

- 7.17 a) Un galvanómetro se desvía hasta el fin de la escala cuando $i = 1$ milíampere (ma). Se desea convertirlo en voltímetro que para 10 voltios se desvía a fondo de escala. La resistencia interna del galvanómetro es de 10 ohms. Indicar cómo conseguirlo. (Dar el circuito y la información necesaria.)
b) Si se necesita en su lugar un amperímetro que marque a fondo de escala 10 ma, ¿cómo puede hacerse?

OCHO

Fuerza

- 7.18 En la Fig. P 7.18 se indica el circuito interior de un voltímetro de tres escalas cuyas bornas están marcadas 3, 15 y 150 voltios respectivamente. La resistencia del galvanómetro de bobina móvil empleado es de 15 ohms y una corriente de 1 ma en su bobina hace que se desvíe a fondo de escala. Hallar el valor de las resistencias indicadas y la resistencia que en conjunto presenta el voltímetro en cada una de sus escalas.

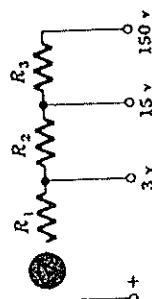


Fig. P 7.18

- 7.19 La resistencia del galvanómetro de bobina móvil en el amperímetro indicado en la Fig. P 7.19 es de 25 ohms, y se desvía a fondo de escala con 0,01 amp. Hallar el valor de las resistencias necesarias para construir un amperímetro de varias escalas que se desvíe a fondo de escala con corrientes de 10, 1 y 0,1 amp, respectivamente.

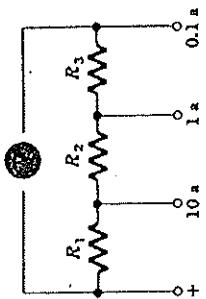


Fig. P 7.19

- 7.20 La resistencia interna de la batería indicada en el circuito de la Fig. P 7.20 es R_b . Determinar la relación R_i/R_b para obtener una disipación de potencia máxima en la resistencia de carga R_L .

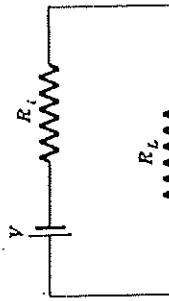


Fig. 7.20

Electromotriz Inducida, Autoinducción

Hemos estudiado hasta ahora el campo eléctrico debido a las cargas estáticas y el campo magnético de las cargas en movimiento. En este capítulo vamos a añadir una tercera piedra angular a la estructura de la teoría electromagnética al considerar los efectos de los campos magnéticos variables. Empezaremos por examinar con detalle algunas de las consecuencias de mover un circuito en el seno de un campo magnético, basando nuestras conclusiones en fenómenos que hemos estudiado ya. Esto nos conducirá a expresar de nuevo ideas anteriores haciendo uso del concepto de fuerza electromotriz inducida. Finalmente, veremos que tanto la experiencia como ciertas consideraciones generales conducen en forma natural a la ley de Faraday de la inducción. Esto nos prepara para estudiar los elementos inductivos en circuitos de corriente alterna y es también fundamental para la comprensión de las ondas electromagnéticas.

8.2 Fuerza electromotriz debida al movimiento

En general, cuando se desplaza un circuito de forma fija en una región en la que existe un campo magnético, aparece en el circuito

una fem inducida. Podemos calcular la magnitud de este efecto aplicando las leyes que dan la fuerza magnética que obra sobre una carga en movimiento. En la Fig. 8.1 se ha dibujado un caso sencillo, el de una espira rectangular conductora que se mueve hacia la derecha en un campo que es perpendicular al plano de la espira y que varía únicamente a lo largo del eje x . Vamos a calcular ahora la fuerza de origen magnético ejercida sobre una carga q , situada

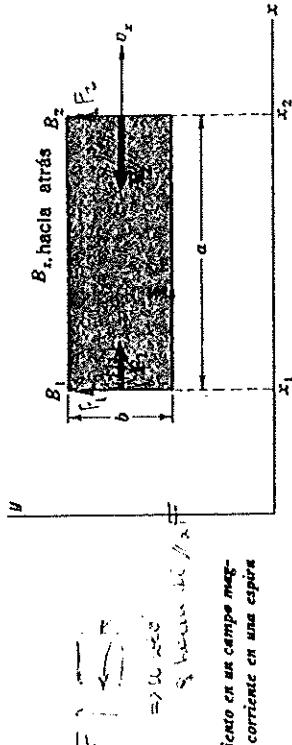


Fig. 8.1 El movimiento en un campo magnético produce una corriente en una espira conductora.

en una posición fija respecto a la espira. La Ec. (6.25) nos da esta fuerza, $F = qv_x B_z$, estando dirigida F hacia la parte positiva del eje y si q es positiva, B_z es la inducción magnética hacia dentro del papel y v_x la velocidad con que se mueve la espira en la dirección x . Esta fuerza actuará sobre todas las cargas existentes en el hilo y realizará trabajo sobre aquellas que puedan moverse verticalmente por los lados de la espira. Solo necesitamos tomar en cuenta estos lados verticales, puesto que en los horizontales la fuerza de origen magnético es perpendicular, y no puede realizar trabajo sobre cargas que se muevan a lo largo de ellos. La fem que aparece en la espira puede hallarse calculando el trabajo por unidad de carga realizado por las fuerzas magnéticas al recorrer una carga toda la espira. De acuerdo con nuestro convenio anterior, de considerar positiva una corriente que circule por la espira en sentido antihorario, tomaremos las fuerzas que tengan este sentido como positivas. Según esto, y como se ve en la Fig. 8.1, la fuerza F_2 en el lado de la derecha de la espira es positiva, mientras que la fuerza F_1 , aunque dirigida igualmente hacia arriba, es negativa. La fuerza magnética neta en toda la espira es, pues, $F_2 - F_1$. Para aclarar la situación, supongamos que el valor B_2 del campo en el lado derecho de la espira es mayor que su valor B_1 en el de la izquierda. La fuerza neta entonces es en sentido antihorario, o sea, positiva.

El trabajo realizado por las fuerzas magnéticas al hacer recorrer a una carga q la espira vendrá dado por

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = (F_2 - F_1)b = |B_2 - B_1|qvzb = -q \frac{d\Phi}{dt} \quad (8.1)$$

en la que $d\Phi/dt$ es la derivada respecto al tiempo del flujo de inducción magnética abrazado por la espira. Este resultado se deduce del hecho de que $Bbv_x = Bb dx/dt$, y $Bzb dx$ representa el aumento de flujo en el tiempo dt correspondiente al lado derecho de la espira, mientras que $B_1 b dx$ es la disminución de flujo correspondiente al lado izquierdo en el mismo tiempo. La variación neta de flujo a través de la espira con el tiempo es, pues, $|B_2 - B_1| v_x b = -d\Phi/dt$. El signo negativo procede del hecho que hemos elegido B en la dirección negativa (hacia dentro del papel, o sea alejándose del observador). A medida que la espira se mueve hacia la derecha aumenta el valor de este flujo negativo.

Si dividimos la Ec. (8.1) por q , tendremos la fem

$$\frac{W}{q} = \varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (8.2)$$

Esta fem arrastrará las cargas alrededor de la espira exactamente igual que la de una pila. Por tanto, si la resistencia de la espira es R , la corriente estará dada por $\mathcal{E} = iR$. Cuando una espira se mueve en una región en la que la inducción magnética varía de un punto a otro aparece una fem que puede expresarse en función de la velocidad de variación del flujo magnético abrazado por la espira. En la Sec. 8.4 discutiremos el signo de esta fem en relación con el cambio de flujo.

8.3 Ley de inducción de Faraday

La regla que acabamos de encontrar relativa a la generación de una fem basándose en las fuerzas magnéticas sobre cargas en movimiento puede hacerse mucho más general. En la Fig. 8.2 puede

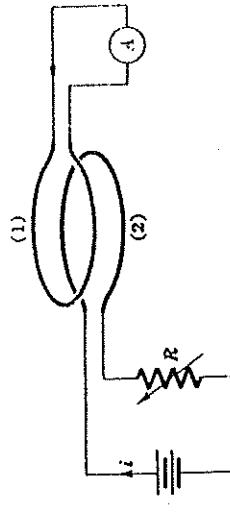


Fig. 8.2 Fem inducida según la ley de Faraday.

verse una bobina (1) con un galvanómetro en serie, colocada sobre otra espira (2). Esta última está conectada a una batería que hace pasar una corriente i y, por tanto, da lugar a un campo de inducción magnética en la región de las bobinas. Cuando se baja la espira 1 hacia la 2, se observa en la primera una corriente en la dirección indicada. Aunque la geometría es algo diferente a la del caso anterior-

mente estudiado, podríamos demostrar fácilmente que esta corriente inducida en la espira 1 está de acuerdo exactamente con la Ec. (8.2). El movimiento de la espira 1 la lleva a una región donde B es mayor, resultado una fem que podría calcularse, o bien por la variación $d\Phi/dt$ en la espira, o bien más laboriosamente por medio de las fuerzas magnéticas sobre las cargas de la espira 1. Si en vez de acercarla, separamos la espira 1 de la 2, la corriente inducida en la primera se invierte como era de esperar.

Es interesante preguntarse lo que ocurriría si en vez de bajar la espira 1 hacia la 2, levantamos la espira 2 hacia la 1. Muy poco podríamos decir tomando como base nuestros anteriores razonamientos sobre la fem inducida, puesto que ahora nos encontramos con un caso que no hemos investigado—el de la fuerza sobre una carga en reposo situada en un campo en movimiento—. Sin embargo, existe un argumento muy fuerte para creer que la corriente inducida resultante en la espira 1 será la misma, se mueva (1) hacia (2), o viceversa. Si existiera una diferencia entre estos dos experimentos podría establecerse un sistema de referencia absoluto para el movimiento. De hecho, el resultado experimental es que no hay diferencia, cualquiera que sea la espira que se mueve. *Solamente importa el movimiento relativo.* Hagamos notar incidentalmente, que éste es uno de los postulados de la teoría de la relatividad especial de Einstein, afirma que no existe un sistema de referencia *absoluto* para el movimiento. Todas las leyes de la electricidad y el magnetismo son *relativísticamente invariantes*; es decir, los resultados que dan son siempre acordes con la relatividad. Esto no es cierto en el caso de la formulación newtoniana de las leyes de la mecánica. Con las dos espiras puede hacerse un tercer tipo de experimentos. Manteniendo esta vez las dos espiras en reposo (o, en general, si se mantienen fijas una a la otra), se hace cambiar el flujo en la espira 1 variando la corriente en la espira 2. Tampoco en este caso podemos predecir por conocimientos anteriores si el resultado de este tipo de variación de $d\Phi/dt$ es idéntico o no al debido al movimiento. Experimentalmente se encuentra que de hecho el resultado es idéntico. La afirmación general,

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (8.3)$$

es cierta para cualquier trayectoria cerrada, independientemente de la causa de la variación temporal del flujo magnético abrazado por la trayectoria, y constituye el hecho experimental conocido como ley de Faraday de la inducción. Como hemos visto en la sección anterior es consistente con la ley de fuerzas magnéticas sobre cargas en

movimiento, pero en su forma más general debe considerarse como una ley independiente. Otro aspecto importante de la ley de Faraday es que se aplica a cualquier región del espacio, independientemente de la presencia de un conductor. Este hecho es esencial en la propagación de las ondas electromagnéticas.

Los experimentos de Faraday sobre la fem inducida y las leyes de la inducción fueron publicados entre 1831 y 1854. En el párrafo siguiente,¹ publicado en 1832, Faraday describe uno de los numerosos experimentos mediante los que desarrolló sus ideas sobre la fem inducida:

Se arrollaron a un gran bloque de madera doscientos tres pies de hilo de cobre en un solo trozo; otros doscientos tres pies de hilo semejante se interpusieron en espiral entre las vueltas de la primera bobina, y se evitaron los contactos metálicos entre ellas mediante un Bramante. Una de estas hélices fue conectada a un galvanómetro, y la otra a una batería, de un centenar de pares de placas de cuatro pulgadas cuadradas, bien cargada. Cuando se realizó el contacto, hubo un efecto brusco y muy ligero sobre el galvanómetro, y también hubo un efecto ligero semejante cuando se rompió el contacto con la batería. Pero mientras la corriente voltaica continuaba pasando por una de las hélices no pudo percibirse ninguna desviación galvanométrica o efecto de inducción sobre la otra hélice, aunque la potencia activa de la batería era grande, como lo prueba el calentamiento sobre toda su propia hélice y por el brillo de la descarga cuando se hizo a través de carbón animal.

Faraday resume los resultados de toda una serie de experimentos de este tipo con corrientes variables y con imanes en movimiento, en el breve párrafo que sigue,² en el que, teniendo presente el gran cambio que ha habido en la nomenclatura desde aquella época, vemos que se está refiriendo a la existencia de la fem inducida:

Todos estos resultados demuestran que el poder de inducir corrientes eléctricas está excitado circularmente por una resultante magnética o eje de poder, al igual que el magnetismo circular depende de, y está exhibido, por una corriente eléctrica.

8.4 Ley de Lenz

Vamos ahora a examinar la relación que existe entre el sentido de la fem inducida y el signo de la variación del flujo. En la Sec. 8.2 demostramos, al discutir la fem debida al movimiento, que en la

¹ Michael Faraday, Experimental Researches in Electricity, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, (A) 122, pág. 127, 15 (1832).

² *Ibid.*

ecuación aparecía un signo negativo cuando se emplea el convenio de corriente y fem positivas para una rotación en sentido antihorario y flujo positivo si está dirigido apuntando hacia el observador. Esto se cumple en todos los casos regidos por la ley de Faraday. Este signo negativo en la relación entre fem inducida y $d\Phi/dt$ se deduce directamente del principio de conservación de la energía, y constituye la llamada ley de Lenz. Usaremos el ejemplo de la Sec. 8.2 para determinar las consecuencias de esta regla. En él, el movimiento de la espira aumenta la magnitud del flujo Φ , que es negativo, puesto que apunta hacia dentro. Por tanto, $d\Phi/dt$ es negativo y, como consecuencia, la fem es positiva, o sea en sentido antihorario.

Cualquier corriente producida en la espira por las fuerzas magnéticas es, pues, positiva y, por tanto, produce un flujo adicional Φ' , que es positivo, o sea, hacia fuera. Por tanto, el flujo inducido se opone a la variación del flujo producido exteriormente. Con este argumento podemos siempre determinar el sentido de la fem inducida.

Podemos demostrar que el principio de conservación de la energía exige este tipo de comportamiento por reducción al absurdo. Supongamos que tenemos una espira conductora en una región del espacio en la que originalmente no hay campo magnético. Aplicemos un pequeño campo exteriormente (o supongamos que una pequeña fluctuación en los movimientos térmicos de los electrones en la espira produce una corriente muy pequeña durante un instante, generando, por tanto, un campo de inducción magnética muy pequeño en la espira). Si fuera cierta la afirmación opuesta a la ley de Lenz, esta transición de campo cero a un pequeño campo daría lugar a una fem y a la corriente correspondiente que haría aumentar aún más el flujo magnético y en el mismo sentido. Al aumentar la derivada temporal del flujo se produciría aún más corriente dando lugar a nuevo aumento, y, por tanto, a la generación casi explosiva de un campo y una corriente muy elevadas. El proceso terminaría probablemente cuando la corriente en el hilo fuera tan grande que la energía disipada fundiera el hilo. Esta cadena de fenómenos contradice claramente el principio de conservación de la energía, de modo que, de hecho, hemos probado que debe cumplirse la ley de Lenz. Por tanto, la fem inducida debe siempre actuar en la forma enunciada de «oponerse» a la causa que la origina.

8.5 Ejemplos

a) *Conservación de la energía en un generador elemental.* Estudiamos los aspectos energéticos de la fem inducida considerando un generador eléctrico muy elemental basado en la inducción de Faraday. En la Fig. 8.3 se indica una varilla que puede deslizarse sobre

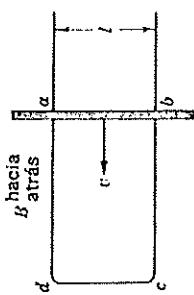


Fig. 8.3 Conducto que se desliza sobre un cuadro estacionario en un campo B .

otras dos fijas formando una espira situada en un campo uniforme B . Empujamos la varilla, como se indica, con una velocidad constante v . Este movimiento dará lugar a una variación del flujo magnético que atraviesa la espira y a la generación de una fem.

$$\frac{d\Phi}{dt} = vLB = -\varepsilon$$

En este caso $d\Phi/dt$ es positivo, puesto que Φ está dirigido hacia dentro y disminuye a medida que el área de la espira se reduce. Esto significa que la fem es negativa, o sea en sentido de las agujas del reloj. (Podríamos también haber determinado esta fem por el método seguido en la Sec. 8.2.) Como resultado de esta fem pasa una corriente

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R}$$

donde R es la resistencia total de la espira.
La velocidad de disipación de energía eléctrica en la resistencia es

$$P = \varepsilon i = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} \text{ vatios}$$

Evidentemente, la fuente de esta energía es el trabajo mecánico realizado al mover la varilla. La fuerza ejercida sobre una varilla que conduce la corriente i en un campo B es: $F = BiL$, así que la velocidad de producción de trabajo mecánico será

$$\frac{dW}{dt} = Fv = Blv = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} \text{ vatios}$$

Hemos demostrado, pues, la igualdad entre la rapidez de producción de trabajo mecánico y la de disipación de energía.

- b) *Trabajo mecánico realizado para mover una bobina en un campo magnético.* Vamos a determinar el trabajo mecánico necesario para mover una bobina por la que pasa una corriente i constante en un campo magnético (Fig. 8.4). Más adelante emplearemos este re-

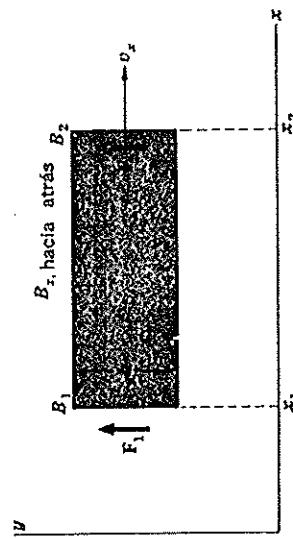


Fig. 8.4 Trabajo realizado al mover una espira en un campo magnético.

sultado en el cálculo de la inductancia mutua (Sec. 8.6). Supongamos que la corriente está producida por una fuente externa, y circula en sentido positivo (antihorario). Como consecuencia de esta corriente, actúan sobre los lados verticales las fuerzas F_1 y F_2 que se indican, siendo

$$F_1 = B_1 i b \quad y \quad F_2 = B_2 i b$$

Si B es perpendicular al plano xy y varía únicamente según el eje x , las fuerzas sobre los lados superior e inferior de la espira son iguales y opuestas, y, por tanto, se anulan. En cualquier caso, como movemos la espira en la dirección del eje x , estas fuerzas tienen la dirección del eje y no contribuyen al trabajo realizado. Para concretar, supondremos que B aumenta al crecer x , de modo que $B_2 > B_1$. La fuerza magnética neta sobre la espira es $-F = -(F_2 - F_1)$, y está dirigida hacia la izquierda. El signo negativo expresa precisamente que esta fuerza tiene el sentido negativo de las x .

El trabajo exterior realizado al mover la espira hacia la derecha una distancia dx es

$$dW = F dx = (F_2 - F_1) dx = i b |B_2 - B_1| dx \quad (8.4)$$

Deseamos relacionar este trabajo mecánico exterior al cambio neto del flujo de inducción magnética de origen externo que atraviesa la espira. El cambio de flujo cuando la espira se desplaza una distancia dx es

$$b |B_2 - B_1| dx = -d\Phi$$

El signo es negativo porque, si bien un desplazamiento de la espira en la dirección positiva del eje x aumenta en valor absoluto el flujo Φ a través de la espira, en este caso Φ es negativo, por estar dirigido alejándose del observador. Comparando esta ecuación con la (8.4) resulta

$$dW = -i b d\Phi \quad (8.5)$$

Si la espira tuviera N vueltas, el trabajo mecánico realizado sería

$$dW = -N i d\Phi \quad (8.6)$$

Aplicándose aquí el convenio de signos usual: i positiva si circula contra las agujas del reloj, y Φ positivo si se dirige hacia fuera, hacia el observador. En el ejemplo escogido, como i es positivo y $d\Phi$ es negativo, el trabajo exterior realizado es positivo.

El cálculo anterior se limita al trabajo *mecánico* realizado al mover una espira en un campo magnético. Necesariamente debe realizarse también algún trabajo eléctrico. A fin de compensar la fem inducida en la espira por el cambio del flujo a su través, el generador que establece la corriente i en la espira, debe suministrar un trabajo adicional, además del término $i^2 R$. Por otra parte, el movimiento de la espira por la que circula corriente produce un flujo variable en el circuito exterior, que establece el que hemos llamado campo magnético exterior, y el generador que lo alimenta debe también suministrar trabajo para compensar la fem inducida en él. Sin embargo, en este momento no entraremos en detalles sobre este trabajo eléctrico.

c) *Un motor elemental.* Vamos a emplear el resultado del ejemplo anterior para estudiar un motor simple capaz de convertir energía eléctrica en mecánica. En la Fig. 8.5 se ha dibujado el dispositivo

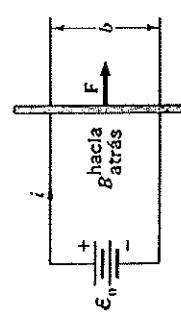


Fig. 8.5 Motor elemental

vo a que nos referimos. La pila de fuerza electromotriz ϵ_0 hace que pase una corriente i por la espira, cuya resistencia total es R . La fuerza magnética que actúa sobre la varilla móvil es

$$F = ibB = \frac{\epsilon_0}{R} bB$$

La potencia con que esta fuerza F realiza trabajo, cuando la varilla se mueve con velocidad v , es

$$\frac{dW}{dt} = Fv = i \frac{d\Phi}{dt}$$

habiéndose empleado la Ec. (8.6) para relacionar el trabajo con la variación de flujo. Se ha omitido el signo menos porque $d\Phi/dt$ es positivo, mientras que i es negativa. La fem inducida por $d\Phi/dt$ debe ser incluida en la ecuación del circuito, la cual se escribirá, por tanto,

$$\mathcal{E}_0 - i \frac{d\Phi}{dt} = iR$$

Si se multiplica esta ecuación por i , obtenemos

$$\mathcal{E}_0 i = i \frac{d\Phi}{dt} + i^2 R = Fv + i^2 R$$

Por tanto, la batería suministra la potencia $\mathcal{E}_0 i$, que se invierte en trabajo mecánico, con potencia Fv , y en energía disipada en la resistencia del circuito, con potencia $i^2 R$. Los motores se estudiarán con más detalle en el Ejemplo 8.8d y en la Sec. 10.13.

8.6 Inductancia mutua

Vamos ahora a emprender el estudio de la interacción entre dos circuitos debida al flujo magnético que los enlaza. Este flujo común, en combinación con la ley de Faraday, determina que los cambios en uno de los circuitos afecten al otro. Vamos a expresar esta inter-

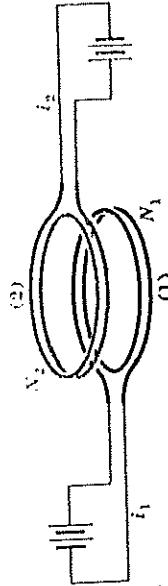


Fig. 8.6 Inductancia mutua entre dos circuitos.

acción en función de la *inductancia mutua* de los dos circuitos. Comencemos por examinar la energía asociada al hecho de aproximar dos circuitos. En la Fig. 8.6 se han dibujado dos bobinas, por las que pasan corrientes i_1 e i_2 , y tienen N_1 y N_2 espiras, respectivamente. Supongamos que inicialmente las dos bobinas están muy separadas y vamos a determinar la cantidad de trabajo exterior que debe real-

lizarse para llevar la bobina 1 a las proximidades de la bobina 2. Haciendo uso del resultado del Ejemplo 8.5b, podemos escribir

$$dW = -N_1 i_1 d\Phi_{12} \quad (8.6)$$

Donde $d\Phi_{12}$ es el flujo adicional que atraviesa la bobina 1, cuando las dos se aproximan, debido a la corriente que pasa por la 2. El trabajo mecánico total realizado al aproximar las bobinas desde una distancia muy grande es

$$W = \int_{\infty}^{\text{posición final}} dW = -N_1 i_1 \int_{\infty}^{\text{posición final}} d\Phi_{12} = -N_1 i_1 \Phi_{12} \quad (8.11)$$

Podriamos haber alcanzado igualmente bien el estado final, manteniendo fija la bobina 1 y acercando la 2 desde el infinito. Esto nos daría

$$W = -N_2 i_2 \Phi_{21} \quad (8.11)$$

Y como los estados finales son equivalentes, independientemente del modo con que se hayan alcanzado, estas dos energías deben ser iguales, así que podemos escribir

$$N_2 i_2 \Phi_{21} = N_1 i_1 \Phi_{12} \quad (8.12)$$

$$0 \quad \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$

Se denomina inductancia mutua M entre las dos bobinas al valor de estas razones. La magnitud $N_1 \Phi_{12}$ se denomina *flujo enlazante* en la bobina 1 debido a la corriente en la bobina 2, esto es, el flujo en (1) debido a la corriente en (2) multiplicado por el número de espiras en (1). Con esta nomenclatura, la inductancia mutua es simplemente el *flujo enlazante en una bobina cuando pasa una corriente unidad en la otra*. Además, resulta así que, independientemente de la forma geométrica de las dos bobinas, $M_{12} = M_{21}$, que son respectivamente

$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2} \quad \text{y} \quad M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} \quad (8.13)$$

tienen, como hemos visto, el mismo valor.

Vamos a emplear ahora el concepto de inductancia mutua entre dos bobinas para calcular el efecto de un cambio en la corriente de una de ellas sobre la corriente que circula por la otra. Supongamos que se mantienen fijas en el espacio las bobinas de la Fig. 8.6 y que

se cambia, por ejemplo, la corriente en la bobina 2. El resultado es una fem inducida en la bobina 1 cuyo valor es

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt}$$

Como según la Ec. (8.13) $\Phi_{12} = M i_2 / N_1$, podemos diferenciar esta expresión para calcular la variación de Φ_{12} cuando se cambia i_2 , obteniendo

$$d\Phi_{12} = \frac{M}{N_1} di_2$$

Y al sustituir en la anterior, tenemos

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt} \quad \text{voltios}$$

Análogamente, si se hace variar i_1 , la fem inducida en la bobina 2 será

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{voltios}$$

La unidad de inductancia mutua en los sistemas de unidades mks y práctico es el *henry*, así llamada en honor del científico americano Joseph Henry, que desarrolló el concepto de inductancia casi simultáneamente con Faraday. La inductancia mutua es unidad cuando el cambio de 1 amp/seg en una bobina, induce una fem de 1 voltio en la otra. Por tanto, un henry equivale a un volt-seg por ampere. En la Sec. 8.8 veremos un ejemplo sencillo de los efectos que se presentan debido a la inductancia mutua.

8.7 Autoinducción

La inducción de Faraday tiene la misma importancia en el caso de un circuito único, como podemos ver estudiando los fenómenos que se presentan en una bobina aislada, tal como la que se indica en la Fig. 8.7. Si se hace cambiar la corriente que pasa por esta bobina (por ejemplo, variando la resistencia R), el flujo que atraviesa la bobina cambia, y aparece la consiguiente fem inducida en ella. Por analogía con la definición de inductancia mutua, podemos definir la autoinducción L según

$$L = \frac{N_1 d\Phi_{11}}{di_1} \quad (8.16)$$

Siendo Φ_{11} el flujo en la bobina debido a su propia corriente, de modo que la autoinducción es el *flujo enlazante en un circuito cuadrado para por él una corriente unidad*. Como antes, para la fem inducida por la corriente variable, obtendremos

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{N_1 d\Phi_{11}}{dt}$$

Y como la Ec. (8.16) permite escribir

$$\Phi_{11} = \frac{L_1 i_1}{N_1}$$

será

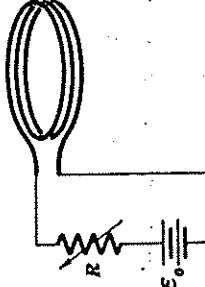
$$d\Phi_{11} = \frac{L_1}{N_1} di_1$$

Sustituyendo en la ecuación que nos da \mathcal{E}_1 resulta

$$\mathcal{E}_1 = -L \frac{di_1}{dt} \quad \text{voltios} \quad (8.17)$$

Cualquier circuito cerrado posee autoinducción, aunque no exista ninguna bobina. En efecto, un circuito completo constituye, por lo menos, una espira que es atravesada por un cierto flujo cuando pasa la corriente. Sin embargo, si el área de la espira se hace muy pequeña, el flujo enlazante también lo será y la autoinducción resultará muy pequeña. La unidad de autoinducción es también el henry.

Antes de proseguir nuestra exposición, hagamos notar que el efecto de la inductancia en un circuito es como el de la inercia en un sistema mecánico. En efecto, cualquier cambio en una corriente estacionaria está acompañado por una fem inducida que tiende a contrarrestar este cambio. Esto resulta análogo a la fuerza ejercida por una masa en movimiento cuando se intenta modificar su velocidad.



8.8 Ejemplos

- a) *Efecto de la inductancia mutua en los circuitos acoplados.* Examinemos, en forma cuantitativa, el comportamiento de los dos cir-

Fig. 8.7 Autoinducción de un circuito.

circuitos acoplados por inductancia mutua, que se indican en la Fig. 8.8. La corriente en el circuito 2 puede ser modificada variando R_2 . Determinemos el efecto que un cambio di_2/dt en el circuito 2 tiene sobre

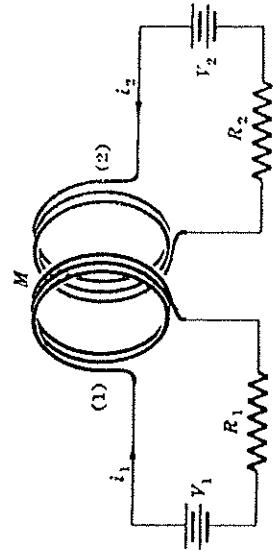


Fig. 8.8 Circuitos acoplados por una inductancia mutua M .

la corriente en el circuito 1. Haciendo uso de la Ec. (8.14) podemos escribir directamente la fem inducida en el circuito 1, que es

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt} \text{ voltios}$$

El signo negativo nos indica que, si la corriente en los dos circuitos circula por las bobinas en el mismo sentido, \mathcal{E}_1 se opondrá al generador V_1 cuando di_2/dt sea positiva. Si se invierte la polaridad de V_1 , o se hace girar 180° una de las bobinas, \mathcal{E}_1 y V_1 actuarán en el mismo sentido si di_2/dt es positiva.

