Upogib

Bor Kokovnik

Januar 2024

1 Uvod

Palica iz elastične snovi se prožno deformira, če nanjo deluje v vzdolžni smeri par nasprotno enakih sil na nasprotnih koncih palice. Pri nateznih silah se palica podaljša, pri tlačnih pa skrči. Sprememba njene dolžine ΔF v odvisnosti od sile F je podana z enačbo (1), Hookovim zakonom:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} \tag{1}$$

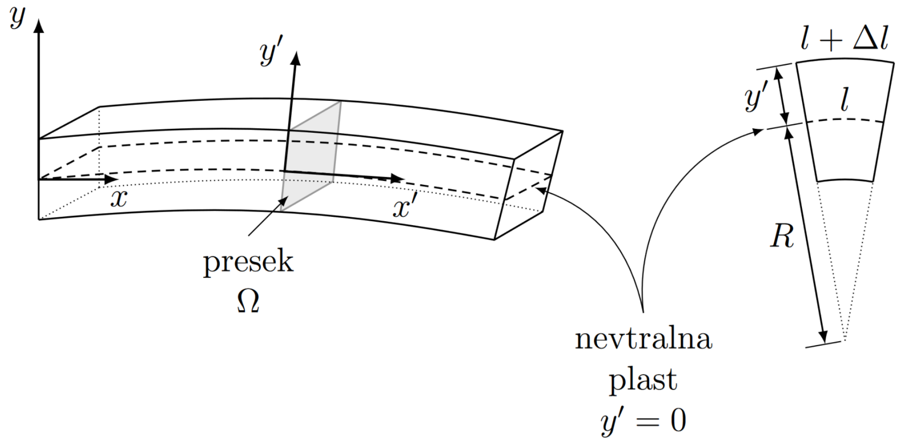
kjer je S presek palice in l njena začetna dolžina. Sorazmernostno konstanto E med relativnim skrčkom/raztegom $\Delta l/l$ in silo F imenujemo prožnostni ali elastični ali Youngov modul snovi. Nekaj vrednosti za različne materiale najdemo v tabeli 1. Količnik sile in preseka F/S imenujemo napetost (natezna ali tlačna) in jo označujemo s črko σ. Linearna zveza med napetostjo in relativno spremembo dolžine velja v določenem intervalu obremenitve $[0, \sigma_{max}]$, t.i. območju elastičnosti, kjer je tipično $\Delta l/l$ še precej majhen. Pri še večji napetosti se palica trajno deformira ali celo pretrga oz. poči.

Material	E (GPa)	σ_{max} (MPa)
Vzmetno jeklo	$1200 - 1700$	$1050 - 1350$
Pločevine	$210 - 250$	$240 - 270$
Baker	110	/
Svinec	14	/
Aluminij	70	/
Medenina	$100 - 125$	/

Tabela 1: Okvirne meje nateznih trdnosti – koeficientov elastičnosti E za različne materiale.

Upogib ravne palice (droga, nosilca ali podobno) obravnavamo v prvem približku tako, kot da bi pri tem ostal prečni presek nespremenjen. Zamislimo si, da je palica razrezana na plasti vzporedne z njeno osjo in pravokotne na smer upogiba, slika 1. Blizu sredine palice poteka nevtralna ploskev, ki se pri upogibu palice ne raztegne, ampak le upogne.

Pri obravnavi se bomo osredotočili na plasti blizu nevtralne. Plasti nad nevtralno ploskvijo se raztegnejo, tiste pod njo pa se stisnejo. Z geometrijskega vidika pa lahko rečemo, da se plasti ukrivijo, oz. dobijo nek lokalni krivinski radij R. Izberimo si en presek palice Ω pravokotno na nevtralno plast in recimo, da je tam nevtralna ploskev čez razdaljo l ukrivljena z radijem R. Opazujmo plast, ki je od nevtralne oddaljeno za y' v radialni



Slika 1: Geometrija pri opisu upogiba palice.

smeri in tako z dolžino loka $l + \Delta l$. To je prikazano na sliki 1. Razmerje dolžin lokov plasti $(\Delta l + l)/l$ je enako razmerju radijev $(R + y\text{'})/R$. Iz tega sledi, da je deformacija plasti Δl, za y' oddaljene od nevtralne, podana z enačbo (2):

