

Utilizando el procedimiento desarrollado en el Apartado (a), demuestre que $cx[n]$ se puede determinar a partir de $\langle X|e^{cn}\rangle$, siendo c un factor de escala positivo.

- 3.54. Dada una secuencia $x[n]$ que es cero para $n < 0$, utilice la Ecuación (3.2) para demostrar que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0].$$

¿Cómo es el correspondiente teorema si la secuencia es cero para $n > 0$?

- 3.55. La función de autocorrelación no periódica de una secuencia real y estable $x[n]$ se define como

$$c_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k].$$

- (a) Demuestre que la transformada Z de $c_{xx}[n]$ es

$$C_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1}).$$

Determine la región de convergencia de $C_{xx}(z)$.

- (b) Suponga que $x[n] = a^n u[n]$. Dibuje el diagrama polo-cero de $C_{xx}(z)$, incluyendo la región de convergencia. Calcule $c_{xx}[n]$ mediante la transformada Z inversa de $C_{xx}(z)$.
- (c) Especifique otra secuencia, $x_1[n]$, que no sea igual a $x[n]$ del Apartado (b), pero que tenga la misma función de autocorrelación, $c_{xx}[n]$.
- (d) Especifique una tercera secuencia, $x_2[n]$, que no sea igual a $x[n]$ ni a $x_1[n]$, pero que tenga la misma función de autocorrelación que $x[n]$.
- 3.56. Determine si la función $X(z) = z^*$ puede ser o no la transformada Z de una secuencia. Explique claramente el razonamiento seguido.
- 3.57. Sea $X(z)$ un cociente de polinomios de la forma

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

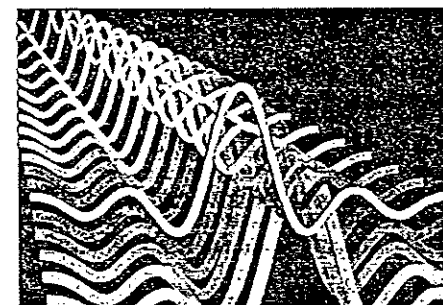
Demuestre que si $X(z)$ tiene un polo de primer orden en $z = z_0$, entonces el residuo de $X(z)$ en $z = z_0$ es igual a

$$\frac{B(z_0)}{A'(z_0)},$$

siendo $A'(z_0)$ la derivada de $A(z)$ evaluada en $z = z_0$.

4

MUESTREO DE SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO



4.0. INTRODUCCIÓN

Las señales en tiempo discreto pueden aparecer de muchas formas, pero la forma más común es que aparezcan como consecuencia del muestreo de señales en tiempo continuo. Es notable el hecho de que, bajo ciertas condiciones, una señal en tiempo continuo se pueda representar de forma exacta mediante muestras tomadas en instantes discretos del tiempo. En este capítulo vamos a presentar con detalle el proceso de muestreo periódico, incluyendo el fenómeno del solapamiento, que aparece cuando la señal no es de banda limitada o la velocidad de muestreo es demasiado baja. Es de particular importancia el hecho de que se pueda realizar el procesamiento de las señales en tiempo continuo mediante un proceso de muestreo, un tratamiento de las señales muestreadas en tiempo discreto y una reconstrucción posterior de la señal resultado en tiempo continuo.

4.1. MUESTREO PERIÓDICO

Aunque existen otras posibilidades (véase Steiglitz, 1965; Oppenheim y Johnson, 1972), la forma típica de obtener una representación en tiempo discreto de una señal en tiempo continuo es mediante muestreo periódico. A partir de una señal continua $x_c(t)$ se obtiene una secuencia de muestras $x[n]$ mediante la relación

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (4.1)$$

En la ecuación anterior, T es el periodo de muestreo, y su inverso, $f_s = 1/T$ se denomina frecuencia de muestreo, en unidades de muestras por segundo. Expresaremos también la fre-

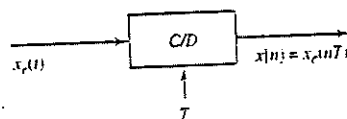


Figura 4.1. Diagrama de bloques de un conversor ideal de tiempo continuo a tiempo discreto (C/D).

cuencia de muestreo como $\Omega_s = 2\pi/T$ cuando deseemos utilizar las unidades de radianes por segundo.

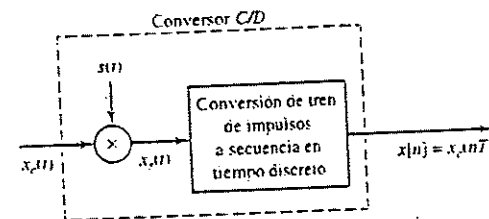
Un sistema que realiza la operación definida en la Ecuación (4.1) se denomina *conversor ideal de tiempo continuo a tiempo discreto (C/D)*. Su diagrama de bloques se muestra en la Figura 4.1. Como ejemplo de la relación existente entre $x_c(t)$ y $x[n]$, en la Figura 2.2 presentamos una señal de voz en tiempo continuo y la correspondiente secuencia de muestras.

En la práctica, la operación de muestreo se realiza mediante un conversor analógico-digital (A/D). Este tipo de sistemas se pueden ver como aproximaciones al conversor C/D ideal. Entre las consideraciones importantes a tener en cuenta en la realización o selección de un conversor A/D están la cuantificación de las muestras de salida, la linealidad de los pasos de cuantificación, la necesidad de circuitos de muestreo y retención y las limitaciones de la velocidad de muestreo. Los efectos de la cuantificación se estudian en las Secciones 4.8.2 y 4.8.3. Otros aspectos prácticos de la conversión A/D están relacionados con los circuitos electrónicos y se salen de los objetivos de este texto.

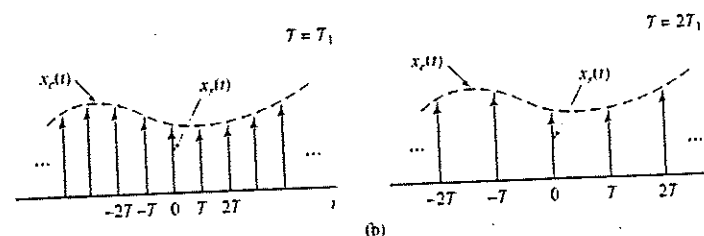
La operación de muestreo es en general no invertible. Es decir, dada la salida $x[n]$ no es posible, en general, reconstruir $x_c(t)$, la entrada al sistema de muestreo, ya que existen muchas señales en tiempo continuo que pueden producir la misma secuencia de muestras de salida. Esta ambigüedad inherente al proceso de muestreo es un aspecto fundamental en el tratamiento de señales. Afortunadamente, es posible eliminar esta ambigüedad restringiendo las señales de entrada al sistema de muestreo.

Es conveniente representar matemáticamente el proceso de muestreo dividiéndolo en las dos etapas que se muestran en la Figura 4.2(a). Las etapas consisten en un modulador con un tren de impulsos seguido por una conversión del tren de impulsos en una secuencia. La Figura 4.2(b) muestra una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ y el resultado de muestrearla con un tren de impulsos para dos frecuencias de muestreo diferentes. La Figura 4.2(c) muestra las correspondientes secuencias de salida. La diferencia fundamental entre $x_c(t)$ y $x[n]$ es que $x_c(t)$ es una señal en tiempo continuo (concretamente un tren de impulsos) que es cero excepto en múltiplos enteros de T . Por el contrario, la secuencia $x[n]$ está indexada con la variable entera n , lo que introduce de facto una normalización en el tiempo. Es decir, la secuencia de números $x[n]$ no contiene información explícita sobre la frecuencia de muestreo. Además, las muestras de $x_c(t)$ se representan en $x[n]$ mediante números finitos, mientras que en $x_c(t)$ son las áreas de los impulsos.

Es importante resaltar que la Figura 4.2(a) es estrictamente una representación matemática adecuada para explicar el muestreo en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. No es una representación de circuitos ni sistemas físicos diseñados para realizar la operación de muestreo. La existencia de hardware específico que realice de forma aproximada las operaciones del diagrama de bloques de la Figura 4.2(a) es un aspecto secundario en este momento. Hemos presentado esta representación de la operación de muestreo porque nos permitirá una deducción sencilla del resultado clave y además, porque permite presentar aspectos importantes que son más difíciles de obtener si se parte de una presentación más formal basada en la manipulación de las fórmulas de la transformada de Fourier.



(a)



(b)

(c)

Figura 4.2. Muestreo con un tren de impulsos periódico seguido de la conversión a una secuencia en tiempo discreto. (a) Sistema completo. (b) $x_c(t)$ para dos frecuencias de muestreo. (c) La secuencia de salidas para las dos frecuencias de muestreo.

4.2. REPRESENTACIÓN DEL MUESTREO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Para obtener la relación entre la entrada y la salida de un conversor C/D ideal en el dominio de la frecuencia, consideremos en primer lugar la conversión de $x_c(t)$ en $x_p(t)$ mediante la modulación con el tren periódico de impulsos

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (4.2)$$

siendo $\delta(t)$ la función impulso unidad o delta de Dirac. Si modulamos $s(t)$ con $x_c(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x_c(t)s(t) \\ &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento de la función impulso, $x_p(t)$ se puede expresar como

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT). \quad (4.4)$$

Consideremos ahora la transformada de Fourier de $x_s(t)$. Vemos, en la Ecuación (4.3), que $x_s(t)$ es el producto de $x_c(t)$ y $st(t)$. Por tanto, la transformada de Fourier de $x_s(t)$ será la convolución de las transformadas de Fourier $X_c(j\Omega)$ y $S(j\Omega)$. La transformada de Fourier de un tren de impulsos periódico es otro tren de impulsos periódico (Oppenheim y Willsky, 1997). Concretamente,

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \quad (4.5)$$

siendo $\Omega_s = 2\pi/T$ la frecuencia de muestreo en radianes/s. Como

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega),$$

donde $*$ indica la operación de convolución de variables continuas, se deduce que

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s)). \quad (4.6)$$

La Ecuación (4.6) proporciona la relación entre las transformadas de Fourier de la entrada y la salida del modulador con un tren de impulsos de la Figura 4.2(a). Observando la Ecuación (4.6) vemos que la transformada de Fourier de $x_s(t)$ consiste en copias repetidas periódicamente de la transformada de Fourier de $x_c(t)$. Las copias de $X_c(j\Omega)$ están desplazadas múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo y se superponen para producir la transformada de Fourier periódica del tren de impulsos de las muestras. La Figura 4.3 muestra la representación en el dominio de la frecuencia del muestreo mediante un tren de impulsos. La Figura 4.3(a) representa una transformada de Fourier de banda limitada cuya componente distinta de cero de frecuencia más alta está en Ω_v . La Figura 4.3(b) muestra el tren de impulsos periódico $S(j\Omega)$, y la Figura 4.3(c) muestra $X_s(j\Omega)$, resultado de convolucionar $X_c(j\Omega)$ con $S(j\Omega)$. Observando la Figura 4.3(c), resulta evidente que cuando

$$\Omega_s - \Omega_v > \Omega_v, \quad \text{o} \quad \Omega_s > 2\Omega_v, \quad (4.7)$$

las réplicas de $X_c(j\Omega)$ no se solapan, y por tanto, cuando se sumen juntas como indica la Ecuación (4.6) quedará una réplica de $X_c(j\Omega)$ en cada múltiplo entero de Ω_s (excepto por un factor de escala de $1/T$). Por tanto, $x_s(t)$ se podrá recuperar a partir de $x_c(t)$ con un filtro paso bajo ideal, como ilustra la Figura 4.4(a), que muestra el tren de impulsos modulador seguido por un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta en frecuencia $H_s(j\Omega)$. Para una $X_c(j\Omega)$ como se muestra en la Figura 4.4(b), $X_s(j\Omega)$ sería como se muestra en la Figura 4.4(c), donde se supone que $\Omega_s > 2\Omega_v$. Como

$$X_s(j\Omega) = H_s(j\Omega)X_c(j\Omega), \quad (4.8)$$

se deduce que si $H_s(j\Omega)$ es un filtro paso bajo ideal de ganancia T y frecuencia de corte Ω_s , tal que

$$\Omega_s < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_v), \quad (4.9)$$

entonces

$$X_s(j\Omega) = X_c(j\Omega), \quad (4.10)$$

como se muestra en la Figura 4.4(e).

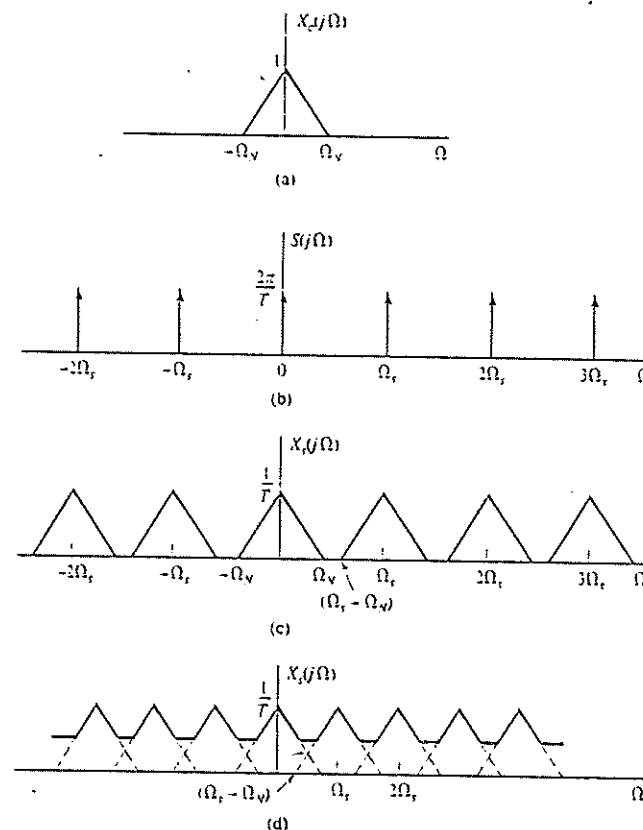


Figura 4.3. Efecto en el dominio de la frecuencia del muestreo en el dominio del tiempo. (a) Espectro de la señal original. (b) Espectro de la función de muestreo. (c) Espectro de la señal muestreada con $\Omega_s > 2\Omega_v$. (d) Espectro de la señal muestreada con $\Omega_s < 2\Omega_v$.

Si la desigualdad de la Ecuación (4.7) no se cumple, es decir, si $\Omega_s \leq 2\Omega_v$, las copias de $X_c(j\Omega)$ se solapan, de modo que cuando se sumen todas, ya no será posible recuperar $X_c(j\Omega)$ mediante un filtrado paso bajo. Este efecto se ilustra en la Figura 4.3(d). En este caso, la salida reconstruida $x_s(t)$ que se muestra en la Figura 4.4(a) es una versión distorsionada de la señal original en tiempo continuo. Esta distorsión se denomina *distorsión de solapamiento*, o simplemente *solapamiento*. La Figura 4.5 ilustra el solapamiento en el dominio de la frecuencia para el caso simple de una señal coseno. La Figura 4.5(a) muestra la transformada de Fourier de la señal

$$x_c(t) = \cos \Omega_0 t. \quad (4.11)$$

La Figura 4.5(b) muestra la transformada de Fourier de $x_s(t)$ cuando $\Omega_0 < \Omega_s/2$ y la Figura 4.5(c) muestra la transformada de Fourier de $x_s(t)$ cuando $\Omega_0 > \Omega_s/2$. Las Figuras 4.5(d) y (e) corresponden a la transformada de Fourier de la salida del filtro paso bajo para $\Omega_0 < \Omega_s/2 = \pi/T$ y $\Omega_0 > \pi/T$, respectivamente, siendo $\Omega_s = \Omega_0/2$. Las Figuras 4.5(c) y (e) co-

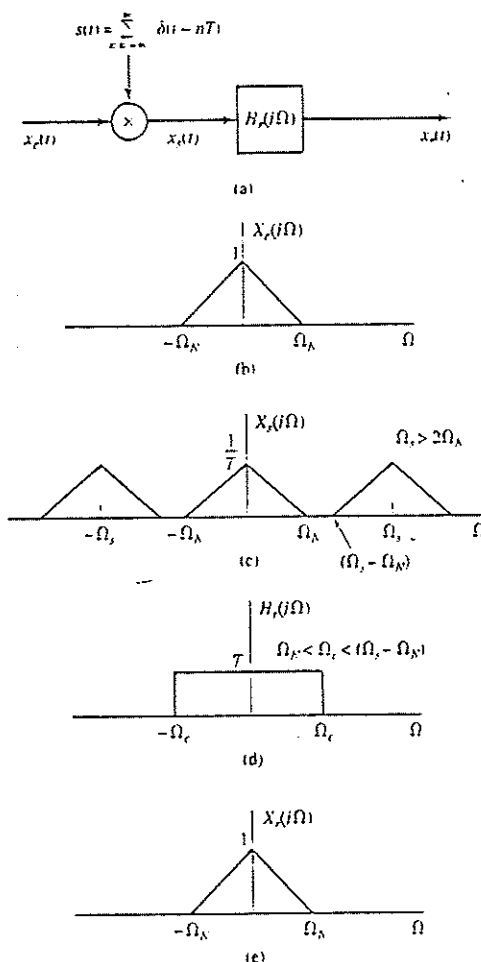


Figura 4.4. Recuperación exacta de una señal en tiempo continuo a partir de sus muestras utilizando un filtro paso bajo ideal.

responden al caso de existencia de solapamiento. Si no hay solapamiento la salida reconstruida es

$$x_r(t) = \cos \Omega_0 t. \quad (4.12)$$

Cuando hay solapamiento, la salida reconstruida es

$$x_r(t) = \cos (\Omega_s - \Omega_0) t. \quad (4.13)$$

Es decir, como consecuencia del proceso de muestreo y reconstrucción, la señal de alta frecuencia $\cos \Omega_0 t$ ha tomado la identidad (alias) de la señal de baja frecuencia $\cos (\Omega_s - \Omega_0) t$. Esta presentación es la base del teorema de muestreo de Nyquist (Nyquist 1928; Shannon 1949), que se enuncia a continuación.

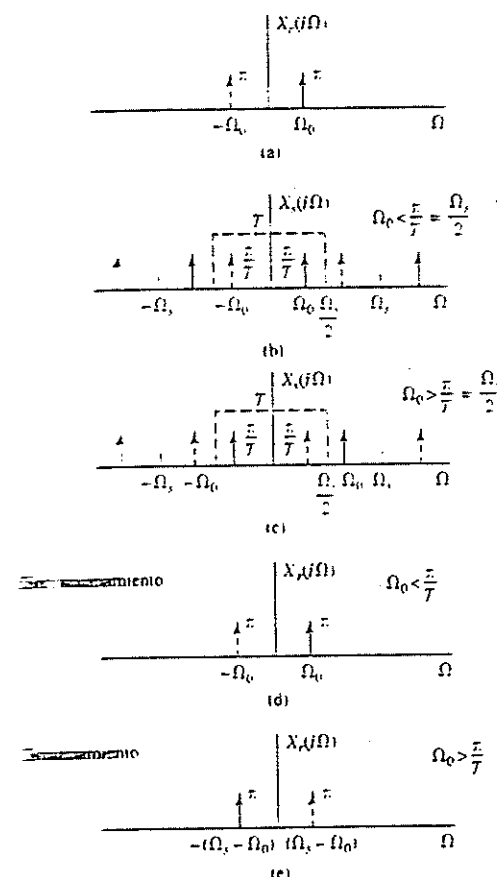


Figura 4.5. Efecto del solapamiento en el muestreo de una señal coseno.

Teorema de muestreo de Nyquist: Sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada que cumple que

$$X_c(j\Omega) = 0 \quad \text{para } |\Omega| \geq \Omega_N. \quad (4.14a)$$

$x_c(t)$ estará ~~determinada~~ en forma única por sus muestras $x[n] = x_c(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ si se cumple que

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N. \quad (4.14b)$$

La frecuencia $2\Omega_N$ que ~~debe ser~~ menor que la frecuencia de muestreo se denomina generalmente *frecuencia de Nyquist*.

Hasta ahora ~~sólo hemos~~ considerado el tren de impulsos modulador que se muestra en la Figura 4.2(a). Nuestra ~~objetivo~~ ahora será expresar $X(e^{j\omega})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de la ~~señal~~ $x[n]$, en función de $X_c(j\Omega)$ y de $X_s(j\Omega)$. Para ello, considere-

mos una expresión alternativa de $X_s(j\Omega)$. Aplicando la transformada de Fourier en tiempo continuo a la Ecuación (4.4) obtenemos

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(nT)e^{-j\Omega nT} \quad (4.15)$$

Como

$$x[n] = x_s(nT) \quad (4.16)$$

y

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (4.17)$$

se deduce que

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T}). \quad (4.18)$$

En consecuencia, aplicando las Ecuaciones (4.6) y (4.18)

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s(j(\Omega - k\Omega_s)) \quad (4.19)$$

o, de forma equivalente,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \quad (4.20)$$

A partir de las Ecuaciones (4.18)-(4.20) podemos ver que $X(e^{j\omega})$ es simplemente una versión escalada en frecuencia de $X_s(j\Omega)$. El factor de escala en frecuencia está definido por $\omega = \Omega T$. Este escalado se puede ver alternativamente como una normalización del eje de frecuencias, de forma que la frecuencia $\Omega = \Omega_s$ en $X_s(j\Omega)$ se convierte en la frecuencia $\omega = 2\pi$ en $X(e^{j\omega})$. El hecho de que existe un escalado o normalización en frecuencia en la transformación de $X_s(j\Omega)$ en $X(e^{j\omega})$ se puede asociar directamente con el hecho de que existe una normalización en el tiempo en la transformación de $x_s(t)$ en $x[n]$. Concretamente, como podemos ver en la Figura 4.2, $x_s(t)$ conserva un espaciado entre las muestras igual al periodo de muestreo T . Por el contrario, el «espaciado» entre los valores de la secuencia $x[n]$ es siempre la unidad. Es decir, que el eje temporal ha sido normalizado por un factor de T . En consecuencia, en el dominio de la frecuencia el eje de frecuencias resulta normalizado por un factor de $f_s = 1/T$.

Ejemplo 4.1. Muestreo y reconstrucción de una señal sinusoidal

Si muestreamos la señal continua $x_s(t) = \cos(4.000\pi t)$ con periodo de muestreo $T = 1/6.000$, obtenemos la señal $x[n] = x_s(nT) = \cos(4.000\pi nT) = \cos(\omega_0 n)$, siendo $\omega_0 = 4.000\pi T = 2\pi/3$. En este caso, $\Omega_s = 2\pi/T = 12.000\pi$, y la frecuencia más alta de la señal es $\Omega_0 = 4.000\pi$, con lo que se satisfacen las condiciones del teorema de muestreo de Nyquist y no hay solapamiento. La transformada de Fourier de $x_s(t)$ es

$$X_s(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4.000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4.000\pi).$$

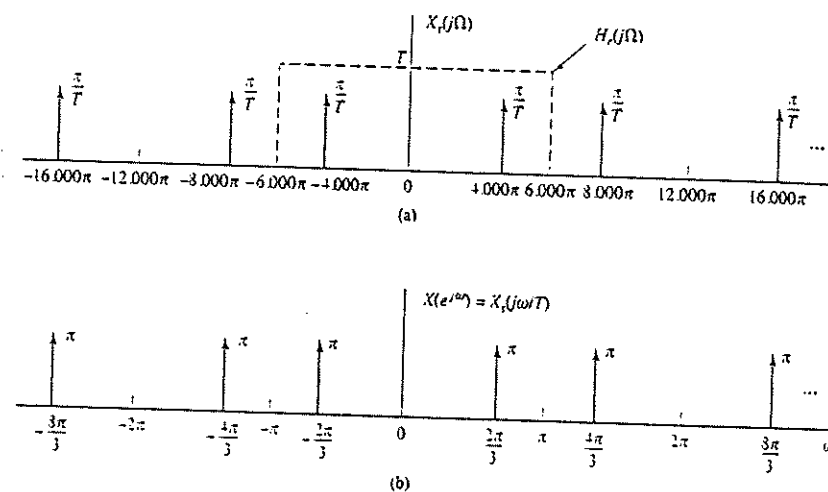


Figura 4.6. (a) Transformada de Fourier en tiempo continuo y (b) transformada de Fourier en tiempo discreto para el muestreo de la señal coseno de frecuencia $\Omega_0 = 4.000\pi$, con periodo de muestreo $T = 1/6.000$.

y la Figura 4.6(a) muestra

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s(j(\Omega - \Omega_s)) \quad (4.21)$$

para $\Omega = 12.000\pi$. Nótese que $X_s(j\Omega)$ es una pareja de impulsos situados en $\Omega = \pm 4.000\pi$, y que aparecen copias de esta transformada de Fourier centradas en $\pm \Omega_s, \pm 2\Omega_s$, etc. La Figura 4.6(b) muestra $X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T)$ en función de la frecuencia normalizada $\omega = \Omega T$. Hemos usado el hecho de que al escalar la variable independiente de una función impulso, su área queda afectada por el mismo factor de escala. Es decir, $\delta(\omega/T) = T\delta(\omega)$. Nótese también que la frecuencia original $\Omega_0 = 4.000\pi$ corresponde a la frecuencia normalizada $\omega_0 = 4.000\pi T = 2\pi/3$, que satisface la relación $\omega_0 < \pi$, lo que corresponde a la relación $\Omega_0 = 4.000\pi < \pi/T = 6.000\pi$. La Figura 4.6(a) muestra también la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal $H_s(j\Omega)$ para la frecuencia de muestreo dada $\Omega_s = 12.000\pi$. Al observar esta figura resulta claro que la señal que se reconstruiría tendría una frecuencia de $\Omega_0 = 4.000\pi$, que es la frecuencia de la señal original $x_s(t)$.

Ejemplo 4.2. Solapamiento en la reconstrucción de una señal sinusoidal submuestreada

Supongamos ahora que la señal en tiempo continuo es $x_s(t) = \cos(16.000\pi t)$, pero que el periodo de muestreo sigue siendo $T = 1/6.000$, como en el Ejemplo 4.1. Este periodo de muestreo no satisface el criterio de Nyquist, ya que $\Omega_s = 2\pi/T = 12.000\pi < 2\Omega_0 = 32.000\pi$. Por tanto, se va a producir solapamiento. Veremos un resultado interesante. La transformada de Fourier $X_s(j\Omega)$ en este caso es idéntica a la que aparece en la Figura 4.6(a). Sin embargo, ahora el impulso localizado en $\Omega = -4.000\pi$ procede del término $X_s(j(\Omega - \Omega_s))$ de la Ecuación (4.21), en lugar de proceder de $X_s(j\Omega)$, y el impulso en $\Omega = 4.000\pi$ procede de $X_s(j(\Omega + \Omega_s))$. Si dibujamos $X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T)$ en función de ω obtenemos la misma gráfica de la Figura 4.6(b), ya que estamos normalizando por el mismo periodo de muestreo.

