

Si $H_p(Z)$ es la función de transferencia racional de un sistema causal y estable, requeriríamos de forma natural que la función de transferencia transformada $H(z)$ fuera una función racional en z^{-1} y que el sistema fuera causal y estable. Esto provoca las siguientes restricciones en la transformación $Z^{-1} = G(z^{-1})$:

1. $G(z^{-1})$ debe ser una función racional de z^{-1} .
2. El interior de la circunferencia unidad del plano Z se debe transformar en el interior de la circunferencia unidad del plano z .
3. La circunferencia unidad del plano Z se debe transformar en la circunferencia unidad del plano z .

En este problema se obtienen y se caracterizan las transformaciones algebraicas necesarias para transformar un filtro paso bajo en tiempo discreto en otro filtro paso bajo con diferente frecuencia de corte, o en un filtro paso alto en tiempo discreto.

- (a) Sean θ y ω las variables de frecuencia (ángulos) en los planos Z y z , respectivamente, es decir, en las respectivas circunferencias unidad $Z = e^{j\theta}$ y $z = e^{j\omega}$. Demuestre que para que se cumpla la condición 3, $G(z^{-1})$ debe ser un sistema paso todo, es decir,

$$|G(e^{-j\omega})| = 1. \quad (\text{P7.58-3})$$

- (b) Es posible demostrar que la forma más general de $G(z^{-1})$ que satisface las tres condiciones anteriores es

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k^* z^{-1}}. \quad (\text{P7.58-4})$$

Recordando la presentación sobre sistemas paso todo del Capítulo 5, debe resultar claro que una función $G(z^{-1})$ con la forma que se indica en la Ecuación (P7.58-4) cumple también la Ecuación (P7.58-3), es decir, es un sistema paso todo y por tanto cumple la condición 3. La Ecuación (P7.58-4) cumple también claramente la condición 1. Demuestre que la condición 2 se cumple si y sólo si $|\alpha_k| < 1$.

- (c) Una función $G(z^{-1})$ simple de primer orden se puede utilizar para transformar un filtro paso bajo prototipo $H_p(Z)$ con frecuencia de corte en θ_p un nuevo filtro $H(z)$ con frecuencia de corte ω_p . Demuestre que

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha^* z^{-1}}$$

produce la transformación deseada para algún valor de α . Obtenga α en función de θ_p y ω_p . En el Problema 7.45 se utiliza esta idea para diseñar filtros paso bajo con frecuencia de corte ajustable.

- (d) Considere el caso de un filtro paso bajo prototipo con $\theta_p = \pi/2$. Para cada uno de los siguientes valores de α , especifique la frecuencia de corte resultante ω_p del filtro transformado.

- (i) $\alpha = -0.2679$.
- (ii) $\alpha = 0$.
- (iii) $\alpha = 0.4142$.

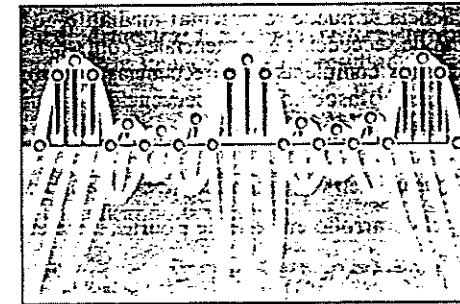
- (e) Es también posible encontrar un sistema paso todo de primer orden $G(z^{-1})$ tal que el filtro paso bajo prototipo se transforme en un filtro paso alto en tiempo discreto con frecuencia de corte ω_p . Nótese que esta transformación debe convertir $Z^{-1} = e^{j\theta_p} = z^{-1} = e^{j\omega_p}$, y transformar también $Z^{-1} = 1 - z^{-1} = -1$, es decir, transformar $\theta = 0$ en $\omega = \pi$. Obtenga $G(z^{-1})$ para esta transformación y obtenga también una expresión de α en función de θ_p y ω_p .

- (f) Utilizando el mismo filtro prototipo y valores de α que en el Apartado (d), dibuje las respuestas en frecuencia de los filtros paso alto resultantes de la transformación especificada en el Apartado (e).

* Se pueden usar transformaciones similares pero más complicadas para convertir el filtro paso bajo prototipo $H_p(Z)$ en un filtro paso banda o banda eliminada. Constantinides (1970) describe estas transformaciones con más detalle.

8

LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER



8.0. INTRODUCCIÓN

En los Capítulos 2 y 3 hemos presentado la representación de secuencias y de sistemas lineales e invariantes con el tiempo mediante las transformadas de Fourier y Z , respectivamente. Para el caso de secuencias de duración finita, es posible desarrollar una representación de Fourier alternativa denominada *transformada discreta de Fourier* (DFT, *discrete Fourier Transform*). La DFT es una secuencia, no una función de una variable continua, y corresponde a muestras equiespaciadas en frecuencia de la transformada de Fourier de la señal. Además de su importancia teórica como representación de Fourier de secuencias, la DFT tiene un papel crucial en la realización de una gran variedad de algoritmos de tratamiento digital de señales. El motivo es que existen algoritmos eficientes para el cálculo de la DFT. Presentaremos en detalle estos algoritmos en el Capítulo 9. La aplicación de la DFT en análisis espectral se presentará en el Capítulo 10.

Aunque se pueden tomar diversos puntos de vista en la obtención e interpretación de la representación de una secuencia de duración finita mediante la DFT, hemos escogido basar nuestra presentación en la relación entre secuencias periódicas y secuencias de duración finita. Empezaremos por considerar el desarrollo en serie de Fourier de secuencias periódicas. Aunque esta representación es importante por derecho propio, nosotros estaremos interesados en la aplicación de los resultados del desarrollo en serie de Fourier a la representación de secuencias de longitud finita. Para ello construiremos una secuencia periódica en la que cada periodo es idéntico a la secuencia de longitud finita. Como veremos, el desarrollo en serie de Fourier de la secuencia periódica corresponde a la DFT de la secuencia de longitud finita. Por tanto, nuestra perspectiva es definir primero el desarrollo en serie de Fourier de secuencias periódicas y estudiar sus propiedades. Luego repetiremos esencialmente los mismos razonamientos suponiendo que la secuencia que se desea representar es de longitud finita. Esta forma de presentar la DFT hace hincapié en la propiedad fundamental de la

periodicidad inherente en la representación de la DFT y asegura que esta periodicidad no se pasa por alto cuando se aplica la DFT.

8.1. REPRESENTACIÓN DE SECUENCIAS PERIÓDICAS: EL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DISCRETO

Considere una secuencia $\tilde{x}[n]$ que es periódica¹ de periodo N , de forma que $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$ para cualquier valor entero de n y r . Como en el caso de señales en tiempo continuo, esa secuencia se puede representar mediante un desarrollo en serie de Fourier en forma de una suma de secuencias exponenciales complejas armónicamente relacionadas. Es decir, de exponenciales complejas con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $(2\pi/N)$ asociada a la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$. Estas exponenciales complejas periódicas son de la forma

$$e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n + rN], \quad (8.1)$$

siendo k un entero, y el desarrollo en serie de Fourier tiene entonces la forma²

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (8.2)$$

La representación mediante el desarrollo en serie de Fourier de una señal periódica en tiempo continuo requiere generalmente infinitas exponenciales complejas relacionadas armónicamente, mientras que el desarrollo en serie de Fourier de cualquier señal en tiempo discreto de periodo N sólo requiere N exponenciales complejas relacionadas armónicamente. Para ver por qué, nótese que las exponenciales complejas relacionadas armónicamente $e_k[n]$ de la Ecuación (8.1) son idénticas para valores de k separados por N . Es decir, $e_0[n] = e_N[n]$, $e_1[n] = e_{N+1}[n]$, y en general

$$e_{k+\ell N}[n] = e^{j(2\pi/N)(k+\ell N)n} = e^{j(2\pi/N)kn} e^{j2\pi\ell n} = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n], \quad (8.3)$$

siendo ℓ un entero. Por tanto, el conjunto de N exponenciales complejas periódicas $e_0[n]$, $e_1[n]$, ..., $e_{N-1}[n]$ define todas las exponenciales complejas periódicas diferentes cuyas frecuencias son múltiplos enteros de $(2\pi/N)$. En consecuencia, la representación mediante el desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ sólo necesita utilizar N exponenciales complejas, por lo que tiene la forma

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (8.4)$$

Para obtener la secuencia de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier $\tilde{X}[k]$ a partir de la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$, utilizaremos la ortogonalidad del conjunto de las secuencias exponenciales complejas. Tras multiplicar ambos miembros de la Ecuación (8.4) por $e^{-j(2\pi/N)rn}$ y sumar desde $n = 0$ hasta $n = N - 1$ obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)(k-r)n}. \quad (8.5)$$

¹ De aquí en adelante utilizaremos la tilde (') para indicar las secuencias periódicas siempre que sea importante distinguir entre secuencias periódicas y no periódicas.

² La constante multiplicativa está incluida en la Ecuación (8.2) por conveniencia. Se podría absorber en la definición de $\tilde{X}[k]$.

Intercambiando el orden de la suma en el lado derecho, la Ecuación (8.5) se transforma en

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \right]. \quad (8.6)$$

La siguiente identidad expresa la ortogonalidad de las exponenciales complejas:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k-r = mN, \quad m \text{ un entero} \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.7)$$

Esta identidad se puede demostrar fácilmente (véase el Problema 8.51) y cuando se aplica a la suma entre corchetes de la Ecuación (8.6) el resultado es

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \tilde{X}[r]. \quad (8.8)$$

Por tanto, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier $\tilde{X}[k]$ en la Ecuación (8.4) se obtienen a partir de $\tilde{x}[n]$ aplicando la relación

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}. \quad (8.9)$$

Nótese que la secuencia $\tilde{X}[k]$ es periódica de periodo N , es decir, $\tilde{X}[0] = \tilde{X}[N]$, $\tilde{X}[1] = \tilde{X}[N+1]$ y, de forma más general,

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k+N] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)(k+N)n} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \right) e^{-j2\pi n} = \tilde{X}[k] \end{aligned}$$

para cualquier entero k .

Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se pueden interpretar como una secuencia de longitud finita dada por la Ecuación (8.9) para $k = 0, 1, \dots, (N-1)$, y que vale cero para otros valores de k . También se pueden interpretar como una secuencia periódica definida para todo k por la Ecuación (8.9). Claramente, ambas interpretaciones resultan aceptables ya que en la Ecuación (8.4) sólo utilizamos los valores de $\tilde{X}[k]$ en el intervalo $0 \leq k \leq (N-1)$. Una ventaja de interpretar los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier $\tilde{X}[k]$ como una secuencia periódica es que entonces hay una dualidad entre los dominios del tiempo y de la frecuencia para la representación de secuencias periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier. Las Ecuaciones (8.9) y (8.4) forman una pareja de análisis-síntesis que denominaremos representación mediante el desarrollo en serie de Fourier discreto (DSF, *discrete Fourier series*) de una secuencia periódica. Por conveniencia de notación, esas ecuaciones se expresan muchas veces utilizando el valor complejo

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)}, \quad (8.10)$$

Con esta notación, la pareja de análisis-síntesis se expresa como sigue:

$$\text{Ecuación de análisis: } \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}. \quad (8.11)$$

$$\text{Ecuación de síntesis: } \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \quad (8.12)$$

En ambas ecuaciones $\tilde{x}[n]$ y $\tilde{X}[k]$ son secuencias periódicas. Algunas veces será útil emplear la notación

$$\tilde{x}[n] \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k] \quad (8.13)$$

para indicar las relaciones de las Ecuaciones (8.11) y (8.12). Los siguientes ejemplos ilustran el uso de estas ecuaciones.

Ejemplo 8.1. Desarrollo en serie de Fourier discreto de un tren de impulsos periódico

Consideremos el tren de impulsos periódico

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \begin{cases} 1, & n = rN, \text{ } r \text{ cualquier entero} \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.14)$$

Como $\tilde{x}[n] = \delta[n]$ para $0 \leq n \leq N-1$, aplicando la Ecuación (8.11) se obtienen los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = W_N^0 = 1. \quad (8.15)$$

En este caso, $\tilde{X}[k]$ vale lo mismo para todo k . Por tanto, sustituyendo la Ecuación (8.15) en la (8.12) llegamos a la representación

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N}. \quad (8.16)$$

Nótese la similitud con la relación de ortogonalidad expresada en la Ecuación (8.7).

El Ejemplo 8.1 ha presentado una representación útil de un tren de impulsos periódico en función de una suma de exponenciales complejas, donde todas las exponenciales complejas tienen el mismo módulo y fase. Esas exponenciales suman la unidad en múltiplos enteros de N y cero para otros valores enteros. Si observamos cuidadosamente las Ecuaciones (8.11) y (8.12) vemos que las dos ecuaciones son muy similares, ya que sólo difieren en la multiplicación por una constante y en el signo de los exponentes. Esta dualidad entre la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ y los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier discreto $\tilde{X}[k]$ se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8.2. Dualidad en el desarrollo en serie de Fourier discreto

Aquí hacemos que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier discreto se conviertan en el tren de impulsos

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} N \delta[k - rN].$$

Sustituyendo $\tilde{Y}[k]$ en la Ecuación (8.12) se obtiene

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} N \delta[k] W_N^{-kn} = W_N^0 = 1.$$

En este caso, $\tilde{y}[n] = 1$ para todo n . Comparando este resultado con los resultados de $\tilde{x}[n]$ y $\tilde{X}[k]$ del Ejemplo 8.1 vemos que $\tilde{Y}[k] = N\tilde{x}[k]$ e $\tilde{y}[n] = \tilde{X}[n]$. En la Sección 8.2.3 veremos que este ejemplo es un caso particular de una propiedad de dualidad más general.

Si la secuencia $\tilde{x}[n]$ es igual a la unidad sólo en una parte del periodo, se puede obtener también una expresión cerrada de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 8.3. Desarrollo en serie de Fourier discreto de un tren de pulsos rectangulares periódico

En este ejemplo, $\tilde{x}[n]$ es la secuencia que se muestra en la Figura 8.1, cuyo periodo es $N = 10$.

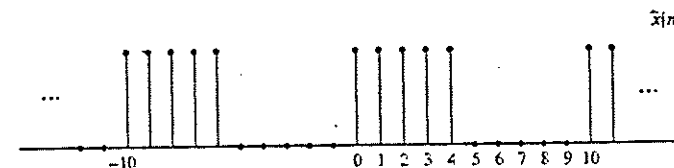


Figura 8.1. Secuencia periódica de periodo $N = 10$ de la que se calcula su desarrollo en serie de Fourier.

Utilizando la Ecuación (8.11),

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi kn/N}. \quad (8.17)$$

Esta suma finita se puede expresar en forma cerrada

$$\tilde{X}[k] = \frac{1 - W_N^{kN}}{1 - W_N^k} = e^{-j\pi k(N-1)/N} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}. \quad (8.18)$$

La Figura 8.2 muestra el módulo y la fase de la secuencia periódica $\tilde{X}[k]$.

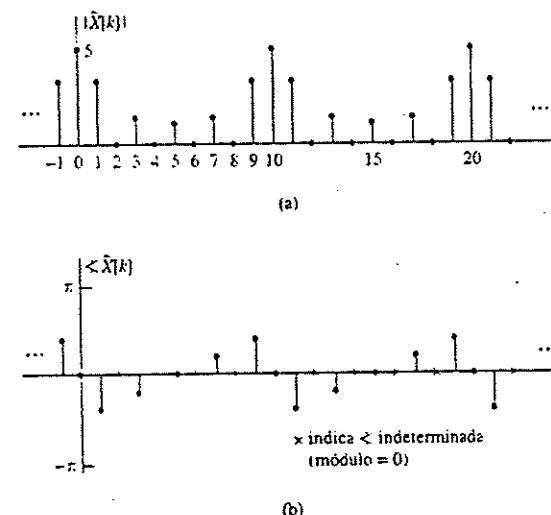


Figura 8.2. Módulo y fase de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la secuencia de la Figura 8.1.

Hemos demostrado que cualquier secuencia periódica se puede representar como una suma de secuencias exponenciales complejas. Las Ecuaciones (8.11) y (8.12) resumen los resultados clave. Como veremos posteriormente, estas relaciones son la base de la DFT, que trabaja sobre secuencias de longitud finita. Sin embargo, antes de presentar la DFT consideraremos algunas de las propiedades básicas de la representación de secuencias periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier, y veremos posteriormente cómo se puede utilizar este desarrollo para calcular la transformada de Fourier de señales discretas periódicas.

8.2. PROPIEDADES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DISCRETO

Como en el caso del desarrollo en serie de Fourier y las transformadas de Fourier y de Laplace de señales en tiempo continuo, y también para las transformadas Z de secuencias aperiódicas en tiempo discreto, ciertas propiedades del desarrollo en serie de Fourier discreto son de importancia fundamental para su utilización en problemas de tratamiento de señales. En esta sección resumiremos estas importantes propiedades. No es sorprendente que muchas de las propiedades básicas sean análogas a propiedades de la transformada Z y de la transformada de Fourier. Sin embargo, hay que ser cuidadosos en distinguir los casos en los que la periodicidad de $x[n]$ y de $\tilde{X}[k]$ pueda suponer diferencias importantes. Además, existe una dualidad exacta entre los dominios del tiempo y de la frecuencia en la representación basada en el desarrollo en serie de Fourier discreto que no existe en la representación de secuencias basada en la transformada de Fourier o en la transformada Z .

8.2.1. Linealidad

Consideremos dos secuencias periódicas $x_1[n]$ y $x_2[n]$, ambas de periodo N tales que

$$x_1[n] \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_1[k] \quad (8.19a)$$

y

$$x_2[n] \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_2[k] \quad (8.19b)$$

Entonces

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{\text{DFS}} a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]. \quad (8.20)$$

La propiedad de linealidad se deduce inmediatamente de la forma de las Ecuaciones (8.11) y (8.12).

8.2.2. Desplazamiento de una secuencia

Si una secuencia periódica $x[n]$ tiene como coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$, entonces $x[n-m]$ es una versión desplazada de $x[n]$ y

$$x[n-m] \xrightarrow{\text{DFS}} W_N^{km} \tilde{X}[k]. \quad (8.21)$$

La prueba de esta propiedad se considera en el Problema 8.52. Cualquier desplazamiento que sea mayor o igual que el periodo (es decir, $m \geq N$) no se puede distinguir en el dominio del tiempo de un desplazamiento más corto m_1 si $m = m_1 + m_2N$, siendo m_1 y m_2 enteros y $0 \leq m_1 \leq N-1$ (otra forma de decir esto es que $m_1 = m$ módulo N o que m_1 es el resto de dividir m por N). Se puede demostrar fácilmente que con esta representación de m , $W_N^{km} = W_N^{km_1}$, es decir, como debe ser, la ambigüedad del desplazamiento en el dominio del tiempo se manifiesta también en la representación en el dominio de la frecuencia.

Como la secuencia de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica es a su vez una secuencia periódica, se obtiene un resultado similar para un desplazamiento de los coeficientes de Fourier de un entero ℓ . Concretamente, \blacktriangle

$$W_N^{-\ell} \tilde{X}[k] \xrightarrow{\text{DFS}} x[k-\ell]. \quad (8.22)$$

Nótese la diferencia del signo de los exponentes en las Ecuaciones (8.21) y (8.22).

8.2.3. Dualidad

Debido a la fuerte similitud entre las ecuaciones de análisis y de síntesis de Fourier en tiempo continuo se produce una dualidad entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. Sin embargo, para el caso de la transformada de Fourier en tiempo discreto de señales no periódicas no existe una dualidad similar, ya que las señales no periódicas en tiempo discreto y sus transformadas de Fourier son dos clases de funciones muy diferentes. La transformada de Fourier de una secuencia no periódica es siempre una función periódica de la variable de frecuencia continua.