Otro efecto adicional a considerar es el de L_1 , la autoinducción del circuito 1. Esta da lugar a otra fem en el circuito 1 que, según la Ec. (8.17), vale

$$\mathcal{E}'_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} \text{ voltios}$$

y actúa en oposición a di_1/dt . La ecuación correspondiente al circuito 1 será, pues,

$$V_1 \pm M \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} = i_1 R \quad (8.18)$$

Si se conocen el valor de di_2/dt y el sentido en que M actúa sobre el circuito 1, esta ecuación diferencial puede resolverse por métodos semejantes a los seguidos en la Sec. 10.7. Si di_2/dt no es constante, el problema es mucho más complicado. No ha sido necesario tomar en consideración la autoinducción L_2 porque tendría L_2 es producir una fem valor dado de di_2/dt . El efecto que tendría L_2 es producir una fem

inducida en el circuito 2 que debe ser compensada al variar la resistencia R_2 para conseguir que la variación de i_2 tenga lugar con la rapidez deseada.

b) *Cálculo de una autoinducción.* En pocos casos es fácil calcular la autoinducción de un circuito con una configuración geométrica dada. Como ejemplo, vamos a hacer el cálculo en el caso de una bobina uniforme y muy larga, y despreciaremos el efecto de los extremos que en la práctica reducirían algo el valor calculado debido a que el flujo es menor en los extremos de la bobina. Podemos esperar que el número de vueltas N aparezca como N^2 , una vez la N correspondiente al producto $N\Phi$ y la otra por ser Φ mismo proporcional a N . Ya hemos calculado en los Ejemplos 6.3c y 6.6b el campo B en el interior de un solenoide de N espiras y longitud l , que es $B = \mu_0 N^2 l / l$. Sustituyendo en la Ec. (8.16), obtenemos para la autoinducción

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \text{ henrios} \quad (8.19)$$

Si se trata de un solenoide toroidal, no hay dispersión del flujo en los extremos y el resultado es exacto.

c) *Cálculo de la fem de un generador.* En la Fig. 8.9 se indica esquemáticamente un dispositivo para convertir energía mecánica en eléctrica algo más práctico que el considerado en el Ejemplo 8.9a.

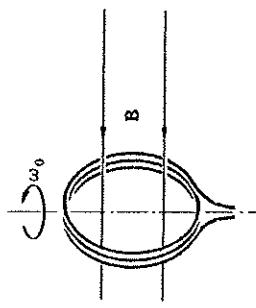


Fig. 8.9 Generador elemental: bobina giratoria en un campo magnético exterior.

En un campo magnético uniforme de inducción B se hace girar una bobina, de N espiras y área A , con una velocidad angular de ω_0 radianes/seg. Vamos a calcular la fem generada mediante la ley de inducción de Faraday. El flujo enlazante que atraviesa la bobina cuando el plano de la misma forma un ángulo θ con la dirección de B , viene dado por

$$N\Phi = NAB \sin \theta = NAB \sin \omega_0 t$$

siendo $\omega_0 t$ el valor de θ en un instante determinado t . Por tanto,

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\omega_0 NAB \operatorname{sen} \omega_0 t \quad (8.20)$$

Es decir, este generador da una fem sinusoidal de amplitud $\omega_0 NAB$. El origen de esta fem es el trabajo mecánico realizado al hacer girar la bobina. Este trabajo sería cero (en un sistema sin rozamientos) si no pasa corriente, y aumenta proporcionalmente a la corriente si ésta crece, como ya vimos en el Ejemplo 8.5a. En la Sec. 10.12 estudiaremos varios tipos de generadores.

d) *Cálculo de la fuerza contraelectromotriz de un motor.* En la Fig. 8.10 se ha representado esquemáticamente un motor más prá-

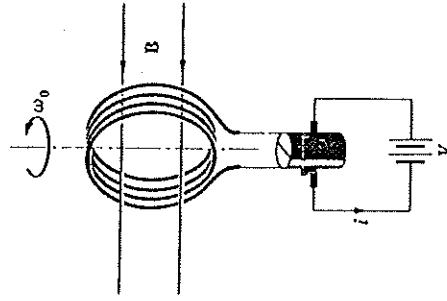


Fig. 8.10 Motor elemental: bobina por la que circula corriente con un conmutador y situada en un campo magnético exterior.

riendo $\omega_0 t$ el valor de θ en un instante determinado t . Si la intensidad del campo magnético es B_0 y el área de la bobina A , tendremos

$$N\Phi = NAB_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

y

$$-N \frac{d\Phi}{dt} = -NAB_0 \cos \omega_0 t$$

El conmutador hace cambiar la forma de la función $d\Phi/dt$, en lugar de variar como $\cos \omega_0 t$ tiene el aspecto indicado en la Fig. 8.11.

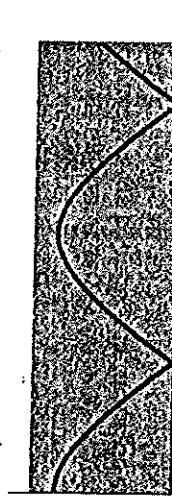


Fig. 8.11 Fuerza contraelectromotriz del motor tal como se ve a través del conmutador.

Por tanto, la fuerza contraelectromotriz varía de forma semejante según expresa la Ec. (8.21). Si llamamos $\mathcal{E}(t)$ a esta función que varía periódicamente, la corriente en la bobina vendrá dada por la expresión

$$V - \mathcal{E}(t) = iR$$

y vemos que i también varía con el tiempo. Esta variación se ha dibujado en la Fig. 8.12, en la que i_0 representa la corriente que

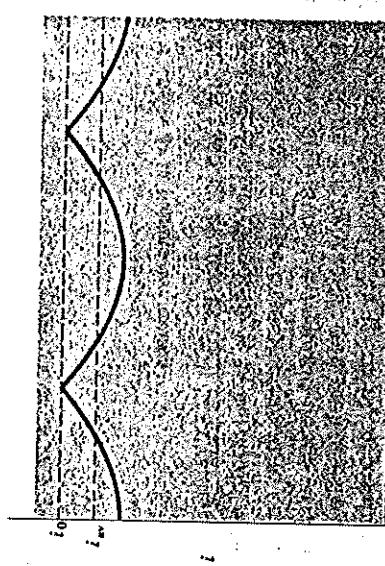


Fig. 8.12 Variación de la corriente en el motor debido a la fuerza contraelectromotriz.

pasaría si la espira se mantuviera en reposo. En este razonamiento hemos despreciado otras modificaciones que se presentarían si la

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (8.21)$$

autoinducción de la bobina a la frecuencia ω_0 fuera importante. La corriente media valdrá

$$\overline{V - \mathcal{E}(t)} = iR$$

siendo $\overline{\mathcal{E}(t)}$ el valor medio de la fem inducida.

En la práctica, en lugar de usar una sola bobina, la parte giratoria de un motor llamada *rotor* está formada por varias bobinas orientadas en ángulos distintos alrededor del eje de rotación. El commutador conecta la fuente externa de energía sucesivamente a cada bobina de tal modo que se obtiene de cada una el par máximo. La fuerza contraelectromotriz juega un papel importante en el modo de operar de un motor. Vamos a explicarlo considerando el rotor de un motor cuyas bobinas tengan muy poca resistencia. Si se conecta a las bobinas una fuente de energía pasa una gran intensidad, limitada tan solo por la resistencia de las bobinas, en tanto que el rotor está en reposo. Sin embargo, tan pronto como el rotor empieza a girar en el campo magnético estático, producido por las bobinas inductoras del motor, se induce una fuerza contraelectromotriz que se opone a la tensión externa aplicada que origina la corriente en las bobinas giratorias. Si el motor gira en vacío, la fem reduce la corriente a un valor muy pequeño; justo lo suficiente para suministrar la energía consumida por las pérdidas de rozamientos y resistencia eléctrica. Si el motor arrastra una carga pesada tiende a disminuir su velocidad, produciéndose la consiguiente reducción en la fem lo que permite que el motor tome más energía eléctrica para arrastrar la carga mecánica. Tomando esto como base, es fácil explicarse que al arrancar un motor haya una gran demanda de energía eléctrica. En la Sec. 10.13 se describen varios tipos de motores.

autoinducción de la bobina a la frecuencia ω_0 fuera importante. La corriente media valdrá

$$\overline{V - \mathcal{E}(t)} = iR$$

siendo $\overline{\mathcal{E}(t)}$ el valor medio de la fem inducida.

En la práctica, en lugar de usar una sola bobina, la parte giratoria de un motor llamada *rotor* está formada por varias bobinas orientadas en ángulos distintos alrededor del eje de rotación. El commutador conecta la fuente externa de energía sucesivamente a cada bobina de tal modo que se obtiene de cada una el par máximo. La fuerza contraelectromotriz juega un papel importante en el modo de operar de un motor. Vamos a explicarlo considerando el rotor de un motor cuyas bobinas tengan muy poca resistencia. Si se conecta a las bobinas una fuente de energía pasa una gran intensidad, limitada tan solo por la resistencia de las bobinas, en tanto que el rotor está en reposo. Sin embargo, tan pronto como el rotor empieza a girar en el campo magnético estático, producido por las bobinas inductoras del motor, se induce una fuerza contraelectromotriz que se opone a la tensión externa aplicada que origina la corriente en las bobinas giratorias. Si el motor gira en vacío, la fem reduce la corriente a un valor muy pequeño; justo lo suficiente para suministrar la energía consumida por las pérdidas de rozamientos y resistencia eléctrica. Si el motor arrastra una carga pesada tiende a disminuir su velocidad, produciéndose la consiguiente reducción en la fem lo que permite que el motor tome más energía eléctrica para arrastrar la carga mecánica. Tomando esto como base, es fácil explicarse que al arrancar un motor haya una gran demanda de energía eléctrica. En la Sec. 10.13 se describen varios tipos de motores.

mando a las bobinas 1 y 2 podemos escribir para la inducción mutua la expresión

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} \quad (8.12)$$

Análogamente, la autoinducción de las bobinas vendrá da-

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_1}{i_1} \quad \text{y} \quad L_2 = \frac{N_2 \Phi_2}{i_2} \quad (8.16)$$

Como todo el flujo de la bobina 2 atraviesa a la 1

$$\frac{\Phi_{12}}{i_2} = \frac{\Phi_2}{i_2}$$

esto es, el flujo Φ_{12} en la bobina 1 debido a la corriente i_2 es igual al que el flujo Φ_2 en la bobina 2 debido a la misma corriente i_2 . Análogamente,

$$\frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\Phi_1}{i_1}$$

Si en las Eqs. (8.12) remplazamos Φ_{12}/i_2 y Φ_{21}/i_1 por estos valores multiplicamos M_{21} por M_{12} obtenemos

$$M_{12} M_{21} = M^2 = \frac{N_1 N_2 \Phi_1 \Phi_2}{i_1 i_2} = L_1 L_2$$

o sea

$$M_{\max} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (8.22)$$

Existe un caso en el que es fácil calcular la inductancia mutua entre dos circuitos en función de la autoinducción de cada uno de los circuitos aislados. Este caso es el de flujo enlazante máximo, cuando todo el flujo que atraviesa uno de los circuitos pasa también por el otro. Una configuración que realiza esto físicamente sería la de dos bobinas de igual área (pero no necesariamente del mismo número de espiras) colocadas muy próximas entre sí. Otra disposición que conduce a flujo enlazante máximo sería el de dos bobinas devanadas una sobre otra formando un solenoide toroidal. Lla-

Este es el valor máximo que puede tener M para valores dados de L_1 y L_2 . En general, la inductancia mutua puede escribirse

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (8.23)$$

siendo k un número comprendido entre 0 y 1, que depende de la geometría de las bobinas y de su posición relativa. Lla-

8.10 Combinaciones de bobinas

Si se disponen varias bobinas en serie de modo que no haya interacción entre ellas, es decir, que no presenten inductancia mutua, es fácil demostrar que se comportan como una sola bobina cuya autoinducción sea la suma de las autoinducciones. Por tanto, la tensión inducida en las tres autoinducciones dibujadas en la Fig. 8.13 será

$$-L_1 \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} - L_3 \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

donde $L = L_1 + L_2 + L_3$. Sin embargo, la situación se modifica si



Fig. 8.13 Tres autoinducciones en serie sin interacción entre sí. Valor equivalente, $L = L_1 + L_2 + L_3$.

el flujo creado por una de las bobinas enlaza a otra, dando lugar a una inductancia mutua. En la Fig. 8.14 se supone que entre las dos bobinas existe este tipo de interacción. La tensión entre los extremos de las dos bobinas será

$$\mathcal{E} = -L_1 \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} \pm 2M \frac{di}{dt} \quad (8.24)$$

La inductancia mutua aparece dos veces, una por la tensión inducida en la segunda bobina por cambios de corriente en la primera



Fig. 8.14 Autoinducciones en serie con interacción. Valor equivalente, $L = L_1 + L_2 \pm 2M$.

y la otra por lo inverso. El doble signo \pm indica la posibilidad de que la interacción mutua tenga lugar añadiéndose el flujo al propio de las autoinducciones, u oponiéndose a él. El signo de M y su valor dependen de la configuración geométrica de las bobinas. Según la Ec. (8.24), la autoinducción equivalente del par de bobina en serie valdrá:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (8.25)$$

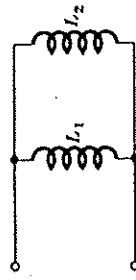


Fig. 8.15 Dos autoinducciones en paralelo.

En el caso de autoinducción en paralelo y sin interacción que indica la Fig. 8.15, podemos escribir

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Pero en este caso, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, y será también

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\mathcal{E}$$

La autoinducción equivalente L corresponde a la expresión $\mathcal{E} = -L di/dt$, de modo que tenemos

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad o \quad L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (8.26)$$

Nótese que estas reglas para la combinación de autoinducciones sin interacción resultan tener la misma forma que las correspondientes a la combinación en serie y en paralelo de resistencias.

8.11 Energía magnética

Puede demostrarse que la fem inducida en un circuito como consecuencia de las variaciones del flujo magnético conduce a un consumo de energía, que se invierte en establecer un campo magnético en una región del espacio. Como esta energía puede recuperarse y utilizarse, por ejemplo, en calentar una resistencia, nos vemos llevados en forma natural al concepto de energía almacenada en un campo magnético. Esta situación es análoga al almacenamiento de energía

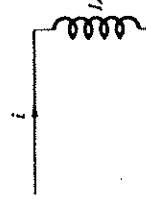


Fig. 8.16 Establecimiento de la corriente en una autoinducción.

en un campo eléctrico que vimos en el Cap. 4. Empecemos por preguntarnos cuánta energía debe invertirse en establecer una corriente i en una autoinducción L como se indica en la Fig. 8.16. La fem inducida en la bobina es

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$

La cantidad de trabajo necesario para mover una carga dq contra esta fem será

$$dW = -\mathcal{E}dq = L \frac{di}{dt} dq = L \frac{dq}{dt} di = Li di \quad (8.27)$$

en la que hemos hecho un cambio de variables, haciendo aparecer $i = dq/dt$. El trabajo total, para que desde 0 la corriente alcance el valor i , se obtendrá integrando la Ec. (8.27):

$$W = \int dW = L \int_0^i i di = \frac{1}{2} Li^2 \quad (8.28)$$

Hemos llamado W a este trabajo puesto que, como demostraremos, esta energía empleada puede recuperarse.

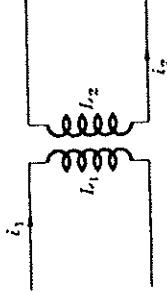


Fig. 8.16 Disipación de la energía almacenada en el campo magnético de una autoinducción.

Si consideramos el caso de dos circuitos con interacción, tal como se indica en la Fig. 8.17, la energía necesaria para establecer las corrientes i_1 e i_2 en los dos circuitos se obtendrá análogamente;

$$U = \int dW = -\mathcal{E}_1 dq_1 - \mathcal{E}_2 dq_2 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} = -L_1 i_1 - L_2 i_2 \quad (8.30)$$

Si consideramos el caso de dos circuitos con interacción, tal como se indica en la Fig. 8.17, la energía necesaria para establecer las corrientes i_1 e i_2 en los dos circuitos se obtendrá análogamente;

que se obtiene multiplicando la Ec. (8.30) por la intensidad instantánea i . Como en este caso i y su derivada tienen signos opuestos, el primer miembro será positivo. La energía total suministrada a la resistencia es la integral de esta expresión extendida al tiempo en que tanto i como di/dt sean distintos de cero. Realmente, ya hemos encontrado su valor, que es $\frac{1}{2} Li^2$. A su vez, debe ser también igual a la integral $\int i^2 R dt$, es decir, a la energía disipada en la resistencia una vez que la batería se quitó del circuito.

Hemos demostrado, pues, que para establecer una corriente i en una autoinducción es necesaria una cantidad de energía $\frac{1}{2} Li^2$, y que esta energía queda almacenada, quedando asociada al paso

$$-Li \frac{di}{dt} = i^2 R \quad (8.31)$$

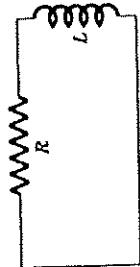


Fig. 8.17 Energía almacenada en dos circuitos acoplados.

$$\begin{aligned} dW &= -\mathcal{E}_1 dq_1 - \mathcal{E}_2 dq_2 \\ &= \left(L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \right) dq_1 + \left(L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \right) dq_2 \\ &= L_1 i_1 di_1 \pm M i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 \pm M i_2 di_1 \end{aligned} \quad (8.29)$$

como $M i_1 di_2 + M i_2 di_1$ es una diferencial exacta, estos dos términos pueden escribirse como $d(M i_1 i_2)$. Integrando la expresión completa nos resulta

$$U = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

de corriente por la autoinducción. Sin embargo, existe un punto de vista más útil: considerar que la energía está almacenada en el campo magnético existente en el espacio a causa de la corriente. Este punto de vista es exactamente análogo al mantenido en el caso de la energía almacenada en un campo electrostático, en el que vimos que era $U/vol = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ para el vacío. Un cálculo bastante semejante nos conducirá a la energía almacenada en un campo magnético. Elegiremos un solenoide toroidal, debido a que solo hay campo en su interior y además es esencialmente uniforme en esta región, lo que facilita mucho los cálculos. Ya sabemos que la autoinducción de este solenoide es $L = \mu_0 N^2 A/l$ henrys. Por tanto, la energía total almacenada en el campo será $U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 A i^2/l$ julios. La energía por unidad de volumen se obtendrá dividiendo por el volumen del solenoide, Al . Esto nos da $U/vol = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 i^2/l^2$, pero como $B = \mu_0 Ni/l$, resulta finalmente

$$\frac{U}{vol} = \frac{\frac{1}{2} B^2}{\mu_0} \text{ julios/m}^3 \quad (8.32)$$

para el caso de un campo magnético B en el vacío.

8.12 Otros aspectos de la ley de Faraday

Quedan algunos aspectos de la ley de inducción de Faraday que no hemos discutido todavía. En todo lo anterior estabamos interesados en la fem inducida a lo largo de un conductor situado en una región en la que B cambia con el tiempo. Esta fem da lugar a una fuerza sobre las partículas cargadas del conductor y, por tanto, a un campo eléctrico que puede relacionarse con la fem inducida \mathcal{E} por la ecuación

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint E_{tg} dl \quad (8.33)$$

Si consideramos un conductor circular (Fig. 8.19) cuyo plano es

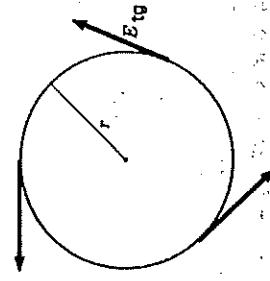


Fig. 8.19 Campo eléctrico tangencial inducido a lo largo de un hilo circular en una región en que varía el campo B .

normal a las líneas de un campo magnético B uniforme, este campo eléctrico es tangencial y uniforme para todo el circuito, estando dado por

$$E_{tg} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r} \quad (8.34)$$

siendo r el radio del conductor circular. El trabajo realizado sobre una carga q durante una revolución completa de la misma es

$$W = \oint q E_{tg} dl = q E_{tg} 2\pi r = q\mathcal{E} \text{ culombios} \times \text{voltios} \quad (8.35)$$

Nótese que la dirección de este campo eléctrico no está definida. La dirección de E_{tg} depende esencialmente de la trayectoria elegida, así que en realidad resulta bien distinto a un campo electrostático.

Otra diferencia es que para este campo inducido, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$.

Otra propiedad importante de esta fem inducida es que existe independientemente de la presencia o no de un conductor. Este hecho queda bien ilustrado por un tipo de acelerador de electrones llamado *betatrón*. En esta máquina, los electrones describen órbitas circulares en un campo magnético en el vacío. La intensidad del campo magnético cambia con el tiempo y como resultado del cambio de flujo magnético que atraviesa el área encerrada por la órbita de los electrones se induce una fem y se acelera los electrones.

8.13 Aplicaciones

En el Cap. 10 discutiremos las aplicaciones como elementos de los circuitos en corriente alterna y en transitorios. Vamos a considerar ahora dos aplicaciones de la fuerza inducida a problemas prácticos.

El galvanómetro balístico. El método quizás más empleado para medir la intensidad de un campo magnético consta de es el de la *bobina de prueba*. En él se introduce en el campo a medir una pequeña bobina de geometría conocida de modo que sea atravesada por el máximo flujo. Entonces, la bobina se saca rápidamente del campo, o se hace girar de modo que se reduzca a cero el flujo que la atraviesa. Si pudiera integrarse la variación del flujo que tiene lugar desde el principio hasta el fin, podría obtenerse el flujo y, por tanto, B . En efecto,

$$\int \frac{d\Phi}{dt} dt = \Phi = BA$$

siendo Φ el valor del flujo que atravesaba originalmente la bobina. Vamos a demostrar ahora que, en condiciones apropiadas, este cambio de flujo puede relacionarse con la desviación de un galvanómetro al que se aplica la fem inducida en la bobina de prueba, $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt}$.

Esto puede conseguirse mediante el *galvanómetro balístico*, un galvanómetro construido de modo que su periodo de oscilación sea razonablemente largo. El galvanómetro se conecta a la bobina como se indica en la Fig. 8.20. Cuando se hace cambiar bruscamente el flujo magnético que atraviesa la bobina, el galvanómetro recibe un impulso de rotación cuya magnitud es proporcional al cambio total de flujo. Si se conocen las características del galvanómetro, puede determinarse la intensidad del campo.

El principio de operación es el siguiente: El par que aparece sobre la bobina del galvanómetro, cuando su plano es paralelo al campo magnético, es como ya vimos

\tau = NiAB

donde las magnitudes $NiAB$ se refieren, evidentemente, a la bobina del galvanómetro, no a la de prueba. Cuando en lugar de una corriente estacionaria i , aplicamos un impulso de corriente tal como

$$\tau = N i A B$$

donde las magnitudes $NiAB$ se refieren, evidentemente, a la bobina del galvanómetro, no a la de prueba. Cuando en lugar de una corriente estacionaria i , aplicamos un impulso de corriente tal como

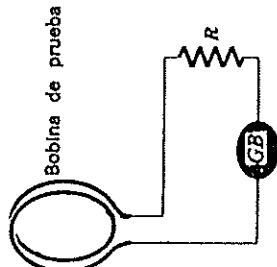


Fig. 8.20 Bobina de prueba empleada con el galvanómetro balístico para medir R .

que circula corriente. Empleando la Ec. (8.36), podemos integrar en la forma

$$\int \tau dt = NBA \int i dt = NBAQ \quad (8.37)$$

En la que hemos expresado el hecho de que $\int i dt$ es la carga total que pasa por el galvanómetro. Esta es una característica especial del galvanómetro balístico; el impulso de rotación que recibe depende únicamente de la carga total que le atraviesa y no del modo en que varía la intensidad de la corriente con el tiempo. Sin embargo, para que se trate verdaderamente de un impulso de rotación, es necesario que el impulso de corriente termine antes de que la bobina del galvanómetro haya tenido tiempo de desplazarse apreciablemente de su posición inicial. Por tanto, el impulso debe ser corto comparado con el periodo natural de oscilación del galvanómetro. Sabemos por mecánica, que este impulso de rotación comunica a la bobina un momento cinético $I\omega_0$, siendo I el momento de inercia y ω_0 la velocidad angular inicial del sistema móvil. Por tanto, tenemos

$$\int \tau dt = I\omega_0 = NBAQ \quad (8.38)$$

Este momento cinético inicial corresponde a una cierta energía cinética $\frac{1}{2}I\omega_0^2$. A medida que gira la bobina en contra del par recuperador de la suspensión de la bobina del galvanómetro, esta energía cinética se convierte en energía potencial. Esta conversión es completa para la máxima desviación θ_{\max} y podemos escribir

$$KE = \frac{1}{2}I\omega_0^2 \rightarrow PE = \frac{1}{2}k\theta^2 \max \quad (8.39)$$

siendo k la constante elástica de la suspensión. Despejando ω_0 en la Ec. (8.38) y sustituyendo en la (8.39), encontramos

$$Q = \frac{\sqrt{Ik}}{NBA} \theta_{\max} \quad (8.40)$$



Fig. 8.21 Impulso de corriente aplicado a través del galvanómetro balístico. El impulso debe haber terminado antes de que tenga lugar un movimiento apreciable del galvanómetro.

el indicado en la Fig. 8.21, el impulso de rotación comunicado a la bobina del galvanómetro es $\int \tau dt$, estando la integración extendida a un intervalo de tiempo suficiente para cubrir todo el tiempo en

que pasa por el galvanómetro. Esta es una característica especial del galvanómetro balístico; el impulso de rotación que recibe depende únicamente de la carga total que le atraviesa y no del modo en que varía la intensidad de la corriente con el tiempo. Sin embargo, para que se trate verdaderamente de un impulso de rotación, es necesario que el impulso de corriente termine antes de que la bobina del galvanómetro haya tenido tiempo de desplazarse apreciablemente de su posición inicial. Por tanto, el impulso debe ser corto comparado con el periodo natural de oscilación del galvanómetro. Sabemos por mecánica, que este impulso de rotación comunica a la bobina un momento cinético $I\omega_0$, siendo I el momento de inercia y ω_0 la velocidad angular inicial del sistema móvil. Por tanto, tenemos

$$KE = \frac{1}{2}I\omega_0^2 \rightarrow PE = \frac{1}{2}k\theta^2 \max \quad (8.39)$$

siendo k la constante elástica de la suspensión. Despejando ω_0 en la Ec. (8.38) y sustituyendo en la (8.39), encontramos

$$Q = \frac{\sqrt{Ik}}{NBA} \theta_{\max} \quad (8.40)$$

Esta ecuación puede ponerse en forma más útil haciendo aparecer en ella el periodo de oscilación T de un péndulo de torsión, $T = 2\pi\sqrt{(I/k)}$. Con ello resulta,

$$Q = \frac{kT}{2\pi NBA} \theta_{\max} = \frac{K'T}{2\pi} \theta_{\max}$$

K' es la llamada constante del galvanómetro (véase Sec. 7.7).

Si se emplea en su lugar el índice de calidad del galvanómetro [Ec. (7.31)], resulta

$$Q = \frac{KT}{2\pi} d_{\max}$$

siendo d_{\max} la desviación máxima del galvanómetro en milímetros sobre una escala situada a 1 m de distancia. Si el galvanómetro está muy amortiguado, debe introducirse una corrección para tener en cuenta el efecto del amortiguamiento sobre esta desviación.

Hemos visto que el conocimiento de la constante del galvanómetro o su índice de calidad, y del periodo de oscilación propio del galvanómetro permite medir la carga total que pasa a través suyo en un tiempo pequeño comparado con este periodo. Vamos a ver ahora cómo se hace uso de esta propiedad del galvanómetro balístico para medir el valor de B . La corriente que pasa por el circuito de la Fig. 8.20 vendrá dada por

$$i = \frac{\text{fem}}{R} = -\frac{1}{R} \left(N' \frac{d\Phi}{dt} + L \frac{di}{dt} \right) \quad (8.41)$$

Siendo L la autoinducción del circuito y N' el número de espiras de la bobina de prueba. Integrando encontramos la carga total que pasa

$$Q = \int_0^{\infty} i dt = -\frac{N'}{R} (\Phi_2 - \Phi_1) - \frac{1}{R} \int_0^0 L di = \frac{N'}{R} (\Phi_2 - \Phi_1) \quad (8.43)$$

en la que $(\Phi_2 - \Phi_1)$ es el cambio total de flujo habido. Si sacamos completamente la bobina de prueba del campo Φ_2 se hará cero y tendremos

$$Q = -\frac{N'}{R} \Phi_1 = \frac{N'}{R} BA' \quad o \quad B = \frac{QR}{N'A'} \quad (8.44)$$

donde A' es el área de la bobina de prueba. Como se ve, en este razonamiento se ha supuesto que esta bobina estaba orientada originalmente con su plano perpendicular al campo magnético.

Corrientes de Foucault y efecto pelicular. Siempre que se coloca un conductor en una región en la que existe un campo magnético variable, aparecen en él corrientes por inducción. Estas corrientes dan lugar a pérdidas $I^2 R$ en el metal al ser calentado, y estas pérdidas

de energía pueden no ser deseables. Es ésta la razón por la cual al proyectar transformadores, el núcleo de material ferromagnético empleado se construye con láminas delgadas de metal, aisladas entre sí (núcleo laminado) en vez de ser de una sola pieza. Para demostrar cómo esta división influye sobre las pérdidas, vamos a hacer un cálculo sencillo aunque aproximado. En la Fig. 8.22 se han

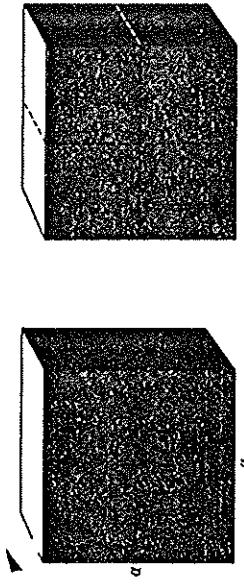


Fig. 8.22 Bloques, sólido y dividido, para estimar el valor de las corrientes de Foucault.

dibujado dos bloques metálicos que se suponen sometidos a campos variables idénticos. El primer bloque es sólido, mientras que el segundo está dividido en cuadrantes aislados entre sí. Vamos a calcular las pérdidas de Foucault en el primer bloque en el primer cuadrante de área $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2}$.

En la Fig. 8.23 se ve el primer bloque dividido en una serie de circuitos rectangulares de longitud l y sección transversal $t dx$.

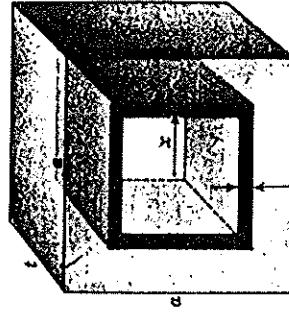


Fig. 8.23 Trajetoria idealizada de la corriente para el cálculo de las pérdidas por corrientes de Foucault.

Este no será el camino seguido exactamente por la corriente, pero constituye una primera aproximación. Como la longitud de uno de los lados es $2x$, la longitud total l es $8x$, y el área interior $(2x)^2$. Ahora bien, si B es normal a la cara frontal del bloque y su derivada dB/dt es uniforme en todo el bloque, la fem inducida es proporcional al área encerrada por cada circuito. Podremos escribir esta fem inducida \mathcal{E} en la forma $k(2x)^2$, siendo

$k = dB/dt$. El campo eléctrico medio inducido E en cada rectángulo es $E = \frac{\mathcal{E}}{l} = \frac{4kx^2}{2} = \frac{1}{2}kx$.

Vamos ahora a expresar la potencia disipada por la corriente en este circuito. Partiendo de la expresión general de la potencia disipada en un conductor, $P = Vi$, podemos transformarla como sigue:

$$P = Vi = Eii = EIAj = Eiv = \sigma E^2 v \quad (8.45)$$

siendo A = área transversal del circuito considerado.

v = volumen del mismo.

σ = conductividad.