La razón fundamental de este resultado es que la secuencia de muestras es la misma en los dos casos. Es decir,

$$\cos(16.000\pi n/6.000) = \cos(2\pi n + 4.000\pi n/6.000) = \cos(2\pi n/3).$$

(Nótese que podemos añadir cualquier múltiplo entero de 2π al argumento del coseno sin modificar su valor.) Por tanto, hemos obtenido la misma secuencia de muestras, $x[n] = \cos(2\pi n/3)$, muestreando con la misma frecuencia de muestreo dos señales en tiempo continuo diferentes. En un caso la frecuencia de muestreo satisface el criterio de Nyquist y en el otro no. Como en el ejemplo anterior, la Figura 4.6(a) muestra la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal $H_r(j\Omega)$ para la frecuencia de muestreo dada $\Omega_s = 12.000\pi$. Observando la figura resulta claro que la señal se reconstruiría con frecuencia $\Omega_0 = 4.000\pi$ que no es la frecuencia de la señal original $x_c(t)$.

Ejemplo 4.3. Un segundo ejemplo de solapamiento

Como ejemplo final, supongamos que la señal es de nuevo $x_c(t) = \cos(4.000\pi t)$, como en el Ejemplo 4.1. La frecuencia es de nuevo $\Omega_c = 4.000\pi$. Sin embargo, el periodo de muestreo ahora se aumenta a $T = 1/1.500$. Este periodo de muestreo tampoco cumple el criterio de Nyquist, ya que $\Omega_s = 2\pi/T = 3.000\pi < 2\Omega_c = 8.000\pi$. En consecuencia, habrá de nuevo solapamiento. La Figura 4.7(a) muestra $X_c(j\Omega)$ en este caso. Esta vez el impulso localizado en $\Omega = -1.000\pi$ procede de $X_c(j(\Omega - \Omega_s))$, y el impulso en $\Omega = 1.000\pi$ procede de $X_c(j(\Omega + \Omega_s))$. Si dibujamos $X(e^{j\omega}) = X_c(j\omega/T)$ en función de ω obtenemos la Figura 4.7(b), que es idéntica a la Figura 4.6(b). De nuevo, la transformada de Fourier corresponde a la secuencia $x[n] = \cos(2\pi n/3)$. De acuerdo con esto vemos que al muestrear una señal en tiempo continuo con dos frecuencias de muestreo diferentes puede producirse la misma señal en tiempo discreto si una de las frecuencias de muestreo no cumple el criterio de Nyquist. La Figura 4.7(a) muestra la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal $H_r(j\Omega)$ para la frecuencia de muestreo dada de $\Omega_s = 3.000\pi$. Observando esta figura resulta claro que la señal que se reconstruiría utilizando un periodo de muestreo de $T = 1/1.500$ tendría una frecuencia de $\Omega_0 = 1.000\pi$ y no de 4.000π .

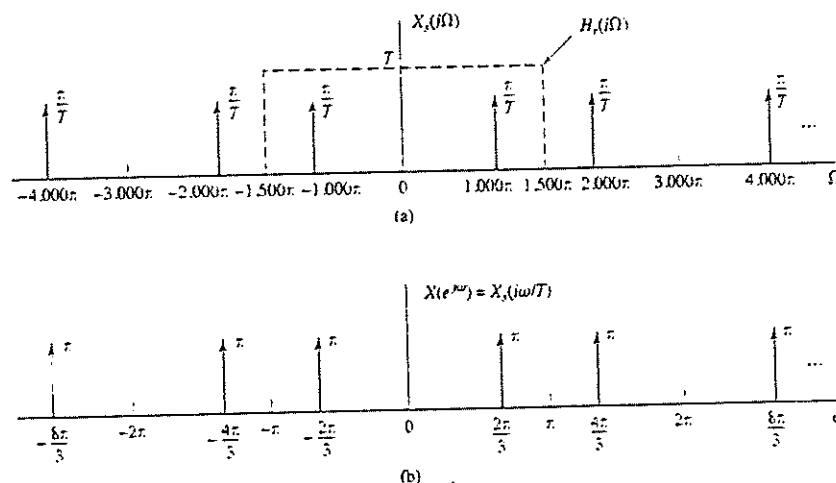


Figura 4.7. (a) Transformada de Fourier en tiempo continuo y (b) transformada de Fourier en tiempo discreto para el muestreo de la señal coseno de frecuencia $\Omega_c = 4.000\pi$, con periodo de muestreo $T = 1/1.500$.

4.3. RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES DE BANDA LIMITADA A PARTIR DE SUS MUESTRAS

De acuerdo con el teorema de muestreo, las muestras de una señal de banda limitada en tiempo continuo son suficientes para representar exactamente a la señal si dichas muestras se toman con la suficiente frecuencia. Esto quiere decir que la señal original se puede recuperar a partir de las muestras si se conoce el periodo de muestreo. La modulación mediante un tren de impulsos nos permite formalizar adecuadamente el proceso de reconstrucción de una señal de banda limitada en tiempo continuo a partir de sus muestras.

En la Sección 4.2 hemos visto que si se cumplen las condiciones del teorema de muestreo y el tren de impulsos modulados se filtra utilizando el filtro paso bajo apropiado, la transformada de Fourier de la salida del filtro coincidirá con la transformada de Fourier de la señal original en tiempo continuo, $x_c(t)$. Es decir, que la salida de dicho filtro será la señal $x_c(t)$. Si tenemos una secuencia de muestras, $x[n]$, se puede formar el tren de impulsos $x_p(t)$ en el que cada impulso tiene un área igual al valor de la correspondiente muestra. Es decir,

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT). \quad (4.22)$$

La n -ésima muestra se asocia al impulso situado en $t = nT$, siendo T el periodo de muestreo asociado con la secuencia $x[n]$. Si este tren de impulsos es la entrada a un filtro paso bajo ideal en tiempo continuo cuya respuesta en frecuencia es $H_r(j\Omega)$ y cuya respuesta al impulso es $h_r(t)$, la salida del filtro será

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT). \quad (4.23)$$

La Figura 4.8(a) muestra el diagrama de bloques de este proceso de reconstrucción de la señal. Debe resaltarse que el filtro de reconstrucción ideal tiene una ganancia de T (para compensar el factor $1/T$ de las Ecuaciones (4.19) o (4.20)) y una frecuencia de corte Ω_c cuyo valor está entre Ω_N y $\Omega_s - \Omega_N$. Una forma conveniente de escoger la frecuencia de corte que se utiliza muy frecuentemente es hacer $\Omega_c = \Omega_s/2 = \pi/T$. Esta selección es apropiada para cualquier relación existente entre Ω_s y Ω_N tal que no haya solapamiento (es decir, siempre que se cumpla que $\Omega_s > 2\Omega_N$). La Figura 4.8(b) muestra la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción. La correspondiente respuesta al impulso $h_r(t)$ se obtiene mediante la transformada inversa de Fourier de $H_r(j\Omega)$. Para una frecuencia de corte de π/T su expresión es

$$h_r(t) = \frac{\text{sen}(\pi t/T)}{\pi t/T}. \quad (4.24)$$

La Figura 4.8(c) muestra esta respuesta al impulso. Sustituyendo la Ecuación (4.24) en la (4.23) obtenemos que

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\text{sen}[(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}. \quad (4.25)$$

En la argumentación en el dominio de la frecuencia de la Sección 4.2 vimos que si $x[n] = x_c(nT)$, siendo $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$, entonces $x_r(t) = x_c(t)$. Esto no resulta ni mucho menos obvio si sólo observamos la Ecuación (4.25). Sin embargo, merece la pena observar dicha ecuación con atención. Consideremos primero la función $h_r(t)$ dada en la Ecuación (4.24). Vemos que

$$h_r(0) = 1. \quad (4.26a)$$

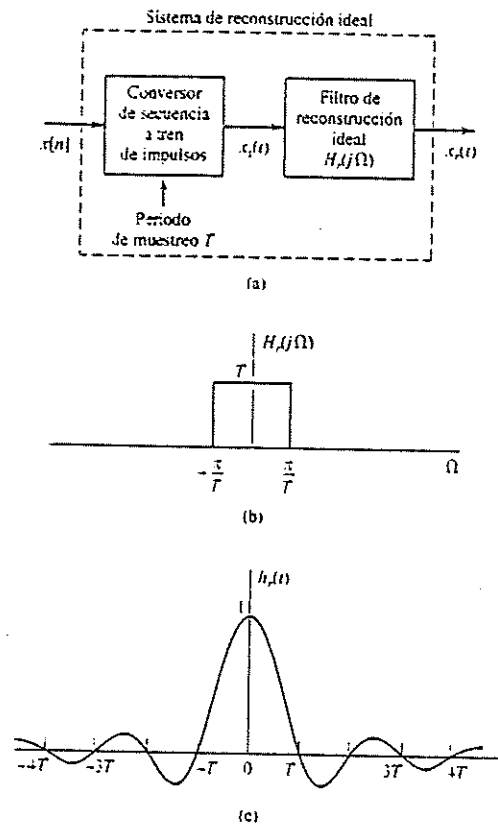


Figura 4.8. (a) Diagrama de bloques de un sistema de reconstrucción ideal de una señal de banda limitada. (b) Respuesta en frecuencia de un filtro de reconstrucción ideal. (c) Respuesta al impulso de un filtro de reconstrucción ideal.

Esto se obtiene aplicando la regla de l'Hôpital. Además,

$$h_r(nT) = 0 \quad \text{para } n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.26b)$$

Aplicando las Ecuaciones (4.26a), (4.26b) y (4.23) se sigue que $x[n] = x_r(nT)$. Entonces,

$$x_r(mT) = x_r(mT) \quad (4.27)$$

para cualquier valor entero de m . Es decir, la señal que se reconstruye utilizando la Ecuación (4.25) tiene los mismos valores en los instantes de muestreo que la señal en tiempo continuo original, independientemente del periodo de muestreo T .

En la Figura 4.9 se muestra una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ y el correspondiente tren de impulsos modulados. En la Figura 4.9(c) se muestran algunos términos de la forma

$$x[n] \frac{\sin[\pi t - nT/T]}{\pi(t - nT)/T}$$

y la señal reconstruida $x_r(t)$ resultante. Como sugiere esta figura, el filtro paso bajo ideal *interpola* entre los impulsos $x_i(t)$ para construir una señal en tiempo continuo $x_r(t)$. Utilizando

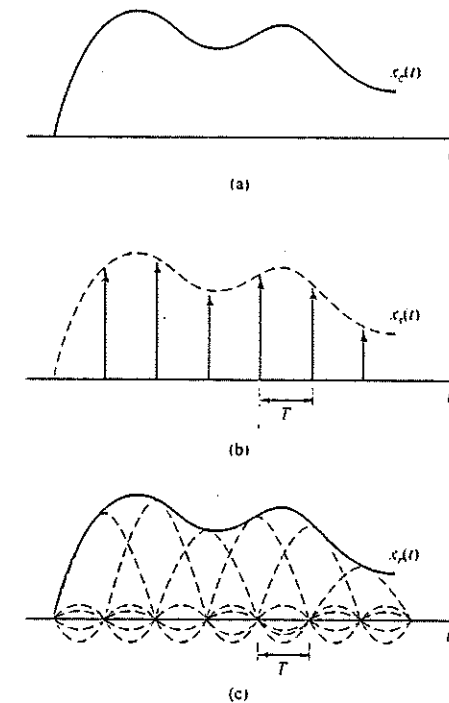


Figura 4.9. Interpolación ideal de banda limitada.

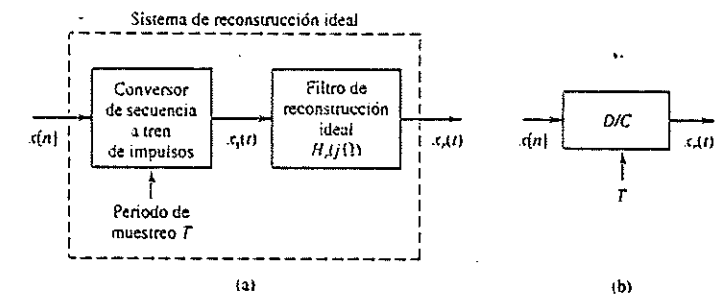


Figura 4.10. (a) Reconstrucción ideal de una señal de banda limitada. (b) Representación equivalente como un conversor D/C ideal.

la Ecuación (4.27) se puede ver que la señal resultante es una reconstrucción exacta de $x_c(t)$ en los instantes de muestreo. El hecho de que, si no hay solapamiento, el filtro paso bajo interpole la reconstrucción correcta entre las muestras se deduce del análisis en el dominio de la frecuencia del proceso de muestreo y reconstrucción.

Es útil formalizar la presentación anterior definiendo un sistema ideal que permite reconstruir una señal de banda limitada a partir de una secuencia de muestras. Denominaremos a este sistema *conversor ideal de tiempo discreto a tiempo continuo (D/C)*. Este sistema se muestra en la Figura 4.10. Como ya hemos presentado, el proceso de reconstrucción ideal se puede representar como la conversión de una secuencia en un tren de impulsos, como se in-

dica en la Ecuación (4.22), seguido por un filtrado con un filtro paso bajo ideal, produciéndose la salida que se indica en la Ecuación (4.25). El paso intermedio de conversión a un tren de impulsos es por motivos de conveniencia matemática para obtener la Ecuación (4.25) y para presentar el proceso de reconstrucción de señales. Sin embargo, una vez estemos familiarizados con el proceso, es más útil definir una representación más compacta, como se indica en la Figura 4.10(b), donde la entrada es la secuencia $x[n]$ y la salida es la señal en tiempo continuo $x_r(t)$ dada en la Ecuación (4.25).

Las propiedades del conversor D/C ideal se ven más fácilmente en el dominio de la frecuencia. Para obtener la relación entrada-salida en este dominio, consideremos la transformada de Fourier de la Ecuación (4.23) o de la (4.25) que es

$$X_r(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] H_r(j\Omega) e^{-j\Omega T n}$$

Sacando $H_r(j\Omega)$ fuera del sumatorio podemos escribir

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) X(e^{j\Omega T}) \quad (4.28)$$

La Ecuación (4.28) proporciona una descripción en el dominio de la frecuencia del conversor D/C ideal. En dicha ecuación vemos que $X(e^{j\Omega T})$ resulta escalada en frecuencia (es decir, ω se sustituye por ΩT). El filtro paso bajo ideal $H_r(j\Omega)$ selecciona el periodo básico de la transformada de Fourier periódica resultante y compensa el factor $1/T$ resultante del procesamiento de muestreo. Por tanto, si la secuencia $x[n]$ es el resultado de muestrear una señal de banda limitada a la frecuencia de Nyquist o superior, la señal reconstruida $x_r(t)$ será igual a la señal de banda limitada original. En cualquier caso, observando la Ecuación (4.28) resulta claro también que la salida del conversor D/C ideal es siempre de banda limitada como máximo a la frecuencia de corte del filtro paso bajo, que es generalmente la mitad de la frecuencia de muestreo.

4.4. PROCESADO EN TIEMPO DISCRETO DE SEÑALES EN TIEMPO CONTINUO

Una aplicación importante de los sistemas en tiempo discreto es en el procesamiento de señales en tiempo continuo. La estructura general de un sistema que realiza este tipo de procesamiento se muestra en la Figura 4.11. El sistema es una interconexión en cascada de un conversor C/D, un sistema en tiempo discreto y un conversor D/C. El diagrama de bloques de la Figura 4.11 representa a una amplia clase de sistemas, ya que la frecuencia de muestreo y el sistema en tiempo discreto se pueden escoger como deseamos. Nótese que el sistema completo es equivalente a un sistema en tiempo continuo, ya que transforma la señal de entrada en tiempo continuo $x_r(t)$ en una señal de salida en tiempo continuo $y_r(t)$. Las propiedades del sistema completo dependen de la selección que se haga del sistema en tiempo discreto y de la frecuencia de muestreo. En la Figura 4.11 suponemos que los conversores C/D y D/C tienen la misma frecuencia de muestreo. Sin embargo, esto no es esencial y en secciones posteriores de este capítulo y en algunos problemas al final del mismo consideraremos sistemas en los que la frecuencia de muestreo a la entrada y a la salida no es la misma.

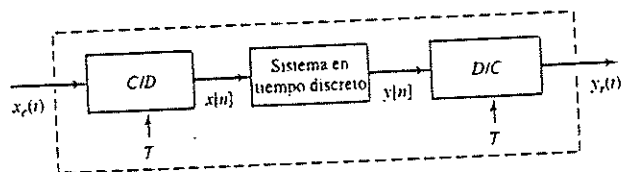


Figura 4.11. Procesado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo.

Las secciones previas de este capítulo se han dedicado a la presentación de las operaciones de los bloques C/D y D/C de la Figura 4.11. Por conveniencia, y como un primer paso en la comprensión del sistema completo de la Figura 4.11, resumiremos las representaciones matemáticas de estas operaciones.

El conversor C/D produce una señal en tiempo discreto

$$x[n] = x_r(nT) \quad (4.29)$$

es decir, una secuencia de muestras de la señal en tiempo continuo $x_r(t)$. La transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia está relacionada con la transformada de Fourier en tiempo continuo de la señal de entrada en tiempo continuo.

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_r\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \quad (4.30)$$

El conversor D/C crea una señal de salida en tiempo continuo de la forma

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \quad (4.31)$$

siendo $y[n]$ la secuencia de salida del sistema en tiempo discreto cuando su entrada es $x[n]$. Aplicando la Ecuación (4.28) podemos ver que $Y_r(j\Omega)$, la transformada de Fourier en tiempo continuo de $y_r(t)$ e $Y(e^{j\Omega T})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de $y[n]$, están relacionadas así:

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) Y(e^{j\Omega T}) \\ = \begin{cases} TY(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (4.32)$$

Seguidamente relacionaremos la secuencia de salida $y[n]$ con la secuencia de entrada $x[n]$, o equivalentemente, $Y(e^{j\Omega T})$ con $X(e^{j\Omega T})$. Un ejemplo simple es el sistema identidad, $y[n] = x[n]$. Este caso ya lo hemos estudiado en detalle. Sabemos que si $x_r(t)$ tiene una transformada de Fourier de banda limitada tal que $X_r(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$ y el sistema en tiempo discreto es el sistema identidad, tal que $y[n] = x[n] = x_r(nT)$, la salida será $y_r(t) = x_r(t)$. No olvidemos que al demostrar este resultado, utilizamos la representación en el dominio de la frecuencia de las señales en tiempo continuo y en tiempo discreto, ya que el concepto clave del solapamiento se puede entender mejor en el dominio de la frecuencia. Asimismo, al tratar con sistemas más complejos que el sistema identidad, realizaremos generalmente el análisis en el dominio de la frecuencia. Si el sistema en tiempo discreto es no lineal o variante con el tiempo, es difícil obtener una relación entre las transformadas de Fourier de la entrada y la salida (en el Problema 4.33 consideramos un ejemplo de un sistema con la estructura de la Figura 4.11 en el que el sistema en tiempo discreto es no lineal). Sin embargo, el caso de sistemas lineales e invariantes con el tiempo conduce a resultados simples y de utilidad.

4.4.1. Sistemas en tiempo discreto lineales e invariantes con el tiempo

Si el sistema en tiempo discreto de la Figura 4.11 es lineal e invariante con el tiempo, tenemos que

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) \quad (4.33)$$

siendo $H(e^{j\omega})$ la respuesta en frecuencia del sistema o, lo que es lo mismo, la transformada de Fourier de su respuesta al impulso unidad. $X(e^{j\omega})$ e $Y(e^{j\omega})$ son las transformadas de Fourier de la entrada y de la salida, respectivamente. Combinando las Ecuaciones (4.32) y (4.33) tenemos

$$Y_s(j\Omega) = H_s(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}). \quad (4.34)$$

A continuación, utilizando la Ecuación (4.30) con $\omega = \Omega T$ tenemos

$$Y_s(j\Omega) = H_s(j\Omega)H(e^{j\Omega T}) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_s \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right). \quad (4.35)$$

Si $X_s(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$, el filtro de reconstrucción paso bajo ideal $H_s(j\Omega)$ cancela el factor $1/T$ y selecciona el término correspondiente a $k = 0$ en la Ecuación (4.35). Es decir,

$$Y_s(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T})X_s(j\Omega), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \quad (4.36)$$

Por tanto, si $X_s(j\Omega)$ es de banda limitada y la frecuencia de muestreo es superior a la frecuencia de Nyquist, la salida se relaciona con la entrada mediante una ecuación de esta forma

$$Y_s(j\Omega) = H_{\text{ef}}(j\Omega)X_s(j\Omega), \quad (4.37)$$

siendo

$$H_{\text{ef}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| \geq \pi/T. \end{cases} \quad (4.38)$$

Es decir, el sistema en tiempo continuo completo es equivalente a un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia efectiva está dada por la Ecuación (4.38).

Es importante resaltar que el comportamiento lineal e invariante con el tiempo del sistema de la Figura 4.11 depende de dos factores. En primer lugar, el sistema en tiempo discreto debe ser lineal e invariante con el tiempo. En segundo lugar, la señal de entrada debe ser de banda limitada, y la frecuencia de muestreo debe ser lo suficientemente alta como para que réplicas de solapamiento sean eliminadas por el sistema en tiempo discreto. Como un ejemplo de violación de la segunda condición, consideremos el caso en el que $x_s(t)$ es un único pulso de amplitud unidad de duración menor que el periodo de muestreo. Si el pulso vale la unidad en $t = 0$, entonces $x[n] = \delta[n]$. Sin embargo, claramente es posible desplazar el pulso de forma que no esté alineado con los instantes de muestreo. En ese caso, $x[n] = 0$ para todo n . Obviamente el pulso, señal limitada en el tiempo, no está limitada en frecuencia. Incluso aunque el sistema en tiempo discreto sea el sistema identidad, con $y[n] = x[n]$, el sistema completo no es invariante con el tiempo. En general, si el sistema discreto de la Figura 4.11 es lineal e invariante con el tiempo, y la frecuencia de muestreo está por encima de la frecuencia de Nyquist asociada con el ancho de banda de la entrada $x_s(t)$, el sistema completo será equivalente a un sistema en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia efectiva vendrá dada por la Ecuación (4.38). Es más, la Ecuación (4.38) es válida aunque se produzca algo de solapamiento en el conversor C/D, siempre que $H(e^{j\omega})$ elimine las componentes solapadas. El Ejemplo 4.4 ilustra esta idea.

Ejemplo 4.4. Filtrado paso bajo ideal en tiempo continuo utilizando un filtro paso bajo en tiempo discreto

Consideremos la Figura 4.11 en la que el sistema en tiempo discreto es lineal e invariante con el tiempo, y su respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (4.39)$$

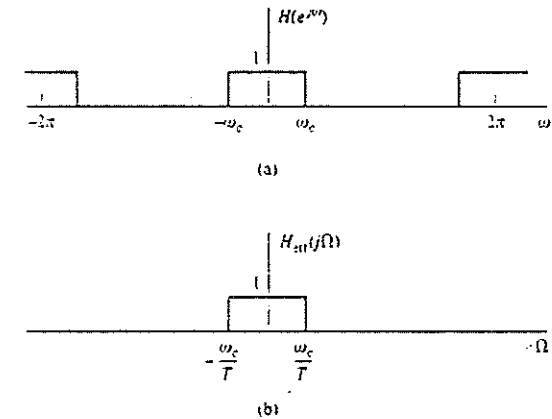


Figura 4.12. (a) Respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto de la Figura 4.11. (b) La correspondiente respuesta en frecuencia efectiva en tiempo continuo para entradas de banda limitada.

Esta respuesta en frecuencia es, por supuesto, periódica de periodo 2π , como se muestra en la Figura 4.12(a). Para señales de banda limitada muestreadas por encima de la frecuencia de Nyquist, se deduce de la Ecuación (4.38) que el sistema completo de la Figura 4.11 se comporta como un sistema en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo con respuesta en frecuencia

$$H_{\text{ef}}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega T| < \omega_c \text{ o } |\Omega| < \omega_c/T, \\ 0, & |\Omega T| > \omega_c \text{ o } |\Omega| > \omega_c/T. \end{cases} \quad (4.40)$$

Esta respuesta en frecuencia efectiva es la de un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte $\Omega_c = \omega_c/T$, como se muestra en la Figura 4.12(b).

La Figura 4.13 ilustra gráficamente la interpretación de este resultado. La Figura 4.13(a) muestra la transformada de Fourier de una señal de banda limitada. La Figura 4.13(b) muestra la transformada de Fourier del tren de pulsos modulados intermedio, que coincide con $X(e^{j\Omega T})$, la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia de muestras evaluada en $\omega = \Omega T$. La Figura 4.13(c) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia de muestras y la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto en función de la variable de frecuencia normalizada en tiempo discreto ω . La Figura 4.13(d) muestra $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$, es decir, la transformada de Fourier de la salida del sistema en tiempo discreto. La Figura 4.13(e) ilustra la transformada de Fourier de la salida del sistema en tiempo discreto en función de la variable de frecuencia en tiempo continuo, junto con la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal del conversor D/C, $H_s(j\Omega)$. Finalmente, la Figura 4.13(f) muestra la transformada de Fourier resultante a la salida del conversor D/C. Comparando las Figuras 4.13(a) y 4.13(f) vemos que el sistema se comporta como un sistema lineal e invariante con el tiempo cuya respuesta en frecuencia está dada por la Ecuación (4.40) y se muestra en la Figura 4.12(b).

