

Akustični resonator

Bor Kokovnik

Januar 2024

1 Uvod

Gibanje zvočnih valov v zaprtem prostoru končnih dimenzij se od gibanja v neomejenem prostoru bistveno razlikuje. V obeh primerih velja seveda valovna enačba, v prvem primeru pa je treba dodati še robne pogoje, ki morajo biti izpolnjeni na površini trdnih sten prostora. V omejenem prostoru končnega volumna so možne proste oscilacije samo pri točno določenih frekvencah, ki jih imenujemo lastne frekvence, načine nihanja pa imenujemo lastna nihanja. Lastni načini in njihove frekvence so odvisni od dimenzij in oblike prostora.

Opis nihanja v plinu začnemo z Newtonovim zakonom za kontinuum, enačba (1):

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\nabla p \quad (1)$$

kjer je ρ gostota plina, $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ pospešek in $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$ gradient tlaka p . Nadaljnjo povezavo med odmiki delov plina \mathbf{u} in gostoto dobimo iz kontinuitetne enačbe (2):

$$\delta \rho = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (2)$$

kjer smo z δp označili odmik gostote od ravnovesne vrednosti. Potrebujemo pa še enačbo stanja, in sicer lahko privzamemo, da je prevajanje toplote zanemarljivo in zato uporabimo adiabatno stisljivost, prikazano v enačbi (3):

$$\frac{\delta p}{p_0} = \kappa \frac{\delta \rho}{\rho_0} \quad (3)$$

kjer je κ razmerje specifičnih toplot pri konstantnem tlaku in konstantnem volumnu. Enačbe (1), (2) in (3) premečemo in po želji lahko zapišemo valovne enačbe za tlak, hitrosti, odmike ali gostoto. S pomočjo hitrosti zvoka c , ki jo izračunamo po enačbi (4):

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}} \quad (4)$$

navedimo naslednjo obliko (5):

$$\nabla^2 \delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} \quad (5)$$

Ob trdni steni ni odmkov pravokotno na steno v smeri \mathbf{n} , prav tako ni normalne komponente hitrosti ali pospeška. Ta pogoj se prevede v robni pogoj za nihanje tlaka kot (6):

$$\mathbf{n} \nabla p = 0 \quad (6)$$

Za zaprt prostor v obliki kvadra z robovi A , B in C je najprimerneje izbrati koordinatno izhodišče v enem od vogalov in osi x , y , in z vzporedne robovom kvadra. Tako lahko zapišemo rešitev valovne enačbe pri frekvenci ω kot produkt kosinusov, da v izhodišču takoj izpolnimo robne pogoje. Nastavek za valovanja z neko amplitudo p_0 je

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= p(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi) \\ p(\mathbf{r}) &= p_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z), \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \end{aligned} \quad (7)$$

kjer je $p(\mathbf{r})$ krajevna odvisnost stoječega valovanja, ω njena kotna hitrost in ϕ nek začetni fazni zamik. Z uporabo tega nastavka v valovni enačbi (5) dobimo zvezo med kotno frekvenco ω in valovnim vektorjem $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ enako

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (8)$$

Z upoštevanjem robnih pogojev na stenah (6) v nastavku (7) sledi, da so komponente valovnega vektorja

$$k_x = n_x \frac{\pi}{A}, \quad k_y = n_y \frac{\pi}{B}, \quad k_z = n_z \frac{\pi}{C} \quad (9)$$

kjer so n_x , n_y in n_z pozitivna cela števila ali 0. S tem smo določili kotne frekvence lastnih valovanj kot

$$\omega = c\pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{B}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{C}\right)^2} \quad (10)$$

2 Potrebščine

- akustični resonator - zaboj iz vezanih in ivernih plošč z debelimi dušenimi stenami, notranje dimenzije so 56,7 cm \times 38,5 cm \times 24,0 cm (nedoločenost $\pm 0,1$ cm) z odstranljivim pokrovom
- prenosnik opremljen s programom AkRes in zunanjo zvočno kartico, ki podpira 44,1 kHz Mono-Duplex način predvajanja in sprejemanja zvoka
- zvočnik, pritrjen na steno resonatorja blizu vogala in povezan preko ojačevalca na izhod zunanje zvočne kartice
- premični mikrofonski povezan na vhod zunanje zvočne kartice