Observando las Ecuaciones (8.11) y (8.12) vemos que las ecuaciones de análisis y síntesis del desarrollo en serie de Fourier discreto sólo difieren en un factor de $1/N$ y en el signo del exponente de W_N . Además, la secuencia periódica y los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier son el mismo tipo de función: ambas son secuencias periódicas. Teniendo en cuenta el factor de $1/N$ y el cambio de signo en los exponentes de las Ecuaciones (8.11) y (8.12), la Ecuación (8.12) se puede modificar como

$$N\tilde{x}[-n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{kn} \quad (8.23)$$

o, intercambiando los papeles de n y k en la Ecuación (8.23),

$$N\tilde{x}[-k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] W_N^{nk}. \quad (8.24)$$

Vemos que la Ecuación (8.24) es similar a la Ecuación (8.11). En otras palabras, la secuencia de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la secuencia periódica $\tilde{X}[n]$ es $N\tilde{x}[-k]$, es decir, la secuencia periódica original en orden inverso y multiplicada por N . La propiedad de dualidad se puede resumir como sigue:

$$x[n] \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k], \quad (8.25a)$$

entonces

$$\tilde{X}[n] \xrightarrow{\text{DFS}} N\tilde{x}[-k]. \quad (8.25b)$$

8.2.4. Propiedades de simetría

Como comentamos en la Sección 2.3, la transformada de Fourier de una secuencia no periódica tiene varias propiedades de simetría útiles. Las mismas propiedades de simetría aparecen en la representación de una secuencia periódica mediante su desarrollo en serie de Fourier. La obtención de estas propiedades, que se puede hacer de forma similar a la del Capítulo 2, se deja como ejercicio (véase el Problema 8.53). Las propiedades resultantes se resumen como referencia como las propiedades 9-17 de la Tabla 8.1 en la Sección 8.2.6.

8.2.5. Convolución periódica

Sean $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$ dos secuencias periódicas, ambas de período N y cuyos coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier son, respectivamente, $\tilde{X}_1[k]$ y $\tilde{X}_2[k]$. Si formamos el producto

$$\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]. \quad (8.26)$$

la secuencia periódica que tiene como coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier $\tilde{X}_3[k]$ es

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m]. \quad (8.27)$$

Este resultado no es sorprendente, ya que nuestra experiencia previa con transformadas nos sugiere que la multiplicación de funciones en el dominio de la frecuencia se corresponde con la convolución de funciones en el dominio del tiempo y la Ecuación (8.27) se parece mucho a una suma de convolución. La Ecuación (8.27) realiza la suma de valores del producto de $\tilde{x}_1[m]$ por $\tilde{x}_2[n-m]$, que es una versión invertida y desplazada en el tiempo de $\tilde{x}_2[m]$, como en el caso de la convolución discreta no periódica. Sin embargo, las secuencias de la Ecuación (8.27) son periódicas de período N y la suma se realiza en un período. Una convolución con la forma de la Ecuación (8.27) se denomina *convolución periódica*. Como en el caso de la convolución no periódica, la convolución periódica es conmutativa, es decir,

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2[m] \tilde{x}_1[n-m]. \quad (8.28)$$

Para demostrar que $\tilde{X}_3[k]$, dado por la Ecuación (8.26), es la secuencia de coeficientes de Fourier correspondiente a la señal $\tilde{x}_3[n]$ dada en la Ecuación (8.27), apliquemos primero la ecuación de análisis del desarrollo en serie de Fourier de la Ecuación (8.11) a la Ecuación (8.27) con lo que se obtiene

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \right) W_N^{kn}. \quad (8.29)$$

que, tras intercambiar el orden de suma, se convierte en

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m] W_N^{kn} \right). \quad (8.30)$$

La suma interna de índice n es el desarrollo en serie de Fourier discreto de la secuencia desplazada $\tilde{x}_2[n-m]$. Aplicando la propiedad de desplazamiento de la Sección 8.2.2 obtenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_2[n-m] W_N^{kn} = W_N^{km} \tilde{X}_2[k],$$

que se puede sustituir en la Ecuación (8.30) resultando

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{km} \tilde{X}_2[k] = \left(\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{km} \right) \tilde{X}_2[k] = \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]. \quad (8.31)$$

En resumen

$$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \tilde{x}_2[n-m] \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]. \quad (8.32)$$

Por tanto, la convolución periódica de secuencias periódicas corresponde a la multiplicación de las correspondientes secuencias periódicas de los coeficientes de sus desarrollos en serie de Fourier.

Como la convolución periódica es algo diferente de la aperiódica, merece la pena considerar la mecánica de evaluación de la Ecuación (8.27). En primer lugar, hay que tener en cuenta que la Ecuación (8.27) expresa el producto de las secuencias $\tilde{x}_1[m]$ y $\tilde{x}_2[n-m] = \tilde{x}_2[-(m-n)]$, vistas como función de m con n fijo. Esto es lo mismo que en el caso de la convolución no periódica, pero con dos importantes diferencias:

1. La suma se realiza en el intervalo finito $0 \leq m \leq N-1$.
2. Los valores de $\tilde{x}_2[n-m]$ en el intervalo $0 \leq m \leq N-1$ se repiten periódicamente para valores de m fuera del intervalo.

El siguiente ejemplo ilustra esos detalles.

Ejemplo 8.4. Convolución periódica

En la Figura 8.3 se puede ver un ejemplo del procedimiento de la Ecuación (8.27) para formar la convolución periódica de dos secuencias periódicas. En la figura hemos pre-

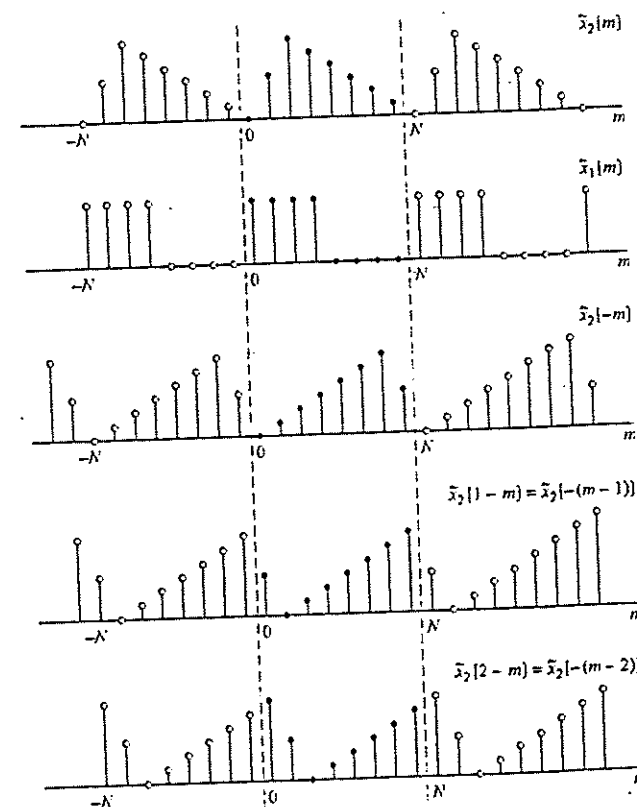


Figura 8.3. Procedimiento para formar la convolución periódica de dos secuencias periódicas.

sentado las secuencias $x_1[m]$, $x_1[n]$, $x_2[-m]$, $x_2[1-m] = x_2[-(m-1)]$ y $x_2[2-m] = x_2[-(m-2)]$. Por ejemplo, para evaluar $x_3[n]$ en la Ecuación (8.27) en $n = 2$, se multiplica $x_1[m]$ por $x_2[2-m]$ y se suman los términos del producto $x_1[m]x_2[2-m]$ en el intervalo $0 \leq m \leq N-1$, resultando $x_3[2]$. Cuando n cambia, la secuencia $x_2[n-m]$ se desliza apropiadamente y la Ecuación (8.27) se evalúa para cada valor en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$. Nótese que a medida que la secuencia $x_2[n-m]$ se desliza a la derecha o a la izquierda, los valores que abandonan por uno de sus extremos el intervalo encerrado por las líneas de puntos reaparecen por el otro extremo debido a la periodicidad. Debido a la periodicidad de $x_3[n]$, no hay necesidad de continuar la evaluación de la Ecuación (8.27) fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$.

El teorema de dualidad (Sección 8.2.3) sugiere que si los papeles del tiempo y la frecuencia se intercambian, se obtiene un resultado casi idéntico al resultado anterior. Es decir, la secuencia periódica

$$\tilde{x}_3[n] = \tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n], \quad (8.33)$$

siendo $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$ secuencias periódicas, ambas de periodo N , tiene como coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier discreto

$$\tilde{X}_3[k] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell], \quad (8.34)$$

que corresponden a $1/N$ veces la convolución periódica de $\tilde{X}_1[k]$ y $\tilde{X}_2[k]$. Este resultado se puede verificar también sustituyendo $\tilde{X}_3[k]$, dado por la Ecuación (8.34) en la relación del desarrollo en serie de Fourier de la Ecuación (8.12) para obtener $\tilde{x}_3[n]$.

8.2.6. Resumen de las propiedades de la representación de secuencias periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier discreto

La Tabla 8.1 resume las propiedades del desarrollo en serie de Fourier discreto que se han presentado en esta sección.

TABLA 8.1. RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DISCRETO

Secuencia periódica (periodo N)	Coefficientes del Desarrollo en Serie de Fourier Discreto (periodo N)
1. $x[n]$	$\tilde{X}[k]$ periódica de periodo N
2. $x_1[n]$, $x_2[n]$	$\tilde{X}_1[k]$, $\tilde{X}_2[k]$ periódicas de periodo N
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$
4. $\tilde{x}[n]$	$N\tilde{x}[-k]$
5. $x[n-m]$	$\tilde{X}[k]$
6. $W_N^{-km}x[n]$	$\tilde{X}[k-\ell]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[n-m]$ (convolución periódica)	$\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell]$ (convolución periódica)
9. $x^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$

(continúa)

TABLA 8.1. (Continuación)

Secuencia periódica (periodo N)	Coefficientes del Desarrollo en Serie de Fourier (periodo N)
10. $x^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
11. $\text{Re}\{x[n]\}$	$\tilde{X}_r[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k])$
12. $j\text{Im}\{x[n]\}$	$\tilde{X}_i[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k])$
13. $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$\text{Re}\{\tilde{X}[k]\}$
14. $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$j\text{Im}\{\tilde{X}[k]\}$
Las Propiedades 15-17 aplican sólo cuando $x[n]$ es real.	
15. Propiedades de simetría para $\tilde{x}[n]$ real.	$\begin{cases} \tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k] \\ \text{Re}\{\tilde{X}[k]\} = \text{Re}\{\tilde{X}[-k]\} \\ \text{Im}\{\tilde{X}[k]\} = -\text{Im}\{\tilde{X}[-k]\} \\ \tilde{X}[k] = \tilde{X}[-k] \\ \angle \tilde{X}[k] = -\angle \tilde{X}[-k] \end{cases}$
16. $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n])$	$\text{Re}\{\tilde{X}[k]\}$
17. $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n])$	$j\text{Im}\{\tilde{X}[k]\}$

8.3. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS

Como se comentó en la Sección 2.7, la convergencia uniforme de la transformada de Fourier de una secuencia requiere que ésta sea absolutamente sumable, y la convergencia en sentido cuadrático medio requiere que sea de cuadrado sumable. Las secuencias periódicas no cumplen ninguna de las condiciones anteriores, ya que no se aproximan a cero cuando n tiende a $\pm\infty$. Sin embargo, como comentamos brevemente en la Sección 2.7, las secuencias que se pueden expresar como suma de exponenciales complejas se puede considerar que admiten una representación mediante la transformada de Fourier de la forma de la Ecuación (2.152), es decir, como trenes de impulsos. De forma similar, es a menudo útil incorporar la representación de señales periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier en el contexto de la transformada de Fourier. Esto se puede hacer interpretando la transformada de Fourier de una señal periódica como un tren de impulsos en el dominio de la frecuencia con valores proporcionales a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la secuencia. Concretamente, si $x[n]$ es una secuencia periódica de periodo N y los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier discreto son $\tilde{X}[k]$, la transformada de Fourier de $x[n]$ se define como el tren de impulsos

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right). \quad (8.35)$$

Nótese que $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tiene la necesaria periodicidad de periodo 2π , ya que $\tilde{X}[k]$ es periódico de periodo N y los impulsos se colocan en múltiplos enteros de $2\pi/N$, siendo N entero. Para demostrar que $\tilde{X}(e^{j\omega})$, tal como se define en la Ecuación (8.35), es la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$, podemos sustituir la Ecuación (8.35) en la ecuación de la transformada inversa de Fourier (2.133), es decir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0-}^{2\pi-} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{0-}^{2\pi-} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega. \quad (8.36)$$

donde ε satisface la desigualdad $0 < \varepsilon < (2\pi/N)$. No debe olvidarse que al evaluar la transformada inversa de Fourier se puede integrar sobre cualquier intervalo de amplitud 2π , ya que el integrando $\tilde{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ es periódico de periodo 2π . En la Ecuación (8.36) los límites de integración son $0 - \varepsilon$ y $2\pi - \varepsilon$, lo que significa que la integración se realiza desde inmediatamente antes de $\omega = 0$ hasta inmediatamente antes de $\omega = 2\pi$. Estos límites resultan apropiados porque incluyen al impulso en $\omega = 0$ y excluyen al impulso en $\omega = 2\pi$. Intercambiando el orden de la integración y la suma resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \tilde{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[k] \int_{0-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \end{aligned} \quad (8.37)$$

La forma final de la Ecuación (8.37) se obtiene porque sólo los impulsos correspondientes a $k = 0, 1, \dots, N-1$ se incluyen en el intervalo entre $\omega = 0 - \varepsilon$ y $\omega = 2\pi - \varepsilon$.

Comparando las Ecuaciones (8.37) y (8.12) podemos ver que el lado derecho final de la Ecuación (8.37) es exactamente igual que el desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$, especificado en la Ecuación (8.12). Por tanto, la transformada inversa de Fourier del tren de impulsos de la Ecuación (8.35) es la señal periódica $\tilde{x}[n]$, como se quería demostrar.

Aunque la transformada de Fourier de una secuencia periódica no converge en sentido normal, la introducción de los impulsos permite incluir formalmente las secuencias periódicas dentro del contexto del análisis basado en transformadas de Fourier. Esto se hizo también en el Capítulo 2 al obtener la transformada de Fourier de otras secuencias no sumables, como la secuencia constante bilateral (Ejemplo 2.23) o la secuencia exponencial compleja (Ejemplo 2.24). Aunque el desarrollo en serie de Fourier discreto es adecuado para la mayoría de los propósitos, la transformada de Fourier de la Ecuación (8.35) conduce a veces a expresiones más simples o más compactas, lo que simplifica el proceso de análisis.

Ejemplo 8.5. Transformada de Fourier de un tren de impulsos periódico

Consideremos el tren de impulsos periódico

$$\tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN], \quad (8.38)$$

que es la misma secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ considerada en el Ejemplo 8.1. De los resultados de ese ejemplo, se deduce que

$$\tilde{P}[k] = 1, \quad \text{para todo } k. \quad (8.39)$$

Por tanto, la transformada de Fourier de $\tilde{p}[n]$ es

$$\tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right). \quad (8.40)$$

El resultado del Ejemplo 8.5 es la base de una útil interpretación de la relación entre una señal periódica y una señal de longitud finita. Consideremos una señal de longitud finita

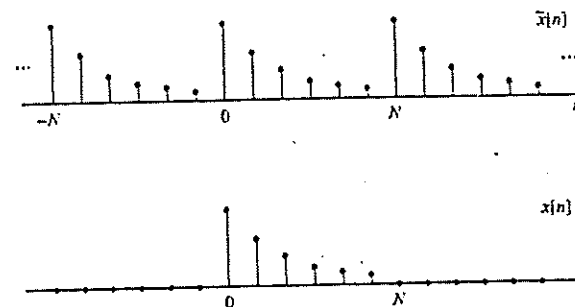


Figura 8.4. Secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ tomada repitiendo periódicamente una secuencia de longitud finita $x[n]$. $\tilde{x}[n] = x[n]$ en un periodo y es cero en el resto.

$x[n]$, tal que $x[n] = 0$ excepto en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$, y consideremos la convolución de $x[n]$ con el tren periódico de impulsos $\tilde{p}[n]$ del Ejemplo 8.5:

$$\begin{aligned} \tilde{x}[n] &= x[n] * \tilde{p}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]. \end{aligned} \quad (8.41)$$

La Ecuación (8.41) indica que $\tilde{x}[n]$ consiste en una serie de copias repetidas periódicamente de la secuencia de longitud finita $x[n]$. La Figura 8.4 ilustra cómo se puede formar una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ a partir de la secuencia de longitud finita $x[n]$ mediante la Ecuación (8.41). La transformada de Fourier de $x[n]$ es $X(e^{j\omega})$ y la de $\tilde{x}[n]$ es

$$\begin{aligned} \tilde{X}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})\tilde{P}(e^{j\omega}) \\ &= X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j(2\pi/N)k}) \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right). \end{aligned} \quad (8.42)$$

Comparando la Ecuación (8.42) con la Ecuación (8.35) se concluye que

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k}. \quad (8.43)$$

En otras palabras, la secuencia periódica $\tilde{X}[k]$ de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la Ecuación (8.11) se puede interpretar como muestras equiespaciadas de la transformada de Fourier de la secuencia de longitud finita que se obtiene extrayendo un periodo de $\tilde{x}[n]$. Es decir,

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.44)$$

Esto es también consistente con la Figura 8.4, donde se puede ver claramente que $x[n]$ se puede obtener a partir de $\tilde{x}[n]$ utilizando la Ecuación (8.44). Podemos verificar la Ecuación (8.43) todavía de otra forma. Como $x[n] = \tilde{x}[n]$ para $0 \leq n \leq N-1$ y $x[n] = 0$ en el resto,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\omega n}. \quad (8.45)$$

Comparando la Ecuación (8.45) y la Ecuación (8.11) vemos de nuevo que

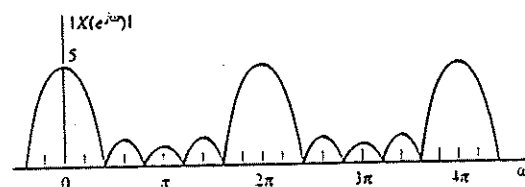
$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}. \quad (8.46)$$

Esto corresponde a muestrear la transformada de Fourier en N frecuencias equiespaciadas entre $\omega = 0$ y $\omega = 2\pi$ con un espaciado en frecuencia de $2\pi/N$.

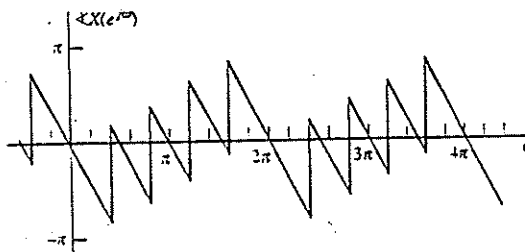
Ejemplo 8.6. Relación entre los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier y la transformada de Fourier de un periodo

Consideremos de nuevo la secuencia $x[n]$ del Ejemplo 8.3 que se muestra en la Figura 8.1. Un periodo de esa secuencia es

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.47)$$



(a)



(b)

Figura 8.5. Módulo y fase de la transformada de Fourier de un periodo de la secuencia de la Figura 8.1.

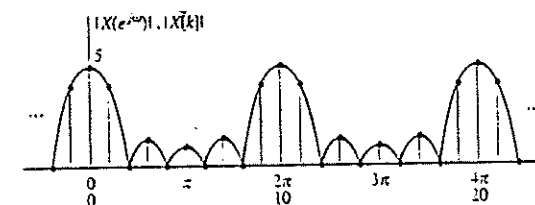
La transformada de Fourier de un periodo de $\tilde{x}[n]$ es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{10} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega 5} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}. \quad (8.48)$$

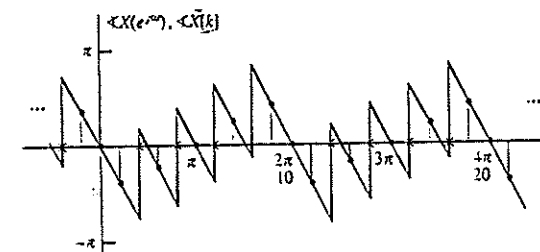
Se puede demostrar que la Ecuación (8.46) se cumple en este ejemplo sustituyendo $\omega = 2\pi k/10$ en la Ecuación (8.48), con lo que resulta

$$\tilde{X}[k] = e^{-j\pi k/2} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)},$$

que es idéntica al resultado de la Ecuación (8.18). La Figura 8.5 muestra el módulo y la fase de $X(e^{j\omega})$. Nótese que la fase es discontinua en las frecuencias donde $X(e^{j\omega}) = 0$. La Figura 8.6 muestra que las secuencias de las Figuras 8.2(a) y (b) son muestras de las Figuras 8.5(a) y (b), respectivamente, superponiendo las Figuras 8.2 y 8.5.