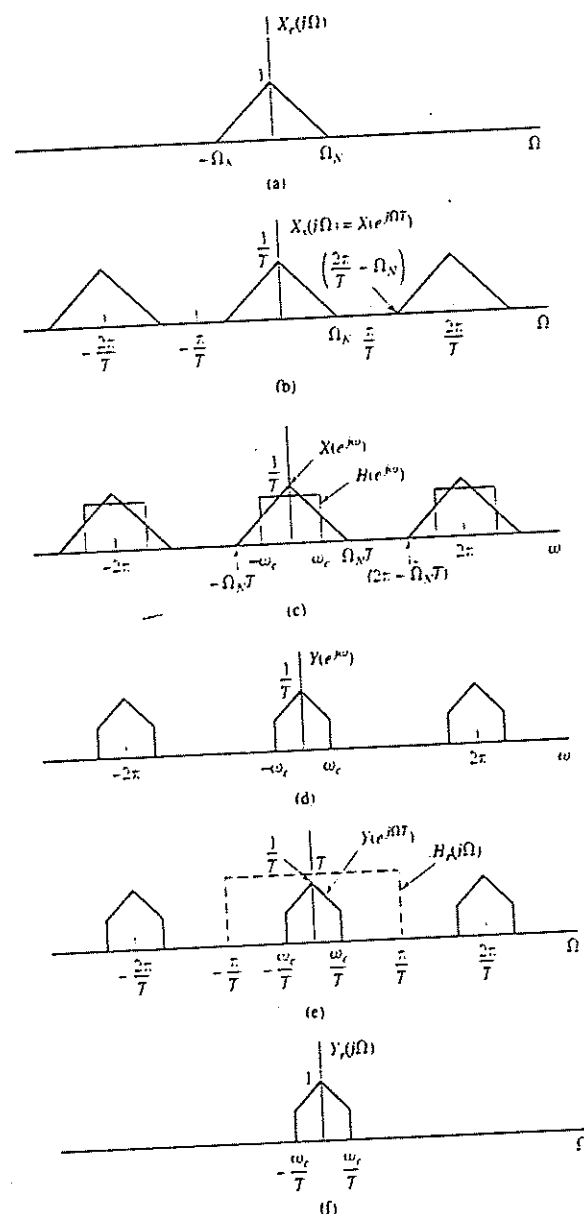


Figura 4.13. (a) Transformada de Fourier de una señal de entrada de banda limitada. (b) Transformada de Fourier de la entrada muestreada en función de la frecuencia en tiempo continuo Ω . (c) Transformada de Fourier $H(e^{j\omega})$ de la secuencia de muestras y respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto. (d) Transformada de Fourier de la salida del sistema en tiempo discreto. (e) Transformada de Fourier de la salida del sistema en tiempo continuo y respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal en función de Ω . (f) Transformada de Fourier de la salida.

El Ejemplo 4.4 permite ilustrar varios puntos importantes. En primer lugar, nótese que el filtro paso bajo ideal en tiempo discreto cuya frecuencia de corte es ω_c tiene el efecto de un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte $\Omega_c = \omega_c/T$ cuando se utiliza en la configuración mostrada en la Figura 4.11. Esta frecuencia de corte depende de ω_c y de T . En particular, si se utiliza un filtro paso bajo fijo en tiempo discreto pero se varía el periodo de muestreo T , se consigue un filtro equivalente en tiempo continuo cuya frecuencia de corte es variable. Por ejemplo, si T se escoge de forma que cumpla $\Omega_N T < \omega_c$, la salida del sistema de la Figura 4.11 sería $y_c(t) = x_c(t)$. Además, como se ilustra en el Problema 4.25, la Ecuación (4.40) sigue siendo válida incluso si existe algo de solapamiento en las Figuras 4.13(b) y (c). Concretamente, observando la Figura 4.13(c), vemos que para que la salida esté libre de solapamiento es necesario que

$$(2\pi - \Omega_N T) > \omega_c \quad (4.41)$$

que podemos comparar con la condición de Nyquist

$$(2\pi - \Omega_N T) > \Omega_N T \quad (4.42)$$

Como otro ejemplo de procesado en tiempo continuo utilizando un sistema en tiempo discreto, consideremos la realización de un diferenciador ideal para señales de banda limitada.

Ejemplo 4.5. Realización en tiempo discreto de un diferenciador ideal para señales en tiempo continuo de banda limitada

El sistema diferenciador ideal en tiempo continuo se define así:

$$y_c(t) = \frac{d}{dt} [x_c(t)] \quad (4.43)$$

y su correspondiente respuesta en frecuencia es

$$H_c(j\Omega) = j\Omega \quad (4.44)$$

Como estamos considerando una realización con la estructura de la Figura 4.11, las entradas deben ser de banda limitada. Para procesar señales de banda limitada, es suficiente que

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega & |\Omega| < \pi/T \\ 0 & |\Omega| \geq \pi/T \end{cases} \quad (4.45)$$

como muestra la Figura 4.14(a). El correspondiente sistema en tiempo discreto tiene como respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{j\omega}{T}, \quad |\omega| < \pi \quad (4.46)$$

que es periódica de periodo 2π . Esta respuesta en frecuencia se muestra en la Figura 4.14(b). Se puede demostrar que la correspondiente respuesta al impulso es

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi^2 T}, \quad -\infty < n < \infty,$$

o, de otra forma,

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{\cos \pi n}{nT}, & n \neq 0. \end{cases} \quad (4.47)$$

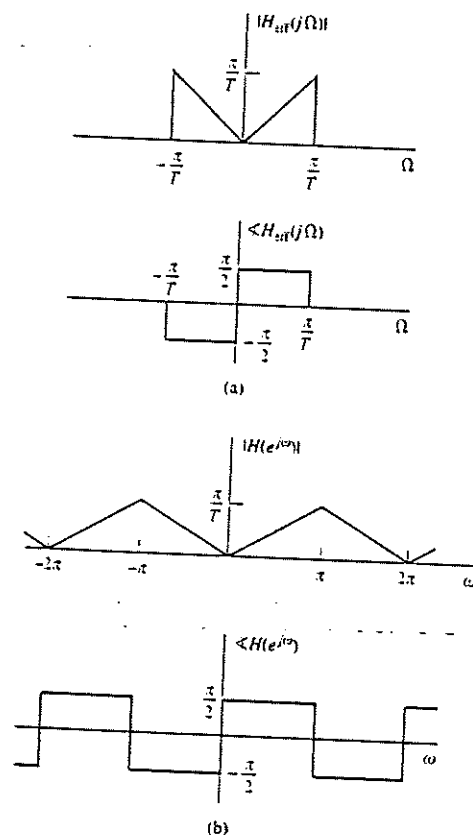


Figura 4.14. (a) Respuesta en frecuencia de un diferenciador ideal en tiempo continuo de banda limitada. $H(j\Omega) = j\Omega$, $|\Omega| < \pi/T$. (b) Respuesta en frecuencia de un filtro en tiempo discreto que realiza las funciones del diferenciador de banda limitada en tiempo continuo.

Por tanto, si se utiliza un sistema con esta respuesta al impulso en la configuración de la Figura 4.11, la salida para cualquier entrada de banda limitada será la derivada de la entrada.

Ejemplo 4.6. Ilustración del Ejemplo 4.5 con una entrada sinusoidal

Supongamos que el diferenciador de banda limitada del Ejemplo 4.5 tiene como entrada $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$ con $\Omega_0 < \pi/T$. La entrada muestreada será $x[n] = \cos(\omega_0 n)$ siendo $\omega_0 = \Omega_0 T < \pi$, y su transformada discreta de Fourier, expresada como una función de Ω es

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi \delta(\Omega - \Omega_0 - k\Omega_s) + \pi \delta(\Omega + \Omega_0 - k\Omega_s)].$$

Si nos centramos en la banda base de frecuencias $-\pi/T < \Omega < \pi/T$, obtenemos

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{\pi}{T} \delta(\Omega - \Omega_0) + \frac{\pi}{T} \delta(\Omega + \Omega_0) \quad \text{para } |\Omega| \leq \pi/T. \quad (4.48)$$

Para expresar la transformada de Fourier en tiempo discreto en función de ω , sustituimos en la Ecuación (4.48) $\Omega = \omega/T$, y utilizamos el hecho de que $\delta(\omega/T) = T\delta(\omega)$. El resultado es

$$X(e^{j\omega}) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0), \quad |\omega| \leq \pi.$$

La transformada de Fourier en tiempo discreto $X(e^{j\omega})$ se repite periódicamente, por supuesto, en la variable ω con periodo 2π , y $X(e^{j\Omega})$ se repite periódicamente con periodo $2\pi/T$. Si utilizamos ahora la Ecuación (4.46), la transformada de Fourier en tiempo discreto de la salida es

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= \frac{j\omega}{T} [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{j\omega_0 \pi}{T} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{j\omega_0 \pi}{T} \delta(\omega + \omega_0), \quad |\omega| \leq \pi. \end{aligned}$$

Utilizando la Ecuación (4.32), la transformada de Fourier de la salida del conversor D/C es, para $|\Omega| \leq \pi/T$,

$$\begin{aligned} Y_c(j\Omega) &= H_c(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = TY(e^{j\Omega T}) \\ &= T \left[\frac{j\omega_0 \pi}{T} \delta(\Omega T - \Omega_0 T) - \frac{j\omega_0 \pi}{T} \delta(\Omega T + \Omega_0 T) \right] \\ &= T \left[\frac{j\omega_0 \pi}{T} \frac{1}{T} \delta(\Omega - \Omega_0) - \frac{j\omega_0 \pi}{T} \frac{1}{T} \delta(\Omega + \Omega_0) \right] \\ &= j\Omega_0 \pi \delta(\Omega - \Omega_0) - j\Omega_0 \pi \delta(\Omega + \Omega_0). \end{aligned}$$

Por tanto, el filtro de reconstrucción selecciona los dos impulsos situados en $\pm \Omega_0$, con lo que

$$y_c(t) = j\Omega_0 \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} - j\Omega_0 \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t} = -\Omega_0 \sin(\Omega_0 t).$$

y obtenemos el resultado esperado, que es

$$y_c(t) = \frac{d}{dt} [x_c(t)].$$

4.4.2. Invarianza al impulso

Hemos demostrado que el sistema en cascada de la Figura 4.11 puede ser equivalente a un sistema lineal e invariante para entradas de banda limitada. Supongamos ahora que, como se muestra en la Figura 4.15, se desea realizar un sistema en tiempo continuo utilizando la estructura de la Figura 4.11. Si $H_c(j\Omega)$ es de banda limitada, la Ecuación (4.38) especifica cómo escoger $H(e^{j\omega})$ para que se cumpla que $H_{cc}(j\Omega) = H_c(j\Omega)$. Concretamente,

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\omega/T), \quad |\omega| < \pi. \quad (4.49)$$

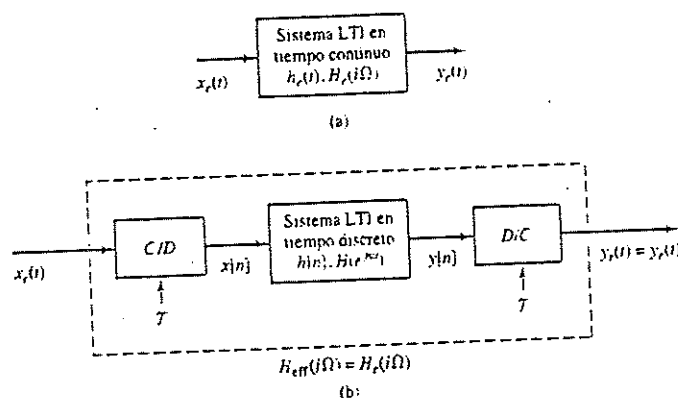


Figura 4.15. (a) Sistema LTI en tiempo continuo. (b) Sistema equivalente para entradas de banda limitada.

con el requerimiento adicional de que T debe escogerse de forma que se cumpla

$$H_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T. \quad (4.50)$$

Bajo las restricciones de las Ecuaciones (4.49) y (4.50), existe también una relación directa y útil entre la respuesta al impulso en tiempo continuo $h_c(t)$ y la respuesta al impulso en tiempo discreto $h[n]$. En concreto, como verificaremos enseguida.

$$h[n] = Th_c(nT); \quad (4.51)$$

es decir, la respuesta al impulso del sistema en tiempo discreto es una versión escalada y muestreada de $h_c(t)$. Cuando $h_c(t)$ y $h[n]$ se relacionan mediante la Ecuación (4.51), se dice que el sistema en tiempo discreto es una versión *invariante al impulso* del sistema en tiempo continuo.

La Ecuación (4.51) es una consecuencia directa de las ideas presentadas en la Sección 4.2. Concretamente, si sustituimos en la Ecuación (4.16) $x[n]$ y $x_c(t)$ por $h[n]$ y $h_c(t)$, respectivamente.

$$h[n] = h_c(nT), \quad (4.52)$$

la Ecuación (4.20) se convierte en

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right), \quad (4.53)$$

o, si se cumple la Ecuación (4.50),

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \pi. \quad (4.54)$$

Modificando las Ecuaciones (4.52) y (4.54) para tener en cuenta el factor de escala de la Ecuación (4.51), tenemos

$$h[n] = Th_c(nT), \quad (4.55)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \pi. \quad (4.56)$$

Ejemplo 4.7. Obtención de un filtro paso bajo en tiempo discreto mediante la técnica de invarianza al impulso

Supongamos que deseamos obtener un filtro paso bajo ideal en tiempo discreto cuya frecuencia de corte es $\omega_c < \pi$. Podemos realizarlo muestreando un filtro paso bajo ideal en tiempo continuo con frecuencia de corte $\Omega_c = \omega_c/T < \pi/T$ definido así:

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$$

La respuesta al impulso de este sistema en tiempo continuo es

$$h_c(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t},$$

de forma que podemos definir la respuesta al impulso del sistema en tiempo discreto

$$h[n] = Th_c(nT) = T \frac{\sin(\Omega_c nT)}{\pi nT} = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n},$$

siendo $\omega_c = \Omega_c T$. Ya hemos demostrado que esta secuencia tiene como transformada de Fourier en tiempo discreto

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

que es idéntica a $H_c(j\omega/T)$, como ya predecía la Ecuación (4.56).

Ejemplo 4.8. Método de invarianza al impulso aplicado a sistemas en tiempo continuo con funciones de transferencia racionales

Muchos sistemas en tiempo continuo tienen respuestas al impulso con la forma de una suma de secuencias exponenciales de la forma

$$h_c(t) = Ae^{st_0}u(t).$$

Estas funciones temporales tienen como transformada de Laplace

$$H_c(s) = \frac{A}{s - s_0}.$$

Si aplicamos el concepto de invarianza del impulso a un sistema en tiempo continuo de este tipo, obtenemos la respuesta al impulso

$$h[n] = Th_c(nT) = Ae^{snT}u[n].$$

cuya transformada Z es

$$H(z) = \frac{AT}{1 - e^{s_0T}z^{-1}}$$

y con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = \frac{AT}{1 - e^{s_0T}e^{-j\omega}}.$$

En este caso, la Ecuación (4.56) no se cumple exactamente, ya que el sistema original en tiempo continuo no tiene una respuesta en frecuencia estrictamente de banda limitada. Por tanto, la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto resultante es una versión solapada de $H_c(j\Omega)$. Incluso aunque en este caso se produce solapamiento, el efecto puede ser pequeño. Los sistemas de orden alto cuya respuesta en frecuencia es una suma de expo-

nenciales pueden de hecho tener respuestas en frecuencia que caigan rápidamente a altas frecuencias, con lo que el solapamiento será mínimo si la frecuencia de muestreo es lo suficientemente elevada. Por tanto, una forma de realizar la simulación en tiempo discreto de sistemas en tiempo continuo y también de realizar filtros digitales es muestrear la respuesta al impulso del correspondiente filtro analógico.

4.5. PROCESADO EN TIEMPO CONTINUO DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

En la Sección 4.4 hemos presentado y analizado el uso de sistemas en tiempo discreto para procesar señales en tiempo continuo utilizando la configuración presentada en la Figura 4.11. En esta sección consideraremos la situación complementaria, que se muestra en la Figura 4.16. Se trata del procesado en tiempo continuo de señales en tiempo discreto. Aunque la estructura que se muestra en la Figura 4.16 no se suele utilizar para realizar sistemas en tiempo discreto, proporciona una interpretación de utilidad de ciertos sistemas en tiempo discreto.

Utilizando la definición de conversor D/C ideal, $X_c(j\Omega)$ y por tanto $Y_c(j\Omega)$ serán necesariamente cero para $|\Omega| \geq \pi/T$. Por tanto, el conversor C/D muestreará la señal $y_c(t)$ sin solapamiento, y podremos expresar $x_c(t)$ e $y_c(t)$ de la siguiente forma.

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \quad (4.57)$$

y

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}, \quad (4.58)$$

siendo $x[n] = x_c(nT)$ e $y[n] = y_c(nT)$. Las relaciones en el dominio de la frecuencia para la Figura 4.16 son

$$X_c(j\Omega) = TX(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \pi/T, \quad (4.59a)$$

$$Y_c(j\Omega) = H_c(j\Omega)X_c(j\Omega), \quad |\Omega| < \pi/T, \quad (4.59b)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} Y_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi. \quad (4.59c)$$

Por tanto, sustituyendo las Ecuaciones (4.59a) y (4.59b) en la Ecuación (4.59c), obtenemos que el sistema completo se comporta como un sistema en tiempo discreto cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi, \quad (4.60)$$

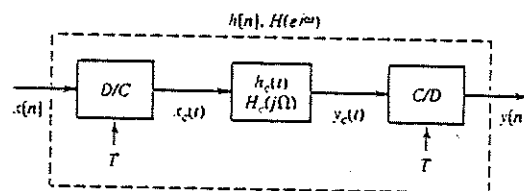


Figura 4.16. Procesado en tiempo continuo de señales en tiempo discreto.

o, equivalentemente, la respuesta total del sistema de la Figura 4.16 será igual a una $H(e^{j\omega})$ dada si la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo continuo es

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \pi/T. \quad (4.61)$$

Como $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$, $H_c(j\Omega)$ puede tomar cualquier valor por encima de π/T . Una elección adecuada, aunque arbitraria, es $H_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \pi/T$.

Utilizando esta representación de un sistema discreto, podemos centrarnos en el efecto de un sistema en tiempo continuo sobre la señal en tiempo continuo de banda limitada $x_c(t)$. Los Ejemplos 4.9 y 4.10 ilustran esta idea.

Ejemplo 4.9. Retardo no entero

Consideremos un sistema en tiempo discreto con respuesta en frecuencia

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\Delta}, \quad |\omega| < \pi. \quad (4.62)$$

Cuando Δ es entero, el sistema tiene una interpretación directa como un retardo de Δ . Es decir,

$$y[n] = x[n - \Delta]. \quad (4.63)$$

Cuando Δ no es entero, la Ecuación (4.63) no tiene un significado formal, ya que no es posible desplazar una secuencia un número no entero de muestras. Sin embargo, utilizando el sistema de la Figura 4.16, se puede dar una interpretación útil en el dominio del tiempo al sistema especificado en la Ecuación (4.62). Escojamos $H_c(j\Omega)$ en la Figura 4.16 del siguiente modo:

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) = e^{-j\Omega\Delta T}. \quad (4.64)$$

De esta forma, utilizando la Ecuación (4.61), vemos que el sistema completo en tiempo discreto de la Figura 4.16 tiene una respuesta al impulso determinada por la Ecuación (4.62), sea Δ entero o no entero. Para interpretar el sistema de la Ecuación (4.62) es necesario tener en cuenta que la Ecuación (4.64) representa un retardo de ΔT segundos. Por tanto,

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta T). \quad (4.65)$$

Además, $x_c(t)$ corresponde a la interpolación de banda limitada de $x[n]$, e $y[n]$ se obtiene muestreando $y_c(t)$. Por ejemplo, si $\Delta = \frac{1}{2}$, $y[n]$ tendrá los valores correspondientes a la interpolación de banda limitada en los puntos intermedios de los valores de la secuencia de

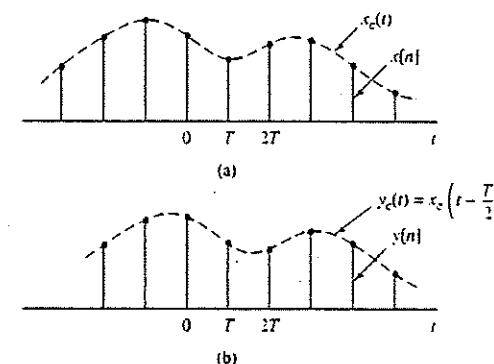


Figura 4.17. El procesado en tiempo continuo de la secuencia en tiempo discreto de la parte (a) puede producir una nueva secuencia con un retardo de «media muestra», como muestra la parte (b).

entrada. Esto se ilustra en la Figura 4.17. Es posible además obtener una representación directa en forma de convolución del sistema definido en la Ecuación (4.62). Aplicando las Ecuaciones (4.65) y (4.57) obtenemos

$$\begin{aligned} y[n] &= y_c(nT) = x_c(nT - \Delta T) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin[\pi(n - \Delta T - kT)/T]}{\pi(n - \Delta T - kT)/T} \bigg|_{n=nT} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin \pi(n - k - \Delta)}{\pi(n - k - \Delta)} \end{aligned} \quad (4.66)$$

que es, por definición, la convolución de $x[n]$ con

$$h[n] = \frac{\sin \pi(n - \Delta)}{\pi(n - \Delta)}, \quad -\infty < n < \infty$$

Cuando Δ no es entero, $h[n]$ tiene una extensión infinita. Sin embargo, si $\Delta = n_0$, un valor entero, se puede demostrar fácilmente que $h[n] = \delta[n - n_0]$, que es la respuesta al impulso del sistema de retardo entero ideal.

El retardo no entero representado en la Ecuación (4.66) tiene un significado práctico considerable, ya que muchas veces aparece un factor de este tipo en la representación de sistemas en el dominio de la frecuencia. Cuando aparece este término en la respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo discreto causal, se puede interpretar a la luz de este ejemplo. Esta interpretación se ilustra en el Ejemplo 4.10.

Ejemplo 4.10. Sistema de promediado móvil con retardo no entero

En el Ejemplo 2.20 consideramos el sistema de promediado móvil general y obtuvimos su respuesta en frecuencia. Para el caso del sistema de promediado móvil causal de $(M + 1)$ puntos, $M_1 = 0$ y $M_2 = M$, y la respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(M + 1)} \frac{\sin[\omega(M + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}, \quad |\omega| < \pi. \quad (4.67)$$

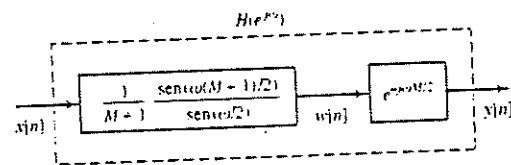


Figura 4.18. El sistema de promediado móvil como una cascada de dos sistemas.

Esta representación de la respuesta en frecuencia nos sugiere la interpretación del sistema de promediado móvil de $(M + 1)$ puntos como una cascada de dos sistemas, como se indica en la Figura 4.18. El primer sistema impone una ponderación de la amplitud en el dominio de la frecuencia. El segundo sistema representa el término de fase lineal de la Ecuación (4.67). Si M es un número entero par (lo que significa que el promediado móvil es de un

número impar de muestras), el término de fase lineal corresponde a un retardo entero, es decir,

$$y[n] = w[n - M/2]. \quad (4.68)$$

Sin embargo, si M es impar, el término de fase lineal corresponde a un retardo no entero, concretamente a un intervalo entero de media muestra más uno. Este retardo no entero se puede interpretar teniendo en cuenta la presentación del Ejemplo 4.9. Es decir, $y[n]$ será equivalente a la interpolación de banda limitada de $w[n]$, seguida por un retardo en tiempo continuo de $MT/2$ (siendo T el período de muestreo arbitrario asumido en la interpolación D/C de $w[n]$), seguida por una conversión C/D de nuevo con período de muestreo T . La Figura 4.19 ilustra este retardo fraccionario. En la Figura 4.19(a) se muestra la secuencia en

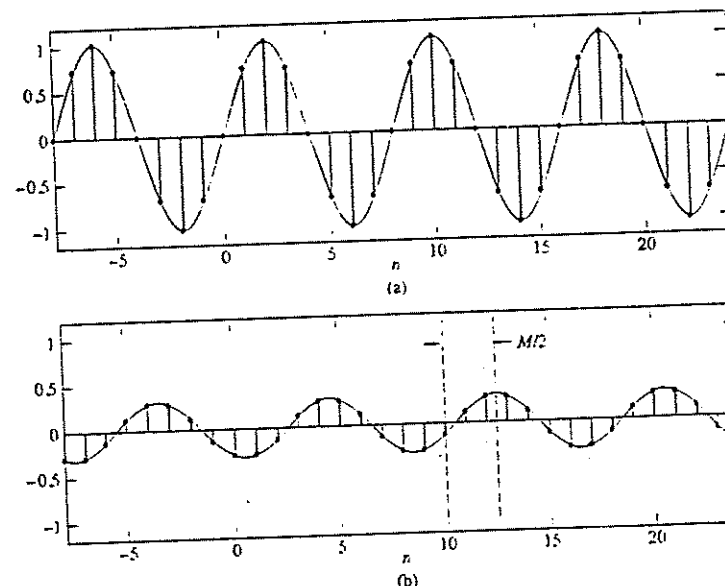


Figura 4.19. Ilustración del filtro de promediado móvil. (a) Señal de entrada $x[n] = \cos(0.25\pi n)$. (b) Salida correspondiente al filtro de promediado móvil de seis puntos.

tiempo discreto $x[n] = \cos(0.25\pi n)$. Esta secuencia es la entrada de un filtro de promediado móvil de seis puntos ($M = 5$). En este ejemplo, la entrada se «activa» lo suficientemente lejos en el pasado como para que la salida en el intervalo de tiempo considerado sólo consista de la respuesta en estado estacionario. La Figura 4.19(b) muestra la correspondiente secuencia de salida, dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= H(e^{j0.25\pi}) \frac{1}{2} e^{j0.25\pi n} + H(e^{-j0.25\pi}) \frac{1}{2} e^{-j0.25\pi n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin[3(0.25\pi)]}{6 \sin(0.125\pi)} e^{-j0.25\pi n/2} e^{j0.25\pi n} + \frac{1}{2} \frac{\sin[3(-0.25\pi)]}{6 \sin(-0.125\pi)} e^{j0.25\pi n/2} e^{-j0.25\pi n} \\ &= 0.308 \cos[0.25\pi(n - 2.5)]. \end{aligned}$$

Por tanto, el filtro de promediado móvil de seis puntos reduce la amplitud de la señal coseno e introduce un desplazamiento de fase que corresponde a 2.5 muestras de retardo. Esto se puede ver fácilmente en la Figura 4.19, donde hemos dibujado los cosenos en tiempo

po continuo que serían el resultado de la interpolación realizada por el conversor D/C tanto para la señal de entrada como para la de salida. Nótese en la Figura 4.19(b) que el filtro de promediado móvil de seis puntos produce una señal coseno muestreada de forma que los puntos de las muestras se han desplazado 2.5 muestras con respecto a los puntos de las muestras de la entrada. Esto se puede apreciar en la Figura 4.19(b) comparando el pico positivo en 10 del coseno interpolado de la entrada con el pico positivo en 12.5 del coseno interpolado de la salida. Por tanto, vemos que el filtro de promediado móvil de seis puntos tiene un retardo de $5/2 = 2.5$ muestras.

