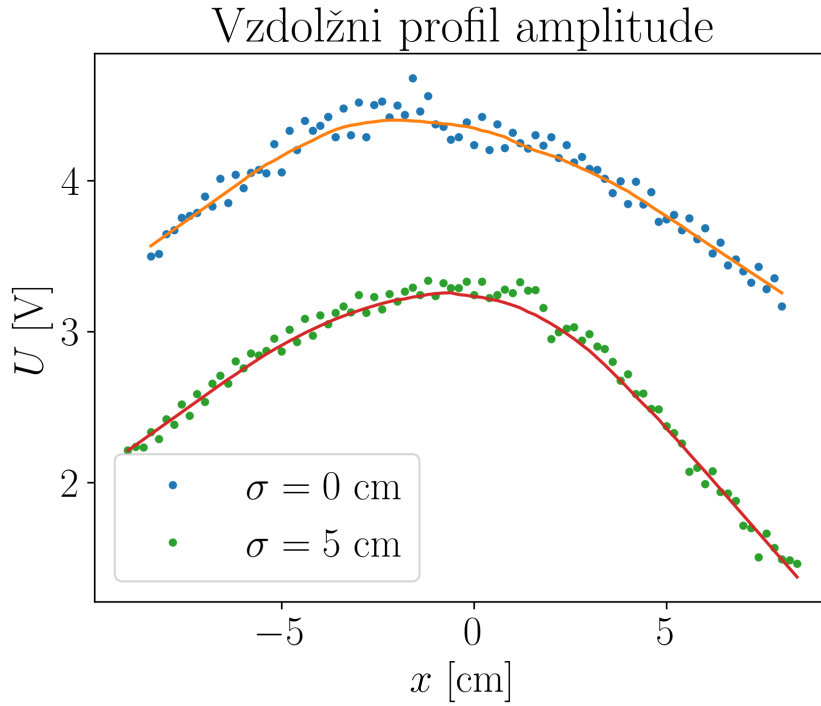
Cone	U_{p2p} [V] $\pm 0,02$ V	δ [rad] $\pm \frac{\pi}{4}$
1, 10	2,70	$\frac{\pi}{2}$
1, 3	5,00	0
1, 2, 3	2,48	$\frac{\pi}{4}$
1, 2, 3, 5	5,20	0
2, 4	5,00	π
2, 4, 6	6,96	π

Tabela 3: Tabela amplitud in faznih zamikov, kjer je odprtih več con hkrati.

4.3 Prečni in vzdolžni profil lihe leče



Slika 2: Prečni profil amplitude pri viru, ki leži na osi in takemu, ki je prečno izmaknjen za $\sigma = 5$ cm.



Slika 3: Vzdolžni profil amplitude pri viru, ki leži na osi in takemu, ki je prečno izmaknjen za $\sigma = 5$ cm. Rdeča in oranžna krivulja predstavljata podatke, zglajene s pomočjo Savitzky-Golay filtra.

Na podlagi grafa na sliki 2 bi ocenil, a bi vrh preslikave izmaknjenega izvora sovpadel s prvim minimumom preslikave centralnega izvora pri prečni izmaknjenosti $\sigma = 2,6$ cm.

Moji podatki pri vzdolžnih meritvah niso dovolj obsežni, da bi pokrili točko, kjer pade amplituda na 70 %, tako da sem poiskal točko, ko pade na 75 % maksimuma. Pri izmaknjenosti $\sigma = 0$ cm se to zgodi okoli oddaljenosti $z = 7,6$ cm, a gre zaradi nepopolne obdelave podatkov zgolj za oceno.

Iz grafa na sliki 3 lahko odčitamo še razdaljo po z osi, v kateri doseže amplituda maksimum. Ta znaša $z = -1,6$ cm, iz česar lahko izračunamo $b = 55\text{cm} - 1,6\text{ cm} = 53,4$ cm, kar je natanko toliko, kot smo izračunali v 4.1.

5 Analiza rezultatov

Vse vrednosti, ki opisujejo kvaliteto preslikave so zgolj ocene, tako da zaradi velike ne-natančnosti zraven nisem pisal negotovosti. Primerjava je bolj kvalitativna kot kvantitativna.

Pri obdelavi podatkov sem imel problem s fitanjem krivulj na podatke, ker te ne sledijo nobeni elementarni funkciji, tako da sem se moral zanašati na filtre, ki so mi, ponekod nepopolno, zgladili podatke. Razlog za pomanjkljivo obdelavo podatkov je slabo znanje na področju optike na tej stopnji izobrazbe.

Pri meritvah amplitud in faznih zamikov kombinacij con sem opazil neobičajno obnašanje osciloskopa, kjer je fazni zamik nekoliko drsel iz ene strani proti drugi, kar je vodilo do

nekoliko nenatančnih meritev le-tega. Pojava ne znam pojasniti.

Če primerjamo prečni profil amplitude v $\sigma = 0$ cm in $\sigma = 5$ cm opazimo razliko v amplitudi, ne pa v širini krivulje. To nam pove, da ni izmaknjena slika znotraj negotovosti meritve nič bolj razmazana kot tista na osi. Razliko pa vidimo pri vzdolžnem profilu amplitude, kjer ima izmaknjena meritev poleg nižje amplitude tudi opazno zmanjšano globinsko ostrino $z_{iz} = 4,6$ cm v primerjavi s centralno okoli $z_0 = 7,6$ cm.