Para el circuito que estamos considerando en el seno del bloque, podemos, pues, escribir

$$dP = \sigma E^2 dv$$

Integrando a todo el bloque tendremos la potencia disipada en el mismo.

$$P = \sigma \int E^2 dv = \sigma \int_0^2 \left(\frac{1}{2}kx\right)^2 l \cdot 8x dx = \frac{\sigma lk^2}{32} a^4$$

Este resultado nos muestra inmediatamente la ventaja de dividir el área en pequeñas zonas, puesto que el área del bloque figura elevada al cuadrado. Si el bloque se divide en cuadrantes, la expresión sería

$$P = 4 \frac{\sigma lk^2}{32} \left(\frac{a}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} \frac{\sigma lk^2}{32} a^4$$

O sea la cuarta parte de la disipación en el bloque sin dividir. Como en este caso es precisamente en los planos perpendiculares a las líneas de B donde interesa interrumpir la masa conductora. Por ello los núcleos de los transformadores se construyen con muchas láminas aisladas unas de otras. El flujo magnético circula a lo largo de las láminas, sin embargo, las corrientes inducidas debidas a la $d\Phi/dt$ serán mínimas en la dirección perpendicular a las láminas debido a su pequeño espesor.

En este ejemplo simplificado hemos supuesto que la resistividad del conductor es lo bastante grande como para que las corrientes inducidas en sus diferentes partes no alteren sensiblemente el valor de dB/dt en el material. Esto es admisible en muchos casos. Sin embargo, a frecuencias elevadas las corrientes de Foucault reducen efectivamente el valor de dB/dt en el material hasta el punto de limitar la penetración de las ondas electromagnéticas en el conductor. Esto es lo que da lugar al efecto *pelicular* en los conductores. Por

ejemplo, las corrientes de alta frecuencia en un hilo, se limitan a circular por una capa superficial del hilo debido a las corrientes de Foucault, capa que se caracteriza por la llamada *profundidad de penetración*. Este efecto es también el que hace a los metales opacos a la luz, que no es sino una onda electromagnética.

PROBLEMAS

- 8.1 Una varilla metálica de longitud L se mueve con velocidad v en dirección perpendicular a su eje y a un campo de inducción magnética B constante, como se indica en la Fig. P 8.1a.

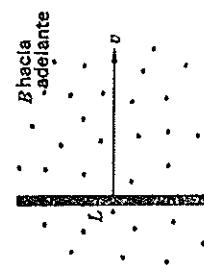


Fig. P 8.1a

- a) Escribir la expresión de la fuerza sobre las cargas de la varilla como consecuencia del movimiento de la misma.

- b) ¿Cuál será la magnitud y dirección del campo eléctrico debido a la separación de cargas que el movimiento origina?

- c) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla?

- d) Si la varilla se mueve sobre un marco estacionario como se indica en la Fig. P 8.1b, ¿qué corriente pasará por éste si la resistencia total es R ?
e) Calcular la fem inducida por el movimiento según la ley de Faraday y comparar con el resultado de (c).

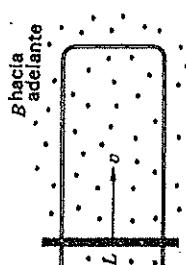


Fig. P 8.1b

- 8.2 Una bobina de n espiras y área A gira con frecuencia ω alrededor de uno de sus diámetros que es perpendicular a un campo magnético de inducción B . Calcular la fem máxima inducida en la bobina.

- 8.3 Dos bobinas idénticas están conectadas en serie y a una distancia tal que la mitad del flujo de una de ellas atraviesa también la otra. Si la autoinducción

de las bobinas es L henrys, calcular la autoinducción del par de bobinas suponiendo que las bobinas están conectadas de modo que se sumen los flujos.

8.4 Una pequeña espira de radio a es coaxial con otra gran espira de radio b , y está separada de ella por una distancia l . Suponiendo que $b \gg a$, calcúlese la inducción mutua entre las espiras. (Nota: El problema es fácil o difícil según qué espira se escoga para considerar que produce el campo magnético.)

8.5 Una varilla conductora de longitud L gira con velocidad angular ω alrededor de uno de sus extremos en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme de inducción B . Hallar la fem inducida en la varilla, primero directamente y después aplicando la ley de Faraday.

8.6 Indíquese una situación en la que la fem en una espira conductora puede calcularse por medio de la ley de inducción de Faraday, pero no por la expresión de la fem debida al movimiento.

8.7 Se da a un conductor la forma indicada en la Fig. P 8.7, siendo R el radio de la zona semicircular. Si se le hace girar en un campo magnético uniforme B con una frecuencia f , ¿cuál es la amplitud y la frecuencia de la tensión inducida, y de la intensidad que circula cuando la resistencia interna del aparato de medida es de 1000 ohms y el resto del circuito tiene resistencia despreciable?

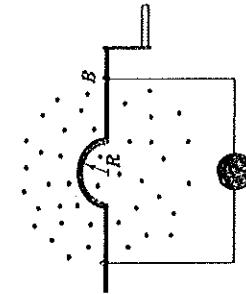


Fig. P 8.7

8.10 La acción aceleradora en el baterón depende de la fem inducida al variar un campo magnético. Los electrones se mueven en el vacío según circunferencias en el seno de un campo magnético que aumenta con el tiempo. El radio de curvatura de las órbitas electrónicas depende del campo B_R , en la órbita y perpendicular a su plano. La fuerza aceleradora depende de la variación $d\Phi/dt$ a través del área encerrada por la órbita.

a) Demuéstrese que para que el radio de la órbita permanezca constante mientras los electrones son acelerados, el campo medio \bar{B} en el interior de la órbita debe ser $2B_R$.

b) Expresar el valor de la energía ganada por ciclo en función de dB/dt .

8.11 El rectángulo indicado en la Fig. P 8.11 se mueve alejándose con una velocidad v del conductor rectilíneo indefinido que lleva la corriente i . Ambos se mantienen en un mismo plano. Calcular la fem inducida en el rectángulo. ¿Cuál es la inducción mutua entre los dos circuitos en función del tiempo si en el instante $t = 0$ la distancia del lado más próximo del rectángulo al conductor indefinido es l^0 ?



Fig. P 8.11

8.12 Se construye una espira conectando los extremos de dos hilos paralelos de radio a cuyos ejes se encuentran a una distancia d . Despreciando la influencia de las regiones extremas que se suponen muy alejadas, demostrar que la autoinducción de una longitud l de los hilos paralelos es

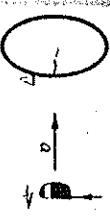
$$L = \frac{\mu_0 d}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

8.13 La autoinducción de una bobina puede calcularse igualando la energía almacenada en el campo magnético de la bobina al trabajo necesario para establecer la corriente en la misma partiendo de $i = 0$. Hacer este cálculo para el caso sencillo de un solenoide toroidal de longitud l , sección transversal A y N espiras.

8.14 ¿Cómo puede conseguirse 50 voltios entre los terminales de una autoinducción de 2 henrys y resistencia despreciable?

8.15 La autoinducción de una bobina de 100 espiras muy próximas es 10 mh. Calcular el flujo magnético total a través de la bobina cuando la corriente es de 0,5 ma.

8.16 Calcular la energía magnética almacenada en el interior de un conductor de 1 mm de radio y 1 m de longitud por el que circula una corriente de 10 amp. La densidad de corriente es uniforme.



8.17 En una bobina de 200 espiras muy próximas una corriente de 10 amp produce un flujo total de 10 weber. Calcular la energía almacenada en el campo magnético.

- 8.18 Entre las piezas polares de sección cuadrada de un imán existe un entrehierro muy pequeño en el que el campo magnético B es horizontal como se indica en la Fig. P 8.18. Una espira rectangular cuyos lados tienen una longitud l se deja caer de modo que su parte superior permanece dentro del campo. La espira tiene una resistencia total R y un peso mg . Calcular la velocidad límite de la espira mientras está entre los polos del imán. ¿Cómo se modificaría esta velocidad si la sección transversal del conductor que forma la espira se hiciera el doble?

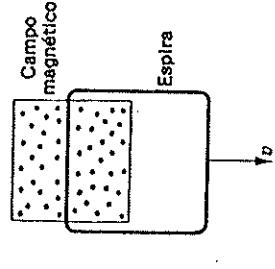


Fig. P 8.18

- 8.19 Un campo magnético uniforme B cambia su intensidad con velocidad constante dB/dt . Con una masa dada de cobre m se forma un hilo de radio r y con él una espira circular de radio R . Demostrar que la corriente inducida en la espira no depende del tamaño del hilo o la espira y viene dada por

$$i = \frac{m}{4\pi\rho\delta} \frac{dB}{dt}$$

siendo ρ la resistividad y δ la densidad del cobre.

NUEVE

El Magnetismo en los Medios Variables



Fig. 9.18

9.1 Introducción

En este capítulo veremos las modificaciones que deben introducirse en la descripción del magnetismo con objeto de tener en cuenta los fenómenos magnéticos en los medios materiales. Después de una breve discusión preliminar sobre el origen del comportamiento magnético de la materia, deduciremos algunas relaciones generales entre los parámetros magnéticos más usuales. A continuación, discutiremos con mayor detalle las contribuciones atómicas al magnetismo, que dan cuenta de los tres tipos más importantes de comportamiento magnético: *paramagnetismo*, *diamagnetismo* y *ferromagnetismo*. Posteriormente, estudiaremos algunos de los problemas referentes a la *magnetización* de un cuerpo situado en un campo magnético uniforme y discutiremos brevemente los diferentes modos de considerar los cuerpos magnetizados en forma permanente. Finalmente, describiremos brevemente los *circuitos magnéticos*, de especial importancia en la construcción de electroimanes.

9.2 Contribución de la materia al magnetismo

Para comenzar esta discusión vamos a referirnos a un dispositivo experimental muy sencillo que puede emplearse para medir la contribución de la materia al magnetismo. En la Fig. 9.1 se muestra este

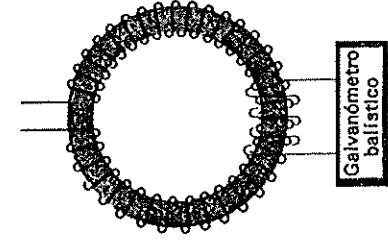


Fig. 9.1 Solenoide toroidal con un devanado secundario para la medida del flujo.

dispositivo, constituido por un solenoide toroidal con un devanado adicional o secundario que puede conectarse a un galvanómetro balístico. Cuando el espacio interior del solenoide está vacío, puede emplearse el galvanómetro balístico para medir el flujo total $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ que atraviesa la bobina cuando pasa una corriente i , determinando la desviación del galvanómetro cuando se interrumpe bruscamente la corriente. Cuando se repite el experimento llenando el interior del solenoide con una sustancia determinada, en general, se obtiene una desviación diferente del galvanómetro para la misma corriente. Esta contribución adicional al flujo total es la que vamos a describir. En el vacío la inducción magnética en el solenoide está dada por

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{N^i}{L} = \mu_0 i^* \quad \text{weberios/m}^2 \quad (6.10)$$

siendo i^* la densidad de corriente solenoidal definida en la Sec. 6.3. Este valor de \mathbf{B} se obtuvo integrando

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i^* dI \times \mathbf{f}}{4\pi r^2} \quad (6.2)$$

para la geometría del solenoide, o bien, aplicando la ley de Ampere,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

al camino medio del solenoide toroidal.

Los experimentos con el solenoide relleno de alguna sustancia demuestran que, en general, \mathbf{B} resulta modificado por la presencia de la misma. Con una sustancia en el solenoide debemos añadir un nuevo término al flujo $\Phi = BA$. Este término extra hace aumentar \mathbf{B} (en algunos casos, lo hace disminuir). Por tanto, escribiremos la Ec. (6.1) en la forma

$$(9.1) \quad \mathbf{B} = \mu_0 (j^* + j_{mag}^*)$$

donde $j^* = Ni/L$ es la densidad de corriente solenoidal en la bobina y j_{mag}^* representa una densidad de corriente solenoidal *equivalente* que describe la contribución de la materia al campo magnético.

Es posible demostrar que, si la materia magnetizada está constituida por un cierto número de dipolos magnéticos alineados en la dirección del campo magnético externo, estos dipolos magnéticos darían lugar a un campo magnético del mismo tipo del que se obtendría con esta densidad de corriente solenoidal equivalente. Demostraremos esta relación después de describir cualitativamente la estructura de los materiales magnéticos.

Los fenómenos magnéticos en las sustancias magnéticas son debidos a la existencia de dipolos magnéticos atómicos en el material. Estos dipolos magnéticos son el resultado: del movimiento de los electrones en las órbitas atómicas, que equivalen a una espira, del «spin» electrónico (momento magnético intrínseco del electrón, que puede describirse como un movimiento de giro equivalente del electrón sobre sí mismo), y de los momentos magnéticos de los núcleos atómicos. El efecto del campo exterior es una tendencia a alinear los dipolos magnéticos según su misma dirección. Podemos caracterizar el grado de alineación por el momento magnético total por unidad de volumen del material, siendo este momento magnético total la suma vectorial de los momentos individuales. Esta magnitud se denomina magnetización M del material, y juega en magnetismo un papel equivalente al de la polarización P en los dieléctricos.

Con el fin de demostrar la conexión entre M y la densidad de corriente solenoidal equivalente j_{mag}^* , vamos a considerar un pequeño cubo (véase Fig. 9.2) que contiene un cierto número de dipolos magnéticos atómicos alineados en la dirección del campo magnético exterior. Como no todos los dipolos existentes estarán dirigidos en la dirección del campo, es más correcto decir que los que lo están representan la magnetización *neta* del material. Como hemos visto, el momento magnético es una magnitud vectorial y el campo de cada dipolo estará dado por la Ec. (6.24). Vamos a calcular el campo de inducción magnética en puntos muy alejados del cubos tales como el S . Podemos razonar que el campo en S podría estar, igualmente bien, producido por una corriente i_{mag} que circulara por

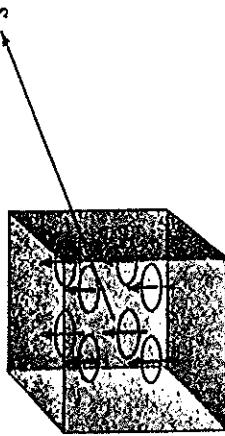


Fig. 9.2 Dipolos alineados que representan la magnetización de un pequeño cubo. Estos dipolos dan lugar a un campo magnético en los puntos exteriores tales como el S.

las caras laterales del cubo, como se indica en la Fig. 9.3. Esta corriente actuaría como un dipolo, exactamente como lo hacen los dipolos magnético-atómicos individuales: por tanto, en un punto S alejado del cubo, el campo sería el mismo: bien como consecuencia de la existencia de dipolos atómicos individuales, bien por la existencia también de la corriente que rodearía al cubo. El momento magnético del cubo es, por tanto,

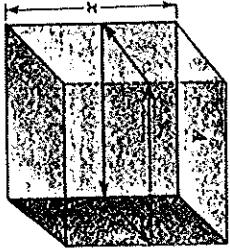


Fig. 9.3 El efecto de los dipolos magnéticos en los puntos exteriores puede simularse mediante una corriente equivalente i_{mag} que circule alrededor de cada elemento de volumen.

el momento magnético del cubo es, por tanto,

$$p_m = i_{mag}A \quad (9.2)$$

siendo A el área de la espira. Calculemos ahora la magnetización M , o momento magnético por unidad de volumen del cubo, será

$$M = \frac{i_{mag}A}{xA} = \frac{i_{mag}}{x} = j^*_{mag} \text{ amperios/m}$$

donde j^*_{mag} es la densidad de corriente solenoidal equivalente que circule alrededor del cubo. El momento magnético de esta corriente es igual a la suma de los momentos magnéticos de los dipolos atómicos individuales.

Vamos ahora a extender este razonamiento a un cilindro de material magnético. Para evitar la influencia de los extremos, consideraremos un toroide introducido en el interior del solenoide toroidal de la Fig. 9.1. Examinemos una rodaja de este toroide, tal como la que se muestra en la Fig. 9.4, y consideremos que esta rodaja está constituida por muchos cubos idénticos al descrito anteriormente. Como en aquella ocasión, sustituiremos los efectos magnéticos de los dipolos individuales en cada cubo, por una corriente solenoidal que circule con densidad j^*_{mag} . Los efectos de todas las corrientes

circulantes se compensan en el interior del material, ya que las corrientes correspondientes a las superficies de dos cubos vecinos son iguales y opuestas. Solamente restan las corrientes circulantes alrededor de la superficie exterior de la rodaja. El momento magnético por unidad de volumen en el material es el de los cubos individuales, es decir, $M = j^*_{mag}$. Pero ahora podemos considerar j^*_{mag} como una densidad de corriente equivalente que circula por la superficie exterior del material. Esta es la llamada corriente superficial de Ampere, que puede emplearse para describir los efectos magnéticos de los dipolos magnéticos atómicos reales. Al igual que el campo magnético en el interior de un solenoide toroidal es de intensidad constante, las corrientes de Ampere dan lugar a un campo magnético uniforme en su interior. Este campo uniforme corresponde al valor medio del campo en el interior del material magnético. Las corrientes de Ampere en los materiales magnéticos corresponden a las cargas superficiales inducidas en los materiales dieléctricos. De este modo, hemos remplazado las corrientes atómicas que producen los fenómenos magnéticos en la materia, por una corriente superficial ficticia que es mucho más fácil de manejar matemáticamente.

La configuración geométrica que hemos escogido para esta discusión es muy especial. En efecto, el solenoide toroidal es un cilindro alargado sin extremos. Si hubiéramos colocado una muestra más pequeña de la sustancia con límites finitos dentro de la bobina, el problema hubiera resultado mucho más complicado, puesto que, para satisfacer las condiciones en las superficies límite de la muestra, el campo original en el vacío hubiera quedado seriamente modificado. Demostraríremos en la Sec. 9.12 que siempre que la magnetización M en un medio tiene una componente perpendicular a la superficie del mismo, el campo original en el exterior del medio queda modificado por su presencia. En nuestro caso especial, la contribución de la materia es un campo que solo existe en su interior, y que

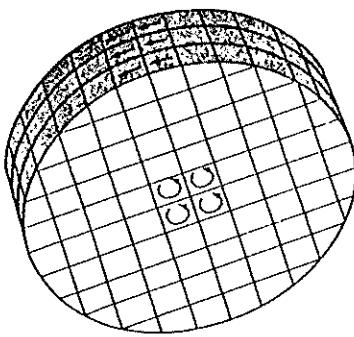


Fig. 9.4 Las corrientes circulatorias que dan cuenta de las propiedades magnéticas de la materia pueden remplazarse por una densidad de corriente solenoidal equivalente que se denomina corriente superficial de Ampere.

es, en todos sus puntos, paralelo al campo original en el vacío del solenoide. El problema general de calcular el campo en el interior de una muestra material de forma cualquiera es más difícil, y únicamente estudiaremos más adelante algunos casos sencillos.

Si la magnetización del medio no es uniforme aparece una complicación adicional, las corrientes individuales no se compensan completamente y debemos añadir a la densidad de corriente superficial un término que represente una distribución de volumen de corrientes. De momento, continuaremos considerando el caso mucho más sencillo de una muestra toroidal uniformemente magnetizada. En secciones posteriores veremos que ciertos tipos de dipolos tienden a ser alineados por término medio en la dirección del campo (paramagnetismo), mientras que existen casos en los que se inducen dipolos alineados contra el campo (diamagnetismo).

9.3 Intensidad del campo magnético H

En la Ec. (9.1) hemos visto que la inducción magnética en la muestra tiene dos componentes, uno la corriente en la bobina—una influencia exterior—y el otro la magnetización de la muestra, que vimos que puede calcularse a partir de una densidad de corriente equivalente. El término que depende de los efectos exteriores es de considerable importancia, y le denominaremos intensidad del campo magnético H . En el caso del solenoide

$$H = \frac{N_i}{L} = j^* \quad \text{amperios/n.} \quad (9.3)$$

Si el solenoide está vacío, no hay contribución de magnetización alguna, y será

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

esto es, \mathbf{B} y \mathbf{H} difieren únicamente en un factor constante μ_0 . \mathbf{H} representa un campo vectorial bastante similar al campo de inducción \mathbf{B} , pero que difiere de él en que ignora los efectos de la materia, del mismo modo que \mathbf{D} en electrostática es independiente de la presencia de un dieléctrico. Más adelante, en la Sec. 9.12, veremos que para muestras no toroidales, \mathbf{H} resulta afectada por las superficies límite de los medios magnéticos. Por tanto, nuestra definición actual de \mathbf{H} , $= N_i L$ es incompleta. La importancia del campo \mathbf{H} reside en parte en que resulta conveniente para resolver problemas en los que aparecen superficies límite. Igualmente importante es el hecho de que la magnetización inducida en la materia depende del valor de \mathbf{H} . Frecuentemente, la magnetización inducida \mathbf{M} es proporcional a \mathbf{H} , y en tal caso podemos describir las propiedades del material

por medio de su susceptibilidad magnética χ_m o su permeabilidad magnética μ . En la próxima sección definiremos estos términos.

9.4 Parámetros magnéticos de la materia

Podemos ahora volver a escribir, para el caso especial de una muestra toroidal, la Ec. (9.1) en la forma

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (9.5)$$

En ella, el primer término es la contribución de la corriente en el solenoide, y el segundo, debido a la magnetización de la muestra, es el que puede ser representado por la corriente solenooidal equivalente. En general, esta ecuación es válida, pero para muestras de forma distinta a la toroidal, el cálculo de \mathbf{H} resulta mucho más complicado. Discutiremos este problema en la Sec. 9.12.

Para las numerosas sustancias en las que la magnetización es proporcional a \mathbf{H} , podemos definir la susceptibilidad magnética del medio, χ_m , mediante

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (9.6)$$

Así definida, χ_m es un número puro, puesto que \mathbf{M} y \mathbf{H} tienen las mismas unidades. Se deduce, pues, de la Ec. (9.5) que

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}, \quad (9.7)$$

y si escribimos

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (9.8)$$

siendo μ la permeabilidad magnética, resulta

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad 0 \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}^*. \quad (9.9)$$

Resulta útil definir también la permeabilidad relativa μ/μ_0 . Esta permeabilidad relativa tiene en el sistema mks el mismo valor numérico que la permeabilidad en el sistema electromagnético cgs.

Podemos, por tanto, clasificar las sustancias magnéticas de acuerdo con su susceptibilidad χ_m . En las sustancias paramagnéticas, χ_m es positiva y mucho menor que 1. En las sustancias diamagnéticas, χ_m es negativa y también pequeña comparada con 1. Los materiales ferromagnéticos se caracterizan porque χ_m es positiva y muy grande. Sin embargo, en las sustancias ferromagnéticas \mathbf{M} no es exactamente proporcional a \mathbf{H} , de modo que χ_m no es una cons-

tante, salvo en un pequeño intervalo de valores de H . Más adelante discutiremos estos tres casos con mayor detalle.

También podemos clasificar los materiales magnéticos haciendo uso de la permeabilidad magnética μ . Según su definición, resultará para las distintas sustancias:

Diamagnéticas: $\mu < \mu_0$

Paramagnéticas: $\mu > \mu_0$

Ferromagnéticas: $\mu \gg \mu_0$

9.5 Características de los campos B y H

Volvamos a nuestras anteriores consideraciones sobre los dos campos vectoriales magnéticos: B , la inducción magnética, y H , la intensidad magnética. En las Secs. 6.2 y 6.4, habíamos encontrado anteriormente que en el vacío las líneas de B son continuas y cerradas sobre sí mismas. Esto continuará siendo cierto en presencia de medios materiales, puesto que como hemos visto los efectos magnéticos de una sustancia uniformemente magnetizada, pueden ser simulados mediante una densidad de corriente equivalente que circule alrededor de la muestra magnética. Por tanto, podemos imaginar sustituida la materia por bobinas de forma adecuada, y recorridas por la corriente apropiada, y con ello encontrarnos de nuevo en el caso del vacío. Así, pues, en todos los casos la integral de superficie de B extendida a una superficie que encierre completamente un cierto volumen es cero: aun en presencia de materia, tenemos

$$\int_S B \cdot dS = 0 \quad (9.10)$$

Esto es, el número de líneas de fuerza que salen de una superficie cerrada S es el mismo que el número de líneas que entran en ella (puesto que todas las líneas son continuas y no tienen ni principio ni fin). Esto no es sino el teorema de Gauss aplicado a B , y es exactamente lo mismo que se obtiene en electrostática para E en una región en la que no existan cargas que puedan actuar como fuentes o sumideros de las líneas de E . Para B , sin embargo, en ningún caso hay fuentes o sumideros.

Otra propiedad de las líneas de B se refiere a la integral curvilinear extendida a una trayectoria cerrada. En la Sec. 6.4 demostramos que

$$\oint B \cdot dI = \mu_0 i \quad (6.14)$$

siendo i la corriente que atravesaba la trayectoria cerrada escogida. Ahora que estamos incluyendo los efectos de los medios magnéticos, deberemos reescribir esta expresión en la forma

$$\oint B \cdot dI = \mu_0(i_o + i_{mag}) = \mu_0 i_{total} \quad (9.11)$$

siendo i_o la corriente real, e i_{mag} la corriente ficticia de Ampere que describe el comportamiento magnético del medio.

Esta última ecuación puede convertirse en otra más útil si hacemos aparecer la integral curvilinea de H . Para conseguirlo emplearemos en primer lugar la relación general (9.3), $B = \mu_0(H + M)$, para expresar B en función de H y M . Haciendo esta sustitución, tenemos

$$\frac{1}{\mu_0} \oint B \cdot dI = \oint H \cdot dI + \oint M \cdot dI = i_{total} \quad (9.12)$$

Si ahora podemos calcular el término que contiene M , despejaremos $\oint H \cdot dI$. Pero como ya sabemos que $M = j_{mag}$, vemos inmediatamente que $\oint M \cdot dI = i_{mag}$.

Vamos a aclarar este punto con ayuda de la Fig. 9.5. En ella se ha dibujado una sección de la muestra toroidal, sobre la que se ha



Fig. 9.5 Cálculo de la integral curvilinea de la magnetización en una trayectoria cerrada.

indicado la corriente de Ampere superficial. Esta corriente remplaza el efecto de los dipolos magnéticos orientados existentes en la muestra. La magnetización es producida por la corriente verdadera que circula por la bobina toroidal que rodea la muestra y no se ha indicado en la figura. Calculemos el valor de la integral curvilinea $\oint M \cdot dI$ a lo largo de la trayectoria cerrada $abcd$. A lo largo de ab , M es paralela a la trayectoria e igual a b vale $j_{mag}x$. La integral vale cero en el resto de la trayectoria, puesto que M es perpendicular a bc y da , y es cero a lo largo de cd . Como $j_{mag}x$ es la corriente de Ampere total i_{mag} que atraviesa la trayectoria, tenemos

$$\oint M \cdot dI = i_{mag} \quad (9.13)$$

Si sustituimos este resultado en la Ec. (9.12), teniendo en cuenta que $i_{\text{total}} = i_o + i_{\text{mag}}$, encontramos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_o \quad (9.13)$$

que es una propiedad fundamental de \mathbf{H} , y es la análoga de la Ec. (6.15), $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$, que obtuvimos en el caso del vacío. Las Ecs. (9.10) y (9.13) son respectivamente las que expresan propiedades básicas de \mathbf{B} y \mathbf{H} , siendo válidas en todas condiciones. En cualquier región del espacio en la que no existan conductores que lleven corrientes (y no haya cargas en movimiento), i_o es cero, y la Ec. (9.13) se reduce a

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (9.14)$$

9.6 Condiciones en los límites para \mathbf{B} y \mathbf{H}

Vamos a emplear ahora estas relaciones generales para demostrar cómo se comportan \mathbf{B} y \mathbf{H} en la superficie límite entre dos materiales magnéticos. El procedimiento que seguiremos recordará al empleado para obtener las condiciones para E y D en la superficie entre dos dielectrinos, puesto que las bases matemáticas son idénticas.

En el caso de \mathbf{B} , comenzemos por imaginar una superficie gaussiana cilíndrica, como se indica en la Fig. 9.6, dibujada de modo

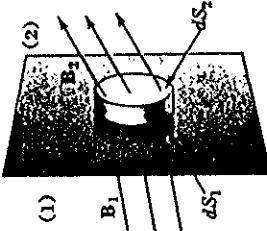


Fig. 9.6. Superficie de Gauss para obtener las condiciones que debe cumplir \mathbf{B} en la superficie límite entre dos medios magnéticos diferentes.

que tenga una de sus bases en la región 1 y la otra en la región 2. Las dos regiones tienen propiedades magnéticas diferentes; por ejemplo, la región 1 puede ser el vacío, cuando la región 2 sea un material magnético. Haremos tender a cero la altura del cilindro, de modo que las líneas de \mathbf{B} que salen por las caras laterales del

cilindro pueden despreciarse. Entonces, según la Ec. (9.10), podemos escribir:

$$\int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = - \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 \quad (9.15)$$

Esto significa que las componentes normales de \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 son iguales, o sea

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (9.16)$$

Estudiemos a continuación el comportamiento de \mathbf{H} en esta superficie límite tomando la integral curvilinea en la forma indicada en la Fig. 9.7. Si admitimos que el material magnético no está rodeado

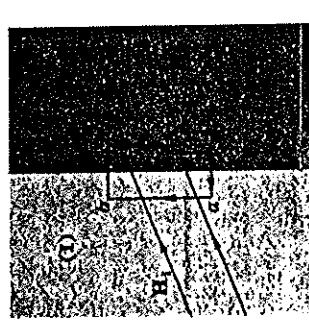


Fig. 9.7. Trayectoria de integración para obtener las condiciones que debe cumplir \mathbf{H} en la superficie límite entre dos medios magnéticos diferentes.

do por ninguna bobina por la que pase corriente, podremos emplear la Ec. (9.14) para demostrar que

$$\int_a^b \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = - \int_c^d \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (9.17)$$

Esto significa que las componentes tangenciales de \mathbf{H} son iguales en los dos lados de la superficie, es decir,

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (9.18)$$

Hasta aquí no hemos hecho hipótesis alguna sobre cómo están relacionados \mathbf{B} y \mathbf{H} . Si estamos manejando materiales en los que $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, podemos determinar el comportamiento de \mathbf{B} y \mathbf{H} en la superficie límite como acabamos de indicar. Como estas condiciones son las mismas que encontramos para \mathbf{D} y \mathbf{E} en el caso de dos dielectrinos, tomando directamente los resultados allí obtenidos, escribiremos

$$\frac{\operatorname{tg} \Phi_1}{\operatorname{tg} \Phi_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (9.19)$$

para determinar las direcciones de \mathbf{B} y \mathbf{H} en los dos lados de la superficie (véase la Sec. 5.6 para el caso electrostático).

9.7 Energía almacenada en los medios magnetizados

En la Sec. 8.11 hemos encontrado ya que la densidad de energía en una región del vacío en la que existe un campo de inducción magnética \mathbf{B} es

$$\frac{U}{\text{vol}} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} \quad \text{julios/m}^3 \quad (8.32)$$

Argumentos idénticos, empleando el solenoide toroidal que contiene un medio magnético, nos van a permitir el cálculo de la densidad de energía en los medios magnetizados. Necesitamos únicamente remplazar la ecuación correspondiente al vacío

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_v \quad (6.12)$$

por

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{J}_v \quad (9.20)$$

para obtener el resultado deseado. Se deja como problema para el lector el demostrar por este camino que la densidad de energía en el medio viene dada por

$$\frac{U}{\text{vol}} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \quad (9.21)$$

En la Sec. 5.8 vimos cómo la energía almacenada en el campo eléctrico, podía emplearse para calcular las fuerzas que aparecen sobre una lámina dieeléctrica situada entre las placas de un condensador. En el caso de los materiales magnéticos existen problemas semejantes. En el caso dielectrónico, si el sistema está aislado, el trabajo mecánico realizado por el campo eléctrico al desplazar el dielectrónico es obtenido a costa de la energía electrostática almacenada. Sin embargo, en el problema que vimos, entre las placas del condensador se conectaba una batería para mantener constante la tensión aplicada. Demostrábamos que el trabajo suministrado por la batería durante un desplazamiento del dielectrónico era el doble del trabajo mecánico realizado por las fuerzas eléctricas. Como resulta, en lugar de hallar una *disminución* de la energía almacenada en la cantidad $-dU$, encontrábamos un *aumento*, de valor $-dU + 2dU = dU$. La relación entre trabajo y energía resultaba ser $F dx = dU$ en lugar de $F dx = -dU$, representando $F dx$ un trabajo positivo realizado por el campo. Este resultado es válido para cualquier sistema lineal (para el cual la susceptibilidad es constante).