4.6. CAMBIO DE LA FRECUENCIA DE MUESTREO UTILIZANDO PROCESADO EN TIEMPO DISCRETO

Ya hemos visto que una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ se puede representar mediante una señal en tiempo discreto consistente en la secuencia de muestras

$$x[n] = x_c(nT). \quad (4.69)$$

Adicionalmente, en nuestra presentación anterior hemos demostrado que, aunque $x[n]$ no se obtenga mediante un proceso de muestreo, siempre se puede utilizar la fórmula de interpolación de banda limitada de la Ecuación (4.25) para obtener una señal de banda limitada $x_c(t)$ cuyas muestras sean $x[n] = x_c(nT)$.

Muchas veces es necesario cambiar la frecuencia de muestreo de una señal en tiempo discreto. Por ejemplo, puede desearse obtener una nueva representación en tiempo discreto de la señal en tiempo continuo subyacente de la forma

$$x'[n] = x_c(nT'), \quad (4.70)$$

siendo $T' \neq T$. Una forma de obtener las nuevas secuencias $x'[n]$ a partir de $x[n]$ es reconstruir $x_c(t)$ a partir de $x[n]$ utilizando la Ecuación (4.25), y muestrear seguidamente la señal $x_c(t)$ con periodo de muestreo T' para obtener la nueva señal $x'[n]$. Sin embargo, muchas veces esta solución no es deseable, debido a la presencia del filtro de reconstrucción analógico no ideal, del conversor A/D y del conversor D/A, elementos necesarios en una realización práctica. Por tanto, resulta de interés considerar métodos para cambiar la frecuencia de muestreo que utilicen sólo operaciones en tiempo discreto.

4.6.1. Reducción de la frecuencia de muestreo por un factor entero

La frecuencia de muestreo de una secuencia se puede reducir «muestreándola». Es decir, definiendo una nueva secuencia

$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT). \quad (4.71)$$

La Ecuación (4.71) define el sistema que se muestra en la Figura 4.20, que se denomina *compresor de la frecuencia de muestreo* (véase Crochiere y Rabiner, 1983), o simplemente *compresor*.

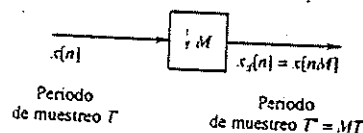


Figura 4.20. Representación de un compresor o sistema de muestreo en tiempo discreto.

Por. A partir de la Ecuación (4.71) se puede ver claramente que $x_d[n]$ es idéntica a la secuencia que se obtendría muestreando $x_c(t)$ con periodo $T' = MT$. Además, si $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \Omega_N$, $x_d[n]$ será una representación exacta de $x_c(t)$ si $\pi/T' = \pi/(MT) \geq \Omega_N$. Es decir, que la frecuencia de muestreo se puede reducir por un factor de M sin que se produzca solapamiento si la frecuencia de muestreo original era al menos M veces la frecuencia de Nyquist original, o si el ancho de banda de la secuencia se reduce previamente por un factor de M mediante filtrado digital. En general, la operación de reducir la frecuencia de muestreo (incluyendo el posible filtrado previo) se denomina *diezmado*.

Como en el caso del muestreo de una señal en tiempo continuo, es útil obtener una relación en el dominio de la frecuencia entre la entrada y la salida del compresor. Sin embargo, esta vez será una relación entre transformadas discretas de Fourier. Aunque existen varios métodos para obtener el resultado deseado, nos basaremos en los resultados ya obtenidos para el muestreo de señales en tiempo continuo. Recordemos en primer lugar que la transformada de Fourier en tiempo discreto de $x[n] = x_c(nT)$ es

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right). \quad (4.72)$$

Análogamente, la transformada de Fourier de $x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT)$ con $T' = MT$ es

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T'} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T'} - \frac{2\pi r}{T'}\right)\right). \quad (4.73)$$

Aplicando que $T' = MT$, podemos escribir la Ecuación (4.73) como

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT}\right)\right). \quad (4.74)$$

Para ver la relación existente entre las Ecuaciones (4.74) y (4.72), nótese que el índice r de la suma en la Ecuación (4.74) se puede expresar como

$$r = i + kM, \quad (4.75)$$

siendo k e i enteros con $-\infty < k < \infty$ y $0 \leq i \leq M-1$. Claramente, r sigue siendo un entero entre $-\infty$ e ∞ , pero ahora la Ecuación (4.74) se puede expresar de esta forma

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{MT} - \frac{2\pi i}{MT}\right)\right) \right]. \quad (4.76)$$

El término dentro de los corchetes en la Ecuación (4.76) es, aplicando la Ecuación (4.72),

$$X(e^{j(\omega - 2\pi i)/M}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right). \quad (4.77)$$

Con lo que la Ecuación (4.76) se puede expresar

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega - 2\pi i)/M}). \quad (4.78)$$

Hay una fuerte analogía entre las Ecuaciones (4.72) y (4.78). La Ecuación (4.72) expresa la transformada de Fourier de una secuencia de muestras $x[n]$ (tomadas con periodo T) en función de la transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo $x_c(t)$. Por otra parte, la Ecuación (4.78) expresa la transformada de Fourier de una secuencia muestreada en tiempo discreto $x_d[n]$ (con periodo de muestreo M) en función de la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$. Si comparamos las Ecuaciones (4.73) y (4.78), $X_d(e^{j\omega})$ se puede considerar compuesta, bien de una serie de copias de $X_c(j\Omega)$, escaladas en frecuencia mediante la relación $\omega = \Omega T'$ y desplazadas múltiplos enteros de $2\pi/T'$ (Ecuación (4.73)), o bien como M copias de la transformada de Fourier periódica $X(e^{j\omega})$, escaladas en frecuencia por M y desplazadas múltiplos enteros de 2π (Ecuación (4.78)). Cualquier interpretación deja claro que $X_d(e^{j\omega})$ es periódica de periodo 2π (como cualquier transformada de Fourier en tiempo discreto), y que se puede evitar el solapamiento si $X(e^{j\omega})$ es de banda limitada. Es decir, si se cumple que

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad \omega_N \leq |\omega| \leq \pi. \quad (4.79)$$

y $2\pi/M \geq 2\omega_N$.

La Figura 4.21 ilustra el diezmado. En la Figura 4.21(a) vemos la transformada de Fourier de una señal continua de banda limitada, y en la Figura 4.21(b), la transformada de Fourier del tren de impulsos con las muestras cuando el periodo de muestreo es T . La Figura 4.21(c) muestra $X(e^{j\omega})$ y está relacionada con la Figura 4.21(b) mediante la Ecuación (4.18). Como ya hemos visto, las Figuras 4.21(b) y (c) difieren sólo en el escalado de la variable de frecuencia. La Figura 4.21(d) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia diezmada cuando $M = 2$. Hemos dibujado esta transformada de Fourier en función de la frecuencia normalizada $\omega = \Omega T'$. Finalmente, la Figura 4.21(e) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia diezmada en función de la variable de frecuencia en tiempo continuo Ω . La Figura 4.21(e) es idéntica a la Figura 4.21(d), excepto por el factor de escala en el eje de frecuencias de $\Omega = \omega/T'$.

En este ejemplo, $2\pi/T = 4\omega_N$. Es decir, la frecuencia de muestreo original es exactamente dos veces la frecuencia mínima necesaria para evitar el solapamiento. Por tanto, cuando se diezma la secuencia original con un factor de $M = 2$, no se produce solapamiento. Si el factor de diezmado fuera superior a 2 habría solapamiento, como se ilustra en la Figura 4.22.

La Figura 4.22(a) muestra la transformada de Fourier en tiempo continuo de $x_c(t)$, y la Figura 4.22(b) la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia $x[n] = x_c(nT)$, siendo $2\pi/T = 4\omega_N$. Entonces, $\omega_N = \Omega_N T = \pi/2$. Si diezmamos ahora con un factor de $M = 3$, obtenemos la secuencia $x_d[n] = x[3n] = x_c(n3T)$, cuya transformada de Fourier en tiempo discreto se muestra en la Figura 4.22(c) en función de la frecuencia normalizada $\omega = \Omega T'$. Nótese que como $M\omega_N = 3\pi/2$, que es mayor que π , hay solapamiento. En general, para evitar el solapamiento cuando se diezma con un factor de M es necesario que

$$\omega_N M < \pi \quad \text{o} \quad \omega_N < \pi/M. \quad (4.80)$$

Si no se cumple esta condición, aparecerá solapamiento, pero éste puede ser tolerable para algunas aplicaciones. En otros casos, se puede realizar el diezmado sin solapamiento si se reduce el ancho de banda de la señal $x[n]$ antes de diezmara. Es decir, si se filtra $x[n]$ con un filtro paso bajo ideal cuya frecuencia de corte sea π/M , la salida $\hat{x}[n]$ se puede diezmara sin solapamiento, como se ilustra en las Figuras 4.22(d), (e) y (f). Nótese que la secuencia $\hat{x}_d[n] = \hat{x}[nM]$ ya no representa más la señal en tiempo continuo subyacente $x_c(t)$. Lo que ocurre es que $\hat{x}_d[n] = \hat{x}_c(nT')$, siendo $T' = MT$, y donde $\hat{x}_c(t)$ se obtiene de $x_c(t)$ mediante filtrado paso bajo con frecuencia de corte $\Omega_c = \pi/T' = \pi/(MT)$.

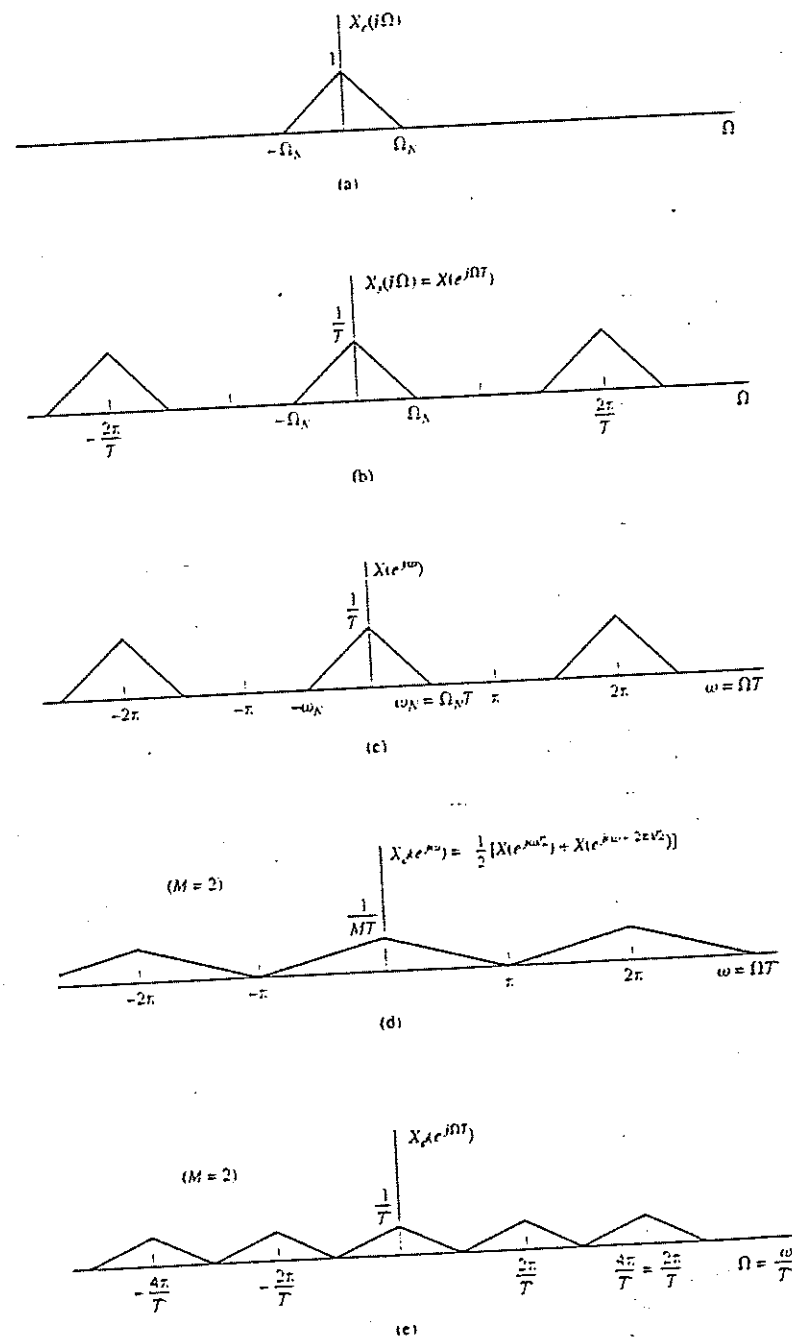


Figura 4.21. Ilustración del diezmado en el dominio de la frecuencia.

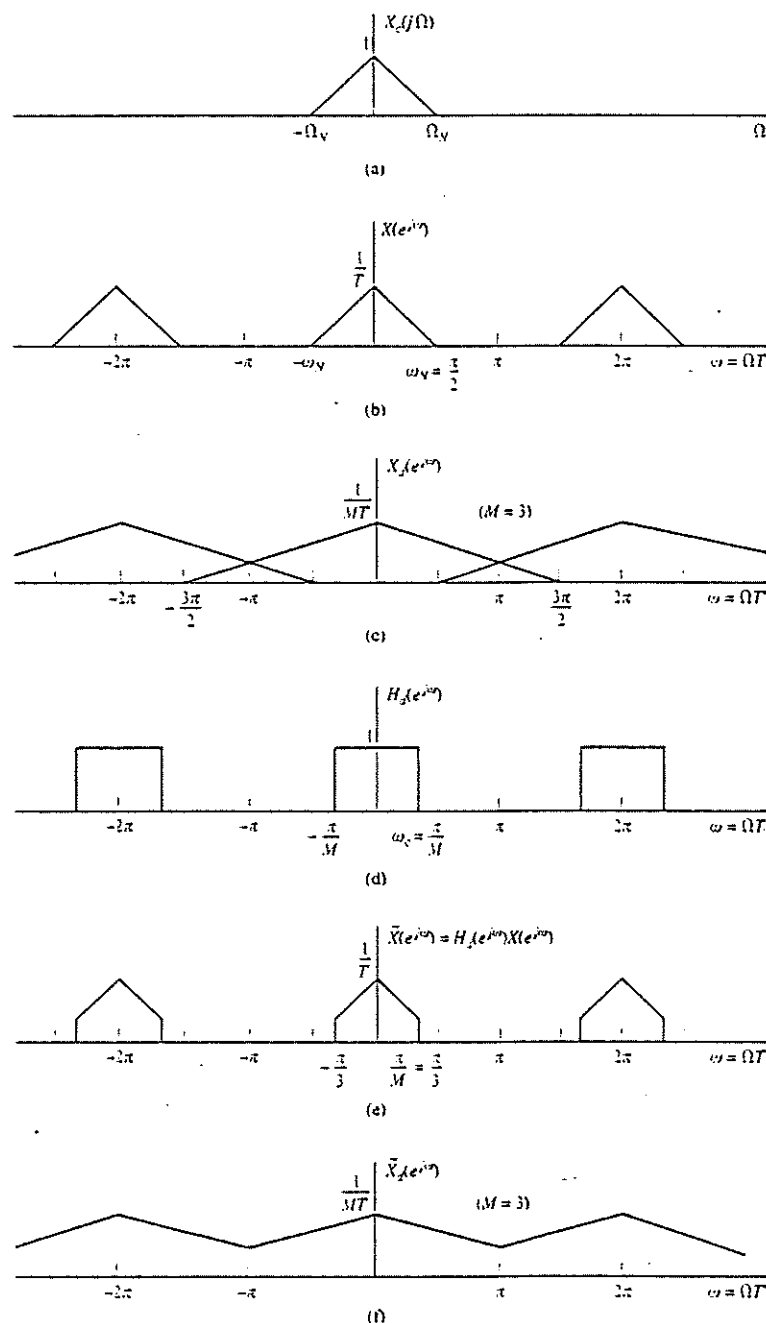
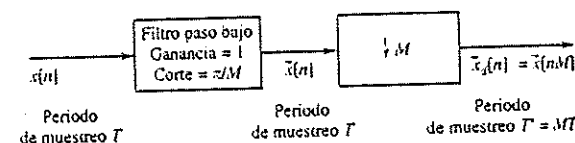


Figura 4.22. (a)-(c) Diezmado con solapamiento. (d)-(f) Diezmado con filtrado previo para evitar el solapamiento.

Figura 4.23. Sistema general para reducir la frecuencia de muestreo por un factor de M .

Como conclusión de la presentación anterior, vemos que el sistema general para realizar el diezmado por un factor de M tiene la estructura que se muestra en la Figura 4.23. Este sistema se denomina *diezmador*, y la operación que realiza mediante filtrado paso bajo previo seguido por una compresión se denomina *diezmado* (Crochiere y Rabiner, 1983).

4.6.2. Incremento de la frecuencia de muestreo por un factor entero

Ya hemos visto que la reducción por un factor entero de la frecuencia de muestreo de una señal discreta involucra el muestreo de dicha secuencia de forma análoga a como se muestrea una señal en tiempo continuo. No es sorprendente entonces que el incremento de la frecuencia de muestreo involucre operaciones análogas a la conversión D/C. Para verlo, consideremos una señal $x[n]$ cuya frecuencia de muestreo deseamos incrementar por un factor de L . Si consideramos la señal en tiempo continuo subyacente $x_c(t)$, el objetivo es obtener muestras

$$x_i[n] = x_c(nT'), \quad (4.81)$$

siendo $T' = T/L$, partiendo de la secuencia de muestras

$$x[n] = x_c(nT). \quad (4.82)$$

Denominaremos *interpolación* a la operación de aumentar la frecuencia de muestreo.

Utilizando las Ecuaciones (4.81) y (4.82) obtenemos que

$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L), \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (4.83)$$

La Figura 4.24 muestra el sistema necesario para obtener $x_i[n]$ a partir de $x[n]$ empleando sólo procesado en tiempo discreto. El sistema de la izquierda se denomina *expansor de la frecuencia de muestreo* (véase Crochiere y Rabiner, 1983), o simplemente *expansor*. Su salida es

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (4.84)$$

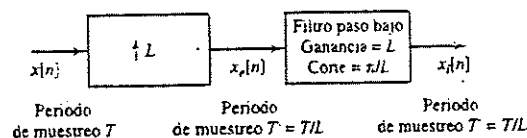
o equivalentemente,

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL]. \quad (4.85)$$

El sistema de la derecha es un filtro paso bajo en tiempo discreto con frecuencia de corte de π/L y ganancia L . Este sistema tiene un papel similar al del conversor D/C ideal de la Figura 4.10(b). En primer lugar, creamos un tren de impulsos en tiempo discreto $x_e[n]$, y después utilizamos un filtro paso bajo para reconstruir la secuencia.

La operación del sistema de la Figura 4.24 se entiende de forma más sencilla en el dominio de la frecuencia. La transformada de Fourier de $x_e[n]$ se puede expresar así:

$$\begin{aligned} X_e(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - kL] \right) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega Lk} = X(e^{j\omega L}). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Figura 4.24. Sistema general para incrementar la frecuencia de muestreo por un factor de L .

Por tanto, la transformada de Fourier de la salida del expansor es una versión escalada en frecuencia de la transformada de Fourier de la entrada. Es decir, ω se sustituye por ωL , de forma que ω queda ahora normalizada por

$$\omega = \Omega T'. \quad (4.87)$$

La Figura 4.25 ilustra este efecto. En la Figura 4.25(a) se muestra la transformada de Fourier en tiempo continuo de una señal de banda limitada, y en la Figura 4.25(b), la transformada de Fourier de la secuencia $x[n] = x_c(nT)$, siendo $\pi/T = \Omega_N$. La Figura 4.25(c) muestra $X_c(e^{j\omega})$ de acuerdo a la Ecuación (4.86) con $L = 2$, y la Figura 4.25(d) muestra la transformada de Fourier de la señal deseada $x_i[n]$. Vemos que $X_i(e^{j\omega})$ se puede obtener a partir de $X_c(e^{j\omega})$ modificando el factor de escala de la amplitud de $1/T$ a $1/T'$ y eliminando todas las réplicas escaladas en frecuencia de $X_c(j\Omega)$ que no estén situadas en múltiplos enteros de 2π . Para el caso que se muestra en la Figura 4.25, esto requiere utilizar un filtro paso bajo con una ganancia de 2 y una frecuencia de corte de $\pi/2$, como se muestra en la Figura 4.25(d). En general, la ganancia necesaria será de L , ya que $L(1/T) = [1/(T/L)] = 1/T'$, y la frecuencia de corte será de π/L .

Este ejemplo muestra que el sistema de la Figura 4.24 da de hecho una salida que cumple la Ecuación (4.81) siempre que la secuencia de entrada $x[n] = x_c(nT)$ provenga de un proceso de muestreo sin solapamiento. El sistema es, por tanto, un *interpolador*, ya que rellena las muestras perdidas, y por ello la operación se denomina *interpolación*.

Como en el caso del conversor D/C, es posible obtener una fórmula de interpolación para $x_i[n]$ en función de $x[n]$. Nótese en primer lugar que la respuesta al impulso del filtro paso bajo de la Figura 4.24 es

$$h_i[n] = \frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L}. \quad (4.88)$$

Utilizando la Ecuación (4.85), obtenemos

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin[\pi(n - kL)/L]}{\pi(n - kL)/L}. \quad (4.89)$$

La respuesta al impulso $h_i[n]$ tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} h_i[0] &= 1, \\ h_i[n] &= 0, \quad n = \pm L, \pm 2L, \dots \end{aligned} \quad (4.90)$$

Por tanto, para el filtro de interpolación paso bajo ideal tenemos que

$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L) = x_c(nT'), \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (4.91)$$

como se deseaba. El hecho de que $x_i[n] = x_c(nT')$ para todo n se desprende de nuestro razonamiento en el dominio de la frecuencia.

En la práctica, los filtros paso bajo ideales no se pueden realizar de forma exacta, pero veremos en el Capítulo 7 que se pueden obtener muy buenas aproximaciones (véase también

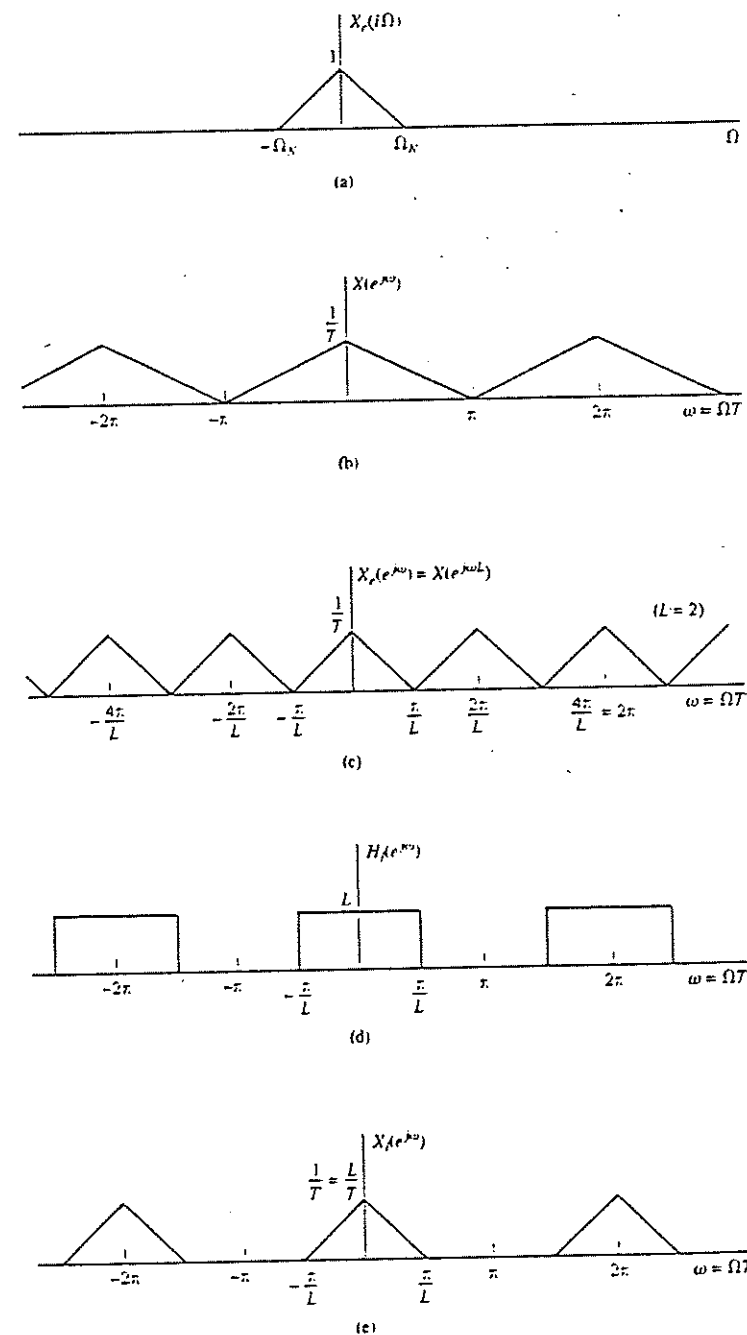


Figura 4.25. Ilustración de la interpolación en el dominio de la frecuencia.

Schafer y Rabiner, 1973, y Oetken *et al.*, 1975). En algunos casos pueden resultar adecuados procedimientos de interpolación muy simples. Como la interpolación lineal se utiliza a menudo (aunque generalmente no es muy precisa), merece la pena examinar el proceso de interpolación lineal dentro del marco general que acabamos de desarrollar.