3 Naloga

1. Izračunaj najnižje resonančne frekvence akustičnega resonatorja za n_i od 0 do 3 in dobljene frekvence (manjše od 1000 Hz) v tabeli razvrsti po velikosti skupaj s pripadajočimi vrednostmi n_i . V tabeli pusti še dva prazna stolpca za izmerjene frekvence in amplitude.
2. Izmeri resonančni odziv akustičnega resonatorja v območju od 200 do 1000 Hz in ga nariši v ustrezen graf.
3. Izmeri odvisnost signala od položaja mikrofona v škatli za osnovno in še nekatere višje resonance. Izberi si take frekvence, da bodo odvisnosti $p(\mathbf{r})$ različne (recimo za n_x od 0 do 3).

4. Primerjaj izmerjene in izračunane frekvence in na ta način določi, kateremu nihajnemu načinu pripadajo izmerjene resonance. Frekvence maksimumov in ustrezne amplitude vnesi v pripravljeno tabelo.
5. Iz prvih treh resonanc izračunaj hitrost zvoka.
6. Oцени razpolovno širino prvih treh resonančnih črt in še katere, ki je dovolj ločena od ostalih.

4 Meritve

Datum Izvedbe eksperimenta: 8. 1. 2024

Tabela 1: Tabela izmerjenih vrednostih pri različnih resonančnih stanjih. Indeks i pomeni, da je vrednost izračunana, m pa pomeni, da je izmerjena.

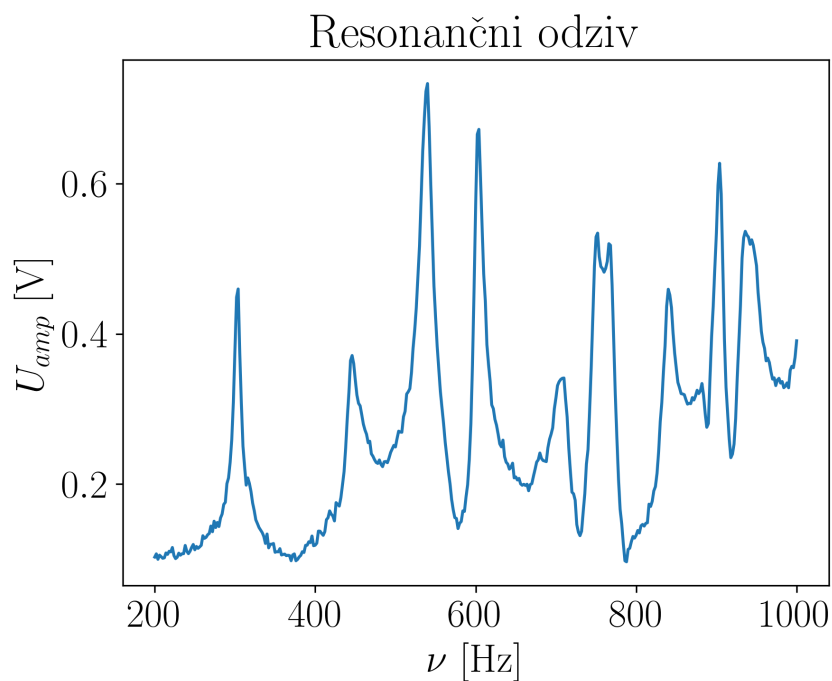
(n_x, n_y, n_z)	ν_i [Hz]	σ_{ν_i} [Hz]	ν_m [Hz]	FWHM [Hz]	U_{amp} [V]
(1, 0, 0)	299,8	0,5	304	6	0,46
(0, 1, 0)	442	1	446	8	0,37
(1, 1, 0)	533	1	540	13	0,73
(2, 0, 0)	600	1	604	8	0,67
(0, 0, 1)	708	3	710	11	0,34
(2, 1, 0)	744	1	752	15	0,53
(1, 0, 1)	769	3	766	2	0,52
(0, 1, 1)	835	3	840	7	0,46
(0, 2, 0)	883	2	882	5	0,33
(1, 1, 1)	886	2	904	7	0,63
(2, 0, 1)	928	2	936	12	0,53
(1, 2, 0)	933	2	944	12	0,53

Resonančni odziv nedušene škatle je prikazan na sliki 1.