En el caso de un sistema magnético, tal como los de las Figs. P 9.2 y P 9.9, se presentan los mismos efectos. El movimiento del material magnetizado determina que realice trabajo la fuente exterior que ha suministrado la energía almacenada en el campo magnético, y para sistemas lineales el trabajo realizado por la fuente externa de energía es el doble de la pérdida de energía magnética almacenada; por tanto, en los problemas citados deberá tomarse $F dx = dU$.

9.8 Paramagnetismo

La característica esencial de los materiales paramagnéticos es que presentan una susceptibilidad magnética positiva, pero pequeña ($\chi_m < 1$), que proviene de la existencia de dipolos magnéticos permanentes que son capaces de orientarse bajo la influencia de un campo externo. Los dipolos se ejercen mutuamente fuerzas muy pequeñas; por tanto, a las temperaturas ordinarias, las vibraciones térmicas en el sólido aseguran una orientación al azar de los dipolos, con lo que la magnetización media es cero. Cuanto mayor es el campo magnético aplicado, los dipolos tienden a ser alineados más exactamente, y mayor es el momento magnético neto por unidad de volumen, o sea la magnetización M .

Analicemos la susceptibilidad magnética de una sustancia paramagnética, considerando que existen N átomos por unidad de volumen, cada uno de los cuales presenta un momento magnético dipolar p_m , que puede ser orientado por el campo aplicado. Supongamos, como es frecuentemente el caso, que al aplicar el campo, existen únicamente dos posibilidades de orientación—o los dipolos están alineados paralelamente al campo o están alineados antiparalelamente.¹ La magnetización, a una temperatura y un campo magnético dados, depende del número de dipolos magnéticos alineados paralelamente al campo en exceso sobre el número de los que están alineados antiparalelamente. Este exceso de dipolos alineados paralelamente viene dado por una fracción del total

$$f = \frac{p_m B}{3kT} \quad (9.22)$$

donde k es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. Sin demostrar este resultado, haremos notar que el numerador está relacionado con la energía de orientación de los dipolos en el campo

¹ Uno de los resultados de la mecánica cuántica es que los dipolos magnéticos en un campo están sometidos a la restricción de que solo pueden adoptar ciertas posiciones medias bien determinadas con respecto a la dirección del campo (véase Sec. 14.7). Si estuvieran permitidas todas las orientaciones se obtendría el mismo resultado salvo un factor numérico.

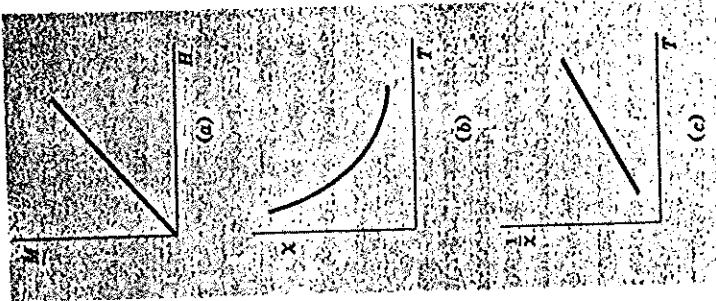


Fig. 9.8 Susceptibilidad paramagnética.
(a) La pendiente de la curva de la magnetización M en función del campo aplicado H da la susceptibilidad $\chi = M/H$. (b) La susceptibilidad χ como función de la temperatura. (c) $1/\chi$ en función de T representa una línea recta.

externo, y que el denominador está relacionado con la energía térmica de la sustancia. Así, cuanto mayor sea la temperatura las vibraciones térmicas dificultan en mayor grado la orientación y más pequeña es la fracción en exceso de dipolos alineados paralelamente. A partir de esta última ecuación la susceptibilidad se obtiene como sigue. La magnetización valdrá:¹

$$M = N p_m f = \frac{N p_m^2 \mu_0 H}{3kT} \quad (9.23)$$

Por tanto,

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{N \mu_0 p_m^2}{3kT}$$

Esta forma de dependencia de la susceptibilidad de las sustancias paramagnéticas con T^{-1} es conocida como ley de Curie.

En la Fig. 9.8c se presenta gráficamente la variación de la magnetización M con el campo magnetizante H . La pendiente de esta curva es la susceptibilidad χ_m . La gráfica de χ_m frente a T en la Fig. 9.8b muestra cómo disminuye la susceptibilidad al aumentar la temperatura, de acuerdo con la Ec. (9.23). En la práctica, se suele representar el valor reciproco $1/\chi_m$ frente a la temperatura, con lo que se obtiene una línea recta, como se indica en la Fig. 9.8c.

Vamos ahora a investigar la naturaleza de p_m , el momento dipolar atómico. Comenzando por considerar átomos o iones libres, evitaremos el empleo de la mecánica cuántica aceptando algunos hechos sencillos sobre la estructura atómica que resultan de su naturaleza mecano-cuántica. Consideraciones puramente clásicas nos darán entonces la respuesta a nuestras preguntas. Así, pues, partiremos de un modelo atómico en el que los electrones giran en órbita alrededor de un núcleo mucho más pesado. Estos electrones actúan como pequeñas corrientes circulares y, por tanto, presentan momentos magnéticos $p_m = Ai$, siendo A el área de la órbita. Empecemos por calcular p_m para una órbita simple, tal como la de un solo electrón girando alrededor del núcleo en un átomo libre.

El área de una órbita circular es $A = \pi r^2$, y la intensidad de la corriente debida a un electrón de carga e es el número de veces que el electrón pasa por cualquier punto de la órbita por segundo multiplicado por e , es decir, $i = ev/2\pi r$, siendo v la frecuencia de giro del electrón y v su velocidad. Determinaremos v en forma clásica, en función del radio de la órbita, igualando la fuerza de Coulomb entre el electrón y el núcleo en un átomo libre.

¹ En este caso se ha sustituido el campo magnético B por $\mu_0 H$. Esto equivale a despreciar el efecto de M en la ecuación $B = \mu_0(H + M)$, lo cual está justificado dado el pequeño valor de M en las sustancias paramagnéticas.

Esta forma de dependencia de la susceptibilidad de las sustancias que mantiene el electrón en órbita. Por tanto, escribiremos

$$ma = \frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 mr^2} Ze^2 \quad (9.24)$$

para obtener

$$v = e \left(\frac{Z}{4\pi\epsilon_0 mr} \right)^{1/2}$$

Sustituyendo resulta para el momento,

$$p_m = Ai = \frac{e^2}{2} \left(\frac{Zr}{4\pi\epsilon_0 m} \right)^{1/2} \quad (9.25)$$

Si el radio atómico es de 10^{-10} m, resulta $p_m \sim 10^{-23}$ amp·m².

La mayor parte de los electrones que giran alrededor del núcleo no tienen contribución al momento magnético permanente. Esto es consecuencia de la tendencia de los electrones a aparearse de tal modo que dan lugar a momentos iguales y opuestos que se compensan.

san. Desde el punto de vista clásico esto correspondería a dos electrones que giraran en sentidos opuestos en la misma órbita. Sin embargo, en muchos átomos e iones existe uno (o más) electrones cuyo momento no queda anulado por el de otro.

Otra fuente de momento magnético, además de la contribución del movimiento orbital que acabamos de describir, es el spin del electrón. En efecto, el electrón se comporta como si estuviera girando alrededor de sí mismo. Esto equivale también a una corriente cerrada y, por consiguiente, a un momento magnético. En los átomos e iones es también cierto que los electrones tienen una fuerza tendencia a aparearse disponiéndose de modo que sus spines son opuestos, compensándose como consecuencia sus momentos magnéticos. Sin embargo, todos los átomos e iones que tienen un número impar de electrones, así como en otros casos de compensación completa, presentarán magnetismo de spin. El momento magnético debido al spin electrónico es del mismo orden de magnitud que el debido a su movimiento orbital.

En los sólidos el momento magnético debido al spin del electrón es el principal origen de las propiedades magnéticas. Esto resulta del efecto que los campos eléctricos locales que existen en los sólidos tienen sobre el movimiento orbital de los electrones. Estos campos tienden a que el plano de la órbita realice una precesión rápida de modo que el valor medio del momento magnético en cualquier dirección es cero. Por tanto, normalmente el valor del momento magnético de un átomo o ion libres no corresponde al valor en los sólidos o líquidos.

Una contribución adicional, aunque mucho más pequeña, a la magnetización de los medios materiales procede del hecho de que algunos núcleos tienen momento magnético. Puede pensarse que esto es debido al movimiento de cargas en el interior del núcleo. La magnitud de los momentos nucleares es unas 10^{-3} veces la de los momentos electrónicos.

Sustituyendo valores en la Ec. (9.23), encontramos que los materiales paramagnéticos a la temperatura ambiente tienen como máximo susceptibilidades del orden de 10^{-3} . Por tanto, los efectos magnéticos en estos materiales son muy débiles, y el valor de μ difiere de μ_0 en menos del 1 por 100. Aun así, es posible medir estos efectos con considerable precisión. Un método es emplear el dispositivo indicado en la Fig. 9.1, aunque puede obtenerse un resultado más preciso midiendo la fuerza que aparece en un campo magnético no-uniforme sobre una muestra paramagnética.

9.9 Diamagnetismo

El diamagnetismo resulta de los momentos magnéticos negativos inducidos en todas las sustancias por aplicación de un campo magnético externo. Está caracterizado por una susceptibilidad negativa y porque es independiente de la temperatura. Como es pequeño comparado con la magnetización paramagnética (y ferromagnética), puede observarse de modo directo únicamente en las sustancias que no presentan estos otros efectos. Esta susceptibilidad negativa pue- de interpretarse sobre la base de la inducción de Faraday que tiene lugar en el movimiento orbital de los electrones en los átomos e iones.

Podemos entender este efecto y su signo negativo razonando sobre un electrón en una órbita circular, tal como se indica en la Fig. 9.9,

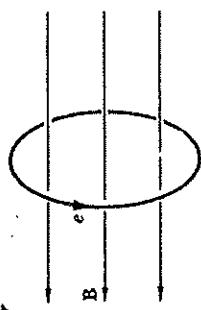


Fig. 9.9 Efecto de un campo externo sobre la órbita de un electrón.

y preguntándonos qué ocurre si se aplica un campo B perpendicular al plano de la órbita. De acuerdo con la ley de Faraday, existirá sobre el electrón una fem dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -A \frac{dB}{dt}$$

durante el tiempo que el campo está variando, siendo A el área de la órbita. Esta fem tiene por efecto el modificar el movimiento de circulación de los electrones en sus órbitas atómicas. Veremos más adelante que si los campos magnéticos provocan solo un cambio razonablemente pequeño en el movimiento circular, el tamaño de la órbita no se altera. Por tanto, en el presente cálculo admitiremos que el radio orbital es constante. La fem producida por el campo B variable da lugar a un campo eléctrico E_t , que actúa tangencialmente a la dirección de movimiento del electrón. La intensidad de este campo es

$$E_t = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

Como consecuencia de este campo, el electrón será acelerado según la ley de Newton, resultando

$$m \frac{dv}{dt} = eE_t = \frac{e\mathcal{E}}{2\pi r} = -\frac{e}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt} \quad (9.26)$$

Para hallar el cambio total de velocidad que tiene lugar mientras el flujo magnético está aumentando, integraremos ambos miembros de la Ec. (9.26), obteniendo

$$\Delta v = -\frac{e}{2\pi rm}\Phi$$

siendo Φ el flujo magnético final a través de la órbita y Δv el *cambio total de velocidad* debido a la fuerza inducida. Si lo expresamos como un cambio en velocidad angular mediante la relación $\Delta v = r\omega_L$, tendremos

$$\omega_L = -\frac{e}{2\pi r^2 m} \Phi = -\frac{e}{2\pi r^2 m} AB = -\frac{e}{2m} B \quad (9.27)$$

Este cambio de velocidad angular, ω_L , se denomina *frecuencia de Larmor*. El signo negativo indica que ω_L es negativo (en sentido de las agujas del reloj) cuando B es positivo (hacia fuera), conforme a la ley de Lenz.

Esta velocidad adicional da cuenta del momento magnético inducido, que siempre se presenta antiparalelo al campo, conduciendo a una susceptibilidad negativa. Antes de comprobar esto, vamos a demostrar el hecho de que el radio de la órbita permanece inalterado. Empecemos por recordar que, en ausencia de campo magnético, la fuerza electrostática entre el núcleo y el electrón proporciona la fuerza centrípeta que mantiene el electrón en un movimiento circular. Por tanto, escribiremos

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} = mr\omega_0^2 \quad (9.28)$$

siendo F la fuerza electrostática y ω_0 la velocidad angular del electrón.

Cuando se aplica el campo magnético B , la velocidad ω_0 cambia a $\omega_0 + \omega_L$, como vimos anteriormente (ω_L será positiva o negativa según la dirección de B respecto al movimiento original). Asimismo, se añade a la fuerza centrípeta un nuevo término $e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Debido a la geometría que estamos considerando, este término vale evB . Deseamos demostrar que esta nueva fuerza magnética debida al campo aplicado B , corresponde a la variación en la fuerza centrípeta necesaria para compensar la nueva velocidad de rotación $\omega_0 + \omega_L$. Para conseguirlo escribiremos una ecuación que exprese el equilibrio de fuerzas, semejante a la Ec. (9.28), bajo las nuevas circunstancias, es decir, con el campo aplicado B . Esta ecuación es

$$F = mr(\omega_0 + \omega_L)^2 + evB \quad (9.29)$$

Desarrollando términos, haciendo uso de $v = r(\omega_0 + \omega_L)$, resulta

$$F = mr\omega_0^2 + 2mr\omega_0\omega_L + mr\omega_L^2 + ev\omega_0B + ev\omega_LB \quad (9.30)$$

Si se expresa B en función de ω_L según la Ec. (9.27), los términos segundo y cuarto se compensan exactamente, quedando $F = mr\omega_0^2$ más otros términos en ω_L^2 que pueden despreciarse en tanto que sea $\omega_L < \omega_0$.¹ Este es precisamente el caso que estamos considerando; por tanto, este importante resultado nos dice que después de que se ha aplicado el campo aparecen términos que se simplifican de tal modo que el valor de equilibrio para una órbita de radio r sigue siendo aún la fuerza electrostática original. El campo aplicado B , que provoca un cambio de velocidad, proporciona igualmente la fuerza (magnética) exactamente necesaria para mantener la órbita en equilibrio. Como consecuencia el radio permanece constante.

Vamos a calcular a continuación la contribución al momento magnético orbital que tiene la frecuencia angular adicional ω_L . El momento magnético de una corriente circular es $P_m = iA$, siendo i la intensidad de la corriente y A al área de la misma. Como $\omega_L = 2\pi f_L$ y además $i = ef_L$, siendo f_L la frecuencia de rotación producida por el campo magnético, tenemos

$$P_m = iA = ef_L A = \frac{e\omega_L}{2\pi} A \quad (9.31)$$

La ley de Lenz da como resultado que la dirección del momento dipolar inducido es tal que siempre minimiza el cambio del flujo que atraviesa la órbita. Esto significa que P_m actúa siempre en oposición al cambio introducido en \mathbf{B} , dando lugar a la susceptibilidad magnética negativa del diamagnetismo.

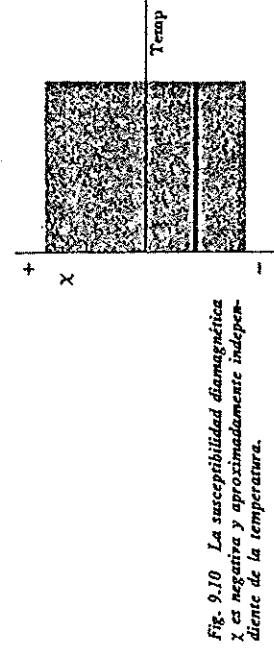
Un ejemplo que revela la naturaleza de los efectos diamagnéticos es el caso de dos electrones que giren en sentidos opuestos en la misma órbita. En ausencia de campo exterior, los efectos magnéticos debidos al movimiento orbital de estos electrones serán nulos. Sin embargo, cuando se aplica un campo magnético la velocidad de uno de los electrones aumentará y la del otro disminuirá en la frecuencia de Larmor, de modo que ambos electrones contribuirán a producir dipolos magnéticos inducidos orientados negativamente.

Hemos examinado únicamente el caso en el que el campo magnético aplicado es perpendicular a la órbita. Aunque no lo demostramos aquí, el momento diamagnético inducido es el mismo cualquiera que sea la orientación de la órbita con respecto al campo. Cuando no sea perpendicular el campo, ω_L ya no será paralelo a ω_0 . Es decir, el movimiento con campo aplicado es un movimiento

¹ El quinto término incluye ω_L^2 ya que según la Ec. (9.27), $B \propto \omega_L$.

circular que tiene lugar en una órbita que a su vez precesiona alrededor del campo magnético con la frecuencia ω_L .

Como el diamagnetismo implica momentos magnéticos inducidos que son independientes de la orientación de los átomos, las vibraciones térmicas no afectan a las susceptibilidades diamagnéticas. La gráfica de la susceptibilidad diamagnética con la temperatura es, pues, como se indica en la Fig. 9.10. Sin embargo, con esta afirmación



estamos despreciando ciertos efectos, tales como las variaciones de las constantes reticulares con la temperatura, que pueden hacer que la susceptibilidad diamagnética varíe ligeramente con la temperatura.

Por otra parte, como las susceptibilidades paramagnéticas disminuyen con la temperatura, mientras que el término diamagnético permanece esencialmente constante, se deduce que todos los materiales se hacen diamagnéticos a temperaturas suficientemente elevadas.

En la Tabla 9.1 se da una lista de la susceptibilidad neta de una serie de sustancias paramagnéticas y diamagnéticas. Las sustancias ferromagnéticas se estudiarán en la Sec. 9.10.

Algunos metales son diamagnéticos, mientras que otros son paramagnéticos. En el caso de los metales, la susceptibilidad neta está formada por las contribuciones de los electrones de conducción y de los iones metálicos de la red. Existe un término diamagnético debido a los electrones de conducción. Se trata de un efecto previsto por la mecánica cuántica que se presenta en presencia de un campo magnético. También hay una contribución paramagnética de los spins electrónicos que compensa en exceso al término diamagnético. Como la mayoría de los electrones de conducción se encuentran dispuestos en pares con orientaciones contrarias de sus spins, solamente contribuye al paramagnetismo una fracción muy pequeña de los spins electrónicos. Dada la variedad de términos que intervienen en la susceptibilidad de un metal, resulta con frecuencia difícil predecir si un metal dado será diamagnético o paramagnético.

Tabla 9.1 Susceptibilidades magnéticas, $\chi_m = M/H$, de varias sustancias (Aproximadamente a la temperatura ambiente)

Sustancia	$\chi_m + 10^{-6}$, unidades mks
Aluminio	+0,82
Alumbre ferro-anómico	+1,4
Calcio	+1,4
Cromo	+4,5
Oxido cuproso	+1,5
Oxido férreo	+26,0
Magnesio	+0,69
Manganoso	+1
O ₂ líquido (a = 219° C)	+390
Platino	+1,65
Tántalo	+1,1
Bismuto	-1,7
Cadmio	-0,23
Cobre	-0,11
Germanio	-0,15
Helio	-0,59
Oro	-0,19
Plomo	-0,18
Cinc	-0,20

* Los materiales paramagnéticos tienen susceptibilidades positivas, los diamagnéticos tienen susceptibilidades negativas. Estos valores están dados en unidades mks y son 4π veces mayores que los correspondientes a unidades cgs. Este factor procede de la definición de la magnetización en el sistema cgs, que es $B = H + 4\pi M$.

9.10 Ferromagnetismo

Vamos a tratar ahora del efecto magnético más fácilmente observable, y que por ello data de los orígenes históricos del estudio del magnetismo: el ferromagnetismo, llamado así porque aparece en el hierro metálico y en ciertos compuestos de hierro. Entre los hechos experimentales figuran los siguientes: Al aumentar la magnetización no es normalmente proporcional a H, como en las sustancias anteriormente estudiadas, en ciertos casos pueden medirse valores de la susceptibilidad de varios miles, y obtenerse una magnetización muy grande. El valor de ésta depende no solo del campo aplicado, sino también de la historia previa de la muestra. Por ejemplo, en muchos casos, una muestra puede retener su magnetización aun en ausencia de un campo externo. Esta es la base de los imanes perma-

nentes que a todos nos son familiares. Sin embargo, resulta notable que el mismo material que puede presentar una magnetización permanente tan grande, pueda presentarse también en un estado en el que posee poca o ninguna magnetización permanente. Solo estos fenómenos ya parecen considerablemente llamativos, más aún cuando no hemos citado los hechos experimentales más extraños. Resulta de interés histórico señalar que el magnetismo de los imanes permanentes ha sido conocido por lo menos desde hace 2500 años, aunque la relación del magnetismo con las cargas en movimiento fue descubierta hace menos de 150 años, por Oersted, en 1820.

Empezaremos por demostrar cómo pueden ocurrir estos efectos magnéticos tan importantes. El origen último de los momentos magnéticos en las sustancias ferromagnéticas resulta ser (como era el caso en las sustancias paramagnéticas) los momentos magnéticos asociados al spin de los electrones. Sin embargo, la importante diferencia es que en las sustancias ferromagnéticas existen fuertes interacciones entre spins que les hacen alinearse paralelamente unos a otros. Aun a las temperaturas ordinarias, los pares orientadores son tan grandes que las vibraciones térmicas no pueden destruir esta alineación. Como consecuencia, la gran magnetización máxima obtenida es del mismo orden que la que se presentaría en los materiales paramagnéticos si todos los dipolos estuvieran perfectamente orientados en una dirección dada. El origen de la interacción entre dipolos es de naturaleza cuántica. Como resultado de esta interacción cuántica, la energía de dos dipolos vecinos (o dos átomos vecinos) es muchísimo menor cuando están alineados paralelamente que para cualquier otra disposición. Los dipolos están, pues, forzados a mantenerse en su orientación paralela. Únicamente cuando se calienta la sustancia ferromagnética a una temperatura muy elevada resultan suficientes los movimientos térmicos para destruir esta alineación, haciendo con ello que el material cambie su comportamiento al de una sustancia paramagnética.

Surge inmediatamente la cuestión de cómo es posible que un material ferromagnético pueda presentarse alguna vez en un estado no-magnetizado, si existen unas fuerzas tan grandes que tienden a alinear los dipolos. La solución de esta paradoja fue sugerida mucho tiempo antes de que existiera evidencia experimental alguna sobre este punto. La respuesta, que realmente se ha demostrado experimentalmente que era correcta, es que la sustancia presenta una gran tendencia a desdoblarse en *dominios* (regiones en las que todos los dipolos están alineados), cada uno con una dirección de magnetización distinta, de modo que macroscópicamente resulta una magnetización cero. Sin embargo, nos enfrentamos aún con el problema de por qué

la sustancia se desdobra en dominios, si en las superficies de separación (las *paredes entre dominios*) existirán dipolos que no son paralelos. Deberemos, pues, justificar la presencia de fuerzas que separan los dipolos de estas paredes de la disposición paralela que debería ser preferida. Este fenómeno se explica si examinamos la situación desde el punto de vista de la energía almacenada. En la Fig. 9.11 se indican esquemáticamente una serie de posibles alterna-

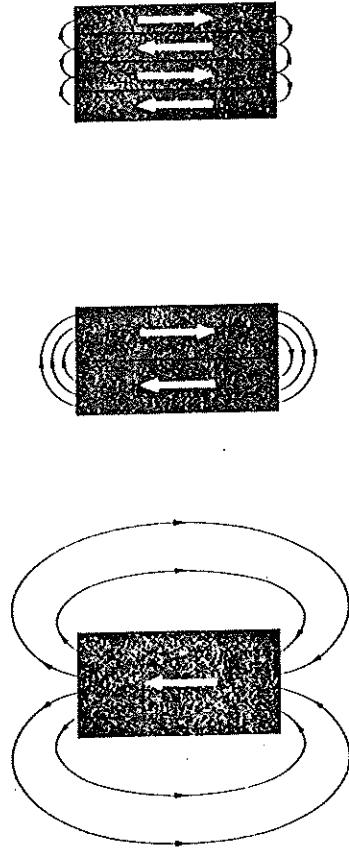


Fig. 9.11 Efecto de los dominios en la reducción del campo exterior.

tivas en la configuración de los dominios en una muestra del material; empezando por el caso en el que el material forma un solo dominio y pasando a configuraciones con número creciente de dominios que han sido dibujadas en forma bastante idealizada, simplemente para ilustrar esas ideas: la orientación de todos los dipolos dentro de cada dominio se ha indicado mediante una flecha. El campo en el exterior del material también está indicado en forma cualitativa. La existencia de campo magnético en el exterior de la muestra implica una energía almacenada de valor

$$\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \text{ julios/voltios}$$

Al aumentar el número de dominios, el campo exterior que aparece es cada vez más pequeño, de modo que la energía almacenada en el mismo disminuye enormemente. Esta disminución está contrarrestada por la energía invertida en la formación de las paredes entre dominios, y el equilibrio corresponderá al estado en el cual la energía total almacenada sea mínima. Cálculos basados en los datos conocidos sobre el trabajo necesario para desorientar dipolos adyacentes indican que la configuración estable se alcanza con dominios cuyas dimensiones son del orden de 10^{-5} cm. Esto está en concordancia

con el tamaño de los dominios determinado experimentalmente en diversas sustancias ferromagnéticas.

Estamos ya en condiciones de comprender la naturaleza de las curvas de magnetización de los materiales ferromagnéticos. En la Fig. 9.12 se indica una curva típica de variación de M frente a H .

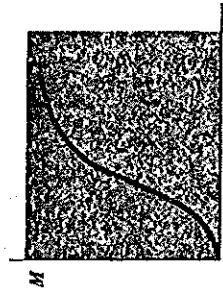


Fig. 9.12 Curva de magnetización de un material ferromagnético.

A medida que se aplica el campo magnetizante, se mueven las paredes de los dominios de modo que se favoreza el crecimiento de aquellos dominios que tienen sus direcciones de magnetización más o menos, según la dirección del campo exterior. Posteriormente cuando el campo se hace mayor, las fuerzas son lo bastante grandes para producir una rotación gradual de las direcciones de magnetización para hacerlas coincidir exactamente con la del campo. En efecto, existen ciertas direcciones de orientación de los dipolos dentro de un dominio con respecto a los ejes cristalinos que son de menor energía que otras, y estas direcciones son las adoptadas en tanto que las fuerzas debidas al campo externo no sobrepasan las fuerzas orientadoras internas. Finalmente, cuando todos los dipolos están orientados, M alcanza un valor constante, el de *saturación*. Frecuentemente es bastante pequeña, salvo en el factor μ_0 , puesto que $B = \mu_0(H + M)$, y usualmente M es mucho mayor que el campo magnetizante H . En la Fig. 9.13 se ha representado una curva típica experimental

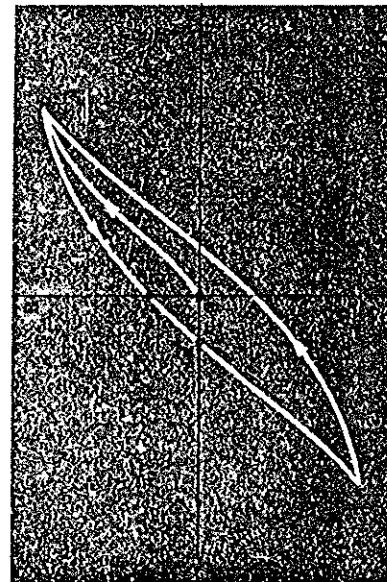


Fig. 9.13 Ciclo de histeresis.

de B frente a H , que indica el efecto de la historia sobre la magnetización de una muestra ferromagnética. Partimos del material desmagnetizado en a y aplicamos un campo H creciente (por medio de una corriente por un devanado que rodea la muestra) hasta que se alcanza el punto b . Cuando hacemos disminuir H , disminuyen la magnetización M o B , pero según un camino diferente. Al volver H a cero, perdura una cierta magnetización (punto c). Al valor de B en el punto c se le llama *remanencia*, y constituye el estado de magnetización permanente de la muestra. El punto d determina la *fuerza coercitiva*, el campo opuesto que es necesario aplicar para desmagnetizar la muestra. Si continuamos hasta el punto e y después invertimos el sentido de cambio de H , llegaremos a trazar un ciclo, llamado *ciclo de histeresis*. La causa de este ciclo es la dificultad que presenta el desplazar las paredes entre dominios. Las imperfecciones del cristal tienden a anclar las paredes, que como consecuencia no se mueven suavemente con el campo aplicado. Esta histeresis, que en algunos materiales es muy grande, es la que permite la existencia de imanes permanentes muy potentes, con toda su enorme importancia práctica. Las sustancias ferromagnéticas con mucha histeresis se llaman *duras*, mientras que las que presentan poca se denominan *blandas*.

Nuestro conocimiento sobre la naturaleza de los materiales magnéticos ha aumentado mucho en los últimos años gracias al empleo de neutrones en el estudio de las sustancias magnetizadas en forma permanente. El método está basado en el hecho de que los neutrones mismos tienen momento magnético¹, y que como consecuencia el paso de neutrones a través de la materia resulta afectado por la orientación de los momentos magnéticos atómicos en la misma. Así, pues, los experimentos de difracción de neutrones proporcionan información sobre la orientación relativa de los dípolos magnéticos de átomos vecinos. Estos experimentos demuestran la orientación paralela de los dípolos vecinos que existe en las sustancias ferromagnéticas y que en otras sustancias, llamadas *antiferromagnéticas*, se presenta una orientación antiparalela de estos vecinos. En estas últimas sustancias, pueden dividirse los momentos magnéticos en dos subredes, que se interpenetran mutuamente, en las que todos los dípolos asociados a una de las subredes son paralelos entre sí mientras que son antiparalelos con respecto a los dípolos de la otra subred. Como los efectos de las dos subredes se compensan, estas sustancias no dan lugar a campos magnéticos exteriores.

En otro tipo de sustancias, llamadas ferrimagnéticas, existen las

¹ Puede parecer sorprendente que un neutrón, cuya carga eléctrica es cero, tenga momento magnético. Esto puede explicarse admitiendo que un neutrón es una estructura compuesta constituida por cantidades iguales de carga positiva y negativa en circulación, cuyas contribuciones al momento magnético no se anulan por compensación.

dos subredes antiparalelas, pero los momentos de una de ellas dan lugar a campos mayores que los de la otra, dando lugar a un efecto ferromagnético neto. Algunas de estas sustancias, llamadas *ferritos*, por no ser conductoras, se utilizan extensamente en altas frecuencias, por ejemplo, en microondas. La ausencia de electrones de condrucción hace que no existan las enormes pérdidas por corrientes de Foucault que de otro modo ocurrirían a estas frecuencias elevadas.