La interpolación lineal se puede realizar mediante el sistema de la Figura 4.24 si la respuesta al impulso del filtro es

$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - |n|/L, & |n| \leq L, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \quad (4.92)$$

como muestra la Figura 4.26 para $L = 5$. Con este filtro, la salida interpolada será

$$x_{lin}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_{lin}[n - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_{lin}[n - kL]. \quad (4.93)$$

La Figura 4.27(a) muestra las señales $x_c[n]$ y $x_{lin}[n]$ para el caso de $L = 5$. Observando la

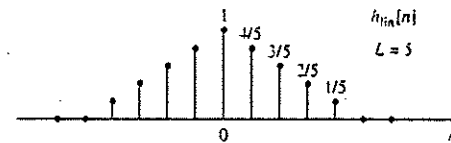
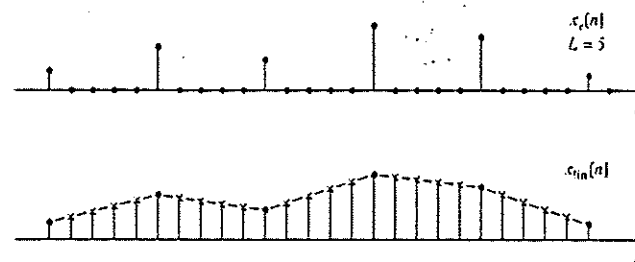
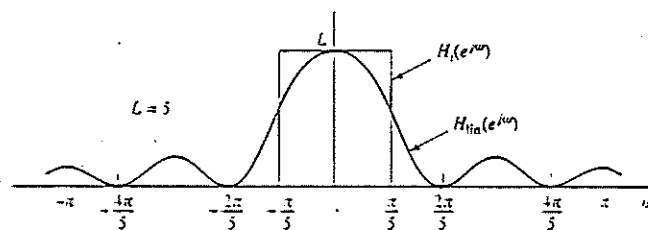


Figura 4.26. Respuesta al impulso de la interpolación lineal.



(a)



(b)

Figura 4.27. (a) Ilustración de la interpolación lineal mediante filtrado. (b) Respuesta en frecuencia de un interpolador lineal comparada con la del filtro paso bajo ideal.

figura, podemos ver que $x_{lin}[n]$ es idéntica a la secuencia que se obtendría con una interpolación lineal entre las muestras. Nótese que

$$\begin{aligned} h_{lin}[0] &= 1, \\ h_{lin}[n] &= 0, \quad n = \pm L, \pm 2L, \dots \end{aligned} \quad (4.94)$$

con lo que

$$x_{lin}[n] = x[n/L] \quad \text{donde} \quad n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \quad (4.95)$$

Se puede estimar la cantidad de distorsión de las muestras intermedias comparando la respuesta en frecuencia del interpolador lineal con la del interpolador paso bajo ideal para un factor de interpolación de L . Se puede demostrar (véase el Problema 4.50) que

$$H_{lin}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \left[\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right]^2. \quad (4.96)$$

La Figura 4.27(b) muestra esta función para $L = 5$, junto con la respuesta del filtro de interpolación paso bajo ideal. Observando la figura se puede ver que si la señal original se muestrea a la frecuencia de Nyquist, la interpolación lineal no será muy buena, ya que la salida del filtro tendrá una energía considerable en la banda $\pi/L < |\omega| \leq \pi$. Sin embargo, si la frecuencia de muestreo original es muy superior a la de Nyquist, el interpolador lineal tendrá más éxito al eliminar las imágenes escaladas en frecuencia de $X_c(j\Omega)$ situadas en los múltiplos de $2\pi/L$. Esto es debido a que $H_{lin}(e^{j\omega})$ es pequeña en esas frecuencias normalizadas y a frecuencias de muestreo mayores, las copias desplazadas de $X_c(j\Omega)$ están más localizadas en esas frecuencias. Esto es intuitivamente razonable, ya que si la frecuencia de muestreo original es muy superior a la de Nyquist, la señal no variará significativamente entre muestras consecutivas, y por tanto, la interpolación lineal debe resultar más exacta.

4.6.3. Cambio de la frecuencia de muestreo por un factor no entero

Ya hemos visto la forma de aumentar o disminuir la frecuencia de muestreo de una secuencia por un factor entero. Combinando el diezmado y la interpolación es posible cambiar la frecuencia de muestreo por un factor no entero. Concretamente, consideremos la Figura 4.28(a), que muestra un interpolador que reduce el periodo de muestreo de T a T/L , seguido por un diezmador que incrementa el periodo de muestreo por un factor de M . Se produce así una secuencia de salida $\tilde{x}_c[n]$ cuyo periodo de muestreo efectivo es $T' = TM/L$. Escogiendo adecuadamente M y L , se puede aproximar arbitrariamente cualquier razón deseada de periodos de muestreo. Por ejemplo, si $L = 100$ y $M = 101$, entonces $T' = 1.01T$.

Si $M > L$, hay un incremento neto en el periodo de muestreo (una disminución de la frecuencia de muestreo) y si $M < L$, se produce lo contrario. Como los filtros de diezmado e interpolación de la Figura 4.28(a) están en cascada, se pueden combinar como indica la Figura 4.28(b) en un único filtro paso bajo de ganancia L y frecuencia de corte igual al mínimo de π/L y π/M . Si $M > L$, la frecuencia de corte dominante es π/M , y se produce una reducción neta de la frecuencia de muestreo. Como se ha indicado en la Sección 4.6.1, si $x[n]$ se obtiene muestreando a la frecuencia de Nyquist, la secuencia $\tilde{x}_c[n]$ será una versión filtrada paso bajo de la señal de banda limitada subyacente si deseamos evitar el solapamiento. Por el contrario, si $M < L$ la frecuencia de corte dominante es π/L y no habrá necesidad de limitar el ancho de banda de la señal por debajo de la frecuencia de Nyquist original.

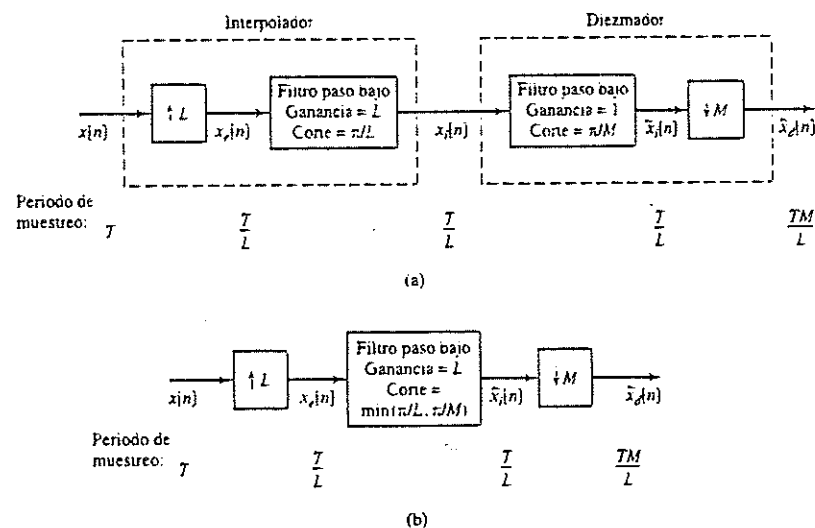


Figura 4.28. (a) Sistema para cambiar la frecuencia de muestreo por un factor no entero. (b) Versión simplificada en la que se han combinado los filtros de diezmo e interpolación.

Ejemplo 4.11. Conversión de la frecuencia de muestreo por un factor racional no entero

La Figura 4.29 ilustra el proceso de conversión de la frecuencia de muestreo por un factor racional. Supongamos que una señal de banda limitada cuyo espectro $X_c(j\Omega)$ se muestra en la Figura 4.29(a) se muestrea a la frecuencia de Nyquist, es decir, $2\pi/T = 2\Omega_N$. La transformada de Fourier en tiempo discreto resultante

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

se muestra en la Figura 4.29(b). Si deseamos cambiar el periodo de muestreo a $T' = (3/2)T$, debemos interpolar primero por un factor de $L = 2$ y diezmar posteriormente con un factor de $M = 3$. Como esto implica una reducción neta de la frecuencia de muestreo y la señal original estaba muestreada a la frecuencia de Nyquist, debemos realizar un filtrado paso bajo adicional para evitar el solapamiento.

La Figura 4.29(c) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de la salida del sistema de interpolación con $L = 2$. Si sólo estuviéramos interesados en interpolar con un factor de 2, podríamos escoger el filtro paso bajo con una frecuencia de corte de $\omega_c = \pi/2$ y una ganancia de $L = 2$. Sin embargo, como la salida del filtro será diezmada por un factor de $M = 3$, debemos usar una frecuencia de corte de $\omega_c = \pi/3$, pero la ganancia del filtro deberá seguir siendo de 2, como muestra la Figura 4.29(d). La transformada de Fourier $\tilde{X}_d(e^{j\omega})$ de la salida del filtro paso bajo se muestra en la Figura 4.29(e). Las regiones sombreadas indican la parte del espectro de la señal que se elimina debido a la inferior frecuencia de corte del filtro de interpolación. Finalmente, la Figura 4.29(f) muestra la transformada de Fourier en tiempo discreto de la salida del sistema de diezmo para $M = 3$. Nótese que las regiones sombreadas indican el solapamiento que se habría producido si la frecuencia de corte del filtro de interpolación hubiera sido $\pi/2$ en lugar de $\pi/3$.

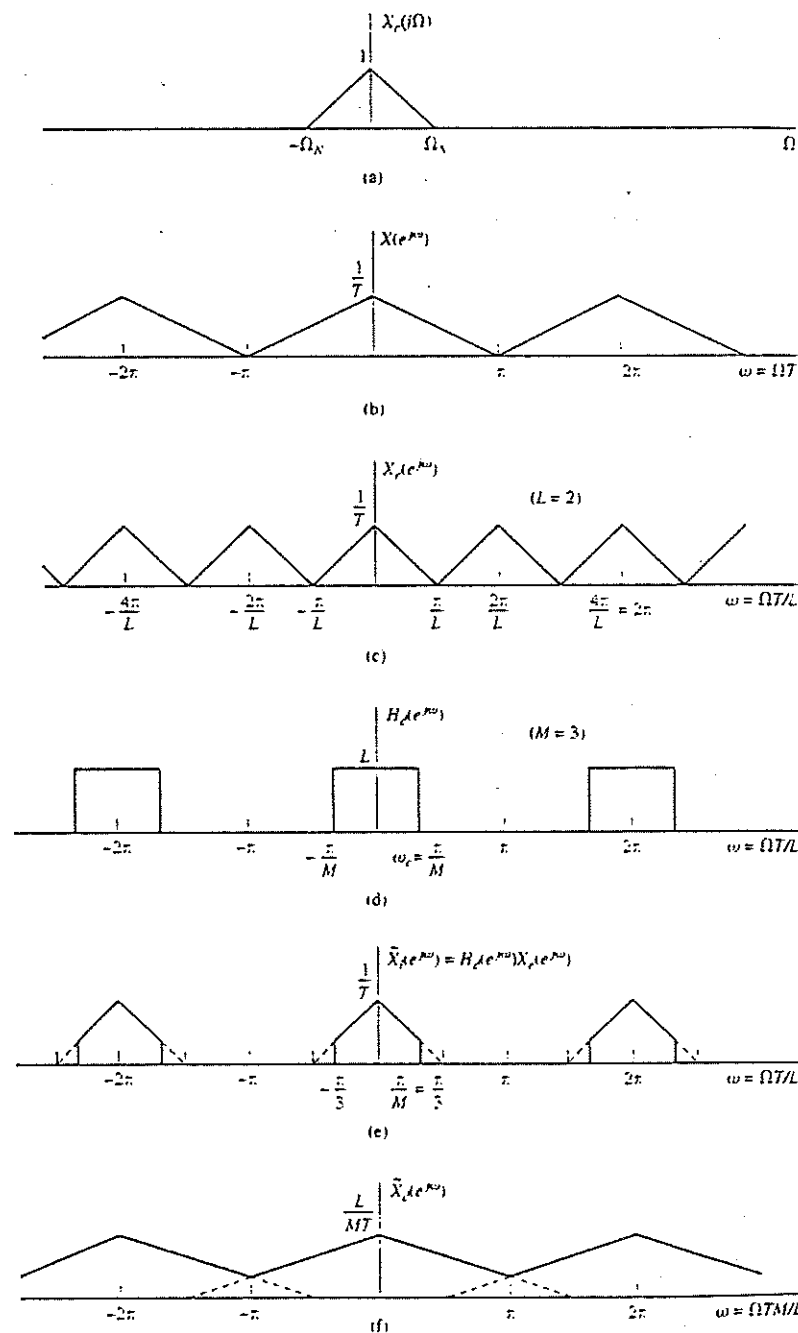


Figura 4.29. Ilustración del cambio de la frecuencia de muestreo por un factor no entero.

4.7. TRATAMIENTO DE SEÑALES MULTITASA

Como ya hemos visto, es posible cambiar la frecuencia de muestreo de una señal en tiempo discreto mediante una combinación de interpolación y diezmado. Por ejemplo, si deseamos que el nuevo periodo de muestreo sea de $T' = 1.01T$, podemos interpolar en primer lugar por un factor de $L = 100$ utilizando un filtro paso bajo con frecuencia de corte de $\omega_c = \pi/101$, y diezmar seguidamente por un factor de $M = 101$. Estos grandes cambios intermedios en la frecuencia de muestreo requerirían una carga computacional elevada para calcular cada muestra de la salida si realizáramos el filtrado de forma directa a la elevada frecuencia de muestreo intermedia. Afortunadamente, es posible reducir mucho la carga computacional si se aprovechan algunas técnicas básicas en el área de *tratamiento de señales multitasa*. Este tipo de técnicas se refieren en general al uso de interpolación, diezmado, compresores y expansores de diversas formas con el objeto de incrementar la eficiencia de los sistemas de tratamiento de señales. Además de su uso en la conversión de la frecuencia de muestreo, estas técnicas son muy útiles en los sistemas A/D y D/A que explotan el sobremuestreo y la conformación del ruido. Otra clase importante de algoritmos de procesamiento de señal que se basan en las técnicas de tratamiento de señales multitasa son los bancos de filtros para el análisis y/o tratamiento de señales.

Debido a sus amplias posibilidades de aplicación, existe un amplio cuerpo de resultados sobre el tratamiento de señales multitasa. En esta sección, nos centraremos en dos resultados básicos y demostraremos cómo una combinación de esos resultados puede mejorar mucho la eficacia de los procedimientos de conversión de la frecuencia de muestreo. El primer resultado está relacionado con el intercambio de las operaciones de filtrado y de diezmado o interpolación. El segundo es la descomposición polifásica.

4.7.1. Intercambio de filtrado y diezmado/interpolación

Obtendremos primero dos identidades que servirán de ayuda para manejar y entender el funcionamiento de los sistemas multitasa. Es inmediato demostrar que los dos sistemas de la Figura 4.30 son equivalentes. Para ver esta equivalencia, nótese que en la Figura 4.30(b),

$$X_2(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega M})X(e^{j\omega}), \quad (4.97)$$

y aplicando la Ecuación (4.78),

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X_2(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)}), \quad (4.98)$$

Sustituyendo la Ecuación (4.97) en la Ecuación (4.98) resulta

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)})H(e^{j(\omega/M - 2\pi i)}). \quad (4.99)$$

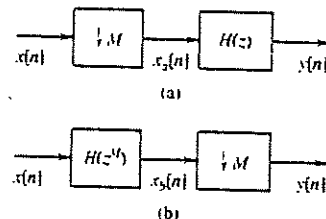


Figura 4.30. Dos sistemas equivalentes basados en las identidades del diezmado.

Como $H(e^{j(\omega/M - 2\pi i)}) = H(e^{j\omega})$, la Ecuación (4.99) se reduce a

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)}) \\ &= H(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega}), \end{aligned} \quad (4.100)$$

que corresponde a la Figura 4.30(a).

Se puede obtener una identidad similar para la interpolación. Concretamente, utilizando la Ecuación (4.86) de la Sección 4.6.2, es también inmediato demostrar la equivalencia de los dos sistemas de la Figura 4.31. A partir de la Ecuación (4.86) y la Figura 4.31(a),

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= X_2(e^{j\omega L}) \\ &= X(e^{j\omega L})H(e^{j\omega L}). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Como, aplicando la Ecuación (4.86),

$$X_2(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L}),$$

se deduce que la Ecuación (4.101) se puede expresar de forma equivalente

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega L})X_2(e^{j\omega}),$$

que corresponde a la Figura 4.31(b).

En resumen, hemos demostrado entonces que las operaciones de filtrado lineal y diezmado o interpolación se pueden intercambiar si modificamos el filtro lineal.

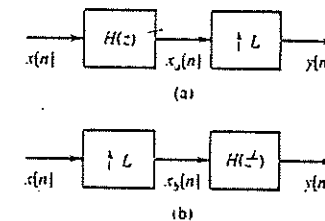


Figura 4.31. Dos sistemas equivalentes basados en las identidades de la interpolación.

4.7.2. Descomposiciones polifásicas

Las descomposiciones polifásicas de una secuencia se obtienen representándola como una superposición de M subsecuencias. Cada subsecuencia está formada por la M -ésima muestra de versiones retrasadas sucesivamente de la secuencia original. Cuando esta descomposición se aplica a la respuesta al impulso de un filtro, puede conducir a estructuras de realización de filtros lineales muy eficientes en diversos contextos. Concretamente, consideremos una respuesta al impulso $h[n]$ que se puede descomponer en M subsecuencias $h_k[n]$ como se indica a continuación

$$h_k[n] = \begin{cases} h[n + k], & n = \text{entero múltiplo de } M, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (4.102)$$

Retrasando sucesivamente esas subsecuencias, se puede reconstruir la respuesta al impulso original. Es decir,

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_k[n-k] \quad (4.103)$$

Esta descomposición se puede representar mediante el diagrama de bloques que se muestra en la Figura 4.32. Si creamos una cadena de elementos de avance a la entrada y una cadena de elementos de retardo a la salida, se puede ver que el diagrama de bloques de la Figura 4.33 es equivalente al de la Figura 4.32. En la descomposición de las Figuras 4.32 y 4.33, las secuencias $e_k[n]$ son

$$e_k[n] = h[nM + k] = h_k[nM] \quad (4.104)$$

y se denominan en general componentes polifásicas de $h[n]$. Existen otras formas de obtener las componentes polifásicas, y otras formas de indexarlas por conveniencia notacional (Vai-

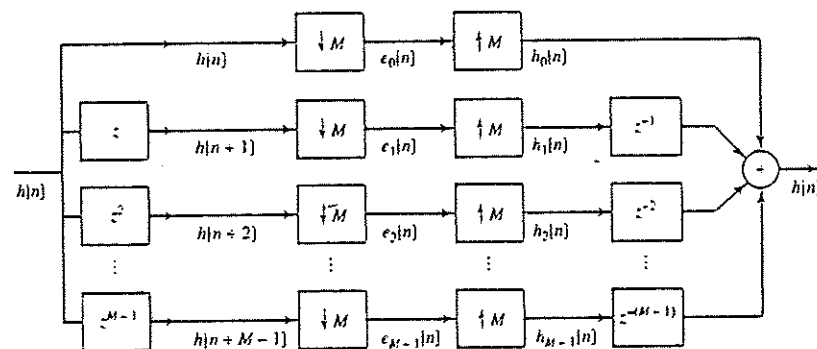


Figura 4.32. Descomposición polifásica del filtro $h[n]$ utilizando las componentes $e_k[n]$.

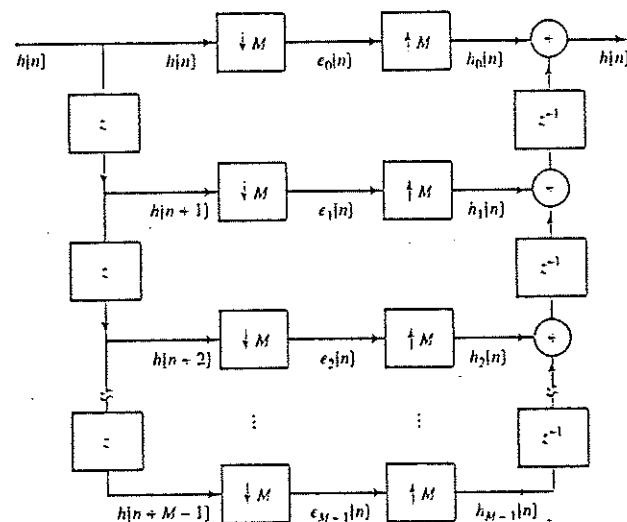


Figura 4.33. Descomposición polifásica del filtro $h[n]$ utilizando las componentes $e_k[n]$ con una cadena de retardos.

dyanathan, 1993), pero la definición presentada en la Ecuación (4.104) es la adecuada para nuestros propósitos en esta sección.

Las Figuras 4.32 y 4.33 no son realizaciones del filtro, sino que muestran cómo se puede descomponer dicho filtro en M filtros paralelos. Podemos verlo si advertimos que las Figuras 4.32 y 4.33 ilustran que en el dominio de la frecuencia o de la transformada Z , la representación polifásica correspondería a expresar $H(z)$ como

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M)z^{-k} \quad (4.105)$$

La Ecuación (4.105) expresa la función de transferencia $H(z)$ como una suma de los filtros polifásicos retrasados. Por ejemplo, a partir de la Ecuación (4.105) se puede obtener la estructura de filtro que se muestra en la Figura 4.34.

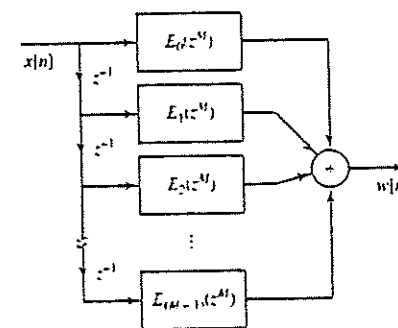


Figura 4.34. Estructura de realización basada en la descomposición polifásica de $h[n]$.

4.7.3. Realización polifásica de filtros de diezmo

Una de las aplicaciones importantes de la descomposición polifásica es la realización de filtros cuya salida se diezma posteriormente, como indica la Figura 4.35.

En la realización más directa de la Figura 4.35, el filtro calcula una muestra de la salida para cada valor de n , pero en la salida sólo se retiene una de cada M muestras. Intuitivamente, podríamos esperar que fuera posible obtener una realización más eficiente en la que no se calculen las muestras que no se utilizan.

Para obtener esta realización, podemos explotar una descomposición polifásica del filtro. Concretamente, supongamos que expresamos $h[n]$ de forma polifásica con las siguientes componentes

$$e_k[n] = h[nM + k]. \quad (4.106)$$

Utilizando la Ecuación (4.105),

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M)z^{-k} \quad (4.107)$$

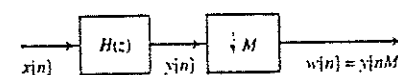


Figura 4.35. Sistema de diezmo.

Teniendo en cuenta esta descomposición y el hecho de que el diezmado y la adición son operaciones conmutativas, la Figura 4.35 se puede expresar como indica la Figura 4.36. Aplicando la identidad de la Figura 4.30 al sistema de la Figura 4.36, vemos que se transforma en el sistema de la Figura 4.37.

Para ilustrar la ventaja de la Figura 4.37 en comparación con la Figura 4.35, supongamos que la temporización de la salida es de una muestra por unidad de tiempo, y que $H(z)$ es un filtro FIR de N puntos. En la realización directa de la Figura 4.35 son necesarias N multiplicaciones y $(N - 1)$ sumas por unidad de tiempo. En el sistema de la Figura 4.37, cada uno de los filtros $E_i(z)$ tiene una longitud de N/M , y su salida se produce a razón de 1 muestra cada M unidades de tiempo. En consecuencia, cada filtro requiere $\frac{1}{M}(\frac{N}{M})$ multiplicaciones por unidad de tiempo y $\frac{1}{M}(\frac{N}{M} - 1)$ sumas por unidad de tiempo, y el sistema completo requiere (N/M) multiplicaciones y $(\frac{N}{M} - 1) + (M - 1)$ sumas por unidad de tiempo. Por tanto, podemos conseguir ahorros significativos para algunos valores de M y N .

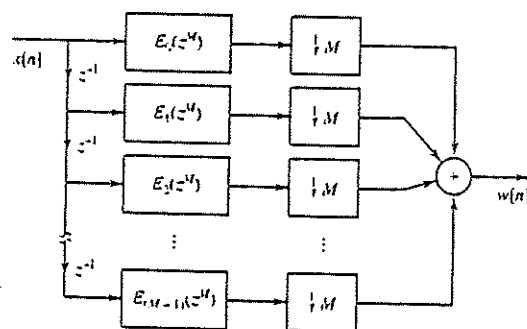


Figura 4.36. Realización de un filtro de diezmado utilizando descomposición polifásica.

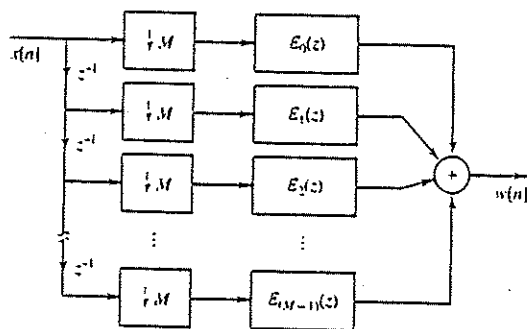


Figura 4.37. Realización de un filtro de diezmado tras aplicar la identidad del sobremuestreo a la descomposición polifásica.

4.7.4. Realización polifásica de filtros de interpolación

Se puede conseguir un ahorro similar al conseguido para el caso del diezmado aplicando la descomposición polifásica a sistemas en los que una interpolación precede a un filtro, como muestra la Figura 4.38. Como sólo es distinta de cero una muestra de cada L en $w[n]$, la realización directa de la Figura 4.38 implicaría aplicar los coeficientes de los filtros a valores de la secuencia que se sabe que son cero. Podemos ver intuitivamente que se podría llegar a una realización más eficiente.

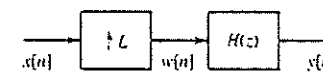


Figura 4.38. Sistema de interpolación.

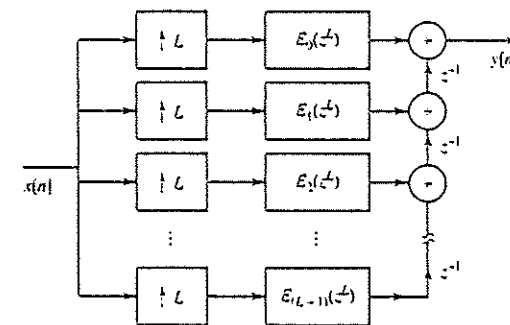


Figura 4.39. Realización de un filtro de interpolación utilizando descomposición polifásica.

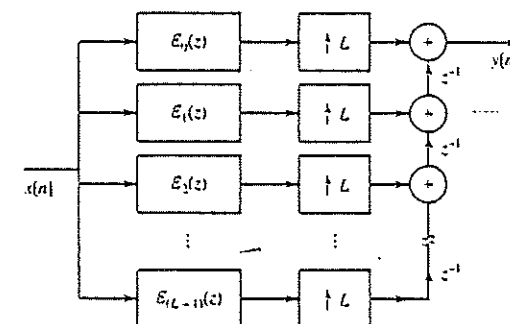


Figura 4.40. Realización de un filtro de interpolación tras aplicar la identidad del sobremuestreo a la descomposición polifásica.