(a)



(b)

Figura 8.6. Superposición de las Figuras 8.2 y 8.5 que ilustra que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica son muestras de la transformada de Fourier de un periodo.

8.4. MUESTREO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En esta sección presentaremos de forma más general la relación entre una secuencia no periódica con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ y la secuencia periódica con coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier que corresponden a muestras de $X(e^{j\omega})$ equiespaciadas en frecuencia. Encontraremos que estas relaciones son particularmente importantes al presentar la transformada discreta de Fourier y sus propiedades más adelante en este mismo capítulo.

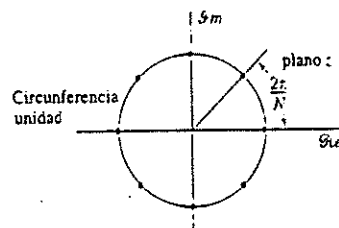


Figura 8.7. Puntos de la circunferencia unidad donde se muestrea $X(z)$ para obtener la secuencia periódica $\tilde{X}[k]$ ($N = 8$).

Consideremos una secuencia no periódica $x[n]$ con transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ y supongamos que se obtiene una secuencia $\tilde{X}[k]$ muestreando la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, es decir,

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega = (2\pi/N)k} = X(e^{j(2\pi/N)k}). \quad (8.49)$$

Como la transformada de Fourier es periódica en ω con periodo 2π , la secuencia resultante es periódica en k con periodo N . Además, como la transformada de Fourier es igual a la transformada Z evaluada en la circunferencia unidad, se deduce que $\tilde{X}[k]$ se puede obtener muestreando $X(z)$ en N puntos equiespaciados de la circunferencia unidad. Es decir,

$$\tilde{X}[k] = X(z)|_{z = e^{j(2\pi/N)k}} = X(e^{j(2\pi/N)k}). \quad (8.50)$$

La Figura 8.7 muestra estos puntos de muestreo para $N = 8$. La figura hace ver claramente que la secuencia de muestras es periódica, ya que los N puntos están equiespaciados comenzando en el ángulo cero. Por tanto, cuando k toma valores fuera del intervalo $0 \leq k \leq N - 1$ la secuencia se repite periódicamente.

Nótese que la secuencia de muestras $\tilde{X}[k]$, periódica de periodo N , podría ser la secuencia de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia $\tilde{x}[n]$. Para obtener esa secuencia, podemos sustituir simplemente los valores de $\tilde{X}[k]$ obtenidos por muestreo en la Ecuación (8.12):

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \quad (8.51)$$

Como no hemos hecho suposiciones sobre $x[n]$, excepto que su transformada de Fourier existe,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m}. \quad (8.52)$$

Sustituyendo la Ecuación (8.52) en la Ecuación (8.49) y sustituyendo posteriormente la expresión resultante de $\tilde{X}[k]$ en la Ecuación (8.51) se obtiene

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j(2\pi/N)km} \right] W_N^{-kn}. \quad (8.53)$$

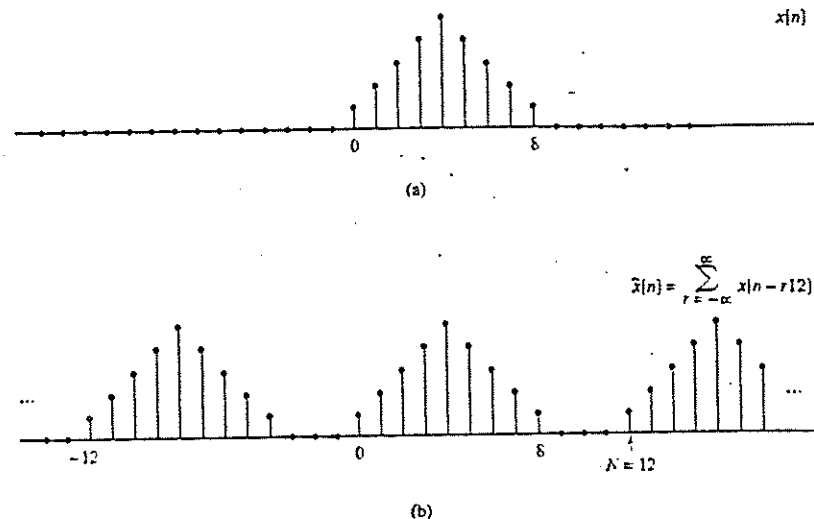


Figura 8.8. (a) Secuencia de longitud finita $x[n]$. (b) Secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ correspondiente a muestrear la transformada de Fourier con $N = 12$.

que, tras intercambiar el orden de suma, se convierte en

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \tilde{p}[n-m]. \quad (8.54)$$

Utilizando la Ecuación (8.7) o la (8.16) se puede ver que el término entre corchetes de la Ecuación (8.54) es el desarrollo en serie de Fourier del tren de impulsos periódico de los Ejemplos 8.1 y 8.2. Concretamente,

$$\tilde{p}[n-m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m-rN] \quad (8.55)$$

y por tanto,

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]. \quad (8.56)$$

donde $*$ indica convolución aperiódica. Es decir, $\tilde{x}[n]$ es la secuencia periódica resultante de la convolución de $x[n]$ con un tren de impulsos periódico. Por tanto, la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ correspondiente a los coeficientes $\tilde{X}[k]$ obtenidos muestreando $X(e^{j\omega})$ se forma a partir de $x[n]$ añadiendo infinitas réplicas de sí misma. Los desplazamientos son todos los múltiplos positivos y negativos de N , el periodo de la secuencia $\tilde{X}[k]$. Esto se ilustra en la Figura 8.8, donde la secuencia $x[n]$ es de longitud 9 y el valor de N en la Ecuación (8.56) es $N = 12$. Por consiguiente, las réplicas desplazadas de $x[n]$ no se solapan, y en cada periodo de la secuencia $\tilde{x}[n]$ se puede reconocer a $x[n]$. Esto es consistente con la presentación de la Sección 8.3 y con el Ejemplo 8.6, donde demostramos que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica son muestras de la transformada de Fourier de

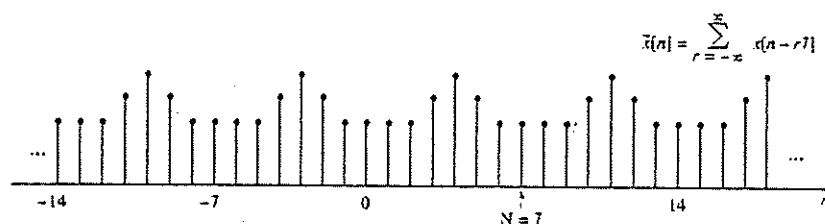


Figura 8.9. Secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ correspondiente a muestrear la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ de la Figura 8.8(a) con $N = 7$.

un período. En la Figura 8.9 se utiliza la misma secuencia $x[n]$, pero el valor de N es ahora $N = 7$. En este caso, las réplicas de $x[n]$ se solapan y cada período de $\tilde{x}[n]$ no es ahora idéntico a $x[n]$. Sin embargo, en ambos casos sigue siendo válida la Ecuación (8.49), es decir, en ambos casos los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$ son muestras de la transformada de Fourier de $x[n]$ separadas en frecuencia por múltiplos enteros de $2\pi/N$. Esto debería recordarnos nuestra presentación del muestreo en el Capítulo 4. La diferencia es que aquí estamos muestreando en el dominio de la frecuencia en vez de en el dominio del tiempo. Sin embargo, los aspectos generales de las representaciones matemáticas son muy similares.

En el ejemplo de la Figura 8.8, la secuencia original $x[n]$ se puede recuperar a partir de $\tilde{x}[n]$ extrayendo un período. Equivalentemente, la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ se puede recuperar a partir de las muestras espaciadas en frecuencia $2\pi/12$. Por el contrario, en la Figura 8.9, $x[n]$ no se puede recuperar extrayendo un período de $\tilde{x}[n]$ y equivalentemente, $X(e^{j\omega})$ no se puede recuperar a partir de sus muestras ya que la separación entre las mismas es de sólo $2\pi/7$. En efecto, para el caso que se muestra en la Figura 8.8, la transformada de Fourier de $x[n]$ se ha muestreado con una separación suficientemente pequeña (en frecuencia) para que se pueda recuperar a partir de esas muestras. La Figura 8.9 muestra el caso en el que la transformada de Fourier se ha submuestreado. La relación entre $x[n]$ y un período de $\tilde{x}[n]$ en el caso submuestreado puede verse como una forma de solapamiento en el dominio del tiempo, esencialmente idéntico al solapamiento en el dominio de la frecuencia (presentado en el Capítulo 4) que se produce al submuestrear en el dominio del tiempo. Obviamente, el solapamiento en el dominio del tiempo sólo se puede evitar si $x[n]$ tiene longitud finita, lo mismo que el solapamiento en el dominio de la frecuencia sólo se podía evitar si las señales tenían transformadas de Fourier de banda limitada.

Esta presentación resalta varios conceptos importantes que juegan un papel central en el resto del capítulo. Hemos visto que las muestras de la transformada de Fourier de una secuencia no periódica $x[n]$ se pueden ver como los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ que se obtiene sumando réplicas periódicas de $x[n]$. Si $x[n]$ tiene longitud finita y tomamos un número suficiente de muestras equiespaciadas de su transformada de Fourier (específicamente, un número mayor o igual que la longitud de $x[n]$), la transformada de Fourier se puede recuperar a partir de esas muestras, y por tanto $x[n]$ se puede recuperar a partir de la correspondiente secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ mediante la relación

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.57)$$

Se puede obtener una relación directa entre $X(e^{j\omega})$ y sus muestras $\tilde{X}[k]$, es decir, una fórmula de interpolación de $X(e^{j\omega})$ (véase el Problema 8.54). Sin embargo, la esencia de nuestra discusión anterior es que para representar o recuperar $x[n]$ no es necesario conocer $X(e^{j\omega})$ en todas las frecuencias si $x[n]$ es finita. Dada una secuencia $x[n]$ de longitud finita, se puede formar una secuencia periódica utilizando la Ecuación (8.56), que a su vez se puede representar mediante un desarrollo en serie de Fourier discreto. Alternativamente, dada la secuencia $\tilde{X}[k]$ de coeficientes de Fourier, se puede obtener $x[n]$ y utilizar entonces la Ecuación (8.57) para obtener $x[n]$. Cuando se utiliza de esta forma el desarrollo en serie de Fourier para representar secuencias de longitud finita, se denomina transformada discreta de Fourier (DFT, *Discrete Fourier Transform*). Al desarrollar, comentar y aplicar la DFT siempre es importante recordar que la representación de la transformada de Fourier mediante sus muestras es realmente una representación de la secuencia de duración finita mediante una secuencia periódica, de forma que un período de esta última coincide con la secuencia de duración finita que se desea representar.

8.5. REPRESENTACIÓN DE FOURIER DE SECUENCIAS DE DURACIÓN FINITA: LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

En esta sección formalizaremos el punto de vista sugerido al final de la sección anterior. Comenzaremos considerando una secuencia $x[n]$ con longitud finita de N muestras, de forma que $x[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$. En muchos casos será conveniente suponer que la longitud de la secuencia es N incluso aunque su longitud real sea $M \leq N$. En esos casos, simplemente las últimas $(N-M)$ muestras valdrán cero. Siempre podemos asociar a cada secuencia finita de longitud N una secuencia periódica

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]. \quad (8.58a)$$

La secuencia de longitud finita $x[n]$ se puede recuperar a partir de $\tilde{x}[n]$ mediante la relación de la Ecuación (8.57):

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.58b)$$

No debe olvidarse que, según vimos en la Sección 8.4, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$ son muestras (separadas en frecuencia $2\pi/N$) de la transformada de Fourier de $x[n]$. Como se supone que $x[n]$ tiene longitud finita N , no hay solapamiento entre los términos $x[n-rN]$ para los diferentes valores de r . La Ecuación (8.58a) se puede escribir de otra forma:

$$\tilde{x}[n] = x[(n \text{ módulo } N)]. \quad (8.59)$$

Por conveniencia, utilizaremos la notación $((n))_N$ para indicar $(n \text{ módulo } N)$. Con esta notación, la Ecuación (8.59) se convierte en

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]. \quad (8.60)$$

Nótese que la Ecuación (8.60) es equivalente a la Ecuación (8.58a) sólo cuando la longitud de $x[n]$ es menor o igual que N . La secuencia de duración finita $x[n]$ se obtiene extrayendo un período de $\tilde{x}[n]$, como indica la Ecuación (8.58b).

Una forma informal pero útil de visualizar la Ecuación (8.59) es imaginarse que un dibujo de la secuencia $x[n]$ se enrolla en forma de un cilindro con una circunferencia igual a la longitud de la secuencia. A medida que recorremos repetidamente la circunferencia del cilindro, vemos que la secuencia de longitud finita se repite periódicamente. Con esta interpretación, la representación de la secuencia de longitud finita mediante una secuencia periódica corresponde a enrollar la secuencia formando el cilindro. La recuperación de la secuencia de longitud finita a partir de la secuencia periódica corresponde a desenrollar el cilindro y dejarlo plano, de modo que la secuencia se muestra en un eje de tiempos lineal en lugar de en un eje de tiempos circular (módulo N).

Como se definió en la Sección 8.1, la secuencia de coeficientes $\tilde{X}[k]$ del desarrollo en serie de Fourier discreto de la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ es también una secuencia periódica de periodo N . Para mantener una dualidad entre los dominios del tiempo y de la frecuencia, escogeremos los coeficientes de Fourier, que asociaremos a la secuencia de duración finita, también como una secuencia de duración finita correspondiente a un periodo de $\tilde{X}[k]$. Esta secuencia de duración finita, $X[k]$, se denomina transformada discreta de Fourier (DFT). Por tanto la DFT, $X[k]$, se relaciona con los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier, $\tilde{X}[k]$ mediante la relación

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \quad (8.61)$$

y

$$\tilde{X}[k] = X[(k \text{ módulo } N)] = X[(k)_N]. \quad (8.62)$$

Recordamos de la Sección 8.1 que $\tilde{X}[k]$ y $\tilde{x}[n]$ están relacionados por

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}. \quad (8.63)$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn}. \quad (8.64)$$

Como las sumas de las Ecuaciones (8.63) y (8.64) sólo involucran el intervalo entre cero y $(N-1)$, utilizando las Ecuaciones (8.58b)-(8.64) se deduce que

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.65)$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.66)$$

Generalmente, las ecuaciones de análisis y síntesis de la DFT se expresan como sigue:

$$\text{Ecuación de análisis: } X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}. \quad (8.67)$$

$$\text{Ecuación de síntesis: } x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}. \quad (8.68)$$

Es decir, el hecho de que $X[k] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq k \leq N-1$ y de que $x[n] = 0$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$ están indicados implícitamente, pero no siempre se indican explícitamente. La relación entre $x[n]$ y $X[k]$ expresada en las Ecuaciones (8.67) y (8.68) se indica algunas veces como

$$x[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X[k]. \quad (8.69)$$

Al expresar las Ecuaciones (8.11) y (8.12) en la forma que indican las Ecuaciones (8.67) y (8.68) para secuencias de longitud finita, no hemos eliminado la periodicidad inherente. Como en el caso del desarrollo en serie de Fourier, la DFT $X[k]$ corresponde a muestras de la transformada de Fourier periódica $X(e^{j\omega})$, y si la Ecuación (8.68) se evalúa para valores de n fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$, el resultado no será cero, sino una extensión periódica de $x[n]$. La periodicidad implícita está siempre presente. Algunas veces nos causará dificultades y algunas veces podremos explotarla, pero ignorarla completamente es fuente de problemas. Al definir la DFT, simplemente estamos reconociendo que estamos interesados sólo en los valores de $x[n]$ en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$ ya que $x[n]$ es realmente cero fuera de ese intervalo, y que sólo estamos interesados en los valores de $X[k]$ en el intervalo $0 \leq k \leq N-1$, ya que son los únicos valores necesarios en la Ecuación (8.68).

Ejemplo 8.7. La DFT de un pulso rectangular

Para ilustrar la DFT de una secuencia de duración finita, consideremos la señal $x[n]$ que se muestra en la Figura 8.10(a). Para determinar la DFT podemos considerar que $x[n]$ es una secuencia de duración finita con cualquier longitud mayor o igual que $N = 5$. Considerada como una secuencia de longitud $N = 5$, la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ cuyo desarrollo en serie de Fourier corresponde a la DFT de $x[n]$ se muestra en la Figura 8.10(b). Como la secuencia de la Figura 8.10(b) es constante en el intervalo $0 \leq n \leq 4$, se deduce que

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^4 e^{-j2\pi k n/5} = \frac{1 - e^{-j2\pi k 5/5}}{1 - e^{-j2\pi k/5}} \\ &= \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.70)$$

es decir, los únicos coeficientes $\tilde{X}[k]$ del desarrollo en serie que son distintos de cero están en $k = 0$ y en múltiplos enteros de $k = 5$ (todos los cuales representan a una exponencial en $k = 0$ y en múltiplos enteros de $k = 5$ (todos los cuales representan a una exponencial compleja de la misma frecuencia). Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se muestran en la Figura 8.10(c). Se muestra también el módulo de la transformada de Fourier, $|X(e^{j\omega})|$. Puede verse claramente que $\tilde{X}[k]$ es una secuencia de muestras de $X(e^{j\omega})$ a las

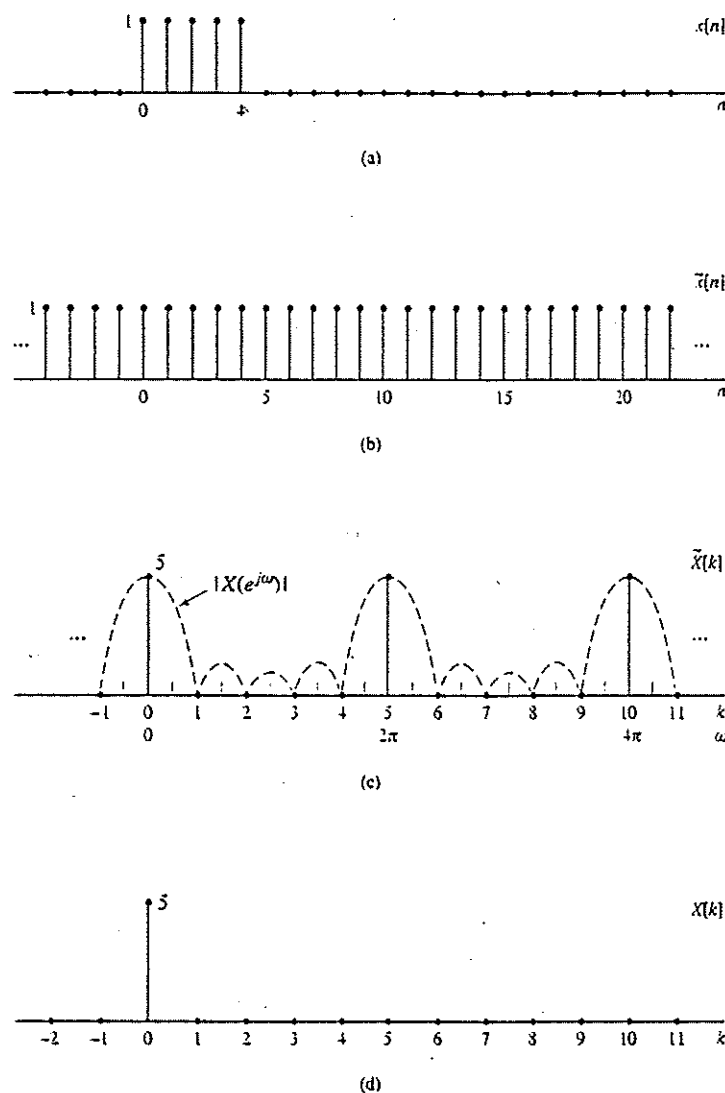


Figura 8.10. Ilustración de la DFT. (a) Secuencia de longitud finita $x[n]$. (b) Secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ formada a partir de $x[n]$ con período $N = 5$. (c) Coeficientes $\tilde{X}[k]$ del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$. Para hacer hincapié en que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son muestras de la transformada de Fourier se muestra también $|X(e^{j\omega})|$. (d) DFT de $x[n]$.

frecuencias $\omega_k = 2\pi k/5$. De acuerdo con la Ecuación (8.61), la DFT de cinco puntos de $x[n]$ corresponde a la secuencia de longitud finita que se obtiene extrayendo un período de $\tilde{X}[k]$. La Figura 8.10(d) muestra la DFT de cinco puntos de $x[n]$.