9.11 Pérdidas por histéresis en los materiales magnéticos

Cuando se hace recorrer a un sistema un ciclo de histéresis, existe una pérdida de energía. Vamos a examinar este problema en el caso del ciclo de histéresis de un material ferromagnético. El tratamiento más sencillo corresponde al caso de una muestra toroidal en un solenoide, la magnetización se obtiene mediante una densidad de corriente solenooidal $j_s = Ni/L$, siendo N el número de espiras por la que pasa la corriente i , y L la longitud del solenoide. Para esta configuración geométrica hemos visto que es

$$H = j_s = \frac{Ni}{L} \quad \text{amperios/m} \quad (9.3)$$

Determinemos ahora la cantidad de trabajo que debe realizarse para establecer la corriente i en la bobina, produciendo el campo B en el material. Consideraremos primero el caso sencillo en que B varie linealmente con H , según la expresión $B = \mu H$, y después aplicaremos el mismo razonamiento al caso más complicado en que B siga un ciclo de histéresis. Despreciaremos la disipación de energía en la resistencia de la bobina, ya que estamos interesados únicamente en la energía del material magnético.

El trabajo necesario para establecer una corriente en la bobina es el resultado de la fem de inducción electromagnética que aparece mientras el campo B está aumentando. Como $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = -NA dB/dt$, podemos escribir para la potencia realizada en contra de esta fem:

$$P = -\mathcal{E}i = NA \frac{dB}{dt} i \quad (9.32)$$

Podemos hacer aparecer H en esta ecuación empleando la Ec. (9.3) anteriormente citada, según la cual $i = HL/N$. Si se hace esta sustitución en la Ec. (9.32), obtenemos

$$P = LAH \frac{dB}{dt} \quad (9.33)$$

Como LA es el volumen de la muestra, tenemos que la velocidad con que el trabajo se convierte en energía magnética, por unidad de volumen de sustancia, vale

$$\frac{dW}{dt} = P = H \frac{dB}{dt}$$

y si multiplicamos por dt , llegamos a la relación básica

$$dW = H dB \quad (9.33)$$

Cuando estamos en el caso en que $B = \mu H$ (Fig. 9.14), es inmediato calcular el trabajo por unidad de volumen para establecer

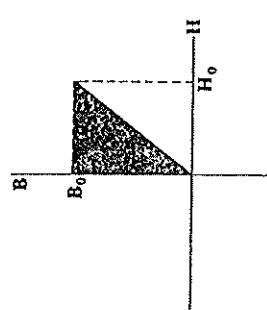


Fig. 9.14 Cálculo de $\int_B^B H dB$ para el caso en que B varía linealmente con H .

el campo de inducción magnética B_0 por medio de la intensidad aplicada H_0 . Basta sustituir en la Ec. (9.33) H por B/μ e integrar desde $B = 0$ hasta $B = B_0$. De este modo encontramos

$$W = \int_0^{B_0} H dB = \frac{1}{\mu} \int_0^{B_0} B dB = \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu} = \frac{1}{2} B_0 H_0 \quad (9.34)$$

Este es el mismo resultado que hallamos en la Sec. 9.7, pero ahora hemos podido ver la relación que existe entre el trabajo realizado y la curva BH . $\int_0^B H dB$ es simplemente el área rayada en la Fig. 9.14. El factor $1/2$ en la expresión es característico de todos los casos en los que B y H son proporcionales, como se supuso en la Sec. 9.7.

Cuando se invierte el proceso, permitiendo que H vuelva a cero, si la curva BH es exactamente la misma durante esta disminución, se transmite al circuito una cantidad igual de energía, ya que la integral del trabajo tendrá el signo opuesto.

Por otra parte, si el material magnético sigue un ciclo de histéresis BH , tal como el indicado en la Fig. 9.13, y partimos de un punto dado describiendo un ciclo completo hasta volver al punto

original de partida, la integral de la Ec. (9.34) debe extenderse a todo el ciclo. Su valor en este caso es precisamente el área del círculo. Debido a la histéresis, se invierte más energía para producir la magnetización que la que se devuelve cuando disminuye ésta. La energía perdida se convierte en calor.

9.12 Cuerpos magnetizados

Vamos a discutir a continuación la magnetización de cuerpos que no están limitados a una configuración geométrica tan especial como la toroidal de nuestras anteriores consideraciones. En este caso general, esta discusión será aplicable igualmente a sustancias paramagnéticas, diamagnéticas (con el apropiado cambio de signo de χ_m) y ferromagnéticas.

En la discusión precedente, con una muestra de forma toroidal, hemos demostrado que dentro del material magnético es $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. La característica especial de esta forma es que el vector \mathbf{M} en el material es siempre paralelo a su superficie. Vamos a demostrar que siempre que \mathbf{M} tenga una componente perpendicular a la superficie, como es el caso de formas distintas de la toroidal, aparecen efectos adicionales que influyen sobre \mathbf{H} dentro y fuera del material, y que, por tanto, modifican también \mathbf{M} y \mathbf{B} . Sigue siendo aplicable la ecuación $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, pero, además del término Ni/L de las corrientes reales, existen otras contribuciones a \mathbf{H} .

Para poner un ejemplo concreto, supongamos que tenemos una muestra cilíndrica de material magnético sometido a un campo exterior (Fig. 9.15), con el vector magnetización paralelo al eje. Vamos

casos como el de la Fig. 9.15. Partiremos del teorema de Gauss para \mathbf{B} ,

$$\int_{SC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9.10)$$

Como hemos visto en la Sec. 9.5, esta expresión es válida en general, haya o no materia presente. Otra relación de validez general que ya hemos introducido es que en un medio magnético \mathbf{B} viene dado por

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (9.5)$$

Si sustituimos en la Ec. (9.10) este valor de \mathbf{B} , tendremos

$$\mu_0 \int_{SC} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \int_{SC} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

o sea,

$$\int_{SC} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{SC} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.35)$$

Apliquemos la Ec. (9.35) al extremo derecho del cilindro de la Fig. 9.15. Para ello, tomaremos una superficie de Gauss que encierre el extremo, de forma cilíndrica y con área de las bases A igual a la de la muestra, y encontraremos

$$\int_{SC} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = -MA \quad (9.36)$$

Lo que se deduce del hecho de que el número de líneas de \mathbf{M} que entran por la cara izquierda de la superficie de Gauss es MA , mientras que el número de las que salen por la cara de la derecha es cero, ya que está fuera de la muestra y M es cero en el exterior del cuerpo magnetizado. El signo negativo resulta del hecho de estar dirigidas las líneas de M hacia dentro en la superficie de Gauss. Si se sustituye este resultado en la Ec. (9.35), obtenemos

$$\int_{SC} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = MA \quad (9.37)$$

Este es el teorema de Gauss para \mathbf{H} . Nos dice que, además de las líneas cerradas de \mathbf{H} debidas a las corrientes reales, existe un flujo neto de \mathbf{H} que procede de cualquier región en la que \mathbf{M} tenga una componente perpendicular a la superficie. Las líneas de \mathbf{H} salen de la superficie (por el contrario, en el caso del extremo izquierdo de la muestra de la Fig. 9.15, en que \mathbf{M} está dirigida hacia fuera sobre la parte de la superficie de Gauss interior al cuerpo, el flujo neto de líneas de \mathbf{H} es hacia dentro del cuerpo). Estas líneas adicionales, que se originan o terminan en las superficies de la muestra, modifican el

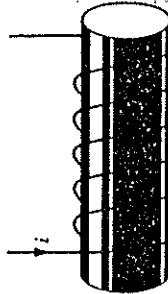


Fig. 9.15 Cuerpo magnético cilíndrico en un campo exterior.

a demostrar que por efecto de los extremos aparecen contribuciones a \mathbf{H} tanto dentro como fuera de la muestra. Los extremos actúan como fuentes de \mathbf{H} que deben ser tomadas en cuenta al aplicar la ecuación $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ en el interior de la muestra, o la $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ fuera de ella. Esto recuerda el efecto de las cargas superficiales de polarización inducidas en los dieléctricos. Vamos a investigar el efecto de los extremos de la muestra en

campo tanto en su interior como en el exterior. Además, puede demostrarse que las líneas de \mathbf{H} procedentes de cualquier región pequeña de la superficie salen radialmente exactamente como lo hacen las líneas de \mathbf{E} de una carga puntual q . Podemos demostrarlo, partiendo de

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_0 \quad (9.13)$$

que, como no hay corrientes reales en la superficie, se convierte en $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$. El razonamiento es el siguiente: Como el teorema de Gauss resulta aplicable a esta \mathbf{H} originada por la discontinuidad de \mathbf{M} en la superficie, se deduce que las líneas de \mathbf{H} procedentes de esta superficie empiezan o terminan únicamente en tales regiones superficiales. Como consecuencia el concepto de líneas es válido como en el caso electrostático para \mathbf{E} . Sin embargo, aún no hemos demostrado si las líneas emergen uniformemente, o, por el contrario, pueden aparecer concentradas en alguna dirección privilegiada. En la Fig. 9.16 se indican las trayectorias cerradas a lo largo de las cuales

Gauss resulta aplicable a esta \mathbf{H} originada por la discontinuidad de \mathbf{M} en la superficie, se deduce que las líneas de \mathbf{H} procedentes de esta superficie empiezan o terminan únicamente en tales regiones superficiales. Como consecuencia el concepto de líneas es válido como en el caso electrostático para \mathbf{E} . Sin embargo, aún no hemos demostrado si las líneas emergen uniformemente, o, por el contrario, pueden aparecer concentradas en alguna dirección privilegiada. En la

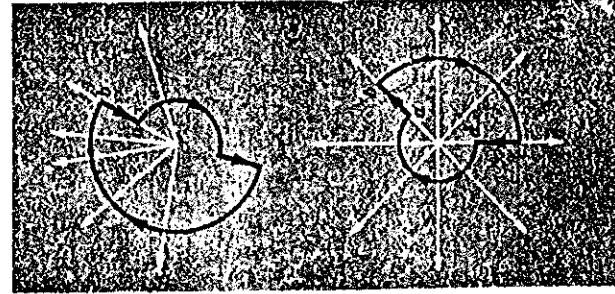


Fig. 9.16 (a) Distribución hipotética no uniforme de las líneas de \mathbf{H} alrededor de una fuente $\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$; en ella $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. (b) Distribución simétrica verdadera de las líneas de \mathbf{H} alrededor de su fuente, que conduce a $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

que el camino es paralelo a \mathbf{H} solo entre a y b . El tramo cd está en una región en que \mathbf{H} es cero y, por tanto, no contribuye a la integral. Así, pues, para este caso, $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. En el caso 2 (Fig. 9.16b), en el que las líneas están distribuidas uniformemente alrededor de la fuente puntual $\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$, el segmento de trayectoria ab contribuye a la integral exactamente lo mismo que el segmento cd , y como las dos contribuciones tienen signos opuestos, la contribución neta es cero. Todo el resto de la trayectoria es perpendicular a \mathbf{H} , de modo que su contribución a la integral de línea es nula. Así, pues, cuando las líneas de \mathbf{H} están distribuidas uniformemente, $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

Este razonamiento conduce directamente como resultado a que se sigue la ley de Coulomb. Esto es, los efectos del vector \mathbf{H} debido a cada pequeño elemento del extremo de la muestra varían con la distancia como $1/r^2$. Por analogía con el caso electrostático podemos definir los efectos de una discontinuidad de este tipo por

$$-\int_{SC} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = q_m \quad \text{amperios/m} \quad (9.38)$$

en la que hemos llamado q_m al *polo magnético*. El teorema de Gauss para estas fuentes de \mathbf{H} queda en la forma

$$\int_{SC} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = q_m \quad \text{amperios/m} \quad (9.39)$$

En una sustancia paramagnética o ferromagnética, \mathbf{M} tiene el mismo sentido que \mathbf{H} . Como resultado, la contribución a \mathbf{H} de los extremos se opone al campo y hace disminuir el valor de \mathbf{H} en el interior. Fuera de la muestra las líneas de \mathbf{H} que se originan en los extremos de ésta se añaden a las debidas a las corrientes que causan la magnetización y, por tanto, incrementan el valor de $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ en el exterior. En el caso de muestras de forma elipsoidal, la influencia de los extremos puede discutirse introduciendo un campo *desmagnetizante*, exactamente como hicimos al tratar del campo despolari- zante en los dielectrinos. Aunque puede extenderse el concepto de factor desmagnetizante a muestras de otras formas, los resultados serían solo aproximados, como ya indicamos en el caso de las sustancias dielectrinas.¹

Vamos a considerar a continuación el caso de muestras de dos formas extremas. En primer lugar, tomaremos una varilla, larga y

¹ Cuando el material magnético no es uniforme, es decir, si la susceptibilidad magnética no es la misma en toda la muestra, pueden existir discontinuidades de M en el interior de la misma. Tales discontinuidades introducen un término adicional en la Ec. (9.37), que conduce de hecho a la aparición de fuentes adicionales de H en el interior del cuerpo. Pero no vamos a discutir este caso con más detalle.

calcularemos $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ en ambos casos. En el caso 1 (Fig. 9.16a), en el que hemos admitido una distribución no uniforme de las líneas de \mathbf{H} , es evidente que la integral curvilinea es distinta de cero, puesto

delgada, con su eje paralelo a un campo B originalmente uniforme (Fig. 9.17). Si la varilla es muy delgada comparada con su longitud,



Fig. 9.17 Varilla larga y delgada de material magnético con su eje paralelo al campo originalmente uniforme B .

la variación de H en las regiones próximas al centro debida al efecto de los extremos es muy pequeña, ya que el producto MA es muy pequeño si lo es la sección transversal A . Qualitativamente podemos razonar que H en la varilla será aproximadamente el mismo que en ausencia de varilla. Por tanto, B en la varilla valdrá $B = \mu_0(H_0 + M)$, siendo H_0 el valor de H antes de colocar la varilla. Como $M = \chi H_0$, nos resulta $B = \mu_0(1 + \chi)H_0 = \mu H_0$. Este es el mismo resultado que obtuvimos para la muestra toroidal, como era de esperar, puesto que en el caso que nos ocupa el efecto de los extremos es despreciable.

Otra forma de razonar que conduce al mismo resultado es considerar que en la región central de la varilla, H_0 fuera de la misma permanece esencialmente inalterada por el efecto de unos extremos tan alejados y mantiene su valor original. Pero como H_0 es paralela a la superficie en esta región central tanto dentro como fuera de la varilla y debe ser $H_{n1} = H_{n2}$, resultará $H_{interior} = H_0$. Llegamos así de nuevo a $B = H\mu_0$. Si este resultado se describe utilizando el concepto de factor desmagnetizante, según el cual el valor de H en el interior del cuerpo es

$$H = H_0 - LM \quad (9.40)$$

(siendo L el factor desmagnetizante apropiado a la forma particular de la muestra), resulta, por lo que hemos encontrado, que para una varilla larga y delgada, paralela a un campo uniforme, $L \sim 0$.

Veamos ahora el segundo caso, una placa delgada y plana del material magnético situada perpendicularmente a un campo originalmente uniforme (Fig. 9.18). Aquí, las líneas de H , que se originan

en la discontinuidad superficial de M , salen uniforme y perpendicularmente a la superficie en ambos sentidos, como ocurría con las líneas de E de una distribución plana y uniforme de carga. Como las líneas de H son paralelas, H es uniforme en el interior de la placa.

Podemos obtener su valor a partir de

$$\int_{sc} H \cdot dS = - \int_{sc} M \cdot dS \quad (9.35)$$

usando el teorema de Gauss. La contribución de la cara de la derecha, hacia dentro de la placa, será $-M/2$ (puesto que la mitad de las líneas salen hacia fuera). Pero la cara de la izquierda dará también una contribución $-M/2$, de modo que H total dentro de la placa por efecto de sus superficies es $H = -M$. Por otra parte, fuera de la placa estas dos contribuciones de las caras se compensan, de modo que H en el exterior no queda afectada por la presencia de la placa.

En este caso, dentro de la placa el campo desmagnetizante es $-M$, con lo que el valor neto de H es $H_0 - M$. El factor desmagnetizante L toma su valor máximo, 1, y tendremos

$$B = \mu_0[(H_0 - M) + M] = \mu_0 H_0 \quad (9.41)$$

Podemos comprobar que se satisfacen las condiciones en la superficie límite para B , $B_{n1} = B_{n2}$. En efecto, B es perpendicular a la superficie de la placa y tiene el mismo valor dentro que fuera.

Finalmente, examinemos el caso de una esfera magnética introducida en un campo uniforme. En la Fig. 9.19 se ha dibujado el

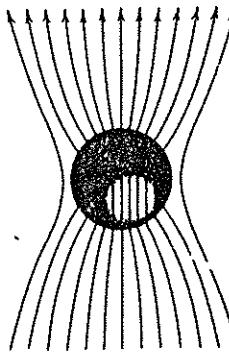


Fig. 9.19 Perturbación del campo debida a la introducción de una esfera magnética en un campo uniforme.

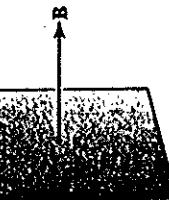


Fig. 9.18 Placa plana y delgada de material magnético con su plano perpendicular al campo originalmente uniforme B .

aspecto del campo B dentro y fuera de la esfera, suponiendo que en ella $\mu > \mu_0$. El campo B dentro de la esfera es mayor que el campo original y sigue siendo uniforme. Esta uniformidad era de esperar, puesto que la esfera es un caso especial del elipsoide, para el cual el campo desmagnetizante interior es uniforme.

Gracias a la semejanza entre las ecuaciones magnéticas y dielectrícias, resulta lógico admitir que el factor desmagnetizante para la esfera sea el mismo que el factor despolarizante para una esfera

dieléctrica, que se ha determinado en el Apéndice C. Empleando el resultado allí obtenido, $L = 1/3$, el campo H dentro de la esfera será

$$H = H_0 - \frac{1}{3}M$$

en la que H_0 es el valor original en ausencia de esfera. Podemos, pues, obtener B por

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0(H_0 - \frac{1}{3}M) + M = \mu_0(H_0 + \frac{2}{3}M)$$

Como $M = \chi_m H$, podemos escribir $H = H_0 - \frac{1}{3}\chi_m H$, o sea

$$H = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\chi_m} H_0$$

para el valor de H en el interior de la esfera. En el caso general, esta expresión tiene la forma

$$H = \frac{1}{1 + L\chi_m} H_0 \quad (9.44)$$

Al igual que en el caso electrostático, la perturbación sobre el campo exterior debida al cuerpo uniformemente magnetizado es precisamente el campo de un dipolo. Esto es cierto solo fuera de la esfera, puesto que hemos visto que dentro el campo es uniforme. Aunque en todos estos casos hemos preferido razonar tomando como base los efectos de los extremos, debido a la discontinuidad de M en la superficie del cuerpo, hubiera resultado igualmente satisfactorio remplazar cada cuerpo magnetizado por las corrientes superficiales equivalentes. Así, por ejemplo, si se sustituye la esfera magnetizada por la densidad de corriente solenoidal equivalente $\vec{j}_{mag} = M$, el valor de B en el interior es $\frac{2}{3}\mu_0 M$ en lugar de $\mu_0 M$ como en la forma toroidal. H en el interior es, pues, $\frac{2}{3}M$ en vez de M . De esta forma, sin hacer ninguna consideración sobre la discontinuidad de M en la superficie, llegamos al mismo resultado obtenido por medio del concepto de campo desmagnetizante de los polos magnéticos. Ambos puntos de vista dan siempre resultados idénticos.

9.13 Imanes permanentes

Hasta aquí hemos atribuido la magnetización M a la existencia de campos exteriores que provocaban la alineación de los dípolos magnéticos elementales de la sustancia. En el caso de los imanes permanentes debemos considerar que la alineación de los dípolos es el resultado de fuerzas internas. Vamos, pues, a investigar cuáles

son los campos B y H que esta automagnetización produce, tanto dentro como fuera del cuerpo imanado.

Haremos uso nuevamente de la ecuación $B = \mu_0(H + M)$ para calcular el campo dentro de la sustancia, pero como ahora H_0 , el campo aplicado, es nulo, H procede únicamente del efecto de las discontinuidades superficiales de M . La magnetización permanente, según la ecuación $\int_{SC} H \cdot dS = - \int_{SC} M \cdot dS$. En el caso de forma elipsoidal, como hemos visto $H = H_0 - LM$, pero al ser cero H_0 , dentro de la muestra quedará $H = -LM$. Por tanto, dentro de la muestra H se opone a M (y a B) y de hecho es precisamente el campo desmagnetizante que considerábamos en la sección anterior. Solo en las muestras elipsoidales, en las que M es uniforme, será también uniforme H . Fuera de la muestra H no será uniforme, pero puede calcularse a partir de los polos equivalentes como vimos anteriormente.

Para formas no-elipsoidales, el campo no será uniforme ni dentro ni fuera del imán. Sin embargo, podemos calcular los valores de B y H empleando la ley de Coulomb para los polos equivalentes. Consideraremos el caso de un imán en forma de varilla, tal como el indicado en la Fig. 9.20, en el que suponemos que la magnetización



Fig. 9.20 Imán permanente en forma de barra, en el que se indican las fuentes y sumideros de las líneas de H en los extremos del imán.

M es uniforme. Hemos demostrado que las líneas de H se originan y terminan en las discontinuidades de M en los extremos del imán. La intensidad de estos polos, como hemos visto, viene dada por

$$q_m = - \int_{SC} M \cdot dS = MA \quad (9.38)$$

siendo A la sección transversal del imán. El extremo del imán por el que salen las líneas de H se llama polo norte, y el extremo en el que convergen las líneas de H polo sur. Cuando estudiamos el campo en un punto lo suficiente alejado del extremo del imán para que la región del extremo pueda considerarse como pequeña frente a la distancia desde la misma al punto en cuestión, el polo puede considerarse como un punto. Aplicando el teorema de Gauss para H ,

$$\int_{SC} H \cdot dS = q_m, \text{ a una superficie de Gauss de forma esférica y radio } r, \text{ obtenemos}$$

$$H = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q_m}{\mu_0} \quad (9.45)$$

Expresión que nos da el campo B en cualquier punto fuera de la varilla debido al polo q_m . Como en un cuerpo magnetizado siempre hay asociados un polo norte y un polo sur, el campo neto en cualquier punto es la suma vectorial de las contribuciones de ambos polos. Esta es exactamente la misma situación que teníamos en electrostática cuando calculábamos el campo eléctrico de un dipolo. Como las líneas de H emergen del polo norte q_m es positivo para un polo norte y negativo para un polo sur. Si el punto en que estamos examinando el campo está muy alejado del imán en relación con su longitud L , las expresiones para B o H se reducen a la ecuación usual del dipolo, Ec. (6.24), siendo el momento dipolar $p_m = q_m L$. Por tanto, según la ecuación del dipolo magnético, el par sobre una varilla imanada situada en un campo magnético uniforme es

(6.23) \quad \tau = p_m B \operatorname{sen} \theta

También podemos obtener la expresión de la fuerza que actuaría sobre un polo magnético aislado. Si sustituimos en la ecuación anterior p_m por $q_m L$, tendremos

$$\tau = q_m L B \operatorname{sen} \theta$$

Que es exactamente análoga a la de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico. En este último caso, la fuerza es $F = qE$ y, por analogía, la fuerza sobre un polo magnético debe ser

$$F = q_m B$$

Para un polo norte (+), la fuerza es paralela a B ; para un polo sur (-), la fuerza es antiparalela a B .

Hemos desarrollado ya las ecuaciones del campo y las fuerzas para imanes permanentes. Podemos, pues, calcular el campo en cualquier punto del espacio, debido a un conjunto de imanes permanentes, mediante la Ec. (9.45) y determinar la fuerza sobre cada polo en un campo dado mediante la Ec. (9.47). Este cálculo es posible únicamente si la magnetización de los imanes es constante y no resulta afectada por los campos exteriores. En muchos casos esta hipótesis resulta una buena aproximación. Finalmente, conviene señalar que, en principio, todos los resultados que hemos obtenido empleando el concepto de polos magnéticos podrían haber sido obtenidos sustituyendo cada imán por una corriente superficial solenoide equivalente.

También debemos decir unas palabras sobre la nomenclatura de polos magnéticos norte y sur y su relación con el campo magnético

terrestre. Un nombre más correcto para el polo norte de un imán tal como lo hemos definido sería polo que *mira al norte*. Igualmente el polo sur debería llamarse polo que *mira al sur*. Como polos de nombre opuesto se atraen, esto quiere decir que el polo magnético de la tierra próximo al norte geográfico es un polo magnético sur. El campo magnético terrestre puede describirse aproximadamente como el campo de un dipolo cuyo eje es aproximadamente paralelo al eje de rotación de la tierra. La componente horizontal del campo magnético terrestre está dirigida generalmente en la dirección sur-norte. El origen principal del campo terrestre está probablemente en corrientes de convección de materia fundida conductora que existen en la región central de la tierra. Este movimiento da lugar a una corriente eléctrica dentro de la tierra y como consecuencia a un campo magnético. Es improbable que las sustancias ferromagnéticas tengan un papel importante en el magnetismo terrestre, puesto que podemos esperar que pierdan su gran susceptibilidad y se conviertan en paramagnéticas a las elevadas temperaturas del interior de la tierra.

9.14 Ejemplos

a) *Campo dentro y fuera de una barra magnetizada permanentemente.* En la Sec. 9.12 hemos encontrado que el factor desmagnetizante L para esta forma es casi cero. Por tanto, dentro de la barra $H = H_0 - LM$ es aproximadamente cero, puesto que el campo aplicado es cero. Qualquier que sea el valor de H que exista en la barra se opone a M . Fuera de la barra, el campo puede calcularse empleando la Ec. (9.45), $B = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2}$, aplicada a ambos extremos, siendo $q_m = MA$. El campo que resulta se ha indicado en la Fig. 9.21.

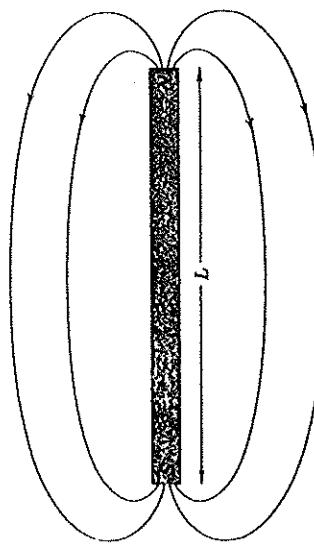


Fig. 9.21 Barra imanada. El campo exterior puede describirse mediante polos de intensidad q_m separados por una distancia L .

b) *Campo dentro y fuera de una placa delgada magnetizada en forma permanente perpendicularmente a su plano.* En la Sec. 9.12 en-

contramos que para este tipo de magnetización el factor desmagnetizante vale 1. La expresión de \mathbf{B} dentro de la placa era

$$\mathbf{B} = \mu_0[(\mathbf{H}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{M}] = \mu_0\mathbf{H}_0 \quad (9.41)$$

de modo que en este caso, cuando el campo aplicado $\mathbf{H}_0 = 0$, dentro de la placa $\mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$. Así, pues, \mathbf{H} dentro de la placa se opone a \mathbf{M} y tiene su misma magnitud. Fuera de la placa como $B_{n1} = B_{n2}$, \mathbf{B} es también cero, lo mismo que \mathbf{H} . En todo esto, estamos despreciando los efectos perturbadores de los bordes de la placa.

c) *Campo dentro y fuera de una esfera magnetizada permanentemente.* En la Sec. 9.12 encontramos que el campo dentro de una esfera de magnetización \mathbf{M} situada en un campo exterior vale

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{M}) \quad (9.43)$$

En ausencia de tal campo exterior será $\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}$. Este resultado se deducía del hecho de ser el factor desmagnetizante para la esfera $L = \frac{1}{3}$, como se demuestra en el Apéndice C para el caso dieléctrico. El campo dentro de la esfera es, pues, $\mathbf{H} = -\frac{1}{3}\mathbf{M}$. \mathbf{H} es uniforme y se opone a la magnetización permanente \mathbf{M} . Ya hemos indicado que fuera de la esfera el campo es el de un dipolo. Podemos determinar el valor del momento dipolar aplicando las condiciones en la superficie de la esfera en el punto en que la corta el eje de magnetización. Este punto es el P de la Fig. 9.22. En este punto \mathbf{B} es normal a la superficie, de modo que debe tener el mismo valor dentro que en un punto situado fuera, pero

muy cerca de la superficie (puesto que $B_{n1} = B_{n2}$). El valor de \mathbf{B} en el punto P dentro de la superficie es $\frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}$. Empleando la fórmula del dipolo fuera de la esfera, haciendo $\cos \theta = 1$, tenemos según la Ec. (6.24)

$$B_r = \frac{\mu_0 2p_m}{4\pi a^3} \quad (9.48)$$

siendo a el radio de la esfera. Comparando estas dos expresiones vemos que p_m valdrá

$$p_m = \frac{4}{3}\pi a^3 M \quad (9.49)$$

El valor de \mathbf{B} en cualquier punto fuera de la esfera, puede ya obtenerse sumando vectorialmente las dos componentes de \mathbf{B} , \mathbf{B}_r y \mathbf{B}_{θ} , que se obtienen sustituyendo en las ecuaciones del dipolo (6.24) este valor de p_m . El momento dipolar de la esfera es precisamente el producto de la magnetización por el volumen.

d) *Cálculo del campo interior a una esfera permanentemente magnetizada por medio de la corriente superficial solenoidal equivalente.* Vamos a incluir aquí este cálculo, para ilustrar el hecho de que es posible simular los efectos de los cuerpos magnetizados por medio de una densidad de corriente solenooidal equivalente en la superficie del cuerpo. En la Sec. 9.2 encontramos que los efectos magnéticos producidos por un cuerpo uniformemente magnetizado podían replicarse por los de una corriente de Ampere superficial de densidad j_{mag}

$$j_{mag}^* = M \quad (9.2)$$

En la Fig. 9.23 se han dibujado algunas de las espiras de hilo arrulladas sobre la esfera en las que una corriente i produce un campo equivalente al de la corriente superficial de Ampere. Las espiras están devanadas uniformemente según el eje z a fin de obtener una densidad de corriente solenooidal uniforme. Vamos a calcular ahora el

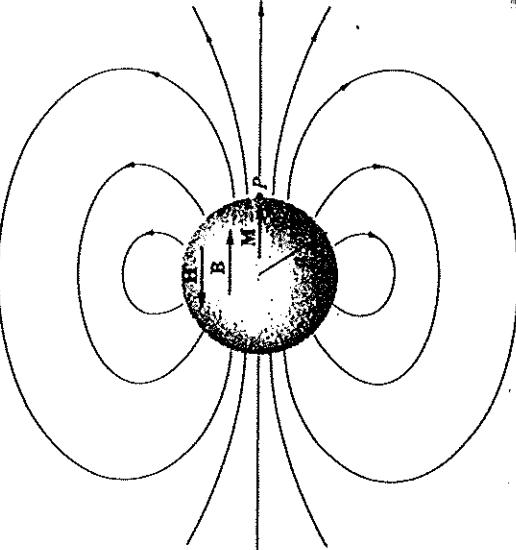


Fig. 9.22 Campo magnético en las proximidades de una esfera uniformemente magnetizada; M , B y H son uniformes dentro de la esfera. Notese que H se opone a B dentro de la esfera.