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y'}{R} \tag{2}$$

Zaradi deformacije Δl se pojavi v plasti napetost z vzdolžno komponento, opisano z enačbo (3):

$$\sigma = E\frac{\Delta l}{l} = E\frac{y\text{'}}{R} \tag{3}$$

Na presek obravnavane plasti s ploščino $\mathrm{d}S$ deluje sila z vzdolžno komponento $\sigma \mathrm{d}S$. Vsota navorov sil, ki delujejo pravokotno na presek izračunamo po enačbi (4):

$$M = \int\limits_{\Omega} \sigma y\text{'}^2 \,\mathrm{d}S = \frac{EJ}{R}, \qquad J := \int\limits_{\Omega} y\text{'}\,\mathrm{d}S \tag{4}$$

Ob tem definiramo vztrajnostni moment preseka palice J, ki je pri pravokotnem preseku dimenzij $a \times b$ in $y\text{'} \in [-b/2, b/2]$ enak $J = ab^3/12$, pri okroglem preseku z radijem r pa $J = \pi r4/4$. Oba izraza dobimo s preprosto integracijo. Velja $1/R = u''(x)$, od koder dobimo enačbo 5:

$$M(x) = EJu''(x) \tag{5}$$

Na dolžino $\mathrm{d}x'$ deluje sila $f(x')\mathrm{d}x'$ in tako navor (M (x)) z zunanjimi silami izrazimo z enačbo (6):

$$M = \int\limits_{x_0}^{x} f(x')(x - x')\,\mathrm{d}x' + M_0 \tag{6}$$

kjer je x_0 začetek palice na levi strani. Pri tem je M_0 zunanji navor, ki deluje na levi konec palice v primeru, če je tam vpeta. Prvi odvod navora je enak strižni sili $F(x)$, s katero desni del deluje na levega na mestu x, in se zapiše z enačbo (7):

$$M' = \int\limits_{x_0}^{x} f(x')\,\mathrm{d}x' = F(x) = EJu''' \tag{7}$$

Vidimo, da je enak vsoti zunanjih sil, ki delujejo na levi del palice; torej je nasprotno enak strižni sili, s katero desni del deluje na levega na mestu x. Drugi odvod navora pa predstavlja dolžinsko gostoto sile $f(x)$ in s pomočjo enačbe (5) dobimo osnovno enačbo palice (8):

$$M'' = f(x) = EJu^{(4)}(x) \tag{8}$$

Enačbo (8) želimo rešiti za naš primer centralno obremenljene palice s silo F_0 in podprte na koncih oddaljenih za dolžino l. Izhodišče x-osi si bomo izbrali na sredini palice. Simetričnost palice okoli $x = 0$ nam omogoča, da problem reduciramo na obravnavo le desne strani $x > 0$. Zaradi odstotnosti sile velja zunaj sredine homogena enačba $u^{(4)}(x) = 0$. Od tod ugotovimo, da je oblika palice opisljiva z nastavkom (9):

$$u(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \tag{9}$$

kjer so a, b, c in d konstante.
Nastavek mora izpolniti naslednje pogoje:

- $u(l/2) = 0$, ker je palica tam podprta
- $u''(l/2) = 0$, ker konec palice ni vpet in nanj ne deluje noben navor
- $\boldsymbol{\nabla} u'''(0) = F_0/EJ$ zaradi diskretne sile

Tako pridemo do končne enačbe (10):

$$u(x) = -\frac{F_0 l^3}{48EJ}\left[1 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \tag{10}$$

Maksimalno obtežitev F_{max} lahko ocenimo z enačbo (11), kjer smo uporabili enačbi (2) in $1/R = u''(x)$ in upoštevamo točko z največjim možnim $1/R$ za višino preseka palice D (b ali $2r$):

$$F_{max} \approx \epsilon \frac{8EJ}{Dl} \tag{11}$$

2 Potrebščine

- stojalo, mikrometrska ura
- uteži, tehtnica, kljuka za obešanje uteži
- dve ravni palici okroglega in pravokotnega profila
- kljunasto merilo in meter