Para realizar el sistema de la Figura 4.38 de forma más eficiente, utilizaremos de nuevo la descomposición polifásica de $H(z)$. Por ejemplo, podemos expresar $H(z)$ como indica la Ecuación (4.107) y representar la Figura 4.38 como se muestra en la Figura 4.39. Aplicando la identidad de la Figura 4.31, podemos convertir la Figura 4.39 en la 4.40.

Para ilustrar la ventaja de la Figura 4.40 en comparación con la Figura 4.38, nótese que en la Figura 4.38, si la temporización de $x[n]$ es de una muestra por unidad de tiempo, la temporización de $w[n]$ es de L muestras por unidad de tiempo. Si $H(z)$ es un filtro FIR de longitud N , serán necesarias NL multiplicaciones y $(NL - 1)$ sumas por unidad de tiempo. Por el contrario, la Figura 4.40 requiere para la obtención de $y[n]$, $L(N/L)$ multiplicaciones y $L(\frac{N}{L} - 1)$ sumas por unidad de tiempo para el conjunto de filtros polifásicos, mas $(L - 1)$ sumas. Por tanto, tenemos la posibilidad de lograr un ahorro considerable en el coste computacional para algunos valores de L y N .

Tanto para el diezmado como para la interpolación, es posible ganar en eficiencia computacional reordenando las operaciones de modo que el filtrado se realice con la frecuencia de muestreo baja. En las combinaciones del diezmado y la interpolación para obtener cambios no enteros en la frecuencia de muestreo se pueden lograr ahorros significativos cuando se requieren frecuencias intermedias altas.

4.8. PROCESADO DIGITAL DE SEÑALES ANALÓGICAS

Hasta el momento, nuestras discusiones sobre la representación de señales en tiempo continuo mediante señales en tiempo discreto se han centrado en los modelos idealizados del muestreo periódico y en la interpolación de banda limitada. Hemos formalizado nuestra presentación en términos de un sistema idealizado de muestreo que hemos denominado *conversor ideal continuo-discreto* (C/D) y de un sistema interpolador idealizado de banda limitada que hemos denominado *conversor ideal discreto-continuo* (D/C). Estos sistemas idealizados de conversión nos permiten concentrarnos en los detalles matemáticos esenciales de las relaciones entre las señales de banda limitada y sus muestras. Por ejemplo, en la Sección 4.4 utilizamos los sistemas idealizados de conversión C/D y D/C para demostrar que los sistemas discretos lineales e invariantes con el tiempo se pueden utilizar en una configuración como la que se muestra en la Figura 4.41(a) para realizar sistemas continuos lineales e invariantes con el tiempo si la entrada es de banda limitada y la frecuencia de muestreo es superior a la frecuencia de Nyquist. En términos prácticos, las señales en tiempo continuo no son precisamente de banda limitada, los filtros ideales no se pueden realizar y los conversores ideales C/D y D/C sólo se pueden aproximar mediante dispositivos que se denominan conversores analógico-digital (A/D) y digital-analógico (D/A), respectivamente. El diagrama de bloques de la Figura 4.41(b) muestra un modelo más realista para realizar el procesamiento digital de señales en tiempo continuo (analógicas). En esta sección examinaremos algunos de los efectos que introducen los componentes que se muestran en dicha figura.

4.8.1. Filtrado previo para evitar el solapamiento

Al procesar señales analógicas utilizando sistemas en tiempo discreto, generalmente es deseable minimizar la frecuencia de muestreo. El motivo es que la cantidad de cálculo aritmético necesario para realizar el sistema es proporcional al número de muestras que hay que procesar. Si la entrada no es de banda limitada o la frecuencia de Nyquist de la entrada es demasiado alta, puede ser necesario realizar un filtrado previo. Un ejemplo de esta situación se produce en el tratamiento de señales de voz, donde a menudo sólo es necesario conservar la banda baja (hasta unos 3-4 kHz) para preservar la inteligibilidad, aun cuando la señal de voz puede tener un contenido en frecuencia significativo en la banda de 4 kHz a 20 kHz. Otras veces, aunque la señal sea ya de banda limitada, puede estar contaminada por ruido

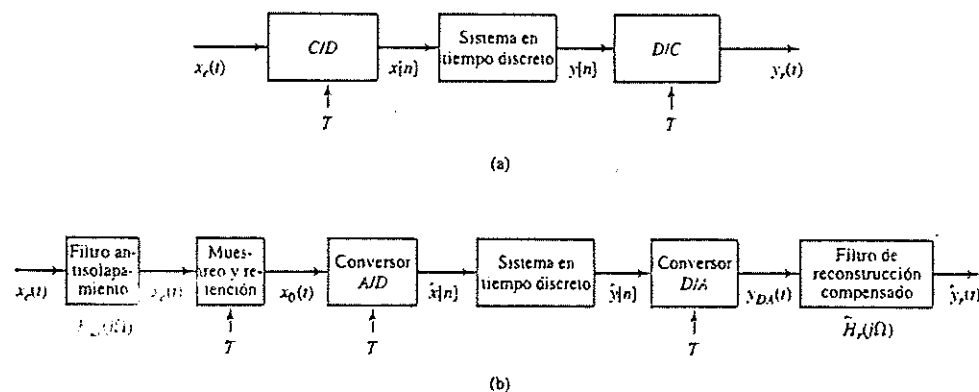


Figura 4.41. (a) Filtrado en tiempo discreto de señales en tiempo continuo. (b) Procesado digital de señales analógicas.

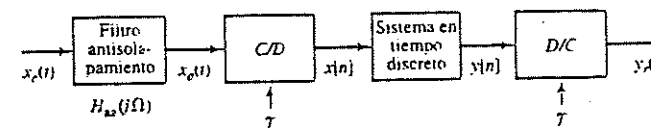


Figura 4.42. Uso de filtrado previo para evitar el solapamiento.

aditivo de banda ancha que puede ocupar la banda de frecuencias altas. Como resultado del proceso de muestreo, las componentes solapadas de ese ruido ocuparían las componentes de baja frecuencia. Si deseamos evitar el solapamiento, hay que forzar que la señal de entrada sea de banda limitada a las frecuencias por debajo de la mitad de la frecuencia de muestreo deseada. Esto se puede realizar mediante un filtrado paso bajo de la señal en tiempo continuo previo a la conversión C/D, como se muestra en la Figura 4.42. En este contexto, el filtro paso bajo que precede al conversor C/D se denomina *filtro antisolapamiento*. Idealmente, la respuesta en frecuencia del filtro antisolapamiento debería ser

$$H_{aa}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases} \quad (4.108)$$

Recordando la presentación de la Sección 4.4.1, se puede ver que el sistema completo desde la entrada del filtro antisolapamiento $x_c(t)$ hasta la salida $y_c(t)$, se comportará siempre como un sistema lineal e invariante con el tiempo, ya que la entrada al conversor C/D, $x_0(t)$, está limitada por el filtro antisolapamiento a la banda de frecuencias por debajo de π/T radianes/s. Por tanto, la respuesta en frecuencia efectiva global del sistema de la Figura 4.42 será el producto de $H_{aa}(j\Omega)$ por la respuesta en frecuencia efectiva desde $x_0(t)$ hasta $y_c(t)$. Combinando las Ecuaciones (4.108) y (4.38) obtenemos

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_c, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c. \end{cases} \quad (4.109)$$

Por tanto, para un filtro paso bajo antisolapamiento ideal, el sistema de la Figura 4.42 se comporta como un sistema lineal e invariante con el tiempo con respuesta en frecuencia determinada por la Ecuación (4.109), incluso aunque $X_c(j\Omega)$ no sea de banda limitada. En la práctica, la respuesta en frecuencia $H_{aa}(j\Omega)$ no puede ser de banda limitada, pero puede ser pequeña para $|\Omega| > \pi/T$, con lo que el solapamiento se minimiza. En este caso, la respuesta en frecuencia global del sistema de la Figura 4.42 sería aproximadamente

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) \approx H_{aa}(j\Omega)H(e^{j\Omega T}). \quad (4.110)$$

Para conseguir que la respuesta en frecuencia sea suficientemente pequeña por encima de π/T , sería necesario que $H_{aa}(j\Omega)$ comience a introducir atenuación en frecuencias superiores a π/T . La Ecuación (4.110) sugiere que la atenuación no ideal del filtro antisolapamiento (así como otras distorsiones lineales e invariantes con el tiempo que se presentarán posteriormente) podría ser compensada, al menos parcialmente, si la tenemos en cuenta en el diseño del sistema en tiempo discreto. El Problema 4.56 ilustra esta idea.

La presentación anterior supone filtros antisolapamiento de caída brusca en la frecuencia de corte. Este tipo de filtros se puede realizar utilizando redes con componentes activos y circuitos integrados. Sin embargo, en las aplicaciones que incorporan procesadores digitales potentes y baratos, estos filtros en tiempo continuo se pueden llevar buena parte del coste del sistema completo para realizar el procesamiento en tiempo discreto de señales analógicas. Los filtros con caídas bruscas en la frecuencia de corte son difíciles de realizar y caros, y si el sistema va a utilizar una frecuencia de muestreo variable, serían necesarios filtros ajustables. Además, los filtros con

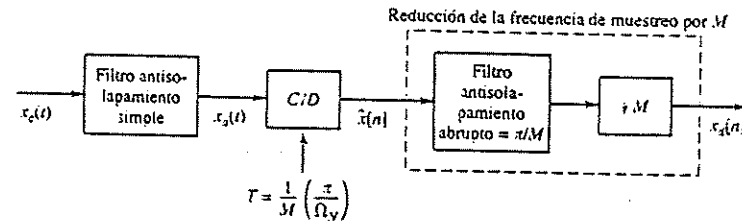


Figura 4.43. Uso de conversión A/D con sobremuestreo para simplificar un filtro antisolapamiento en tiempo continuo.

caídas bruscas en la frecuencia de corte tienen en general una respuesta en frecuencia altamente no lineal, en particular en la banda de paso. Por tanto, hay varias razones que hacen deseable eliminar los filtros en tiempo continuo o simplificar sus requerimientos de diseño.

La Figura 4.43 muestra una solución. Ω_v indica la componente de frecuencia más alta que se va a retener después de realizar el filtrado antisolapamiento. Aplicamos primero un filtro antisolapamiento muy simple con una banda de transición gradual y con una atenuación importante en $M\Omega_v$. Realizamos seguidamente la conversión C/D a una frecuencia de muestreo mucho mayor que $2\Omega_v$, por ejemplo a $M\Omega_v$. Después se realiza una reducción de la frecuencia de muestreo por un factor de M que incluye un filtrado antisolapamiento con caída abrupta en la frecuencia de corte. Este filtrado se realiza en el dominio de tiempo discreto. El tratamiento en tiempo discreto posterior se puede realizar a frecuencia de muestreo baja, con lo que se reduce el coste computacional.

La Figura 4.44 muestra el uso del sobremuestreo seguido de la conversión de la frecuencia de muestreo. En la Figura 4.44(a) se muestra la transformada de Fourier de una señal que ocupa la banda $|\Omega| < \Omega_v$, junto con la transformada de Fourier de lo que podría ser «ruido» o componentes no deseadas de alta frecuencia que deseamos eliminar con el filtro antisolapamiento. La línea de puntos muestra también la respuesta en frecuencia de un filtro antisolapamiento cuyo corte no es abrupto, sino que tiende a cero gradualmente a partir de la frecuencia Ω_v . La Figura 4.44(b) muestra la transformada de Fourier de la salida de este filtro. Si la señal $x_c(t)$ se muestrea con un periodo T tal que $(2\pi/T - \Omega_v) > \Omega_v$, la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]$ será como muestra la Figura 4.44(c). Nótese que el «ruido» tendrá solapamiento, pero que éste no afectará a la banda ocupada por la señal $|\omega| < \omega_v = \Omega_v T$. Si T y T' se escogen de modo que $T' = MT$ y $\pi/T' = \Omega_v$, la señal $x[n]$ se puede filtrar con un filtro en tiempo discreto de corte abrupto (que se muestra idealizadamente en la Figura 4.44(c)), de ganancia unidad y frecuencia de corte π/M . La salida del filtro en tiempo discreto se puede diezmar por un factor de M y obtener la secuencia muestreada $x_d[n]$ cuya transformada de Fourier se muestra en la Figura 4.44(d). De este modo, el filtrado con un filtro de corte abrupto se ha realizado en tiempo discreto, y el filtro en tiempo continuo puede ser menos restrictivo. Como los filtros FIR en tiempo discreto pueden ser de fase exactamente lineal, es posible utilizar esta solución basada en sobremuestreo para realizar el filtrado antisolapamiento prácticamente sin distorsión de fase. Esta solución puede tener ventajas importantes en situaciones donde sea crítico preservar no sólo el espectro de frecuencias, sino también la forma de onda.

4.8.2. Conversión analógico-digital (A/D)

Un conversor C/D ideal convierte una señal en tiempo continuo en una señal en tiempo discreto. Se supone que cada muestra se conoce con precisión infinita. El sistema de la Figura 4.45 es una aproximación a esa idea. Convierte una señal en tiempo continuo (analógica) en una señal digital, es decir, una secuencia de muestras de precisión finita o cuantificadas.

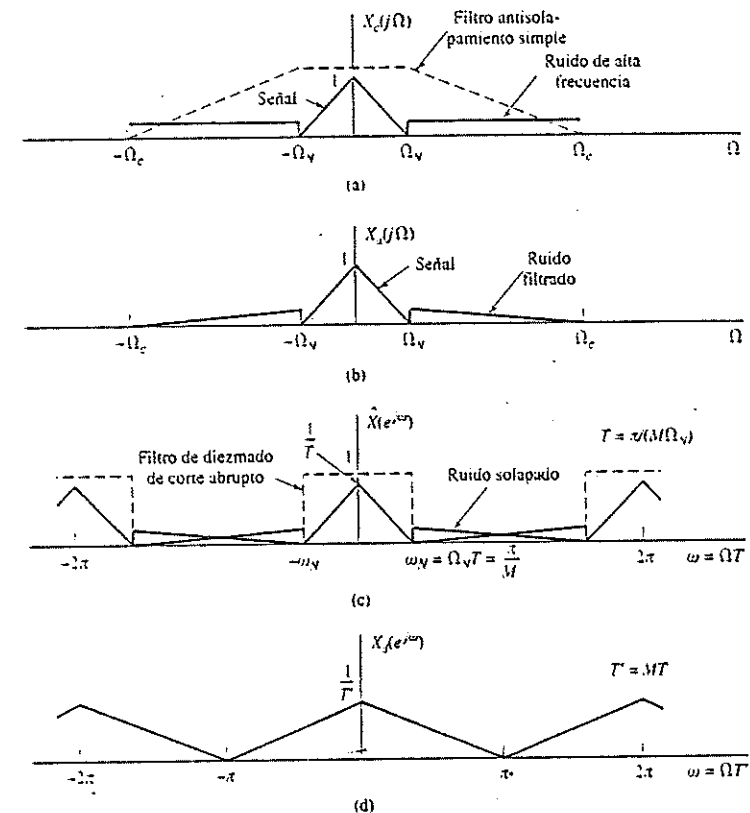


Figura 4.44. Uso de sobremuestreo seguido por diezmo en la conversión C/D.

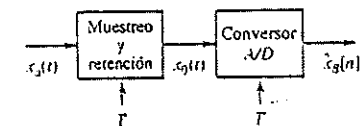


Figura 4.45. Configuración física de la conversión analógico-digital.

Los dos sistemas que se muestran en la Figura 4.45 son realizables con dispositivos físicos. El conversor A/D es un dispositivo físico que convierte una amplitud de tensión o corriente a su entrada en un código binario que representa la amplitud cuantificada más cercana a la amplitud de la entrada. Bajo el control de un reloj externo, el conversor A/D puede iniciar y completar una conversión A/D cada T segundos. Sin embargo, la conversión no es instantánea, y por este motivo los sistemas A/D de altas prestaciones incluyen generalmente un sistema de muestreo y retención como el que muestra la figura 4.45. El sistema de muestreo y retención ideal tiene como salida

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t - nT), \quad (4.111)$$

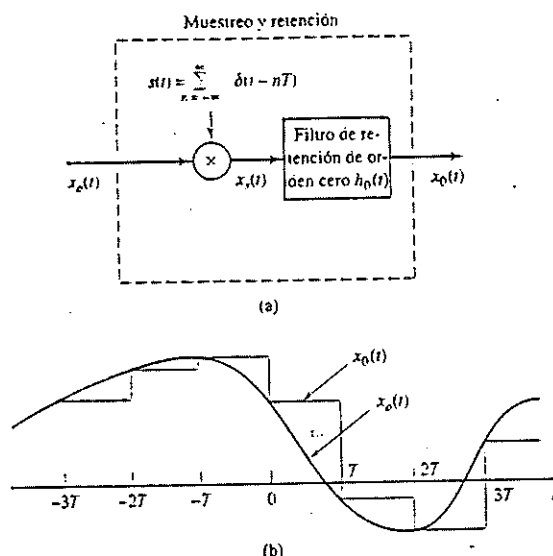


Figura 4.46. (a) Representación de un sistema ideal de muestreo y retención. (b) Señales de entrada y salida representativas en un sistema de muestreo y retención.

donde $x[n] = x_e(nT)$ son las muestras ideales de $x_e(t)$ y $h_0(t)$ es la respuesta al impulso del sistema de retención de orden cero, es decir,

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (4.112)$$

Si tenemos en cuenta que la Ecuación (4.111) puede tomar la forma equivalente

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(nT) \delta(t - nT), \quad (4.113)$$

vemos que el sistema de muestreo y retención es equivalente a una modulación de un tren de impulsos seguido de un filtrado lineal con el sistema de retención de orden cero, como se muestra en la Figura 4.46(a). La relación entre la transformada de Fourier de $x_e(t)$ y la transformada de Fourier de $x_0(t)$ se puede obtener con el mismo estilo de razonamiento que utilizamos en la Sección 4.2. Realizaremos un análisis similar cuando presentemos el conversor D/A. Sin embargo, este análisis no es necesario en este momento, ya que todo lo que necesitamos saber sobre el comportamiento del sistema se puede obtener a partir de la expresión en el dominio del tiempo. Concretamente, la salida del sistema de retención de orden cero tiene forma de escalera. Los valores de las muestras se mantienen constantes durante el periodo de muestreo de T segundos. Esto se ilustra en la Figura 4.46(b). Los circuitos físicos de muestreo y retención se diseñan de forma que muestreen la señal $x_e(t)$ lo más instantáneamente posible y mantienen el valor de la muestra tan cercano a una constante como sea posible hasta que se toma la muestra siguiente. El propósito de esto es proporcionar la tensión (o corriente) constantes requeridos a la entrada del conversor A/D. Los detalles sobre la amplia variedad existente en los procesos de conversión A/D, así como sobre las realizaciones en circuitos de los sistemas de muestreo y retención y conversores A/D están fuera de los objetivos de este libro. Hay muchos aspectos prácticos a tener en cuenta al diseñar circuitos de muestreo y re-

tención que muestreen rápidamente y mantengan constante el valor de la muestra, sin decaimiento ni picos. Asimismo, hay muchos aspectos prácticos relacionados con la velocidad y la precisión de los circuitos de conversión A/D. Todos ellos se consideran en Hnatek (1988) y Schmid (1976). Los detalles sobre las prestaciones de productos concretos se pueden encontrar en las especificaciones de los diversos fabricantes. Nuestro objetivo en esta sección es el análisis de los efectos de la cuantificación en la conversión A/D.

Como el propósito del sistema de muestreo y retención que se muestra en la Figura 4.45 es realizar el muestreo ideal y mantener el valor de la muestra para su cuantificación por el conversor A/D, podemos representar el sistema de la Figura 4.45 mediante el sistema de la Figura 4.47, en el que el conversor C/D ideal representa el muestreo realizado por el sistema de muestreo y retención y, como veremos posteriormente, el cuantificador y codificador representarán la operación del conversor A/D.

El cuantificador es un sistema no lineal cuyo propósito es transformar la muestra de entrada $x[n]$ en un valor de conjunto finito de valores preestablecidos. Representaremos esta operación como

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) \quad (4.114)$$

y llamaremos a $\hat{x}[n]$ muestra cuantificada. Los cuantificadores se pueden definir con niveles de cuantificación uniformes o no uniformes. Sin embargo, cuando se van a realizar operaciones numéricas con las muestras los pasos de cuantificación suelen ser uniformes. La Figura 4.48

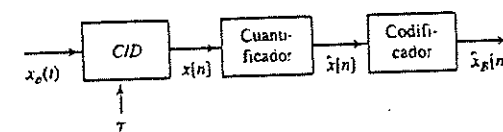


Figura 4.47. Representación conceptual del sistema de la Figura 4.45.

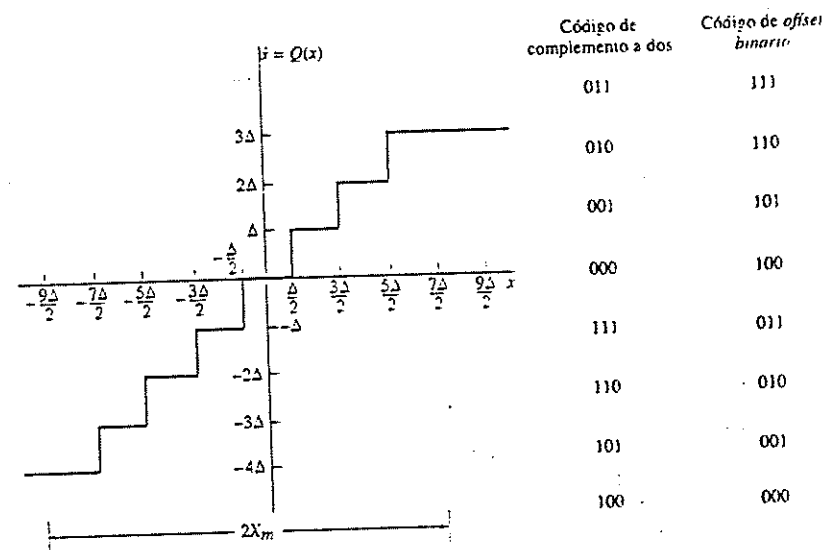


Figura 4.48. Cuantificador típico para conversión A/D.

muestra la característica de transferencia de un cuantificador uniforme típico¹, en el que los valores de las muestras se *redondean* hasta el nivel de cuantificación más próximo.

Conviene resaltar algunos aspectos de la Figura 4.48. En primer lugar, este cuantificador resulta apropiado para una señal cuyos valores sean positivos y negativos (señal bipolar). Si se sabe que las muestras de entrada son siempre positivas (o negativas), sería más apropiada una distribución diferente de los niveles de cuantificación. En segundo lugar, observamos que el cuantificador que se muestra en la Figura 4.48 tiene un número par de niveles de cuantificación. Con un número par de niveles no es posible tener un nivel de cuantificación en la amplitud cero y tener a la vez igual número de niveles de cuantificación positivos y negativos. Generalmente el número de niveles de cuantificación será una potencia de 2, pero será bastante mayor que 8, con lo que el efecto de esta diferencia será irrelevante.

La Figura 4.48 muestra también la codificación de los niveles de cuantificación. Como hay ocho niveles, podemos etiquetarlos utilizando un código binario de tres bits (en general, 2^{B+1} niveles se pueden codificar mediante un código binario de $(B + 1)$ bits). En principio, se puede utilizar cualquier asignación de símbolos, por lo que existen múltiples esquemas de codificación binaria, cada uno con sus propias ventajas e inconvenientes en función de la aplicación. Por ejemplo, la columna números binarios a la derecha en la Figura 4.48 muestra el esquema de codificación denominado de *offset binario*, que se caracteriza porque los números binarios se van asignando en orden numérico, empezando por el nivel de cuantificación más negativo. Sin embargo, en tratamiento digital de señales, desearemos generalmente utilizar un código binario que permita realizar directamente operaciones aritméticas utilizando las palabras del código como representaciones escaladas de las muestras cuantificadas.

La columna de la izquierda de la Figura 4.48 muestra una asignación utilizando un sistema de numeración binario en complemento a dos. Este sistema de representación de números con signo es el utilizado por la mayoría de los ordenadores y microprocesadores, por lo que es quizá la forma más conveniente de etiquetar los niveles de cuantificación. Nótese que el sistema de offset binario se puede convertir en un código de complemento a dos sin más que invertir el bit más significativo.

En el sistema en complemento a dos el bit situado más a la izquierda, o bit más significativo se considera como bit de signo, y los restantes bits representan enteros o fracciones en binario. Supondremos esto último, es decir, que hay una coma de fracción binaria entre los dos bits más significativos. Entonces, utilizando complemento a dos, los símbolos binarios tienen el siguiente significado para $B = 2$:

Símbolo binario	Valor numérico, \hat{x}_g
0.11	3/4
0.10	1/2
0.01	1/4
0.00	0
1.11	-1/4
1.10	-1/2
1.01	-3/4
1.00	-1

En general, si tenemos una fracción binaria en complemento a dos representada con $(B + 1)$ bits de la forma

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_B,$$

¹ Estos cuantificadores se denominan cuantificadores *lineales* debido a la progresión lineal de los pasos de cuantificación.

su valor es

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \dots + a_B 2^{-B}.$$

Nótese que el símbolo \diamond indica la «coma binaria» del número. La relación entre las palabras del código y los niveles de la señal cuantificada dependen del parámetro X_m en la Figura 4.48. En general, este parámetro se denomina margen dinámico del conversor A/D. Valores típicos pueden ser 10, 5 o 1 voltio. En la Figura 4.48 podemos ver que en general el tamaño del paso del cuantificador será

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}. \quad (4.115)$$

Los niveles de cuantificación más pequeños ($\pm \Delta$) corresponden al bit menos significativo de la palabra del código binario. Además, la relación numérica entre las palabras del código y las muestras cuantificadas es

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_g[n], \quad (4.116)$$

ya que estamos suponiendo que $\hat{x}_g[n]$ es un número binario tal que $-1 \leq \hat{x}_g[n] < 1$ (en complemento a dos). En este esquema las muestras codificadas en binario $\hat{x}_g[n]$ son directamente proporcionales a las muestras cuantificadas y por tanto, se pueden usar como una representación numérica de las amplitudes de las muestras. De hecho, generalmente resulta apropiado suponer que la señal de entrada está normalizada, de forma que los valores numéricos de $\hat{x}[n]$ y $\hat{x}_g[n]$ son idénticos y no hay necesidad de distinguir entre las muestras cuantificadas y las muestras codificadas en binario.