Si consideramos ahora que $x[n]$ es de longitud $N = 10$, la Figura 8.11(b) muestra la secuencia periódica resultante, que es la misma que consideramos en el Ejemplo 8.3. Por

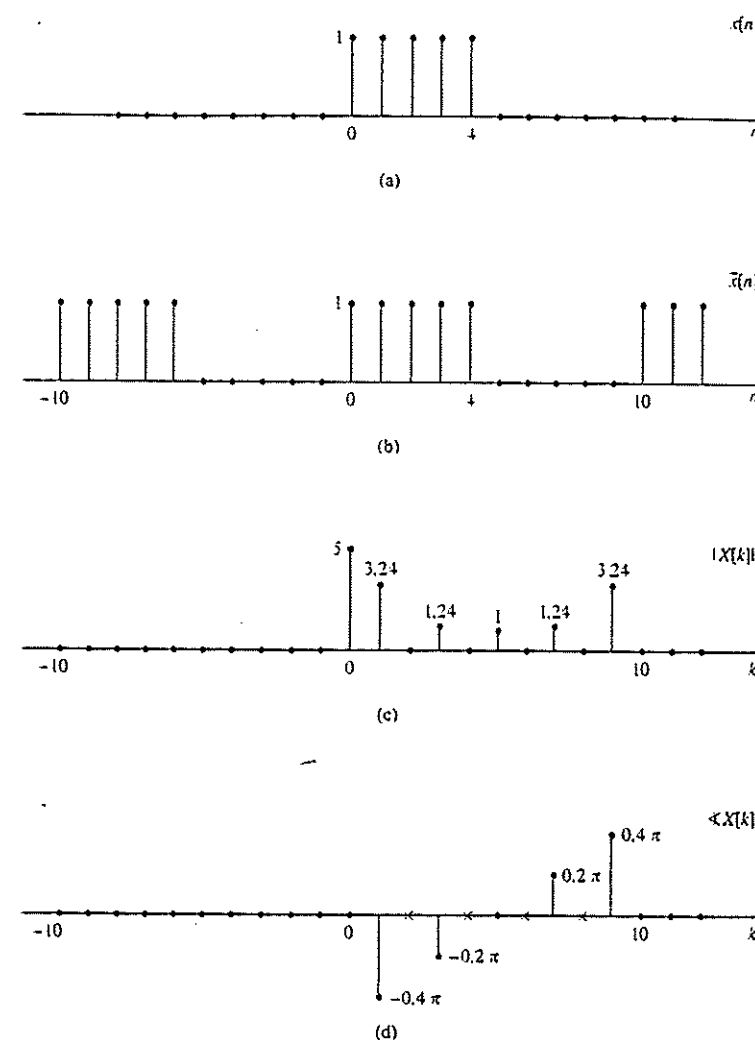


Figura 8.11. Ilustración de la DFT. (a) Secuencia de longitud finita $x[n]$. (b) Secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ formada a partir de $x[n]$ con período $N = 10$. (c) Módulo de la DFT. (d) Fase de la DFT (las x indican valores indeterminados).

tanto, $\tilde{X}[k]$ se muestra en las Figuras 8.2 y 8.6, y la DFT de 10 puntos, $X[k]$, que se muestra en las Figuras 8.11(c) y 8.11(d) es un período de $\tilde{X}[k]$.

La distinción entre la secuencia de duración finita $x[n]$ y la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ relacionadas por las Ecuaciones (8.57) y (8.60) puede parecer menor, ya que utilizando esas ecuaciones es inmediato obtener una de ellas a partir de la otra. Sin embargo, la distinción es importante al considerar las propiedades de la DFT y al considerar el efecto sobre $x[n]$

de una modificación de $X[k]$. Esto resultará evidente en la sección siguiente, donde presentaremos las propiedades de la DFT.

8.6. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

En esta sección consideraremos diversas propiedades de la DFT de secuencias de longitud finita. Nuestra presentación es paralela a la de la Sección 8.2 para secuencias periódicas. Sin embargo, se debe poner especial atención en la interacción del supuesto de longitud finita y la periodicidad implícita de la representación de secuencias de longitud finita mediante la DFT.

8.6.1. Linealidad

Si se combinan linealmente dos secuencias de longitud finita $x_1[n]$ y $x_2[n]$, es decir,

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n], \quad (8.71)$$

la DFT de $x_3[n]$ es

$$X_3[k] = aX_1[k] + bX_2[k]. \quad (8.72)$$

Es obvio que si $x_1[n]$ es de longitud N_1 y $x_2[n]$ es de longitud N_2 , la máxima longitud de $x_3[n]$ será $N_3 = \max[N_1, N_2]$. Por tanto, para que la Ecuación (8.72) tenga sentido, ambas DFT se deben calcular con la misma longitud $N \geq N_3$. Si, por ejemplo, $N_1 < N_3$, entonces $X_1[k]$ será la DFT de $x_1[n]$ aumentada con $(N_2 - N_1)$ ceros. Es decir, la DFT de N_2 puntos de $x_1[n]$ es

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_1[n] W_{N_2}^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1. \quad (8.73)$$

y la DFT de N_2 puntos de $x_2[n]$ es

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2[n] W_{N_2}^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N_2 - 1. \quad (8.74)$$

En resumen, si

$$x_1[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X_1[k] \quad (8.75a)$$

y

$$x_2[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X_2[k], \quad (8.75b)$$

entonces

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{\text{DFT}} aX_1[k] + bX_2[k], \quad (8.76)$$

siendo todas las longitudes de las secuencias y sus transformadas discretas de Fourier iguales al máximo de las longitudes de $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Por supuesto, se pueden calcular DFT de longitud superior aumentando ambas secuencias con muestras de valor cero.

8.6.2. Desplazamiento circular de una secuencia

De acuerdo a la Sección 2.9.2 y a la Propiedad 2 de la Tabla 2.2, si $X(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de $x[n]$, entonces $e^{-j\omega m} X(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier de la secuencia des-

plazada $x[n-m]$. En otras palabras, un desplazamiento de m puntos en el dominio del tiempo (si m es positivo corresponde a un retardo temporal y si m es negativo a un adelanto temporal) se traduce en el dominio de la frecuencia en la multiplicación de la transformada de Fourier por un factor de fase lineal $e^{-j\omega m}$. En la Sección 8.2.2 presentamos la correspondiente propiedad para los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica. Concretamente, si una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ tiene como coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier $\tilde{X}[k]$, la secuencia desplazada $\tilde{x}[n-m]$ tendrá como coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier $e^{-j2\pi k/N} \tilde{X}[k]$. Consideremos ahora la operación en el dominio del tiempo correspondiente a la multiplicación de los coeficientes de la DFT de una secuencia de longitud finita $x[n]$ por el factor de fase lineal $e^{-j2\pi k/N} \tilde{X}[k]$. Concretamente, sea $x_1[n]$ la secuencia de longitud finita cuya DFT es $\tilde{X}[k]$. Es decir, si

$$x_1[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}[k], \quad (8.77)$$

estamos interesados en una secuencia $x_1[n]$ tal que

$$x_1[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}_1[k] = e^{-j2\pi k/N} \tilde{X}[k]. \quad (8.78)$$

Como la DFT de N puntos representa a una secuencia finita de longitud N , tanto $x_1[n]$ como $\tilde{X}_1[k]$ deben ser cero fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$, y por tanto, $x_1[n]$ no se puede obtener mediante un simple desplazamiento temporal de $x[n]$. El resultado correcto se desprende directamente del resultado de la Sección 8.2.2 y de la interpretación de la DFT como los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la secuencia periódica $\tilde{x}_1[(n)]_N$. En particular, de las Ecuaciones (8.59) y (8.62) se deduce que

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[(n)]_N \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}_1[k] = \tilde{X}[(k)]_N, \quad (8.79)$$

y similarmente, se puede definir una secuencia periódica $\tilde{x}_1[n]$ tal que

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[(n)]_N \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}_1[k] = \tilde{X}_1[(k)]_N, \quad (8.80)$$

donde, por hipótesis

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j2\pi k/N} \tilde{X}[k]. \quad (8.81)$$

Por tanto, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}_1[n]$ son

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j2\pi k/N} \tilde{X}[(k)]_N. \quad (8.82)$$

Nótese que

$$e^{-j2\pi k/N} \tilde{X}[(k)]_N = e^{-j2\pi k/N} \tilde{X}[k]. \quad (8.83)$$

Es decir, como $e^{-j2\pi k/N}$ es periódica de periodo N tanto en k como en m podemos obviar la notación $[(k)]_N$. Por tanto, la Ecuación (8.82) se convierte en

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j2\pi k/N} \tilde{X}[k], \quad (8.84)$$

de forma que de la Sección 8.2.2 se deduce que

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m] = x[(n-m)]_N. \quad (8.85)$$

Por tanto, la secuencia de longitud finita $x_1[n]$ cuya DFT está dada por la Ecuación (8.81) es

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = x[(n-m)]_N, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.86)$$

La Ecuación (8.86) nos indica cómo formar la secuencia $x_1[n]$.

Ejemplo 8.8. Desplazamiento circular de una secuencia

La Figura 8.12 ilustra el procedimiento del desplazamiento circular para $m = -2$. Es decir, deseamos determinar $x_1[n] = x[(n+2)]_N$ para $N = 6$. Hemos demostrado que su DFT será $X_1[k] = W_N^{-2k} X[k]$. Concretamente, a partir de $x[n]$ se construye una secuencia periódica $\tilde{x}[n] = x[(n)]_N$, como se indica en la Figura 8.12(b). De acuerdo a la Ecuación (8.85), desplazamos después $\tilde{x}[n]$ dos unidades a la izquierda, con lo que se obtiene $\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n+2]$ como se muestra en la Figura 8.12(c). Finalmente, utilizando la Ecuación (8.86), extraemos un periodo de $\tilde{x}_1[n]$ para obtener $x_1[n]$, como se indica en la Figura 8.12(d).

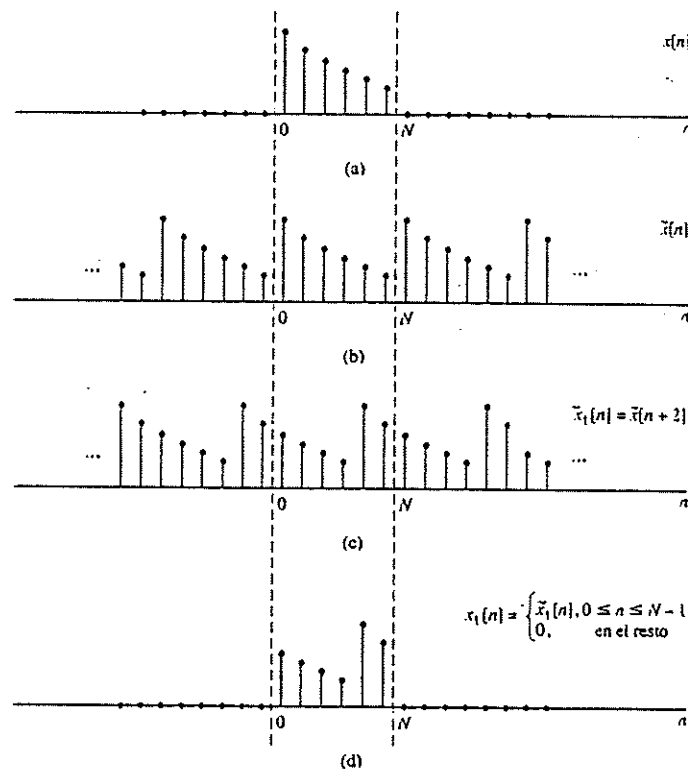


Figura 8.12. Desplazamiento circular de una secuencia de longitud finita, es decir, efecto en el dominio del tiempo de multiplicar la DFT de una secuencia por un factor de fase lineal.

Una comparación de las Figuras 8.12(a) y (d) indica claramente que $x_1[n]$ no corresponde a un desplazamiento lineal de $x[n]$, y de hecho, ambas secuencias están confinadas entre 0 y $(N-1)$. Observando la Figura 8.12 vemos que $x_1[n]$ se puede formar desplazando $x[n]$ de forma que los valores de dicha secuencia que dejan el intervalo entre 0 y $(N-1)$ por un extremo entren por el otro extremo. Otro punto interesante es que en el ejemplo que se muestra en la Figura 8.12(a), si formamos $x_2[n] = x[(n-4)]_N$ desplazando la secuencia a la derecha 4 unidades (módulo 6), obtenemos la misma secuencia que $x_1[n]$. En términos de la DFT, esto se produce porque $W_N^{4k} = W_N^{-2k}$, o de forma más general, $W_N^{mk} = W_N^{-(N-m)k}$, lo que implica que en un desplazamiento circular de N puntos, desplazarse m puntos en una dirección es lo mismo que desplazarse $(N-m)$ puntos en la dirección opuesta.

En la Sección 8.4 sugerimos la interpretación de formar la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ a partir de la secuencia de longitud finita $x[n]$ enrollando $x[n]$ en un cilindro con una circunferencia exactamente de N puntos. A medida que recorremos el cilindro repetidas veces, la secuencia que vemos es la secuencia periódica $\tilde{x}[n]$. Un desplazamiento lineal de esta secuencia corresponde entonces a una *rotación* del cilindro. En el contexto de secuencias de longitud finita y de la DFT, este desplazamiento se denomina desplazamiento circular o *rotación* de la secuencia en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$.

En resumen, la propiedad de desplazamiento circular de la DFT es

$$x[((n-m))_N], \quad 0 \leq n \leq N-1 \xrightarrow{\text{DFT}} e^{-j(2\pi k/N)m} X[k]. \quad (8.87)$$

8.6.3. Dualidad

Como la DFT está tan estrechamente relacionada con el desarrollo en serie de Fourier discreto, es razonable esperar que la DFT exhiba una propiedad de dualidad similar a la del desarrollo en serie de Fourier que presentamos en la Sección 8.2.3. De hecho, un examen de las Ecuaciones (8.67) y (8.68) nos muestra que las ecuaciones de análisis y síntesis se diferencian sólo en el factor $1/N$ y en el signo del exponente de las potencias de W_N .

La propiedad de dualidad de la DFT se puede obtener explotando la relación entre la DFT y el desarrollo en serie de Fourier como hicimos en la obtención de la propiedad de desplazamiento circular. Con este fin, consideremos $x[n]$ y su DFT $X[k]$ y construyamos las secuencias periódicas

$$\tilde{x}[n] = x[(n)]_N, \quad (8.88a)$$

$$\tilde{X}[k] = X[(k)]_N, \quad (8.88b)$$

de forma que

$$\tilde{x}[n] \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k]. \quad (8.89)$$

De la propiedad de dualidad dada en las Ecuaciones (8.25),

$$\tilde{X}[n] \xrightarrow{\text{DFS}} N\tilde{x}[-k]. \quad (8.90)$$

Si definimos la secuencia periódica $\tilde{x}_1[n] = \tilde{X}[n]$, un periodo de la cual es la secuencia de duración finita $x_1[n] = X[n]$, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}_1[n]$ son $\tilde{X}_1[k] = N\tilde{x}[-k]$. Por tanto, la DFT de $x_1[n]$ es

$$X_1[k] = \begin{cases} N\tilde{x}[-k], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \quad (8.91)$$

o equivalentemente

$$X_1[k] = \begin{cases} Nx[((-k))_N], & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.92)$$

En consecuencia, la propiedad de dualidad de la DFT se puede expresar como sigue: Si

$$x[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X[k], \quad (8.93a)$$

entonces

$$X[n] \xrightarrow{\text{DFT}} Nx[((-k))_N], \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (8.93b)$$

Ejemplo 8.10. Convolución circular con un impulso desplazado

El resultado de la Sección 8.6.2 proporciona un ejemplo de convolución circular. Sea $x_2[n]$ una secuencia de duración finita de longitud N y

$$x_1[n] = \delta[n - n_0]. \quad (8.118)$$

siendo $0 < n_0 < N$. Claramente, $x_1[n]$ se puede considerar como una secuencia de duración finita

$$x_1[n] = \begin{cases} 0, & 0 \leq n < n_0, \\ 1, & n = n_0, \\ 0, & n_0 < n \leq N-1. \end{cases} \quad (8.119)$$

como se muestra en la Figura 8.14 para $n_0 = 1$.

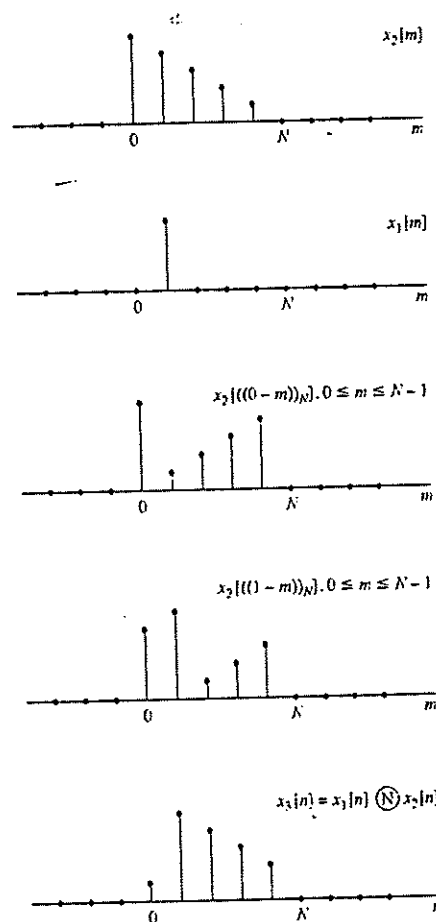


Figura 8.14. Convolución circular de una secuencia de longitud finita $x_2[n]$ con un impulso desplazado $x_1[n] = \delta[n-1]$.

La DFT de $x_1[n]$ es

$$X_1[k] = W_N^{kn_0}. \quad (8.120)$$

Si formamos el producto

$$X_3[k] = W_N^{kn_0} X_2[k]. \quad (8.121)$$

y tenemos en cuenta lo expuesto en la Sección 8.6.2, vemos que la secuencia de duración finita correspondiente a $X_3[k]$ es la secuencia $x_2[n]$ rotada n_0 muestras a la derecha en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$. Es decir, la convolución circular de una secuencia $x_2[n]$ con un impulso retrasado una sola unidad produce una rotación de $x_2[n]$ en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$. Este ejemplo se ilustra en la Figura 8.14 para $N=5$ y $n_0=1$. En la figura se muestran primero las secuencias $x_2[m]$ y $x_1[m]$ y después $x_2[((0-m))N]$ y $x_2[((1-m))N]$. Observando esos dos casos se puede ver claramente que el resultado de la convolución circular de $x_2[n]$ con un impulso unidad desplazado una sola muestra será un desplazamiento circular de $x_2[n]$. La última secuencia que se muestra en la figura es $x_3[n]$, resultado de la convolución circular de $x_1[n]$ y $x_2[n]$.

Ejemplo 8.11. Convolución circular de dos pulsos rectangulares

Como otro ejemplo de convolución circular, sea

$$x_1[n] = x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \quad (8.122)$$

que se representa en la Figura 8.15 para $L=6$. Si llamamos N a la longitud de la DFT, entonces para $N=L$ las DFT de N puntos son

$$X_1[k] = X_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k=0, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.123)$$

Si multiplicamos explícitamente $X_1[k]$ y $X_2[k]$, obtenemos

$$X_3[k] = X_1[k] X_2[k] = \begin{cases} N^2, & k=0, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.124)$$

de donde se deduce que

$$x_3[n] = N, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.125)$$

Este resultado se muestra en la Figura 8.15. Se puede ver claramente que a medida que la secuencia $x_2[n]$ se rota con respecto a $x_1[n]$, la suma de los productos $x_1[m]x_2[((n-m))N]$ será siempre igual a N .

Es posible, por supuesto, considerar $x_1[n]$ y $x_2[n]$ como secuencias de $2L$ puntos aumentándolas con L ceros. Si realizamos entonces una convolución circular de $2L$ puntos con las secuencias aumentadas, obtenemos la secuencia de la Figura 8.16, que se puede ver que es idéntica a la convolución lineal de las secuencias de longitud finita $x_1[n]$ y $x_2[n]$. En la Sección 8.7 se comentará con mayor detalle esta importante observación.