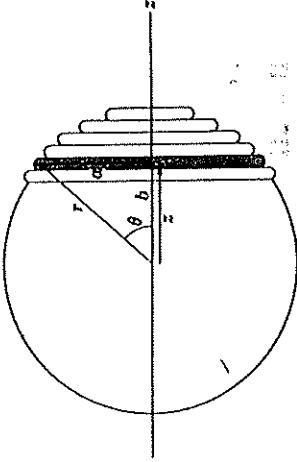


Fig. 9.23 Devanado con corriente solenoideal uniforme sobre la superficie de una esfera.

y las condiciones para \mathbf{B} y \mathbf{H} en las superficies límites [Ecs. (9.16) y (9.18)]. Sin embargo, existen situaciones, en las que intervienen materiales ferromagnéticos, de un tipo que presenta importancia práctica y es fácil de resolver aproximadamente. En la Fig. 9.24 se indica

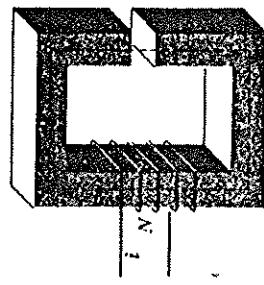


Fig. 9.24 Electróimán como ejemplo de un circuito magnético.

campo en el centro de la esfera, debido a esta corriente. Calcularemos la contribución de una espira y después integraremos para tomar en cuenta todas las espiras existentes sobre la esfera.

La contribución de la espira que hemos escogido valdrá

$$dB = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{a^2}{(a^2 + \delta^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 j a^2}{2 \delta^3} \quad (6.8)$$

Si llamamos z a la distancia desde el centro de la esfera a una espira dada, a lo largo del eje z , será $z = r \cos \theta$ y $dz = r \sin \theta d\theta$. Si δz es el espesor de una espira, $i = j dz$. Asimismo, el radio de la espira será $a = r \sin \theta$. Sustituyendo estos valores en la Ec. (6.8) obtenemos

$$dB = - \frac{\mu_0 j}{2} \frac{r^3 \sin^3 \theta}{r^3} d\theta$$

o sea

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 j}{2} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 j}{2} - \frac{1}{3} \cos \theta (\sin^2 \theta + 2) \\ &= \frac{2}{3} \mu_0 j \end{aligned}$$

Como la corriente j se ha empleado para simular j_{mag}^* la haremos igual a M . Así tenemos

$$B = \frac{2}{3} \mu_0 M \quad (9.50)$$

que es el valor hallado en el problema anterior empleando el método de los polos magnéticos. Notese que nuestra demostración ha sido únicamente para el centro de la esfera. Sin embargo, podriamos demostrar que B sigue siendo uniforme en toda la esfera.

9.15 Circuitos magnéticos

El problema general de los cuerpos magnéticos en campos externos es sumamente difícil. Es necesaria la solución simultánea de

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_o \quad (9.13)$$

$$\int_{SC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (9.9)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + \dots = Ni \quad (9.51)$$

En esta expresión hemos dividido la integral en varias partes, cada una de las cuales corresponde a una porción que tenga un valor constante de μ e igual sección transversal. El $\cos \theta$ del producto escalar vale 1 debido a que \mathbf{H} en todas partes es paralelo al camino de integración escogido. La Ec. (9.10) nos dice que las líneas de \mathbf{B} son continuas a lo largo de todo el circuito. Por tanto, el flujo que atraviese cualquier sección transversal del circuito es el mismo. Podemos relacionar el valor de H en cualquier porción con el flujo por medio de la Ec. (9.9), obteniendo

$$\Phi = BA = \mu HA \quad (9.52)$$

en la que μ y A son las correspondientes a esta porción. Así encontramos

$$\frac{\Phi}{\mu_1 A_1} = \frac{H_2}{\mu_2 A_2} \dots$$

$$Ni = \Phi \left(\frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \dots \right) \quad (9.53)$$

Que sustituyendo en la Ec. (9.51) nos da

En esta ecuación puede despejarse Φ , con lo cual puede calcularse $B = \Phi/A$ en cualquier sección, en particular en el entrehierro (en el que pondremos $\mu = \mu_0$) de nuestro ejemplo del electroimán. La Ec. (9.53) puede interpretarse por analogía con un circuito eléctrico serie, en el que $V = i(R_1 + R_2 + \dots)$. Así como la corriente es continua, en el caso magnético es continuo el flujo. Los términos $l/\mu A$ son de la misma forma que la resistencia y se combinan en serie y en paralelo de igual forma que las resistencias. Se suelen denominar *reductancia magnética* R . La fuerza excitadora para el magnetismo Ni se llama *fuerza magnetomotriz* (fmm). Con ello la ecuación puede escribirse en la forma

$$\Phi = \frac{\text{fmm}}{R} \quad (9.54)$$

Es fácil ver, según las anteriores ideas, por qué el campo magnético de un electroimán puede aumentarse construyendo las piezas polares de forma troncocónica. La reluctancia total del circuito magnético permanece prácticamente inalterada, de modo que el flujo no cambia. Sin embargo, el área efectiva de la sección transversal en el entrehierro se reduce considerablemente con lo que $B = \Phi/A$ aumentará mucho. Si la reducción de sección se hace demasiado bruscamente, las líneas de B no serían ya conducidas por el material y la mejora sería muy pequeña.

PROBLEMAS

- 9.1 Sobre una muestra toroidal de un material magnético cuya susceptibilidad es $\chi_m = 2 \times 10^{-2}$ se han devanado 1000 espiras por las que circula una corriente de 2 amp. El toroide tiene 15 cm de longitud.
 a) Calcular la densidad de corriente solenoidal.
 b) Determinar el campo magnético H producido por la corriente.
 c) Calcular μ , la permeabilidad magnética del material.
 d) Calcular la magnetización M producida en el material.
 e) Calcular el campo magnético B resultante tanto de la corriente como de la magnetización del material.

- 9.2 En el campo magnético no-uniforme existente entre los polos de un imán se coloca una barra de un material paramagnético de sección transversal uniforme A , en la forma indicada en la Fig. P 9.2. Calcúlese la fuerza vertical sobre la barra debida al campo no uniforme. Para ello, determine el efecto que sobre la energía magnética almacenada tiene un pequeño desplazamiento de la barra en la dirección de su eje. Para simplificar el problema, considérese que en lugar de mover la barra completa se quita una porción de altura dx del extremo inferior y se añade de nuevo en el superior. Si el campo en el extremo in-

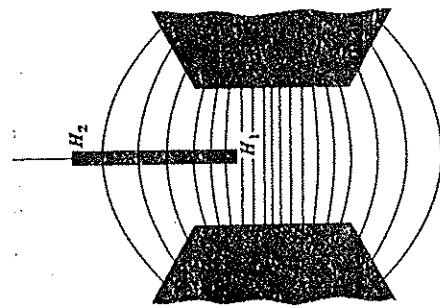


Fig. P 9.2

ferior de la barra es H_1 y en el superior H_2 , demostrar que el cambio en la energía magnética viene dado por (véase Sec. 9.7)

$$dW = \frac{1}{2}A(\mu - \mu_0)(H_1^2 - H_2^2)dx$$

Empieando este resultado, demostrar que la fuerza sobre la barra es

$$F = \frac{1}{2}A\mu_0x(H_1^2 - H_2^2) \text{ newtonios}$$

Este es el método usado normalmente para determinar la susceptibilidad estática de las sustancias paramagnéticas. Nótese que si el material es diamagnético la fuerza sería en sentido opuesto.

- 9.3 Un anillo de hierro de 5 cm de radio y 2 cm^2 de sección transversal tiene una permeabilidad de $1.000 \mu_0$ (supóngase constante). Está devanado con 1.500 espiras por las que circulan 5 amp. Calcúlese:

- a) La autoinducción de la bobina.
 b) La intensidad del campo magnético.
 c) La densidad de corriente solenoidal de la bobina.
 d) La magnetización del hierro.
 e) La densidad de corriente amperiana inducida.
 f) La energía almacenada en el campo magnético.

9.4 Dos barras uniformemente magnetizadas tienen longitud L y sección transversal A . Su magnetización es M amp/m. Determinese la intensidad de sus polos I_m . Si uno de los imanes se mantiene suspendido sobre el otro por efecto de la repulsión entre polos iguales y la masa de cada uno es m kg, hallar la ecuación cuya solución conduce a una distancia de equilibrio x entre las barras.

9.5 Dos imanes permanentes iguales A y B , cuyo momento magnético es p_m , están situados como se indica en la Fig. P 9.5. La distancia que los separa es grande comparada con sus dimensiones. Si se sitúa una brújula a una distancia x_1 de uno de los imanes y x_2 del otro, toma una posición de equilibrio indicada en la figura formando un ángulo θ con la línea que une los imanes. Determine el valor de la relación x_1/x_2 .



Fig. P 9.5

9.6 El electroimán indicado en la Fig. P 9.6 está formado por hierro con una permeabilidad $\mu = 800 \mu_0$. Las dimensiones transversales del hierro son $10 \times 10 \text{ cm}^2$, y la longitud total, incluido el entrehierro de 2 cm, es de 200 cm. ¿Cuántos ampero-vueltas se necesitarán en la bobina para conseguir un campo de 5.000 gauss (0.5 weber/m^2) en el entrehierro, suponiendo que en este las líneas del campo se mantienen paralelas entre sí? ¿Cuál será el valor de B dentro del hierro? ¿Cuánto valdrá H en el entrehierro y dentro del hierro? ¿Cuál será la magnetización M en el hierro?

9.7 El hierro metálico contiene aproximadamente 10^{29} átomos por metro cúbico. El momento magnético de cada átomo de hierro es $1.8 \times 10^{-23} \text{ amp}\cdot\text{m}^2$. Si no existieran fuerzas ferromagnéticas internas que tendieran a alinear los dípolos (esto es, si el hierro fuera paramagnético), ¿cuál sería la susceptibilidad del hierro a 300° K ? ¿Cuál sería el momento dipolar de una barra de hierro (si fuera paramagnético) de 10 cm de larga y 1 cm^2 de sección transversal situada en un campo de 1.000 gauss (0.1 weber/m^2)? Si todos los dípolos estuvieran alineados en un solo dominio como resultado de las interacciones ferromagnéticas, ¿cuál sería la magnetización M de la barra? ¿Cuál sería el momento magnético de la misma? ¿Cuál sería el par que actuaría sobre esta barra ferromagnética?

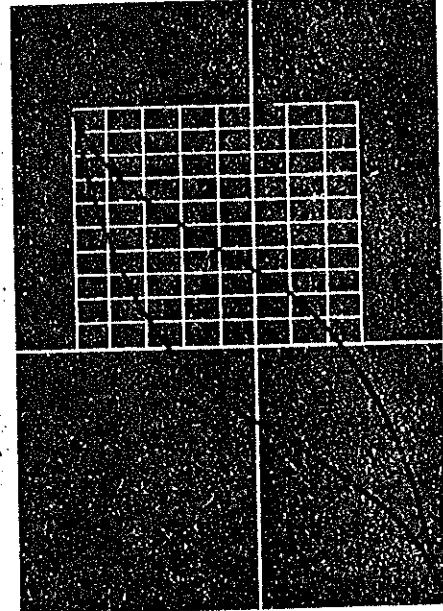


Fig. P 9.8

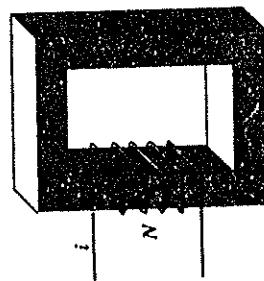


Fig. P 9.9

9.8 Una autoinducción está formada por 100 vueltas de hilo devanadas sobre un núcleo cerrado de hierro de 20 cm de longitud y $1 \times 1 \text{ cm}^2$ de sección transversal, como se indica en la Fig. P 9.8. A través de la bobina pasa una corriente, como se indica en la Fig. P 9.8. A través de la bobina pasa una corriente.

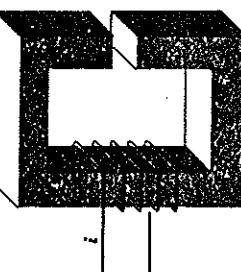


Fig. P 9.6

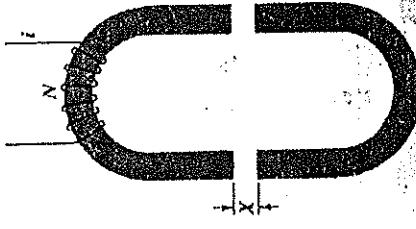


Fig. P 9.7

- 9.9 Se construye un electroimán en la forma indicada en la Fig. P 9.9. La longitud total del hierro que constituye las dos partes es L , su sección transversal A , y la permeabilidad μ . El imán se excita mediante una corriente i que pasa por las N espiras. Las dos mitades del imán están separadas por una distancia X , siendo $X \ll A$. Calcúlese la fuerza de atracción entre estas dos mitades (véase Sec. 9.7).
- 9.10 Se construye una autoinducción variable devanando una bobina sobre un núcleo de hierro de 30 cm de longitud, que tiene un entrehierro ajustable. Sin entrehierro, la autoinducción es 2 henrys. ¿Para qué entrehierro la autoinducción se reduce a 1 henry? La permeabilidad del hierro es $1.000 \mu_0$.

DIEZ

Circuitos de Corrientes Alterna

10.1 Introducción

Vamos a volver de nuevo al estudio de los circuitos. Esto no implica nuevos principios eléctricos o magnéticos, puesto que depende de las características de los tres elementos de circuitos pasivos, R , C y L , que ya hemos estudiado. En electricidad aplicada los circuitos de corriente alterna son de gran importancia, pero aquí nos limitaremos a discutir los circuitos elementales y al estudio de algunos métodos sencillos para su análisis. Nuestro objetivo es llegar a ser capaces de determinar las corrientes y tensiones en un circuito, tal como el indicado en la Fig. 10.1, cuando está conectado a una fuente de tensión sinusoidal. Desarrollaremos los conceptos de fase y amplitud de las funciones sinusoidales, que son los empleados



Fig. 10.1 Circuito serie en corriente alterna.

para describir el comportamiento del circuito y de sus componentes individuales. El análisis de los circuitos de corriente alterna exige el planteamiento y solución de ciertas ecuaciones diferenciales. Para profundizar más en el conocimiento de tales circuitos, examinaremos el problema desde varios puntos de vista.

Además de desarrollar las ideas necesarias para discutir las relaciones tensión-intensidad en los circuitos de corriente alterna, mencionaremos brevemente los filtros eléctricos, discutiremos la dissipación de potencia en los circuitos de alterna y consideraremos algunos de los instrumentos empleados para medir intensidades, tensiones y potencias en corriente alterna. Para terminar el capítulo, haremos una breve descripción del transformador, de los generadores de energía eléctrica y de los motores para convertir la energía eléctrica en energía mecánica.

10.2 Tensiones sinusoidales

Vimos en el Cap. 8 que, según la ley de inducción de Faraday, en una bobina de N espiras, y área A , que gire con una velocidad angular ω en un campo uniforme B , se induce una fem:

$$\mathcal{E} = NAB\omega \operatorname{sen} \omega t \quad (8.20)$$

Esta bobina girando a velocidad constante constituye un generador de alterna, que podría emplearse como fuente de tensión en el circuito de la Fig. 10.1. Antes de seguir adelante, vamos a discutir varias formas de describir matemáticamente una tensión de este tipo. Escribiremos de nuevo la Ec. (8.20) en la forma $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$, o bien, puesto que la fem da lugar a una tensión entre extremos del circuito, podremos escribir por conveniencia

$$v = V_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (10.1)$$

Esta curva se ha dibujado en la Fig. 10.2. V_0 se denomina *amplitud*

$$v = V_0 \cos \omega t \quad (10.2)$$

La única diferencia está en el valor inicial de la función para $t = 0$, que es cero para la función seno y tiene el valor máximo para la función coseno. Evidentemente, puede usarse cualquiera de las dos.

En lo que sigue, se da especial importancia al comportamiento de los circuitos cuando se aplica una tensión *sinusoidal*. Aunque existen muchas otras formas de variación de tensión más o menos complicadas, hay dos razones para concentrarse en ésta de tipo sencillo. Una es que en gran parte de las aplicaciones prácticas de la corriente alterna aparecen tensiones e intensidades sinusoidales. La otra es que uno de los métodos para estudiar el comportamiento del circuito frente a variaciones con el tiempo más complicadas es aplicarle una tensión sinusoidal de amplitud V_0 .

ω pulsación ($\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia), y el argumento ωt , de la función sinusoidal, fase de la tensión. Para aclarar esta terminología, consideremos el círculo generatriz indicado en la Fig. 10.3. Imaginemos un punto que gira sobre la circunferencia con la fre-

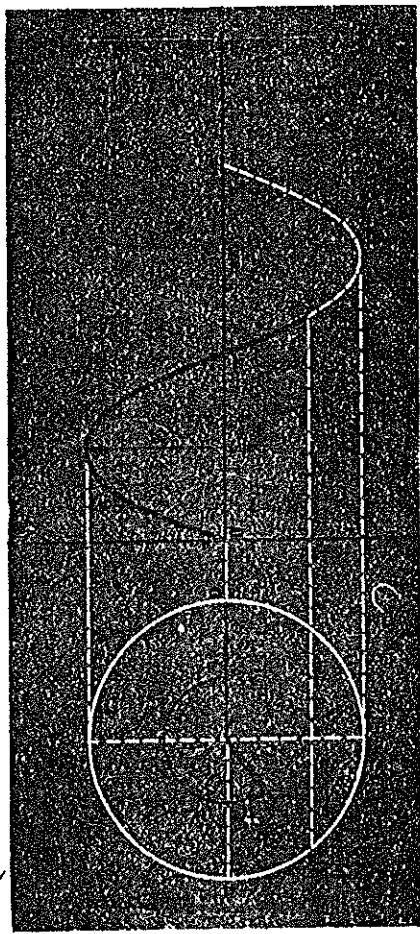


Fig. 10.3 Circunferencia generatriz para la función seno.

cuencia f revoluciones por segundo, o sea $\omega = 2\pi f$ radianes/seg, en sentido contrario a las agujas del reloj. El radio vector que determina este punto, dibujado en la figura, ocupa en el instante $t = 0$ la posición correspondiente a la línea de trazo fino. La proyección de este punto sobre el eje y se mueve sinusoidalmente de arriba abajo y viceversa, y si desplazamos el punto proyectado según el eje x en la forma indicada, se traza la función sinusoidal. Los términos *amplitud*, *fase*, *frecuencia* y *pulsación* son evidentes en este esquema. Podríamos haber alcanzado el mismo resultado partiendo de la expresión

$$v = V_0 \cos \omega t$$

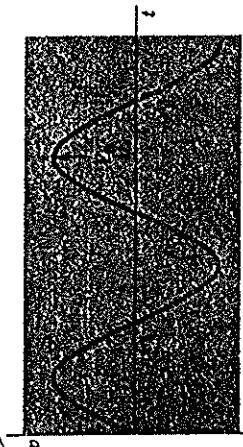


Fig. 10.2 Variación con el tiempo de una tensión sinusoidal de amplitud V_0 .

de funciones seno y coseno apropiadas. Así, pues, el problema básico en todos los casos es el conocimiento del comportamiento de los circuitos para tensiones aplicadas sinusoidales. El análisis de este comportamiento por superposición de funciones seno y coseno depende de la naturaleza *lineal* de los elementos de circuito básicos. Por ejemplo, encontraremos que cuando se duplica la tensión alterna aplicada a una resistencia, a un condensador o a una autoinducción, la corriente alterna que pasa también se duplica.

10.3 Relaciones entre tensión e intensidad

Antes de considerar el comportamiento de un circuito como el de la Fig. 10.1, vamos a resumir lo que sabemos acerca de la relación tensión-intensidad cuando se aplica una tensión sinusoidal a los tres elementos de circuito por separado.

Resistencia. La ecuación correspondiente al circuito de la Fig. 10.4

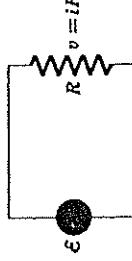


Fig. 10.4 Circuito con una fuente de tensión y una resistencia.

es $\epsilon = v = iR$. Como R es una constante, si v e i son sinusoidales la otra también lo será y tendrá la misma fase. Por ejemplo, podemos tomar como tensión sinusoidal $v = V_0 \cos \omega t$. Sustituyendo en la ecuación del circuito obtenemos para la corriente

$$i = \frac{V_0}{R} \cos \omega t \quad (10.3)$$

La amplitud de la corriente sinusoidal es, pues, V_0/R . Si llamamos I_0 a esta amplitud tenemos

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \quad (10.4)$$

Como tanto i como v son proporcionales a $\cos \omega t$, la intensidad de la corriente a través de la resistencia, está en fase con la tensión entre sus extremos. Según las Ecs. (10.3) y (10.4) la ley de Ohm es válida no solo para los valores instantáneos de v y i , sino también para las amplitudes sinusoidales I_0 y V_0 .

Podemos demostrar gráficamente los resultados anteriores como se indica en la Fig. 10.5. En ella los vectores V_0 e I_0 que se han dibujado dan las amplitudes y fase relativa de las dos magnitudes sinusoidales v e i . Si también fijamos la frecuencia o pulsación ω del

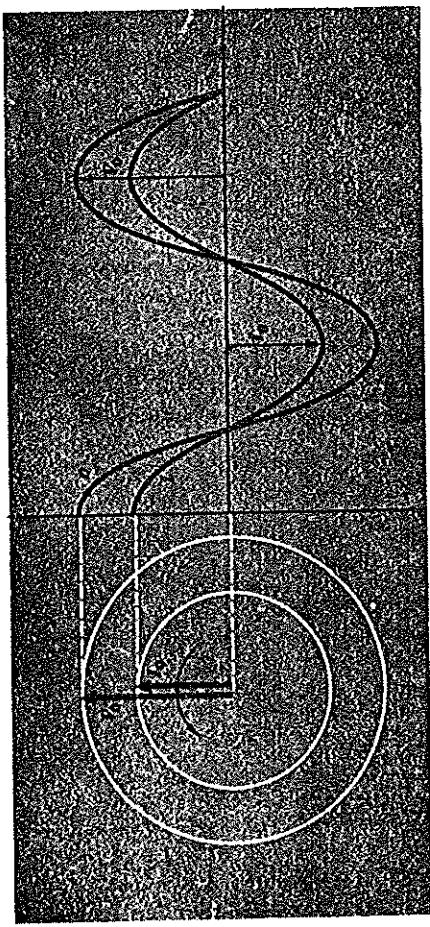
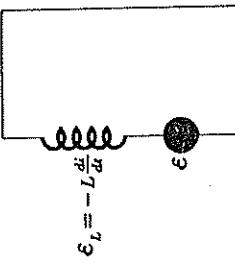


Fig. 10.5 Relación entre la tensión y la intensidad en una resistencia. Ambas magnitudes están en fase.

sistema, tenemos todos los datos necesarios sobre v e i . Llamaremos a estas líneas V_0 e I_0 del diagrama vectores generatrices de la tensión y la intensidad.

Autoinducción. En la Fig. 10.6a se indica una autoinducción co-



$$\epsilon_L = -L \frac{di}{dt} \quad (a)$$

Fig. 10.6 Autoinducción para conectar a una fuente alterna. (a) La ecuación para el circuito es $\epsilon + \epsilon_L = 0$. (b) Si la tensión aplicada es $\epsilon = V_0 \cos \omega t$, la caída de tensión en la autoinducción es $\epsilon_L = -V_0 \cos \omega t$.

$$\epsilon = v \quad (b)$$

nectada a una fem alterna \mathcal{E} . La fem inducida en la autoinducción vendrá dada por

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad (8.17)$$

Como la ecuación del circuito es

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = 0$$

nos resulta

$$\mathcal{E} - L \frac{di}{dt} = 0 \quad \circ \quad \mathcal{E} = L \frac{di}{dt}$$

Podemos dibujar de nuevo el circuito en la forma indicada en la Fig. 10.6b, y como la fem alterna da lugar a una tensión alterna v entre los terminales del generador, esta última ecuación puede escribirse

$$v = L \frac{di}{dt}$$

Por tanto, la tensión aplicada v produce una corriente variable en la autoinducción. El valor de di/dt es el que da la Ec. (10.5).

Si tomamos $v = V_0 \cos \omega t$, despejando di/dt se obtiene

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_0}{L} \cos \omega t$$

y por integración llegamos a la expresión para la intensidad de la corriente

$$i = \frac{V_0}{\omega L} \int \cos \omega t \, dt = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t. \quad (10.6)$$

Si llamamos I_0 , como anteriormente, a la amplitud de esta intensidad, tenemos

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L} \quad (10.7)$$

La magnitud ωL juega el papel de R en la Ec. (10.4), y se llama *reactancia inductiva*. La Ec. (10.7) tiene la misma forma que la ley de Ohm, pero la intensidad y la tensión no tienen la misma fase. Si

v varía como el $\cos \omega t$, i varía como el $\sin \omega t$. Este resultado se ha expresado en la Fig. 10.7. Mediante la representación gráfica vemos

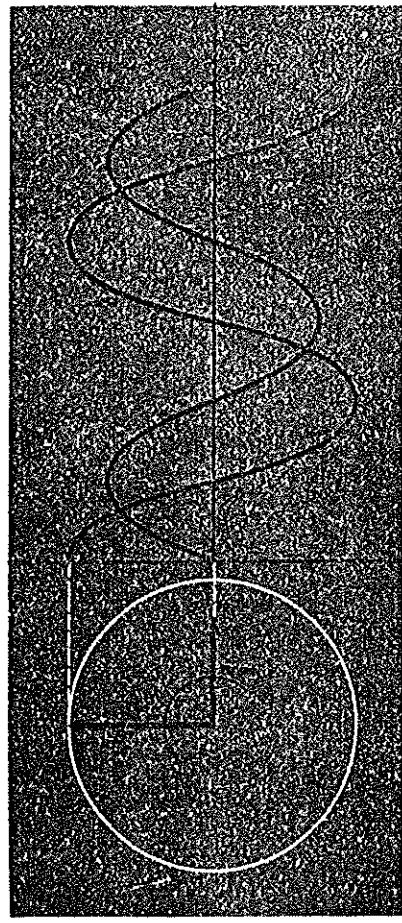


Fig. 10.7 Relación entre la tensión y la intensidad en una autoinducción. La intensidad está retrasada con respecto a la tensión en un ángulo de 90° .

que la fase de la intensidad está *retrasada* respecto a la fuente de tensión en un ángulo de fase de 90° . También podemos llegar a este resultado mediante la transformación trigonométrica,

$$i = \frac{V_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{V_0}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Condensador. La ecuación del circuito de la Fig. 10.8 con un con-

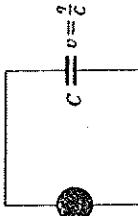


Fig. 10.8 Circuito con fem y un condensador.

densador es $\mathcal{E} = v = q/C$. Mediante $i = dq/dt$, podemos derivando convertirla en

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} i \quad (10.8)$$

Y tomando de nuevo $v = V_0 \cos \omega t$, encontramos $dv/dt = -\omega V_0 \sin \omega t$, por tanto

$$i = -\omega C V_0 \sin \omega t \quad (10.9)$$

En la Fig. 10.9 se han dibujado estas funciones. La amplitud de la intensidad es

$$(10.10) \quad I_0 = \omega C V_0$$

Esta vez el término que reemplaza a R en la ley de Ohm es $1/\omega C$. Esta magnitud se llama **reactancia capacitiva**. En este caso, la fase adelanta en 90° a la tensión.

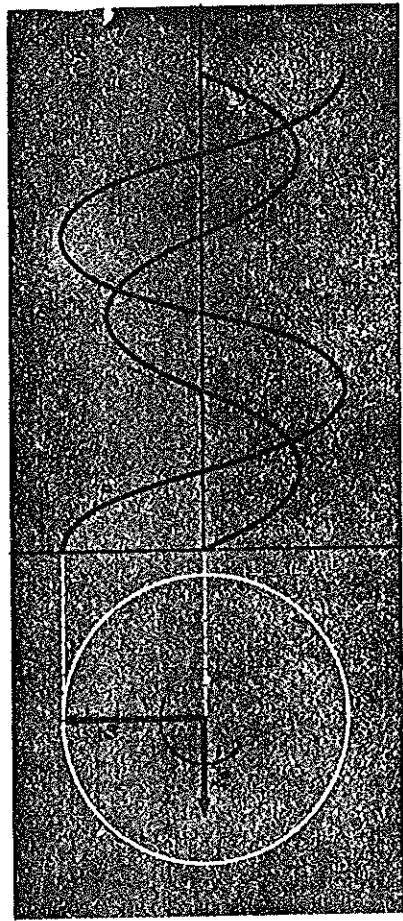


Fig. 10.9 Relación entre la tensión y la intensidad en un condensador. La intensidad adelanta en 90° a la tensión.

de la intensidad *adelanta* en 90° a la tensión. Esto se deduce de nuevo de la transformación trigonométrica

$$(10.11) \quad i = -\omega C V_0 \sin \omega t = \omega C V_0 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

10.4 Circuito RLC serie

Vamos ahora a considerar el circuito serie completo de la Fig. 10.1. Para determinar el comportamiento del circuito, debemos señalar primeramente el hecho importante de que en tal circuito la intensidad instantánea es la misma en todas partes. Esto se deduce directamente de la ecuación de continuidad. Aunque dentro del condensador se almacene carga, fuera de él no hay ningún sistema que pueda almacenarla, y el movimiento de carga en un conductor implica una corriente igual en todos sus puntos. Aun en el condensador vemos que el aumento de carga positiva en una placa exige un aumento igual de carga negativa en la otra placa, lo que es equivalente a que las intensidades en ambos lados sean iguales.

Teniendo presente este hecho, podemos obtener la solución del problema por un método gráfico simple.

En la Fig. 10.10 se han dibujado los tres diagramas de las Figs. 10.3, 10.5 y 10.7, modificados en dos aspectos. Se ha cambiado

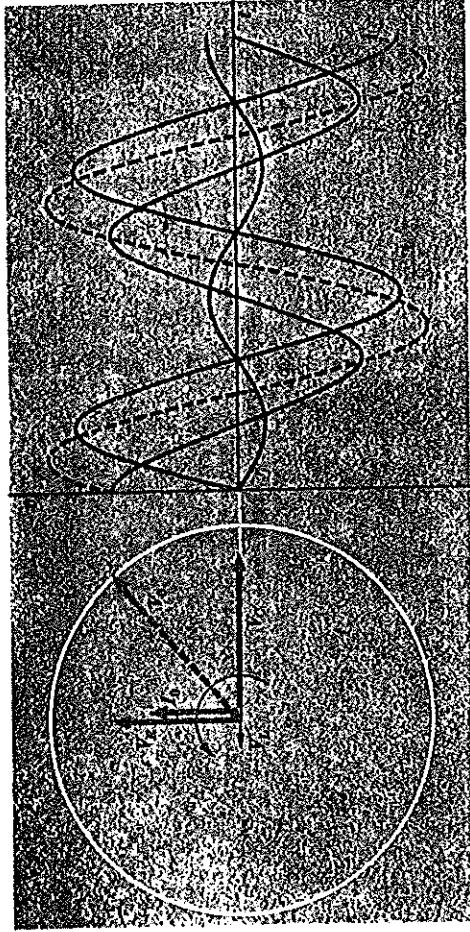


Fig. 10.10 Circunferencia generatrix para obtener la solución gráfica del circuito serie RLC.

la escala de modo que la amplitud de la intensidad sea la misma en todos, o sea $I_R = I_L = I_C$. Así mismo, los diagramas se han girado unos respecto a otros hasta conseguir que los vectores generatrices de la intensidad sean paralelos. ¡Estas dos modificaciones son las apropiadas para el circuito serie, er, el que la intensidad en todos los puntos del circuito es la misma! Habiendo conseguido que la amplitud y fase de la intensidad sea la misma en todos los elementos, nos resulta que los vectores generatrices de la tensión correspondientes V_R , V_L y V_C nos dan al fin las amplitudes y fases relativas de las tensiones sinusoidales; entre extremos de los elementos. El valor instantáneo de la tensión del generador es igual a la suma de las tensiones instantáneas entre extremos de cada elemento.