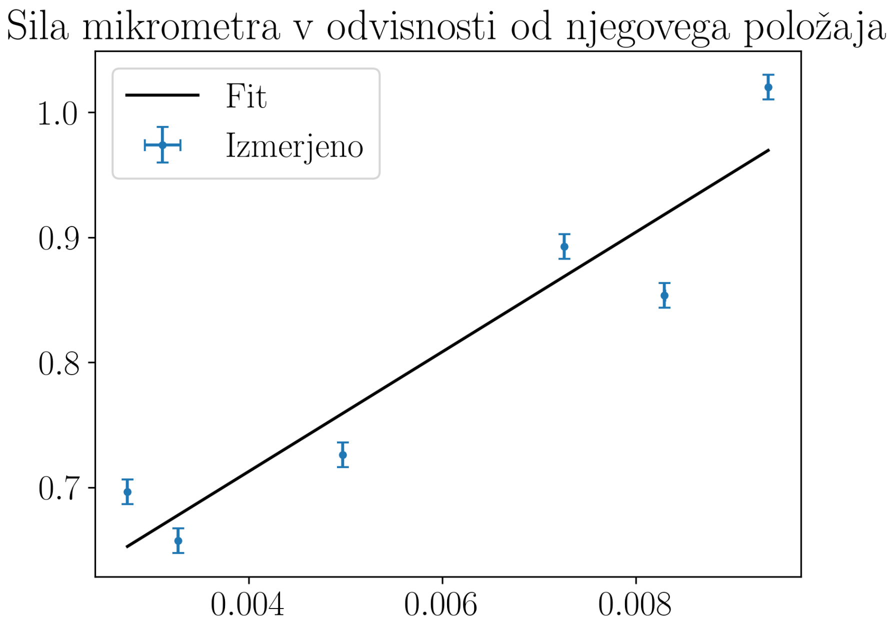
3 Naloga

1. Opazuj upogibanje dveh palic različnih presekov v odvisnosti od obremenitve in izračunaj njuna prožnostna modula.
2. Oceni maksimalno obremenitev palic ter za koliko se palici upogneta zaradi lastne teže. Primerjaj tudi gostoti obeh palic.
3. Nariši diagrama spreminjanja strižne sile in navora vzdolž palice za izbrano utež.

4 Meritve

Datum Izvedbe eksperimenta: 16. 10. 2023

Najprej moramo določiti silo, s katero deluje mikrometer na palico, oziroma koeficient vzmeti mikrometra: Iz naklona fitane premice iz grafa 2 lahko določimo koeficient njegove



Slika 2: Sila, s katero deluje mikrometer pri različnih položajih njegove merilne igle. Prikazane so izmerjene točke skupaj s fitom.

vzmeti:

$$k = (48 \pm 9)\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

To dodatno silo moramo upoštevati pri nadaljnjih izračunih, kjer imamo obremenitev palic.

4.1 Palica okroglega profila

Lastnosti palice: $2r = (0,71 \pm 0,01)$ cm, $l_o = (64,0 \pm 0,1)$ cm, $m_o = (208 \pm 1)$ g

Po enačbi (4) izračunamo vztrajnostni moment J za to palico:

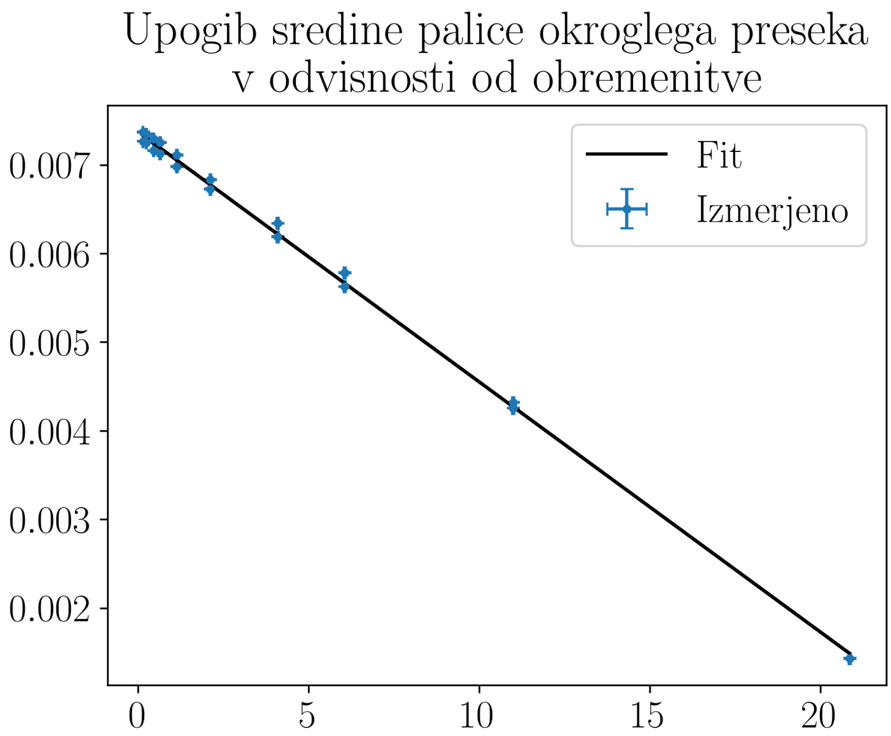
$$J_o = (1,25 \pm 0,07)\ \mathrm{m}^4$$

Sedaj lahko preko enačbe (10) pri $x = 0$ izračunamo prožnostni modul E:

$$E_o = (104 \pm 6)\ \mathrm{GPa}$$

Enačba (11) nam da še maksimalno obtežitev:

$$F_{max,o} = (26,1 \pm 0,4)\ \mathrm{N}$$



Slika 3: Upogib sredine palice okroglega profila v odvisnosti od obremenitve na njej. Prikazane so izmerjene točke skupaj s fitom.

Ocenimo lahko koliko se palica povesi zaradi lastne teže, kjer v enačbi (10) predpostavimo, da celotna masa palice prijemlje v sredini:

$$u_{l,o} = (0,859 \pm 0,007)\ \mathrm{mm}$$

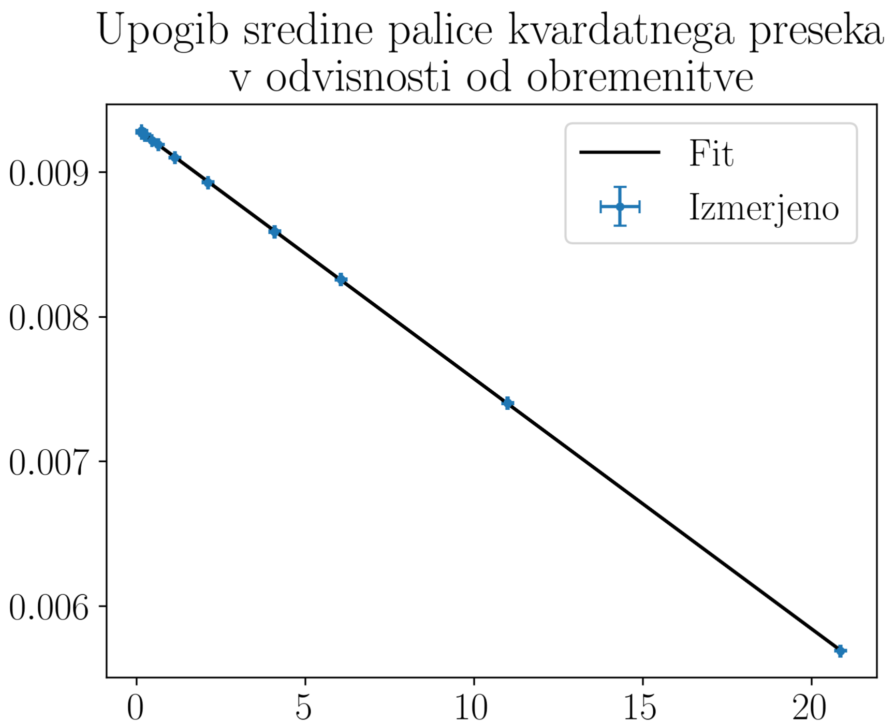
Gostoto materiala, iz katerega je palica izračunamo iz geometrijskih lastnosti in njene mase:

$$\rho_o = (8,21 \pm 0,3) \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

4.2 Palica kvadratnega profila

Lastnosti palice: $a = (0,70 \pm 0,01)$ cm, $b = (0,69 \pm 0,01)$ cm, $l_k = (64,0 \pm 0,1)$ cm, $m_k = (261 \pm 1)$ g
Izračuni so enaki kot pri palici okroglega profila. Naklon premice dobimo iz slike 4.