La Figura 4.49 muestra un ejemplo de cuantificación y codificación de las muestras de una onda sinusoidal utilizando un cuantificador de tres bits. Las muestras no cuantificadas $x[n]$ se indican con puntos rellenos y las muestras cuantificadas $\hat{x}[n]$ con círculos abiertos.

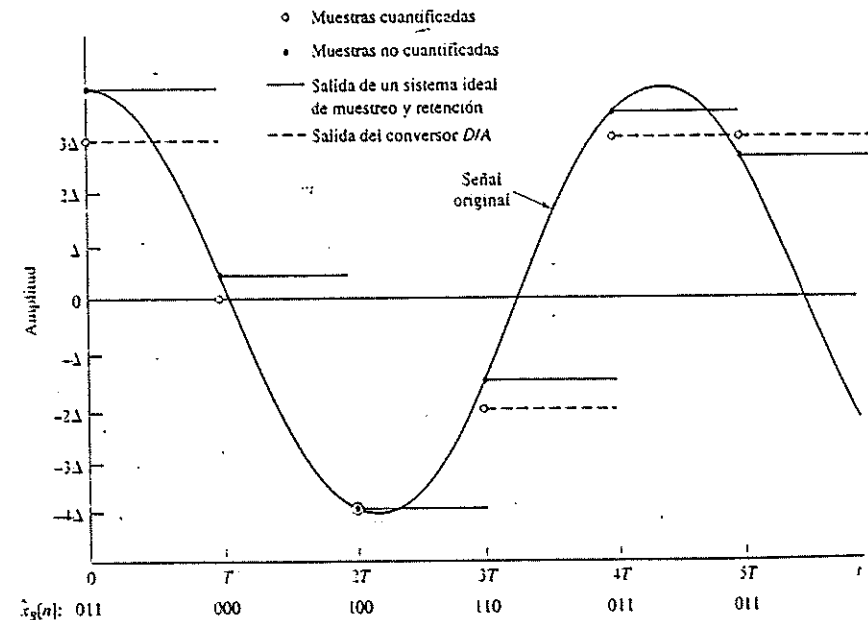


Figura 4.49. Muestreo, cuantificación, codificación y conversión D/A con un cuantificador de 3 bits.

Aunque una buena parte de la presentación anterior se centra en la codificación de los niveles de cuantificación utilizando complemento a dos, los principios básicos de la cuantificación y de la codificación en la conversión A/D son los mismos independientemente del código binario utilizado para representar las muestras. En textos de aritmética de computadores se puede encontrar una presentación más detallada de los sistemas de aritmética binaria que se emplean en computación digital (véase, por ejemplo, Knuth, 1997). Nos centraremos a continuación en el análisis de los efectos de la cuantificación. Como este análisis no depende de la asignación de las palabras del código binario, nos permitirá extraer conclusiones generales.

Observando las Figuras 4.48 y 4.49 vemos que la muestra cuantificada $\hat{x}[n]$ será en general diferente del verdadero valor de la muestra $x[n]$. La diferencia entre ambas se denomina *error de cuantificación*, y se define como

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n] \quad (4.117)$$

Por ejemplo, para el cuantificador de 3 bits de la Figura 4.48, si $\Delta/2 < x[n] < 3\Delta/2$, entonces $\hat{x}[n] = \Delta$ y se cumplirá que

En el caso de la Figura 4.48, la Ecuación (4.118) se cumplirá siempre que

En el caso general de un cuantificador de $(B + 1)$ bits con Δ dado por la Ecuación (4.115), el error de cuantificación satisface la Ecuación (4.118) siempre que

Si $x[n]$ está fuera de este intervalo, como ocurre en la muestra en $n = 0$ de la Figura 4.49, el error de cuantificación es de módulo superior a $\Delta/2$, y se dice que esas muestras están *truncadas*.

La Figura 4.50 muestra un modelo del cuantificador simplificado pero útil. En este modelo, las muestras del error de cuantificación se consideran como una señal de ruido aditivo. El modelo es exactamente equivalente al cuantificador si conocemos $e[n]$. Sin embargo, en

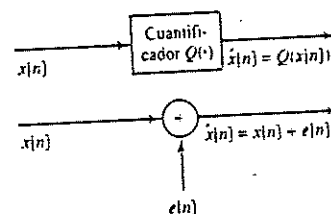


Figura 4.50. Modelo de ruido aditivo del cuantificador.

1. La secuencia de error $e[n]$ es una muestra de un proceso aleatorio estacionario.
2. La secuencia de error está incorrelada con la secuencia $x[n]$.
3. Las variables aleatorias del proceso de error están incorreladas. Es decir, el error es un proceso de ruido blanco.
4. La distribución de probabilidad del proceso de error es uniforme en el intervalo del error de cuantificación.

Ejemplo 4.12. Error de cuantificación para una señal sinusoidal

Nótese que en el caso de 3 bits, la señal de error está altamente correlada con la señal sin cuantificar. Por ejemplo, alrededor de los picos positivos y negativos del coseno, la señal cuantificada permanece constante durante muchas muestras consecutivas, con lo que el error tiene la forma de la secuencia de entrada durante esos intervalos. Nótese también que durante los intervalos alrededor de los picos positivos, el error es de módulo superior a $\Delta/2$, ya que el nivel de la señal es demasiado grande para la selección de parámetros del cuantificador.

Por otra parte, el error de cuantificación con 8 bits no presenta patrones específicos. Una inspección visual de estas figuras tiende a confirmar las afirmaciones anteriores sobre las propiedades del ruido de cuantificación para el caso de cuantificación más fina (8 bits). Es decir, las muestras del error parecen variar de forma aleatoria, sin correlación aparente con la señal sin cuantificar, y su intervalo de variación está entre $-\Delta/2$ y $+\Delta/2$. En el Capítulo 10 volveremos a hablar de esto de forma más cuantitativa al calcular la densidad espectral de potencia y la autocorrelación de la secuencia de ruido de cuantificación.

² Para señales periódicas como el coseno, el error de cuantificación sería también por supuesto periódico. En este ejemplo utilizamos la frecuencia $\omega_0 = 1/10$ para evitar que aparezca este efecto.

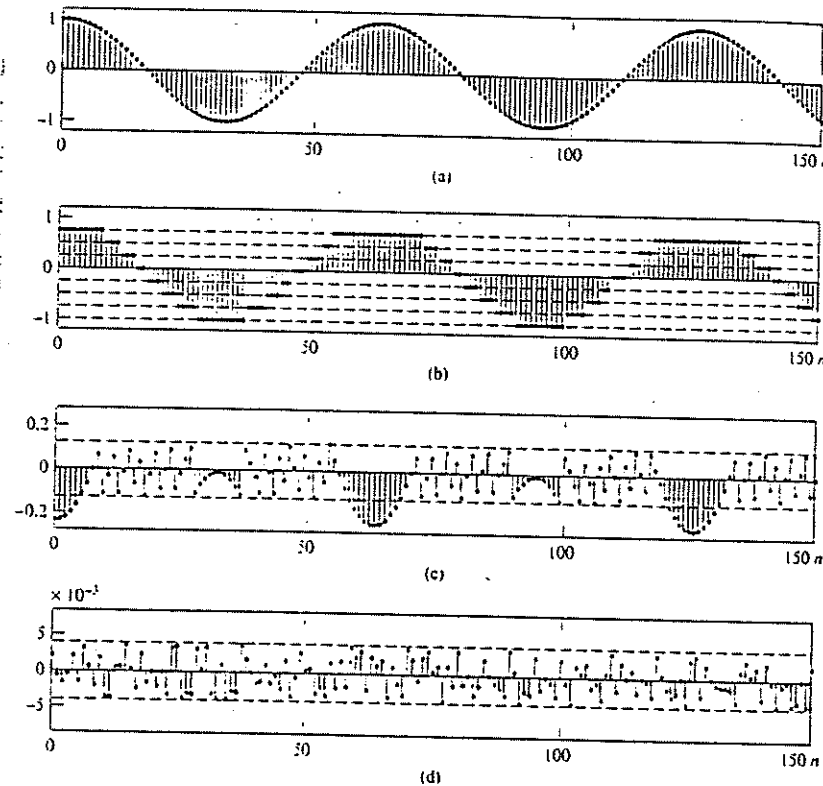


Figura 4.51: Ejemplo de ruido de cuantificación. (a) Muestras sin cuantificar de la señal $x[n] = 0.99 \cos(n/10)$. (b) Muestras cuantificadas del apartado (a) utilizando un cuantificador de 3 bits. (c) Secuencia de error de cuantificación para la cuantificación con 3 bits de la señal de (a). (d) Secuencia de error de cuantificación para la cuantificación con 8 bits de la señal de (a).

Para el caso de cuantificadores que redondean el valor de la muestra al nivel de cuantificación más cercano, como el que se muestra en la Figura 4.48, la amplitud del ruido de cuantificación está en el intervalo

$$-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2. \quad (4.121)$$

Para Δ pequeño es razonable suponer que $e[n]$ es una variable aleatoria con distribución uniforme entre $-\Delta/2$ y $\Delta/2$. Por tanto, la función densidad de probabilidad de primer orden del ruido de cuantificación tiene el aspecto que se muestra en la Figura 4.52. Si en lugar de redondeo se utiliza truncamiento, el error siempre será negativo, y asumiríamos una distribución uniforme entre $-\Delta$ y 0. Para completar el modelo estadístico del ruido de cuantificación, supondremos que las sucesivas muestras del ruido están incorreladas entre sí, y que $e[n]$ está incorrelada con $x[n]$. Por tanto, supondremos que $e[n]$ es una secuencia de ruido blanco con distribución uniforme. El valor medio de $e[n]$ es cero, y su varianza es

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (4.122)$$

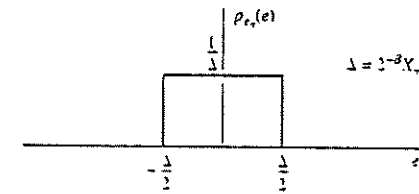


Figura 4.52: Función densidad de probabilidad del error de cuantificación para un cuantificador de redondeo como el que se muestra en la Figura 4.48.

Para un cuantificador de $(B + 1)$ bits con margen dinámico X_m , la varianza o potencia del ruido es

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}. \quad (4.123)$$

Una medida usual de la cantidad de degradación de una señal cuando se contamina con ruido aditivo es la relación señal-ruido, definida como el cociente entre la varianza (potencia) de la señal y la varianza del ruido. Si se expresa en decibelios (dB), la relación señal-ruido para un cuantificador de $(B + 1)$ bits es

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{12 \cdot 2^{2B} \sigma_e^2}{X_m^2} \right) \\ &= 6.02B + 10.8 - 20 \log_{10} \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right). \end{aligned} \quad (4.124)$$

A partir de la Ecuación (4.124) podemos ver que la relación señal-ruido se incrementa aproximadamente 6 dB por cada bit que se añade a la longitud de palabra de las muestras cuantificadas, es decir, al doblar el número de niveles de cuantificación. Es particularmente instructivo considerar el término

$$-20 \log_{10} \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right) \quad (4.125)$$

de la Ecuación (4.124). Recordemos en primer lugar que X_m es un parámetro del cuantificador, y tendrá un valor fijo en un sistema real concreto. La cantidad σ_x es el valor rms de la amplitud de la señal, necesariamente inferior a la amplitud de pico de la señal. Por ejemplo si $x_s(t)$ es una onda sinusoidal de amplitud de pico X_p , entonces $\sigma_x = X_p/\sqrt{2}$. Si σ_x es demasiado grande, la amplitud de pico de la señal será mayor que el margen dinámico X_m del conversor A/D. En este caso la Ecuación (4.124) no será válida, y se producirá una distorsión severa. Por el contrario, si σ_x es demasiado pequeño, el término correspondiente a la Ecuación (4.125) se hace grande y negativo, con lo que la relación señal-ruido de la Ecuación (4.124) decrece. De hecho, se ve fácilmente que cuando σ_x se reduce a la mitad, la relación señal-ruido disminuye en 6 dB. Por tanto, es muy importante que la amplitud de la señal se ajuste cuidadosamente al margen dinámico del conversor A/D.

Para el caso de señales analógicas como voz o música, la distribución de las amplitudes tiende a concentrarse alrededor de cero y cae rápidamente al aumentar la amplitud. En estos casos, la probabilidad de que el módulo de una muestra sea mayor que tres o cuatro veces el valor rms es muy baja. Por ejemplo, si la amplitud de la señal tuviera una distribución gaussiana, sólo el 0.064 por ciento de las muestras tendrían una amplitud mayor que

$4\sigma_x$. Por tanto, para evitar que se recorten los picos de la señal, y de acuerdo con nuestro modelo estadístico, se deben establecer las ganancias de los filtros y amplificadores que preceden al conversor A/D de forma que $\sigma_x = X_m/4$. Utilizando este valor de σ_x en la Ecuación (4.124) obtenemos

$$\text{SNR} \approx 6B - 1.25 \text{ dB.} \quad (4.126)$$

Por ejemplo, para obtener una relación señal-ruido del orden de 90-96 dB, necesaria en la grabación y reproducción musical de alta calidad, se requiere una cuantificación con 16 bits. Pero no debe olvidarse que estas prestaciones sólo se obtendrán si la señal de entrada se ajusta cuidadosamente al margen dinámico del conversor A/D.

Este compromiso existente entre la amplitud de pico de la señal y el tamaño absoluto del ruido de cuantificación es fundamental en cualquier proceso de cuantificación. En el Capítulo 6 veremos de nuevo su importancia cuando hablemos del ruido de redondeo al realizar sistemas lineales en tiempo discreto.

4.8.4. Conversión D/A

En la Sección 4.3 presentamos la forma en la que se puede reconstruir una señal de banda limitada a partir de una secuencia de muestras utilizando un filtro paso bajo ideal. En términos de transformadas de Fourier, la reconstrucción se representa como

$$\bar{X}_r(j\Omega) = X(e^{j\Omega T})H_r(j\Omega), \quad (4.127)$$

siendo $X(e^{j\Omega T})$ la transformada discreta de Fourier de la secuencia de muestras y $\bar{X}_r(j\Omega)$ la transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo reconstruida. El filtro de reconstrucción ideal es

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases} \quad (4.128)$$

Para esta selección de $H_r(j\Omega)$, la relación correspondiente entre $x_r(t)$ y $x[n]$ es

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\text{sen}[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}. \quad (4.129)$$

El sistema que toma la secuencia $x[n]$ como entrada y produce $x_r(t)$ como salida se denomina *conversor D/C ideal*. La contrapartida realizable del conversor D/C ideal es el *conversor analógico-digital* (conversor D/A), seguido de un filtro paso bajo apropiado. Como muestra

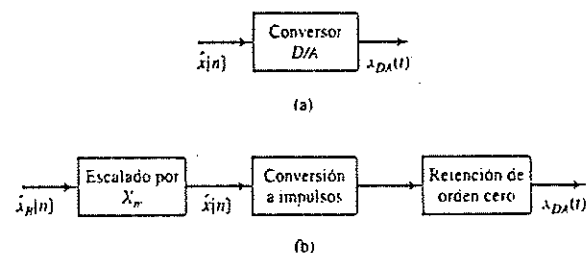


Figura 4.53. (a) Diagrama de bloques de un conversor D/A. (b) Representación en términos de un filtro de retención de orden cero.

la Figura 4.53(a), un conversor D/A toma una secuencia de palabras en código binario a su entrada y produce a su salida una señal en tiempo continuo de la forma

$$\begin{aligned} x_{DA}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m \hat{x}_B[n] h_0(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n] h_0(t - nT), \end{aligned} \quad (4.130)$$

siendo $h_0(t)$ la respuesta al impulso de un filtro de retención de orden cero, dada en la Ecuación (4.112). Las líneas de puntos de la Figura 4.49 muestran la salida de un conversor D/A para las muestras cuantificadas de la onda sinusoidal. Nótese que el conversor D/A mantiene el valor de la muestra cuantificada durante un periodo de una muestra de la misma forma que el sistema de muestreo y retención mantiene el valor no cuantificado de la muestra de entrada. Si utilizamos el modelo de ruido aditivo para representar los efectos de la cuantificación, la Ecuación (4.130) se convierte en

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] h_0(t - nT). \quad (4.131)$$

Para simplificar nuestra discusión, definamos

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT), \quad (4.132)$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] h_0(t - nT). \quad (4.133)$$

De esta forma, la Ecuación (4.131) se puede escribir como

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t). \quad (4.134)$$

La componente de señal $x_0(t)$ está relacionada con la señal de entrada $x_0(t)$, ya que $x[n] = x_0(nT)$. La señal de ruido $e_0(t)$ depende de las muestras del ruido de cuantificación $e[n]$ de la misma forma que $x_0(t)$ depende de las muestras sin cuantificar de la señal. La transformada de Fourier de la Ecuación (4.132) es

$$\begin{aligned} X_0(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] H_0(j\Omega) e^{-j\Omega nT} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega nT} \right) H_0(j\Omega) \\ &= X(e^{j\Omega T}) H_0(j\Omega). \end{aligned} \quad (4.135)$$

Como

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0 \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right), \quad (4.136)$$

se deduce que

$$X_0(j\Omega) = \left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_0 \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right) \right] H_0(j\Omega). \quad (4.137)$$

Si $X_s(j\Omega)$ es de banda limitada a frecuencias por debajo de π/T , las copias desplazadas de $X_s(j\Omega)$ no producirán solapamiento en la Ecuación (4.137). Definiendo un filtro de reconstrucción compensado

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)} \quad (4.138)$$

la salida del filtro será $x_s(t)$ cuando la entrada sea $x_0(t)$. Se puede demostrar fácilmente que la respuesta en frecuencia del filtro de retención de orden cero es

$$H_0(j\Omega) = \frac{2 \operatorname{sen}(\Omega T/2)}{\Omega} e^{-j\Omega T/2} \quad (4.139)$$

Por tanto, el filtro de reconstrucción compensado es

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\Omega T/2}{\operatorname{sen}(\Omega T/2)} e^{j\Omega T/2}, & |\Omega| < \pi/T, \\ 0, & |\Omega| > \pi/T. \end{cases} \quad (4.140)$$

La Figura 4.54(a) muestra $|H_0(j\Omega)|$ de acuerdo a la Ecuación (4.139), comparándola con el módulo del filtro de interpolación ideal $|H_i(j\Omega)|$ dado en la Ecuación (4.128). Ambos filtros tienen una ganancia de T en $\Omega = 0$, pero el filtro de retención de orden cero, aunque es de naturaleza paso bajo, no presenta un corte abrupto en $\Omega = \pi/T$. La Figura 4.54(b) muestra el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción ideal compensado que se utiliza después de un sistema de reconstrucción basado en un filtro de retención de orden cero, como el del convertidor D/A. La respuesta de fase se correspondería idealmente con un avance en el tiempo de $T/2$ segundos, para compensar el retardo introducido por el filtro de

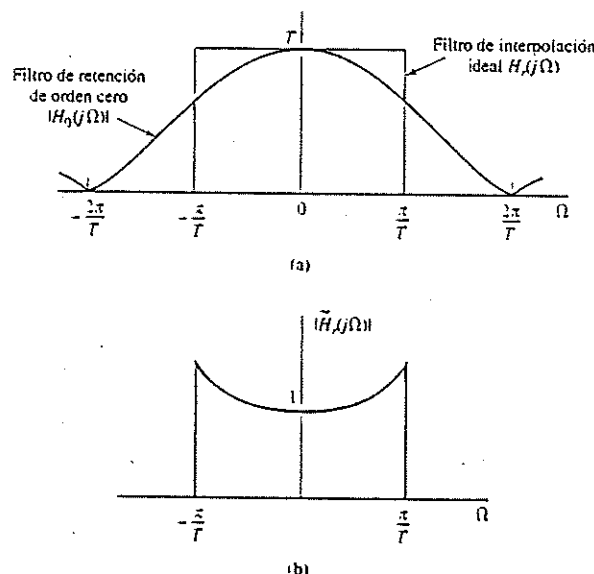


Figura 4.54. (a) Respuesta en frecuencia de un filtro de retención de orden cero comparada con la del filtro de interpolación ideal. (b) Filtro de reconstrucción ideal compensado para ser utilizado a la salida de un filtro de retención de orden cero.

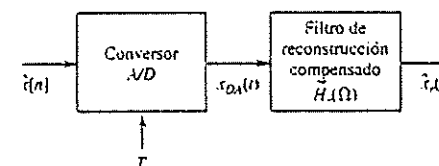


Figura 4.55. Configuración física de la conversión analógico-digital.

retención de orden cero. Como un avance en el tiempo no se puede realizar en una aproximación práctica en tiempo real al filtro ideal de reconstrucción compensado, normalmente sólo se compensa el módulo de la respuesta en frecuencia. Incluso a veces tampoco se realiza esa compensación ya que la ganancia del filtro de retención de orden cero sólo baja a $2/\pi$ (o -4 dB) en $\Omega = \pi/T$.

La Figura 4.55 muestra un convertidor D/A seguido por un filtro de reconstrucción ideal compensado. De acuerdo con lo que acabamos de decir, como el filtro de reconstrucción compensado sigue al convertidor D/A, la señal reconstruida será

$$\begin{aligned} \hat{x}_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\operatorname{sen}[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\operatorname{sen}[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{\operatorname{sen}[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \end{aligned} \quad (4.141)$$

En otras palabras, la salida será

$$\hat{x}_s(t) = x_s(t) + e_s(t), \quad (4.142)$$

siendo $e_s(t)$ una señal de ruido blanco de banda limitada.

Reconsiderando la Figura 4.41(b), estamos ya en posición de entender el comportamiento de los sistemas para realizar el tratamiento digital de señales analógicas. Si suponemos que la salida del filtro antisolapamiento es de banda limitada a frecuencias inferiores a π/T , que $\tilde{H}_r(j\Omega)$ es de banda limitada de forma similar y que el sistema en tiempo discreto es lineal e invariante, la salida del sistema completo será de la forma

$$\hat{y}_s(t) = y_s(t) + e_s(t), \quad (4.143)$$

siendo

$$Y_s(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{12}(j\Omega)X_s(j\Omega), \quad (4.144)$$

y donde $H_{12}(j\Omega)$, $H_0(j\Omega)$ y $\tilde{H}_r(j\Omega)$ son las respuestas en frecuencia del filtro antisolapamiento, del filtro de retención de orden cero del convertidor A/D y del filtro paso bajo de reconstrucción, respectivamente. $H(e^{j\Omega T})$ es la respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto. Similarmente, suponiendo que el ruido de cuantificación introducido por el convertidor A/D es ruido blanco de varianza $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$, se puede demostrar que el espectro de potencia del ruido de salida es

$$P_{e_s}(j\Omega) = |\tilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})|^2 \sigma_e^2, \quad (4.145)$$

es decir, el ruido de cuantificación a la entrada es modificado por las sucesivas etapas de filtrado en tiempo continuo y en tiempo discreto. De la Ecuación (4.144) se deduce que, bajo la hipótesis de solapamiento despreciable, la respuesta en frecuencia global de $x_s(t)$ a $\hat{y}_s(t)$ es

$$H_{11}(j\Omega) = \tilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{12}(j\Omega), \quad (4.146)$$

Si el filtro antisolapamiento es ideal, como en la Ecuación (4.108), y la compensación del filtro de reconstrucción es ideal, como en la Ecuación (4.140), la respuesta efectiva en frecuencia será la expresada en la Ecuación (4.109). En otro caso, la Ecuación (4.146) nos proporciona un modelo razonable para la respuesta efectiva. Nótese que la Ecuación (4.146) sugiere que la compensación de imperfecciones en cualquiera de los cuatro términos podría, en principio, ser incluida en cualquiera de los otros términos. Es decir, el sistema en tiempo discreto puede incluir una compensación apropiada del filtro antisolapamiento, del filtro de retención de orden cero, del filtro de reconstrucción o de todos ellos.

Además del filtrado que indica la Ecuación (4.146), la Ecuación (4.143) nos recuerda que la salida estará también contaminada por el ruido de cuantificación filtrado. En el Capítulo 6 veremos que también se puede introducir ruido en la realización del sistema lineal en tiempo discreto. Este ruido interno será, en general, filtrado por partes de la realización del sistema en tiempo discreto, por el sistema de retención de orden cero del conversor D/A y por el filtro de reconstrucción.

4.9. SOBREMUESTREO Y CONFORMACIÓN DE RUIDO EN LA CONVERSIÓN A/D Y D/A

En la Sección 4.8.1 demostramos que con sobremuestreo puede ser posible realizar un filtro antisolapamiento de corte abrupto mediante la incorporación de filtrado digital y diezmado. Como veremos en la Sección 4.9.1, mediante sobremuestreo, filtrado posterior en tiempo discreto y diezmado se puede permitir también un incremento del tamaño del paso del cuantificador o, equivalentemente, una reducción del número de bits necesarios en la conversión analógico-digital. En la Sección 4.9.2 veremos cómo se puede reducir aún más el tamaño del paso utilizando sobremuestreo junto con realimentación del ruido de cuantificación, y en la Sección 4.9.3 veremos cómo se puede aplicar el principio de sobremuestreo en la conversión D/A.

4.9.1. Conversión A/D sobremuestreada con cuantificación directa

Para explorar la relación entre el sobremuestreo y el tamaño del paso de cuantificación, consideremos el sistema que se muestra en la Figura 4.56. Para analizar el efecto del sobremuestreo en este sistema, consideremos que $x_c(t)$ es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio, de media cero, con densidad espectral de potencia $\Phi_{x_c}(j\Omega)$ y función de autocorrelación $\phi_{x_c}(\tau)$. Para simplificar nuestra presentación, supondremos inicialmente que $x_c(t)$ es de banda limitada a Ω_N , es decir,

$$\Phi_{x_c}(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \Omega_N. \quad (4.147)$$

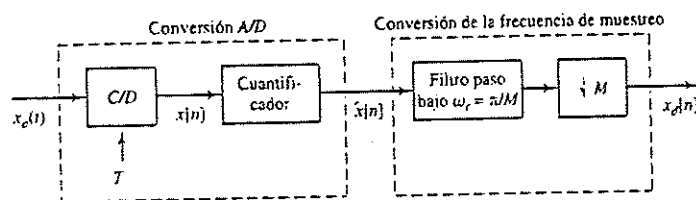


Figura 4.56. Conversión A/D sobremuestreada con cuantificación simple y diezmado.