El valor instantáneo de la tensión del generador es igual a la suma de las tensiones instantáneas entre extremos de cada elemento. Sin embargo, como la suma de tensiones sinusoidales de la misma frecuencia es siempre otra tensión sinusoidal, podemos expresar este mismo hecho diciendo que el vector generatriz de la tensión resultante, entre extremos de todos los elementos, es precisamente igual a la suma vectorial de los vectores generatrices individuales. A fin de obtener la amplitud y fase de este vector (que se ha representado de trazos en la Fig. 10.10), se han dibujado de nuevo los vectores individuales en la Fig. 10.11 de forma que pueda realizarse su suma.

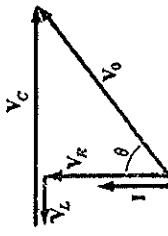


Fig. 10.11 Diagrama vectorial que da la suma vectorial de las tensiones en un circuito serie RLC.

La rotación del diagrama en bloque a la frecuencia adecuada genera la tensión sinusoidal de la fuente de amplitud V_0 . Como la corriente está en fase con V_R , el ángulo θ es el ángulo de fase entre la intensidad y la tensión aplicada V_0 . Como nuestro convenio era hacer girar el diagrama en sentido contrario a las agujas del reloj, en este ejemplo la intensidad adelanta a la tensión de la fuente en el ángulo θ . Si empleamos las relaciones tensión-intensidad para la resistencia, la autoinducción y el condensador obtenidas anteriormente y el diagrama vectorial como guía, podemos llegar a una solución cuantitativa del circuito RLC de la Fig. 10.1. Vamos a resumir estos resultados anteriores, dando la tensión entre extremos en cada elemento de circuito y su relación con la intensidad que lo atraviesa:

$$V_R = I_R R \quad I_R \text{ en fase con } V_R$$

$$V_L = I_L \omega L \quad I_L \text{ retrasada } 90^\circ \text{ respecto a } V_L$$

$$V_C = I_C \frac{1}{\omega C} \quad I_C \text{ adelantada } 90^\circ \text{ respecto a } V_C$$

Como establecimos anteriormente, en el circuito serie la intensidad tiene la misma amplitud y fase en todos los puntos. Por tanto, tenemos

$$I_C = I_R = I_C = I_L$$

Como en este circuito serie la tensión aplicada al circuito es la suma vectorial de los vectores generatrices de tensión, podemos escribir

$$V_0 = V_R + V_L + V_C = I_0 \left(R + \omega L + \frac{1}{\omega C} \right) \quad (10.12)$$

En esta expresión hemos indicado la naturaleza vectorial de la suma poniendo R , ωL y $1/\omega C$ después de dividir por el término común I_0 , para recordar el carácter vectorial de los vectores generatrices de tensión. El diagrama vectorial para cada uno de los términos será ahora el mismo que el de la Fig. 10.11 salvo un cambio de escala.

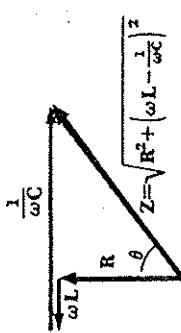


Fig. 10.12 Diagrama vectorial para las impedancias. La impedancia Z es la suma vectorial de los términos resistencia y reactancia.

Este diagrama se ha dibujado en la Fig. 10.12. Por ser rectángulo el triángulo que resulta, la solución de la Ec. (10.12) para I_0 resulta ser

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{V_0}{Z} \quad (10.13)$$

Hemos introducido la magnitud

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (10.14)$$

que se denomina *impedancia* del circuito serie. Como es

$$Z = \frac{V_0}{I_0} \quad (10.15)$$

la impedancia en este circuito de corriente alterna juega el papel de la resistencia en un circuito de corriente continua. Nótese que siempre que los términos de reactancia contribuyen a Z , el vector tensión V_0 entre extremos del circuito está fuera de fase con el vector intensidad I_0 . Arbitrariamente hemos elegido el sentido de $L\omega$ en la Ec. (10.13) como positivo, lo que hace $1/\omega C$ negativo. Como el término reactivo $(L\omega - 1/\omega C)$ figura elevado al cuadrado, esta elección no tiene influencia sobre el valor de la impedancia.

El resultado dado en la Ec. (10.13) relaciona únicamente la amplitud de la intensidad a través del circuito con la amplitud de la tensión aplicada. Para determinar la relación entre las fases de la intensidad y la tensión aplicada, escribiremos la expresión de la intensidad instantánea

$$i = \frac{V_0 \cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/\omega C)^2}} \quad (10.16)$$

Según esta ecuación, θ es el ángulo con que la intensidad está *retrasada* respecto a la tensión aplicada. En las Figs. 10.11 ó 10.12 podemos ver que el valor de θ es tal que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (10.17)$$

Tal como hemos elegido los signos de ωL y $1/\omega C$ en el diagrama vectorial, si $(\omega L - 1/\omega C)$ es positivo θ será positivo. En nuestro ejemplo, θ es negativo, lo que corresponde a una intensidad que *adelanta* a la tensión aplicada.

Lo usual es escribir los términos reactivos de la impedancia en la forma siguiente:

Reactancia inductiva:

$$\omega L = X_L$$

Reactancia capacitiva:

$$\frac{1}{\omega C} = X_C$$

Reactancia total:

$$X = X_L - X_C$$

Con esta nomenclatura la impedancia resulta:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (10.18)$$

Vamos a obtener ahora la misma solución del circuito serie RLC de la Fig. 10.1, algo más rigurosamente. Si se aplica una tensión sinusoidal al circuito, la corriente resultante será también sinusoidal. Podemos, pues, escribir las expresiones siguientes para la intensidad y la tensión:

$$i = I_0 \operatorname{sen} \omega t \quad y \quad v = V_0 \operatorname{sen} (\omega t - \theta) \quad (10.19)$$

Unicamente hemos hecho aquí la hipótesis de que la tensión total v (que debe ser igual a la tensión de la fuente de energía eléctrica) es sinusoidal, y tiene la misma frecuencia que la corriente sinusoidal. Deseamos obtener la amplitud y el ángulo de fase. El hecho de que las tensiones instantáneas en cada elemento se suman para dar la tensión aplicada puede expresarse en la forma

$$RI_0 \operatorname{sen} \omega t + L\omega I_0 \cos \omega t - \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = V_0 \operatorname{sen} (\omega t - \theta) \quad (10.20)$$

Hemos hecho esta suma, teniendo en cuenta el adelanto o retraso de fase de las tensiones empleando la función trigonométrica (seno o coseno) apropiada. La solución de esta ecuación nos permite hallar la relación entre V_0 e I_0 , así como el ángulo de fase entre ellas.

Como esta ecuación es cierta en todo instante, podemos escribir particularizando para $\omega t = 0$ y para $\omega t = \pi/2$, las ecuaciones

$$L\omega I_0 - \frac{I_0}{\omega C} = V_0 \operatorname{sen}(-\theta) = -V_0 \operatorname{sen} \theta \quad (\omega t = 0) \quad (10.21)$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumando, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1$, resulta

$$\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] I_0^2 = V_0^2 \quad (10.22)$$

Si despejamos I_0 , obteniendo la raíz cuadrada, llegamos de nuevo a la Ec. (10.13) deducida anteriormente por el método gráfico.

Un método aún más elegante de resolver los problemas de corriente alterna es el empleo de magnitudes complejas. En el Apéndice D se da una descripción breve de cómo se aplica esta técnica.

10.5 Circuito RLC paralelo

Otro circuito que podemos examinar con facilidad es el indicado en la Fig. 10.13. En él, la tensión aplicada a todos los elementos es la misma en amplitud y fase. Esto exige que las intensidades sean ahora diferentes. Podemos obtener la amplitud de la intensidad en cada uno de los elementos mediante las ecuaciones siguientes:

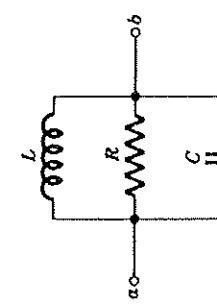


Fig. 10.13 Circuito RLC paralelo.

$$|I_R| = \frac{V_0}{R} \quad (10.23)$$

$$|I_C| = \frac{V_0}{X_C} = \frac{V_0}{1/C\omega}$$

$$|I_L| = \frac{V_0}{X_L} = \frac{V_0}{L\omega}$$

Las fases relativas de estas intensidades se obtienen notando que la intensidad en el condensador adelanta a la tensión en 90° y en la autoinducción retrasa en 90° . Así es posible dibujar un diagrama de fases para las intensidades como el de la Fig. 10.14. Hemos llamado I_0 a la suma vectorial de las intensidades; esta suma es, pues, la intensidad que entra y sale por los terminales del conjunto *a* y *b*. Como la tensión aplicada está en fase con la intensidad en la resistencia, tal como se ha indicado en el diagrama, θ es el ángulo de fase entre la intensidad resultante y la tensión aplicada. Calcularemos el valor de la intensidad por medio de la relación

la intensidad que entra y sale por los terminales del conjunto *a* y *b*. Como la tensión aplicada está en fase con la intensidad en la resistencia, tal como se ha indicado en el diagrama, θ es el ángulo de fase entre la intensidad resultante y la tensión aplicada. Calcularemos el valor de la intensidad por medio de la relación

$$I_0 = |I_R + I_C + I_L| = V_0 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) = V_0 \frac{1}{Z} \quad (10.24)$$

en la que la suma debe ser vectorial. Así, pues, para el circuito paralelo,

$$\frac{1}{Z} = \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10.25)$$

Nótese que los signos de X_C y X_L son los opuestos a los que usábamos en el caso del circuito serie. Esto resulta de que en el caso paralelo tienen la misma fase las tensiones, mientras que en el caso serie tienen igual fase las intensidades. La expresión completa para la intensidad resulta ser

$$i = \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} V_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (10.26)$$

estando θ determinado por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1/X_C - 1/X_L}{1/R} = \frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}$$

10.6 Resonancia

Aún hay otro aspecto del circuito serie de la Fig. 10.1 que vamos a examinar ahora. Si nos fijamos de nuevo en la ecuación que nos da la intensidad en el circuito serie

$$i = \frac{V_0 \cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (10.16)$$

encontramos que para una serie de valores dados de R , L , C y V_0 , la impedancia $Z = [R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2}$ varía con la frecuencia ω , y, por consiguiente, la intensidad varía en amplitud y fase. La corriente es máxima para una frecuencia tal que

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (10.27)$$

Si llamamos ω_0 a esta frecuencia de resonancia, tenemos que

$$\omega_0 = \left(\frac{1}{LC} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10.28)$$

Para este valor particular de la frecuencia, i y v están en fase y la relación tensión-intensidad coincide con la ley de Ohm. En el diagrama de la Fig. 10.11 vemos que la condición de resonancia es que las tensiones entre extremos de L y de C sean iguales y opuestas, de modo que el ángulo de fase sea cero. Nótese también que si la resistencia es muy pequeña, la intensidad se hace muy grande en resonancia. Igualmente, cuanto menor sea la resistencia, más rápida será la variación con la frecuencia de la intensidad en las proximidades de la resonancia.

La importancia de la resonancia es muy grande, puesto que en otros campos de la Física se presentan efectos exactamente semejantes; por ejemplo, el caso sencillo de un péndulo en el que existe un cierto amortiguamiento (lo que conduce a un término equivalente a la resistencia).

El circuito paralelo de la Fig. 10.13 también presenta un comportamiento resonante. En este caso la resonancia corresponde a $1/X_C = 1/X_L$, lo que conduce de nuevo a $\omega_0 = (1/LC)^{1/2}$. Nótese que en resonancia Z es máxima, con lo que la intensidad es mínima. Un modo de interpretar la situación en resonancia es decir que I_0 es precisamente igual a la intensidad a través de la resistencia, aunque además en el circuito existen otras corrientes circulando a través de L y C ; éstas son de igual magnitud y sentidos opuestos, y como consecuencia se compensan y no dan contribución alguna a la intensidad exterior I_0 .

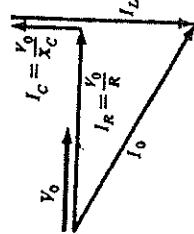


Fig. 10.14 Diagrama vectorial para el circuito RLC paralelo, que da la suma vectorial de las intensidades.

10.7 Transitorios

En cualquier circuito en que se pueda almacenar energía, como en un condensador cargado o en una autoinducción recorrida por una corriente, si aplicamos o quitamos bruscamente una tensión existe un periodo durante el cual el circuito se adapta a las nuevas condiciones. Estos efectos temporales se denominan *transitorios*, y vamos a discutir unos cuantos casos.

El primer ejemplo es el de una resistencia y una autoinducción en serie, a las que se conecta una tensión cerrando un interruptor, en la forma indicada en la Fig. 10.15. La resistencia presente puede

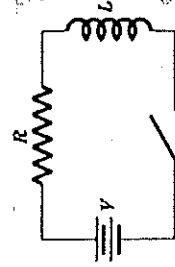


Fig. 10.15 Esquema para estudiar el régimen transitorio en un circuito RL serie.

ser simplemente la resistencia mínima inevitable del circuito o bien una resistencia incluida a propósito. Tan pronto como se cierra el interruptor, la situación está descrita por la expresión

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (10.29)$$

que es una ecuación diferencial, cuya solución particular para este caso exige establecer las condiciones iniciales. Es evidente que en esta ecuación pueden separarse las variables con lo que su solución es muy fácil. En efecto, podemos escribir

$$\frac{-R}{V - Ri} di = -\frac{R}{L} dt$$

en la que hemos multiplicado ambos miembros por $-R$ con objeto de que el primero resulte una diferencial exacta. Integrando resulta

$$\ln(V - Ri) = -\frac{R}{L} t + C \quad (10.30)$$

Podemos determinar el valor de la constante de integración C a partir de las condiciones iniciales, ya que para $t = 0$, al cerrar el interruptor, es $i = 0$. Así resulta $C = \ln V$. Introduciendo este valor y poniendo la ecuación en forma exponencial, tenemos

$$V - Ri = Ve^{-(R/L)t} \quad (10.31)$$

La corriente valdrá

$$i = \frac{V}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) = I(1 - e^{-(R/L)t}) \quad (10.32)$$

Hemos remplazado V/R por I , el valor *estacionario* de la intensidad, que se alcanza cuando ha transcurrido un tiempo suficientemente largo. Esta solución se ha dibujado en la Fig. 10.16. El comportamiento del circuito queda completamente determinado por el parámetro R/L , o por su recíproco $L/R = \tau$, denominado *constante de tiempo* del circuito. Empleando esta definición, la ecuación queda en la forma

$$i = I(1 - e^{-t/\tau}) \quad (10.33)$$

τ es el tiempo necesario para que la intensidad crezca hasta $(1 - 1/e)$, o sea 0,632, de su valor final. Esto resulta de hacer $t = \tau = L/R$, en efecto

$$i = I \left(1 - \frac{1}{e} \right) = I(1 - 0,368) = 0,632I$$

Vamos a ver a continuación el efecto de quitar bruscamente la tensión aplicada al circuito, cambiando el conmutador indicado en la Fig. 10.17 de la posición A a la B. Si tomamos $t = 0$ en el instante en que se mueve el conmutador, la ecuación que describe el

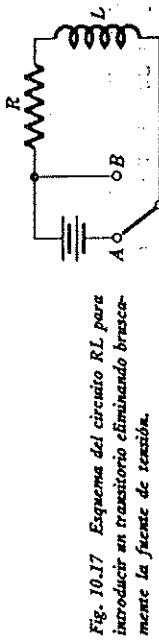


Fig. 10.17 Esquema del circuito RL para introducir en transitorio suministrando bruscamente la fuente de tensión.

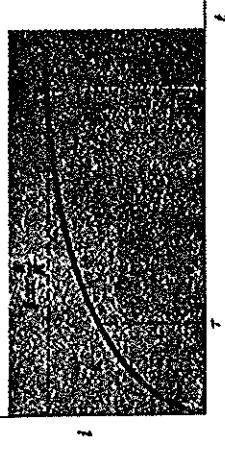


Fig. 10.16 Variación con el tiempo de la intensidad en un circuito RL.

Separando variables e integrando obtenemos

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + C$$

Si introducimos la condición inicial de que para $t = 0, i = I_0$, el valor estacionario de la intensidad, resulta

$$i = I_0 e^{-(R/L)t} = I_0 e^{-t/\tau}$$

En la Fig. 10.18 se da una gráfica de esta ecuación. En este caso

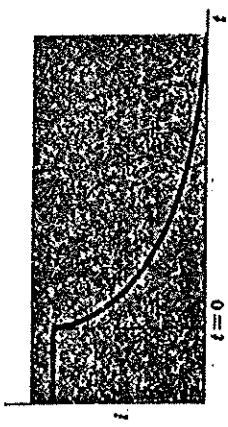


Fig. 10.18 Disminución de la intensidad en el circuito RL después de haber eliminado la fuente de tensión.

es el tiempo para que la intensidad caiga a $1/e$ de su valor estacionario. Vamos ahora a considerar el circuito con condensador de la

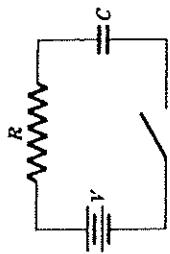


Fig. 10.19 Esquema para introducir bruscamente una tensión V en un circuito RC .

Fig. 10.19. La ecuación aplicable, una vez que se ha cerrado el interruptor, es

$$V = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad (10.35)$$

en la que hemos puesto dq/dt en lugar de i para tener solo las variables q y t . Separando variables e integrando, deducimos

$$\ln \left(V - \frac{q}{C} \right) = -\frac{t}{RC} + K$$

Si determinamos la constante de integración K mediante la condición de que para $t = 0, q = 0$, esto es, partimos del condensador descargado, obtenemos

$$V - \frac{q}{C} = V e^{-t/RC}$$

Y despejando q

$$q = CV(1 - e^{-t/RC}) = Q_0(1 - e^{-t/\tau}) \quad (10.36)$$

en la que hemos escrito Q_0 en lugar de CV , para la carga del condensador en el equilibrio y τ en lugar de RC , para la constante de tiempo en este caso. Derivando podemos obtener la intensidad:

$$\frac{dq}{dt} = i = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{V}{R} e^{-t/\tau} \quad (10.37)$$

Esta curva se ha representado en la Fig. 10.20. En ella hemos dibujado también el aumento de carga del condensador según la Ecuación (10.36).

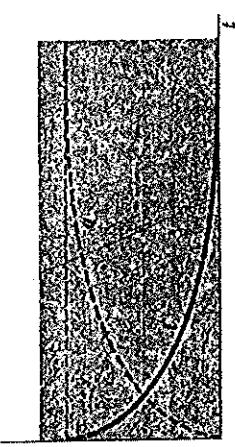


Fig. 10.20 Regimen transitorio en el circuito RC serie.

Finalmente, estudiaremos el caso de la descarga del condensador como se indica en la Fig. 10.21. Inicialmente el condensador está cargado a un potencial $V_0 = Q_0/C$. Cuando se cierra el interruptor, el fenómeno estará descrito por la ecuación

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0 \quad (10.38)$$

que es la misma que la Ecuación (10.35) salvo que la tensión de la batería es cero. Resolvéndola por el método usual nos da

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \quad (10.39)$$

Y la expresión de la intensidad es

$$\dot{i} = \frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \quad (10.40)$$

Este resultado es idéntico al de la Ecuación (10.37). Sin embargo, la corriente en este último caso pasa en el sentido en que da lugar a

la descarga del condensador, mientras que en el caso anterior pasaba en el sentido en que provoca la carga del condensador.

Es posible construir circuitos con resistencia y condensador que tengan constantes de tiempo que van desde tiempos muy cortos a muchos segundos. Como resultado existen muchas aplicaciones prácticas de estos circuitos. Por ejemplo, el método más corriente de medir resistencias de valor muy grande es determinar la forma de la descarga de un condensador cuando se conecta la resistencia entre sus terminales. De este modo pueden medirse resistencias hasta de 10^{12} ohms. El método está basado evidentemente en la medida de τ , a partir de la cual R puede calcularse según $RC = \tau$, si se conoce el valor del condensador.

10.8 Filtros eléctricos

Otro campo de gran interés práctico, asociado con la respuesta de los circuitos con resistencia, autoinducción y capacidad a una corriente alterna, es el de los *filtros*. Un filtro es un circuito que permite pasar señales eléctricas de ciertas frecuencias y atenua otras en mayor o menor extensión. Examinemos en forma cualitativa el comportamiento de dos circuitos filtro muy sencillos, que se han indicado en la Fig. 10.22. La señal eléctrica se aplica a los terminales a y b .

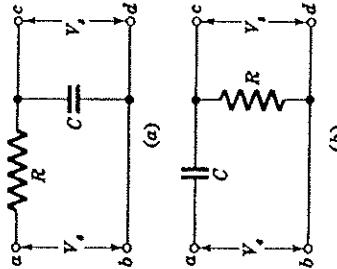


Fig. 10.22 Dos circuitos filtro sencillos.
(a) Es un filtro pasa-baja y (b) es un filtro pasa-alta.

En (a) podemos reconocer el circuito RC antes estudiado, pero con una tensión alterna aplicada entre a y b . La salida es la tensión entre terminales del condensador. La impedancia que ofrece la resistencia es R y la del condensador $1/\omega C$; por tanto, la impedancia de C y R en serie es

$$\left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Si la amplitud de la tensión de entrada es constante, podemos obtener la tensión de salida en función de la frecuencia por la relación

$$V_s = V_e \frac{1/\omega C}{[R^2 + (1/\omega C)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (10.41)$$

Esta variación se recoge en la Fig. 10.23. Cuando $1/\omega C = R$, o sea $\omega = 1/RC$, la salida es $(1/\sqrt{2})V_e$. En esta sencilla deducción de la

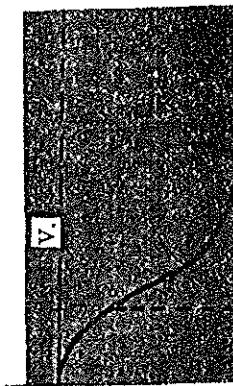


Fig. 10.23 Salida de un filtro pasa-baja.

Ec. (10.41) hemos despreciado los posibles efectos de la impedancia que pueda estar conectada a la salida. En muchas aplicaciones se tratará de una impedancia o resistencia, mucho mayor que R , o $1/\omega C$, en el intervalo de frecuencias de interés, con lo que esta aproximación es válida. Este circuito se denomina *filtro pasa-baja*, puesto que las señales de alta frecuencia (ω varias veces mayor que $1/RC$) resultan fuertemente atenuadas.

El circuito b de la Fig. 10.22 funciona del modo contrario y se denomina *filtro pasa-alta*. La tensión de salida viene dada por

$$\hat{V}_s = V_e \frac{R}{[R^2 + (1/\omega C)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (10.42)$$

empleando el mismo razonamiento que antes. La curva de atenuación es la dibujada en la Fig. 10.24.

En general, puede obtenerse un *corte* más rápido (una variación de la atenuación con la frecuencia más brusca) mediante circuitos

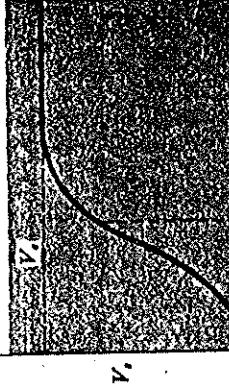


Fig. 10.24 Salida de un filtro pasa-alta.

$$\omega = \frac{1}{RC}$$

más complicados, que usualmente contienen también autoinducciones. Un aspecto, inherente al hecho de que la atenuación es función de la frecuencia, que tiene considerable importancia, es que necesariamente la diferencia de fase entre la entrada y la salida varía también con la frecuencia.

En muchas aplicaciones la señal o tensión de entrada al filtro, dista mucho de ser sinusoidal. Sin embargo, como discutimos en la Sec. 10.2, el comportamiento del filtro puede estudiarse dividiendo la señal en sus componentes sinusoidales equivalentes y tratando cada una separadamente. El método llamado *análisis de Fourier* trata precisamente el problema de la relación entre una función variable con el tiempo y sus componentes sinusoidales. Un ejemplo de la acción selectiva de un filtro es su efecto sobre la música que se ha transformado en una complicada señal eléctrica en una radio o fonógrafo. El oído percibe fácilmente el efecto de un filtro pasa-baja que elimina todas las componentes sinusoidales por encima de una cierta frecuencia, o bien, el efecto de un filtro pasa-alta que elimina todas las componentes por debajo de otra frecuencia dada. Es posible también construir filtros más complicados que permitan el paso de señales en una cierta banda de frecuencias que detengan las restantes frecuencias, tanto mayores como menores.

10.9 Potencia en los circuitos de corriente alterna

Hasta aquí hemos considerado las señales sinusoidales caracterizadas por su frecuencia y amplitud. Al considerar la dissipación de energía lo normal es manejar los llamados *valores eficaces* de la tensión y la intensidad. El valor eficaz de una señal en corriente alterna es el valor de una señal de corriente continua o constante, que desarrollara la misma potencia que la señal de alterna. Un ejemplo de todos conocido es la tensión de 127 ó 220 voltios, de los circuitos de alumbrado en corriente alterna. Este es el valor eficaz de la tensión; la amplitud o valor máximo, es realmente $127 \times \sqrt{2} = 178,6$ voltios. Vamos a ver de qué procede este factor, y discutir el efecto que sobre la potencia tiene el hecho de que la intensidad y la tensión no estén en fase, como ocurre ordinariamente en los circuitos de corriente alterna que contienen autoinducciones y condensadores.

Deduciremos la relación entre valores máximo y eficaz considerando una resistencia de valor R recorrida por una intensidad continua I_0 durante un tiempo t . La cantidad de calor desprendida será $I_0^2 R t$. Si sustituimos la corriente continua por corriente alterna y dejamos que el calor desprendido sea

$$I_{ef}^2 R t \quad \text{Julios} \quad (10.43)$$

habremos de determinar la relación entre esta I_{ef} así definida y el valor máximo de la corriente alterna I_0 , siendo $i = I_0 \operatorname{sen} \omega t$.

La potencia instantánea será $i^2 R$ vatios; por tanto, en el tiempo t , el calor desarrollado valdrá

$$I_{ef}^2 R t = \int_0^t i^2 R dt = \int_0^t I_0^2 R \operatorname{sen}^2 \omega t dt \quad (10.44)$$

Si eliminamos R y sacamos I_0 , que es constante, fuera de la integral, podemos despejar I_{ef}^2 :

$$I_{ef}^2 = I_0^2 \left(\frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{sen}^2 \omega t dt \right) = I_0^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \omega t}{\omega t} \quad (10.45)$$

siendo $\operatorname{sen}^2 \omega t$ el valor medio de $\operatorname{sen}^2 \omega t$, la magnitud encerrada en el paréntesis. Puede demostrarse que

$$\operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2} \quad (10.46)$$

de varias formas. Un método gráfico muy sencillo es el que se da en la Fig. 10.25, en la que se comparan las funciones $\operatorname{sen} \omega t$ y $\operatorname{sen}^2 \omega t$

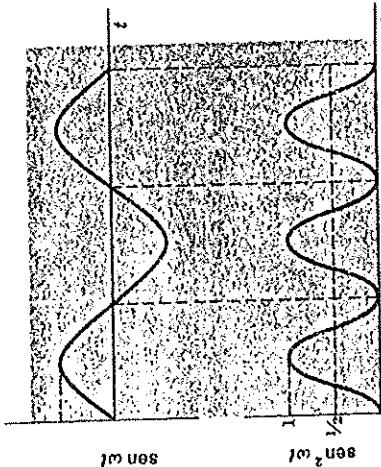


Fig. 10.25 Demostración gráfica de que
 $\operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2}$.

omega. Como esta última es también sinusoidal pero desplazada respecto al eje cero, vemos por simetría que su valor medio es $\frac{1}{2}$. Análiticamente se llega al mismo resultado, escribiendo la relación trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

Como el valor medio de $\cos 2\omega t$ es cero, se deduce inmediatamente el resultado de la Ec. (10.46).

Una vez tenemos este valor, el problema está resuelto; en efecto, podemos escribir

$$I_{ef}^2 = \frac{I_0^2}{2} \quad 0 \quad I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 = 0,707 I_0$$

El mismo tipo de razonamiento conduce a

$$V_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 = 0,707 V_0$$

Estos valores eficaces de la intensidad y la tensión son los empleados normalmente, en especial cuando se trata de potencia de la corriente alterna.

Vamos a examinar ahora la influencia del ángulo de fase entre I_0 y V_0 sobre la potencia. Como ya sabemos en corriente continua, la potencia suministrada a un circuito que tiene aplicada entre sus extremos una tensión v y por el que pasa una intensidad i , viene dada por $P = iv$. En corriente alterna, si la tensión y la intensidad están en fase, vendrán dadas respectivamente por $v = V_0 \sin \omega t$ y por $i = I_0 \sin \omega t$. La potencia será $P = iv = I_0 V_0 \sin^2 \omega t$ y su valor medio será

$$P = I_0 V_0 \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2} I_0 V_0 = I_{ef} V_{ef}$$

Por otra parte, si existe un ángulo de fase θ entre la intensidad y la tensión, de modo que

$$i = I_0 \sin (\omega t + \theta)$$

entonces la potencia valdrá

$$P = iv = I_0 V_0 \left[\frac{1}{t} \int_0^t \sin \omega t \sin (\omega t + \theta) dt \right]$$

Deberemos, pues, calcular la expresión entre paréntesis de caja, lo que nos dará el valor medio de la cantidad subintegral. Empleando una conocida relación trigonométrica, podemos escribir la Ec. (10.51) en la forma

$$\begin{aligned} P &= I_0 V_0 \left[\frac{1}{t} \int_0^t \sin \omega t (\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) dt \right] \\ &= I_0 V_0 \left[\frac{1}{t} \int_0^t (\sin^2 \omega t \cos \theta + \sin \omega t \cos \omega t \sin \theta) dt \right] \end{aligned}$$

El segundo término tiene un valor medio cero, puesto que sen ωt cos ωt es simétrica respecto a cero, y sen θ es constante. Por tanto, encontramos

$$(10.47) \quad I_{ef}^2 V_0 \cos \theta = I_{ef} V_{ef} \cos \theta$$

De esto se deduce que la potencia media disipada en una autoinducción pura o en una capacidad pura es cero. El cos θ se llama factor de potencia.

10.10 Instrumentos de corriente alterna

Es demasiado esperar que un galvanómetro ordinario, debido a la inercia mecánica de su bobina, responda a las corrientes alternas. Vamos a examinar en esta sección los fundamentos de varios instrumentos de medida en corriente alterna basados en diferentes principios.

Amperímetro térmico. Este instrumento evita por completo el problema de que el par que aparece sobre una bobina situada en un campo magnético fijo se invierte al cambiar el sentido de la corriente. Está basado en el calentamiento de un hilo por la corriente. El hilo está sometido a una ligera tensión mecánica y al calentarse se alarga. Una aguja indicadora está conectada de modo que marque este alargamiento. Como podría esperarse este aparato no es útil para corrientes muy pequeñas. Como el calentamiento es proporcional a i^2 , las divisiones para i no estarán igualmente espaciadas. Evidentemente puede emplearse también en corriente continua, pero no suele hacerse. En cambio, esto sirve para su calibrado, y las indicaciones obtenidas en corriente alterna son valores eficaces.