Na sliki 2 je prikazan enak resonančni odziv, kot na sliki 1, le da so s puščicami označeni vrhovi meritev in s sivimi črtami izračunane pričakovane vrednosti, kjer smo predpostavili hitrost zvoka $c = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Negotovost bi lahko ocenili na podlagi vrednosti $FWHM$ oziroma širine vrha pri polovični višini maksimuma. To sem določil s pomočjo *python* knjižnice *scipy*. Da bi vedeli, kako je $FWHM$ povezan z negotovostjo bi morali poznati, kako so vrednosti razporejene okoli maksimuma. Iz grafa pa je razvidno, da so izmerjene vrednosti blizu pričakovanim, še posebej pri nižjih frekvencah.

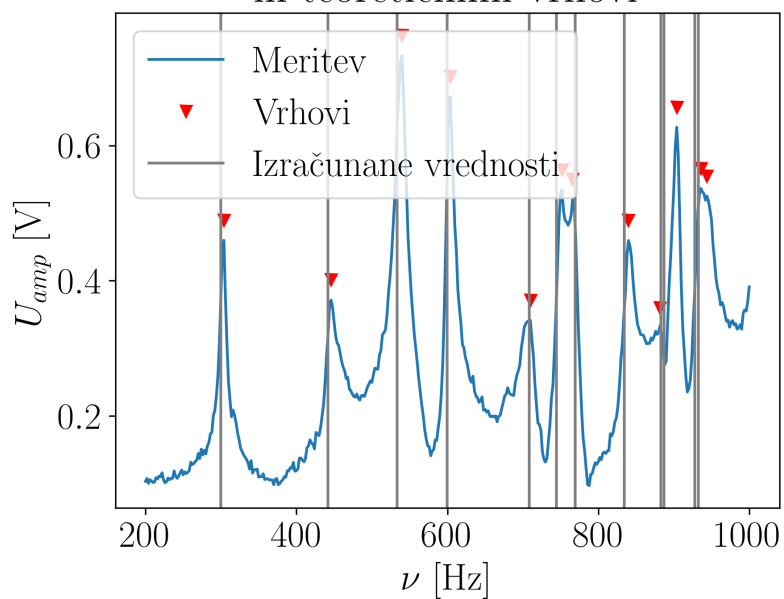
Slika 3 prikazuje primerjavo med resonančnega odziva prazne škatle in škatle po tem, ko smo vanjo dali kos blaga. Odziv je opazno ublažen in zamaknjen nekoliko v levo.

Da bi bolje razumeli spremembe tlaka vzdolž škatle si lahko pogledamo slike 4, ki prikazujejo odvisnost signala od položaja po x osi pri različnih resonančnih frekvencah. Te resonančne frekvence ustrezajo trojicam n_i , te pa številu tlačnih vozlov vzdolž posamezne osi. Tako vidimo, da pri 4a (1, 0, 0) in 4c (1, 1, 0) vidimo en vozle, pri 4b (0, 1, 0) nobenega in pri 4d (2, 0, 0) dva vozla.



Slika 1: Resonančni odziv.

Resonančni odziv z označenimi izmerjenimi in teoretičnimi vrhovi

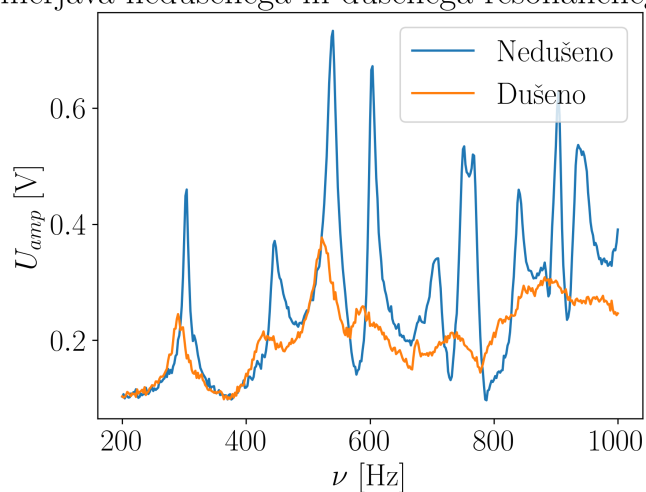


Slika 2: Resonančni odziv z označenimi izmerjenimi in teoretičnimi vrhovi.