Nótese que para $N = 2L$, como en la Figura 8.16.

$$X_1[k] = X_2[k] = \frac{1 - W_N^{Lk}}{1 - W_N^k}$$

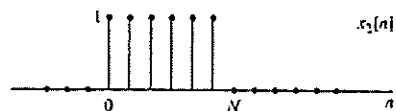
por lo que la DFT de la secuencia triangular $x_3[n]$ de la Figura 8.16(e) es

$$X_3[k] = \left(\frac{1 - W_N^{Lk}}{1 - W_N^k} \right)^2$$

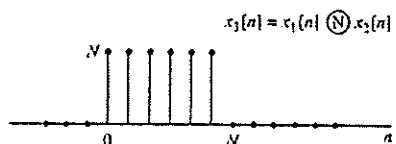
con $N = 2L$.



(a)



(b)



(c)

Figura 8.15. Convolución circular de N puntos de dos secuencias constantes de longitud N .

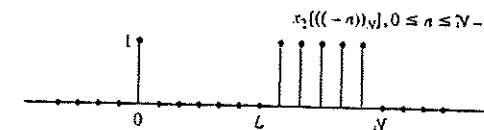


(a)

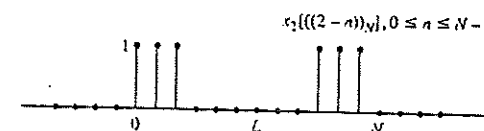


(b)

Figura 8.16. Convolución circular de $2L$ puntos de dos secuencias constantes de longitud L .



(c)



(d)



(e)

Figura 8.16. (Continuación.)

La propiedad de convolución circular se representa como

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X_1[k] X_2[k]. \quad (8.126)$$

A la vista de la dualidad de las relaciones de la DFT no es sorprendente que la DFT de un producto de dos secuencias de N puntos sea la convolución circular de sus respectivas transformadas discretas de Fourier. Concretamente, si $x_3[n] = x_1[n] x_2[n]$, entonces

$$X_3[k] = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell] X_2[(k - \ell)_N] \quad (8.127)$$

$$x_1[n] x_2[n] \xrightarrow{\text{DFT}} \frac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]. \quad (8.128)$$

8.6.6. Resumen de las propiedades de la transformada discreta de Fourier

Las propiedades de la transformada discreta de Fourier que hemos presentado en la Sección 8.6 se resumen en la Tabla 8.2. Nótese que en todas las propiedades las expresiones resultantes suponen que $x[n]$ y $X[k]$ son cero fuera del intervalo $0 \leq n \leq N-1$ y $0 \leq k \leq N-1$, respectivamente.

TABLA 8.2.

Secuencia de longitud finita (longitud N)	DFT de N puntos (longitud N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km}X[k]$
6. $W_N^{-km}x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} X_1(\ell)X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $\text{Re}\{x[n]\}$	$X_{\text{re}}[k] = \frac{1}{2} \{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12. $j\text{Im}\{x[n]\}$	$X_{\text{im}}[k] = \frac{1}{2} \{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13. $x_{\text{re}}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\text{Re}\{X[k]\}$
14. $x_{\text{im}}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\text{Im}\{X[k]\}$
Las Propiedades 15-17 se aplican sólo cuando $x[n]$ es real.	
15. Propiedades de simetría	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \text{Re}\{X[k]\} = \text{Re}\{X^*[((-k))_N]\} \\ \text{Im}\{X[k]\} = -\text{Im}\{X^*[((-k))_N]\} \\ X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \angle X[k] = -\angle X^*[((-k))_N] \end{cases}$
16. $x_{\text{re}}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\text{Re}\{X[k]\}$
17. $x_{\text{im}}[n] = \frac{1}{2} \{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\text{Im}\{X[k]\}$

8.7. CONVOLUCIÓN LINEAL MEDIANTE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

En el Capítulo 9 veremos que existen algoritmos eficientes para calcular la transformada discreta de Fourier de una secuencia de longitud finita. Estos algoritmos tienen el nombre común de algoritmos de *transformada rápida de Fourier* (FFT, *Fast Fourier transform*). Como estos algoritmos están disponibles, es computacionalmente eficiente realizar la convolución de dos secuencias mediante el siguiente procedimiento:

- Calcular las transformadas discretas de Fourier de N puntos $X_1[k]$ y $X_2[k]$ de las secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente.
- Calcular el producto $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ para $0 \leq k \leq N-1$.
- Obtener la secuencia $x_3[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]$ como la DFT inversa de $X_3[k]$.

En la mayoría de las aplicaciones, nuestro interés es realizar una convolución lineal de dos secuencias. Es decir, deseamos realizar un sistema lineal e invariante con el tiempo. Esto ocurre, por ejemplo, al filtrar una secuencia como una señal de voz o una señal radar o al calcular la función de autocorrelación de esas señales. Como vimos en la Sección 8.6.5, la multiplicación de transformadas discretas de Fourier corresponde a la convolución circular de las secuencias. Para obtener una convolución lineal hay que asegurar que la convolución circular tiene el efecto de la convolución lineal. Los comentarios del final del Ejemplo 8.15 sugieren cómo se puede hacer. Presentaremos ahora un análisis más detallado.

8.7.1. Convolución lineal de dos secuencias de longitud finita

Consideremos una secuencia $x_1[n]$ de L puntos de longitud y una secuencia $x_2[n]$ de P puntos de longitud. Supongamos que se desea combinar esas dos secuencias mediante una operación de convolución lineal para obtener una tercera secuencia

$$x_3[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m]. \quad (8.129)$$

La Figura 8.17(a) muestra una secuencia típica $x_1[m]$ y la Figura 8.17(b) una secuencia típica $x_2[n-m]$ para varios valores de n . Es claro que el producto $x_1[m]x_2[n-m]$ es cero para todo m siempre que $n < 0$ y $n > L+P-2$. Es decir, $x_3[n] \neq 0$ en el intervalo $0 \leq n \leq L+P-2$. Por tanto, $(L+P-1)$ es la longitud máxima de la secuencia $x_3[n]$ resultante de la convolución lineal de una secuencia de longitud L con otra secuencia de longitud P .

8.7.2. La convolución circular como una convolución lineal con solapamiento

Como muestran los Ejemplos 8.10 y 8.11, el que una convolución circular correspondiente al producto de dos DFT de N puntos tenga el mismo valor que la convolución lineal de las correspondientes secuencias de longitud finita dependerá de la longitud de la DFT en relación con la longitud de las secuencias de duración finita. Una interpretación extremadamente útil de la relación entre la convolución circular y la convolución lineal se puede establecer en términos de solapamiento temporal. Como esta interpretación es tan importante y útil para comprender la convolución circular, la desarrollaremos de varias formas.

En la Sección 8.4 observamos que si la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de una secuencia $x[n]$ se muestrea a las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, la secuencia resultante corresponde a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la secuencia periódica

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]. \quad (8.130)$$

De nuestra presentación de la DFT se deduce que la secuencia de longitud finita

$$X[k] = \begin{cases} X(e^{j2\pi k/N}), & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.131)$$

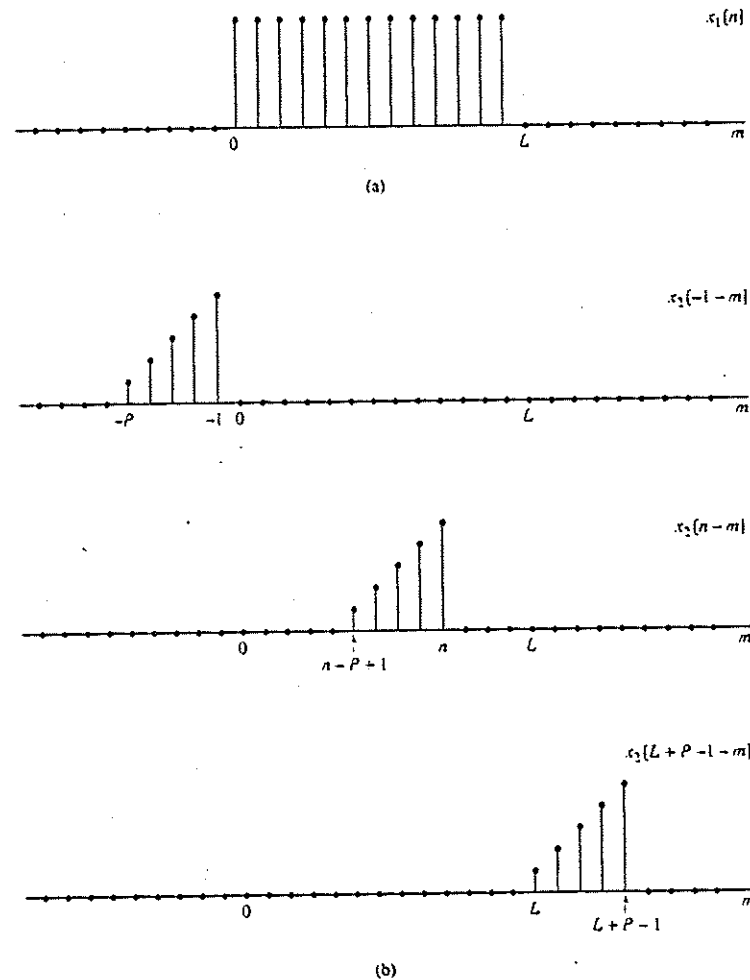


Figura 8.17. Ejemplo de convolución lineal de dos secuencias de longitud finita en el que se muestra que $x_1[n] = 0$ para $n \leq -1$ y para $n \geq L + P - 1$. (a) Secuencia de longitud finita $x_1[n]$. (b) $x_2[n-m]$ para varios valores de n .

es la DFT de un periodo de $x[n]$, como indica la Ecuación (8.130), es decir,

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.132)$$

Obviamente, si $x[n]$ tiene longitud menor o igual que N , no se producirá solapamiento temporal y $x_p[n] = x[n]$. Sin embargo, si la longitud de $x[n]$ es mayor que N , $x_p[n]$ puede no ser igual a $x[n]$ para algunos valores de n , o para ninguno. Utilizaremos de aquí en adelante el subíndice p para indicar que una secuencia es un periodo de la secuencia periódica resultante de realizar la DFT inversa de una transformada de Fourier muestreada. Se puede eliminar el subíndice si está claro que no se produce solapamiento.

La secuencia $x_3[n]$ de la Ecuación (8.129) tiene como transformada de Fourier

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}). \quad (8.133)$$

Si definimos una DFT

$$X_3[k] = X_3(e^{j2\pi k/N}), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.134)$$

es claro que, utilizando las Ecuaciones (8.133) y (8.134), también

$$X_3[k] = X_1(e^{j2\pi k/N})X_2(e^{j2\pi k/N}), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.135)$$

y por tanto

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k]. \quad (8.136)$$

Es decir, la secuencia resultante de realizar la DFT inversa de $X_3[k]$ es

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n-rN], & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.137)$$

y utilizando la Ecuación (8.136) se deduce que

$$x_{3p}[n] = x_1[n] \otimes x_2[n]. \quad (8.138)$$

Es decir, la convolución circular de dos secuencias de longitud finita es equivalente a la convolución lineal de dichas secuencias, seguida por el solapamiento temporal que indica la Ecuación (8.137).

Nótese que si N es mayor o igual que L o P , $X_1[k]$ y $X_2[k]$ representan exactamente a $x_1[n]$ y $x_2[n]$, pero $x_{3p}[n] = x_3[n]$ para todo n sólo si N es mayor o igual que la longitud de la secuencia $x_3[n]$. Como vimos en la Sección 8.7.1, si $x_1[n]$ tiene una longitud de L y $x_2[n]$ tiene una longitud de P , la longitud máxima de $x_3[n]$ es de $(L + P - 1)$. Por tanto, la convolución circular correspondiente a $X_1[k]X_2[k]$ es idéntica a la convolución lineal correspondiente a $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$ si N , la longitud de las DFT cumple que $N \geq L + P - 1$.

Ejemplo 8.12. La convolución circular como una convolución lineal con solapamiento

Los resultados del Ejemplo 8.15 se pueden entender fácilmente a la luz de la interpretación que se acaba de presentar. Nótese que $x_1[n]$ y $x_2[n]$ son secuencias constantes idénticas con longitudes $L = P = 6$, como se muestra en la Figura 8.18(a). La convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ es de longitud $L + P - 1 = 11$ y tiene la forma triangular que se muestra en la Figura 8.18(b). En las Figuras 8.18(c) y (d) se muestran dos de las versiones desplazadas $x_3[n - rN]$ de la Ecuación (8.137), $x_3[n - N]$ y $x_3[n + N]$ para $N = 6$. La convolución

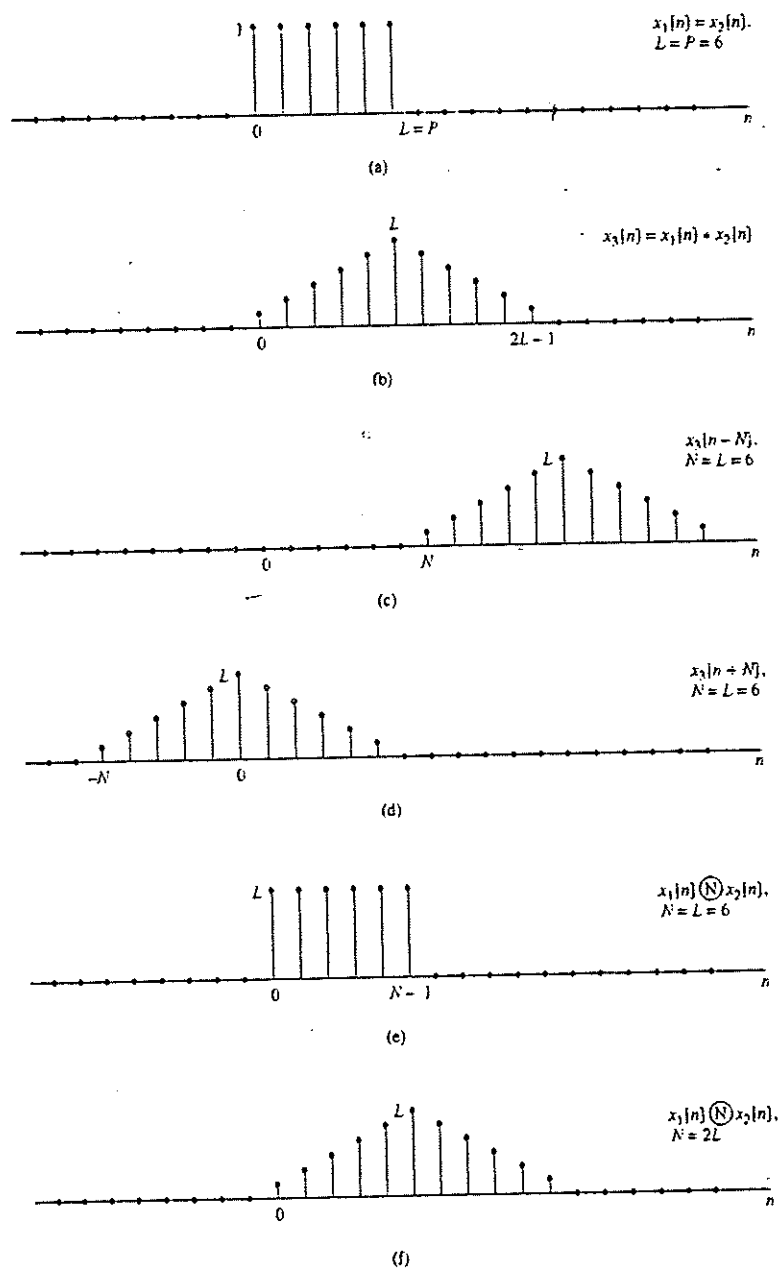


Figura 8.18. Ilustración de que la convolución circular es equivalente a la convolución lineal seguida por un solapamiento. (a) Las secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$ que se van a convolucionar. (b) La convolución lineal de $x_1[n]$ y $x_2[n]$. (c) $x_3[n - N]$ para $N = 6$. (d) $x_3[n + N]$ para $N = 6$. (e) $x_1[n] \otimes x_2[n]$, que es igual a la suma de (b), (c) y (d) en el intervalo $0 \leq n \leq 5$. (f) $x_1[n] \otimes x_2[n]$.

circular de N puntos de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ se puede formar utilizando la Ecuación (8.137). Esto se muestra en la Figura 8.18(e) para $N = L = 6$ y en la Figura 8.18(f) para $N = 2L = 12$. Nótese que para $N = L = 6$, sólo $x_3[n]$ y $x_3[n + N]$ contribuyen al resultado. Como la longitud de la convolución lineal es $(2L - 1)$, el resultado de la convolución circular para $N = 2L$ es idéntico al resultado de la convolución lineal para todo $0 \leq n \leq N - 1$. De hecho, esto sería también verdad para $N = 2L - 1 = 11$.

Como indica el Ejemplo 8.12, el solapamiento temporal en la convolución circular de las dos secuencias de longitud finita se puede evitar si $N \geq L + P - 1$. Además, resulta claro que si $N = L = P$, todos los valores de la convolución circular pueden ser diferentes de los de la convolución lineal. Sin embargo, si $P < L$, algunos valores de la convolución circular coincidirán con los valores correspondientes de la convolución lineal. La interpretación de solapamiento temporal es útil para demostrar esto.

Consideremos dos secuencias de longitud finita $x_1[n]$ y $x_2[n]$, siendo $x_1[n]$ de longitud L y $x_2[n]$ de longitud P , con $P < L$, como se muestra en las Figuras 8.19(a) y (b), respectivamente. Consideremos primero la convolución circular de L puntos de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ y preguntémonos que valores de dicha convolución circular serían idénticos a los valores que se obtendrían mediante una convolución lineal, y cuáles no. La convolución lineal de $x_1[n]$ con $x_2[n]$ será una secuencia de longitud finita de duración $(L + P - 1)$, como se muestra en la Figura 8.19(c). Para determinar la convolución circular de L puntos utilizaremos las

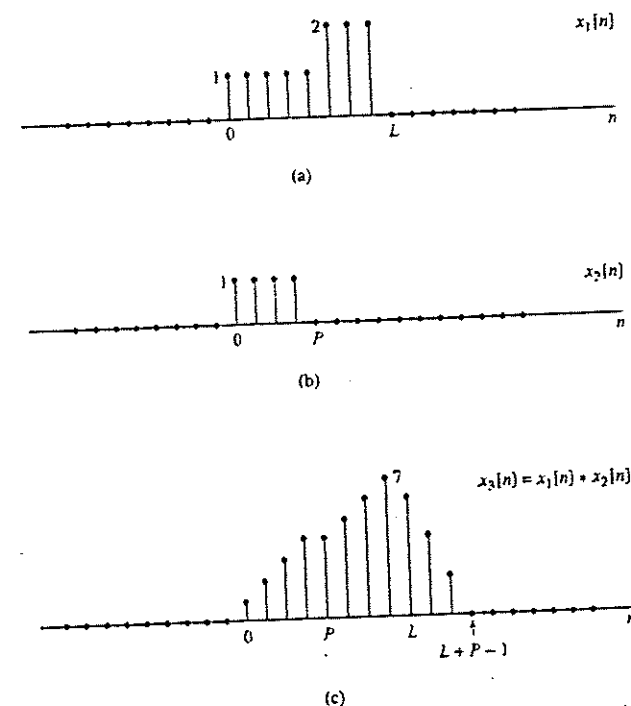


Figura 8.19. Un ejemplo de convolución lineal de dos secuencias de longitud finita.

Ecuaciones (8.137) y (8.138) de forma que

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} x_1[n] \oplus x_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n-rL], & 0 \leq n \leq L-1. \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.139)$$

La Figura 8.20(a) muestra el término de $r = 0$ en la Ecuación (8.139), y las Figuras 8.20(b) y 8.20(c) muestran los términos de $r = -1$ y $r = +1$, respectivamente. Observando la Figura 8.20 resulta claro que en el intervalo $0 \leq n \leq L-1$, $x_{3p}[n]$ sólo está influenciada por $x_3[n]$ y $x_3[n+L]$.