$$J_k = (1,92 \pm 0,09)\ \mathrm{m}^4$$
$$E_k = (110 \pm 5)\ \mathrm{GPa}$$
$$F_{max,k} = (54,8 \pm 0,7)\ \mathrm{N}$$
$$u_{l,k} = (0,661 \pm 0,005)\ \mathrm{mm}$$
$$\rho_k = (8,44 \pm 0,2) \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$



Slika 4: Upogib sredine palice kvadratnega profila v odvisnosti od obremenitve na njej. Prikazane so izmerjene točke skupaj s fitom.

4.3 Navor in strižna sila

Preko odvajanja enačbe (10) dobimo izraza za navor in strižno silo vzdolž palice:

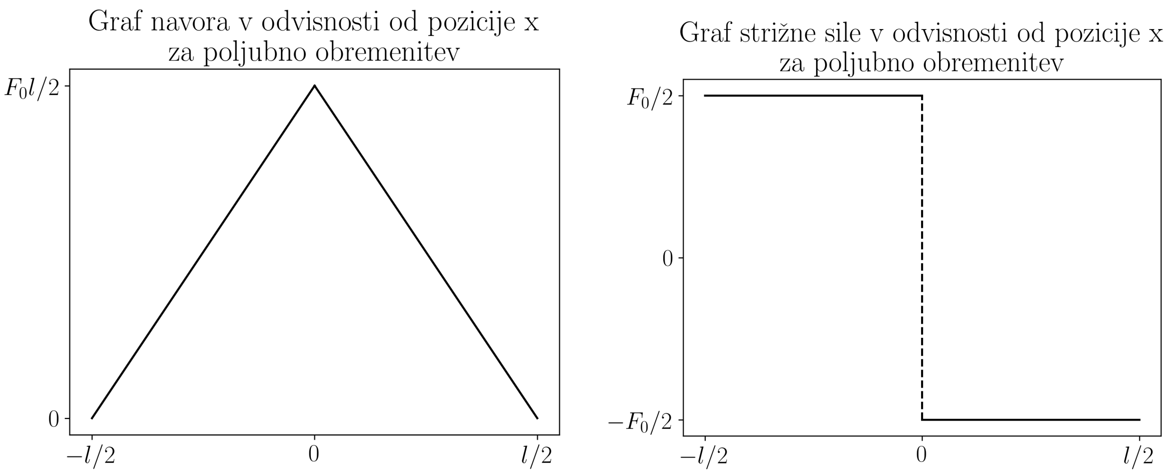
$$M(x) = F_0\left(\frac{l}{4} - \frac{x}{2}\right) F(x) = -\frac{F_0}{2}$$

Koordinatno izhodišče postavimo v sredino palice. Tu moramo upoštevati še nezveznost funkcije $u(x)$, tako da na koncu pridemo do sledečih grafov, prikazanih na sliki 5.

5 Analiza rezultatov

Vidimo, da se intervala negotovosti pri prožnostnih modulih in gostotah obeh palic med sabo pokrivajo, kot bi pričakovali, saj sta obe iz istega materiala. Na podlagi gostote medenine, ki znaša približno $\rho = 8,73 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ in prožnostnega modula, navedenega v tabeli 1, skupaj z značilno barvo, bi lahko sklepali, da sta palici narejeni iz medenine.

Na grafu 3 vidimo nekoliko odstopanja med vrednostimi pri dodajanju in odvzemanju mase. Menim, da tu ne gre za deformacijo, saj še nismo presegli maksimalne obtežitve, ampak za zamikanje nosilca uteži, ki se je lahko nekoliko vrtel okoli okrogle palice.



(a) Navor

(b) Strižna sila

Slika 5: Grafa navora in strižne sile vzdolž palice. Prikazujeta poljubno palico dolžine l pri obremenitvi F_0.