Iz prvih treh resonanc lahko preko enačbe (10) izračunamo hitrost zvoka. Za končno vrednost sem uporabil obteženo povprečje, kjer so obtežitve inverzi variance. Tako pridemo do vrednosti:

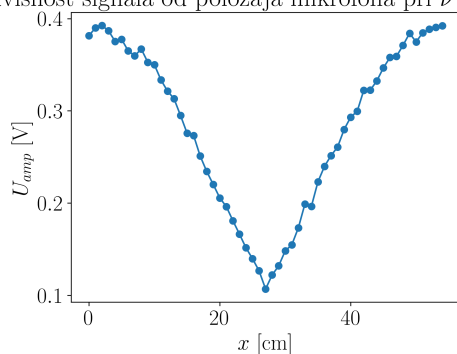
$$c = (344,1 \pm 0,5) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Primerjava nedušenega in dušenega resonančnega odziva

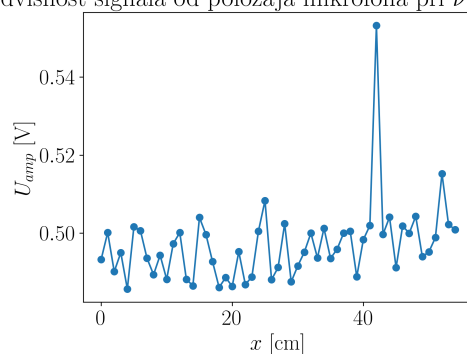


Slika 3: Primerjava nedušenega in dušenega resonančnega odziva.

Odvisnost signala od položaja mikrofona pri $\nu = 304$ Hz Odvisnost signala od položaja mikrofona pri $\nu = 446$ Hz

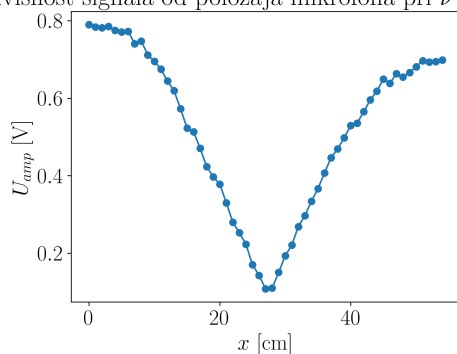


(a)

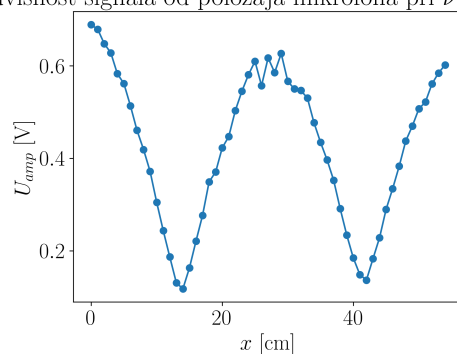


(b)

Odvisnost signala od položaja mikrofona pri $\nu = 540$ Hz Odvisnost signala od položaja mikrofona pri $\nu = 604$ Hz



(c)



(d)

Slika 4: Krajevna odvisnost signala pri različnih resonančnih frekvencah, ki ustrezajo različnim n_x, n_y, n_z : (a) pri $(1, 0, 0)$, (b) pri $(0, 1, 0)$, (c) pri $(1, 1, 0)$, (d) pri $(2, 0, 0)$.

5 Analiza rezultatov

Pri vaji nisem imel večjih težav in vsi rezultati se skladajo s pričakovanimi.

Največja uganka zame je, zakaj se resonančni odziv na sliki 3 zamakne v levo po tem, ko dodamo blago. Razlog za to je podoben kot pri vaji iz predmeta praktikum 2, kjer smo imeli nihalo na polžasto vzmet in dodali dušenje. Razlog za zamik je fazni zamik med silo (tlakom) in odmikom, katerega povzroči dušenje.