En general, siempre que $P < L$, sólo el término $x_3[n+L]$ se solapará en el intervalo $0 \leq n \leq L-1$. Más concretamente, cuando se suman esos términos, los últimos $(P-1)$ puntos de $x_3[n+L]$, que se extienden desde $n=0$ hasta $n=P-2$ se sumarán con los $(P-1)$ primeros puntos de $x_3[n]$, y los últimos $(P-1)$ de $x_3[n]$, que se extienden desde $n=L$ hasta $n=L+P-2$ serán descartados. Después, $x_{3p}[n]$ se forma extrayendo la porción de $0 \leq n \leq L-1$. Como los últimos $(P-1)$ puntos de $x_3[n+L]$ y los últimos $(P-1)$ puntos de $x_3[n]$ son idénticos, el proceso de formar la convolución circular $x_{3p}[n]$ se puede ver de forma alternativa como una convolución circular con solapamiento, tomando los $(P-1)$ valores de $x_3[n]$ desde $n=L$ hasta $n=L+P-2$ y sumándoselos a los primeros $(P-1)$ de $x_3[n]$. La Figura 8.21 muestra este proceso para el caso de $P=4$ y $L=8$. En la Figura 8.21(a) se muestra la convolución lineal $x_3[n]$, donde los puntos para $n \geq L$ se indican como círculos abiertos. Nótese que sólo $(P-1)$ puntos para $n \geq L$ son distintos de cero. La Figura 8.21(b) muestra la formación de $x_{3p}[n]$ «encollando $x_3[n]$ sobre sí misma». Los primeros $(P-1)$ puntos se encuentran distorsionados por el solapamiento temporal, y los restantes puntos desde $n=P-1$ hasta $n=L-1$ (es decir, los últimos $L-P+1$ puntos) no están distorsionados. Es decir, son idénticos a los que se obtendrían mediante convolución lineal.

De esta presentación debe quedar claro que si la convolución circular es de longitud suficiente con respecto a las longitudes de las secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$, el solapamiento con valores distintos de cero se puede evitar, en cuyo caso la convolución lineal y la circular serán idénticas. Concretamente, si para el caso que se ha considerado, $x_3[n]$ se replica con periodo $N \geq L+P-1$, no ocurrirá solapamiento con valores distintos de cero. Las Figuras 8.21(c) y 8.21(d) ilustran este caso de nuevo para $P=4$ y $L=8$, con $N=11$.

8.7.3. Realización de sistemas lineales e invariantes con el tiempo mediante la DFT

La presentación anterior se ha centrado en las formas de obtener una convolución lineal a partir de una convolución circular. Como los sistemas lineales e invariantes con el tiempo se pueden realizar mediante convolución, esto implica que la convolución circular (realizada con el procedimiento sugerido al principio de la Sección 8.7) se puede utilizar para realizar estos sistemas. Para ver cómo se puede hacer, consideremos en primer lugar una secuencia de entrada $x[n]$ de L puntos y una respuesta al impulso $h[n]$ de P puntos. La convolución lineal de esas dos secuencias, que se denominará $y[n]$, es una secuencia de duración finita de longitud $(L+P-1)$. Por consiguiente, como se comentó en la Sección 8.7.2, para que la convolución circular y la lineal sean idénticas, la convolución circular debe tener al menos una longitud de $(L+P-1)$ puntos. La convolución circular se puede realizar multiplicando las DFT de $x[n]$ y $h[n]$. Como deseamos que el producto represente la

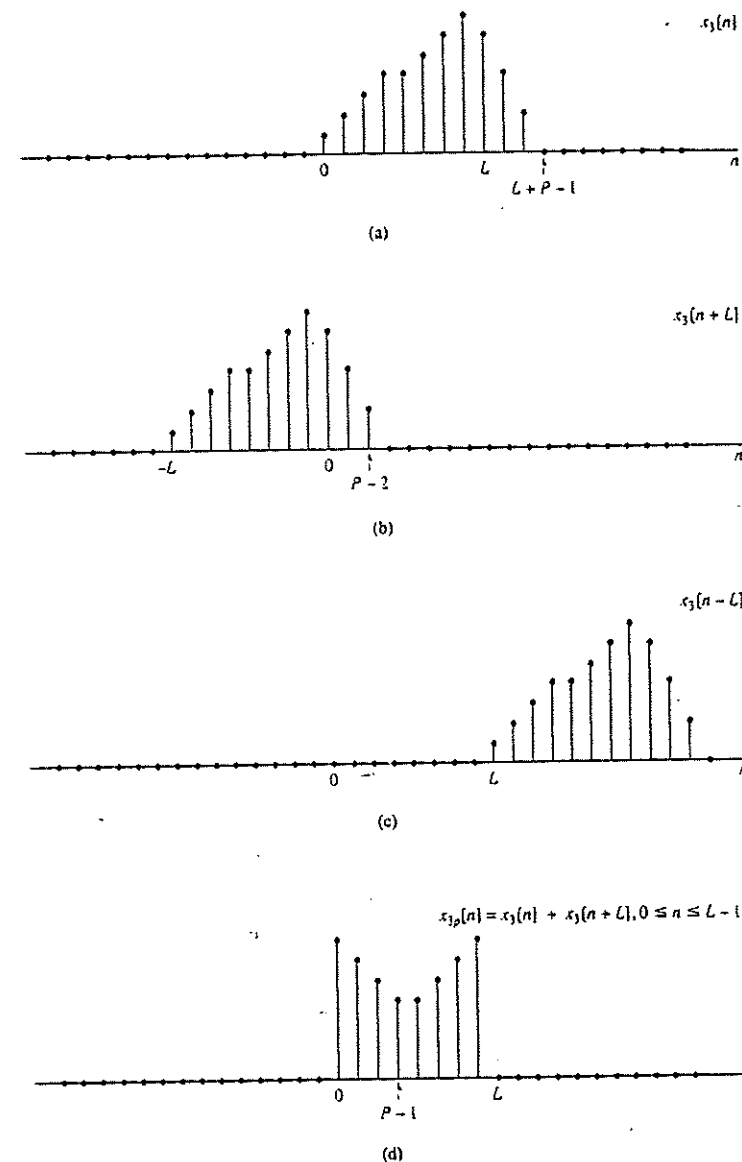


Figura 8.20. Interpretación de la convolución circular como una convolución lineal seguida por un solapamiento, para la convolución lineal de las dos secuencias $x_1[n]$ y $x_2[n]$ de la Figura 8.19.

DFT de la convolución lineal de $x[n]$ y $h[n]$, cuya longitud es $(L+P-1)$, las DFT que vamos a calcular deben tener al menos esa longitud. Es decir, tanto $x[n]$ como $h[n]$ se deben aumentar con valores de amplitud cero. Este proceso se denomina comúnmente *relleno con ceros*.

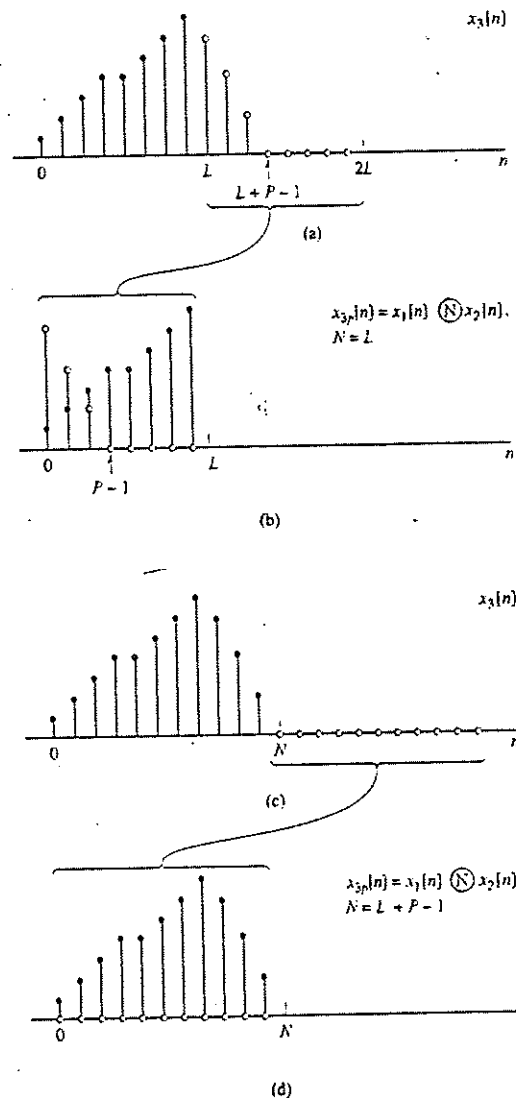


Figura 8.21. Ilustración de la forma en que el resultado de la convolución se «enrolla». (a) y (b) $N = L$ de forma que la «cola» de solapamiento solapa con las primeras $(P-1)$ muestras. (c) y (d) $N = (L + P - 1)$, de forma que no hay solapamiento.

Este procedimiento permite el cálculo de la convolución lineal de dos secuencias de longitud finita utilizando la transformada discreta de Fourier. Es decir, la salida de un sistema FIR cuya entrada es también de longitud finita, se puede calcular con la DFT. En muchas aplicaciones, como filtrado de señales de voz, la señal de entrada es de duración indefinida. Aunque teóricamente podríamos almacenar la señal completa y realizar después el procedimiento comentado utilizando una DFT de un gran número de puntos, esto es bastante poco

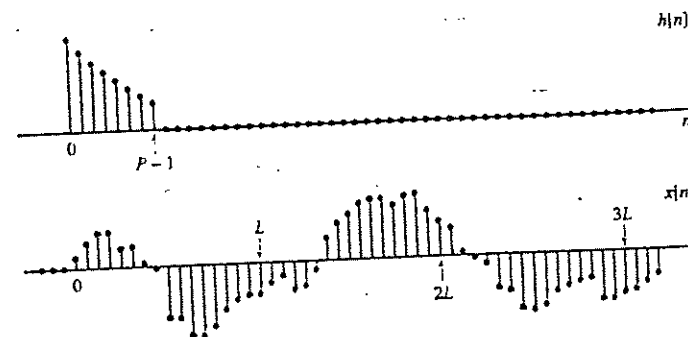


Figura 8.22. La respuesta al impulso de longitud finita $h[n]$ y la señal $x[n]$ de longitud indefinida que se van a filtrar.

práctico. Otra consideración es que en este método de filtrado, no se pueden calcular muestras filtradas hasta haber almacenado toda la señal de entrada. En general es deseable evitar este gran retardo de proceso. La solución a ambos problemas es utilizar *convolución por bloques*. En este procedimiento, la señal que se va a filtrar se divide en secciones de longitud L . Cada sección se convoluciona con la respuesta del filtro de longitud finita y las secciones filtradas se combinan de forma apropiada. El filtrado lineal de cada bloque se puede realizar utilizando la DFT.

Como ilustración y para desarrollar el procedimiento de combinación de las secciones filtradas, consideremos la respuesta al impulso $h[n]$ de longitud P y la señal $x[n]$ que se muestran en la Figura 8.22. En lo que sigue, supondremos que $x[n] = 0$ para $n < 0$ y que la longitud de $x[n]$ es mucho mayor que P . La secuencia $x[n]$ se puede representar como una suma de segmentos de longitud finita L , es decir,

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL], \quad (8.140)$$

siendo

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.141)$$

La Figura 8.23(a) ilustra esta segmentación para la señal $x[n]$ de la Figura 8.22. Nótese que dentro de cada segmento, la primera muestra está en $n = 0$. Sin embargo, la muestra cero de $x_r[n]$ es la muestra rL de la secuencia $x[n]$. Esto se muestra en la Figura 8.23(a) dibujando los segmentos en sus posiciones desplazadas.

Como la convolución es una operación lineal e invariante con el tiempo, se deduce de la Ecuación (8.140) que

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL], \quad (8.142)$$

siendo

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n]. \quad (8.143)$$

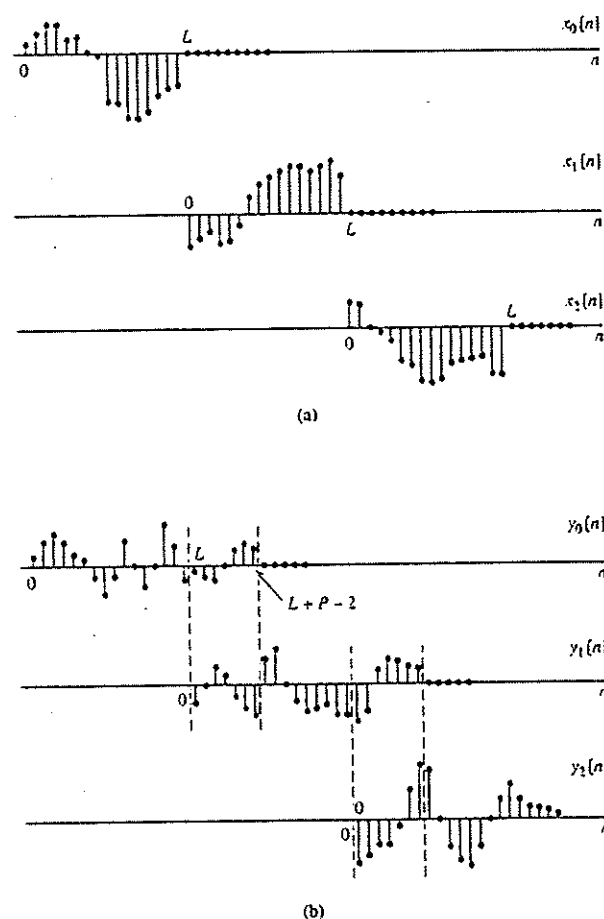


Figura 8.23. (a) Descomposición de la señal $x[n]$ de la Figura 8.22 en secciones que no solapan de longitud L . (b) Resultado de convolucionar cada sección con $h[n]$.

Como las secuencias $x_i[n]$ sólo tienen L valores distintos de cero y $h[n]$ es de longitud P , cada uno de los términos $y_i[n] = x_i[n] * h[n]$ es de longitud $(L + P - 1)$. Por tanto, la convolución lineal $x[n] * h[n]$ se puede obtener por el procedimiento descrito anteriormente utilizando DFT de N puntos, siendo $N > L + P - 1$. Como el comienzo de cada sección de entrada está separado de sus vecinos por L puntos y cada sección filtrada es de longitud $(L + P - 1)$, los puntos distintos de cero de las secciones filtradas se solaparán $(P - 1)$ puntos, y esas muestras de solapamiento se deben sumar al realizar la suma de la Ecuación (8.142). Esto se puede ver en la Figura 8.23(b), que muestra las secciones filtradas, $y_i[n] = x_i[n] * h[n]$. De la misma forma que la señal de entrada se reconstruye sumando los segmentos desplazados de la Figura 8.23(a), el resultado filtrado $x[n] * h[n]$ se construye sumando las secciones filtradas desplazadas que se muestran en la Sección 8.23(b). Este procedimiento de construcción de la salida filtrada se denomina a menudo *método de solapamiento-suma*, ya que las secciones filtradas se solapan y se suman al construir la salida. El

solapamiento se produce porque la convolución lineal de cada sección con la respuesta al impulso es, en general, mayor que la longitud de la sección. El método de solapamiento-suma para realizar convolución por bloques no está ligado a la DFT ni a la convolución circular. Se puede ver claramente que todo lo que se requiere es calcular las convoluciones de menor longitud y combinar los resultados adecuadamente.

Un procedimiento de convolución por bloques alternativo denominado generalmente *método de solapamiento-almacenamiento*, consiste en realizar una convolución circular de L puntos de la respuesta al impulso $h[n]$ de P puntos con un segmento de L puntos, $x_r[n]$, e identificar la parte de la convolución circular que corresponde a la convolución lineal. Los segmentos de salida resultantes se «pegan juntos» para formar la salida. Concretamente, veremos que si una secuencia de L puntos se convoluciona circularmente con una secuencia de P puntos ($P < L$), los primeros $(P - 1)$ puntos del resultado son incorrectos y los restantes puntos son idénticos a los que se obtendrían realizando la convolución lineal. Por tanto, se puede dividir $x[n]$ en secciones de longitud L de forma que cada sección de entrada se solape con la sección precedente $(P - 1)$ puntos. Es decir, si definimos las secciones como

$$x_r[n] = x[n + r(L - P + 1) - P + 1], \quad 0 \leq n \leq L - 1, \quad (8.144)$$

donde, como antes, hemos definido el origen de tiempos para cada sección al principio de esa sección en vez de en el origen de $x[n]$. Este método de seccionar la secuencia se muestra en la Figura 8.24(a). La convolución circular de cada sección con $h[n]$ se denomina $y_{rp}[n]$, donde el subíndice extra p indica que $y_{rp}[n]$ es el resultado de una convolución circular con solapamiento temporal. La Figura 8.24(b) muestra estas secuencias. La parte de cada sección de salida en la región $0 \leq n \leq P - 2$ es la parte que hay que descartar. Las restantes muestras de las secciones sucesivas se van colocando una detrás de otra para formar la salida filtrada. Es decir,

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_{rp}[n - r(L - P + 1) + P - 1], \quad (8.145)$$

siendo

$$y_{rp}[n] = \begin{cases} y_{rp}[n], & P - 1 \leq n \leq L - 1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (8.146)$$

Este procedimiento se denomina *solapamiento-almacenamiento* porque los segmentos de entrada se solapan de forma que cada sección de entrada sucesiva consta de $(L - P + 1)$ nuevos puntos y $(P - 1)$ puntos almacenados de la sección anterior.

La utilidad de los métodos de solapamiento-suma y solapamiento-almacenamiento para realizar la convolución por bloques puede no resultar aparente. En el Capítulo 9 consideraremos algoritmos altamente eficientes para realizar la DFT. Estos algoritmos, denominados colectivamente *transformada rápida de Fourier (FFT)* son tan eficientes que, incluso para respuestas al impulso FIR de longitud modesta (del orden de 25 o 30), puede ser más ventajoso realizar la convolución por bloques utilizando la DFT que realizarla directamente. La longitud P para la que el método de la DFT empieza a ser más eficiente es, por supuesto, dependiente del hardware y del software disponible para realizar los cálculos (véase Stockham, 1966 y Helms, 1967).

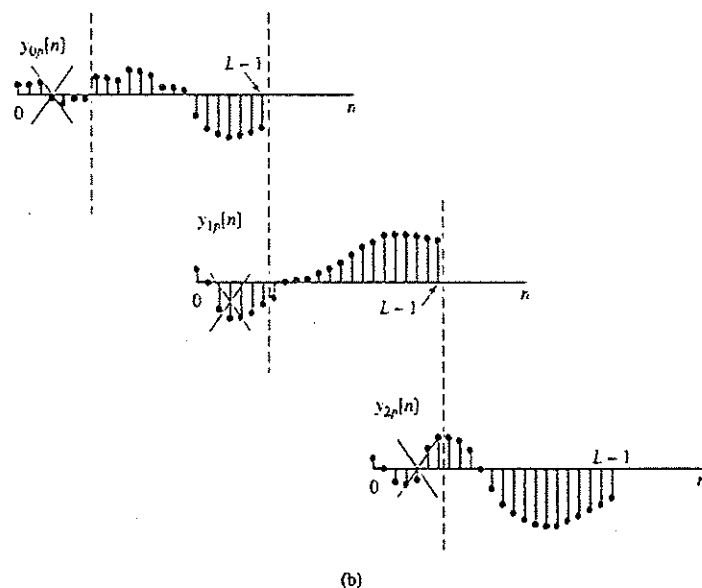
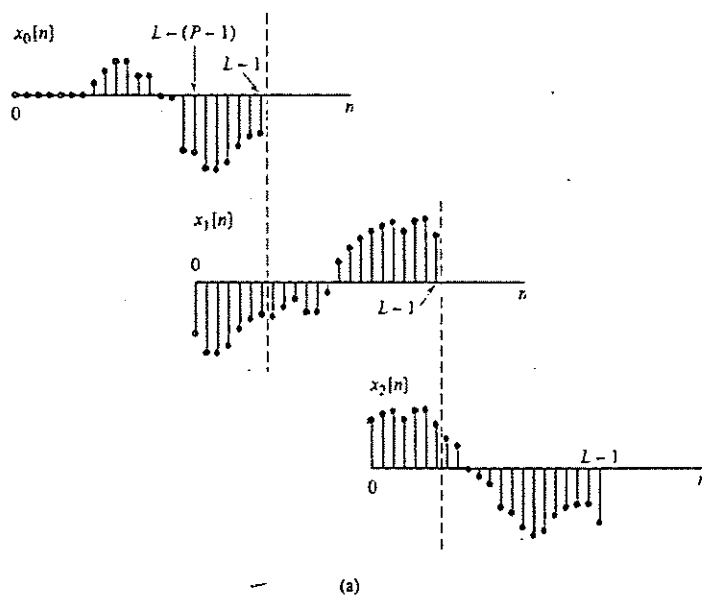


Figura 8.24. (a) Descomposición de la señal $x[n]$ de la Figura 8.22 en secciones que solapan de longitud L . (b) Resultado de convolucionar cada sección con $h[n]$. Se indican las porciones de cada sección filtrada que se oscurecen para formar la convolución lineal.