Electrodinamómetro. Es un dispositivo tipo galvanómetro en el que el campo magnético usual del imán permanente se sustituye por el campo producido por una corriente en una bobina auxiliar. Ambas bobinas se colocan en serie o en paralelo de modo que las variaciones de corriente en ambas son iguales. Como el campo magnético cambiará de este modo su sentido al mismo tiempo que la corriente en la bobina móvil, el par sobre ésta tiene siempre el mismo signo y la desviación es proporcional a su valor medio. Como el par es proporcional tanto a la intensidad que circula por la bobina móvil como al campo magnético, que a su vez depende de la intensidad de la corriente, el par resulta proporcional a i^2 . El electrodinamómetro puede emplearse al igual que el galvanómetro tanto para medir intensidades como tensiones.

$$(10.48)$$

$$(10.49)$$

$$(10.50)$$

$$(10.51)$$

$$(10.52)$$

Cuando las dos bobinas se conectan separadamente, una para medir la intensidad que pasa por un sistema y la otra para medir la tensión que se le aplica, el aparato mide directamente la potencia. En la Fig. 10.26 se indica esquemáticamente la forma de operar.

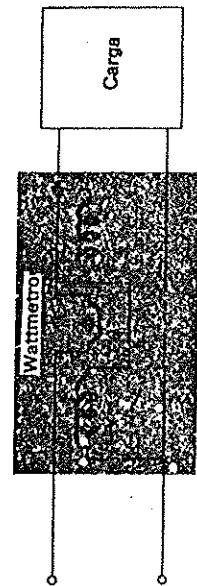


Fig. 10.26 Esquema de un wattímetro.

Aun cuando V e I no estén en fase, el aparato da la potencia correcta, puesto que el par es proporcional a $IV = I_0 V_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$, y como hemos visto, el valor medio de esta expresión es $\frac{1}{2}I_0 V_0 \cos \theta$. Este tipo de vatímetro puede usarse también en corriente continua. La sensibilidad de los aparatos electrodinámicos tiende a ser baja debido al valor relativamente bajo del campo magnético que se obtiene con las intensidades a medir comparado con el que proporciona el imán permanente en un galvanómetro.

Galvanómetro rectificador. En algunos casos se emplea un dispositivo rectificador, ordinariamente un cristal semiconductor, para obtener una corriente continua que es entonces medida por un galvanómetro ordinario. Más adelante discutiremos los rectificadores. Es suficiente destacar aquí que la tensión continua obtenida de este modo suele ser proporcional a la amplitud de la tensión alterna, con lo que el galvanómetro da una lectura proporcional a la amplitud de la tensión (o de la intensidad).

Oscilógrafo de rayos catódicos. Aunque este instrumento es de naturaleza bien distinta a la de los otros aparatos mencionados es de uso constante en los laboratorios para medir tensiones alternas, y en ocasiones también continuas. Hoy en día, que la televisión resulta familiar a todos con su tubo de rayos catódicos para formar la imagen, es probablemente innecesario dar muchos detalles, que por otra parte no tendrían cabida en el marco de este texto. Diremos, pues, únicamente algunas palabras. El corazón del oscilógrafo de rayos catódicos es un haz de electrones, procedente de un cátodo incandescente, que después de ser acelerado electrostáticamente se enfoca sobre un material fluorescente situado en la cara interior de la pantalla. La posición del haz se controla por medio de un campo electrostático o por el campo magnético producido en una bobina. La principal ventaja del aparato es la respuesta extremadamente rápida. Supongamos que la tensión alterna conectada al primario es

pida del haz a la tensión aplicada al electrodo de señal. Así, es conveniente poder ver señales cuya frecuencia es de varios megaciclos/seg. Además, el empleo de amplificadores electrónicos apropiados hace posible la observación fácil de señales de 10^{-3} voltios y aún menores. Aunque el oscilógrafo no es un aparato de medida de tipo absoluto, puede calibrarse con facilidad, de modo que se obtienen las medidas directamente en voltios. Otra gran ventaja del aparato es su gran impedancia de entrada, por lo que toma muy poca corriente del circuito que se está midiendo y no introduce perturbaciones.

10.11 El transformador

Un transformador es un dispositivo que permite cambiar una tensión alterna sin pérdida apreciable de potencia. De este modo puede encenderse una lámpara de 6 voltios a partir de la red industrial de 127 voltios sin más que conectarla mediante un transformador apropiado; igualmente puede obtenerse una tensión de 10.000 voltios para un aparato de rayos X a partir de la misma red de 127 voltios con otro transformador. Si una parte del flujo magnético, debido a la corriente que pasa por una bobina, atraviesa también otra bobina de modo que existe entre ellas una inductancia mutua, la pareja de bobinas puede emplearse como transformador. Sin embargo, lo que se pretende es conseguir tan aproximadamente como sea posible, que todo el flujo de una de las bobinas atraviese también la otra. Una forma de conseguir esto en la práctica es devanar ambas bobinas sobre un mismo núcleo ferromagnético cerrado (Fig. 10.27).

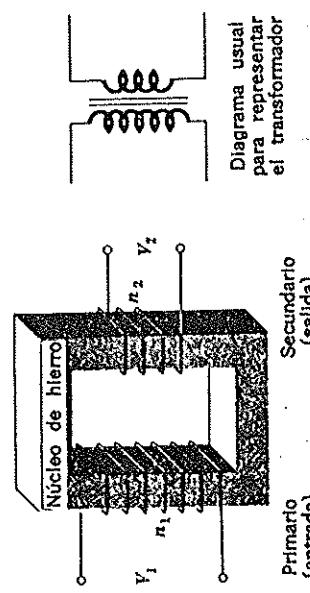


Fig. 10.27 Transformador.

Como ya hemos indicado anteriormente, el flujo tiende a quedar confinado dentro del material ferromagnético con lo que la inducción mutua de las bobinas es máxima.

La relación de tensiones entre primario y secundario es precisamente la relación de espiras entre los devanados primario y secundario. Supongamos que la tensión alterna conectada al primario es

V_1 . Si la resistencia de esta bobina es despreciable comparada con su reactancia inductiva, pasará por la bobina una intensidad i_1 , que crea un flujo magnético alterno tal que la fem inducida sea justamente igual y opuesta a V_1 ; por tanto, tenemos

$$V_1 = -n_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

siendo n_1 el número de espiras en el primario. Ahora bien, como todo el flujo atraviesa la bobina secundaria, resulta inmediatamente para la tensión de salida

$$V_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

en la que $d\Phi/dt$ tiene el mismo valor que en la Ec. (10.54). Combinando estas ecuaciones, tenemos

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Que es la ecuación básica del transformador que relaciona la razón de tensiones en los arrollamientos primario y secundario a la razón de espiras de los mismos.

Cuando no hay carga en el secundario, podemos determinar la amplitud y fase de la corriente en el primario expresando el flujo Φ en función de la fuerza magnetomotriz. Como vimos anteriormente,

$$\Phi = \frac{\text{fmm}}{R} \quad (9.54)$$

siendo R la reluctancia del circuito magnético. Si la aplicamos al devanado primario, admitiendo que la corriente en él sea sinusoidal, obtenemos

$$\Phi = \frac{n_1 i_1}{R} = \frac{n_1 I_0 \sin \omega t}{R} \quad (10.57)$$

Por tanto, el flujo varía sinusoidalmente con el tiempo y tiene la misma fase que i_1 . Si derivamos para tener $d\Phi/dt$, y sustituimos en la Ec. (10.54), resulta

$$V_1 = \frac{-\omega n_1^2 I_0 \cos \omega t}{R} \quad (10.58)$$

Esto demuestra que i_1 y V_1 están desfasadas en 90° , como era de esperar de nuestros resultados anteriores para una autoinducción

pura. Según aquel razonamiento, como el factor de potencia es cero, no hay consumo de potencia. Asimismo, si la reluctancia del circuito magnético es pequeña, la amplitud de la intensidad I_0 es también pequeña. En la práctica hay en realidad alguna pérdida de energía debido a que el factor de potencia no es exactamente cero. Esto viene de que la bobina tiene una resistencia finita, y de las pérdidas por histeresis y corrientes de Foucault en el núcleo de hierro. Sin embargo, estas pérdidas resultan muy pequeñas si se comparan con la potencia consumida normalmente por la carga conectada al secundario.

Vamos a examinar, pues, cómo cambia la situación cuando se conecta esta carga a la bobina secundaria de modo que pase una corriente secundaria i_2 . Supondremos por simplicidad que se trata de una carga puramente resistiva, de modo que V_2 e i_2 tienen la misma fase. Como resultado de la corriente i_2 se produce un flujo magnético adicional en el núcleo. Según la ley de Lenz, este flujo se opone al flujo original debido a i_1 , de modo que el flujo debería ser ahora.

$$\Phi = \frac{n_1 i_1 - n_2 i_2}{R} \quad (10.59)$$

Pero el valor del flujo debe mantenerse constante, si ha de satisfacerse aún la Ec. (10.54) para la tensión en el primario. En efecto, si la frecuencia permanece constante, Φ y $d\Phi/dt$ son proporcionales. Por tanto, la consecuencia de introducir i_2 es que i_1 debe aumentar, y podemos escribir en lugar de (10.59)

$$\Phi = \frac{n_1(i_1 + i'_1)}{R} - \frac{n_2 i_2}{R} \quad (10.60)$$

siendo i'_1 el incremento en la corriente primaria debido a la existencia de corriente en el circuito secundario. Comparando la Ec. (10.60) con la (10.57) nos da

$$n_1 i'_1 = n_2 i_2 \quad (10.61)$$

Si despreciamos la corriente primaria sin carga, que como hemos dicho suele ser muy pequeña, llegamos a la relación

$$\frac{i'_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (10.62)$$

esto es, que las intensidades de la corriente en el primario y el se-

cundario son inversamente proporcionales al número de espiras en primario y secundario. Las Ecs. (10.56) y (10.62) conducen a

$$V_{1i_1} = V_{2i_2}$$

que demuestra que la potencia a la entrada del transformador es igual a la potencia de salida. Con esto estamos despreciando las pérdidas, que en los transformadores ordinarios suelen ser de unas unidades por ciento. No haremos un estudio cuantitativo de las pérdidas en los transformadores, aunque sí vamos a indicar brevemente los esfuerzos realizados para conseguir reducir a un mínimo las pérdidas de Foucault. Como éstas aumentan con la frecuencia, el problema se hace más serio a frecuencias altas. En las aplicaciones ordinarias a 50 ciclos/seg, es suficiente normalmente construir el núcleo de hierro con láminas, como ya indicamos en la Sec. 8.12. Para frecuencias mayores, se consigue mantener las pérdidas a un valor suficientemente bajo empleando partículas de hierro finamente divididas en el seno de un aglomerante no-conductor. Finalmente, para frecuencias muy elevadas, se emplean ferritos (véase Sec. 9.10), que son materiales magnéticos aislantes.

10.12 Generadores

Ya vimos en los Ejemplos 8.5a y 8.8c la relación que existe entre la ley de inducción de Faraday y la operación de un generador eléctrico. Vamos a añadir aquí algunas discusiones sobre los detalles de construcción de los generadores de tipo práctico. Vimos en el Ej. 8.8c que una bobina giratoria en un campo magnético da corriente alterna. Para trabajar en corriente continua, se introducen usualmente dos modificaciones. La primera es el empleo de un *comutador* para invertir las conexiones a la bobina en el instante adecuado con objeto de mantener la fem siempre en el mismo sentido, en la forma descrita al tratar de la bobina giratoria empleada como motor en el Ej. 8.8d. El resultado es una tensión continua en la salida, pero con un rizado superpuesto. Se puede progresar en este sentido, como indicamos en relación con los motores, construyendo un rotor constituido por muchas bobinas separadas, cada una de las cuales se conecta a la salida a través del comutador, únicamente aquella parte del ciclo en la que su salida es aproximadamente máxima. La salida que así obtiene tiene mucho menos rizado, que si es necesario, puede reducirse aún más mediante circuitos de filtro externos. La segunda modificación importante es suministrar la corriente a las bobinas fijas, que establecen el campo magnético, de la salida de la armadura misma. Este es el generador *auto-excitado*. En la Fig. 10.28

se indican dos de las formas usadas para aplicar tensión a las bobinas de campo.

La conversión de energía mecánica en eléctrica por unidad de tiempo es $E = i_a$, siendo E la fem generada en las bobinas del rotor e i_a la intensidad que pasa por ellas. Esta afirmación supone despe-

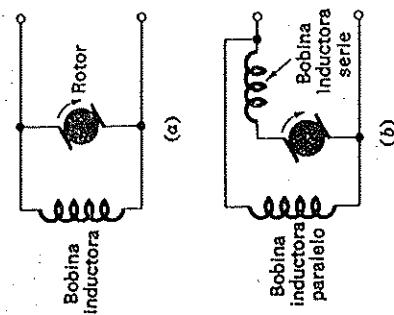


Fig. 10.28 Dos formas de excitación de las bobinas inductoras en los generadores de corriente continua: (a) excitación paralelo; (b) excitación compuesta.

ciar las pérdidas de energía en la resistencia de las bobinas que mantienen el campo magnético en el generador. En un generador bien proyectado estas pérdidas representan solo una pequeña fracción de la potencia convertida en energía eléctrica.

Los generadores de alterna se construyen, normalmente, en forma diferente. Las bobinas se disponen fijas alrededor de una serie de polos magnéticos giratorios. Estos polos son de hierro, y se mantienen magnetizados mediante una corriente continua que se hace llegar al rotor mediante unos anillos de fricción.

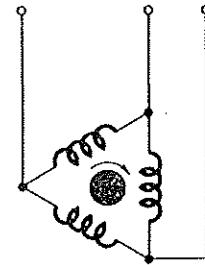


Fig. 10.29 Esquema aproximado de un generador de alterna trifásico. El campo magnético giratorio produce tensiones alternas entre cada par de terminales con diferencias de fase de 120°.

En muchas aplicaciones se disponen tres series de bobinas conectadas, como se indica en la Fig. 10.29, de modo que existe una tensión alterna entre cada dos de los tres terminales del generador. La fase de la tensión entre cada par es, sin embargo, diferente; las tres líneas procedentes del generador constituyen lo que se llama un sistema trifásico. Como puede deducirse

de la forma de disponer las bobinas, el ángulo de fase entre las tensiones es de 120° . Este sistema trifásico se emplea para los motores trifásicos especiales que discutiremos en la próxima sección.

En todos los generadores electromecánicos, la resistencia interna procede de la resistencia que presentan las bobinas en las que aparece la fuerza inducida. En el generador de excitación compuesta (véase Fig. 10.28b), un aumento de la corriente que pasa por la carga da lugar también a un aumento de la corriente magnetizante que pasa por la bobina inductora serie. El aumento resultante en el campo magnético compensa el descenso de la tensión de salida que en otro caso se presentaría al pasar una gran intensidad por el rotor, dando así una resistencia equivalente muy baja para un gran margen de corrientes.

Mencionaremos brevemente dos tipos de generadores electrostáticos. Uno, la máquina de Wimshurst, empleada ahora solamente como una máquina de alta tensión y potencia pequeña en laboratorios de prácticas. Constituye una versión mecanizada del electróforo descrito en la Sec. 1.5, en el que la carga se conseguía por un efecto de influencia. Un generador mucho más perfeccionado es el de Van der Graaf. En este aparato una correa aislante movida mediante un motor transporta las cargas eléctricas que se depositan sobre ella por medio de la descarga que aparece en las proximidades de unas puntas metálicas, hasta el interior de una gran esfera a la que pasan situándose sobre su superficie externa. En los modelos suficientemente grandes se han llegado a obtener tensiones hasta de 12 millones de voltios. Las máquinas más modernas, construidas para más de 1 millón de voltios, poseen una cubierta en la que se introduce un gas a presión para evitar la pérdida de carga que en el aire tendría lugar por efecto corona, debido al campo elevado que existe en las proximidades del conductor de alta tensión. Se puede conseguir que estas máquinas trabajen a tensión muy constante durante períodos de tiempo considerables, y, por tanto, se utilizan mucho en física nuclear cuando la energía en los procesos nucleares debe ser determinada con gran precisión. También tienen gran importancia en la producción de rayos X de alta energía.

10.13 Motores

En el Ej. 8.5c hemos visto cómo pueden emplearse las fuerzas magnéticas que aparecen sobre un conductor por el que circula corriente para convertir la energía eléctrica en mecánica. En el Ej. 8.8d hemos discutido la fuerza contralelectromotriz de un motor, que resulta de la variación de flujo al girar la bobina móvil. Estas son las ideas

fundamentales en un motor. Aquí añadiremos únicamente algunos detalles sobre la forma de operar los tipos más corrientes de motores.

El motor de corriente continua consiste, normalmente, en un rotor sobre el que existen un cierto número de bobinas que se conectan a la fuente de energía por medio de un commutador. En los motores miniatura el campo magnético es producido mediante imanes permanentes, pero, en la mayoría de los motores, el campo se produce mediante electroimanes con bobinas por las que pasa corriente procedente de la misma fuente exterior.

En el motor excitado en paralelo estas bobinas se conectan en paralelo con las del rotor. La corriente en éste está dada por

$$V_s - \varepsilon = i_a R_a$$

siendo V_s la tensión de la fuente, ε la fuerza contralelectromotriz media debida al movimiento de las bobinas del rotor en el campo magnético, y R_a e i_a la resistencia y corriente respectivamente en esas bobinas. La fuerza contralelectromotriz ε es proporcional a Φ_f , siendo Φ el flujo magnético que atraviesa las bobinas en una revolución, y f el número de revoluciones por segundo. La velocidad con que se convierte la energía eléctrica en mecánica viene dada por εi_a . También aquí despreciamos la potencia disipada en la resistencia de las bobinas inductoras que producen el campo, que es normalmente pequeña comparada con la potencia mecánica obtenida. Esta expresión para la conversión de potencia, es la misma que la de conversión de potencia mecánica en eléctrica en un generador. La potencia mecánica realizada por el motor es $P = \tau \omega$, siendo τ el par y ω la velocidad angular del motor. Si igualamos la potencia eléctrica que se convierte en mecánica a la potencia realizada, obtenemos

$$\varepsilon i_a = \tau \omega \propto \Phi f i_a = \frac{\Phi \omega}{2\pi} i_a$$

o sea

$$\tau \propto \frac{\Phi}{2\pi} i_a$$

Por tanto, en un motor excitado en paralelo, el par es proporcional a la corriente en los devanados del rotor.

En un motor excitado en serie, las bobinas inductoras y el rotor están en serie, con lo que la ecuación del circuito será

$$V_s - \varepsilon = (R_a + R_f) i_a$$

en la que R_f es la resistencia de las bobinas inductoras. El flujo magnético será aproximadamente proporcional a i_a , y, como el par

es proporcional a Φ_{i_a} , este último resultará proporcional a i_a^2 . Este contraste entre el par en los motores de continua excitados en paralelo y excitados en serie, conduce a que el motor serie presente un par de arranque más grande, puesto que la corriente tomada varía solo con $\tau^{1/2}$ en vez de ser proporcional a τ .

Los motores de corriente alterna pueden construirse sobre los mismos principios que los de continua, como el par depende de Φ_{i_a} y ambos, Φ e i_a , cambian de signo a la frecuencia de la tensión alterna aplicada, el par tendrá siempre el mismo sentido. En un motor excitado en paralelo existe, sin embargo, la dificultad de que las fases de la corriente en las bobinas inductoras y en las del rotor no son iguales, ya que la autoinducción de estos devanados es diferente. Este problema no se presenta en el motor excitado en serie, puesto que necesariamente las corrientes están en fase. Sin embargo, la gran autoinducción de las bobinas limita considerablemente la corriente, y esto repercute en el par disponible con las tensiones de alimentación ordinarias. Además los núcleos de hierro de las bobinas inductoras han de ser laminados para evitar pérdidas excesivas por corrientes de Foucault.

El motor más corriente de alterna es el motor de inducción, en el que un campo magnético giratorio induce corrientes en una serie de espiras de cobre existentes en el rotor. Las fuerzas magnéticas sobre estas corrientes producen un par que obliga a girar al rotor. El campo giratorio puede obtenerse alimentando el motor mediante el sistema trifásico descrito en la sección anterior. Los devanados del motor son semejantes a los del generador. Cuando se conectan a las tres líneas de salida del generador, aparece en el motor un campo giratorio. Otro método para producir un campo giratorio, a partir de corriente alterna monofásica, es introducir una diferencia de fase en una parte de las bobinas inductoras conectando un condensador a estas bobinas. La intensidad del campo giratorio se incrementa si en el rotor se incluye un núcleo de hierro laminado; de esta manera se disminuye la reluctancia del circuito magnético. Este tipo de motor no es síncrono con el campo giratorio, puesto que si el rotor se mueve a la misma velocidad que el campo, no hay corrientes inducidas y, por tanto, no hay par. El motor de inducción simple tiene un par de arranque pequeño, pues las corrientes inducidas en el rotor cuando está parado son grandes y dan lugar a una gran fuerza contraelectromotriz en las bobinas inductoras, lo que reduce la corriente en éstas y, por tanto, el valor del flujo magnético. El par de arranque puede aumentarse introduciendo, mediante anillos con contactos deslizantes, una resistencia externa en serie con las bobinas del rotor durante el arranque.

Es posible construir un motor síncrono combinando unos bobines

nados corrientes en el rotor, por los que pasa la corriente de origen externo, con algunas espiras en cortocircuito como en el motor de inducción. Sin carga, el rotor gira en sincronismo con el campo giratorio exactamente como lo haría un imán permanente. Cuando se conecta al motor un par resistente, el rotor se retrasa un cierto ángulo y se inducen corrientes alternas en las espiras en corto. La fuerza adicional que aparece sobre estas espiras mantiene el rotor en sincronismo con el campo giratorio, aunque con un cierto retraso de fase. Este par debido al efecto de inducción, será máximo cuando el retraso de fase sea de 90° . Si el par resistente llega a introducir un retraso mayor, el motor pierde el sincronismo.

PROBLEMAS

- 10.1 Una autoinducción de L henry y una resistencia de R ohms están conectadas en serie con una fuente de tensión alterna de valor $V = V_0 \sin \omega t$.
- Determinar la intensidad i en el circuito y el ángulo de fase entre la tensión de la fuente y la intensidad. Explíquese el significado del ángulo de fase.
 - ¿Cuál es el ángulo de fase entre la intensidad en la autoinducción y la intensidad en la resistencia?
 - ¿Cuál es el ángulo de fase entre la tensión en extremos de la autoinducción y la existente en extremos de la resistencia?
 - Determinar la amplitud de la tensión V_R en extremos de la resistencia y la tensión V_L en extremos de la autoinducción.
 - Explíquese por qué $|V_R| + |V_L| \neq V_0$. Comprobar que se cumple la suma vectorial $V_R + V_L = V_0$.
- 10.2 Sustituir la autoinducción del Prob. 10.1 por un condensador de C farads y responder a las mismas preguntas.
- 10.3 a) Calcular la reactancia inductiva a 60 ciclos/seg de una autoinducción de 2 H .
- b) Calcular la reactancia capacitiva de un condensador de $50\text{ }\mu\text{F}$ a la misma frecuencia.
- c) ¿A qué frecuencia tendrían el mismo valor las reactancias de estos dos elementos?
- d) Representar en forma cualitativa la curva de variación con la frecuencia de la reactancia de ambos elementos.
- 10.4 Una bobina circular formada por N espiras muy próximas, tiene un área A y gira alrededor de uno de sus diámetros, que es perpendicular a un campo magnético uniforme de inducción B , con una velocidad $\omega = 2\pi f$. La bobina tiene una autoinducción L y está conectada a una resistencia exterior R .

- a) Escribir la expresión que da el flujo de inducción magnética que atraviesa la bobina en función del ángulo $\theta = \omega t$ que forma el plano de la bobina con la dirección de B .
- b) Dar la expresión de la fem inducida en la bobina.
- c) ¿Cuál es la amplitud de esta fem?
- d) Calcular la corriente en la bobina.
- e) Hallar el ángulo de fase entre la fem inducida y la intensidad explicando su significado.
- f) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la tensión en extremos de la resistencia exterior y la corriente que la atraviesa?
- g) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la tensión en extremos de la bobina y la corriente a su través?

- 10.5 Una tensión de amplitud 120 volts y frecuencia 60 ciclos/seg está aplicada a una resistencia pura de 20 ohms. ¿Cuál es el valor eficaz de la tensión aplicada? Determinar la máxima intensidad, sus valores medio y eficaz y la potencia disipada.
- 10.6 A una inductancia pura de 0,2 henry se le aplica una tensión de 400 ciclos/seg y amplitud 120 volts. ¿Cuál es el valor de la intensidad máxima, la intensidad media, la intensidad eficaz y la dissipación de potencia?

- 10.7 Se aplica una tensión de 60 ciclos/seg a una resistencia de 400 ohms en serie con un condensador de capacidad desconocida. Un voltímetro de alterna mide 80 volts entre los terminales de la fuente y un amperímetro de alterna (de resistencia despreciable) intercalado en el circuito indica 0,1 amp. Calcular:
- Impedancia del circuito.
 - Potencia disipada.
 - Valor del condensador.

- 10.8 Demostrar que el valor medio de una corriente alterna sinusoidal durante el semiciclo positivo es $2I_0/\pi$, siendo I_0 la amplitud de la intensidad.

- 10.9 Calcular el valor eficaz de una tensión dada por la expresión

$$V = 50 \operatorname{sen} \omega t + 20 \operatorname{sen} 2\omega t$$

- 10.10 El circuito serie indicado en la Fig. P 10.10 está sometido a una tensión alterna de amplitud V_0 .

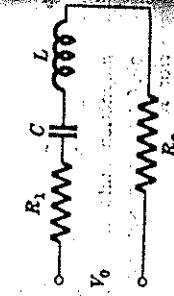


Fig. P 10.10

- 10.11 El circuito serie indicado en la Fig. P 10.11 está sometido a una tensión alterna de amplitud V_0 .

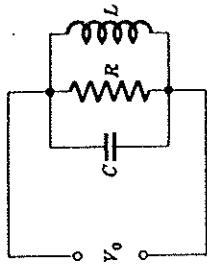


Fig. P 10.11

- a) Para qué frecuencia la intensidad que pasa por el circuito será máxima?
- b) ¿Cuál será el valor de esta intensidad máxima?
- c) Para qué frecuencias tendrá la intensidad el valor mitad del máximo?
- d) Para qué frecuencias será mínima la intensidad?

- 10.11 Al circuito paralelo indicado en la Fig. P 10.11 se le aplica una tensión alterna de amplitud V_0 .

- Para qué frecuencia la intensidad en el condensador C tiene el mismo valor que la intensidad en la autoinducción L ?
- Para qué frecuencia la intensidad a través de la fuente de alterna será máxima, y para cuál mínima?
- Para qué frecuencias la intensidad que pasa por la fuente tendrá un valor doble del mínimo?

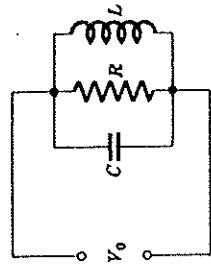


Fig. P 10.11

- 10.12 El interruptor existente en el circuito de la Fig. P 10.12 se cierra en el instante $t = 0$.

- Dibujar cualitativamente la variación con el tiempo de la diferencia de potencial V_R entre extremos de la resistencia. Sobre los mismos ejes representar la variación de V_L , tensión entre extremos de la autoinducción. Sumar gráficamente las dos curvas.
- En qué instante $V_R = V_L$?
- ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito?

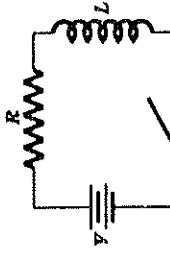


Fig. P 10.12

- 10.13 Supóngase que después de haber permanecido cerrado durante un tiempo muy largo comparado con la constante de tiempo del circuito, se abre el interruptor de la Fig. P 10.12 de modo casi instantáneo. Dibujar cualitativamente cómo varían V_R y V_L con el tiempo. ¿Existirá alguna limitación en la velocidad con que la intensidad puede reducirse a cero?

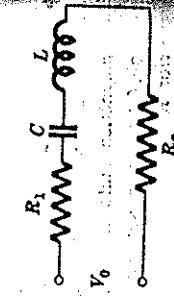


Fig. P 10.12

- 10.14 a) Calcular en el circuito de la Fig. P 10.14 el tiempo que transcurre desde que se cierra el interruptor hasta que $V_R = V_C$.

- b) ¿Cuál es la intensidad máxima que puede circular, y en qué instante tiene lugar dicho máximo?
- c) ¿Cuál es la carga máxima del condensador y cuándo la adquiere?
- d) Demostrar que la intensidad en el circuito se reduce a la mitad de su valor inicial en el mismo instante en que la carga del condensador es la mitad de su valor final. ¿Cuál será este instante a partir del momento de cierre?

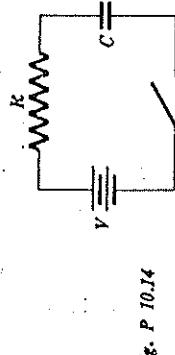


Fig. P 10.14

- 10.15 Una bobina de autoinducción 10 h y resistencia 100 ohms se conecta a una batería de 20 volts. ¿Qué resistencia debe conectarse en paralelo con la bobina para evitar que la tensión en los extremos de ésta se haga mayor de 100 volts en el momento en que se desconecte la batería? ¿Cuál es la velocidad inicial con que disminuye la intensidad en la bobina?

- 10.16 Proyectar un filtro pasa-alta sencillo tal que la tensión de salida sea la mitad de la de entrada para una frecuencia de 400 ciclos/seg (véase Fig. 10.22). Suponer que el circuito filtro se usa para alimentar un circuito de impedancia mucho mayor.

- 10.17 Un transformador, tal como el que se indica en la Fig. P 10.17, tiene n_1 espiras en el primario y n_2 en el secundario. El 60 por 100 del flujo magnético debido a la intensidad en el primario pasa por el camino A. Calcular la relación entre la tensión en el primario y la tensión en el secundario sin carga.

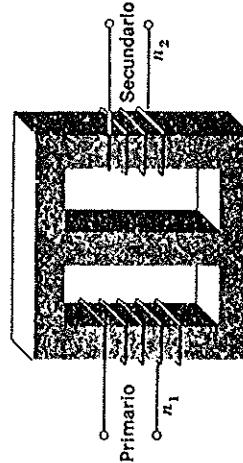


Fig. P 10.17

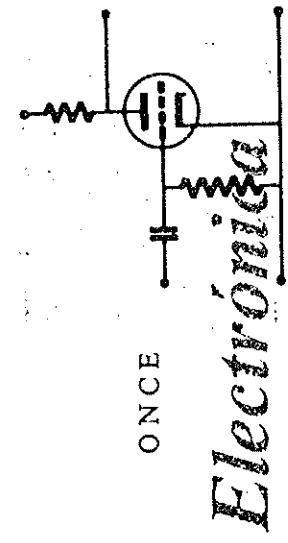


Fig. P 10.15

11.1 Introducción

En este capítulo vamos a referirnos brevemente a las características básicas de tres elementos que, en la electrónica práctica, tienen importancia primaria: la válvula de vacío, el transistor y el klinstrón. La válvula de vacío y el transistor funcionan de un modo básicamente similar; la intensidad que los atraviesa puede ser controlada por medio de una señal eléctrica. Todo el campo de la electrónica depende de las características de esta influencia. Los numerosos tipos de válvulas de vacío y de transistores que existen, permiten la construcción de una gran variedad de circuitos electrónicos que realizan las funciones más diversas. En este lugar solo discutiremos su estructura básica y algunas aplicaciones típicas. El klinstrón se estudia como ejemplo de dispositivos que pueden trabajar a frecuencias mucho más elevadas que las válvulas de vacío ordinarias. Constituye una de las fuentes más importantes de señales en el intervalo de frecuencias de las microondas; que están adquiriendo cada vez más importancia en el campo de las telecomunicaciones. La posibilidad de disponer de energía eléctrica en estas frecuencias elevadas, ha contribuido también al desarrollo de muchos campos de investigación en la física.