8.8. LA TRANSFORMADA DISCRETA DEL COSENO (DCT)

La DFT es quizá el ejemplo más común de una clase general de transformadas de longitud finita de la forma

$$A[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \phi_k^*[n], \quad (8.147)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A[k] \phi_k[n], \quad (8.148)$$

siendo las secuencias $\phi_k[n]$, denominadas *secuencias de la base*, ortogonales entre sí. Es decir

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi_k[n] \phi_m^*[n] = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k. \end{cases} \quad (8.149)$$

En el caso de la DFT, las secuencias de la base son las exponenciales complejas periódicas $e^{j2\pi kn/N}$, y la secuencia $A[k]$ es en general, compleja aunque la secuencia $x[n]$ sea real. Es natural preguntarse si existen conjuntos de secuencias de base reales que produzcan secuencias de transformada $A[k]$ con valores reales cuando $x[n]$ sea real. Esta idea ha llevado a la definición de otras representaciones basadas en transformadas ortogonales, como las transformadas de Haar, las transformadas de Hadamard (Elliot y Rao, 1982) y las transformadas de Hartley (Bracewell, 1983, 1984, 1986) (la definición y propiedades de la transformada de Hartley se consideran en el Problema 8.65). La DCT (DCT, *discrete cosine transform*), o transformada discreta del coseno es otra transformada ortogonal para secuencias reales (véase Ahmed *et al.*, 1974 y Rao y Yip, 1990). La DCT está relacionada muy de cerca con la DFT y se ha convertido en una herramienta útil e importante en diversas aplicaciones de tratamiento de señales, particularmente en la compresión de voz e imagen. En esta sección concluiremos nuestra presentación de la DFT presentando la DCT y mostrando su relación con la DFT.

8.8.1. Definiciones de la DCT

La DCT es una transformada con la forma de las Ecuaciones (8.147) y (8.148) en donde las secuencias de la base $\phi_k[n]$ son cosenos. Como los cosenos son periódicos y tienen simetría par, la extensión de $x[n]$ fuera del intervalo $0 \leq n \leq (N-1)$ en la Ecuación de síntesis (8.148) será periódica y simétrica. En otras palabras, de la misma forma que la DFT asume la hipótesis implícita de periodicidad, la DCT asume las hipótesis implícitas de periodicidad y *simetría par*.

En el desarrollo de la DFT representamos las secuencias de longitud finita formando primero secuencias periódicas a partir de las cuales se recuperaban las secuencias de longitud finita, y empleando después un desarrollo en función de exponenciales complejas periódicas. De forma similar, la DCT corresponde a formar una secuencia periódica y simétrica a partir de la secuencia de longitud finita de tal forma que se pueda recuperar de forma única dicha secuencia de longitud finita. Como hay muchas formas de hacer esto, hay muchas definiciones de la DCT. En la Figura 8.25 se muestran cuatro ejemplos de 17 muestras de extensiones simétricas y periódicas de una secuencia de cuatro puntos. La secuencia de longitud finita original se muestra en cada una de las subfiguras como muestras con puntos negros. Las secuencias son todas periódicas (de periodo 16 o inferior). En cada caso, la secuencia de longitud finita se puede extraer fácilmente con los cuatro primeros puntos de un

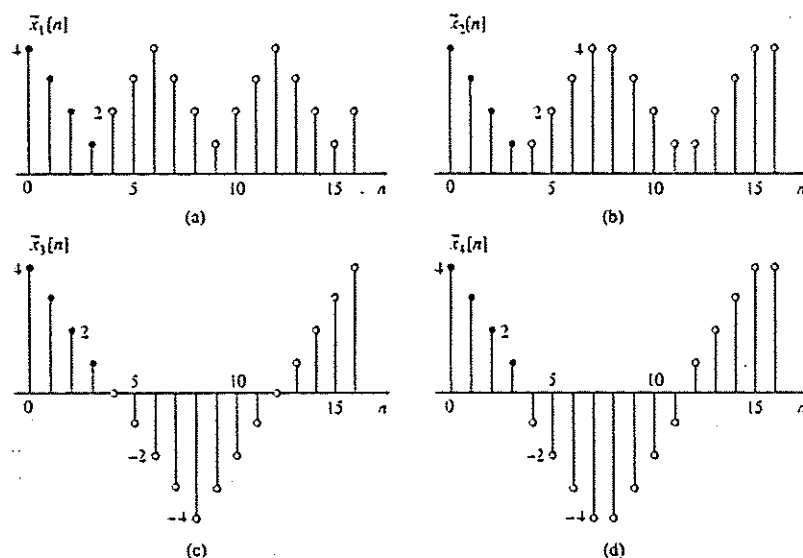


Figura 8.25. Cuatro formas de extender una secuencia de cuatro puntos $x[n]$ de forma periódica y simétrica. La secuencia de longitud finita $x[n]$ se dibuja con puntos negros. (a) Extensión periódica de tipo 1 para la DCT-1. (b) Extensión periódica de tipo 2 para la DCT-2. (c) Extensión periódica de tipo 3 para la DCT-3. (d) Extensión periódica de tipo 4 para la DCT-4.

periodo. Por conveniencia, llamaremos $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$, $\tilde{x}_3[n]$ y $\tilde{x}_4[n]$ a las secuencias periódicas que se obtienen replicando con periodo 16 cada una de las cuatro subsecuencias de las Figuras 8.25(a), (b), (c) y (d), respectivamente. Nótese que $\tilde{x}_1[n]$ tiene periodo $(2N - 2) = 6$, y simetría par alrededor de $n = 0$ y $n = (N - 1) = 3$. La secuencia $\tilde{x}_2[n]$ tiene periodo $2N = 8$ y simetría par alrededor de los puntos de «mitad de muestra» $n = -\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$. La secuencia $\tilde{x}_3[n]$ tiene periodo $4N = 16$ y simetría par alrededor de $n = 0$ y $n = 8$. La secuencia $\tilde{x}_4[n]$ tiene también periodo $4N = 16$ y simetría par alrededor de los puntos de «mitad de muestra» $n = -\frac{1}{2}$ y $n = (2N - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2}$.

Los cuatro casos diferentes que se muestran en la Figura 8.25 ilustran la periodicidad implícita en las cuatro formas comunes de la DCT, denominadas respectivamente DCT-1, DCT-2, DCT-3 y DCT-4. Se puede demostrar (véase Martucci, 1994) que hay cuatro formas más de crear una secuencia periódica a partir de $x[n]$, lo que implica otras cuatro posibles DCT. Además, es también posible crear ocho secuencias periódicas reales con simetría impar a partir de $x[n]$, lo que nos conduciría a ocho versiones diferentes de la transformada discreta del seno (DST, discrete sine transform) en la que las funciones de la base de la representación ortonormal son senos. Estas transformadas constituyen una familia de 16 transformadas ortonormales de secuencias reales. De todas ellas, las que más se utilizan son la DCT-1 y la DCT-2, por lo que en el resto de nuestra presentación nos centraremos en ellas.

8.8.2. Definición de la DCT-1 y la DCT-2

Todas las extensiones periódicas que conducen a las diferentes formas de la DCT se pueden ver como una suma de copias desplazadas de las secuencias de N puntos $\pm x[n]$ y $\pm x[-n]$. Las diferencias entre las extensiones para la DCT-1 y la DCT-2 dependen de si los puntos

extremos se solapan con versiones desplazadas de sí mismos y si es así, qué puntos extremos se solapan. Para la DCT-1, se modifica primero en sus extremos y después se extiende para que su periodo sea $2N - 2$. La secuencia periódica resultante es

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[(n)_{2N-2}] + x_1[(-(n))_{2N-2}], \quad (8.150)$$

donde $x_1[n]$ es la secuencia modificada $x_1[n] = x[n]x[n]$, con

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \text{ y } N - 1, \\ 1, & 1 \leq n \leq N - 2. \end{cases} \quad (8.151)$$

La ponderación de los extremos compensa que se doblan cuando los dos términos de la Ecuación (8.150) se solapan en $n = 0$ y $n = (N - 1)$, y en los correspondientes puntos separados de éstos por múltiplos enteros de $(2N - 2)$. Con esta ponderación, se puede verificar fácilmente que $x[n] = \tilde{x}_1[n]$ para $n = 0, 1, \dots, N - 1$. La secuencia periódica resultante $\tilde{x}_1[n]$ tiene simetría periódica par alrededor de los puntos $n = 0$ y $n = N - 1, 2N - 2$, etc. Denominaremos a esta simetría, simetría periódica de tipo 1. La DCT-1 se define mediante la pareja de transformadas

$$X^{c1}[k] = 2 \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n] \cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.152)$$

$$x[n] = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]X^{c1}[k] \cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.153)$$

donde $x[n]$ se define en la Ecuación (8.151).

Para el caso de la DCT-2, $x[n]$ se extiende hasta tener periodo $2N$, y la secuencia periódica es

$$\tilde{x}_2[n] = x_2[(n)_{2N}] + x_2[(-(n-1))_{2N}]. \quad (8.154)$$

Como los puntos extremos no se solapan, no se requiere modificarlos para asegurar que $x[n] = \tilde{x}_2[n]$ para $n = 0, 1, \dots, N - 1$. En este caso, que denominaremos simetría periódica de tipo 2, la secuencia periódica $\tilde{x}_2[n]$ tiene simetría periódica par alrededor de los puntos de «mitad de muestra» $-1/2, N - 1/2, 2N - 1/2$, etc. La DCT-2 se define mediante la pareja de transformadas

$$X^{c2}[k] = 2 \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.155)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta[k]X^{c2}[k] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.156)$$

donde la DCT-2 inversa utiliza la función de ponderación

$$\beta[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ 1, & 1 \leq k \leq N-1. \end{cases} \quad (8.157)$$

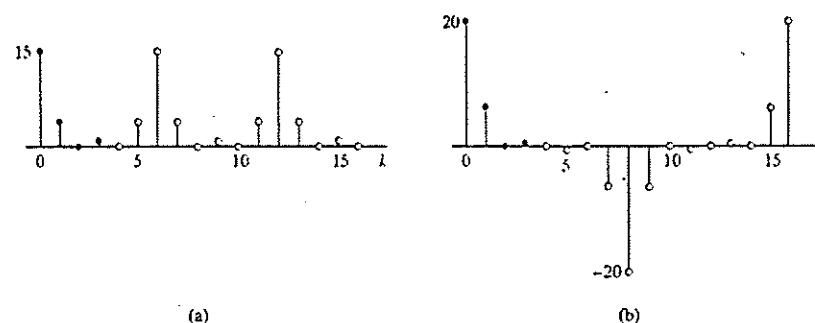


Figura 8.26. DCT-1 y DCT-2 de la secuencia de cuatro puntos utilizada en la Figura 8.25. (a) DCT-1. (b) DCT-2.

En muchos casos, las definiciones de la DCT incluyen factores de normalización que producen transformaciones unitarias³. Por ejemplo, la DCT-2 se define a menudo como

$$\tilde{X}^{c2}[k] = \sqrt{\frac{2}{N}} \tilde{\beta}[k] \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (8.158)$$

$$x[n] = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\beta}[k] \tilde{X}^{c2}[k] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (8.159)$$

siendo

$$\tilde{\beta}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k=0, \\ 1, & k=1, 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (8.160)$$

Comparando estas ecuaciones con las Ecuaciones (8.155) y (8.156) podemos ver que los factores multiplicativos $2/N$ y $\beta[k]$ se han redistribuido entre las transformadas directa e inversa (se puede aplicar una normalización similar para definir una versión normalizada de la DCT-1). Aunque esta normalización crea una transformación unitaria, las definiciones de las Ecuaciones (8.152) y (8.153) y de las Ecuaciones (8.155) y (8.156) son más fáciles de relacionar con la DFT tal como la hemos definido en este capítulo. Por tanto, en la presentación que sigue, utilizaremos las definiciones anteriores en lugar de las definiciones normalizadas que se pueden encontrar, por ejemplo, en Rao y Yip (1990) y en muchos otros textos.

Aunque normalmente evaluaremos la DCT sólo para $0 \leq k \leq N-1$, nada evita que se evalúen las ecuaciones de la DCT fuera de ese intervalo, como se ilustra en la Figura 8.26, donde los valores de la DCT en el intervalo $0 \leq k \leq N-1$ se muestran con puntos negros. Estas Figuras ilustran que las DCT son también secuencias periódicas. Sin embargo, la simetría de la secuencia transformada no es siempre la misma simetría periódica implícita de la secuencia de entrada. Mientras que $\tilde{x}_1[n]$ y la extensión de $X^{c1}[k]$ tienen ambas simetría de tipo 1, comparando las Figuras 8.25(c) y 8.26(b) podemos ver que $X^{c2}[k]$ tiene la misma simetría que $\tilde{x}_3[n]$, y no la de $\tilde{x}_2[n]$.

³ Para que la DCT sea una transformación unitaria debe ser ortonormal y además tener la propiedad de que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} (x[n])^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (X^{c2}[k])^2.$$

Como las DCT son transformadas ortogonales, tienen propiedades con forma similar a las de la DFT. Estas propiedades se elaboran en detalle en Ahmed *et al.* (1974) y en Rao y Yip (1990).

8.8.3. Relación entre la DFT y la DCT-1

Como podría esperarse, hay una estrecha relación entre la DFT y las diversas clases de DCT de secuencias de longitud finita. Para desarrollar esta relación debemos advertir que como la DCT-1 $\tilde{x}_1[n]$ se construye a partir de $x_1[n]$ mediante las Ecuaciones (8.150) y (8.151), tomando un periodo de la secuencia periódica $\tilde{x}_1[n]$ se define la secuencia de longitud finita

$$x_1[n] = x_2[(n)_{2N-2}] + x_2[(-(n))_{2N-2}] = \tilde{x}_1[n], \quad n = 0, 1, \dots, 2N-3, \quad (8.161)$$

donde $x_2[n] = \alpha[n]x[n]$ es la secuencia real de N puntos con los extremos divididos por 2. A partir de la Ecuación (8.161) se deduce que la DFT de $(2N-2)$ puntos de la secuencia de $(2N-2)$ puntos $x_1[n]$ es

$$X_1[k] = X_o[k] + X_o^*[k] = 2\text{Re}\{X_o[k]\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-3, \quad (8.162)$$

donde $X_o[k]$ es la DFT de $(2N-2)$ puntos de la secuencia de N puntos $\alpha[n]x[n]$, es decir, $\alpha[n]x[n]$ se rellena con $(N-2)$ muestras de valor cero. Utilizando la definición de DFT de $(2N-2)$ puntos de la secuencia ampliada con ceros obtenemos

$$X_1[k] = 2\text{Re}\{X_o[k]\} = 2 \sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n]x[n] \cos\left(\frac{2\pi kn}{2N-2}\right) = X^{c1}[k], \quad (8.163)$$

Por lo tanto, la DCT-1 de una secuencia de N puntos es idéntica a la DFT de $(2N-2)$ puntos de la secuencia ampliada simétricamente $x_1[n]$ y es igual también a dos veces la parte real de los primeros N puntos de la DFT de $(2N-2)$ puntos de la secuencia ponderada $x_2[n]$.

Como ya veremos en el Capítulo 9, existen algoritmos computacionales rápidos para el cálculo de la DFT. Estos algoritmos se pueden utilizar para calcular las DFT $X_o[k]$ o $X_1[k]$ en la Ecuación (8.163), proporcionando así un procedimiento conveniente y rápidamente disponible para el cómputo rápido de la DCT-1. Como la definición de la DCT-1 sólo involucra coeficientes reales, existen también algoritmos eficientes para calcular de forma más directa la DCT-1 de secuencias reales, sin necesidad de multiplicaciones ni sumas complejas (véase Ahmed *et al.*, 1974 y Chen *et al.*, 1977).

La DCT-1 inversa se puede calcular también utilizando la DFT inversa. Sólo es necesario utilizar la Ecuación (8.163) para construir $X_1[k]$ a partir de $X^{c1}[k]$ y calcular después la DFT inversa de $(2N-2)$ puntos. Concretamente,

$$X_1[k] = \begin{cases} X^{c1}[k], & k = 0, \dots, N-1, \\ X^{c1}[2N-2-k], & k = N, \dots, 2N-3, \end{cases} \quad (8.164)$$

y, utilizando la definición de DFT inversa de $(2N-2)$ puntos se puede calcular la secuencia extendida simétricamente

$$x_1[n] = \frac{1}{2N-2} \sum_{k=0}^{2N-3} X_1[k] e^{j2\pi kn/(2N-2)}, \quad n = 0, 1, \dots, 2N-3. \quad (8.165)$$

de donde se puede obtener $x[n]$ extrayendo los primeros N puntos. Es decir, $x[n] = x_1[n]$ para $n = 0, 1, \dots, N-1$. Sustituyendo la Ecuación (8.164) en la Ecuación (8.165), se deduce también que la relación de la DCT-1 inversa se puede expresar en función de $X^{*1}[k]$ y funciones coseno, como la Ecuación (8.153) (véase Problema 8.68).

8.8.4. Relación entre la DFT y la DCT-2

Es también posible expresar la DCT-2 de una secuencia de longitud finita $x[n]$ en función de la DFT. Para desarrollar la relación podemos observar que tomando un periodo de la secuencia periódica $x_2[n]$ se define la secuencia de $2N$ puntos

$$x_2[n] = x[(n)_{2N}] + x[(-n-1)_{2N}] = \bar{x}_2[n], \quad n = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (8.166)$$

donde $x[n]$ es la secuencia real original de N puntos. Utilizando la Ecuación (8.166), se deduce que la DFT de $2N$ puntos de la secuencia real de $2N$ puntos $x_2[n]$ es

$$X_2[k] = X[k] + X^*[k]e^{j2\pi k(2N)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (8.167)$$

donde $X[k]$ es la DFT de $2N$ puntos de la secuencia de N puntos $x[n]$. Es decir, en este caso, $x[n]$ se rellena con N muestras de valor cero. Utilizando la Ecuación (8.167) obtenemos

$$\begin{aligned} X_2[k] &= X[k] + X^*[k]e^{j2\pi k(2N)} \\ &= e^{j\pi k(2N)}(X[k]e^{-j\pi k(2N)} + X^*[k]e^{j\pi k(2N)}) \\ &= e^{j\pi k(2N)}2\operatorname{Re}\{X[k]e^{-j\pi k(2N)}\}. \end{aligned} \quad (8.168)$$

A partir de la definición de la DFT de $2N$ puntos de la secuencia ampliada con ceros se deduce que

$$\operatorname{Re}\{X[k]e^{-j\pi k(2N)}\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right). \quad (8.169)$$

Por tanto, utilizando las Ecuaciones (8.155), (8.167) y (8.169) se puede expresar $X^{*2}[k]$ en función de $X[k]$, la DFT de $2N$ puntos de la secuencia de N puntos $x[n]$, de la siguiente forma

$$X^{*2}[k] = 2\operatorname{Re}\{X[k]e^{-j\pi k(2N)}\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (8.170)$$

o en función de la DFT de $2N$ puntos de la secuencia extendida simétricamente $x_2[n]$ definida en la Ecuación (8.166) como

$$X^{*2}[k] = e^{-j\pi k(2N)}X_2[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (8.171)$$

y equivalentemente

$$X_2[k] = e^{j\pi k(2N)}X^{*2}[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8.172)$$

Como en el caso de la DCT-1, se pueden utilizar algoritmos rápidos para calcular las DFT de las Ecuaciones (8.170) y (8.171). Makhoul (1980) considera otras formas de utilizar

la DFT para calcular la DCT-2 (véase también el Problema 8.69). Además, en (Rao y Yip, 1990) se desarrollan algoritmos rápidos para el cálculo de la DCT-2.

La DCT-2 inversa se puede calcular también utilizando la DFT inversa. El procedimiento utiliza la Ecuación (8.172) junto con la propiedad de simetría de la DCT-2. Concretamente, se puede verificar fácilmente por sustitución directa en la Ecuación (8.155) que

$$X^{*2}[2N-k] = -X^{*2}[k], \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (8.173)$$

de donde se deduce que

$$X_2[k] = \begin{cases} X^{*2}[0], & k = 0, \\ e^{j\pi k(2N)}X^{*2}[k], & k = 1, \dots, N-1, \\ 0, & k = N, \\ -e^{j\pi k(2N)}X^{*2}[2N-k], & k = N+1, N+2, \dots, 2N-1. \end{cases} \quad (8.174)$$

Utilizando la definición de DFT inversa se puede calcular la secuencia extendida simétricamente

$$x_2[n] = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} X_2[k]e^{j2\pi kn(2N)}, \quad n = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (8.175)$$

de donde se puede obtener $x[n] = x_2[n]$ para $n = 0, 1, \dots, N-1$. Sustituyendo la Ecuación (8.174) en la Ecuación (8.175) se puede demostrar fácilmente que la relación de la DCT-2 inversa es la de la Ecuación (8.156) (véase Problema 8.70).

8.8.5. Propiedad de compactación de la energía de la DCT-2

La DCT-2 se utiliza en muchas aplicaciones de compresión de datos con preferencia sobre la DFT debido a una propiedad que se denomina frecuentemente «compactación de la energía». Concretamente, la DCT-2 de una secuencia de longitud finita tiene a menudo los coeficientes más concentrados en los índices bajos que la DFT. La importancia de este hecho surge del teorema de Parseval, que para la DCT-1 es

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]|x[n]|^2 = \frac{1}{2N-2} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]|X^{*1}[k]|^2, \quad (8.176)$$

y para la DCT-2

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta[k]|X^{*2}[k]|^2, \quad (8.177)$$

donde $\beta[k]$ está definida en la Ecuación (8.157). Se dice que la DCT está concentrada en los índices bajos de la transformada si los restantes coeficientes de la misma se pueden poner a cero sin afectar significativamente a la energía de la señal. El siguiente ejemplo ilustra esta propiedad de compactación de la energía.

Ejemplo 8.13. Compactación de la energía de la DCT-2

Considere una entrada de prueba de la forma

$$x[n] = a^n \cos(\omega_0 n + \phi), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8.178)$$

Esta señal se muestra en la Figura 8.27 para $a = 0.9$, $\omega_0 = 0.1\pi$, $\phi = 0$ y $N = 32$.

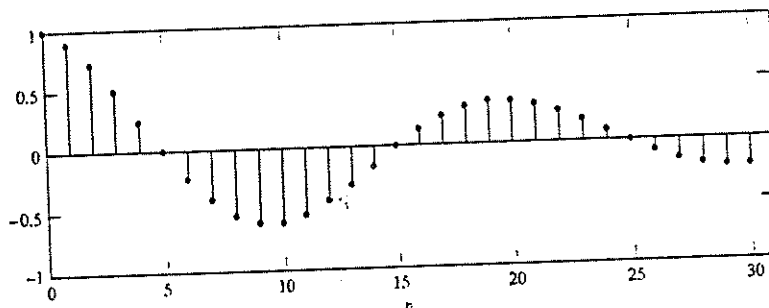


Figura 8.27. Señal de prueba para comparar la DFT y la DCT.

Las partes real e imaginaria de la DFT de 32 puntos de la secuencia de 32 puntos presentada en la Figura 8.27 se muestran en las Figuras 8.28(a) y (b), respectivamente. La Figura 8.28(c) muestra la DCT-2 de la secuencia. En el caso de la DFT, las partes real e imaginaria se muestran para $k = 0, 1, \dots, 16$. Como la señal es real, $X[0]$ y $X[16]$ son reales. Los restantes valores son complejos y simétricos conjugados. Por tanto, los 32 números reales de las Figuras 8.28(a) y (b) especifican completamente la DFT de 32 puntos. En el caso de la DCT-2 se muestran los 32 valores reales. Se puede ver claramente que los valores de la DCT-2 están altamente concentrados en índices bajos, por lo que el teorema de Parseval sugiere que la energía de la secuencia está más concentrada en la representación de la DCT-2 que en la representación de la DFT.

La propiedad de concentración de la energía se puede cuantificar truncando las dos representaciones y comparando el valor cuadrático medio del error de aproximación cuando ambas utilizan el mismo número de coeficientes reales. Para hacer esto definimos

$$x_m^{dh}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T_m[k] X[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (8.179)$$

donde en este caso, $X[k]$ es la DFT de N puntos de $x[n]$ y

$$T_m[k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq (N-1-m)/2 \\ 0, & (N+1-m)/2 \leq k \leq (N-1+m)/2 \\ 1, & (N+1+m)/2 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

Si $m = 1$, el término $X[N/2]$ se elimina. Si $m = 3$, los términos $X[N/2]$ y $X[N/2 - 1]$ y su correspondiente complejo conjugado $X[N/2 + 1]$ se eliminan, y así sucesivamente. Es decir, $x_m^{dh}[n]$ para $m = 1, 3, 5, \dots, N-1$ es la secuencia que se sintetiza omitiendo simétricamente m coeficientes de la DFT⁴. Con la excepción del valor de la DFT $X[N/2]$, que es

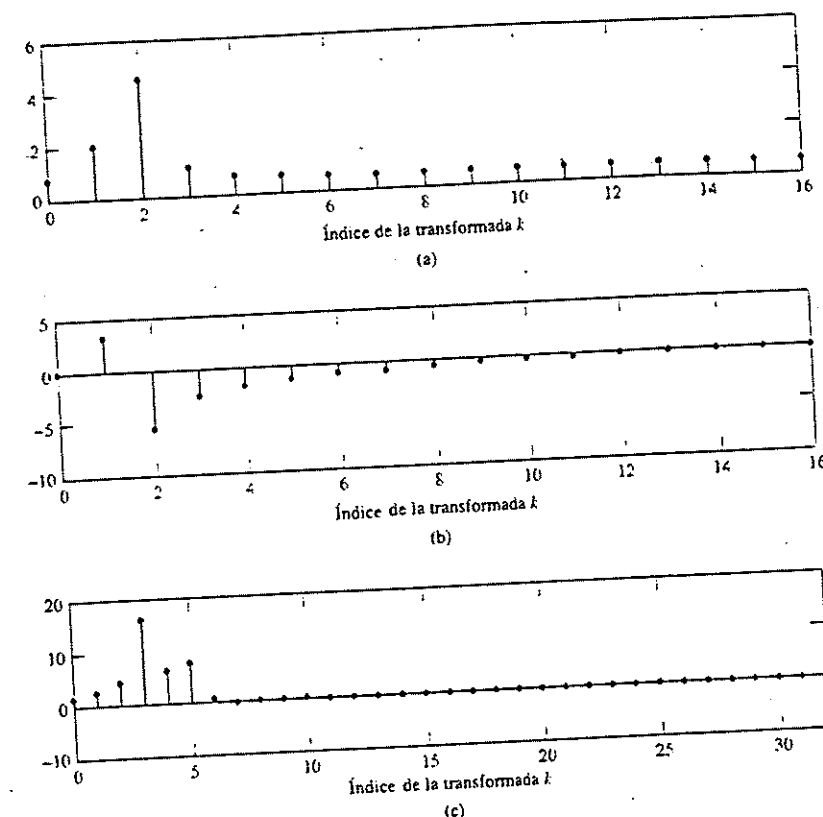


Figura 8.28. (a) Parte real de la DFT de N puntos. (b) Parte imaginaria de la DFT de N puntos. (c) DCT-2 de N puntos de la señal de prueba de la Figura 8.27.

real, cada valor de la DFT omitido y su correspondiente complejo conjugado corresponde realmente a omitir dos números reales. Por ejemplo, el caso de $m = 5$ correspondería a poner a cero los coeficientes $X[14]$, $X[15]$, $X[16]$, $X[17]$ y $X[18]$ al sintetizar $x_m^{dh}[n]$ a partir de la DFT de 32 puntos que se muestra en las Figuras 8.28(a) y (b).

Asimismo, se puede truncar la representación de la DCT-2 con lo que se obtiene

$$x_m^{det}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-m} \beta[k] X^2[k] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (8.180)$$

En este caso, si $m = 5$, se omiten los coeficientes de la DCT-2 $X^2[27]$, ..., $X^2[31]$ en la síntesis de $x_m^{det}[n]$ a partir de los valores de la DCT-2 que se muestran en la Figura 8.28(c). Como esos coeficientes son muy pequeños, $x_m^{det}[n]$ diferirá muy poco de $x[n]$.

Para demostrar cómo dependen de m los errores de aproximación de la DFT y de la DCT-2 definimos

$$E^{dh}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - x_m^{dh}[n]|^2$$

⁴ Por simplicidad supondremos que N es un número entero par.

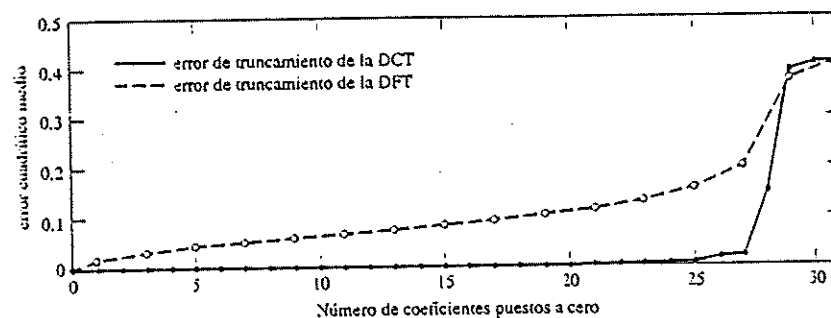


Figura 8.29. Comparación de los errores de truncamiento de la DFT y de la DCT.

$$E^{\text{DCT}}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - x_n^{\text{DCT}}[n]|^2$$

que son los valores cuadráticos medios de los errores de aproximación para la DFT y la DCT truncadas, respectivamente. Estos errores se dibujan en la Figura 8.29, donde $E^{\text{DFT}}[m]$ se indica con el símbolo \circ y $E^{\text{DCT}}[m]$ con el símbolo \bullet . En los casos especiales de $m = 0$ (sin truncamiento) y de $m = N - 1$ (sólo se retiene el valor de la componente continua), la función de truncamiento de la DFT es $T_0[k] = 1$ para $0 \leq k \leq N - 1$ y $T_{N-1}[k] = 0$ para $1 \leq k \leq N - 1$ y $T_{N-1}[0] = 1$. En estos casos, ambas representaciones producen el mismo error. Para valores de $1 \leq m \leq 30$, el error de la DFT crece constantemente a medida que m crece, mientras que el error de la DCT permanece en valores muy pequeños hasta $m = 25$, lo que implica que los 32 valores de la secuencia $x[n]$ se pueden representar con error pequeño que utilizando sólo siete coeficientes de la DCT.

La señal del Ejemplo 8.13 es una señal de baja frecuencia con fase cero que decrece exponencialmente. Hemos escogido este ejemplo muy cuidadosamente para resaltar la propiedad de compactación de la energía. No se producen resultados tan espectaculares para cualquier señal $x[n]$. Las señales paso alto e incluso algunas señales con la forma de la Ecuación (8.178) no permiten obtener diferencias tan importantes. No obstante, en muchos casos de interés en compresión de datos, la DCT-2 proporciona una clara ventaja sobre la DFT. Se puede demostrar (véase Rao y Yip, 1990) que la DCT es casi óptima en el sentido de obtener el mínimo valor cuadrático medio del error de truncamiento para secuencias con funciones de correlación de tipo exponencial.

8.8.6. Aplicaciones de la DCT

La aplicación más importante de la DCT-2 es la compresión de señales, que es un aspecto clave de muchos algoritmos estandarizados (véase Jayant y Noll, 1984 y Rao y Hwang, 1996). En esta aplicación, los bloques de la señal se representan mediante sus transformadas del coseno. La popularidad de la DCT en compresión de señales se debe a su propiedad de compactación de la energía, que ilustramos con un ejemplo simple en la sección anterior.

Las DCT son transformadas ortogonales como la DFT y, por tanto, tienen muchas propiedades similares a las de la DFT que las hacen muy flexibles para manejar las señales que

representan. Una de las propiedades más importantes de la DFT es que la convolución periódica de dos secuencias de longitud finita corresponde a la multiplicación de sus correspondientes DFT. En la Sección 8.7 hemos visto que es posible explotar esta propiedad para calcular convoluciones lineales calculando solamente DFT. En el caso de la DCT, el correspondiente resultado es que la multiplicación de DCT corresponde a la convolución periódica de las secuencias simétricamente extendidas subyacentes. Sin embargo, hay complicaciones adicionales. Por ejemplo, la convolución periódica de dos secuencias periódicas simétricas de tipo 2 no es una secuencia de tipo 2, sino una secuencia de tipo 1. Alternativamente, la convolución periódica de una secuencia de tipo 1 con una de tipo 2 del mismo periodo implícito es una secuencia de tipo 2. Por tanto, se requiere una mezcla de DCT para efectuar la convolución por transformación inversa del producto de DCT. Hay muchas más formas de hacer esto ya que tenemos muchas definiciones diferentes de DCT para elegir. Cada combinación diferente correspondería a la convolución periódica de una pareja de secuencias finitas extendidas periódicamente. Martucci (1994) ofrece una presentación completa del uso de las transformadas DCT y DST para realizar la convolución periódica simétrica.

La multiplicación de DCT corresponde a un tipo especial de convolución periódica con algunas características que la pueden hacer útil en algunas aplicaciones. Como hemos visto para el caso de la DFT, la convolución periódica se caracteriza por sus efectos en los extremos. De hecho, incluso la convolución lineal de dos secuencias de longitud finita tiene efectos en los extremos a medida que la respuesta al impulso «entra» y «sale» de la secuencia de entrada. Los efectos en los extremos para la convolución periódica simétrica son diferentes de la convolución ordinaria y de la convolución periódica, realizadas mediante multiplicación de DFT. La extensión simétrica crea simetría en los puntos extremos. Esto implica un «suavizado» de los límites que mitiga los efectos de borde que aparecen al convolucionar secuencias de longitud finita. Un área en la que la convolución simétrica es particularmente útil es el filtrado de imagen donde aparecen efectos de borde objetables debidos a artefactos de bloques. En esos casos, la DCT puede ser superior a la DFT o incluso a la convolución lineal ordinaria. Al realizar la convolución periódica simétrica multiplicando las DCT, se puede forzar el mismo resultado que en la convolución ordinaria extendiendo las secuencias con un número suficiente de muestras de valor cero situadas al comienzo y al final de cada secuencia.

8.9. RESUMEN

En este capítulo hemos presentado las representaciones de Fourier discretas de secuencias de longitud finita. La mayor parte de nuestra presentación se ha centrado en la transformada discreta de Fourier (DFT) que se basa en la representación de secuencias periódicas mediante el desarrollo en serie de Fourier. Definiendo una secuencia periódica en la que cada periodo es idéntico a la secuencia de duración finita, la DFT coincide con un periodo de los coeficientes, del desarrollo en serie de Fourier discreto. Debido a la importancia de esta periodicidad subyacente, examinamos primero las propiedades del desarrollo en serie de Fourier discreto y después interpretamos esas propiedades en términos de secuencias de longitud finita. Un resultado importante es que los valores de la DFT son iguales a las muestras de la transformada Z en puntos equiespaciados de la circunferencia unidad. Esto conduce a la noción de solapamiento temporal en la interpretación de las propiedades de la DFT, un concepto utilizado ampliamente en el estudio de la convolución circular y de su relación con la convolución lineal. Utilizamos después estos resultados para demostrar cómo

mo se puede utilizar la DFT para realizar la convolución lineal de una respuesta al impulso de longitud finita con una señal de longitud indefinida.

El capítulo finaliza con una introducción a la transformada discreta del coseno. Se demuestra que la DCT y la DFT están estrechamente relacionadas y que comparten un supuesto implícito de periodicidad. La propiedad de concentración de la energía, que es la principal razón de la popularidad de la DCT en compresión de datos, se ilustra con un ejemplo.

PROBLEMAS

Problemas básicos con respuestas

- 8.1. Suponga que $x_c(t)$ es una señal periódica en tiempo continuo de periodo 1 ms cuyo desarrollo en serie de Fourier es

$$x_c(t) = \sum_{k=-9}^9 a_k e^{j(2\pi k t) 10^{-3}}.$$

Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier a_k son cero para $|k| > 9$. $x_c(t)$ se muestrea con periodo $T = \frac{1}{6} \times 10^{-3}$ s. para formar la señal $x[n]$. Es decir,

$$x[n] = x_c\left(\frac{n 10^{-3}}{6}\right).$$

- (a) ¿Es $x[n]$ periódica? Si lo es, ¿con qué periodo?
 (b) ¿Es la frecuencia de muestreo superior a la frecuencia de Nyquist? Es decir, ¿es T lo suficientemente pequeño como para evitar el solapamiento?
 (c) Obtenga los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x[n]$ en función de a_k .
- 8.2. Suponga que $\tilde{x}[n]$ es una secuencia periódica de periodo N . $\tilde{x}[n]$ es también periódica de periodo $3N$. Sean $\tilde{X}[k]$ los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$ considerada como una secuencia periódica de periodo N , y sean $\tilde{X}_3[k]$ los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$ considerada como una secuencia periódica de periodo $3N$.
- (a) Expresar $\tilde{X}_3[k]$ en función de $\tilde{X}[k]$.
 (b) Calculando explícitamente $\tilde{X}[k]$ y $\tilde{X}_3[k]$, verifique su resultado del Apartado (a) para la secuencia $\tilde{x}[n]$ dada en la Figura P8.2-1.



Figura P8.2-1.

- 8.3. La Figura P8.3-1 muestra tres secuencias periódicas $\tilde{x}_1[n]$ a $\tilde{x}_3[n]$. Estas secuencias se pueden desarrollar en serie de Fourier.

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi k n/N)}.$$

- (a) ¿Para qué secuencias se puede escoger el origen de tiempos de forma que todos los valores de $\tilde{X}[k]$ sean reales?
 (b) ¿Para qué secuencias se puede escoger el origen de tiempos de forma que todos los valores de $\tilde{X}[k]$ sean imaginarios (excepto cuando k es un múltiplo entero de N)?
 (c) ¿Para qué secuencias $\tilde{X}[k] = 0$ para $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6$?

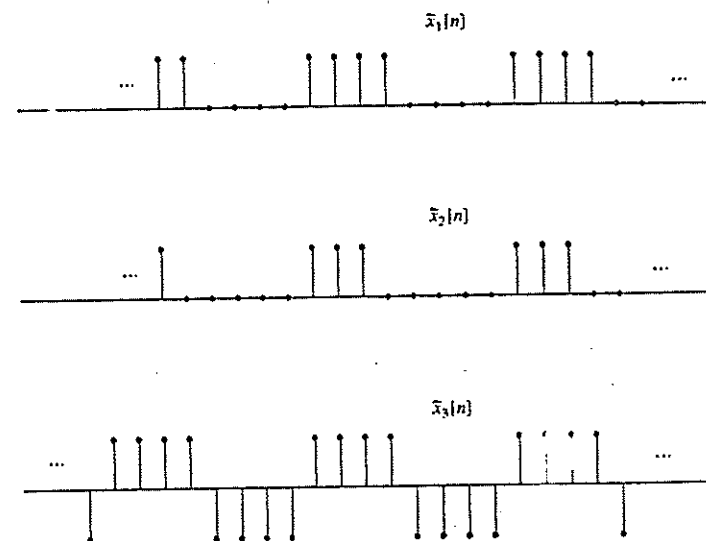


Figura P8.3-1.

- 8.4. Considere la secuencia $x[n]$ dada por $x[n] = a^n u[n]$. A partir de $x[n]$ se puede formar una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ de la siguiente forma:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN].$$

- (a) Determine la transformada de Fourier de $x[n]$, $X(e^{j\omega})$.
 (b) Determine el desarrollo en serie de Fourier de $\tilde{x}[n]$, $\tilde{X}[k]$.
 (c) ¿Cómo se relaciona $\tilde{X}[k]$ con $X(e^{j\omega})$?
- 8.5. Calcule la DFT de cada una de las siguientes secuencias de longitud finita considerando que tienen longitud N (siendo N un número par):
- (a) $x[n] = \delta[n]$.
 (b) $x[n] = \delta[n - n_0]$, $0 \leq n_0 \leq N-1$.
 (c) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ par}, \\ 0, & n \text{ impar}, \end{cases} \quad 0 \leq n \leq N-1$.
 (d) $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ 0, & N/2 \leq n \leq N-1. \end{cases}$
 (e) $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$