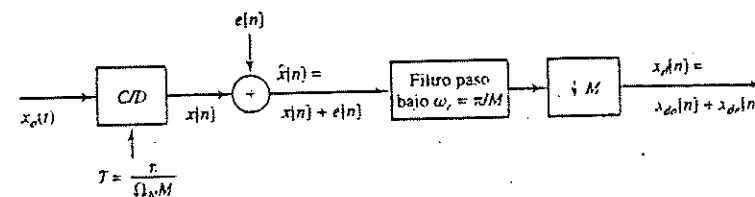


Figura 4.57. Sistema de la Figura 4.56 con el cuantificador sustituido por un modelo lineal de ruido.

y supondremos también que $2\pi/T = 2M\Omega_N$. La constante M , que se supone entera, se denomina *razón de sobremuestreo*. Utilizando el modelo de ruido aditivo presentado en detalle en la Sección 4.8.3 podemos sustituir la Figura 4.56 por la Figura 4.57. El filtro de diezmado de la Figura 4.57 es un filtro paso bajo ideal de ganancia unidad y frecuencia de corte $\omega_c = \pi/M$. Como el sistema completo de la Figura 4.57 es lineal, la salida $x_d[n]$ tiene dos componentes, una debida a la señal de entrada $x_c(t)$ y otra debida al ruido de cuantificación de entrada $e[n]$. Denominaremos a esas componentes $x_{ds}[n]$ y $x_{de}[n]$, respectivamente.

Nuestro objetivo es determinar el cociente entre la potencia de señal $\mathcal{E}\{x_{ds}^2[n]\}$ y la potencia de ruido de cuantificación $\mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\}$ en la señal de salida $x_d[n]$ en función del tamaño del paso del cuantificador Δ y la razón de sobremuestreo M . Como el sistema de la Figura 4.57 es lineal y el ruido se supone independiente de la señal, podemos tratar las dos fuentes de forma separada para calcular las respectivas potencias de las componentes de la señal y del ruido a la salida.

Consideremos en primer lugar la componente de señal a la salida. Comencemos por relacionar la densidad espectral de potencia, la función de autocorrelación y la potencia de la señal muestreada $x[n]$ con las correspondientes funciones de la señal analógica en tiempo continuo $x_c(t)$. Sean $\phi_{xx}[m]$ y $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $x[n]$, respectivamente. Por definición, $\phi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{x[n+m]x[n]\}$, y como $x[n] = x_c(nT)$ y $x[n+m] = x_c(nT+mT)$,

$$\mathcal{E}\{x[n+m]x[n]\} = \mathcal{E}\{x_c((n+m)T)x_c(nT)\}. \quad (4.148)$$

Por tanto,

$$\phi_{xx}[m] = \phi_{x_c x_c}(mT); \quad (4.149)$$

es decir, la función de autocorrelación de la secuencia de muestras es una versión muestreada de la función de autocorrelación de la correspondiente señal en tiempo continuo. En particular, las Ecuaciones (4.148) y (4.149) junto con la hipótesis de estacionariedad en sentido amplio implican que $\mathcal{E}\{x_c^2(t)\}$ es una constante independiente de t . Por tanto se deduce que

$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \mathcal{E}\{x_c^2(nT)\} = \mathcal{E}\{x_c^2(t)\} \quad \text{para todo } n \text{ o } t. \quad (4.150)$$

Como las densidades espectrales de potencia son las transformadas de Fourier de las funciones de autocorrelación, como consecuencia de la Ecuación (4.149),

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_{x_c x_c} \left(j \left(\Omega - \frac{2\pi k}{T} \right) \right). \quad (4.151)$$

Suponiendo que la entrada es de banda limitada como indica la Ecuación (4.147), y supo-

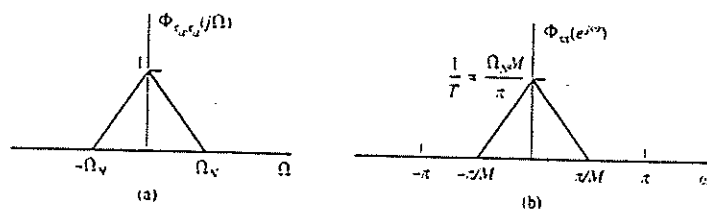


Figura 4.58. Ilustración del escalado en amplitud y frecuencia entre $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ y $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$.

niendo sobremuestreo por un factor de M tal que $2\pi/T = 2M\Omega_v$ obtenemos, sustituyendo $\Omega = \omega/T$ en la Ecuación (4.151),

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{T} \Phi_{x_a x_a}\left(j \frac{\omega}{T}\right), & |\omega| < \pi/M \\ 0, & \pi/M < \omega \leq \pi \end{cases} \quad (4.152)$$

Por ejemplo, si $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ es como se muestra en la Figura 4.58(a), y escogemos la frecuencia de muestreo como $2\pi/T = 2M\Omega_v$, entonces $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ será como se indica en la Figura 4.58(b).

Es instructivo demostrar que la Ecuación (4.150) es cierta utilizando la densidad espectral de potencia. La potencia total de la señal analógica original es

$$\mathcal{E}\{x_a^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_v}^{\Omega_v} \Phi_{x_a x_a}(j\Omega) d\Omega.$$

Utilizando la Ecuación (4.152), la potencia total de la señal muestreada es

$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega \quad (4.153)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \frac{1}{T} \Phi_{x_a x_a}\left(j \frac{\omega}{T}\right) d\omega. \quad (4.154)$$

Utilizando el hecho de que $\Omega_v T = \pi/M$ y realizando el cambio $\Omega = \omega/T$ en la Ecuación (4.154) se obtiene

$$\mathcal{E}\{x^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_v}^{\Omega_v} \Phi_{x_a x_a}(j\Omega) d\Omega = \mathcal{E}\{x_a^2(t)\}.$$

Por tanto, la potencia total de la señal muestreada y la potencia total de la señal analógica original tienen exactamente el mismo valor. Como el filtro de diezmo es un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte $\omega_c = \pi/M$, la señal $x[n]$ pasa sin alteración por el filtro. Entonces, la componente de la señal diezmada a la salida, $x_{10}[n] = x[nM] = x_a(nMT)$, tiene también la misma potencia total. Esto se puede ver a partir de la densidad espectral de potencia teniendo en cuenta que, como $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ es de banda limitada a $|\omega| < \pi/M$,

$$\begin{aligned} \Phi_{x_{10} x_{10}}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \Phi_{xx}(e^{j(\omega - 2\pi k)/M}) \\ &= \frac{1}{M} \Phi_{xx}(e^{j\omega/M}) \quad |\omega| < \pi. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Utilizando la Ecuación (4.155) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{x_{10}^2[n]\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{x_{10} x_{10}}(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{M} \Phi_{xx}(e^{j\omega/M}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega = \mathcal{E}\{x^2[n]\}, \end{aligned}$$

que demuestra que la potencia de la componente de señal no se altera al atravesar el sistema completo desde la entrada $x_a(t)$ hasta la correspondiente componente a la salida $x_{10}[n]$. En términos de densidad espectral de potencia, esto ocurre porque para cada escalado del eje de frecuencia que se produce como resultado del muestreo, aparece un escalado en la amplitud que lo compensa, de forma que el área encerrada bajo la densidad espectral de potencia no varía al ir pasando mediante el muestreo desde $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ a $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ y finalmente a $\Phi_{x_{10} x_{10}}(e^{j\omega})$.

Consideremos ahora la componente de ruido generada por el proceso de cuantificación. De acuerdo con el modelo de la Sección 4.3.3, supongamos que $e[n]$ es un proceso aleatorio de ruido blanco estacionario en sentido amplio, con media cero y variancia¹

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}.$$

En consecuencia, la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $e[n]$ son, respectivamente,

$$\phi_{ee}[m] = \sigma_e^2 \delta[m] \quad (4.156)$$

y

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \quad |\omega| < \pi. \quad (4.157)$$

En la Figura 4.59, se muestra la densidad espectral de potencia de $e[n]$ y de $x[n]$. La densidad espectral de potencia de la señal cuantificada $\hat{x}[n]$ es la suma de ambas, ya que nuestro modelo supone independientes las muestras de señal y de ruido de cuantificación.

Aunque ya hemos demostrado que las potencias de $x[n]$ y de $e[n]$ no dependen de M , vemos que a medida que la razón de sobremuestreo M aumenta, menos espectro del ruido de cuantificación se solapa con el espectro de la señal. Este efecto del sobremuestreo es el que nos permite mejorar la relación señal-ruido de cuantificación reduciendo la frecuencia de muestreo. Concretamente, el filtro paso bajo ideal elimina el ruido de cuantificación en la banda $\pi/M < |\omega| \leq \pi$, y deja inalteradas las componentes de la señal. La potencia de ruido a la salida del filtro paso bajo ideal es

$$\mathcal{E}\{e^2[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/M}^{\pi/M} \sigma_e^2 d\omega = \frac{\sigma_e^2}{M}.$$

A continuación se diezma la salida del filtro paso bajo y, como hemos visto, la potencia de señal en la salida diezmada permanece constante. La Figura 4.60 muestra la densidad espectral de potencia resultante tanto para $x_{10}[n]$ como para $x_{10}[n]$. Comparando las Figuras 4.58(b), 4.59

¹ Como el proceso aleatorio tiene media cero, la potencia media y la variancia tienen el mismo valor.

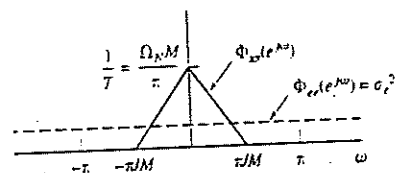


Figura 4.59. Densidad espectral de potencia de la señal y del ruido de cuantificación con un factor de sobremuestreo de M .

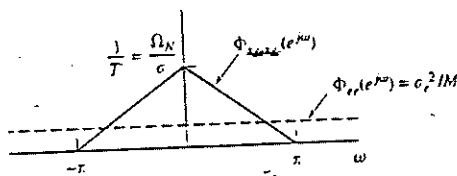


Figura 4.60. Densidad espectral de potencia de la señal y el ruido de cuantificación tras el submuestreo.

y 4.60 vemos que el área encerrada bajo la densidad espectral de potencia de la señal no ha cambiado, debido al escalado inverso de los ejes de frecuencia y amplitud. Pero, por otra parte, la potencia de ruido de la salida-diezmadada es la misma que en la salida del filtro paso bajo, es decir,

$$\mathcal{E}\{x_{de}^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_e^2}{M} d\omega = \frac{\sigma_e^2}{M} = \frac{\Delta^2}{12M}. \quad (4.158)$$

Por tanto, la potencia de ruido de cuantificación $\mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\}$ se ha reducido por un factor de M a través del filtrado y el diezmado, mientras que la potencia de señal permanece constante.

A partir de la Ecuación (4.158) se puede ver que dada una determinada potencia de ruido de cuantificación, hay un compromiso entre el factor de sobremuestreo M y el tamaño del paso Δ . La Ecuación (4.115) indica que para un cuantificador con $(B + 1)$ bits y un nivel de señal máximo entre $\pm X_m$, el tamaño del paso es

$$\Delta = X_m / 2^B.$$

Por tanto,

$$\mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\} = \frac{1}{12M} \left(\frac{X_m}{2^B} \right)^2. \quad (4.159)$$

La Ecuación (4.159) demuestra que para un cuantificador fijo, la potencia de ruido se puede reducir aumentando la razón de sobremuestreo M . Como la potencia de señal es independiente de M , al aumentar M aumentará la relación señal-ruido de cuantificación. Alternativamente, dada una potencia fija de ruido de cuantificación, $P_{de} = \mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\}$, el valor de B es

$$B = -\frac{1}{2} \log_2 M - \frac{1}{2} \log_2 12 - \frac{1}{2} \log_2 P_{de} + \log_2 X_m. \quad (4.160)$$

La Ecuación (4.160) indica que cada vez que se dobla la razón de sobremuestreo M , se necesita 1/2 bit menos para mantener una determinada relación señal-ruido de cuantificación. En otras palabras, si sobremuestreamos con un factor de $M = 4$, será necesario un bit menos para representar la señal con la exactitud deseada.

4.9.2. Conversión A/D sobremuestreada con conformación del ruido

En la sección anterior hemos demostrado que el uso del sobremuestreo y el diezmado pueden mejorar la relación señal-ruido de cuantificación. Merece la pena subrayar este resultado. Implica que, en principio, podemos utilizar una cuantificación muy cruda en nuestro muestreo inicial de la señal y, si la relación de sobremuestreo es suficientemente elevada, podemos obtener todavía una representación precisa de las muestras originales realizando procesado digital de las muestras contaminadas con ruido. El problema de lo que hemos visto hasta ahora es que, para conseguir una reducción significativa del número de bits necesario, hacen falta razones de sobremuestreo muy elevadas. Por ejemplo, para reducir el número de bits de 16 a 12 necesitamos un valor de $M = 4^4 = 256$. Parece que el coste es alto. Sin embargo, el principio básico del sobremuestreo puede producir ganancias mucho mayores si lo combinamos con el concepto de conformación del espectro del ruido mediante realimentación.

Como se indica en la Figura 4.59, utilizando cuantificación directa, la densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación es constante en toda la banda de frecuencias. El concepto de conformación del ruido se basa en modificar el procedimiento de conversión A/D de forma que la densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación no sea uniforme, sino que su forma sea tal que la mayoría de la potencia de ruido esté fuera de la banda $|\omega| < \pi/M$. De esa forma, el proceso subsiguiente de filtrado y diezmado eliminará más potencia de ruido de cuantificación.

El cuantificador con conformación del ruido, denominado generalmente modulador Delta-Sigma de datos muestreados se muestra en la Figura 4.61 (en Candy y Temes, 1992, se puede encontrar una colección de artículos sobre este tema). La Figura 4.61(a) muestra el diagrama de bloques de la realización del sistema con circuitos integrados. El integrador se realiza en tiempo discreto mediante condensadores conmutados. El conversor A/D se puede realizar de muchas formas, pero generalmente es un cuantificador de 1 bit o comparador. El conversor D/A toma la salida digital y la transforma de nuevo en un pulso analógico que se resta de la señal a la entrada del integrador. Este sistema se puede representar mediante el equivalente en tiempo discreto que se muestra en la Figura 4.61(b). El integrador realizado mediante condensadores conmutados toma la forma de un sistema acumulador, y el retardo en la vía de realimentación representa el retardo que introduce el conversor D/A.

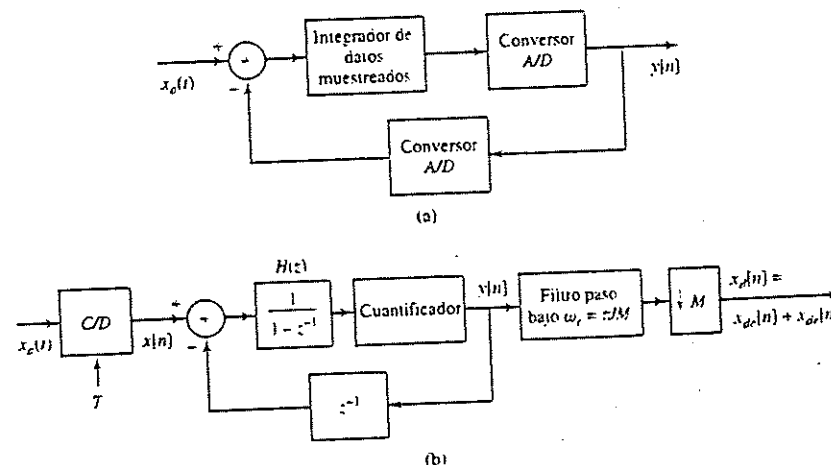


Figura 4.61. Cuantificador sobremuestreado con conformación del ruido.

Como hicimos antes, modelaremos el error de cuantificación como una fuente de ruido aditivo, con lo que el sistema de la Figura 4.61 se puede sustituir por el modelo lineal de la Figura 4.62. En este sistema, la salida $y[n]$ es la suma de dos componentes: $y_x[n]$ debida únicamente a la entrada $x[n]$ y $\hat{e}[n]$ debida únicamente al ruido $e[n]$.

Llamaremos $H_x(z)$ a la función de transferencia de $x[n]$ a $y[n]$, y $H_e(z)$ a la función de transferencia de $e[n]$ a $y[n]$. Estas funciones de transferencia se pueden calcular directamente y valen

$$H_x(z) = 1, \quad (4.161a)$$

$$H_e(z) = (1 - z^{-1}). \quad (4.161b)$$

Por consiguiente,

$$y_x[n] = x[n], \quad (4.162a)$$

y

$$\hat{e}[n] = e[n] - e[n-1]. \quad (4.162b)$$

Entonces, la salida $y[n]$ se puede representar de forma equivalente como $y[n] = x[n] + \hat{e}[n]$, donde vemos que $x[n]$ aparece sin modificar a la salida y que el ruido de cuantificación $e[n]$ aparece modificado por el operador de primera diferencia $H_e(z)$. Esto se muestra en el diagrama de bloques de la Figura 4.63. Teniendo en cuenta la densidad espectral de potencia de $e[n]$ dada en la ecuación (4.157), la densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación $\hat{e}[n]$ presente en la señal $y[n]$ es

$$\begin{aligned} \Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) &= \sigma_e^2 |H_e(e^{j\omega})|^2 \\ &= \sigma_e^2 [2 \sin(\omega/2)]^2. \end{aligned} \quad (4.163)$$

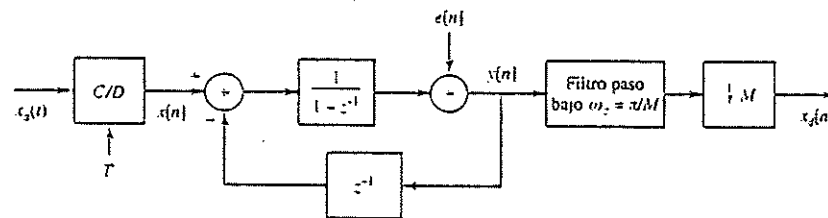


Figura 4.62. Sistema de la Figura 4.60 desde $x_s(t)$ hasta $y[n]$ en el que el cuantificador se ha sustituido por un modelo lineal de ruido.

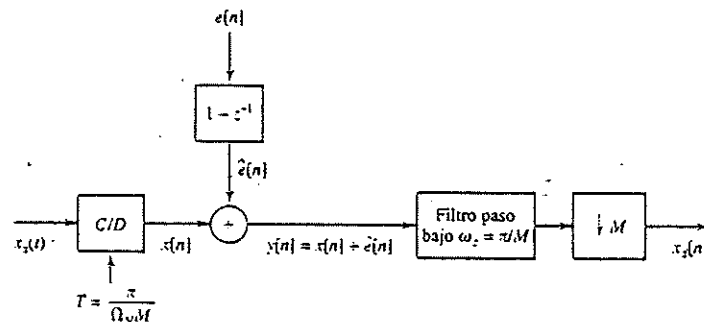


Figura 4.63. Representación equivalente de la Figura 4.62.

En la Figura 4.64 se muestra la densidad espectral de potencia de $\hat{e}[n]$, la densidad espectral de potencia de $e[n]$ y el mismo espectro de potencia de señal mostrado en las Figuras 4.58(b) y 4.59. Es interesante observar que la potencia total de ruido se incrementa desde un valor de $\mathcal{E}\{e^2[n]\} = \sigma_e^2$ en el cuantificador hasta un valor de $\mathcal{E}\{\hat{e}^2[n]\} = 2\sigma_e^2$ a la salida del sistema de conformación de ruido. Nótese sin embargo que en comparación con la Figura 4.59, el espectro del ruido de cuantificación ha cambiado de forma y ahora la mayor parte de la potencia de ruido está fuera de la banda de señal $|\omega| < \pi/M$, a diferencia del caso de sobremuestreo directo, en el que el espectro del ruido era plano.

En el sistema de la Figura 4.61, la potencia de ruido fuera de esa banda es eliminada por el filtro paso bajo. Concretamente, en la Figura 4.65 mostramos la densidad espectral de potencia $\Phi_{x_d x_d}(e^{j\omega})$ conjuntamente con la densidad espectral de potencia $\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega})$. Como el sistema de diezmado no elimina potencia de señal, la potencia de la señal $x_d[n]$ es

$$P_{da} = \mathcal{E}\{x_{da}^2[n]\} = \mathcal{E}\{x^2[n]\} = \mathcal{E}\{x_a^2(t)\}.$$

La potencia de ruido de cuantificación de la salida final es

$$P_{de} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta^2}{(2M)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 \sin\left(\frac{\omega}{2M}\right) \right)^2 d\omega. \quad (4.164)$$

Para comparar aproximadamente este resultado con el obtenido en la Sección 4.9.1, supondremos que M es suficientemente grande como para que se cumpla

$$\sin\left(\frac{\omega}{2M}\right) \approx \frac{\omega}{2M}.$$

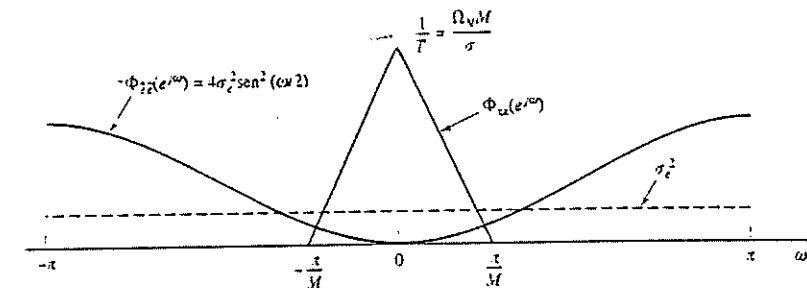


Figura 4.64. Densidad espectral de potencia de la señal y del ruido de cuantificación.

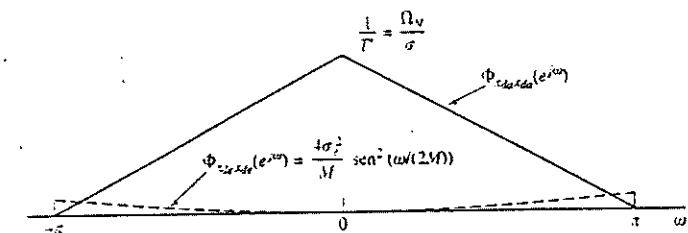


Figura 4.65. Densidad espectral de potencia de la señal y del ruido de cuantificación tras el diezmado.

Teniendo en cuenta esa aproximación, se puede evaluar fácilmente la Ecuación (4.164) y se obtiene

$$P_{de} = \frac{1}{36} \frac{\Delta^2 \pi^2}{M^3} \quad (4.165)$$

Observando la Ecuación (4.165) vemos de nuevo el compromiso entre la razón de sobremuestreo M y el tamaño del paso de cuantificación Δ . Para un cuantificador de $(B + 1)$ bits y un nivel máximo de la señal de entrada entre $\pm X_m$, $\Delta = X_m/2^B$. Por tanto, para obtener una determinada potencia de ruido de cuantificación P_{de} debe cumplirse

$$B = -\frac{3}{2} \log_2 M + \log_2(\pi/6) - \frac{1}{2} \log_2 P_{de} + \log_2 X_m \quad (4.166)$$

Comparando la Ecuación (4.166) con la Ecuación (4.160) vemos que, mientras que con cuantificación directa al doblar la razón de sobremuestreo M se gana 1/2 bit en la cuantificación, con el uso de conformación de ruido se ganan 1.5 bits.

La Tabla 4.1 muestra los ahorros equivalentes en bits del cuantificador con respecto al caso de cuantificación directa sin sobremuestreo ($M = 1$) para (a) cuantificación directa con sobremuestreo, tal y como se ha presentado en la Sección 4.9.1 y (b) sobremuestreo con conformación de ruido, tal y como se presenta en esta sección.

TABLA 4.1. AHORROS EQUIVALENTES EN BITS DEL CUANTIFICADOR RELATIVOS AL CASO DE $M = 1$ PARA LOS CASOS DE CUANTIFICACIÓN DIRECTA Y CONFORMACIÓN DE RUIDO DE PRIMER ORDEN

M	Cuantificación directa	Conformación de ruido
4	1	2.2
8	1.5	3.7
16	2	5.1
32	2.5	6.6
64	3	8.1

La estrategia de conformación de ruido de la Figura 4.61 se puede ampliar incorporando una segunda etapa de acumulación como se muestra en la Figura 4.66. En este caso, si modelamos de nuevo el cuantificador como una fuente de ruido aditivo $e[n]$, se puede demostrar que

$$y[n] = x[n] + \hat{e}[n]$$

teniendo en cuenta que en el caso de dos etapas, $\hat{e}[n]$ es el resultado de procesar el ruido de cuantificación $e[n]$ con la función de transferencia

$$H_e(z) = (1 - z^{-1})^2 \quad (4.167)$$

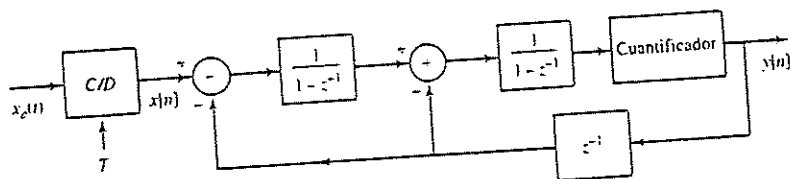


Figura 4.66. Cuantificador sobremuestreado con conformación de ruido de segundo orden.

TABLA 4.2. REDUCCIÓN DE BITS DEL CUANTIFICADOR EN FUNCIÓN DEL ORDEN p DEL CONFORMADOR DE RUIDO

Orden del cuantificador p	Factor de sobremuestreo M				
	4	8	16	32	64
0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	2.2	3.7	5.1	6.6	8.1
2	2.9	5.4	7.9	10.4	12.9
3	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5
4	4.1	8.5	13.0	17.5	22.0
5	4.6	10.0	15.5	21.0	26.5

La correspondiente densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación presente ahora en $y[n]$ es

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 [2 \sin(\omega/2)]^4 \quad (4.168)$$

con el resultado de que, aunque la potencia total de ruido a la salida del sistema de conformación de ruido de dos etapas es mayor que en el caso de una etapa, ahora hay más ruido fuera de la banda de señal. De forma general, se pueden usar p etapas de acumulación y realimentación y la correspondiente conformación de ruido está dada entonces por

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 [2 \sin(\omega/2)]^{2p} \quad (4.169)$$

La Tabla 4.2 muestra la reducción equivalente de bits del cuantificador en función del orden p del conformador de ruido y de la razón de sobremuestreo M . Nótese que con $p = 2$ y $M = 64$ se obtienen casi 13 bits de incremento de precisión, lo que sugiere que un cuantificador de 1 bit conseguiría una precisión de aproximadamente 14 bits a la salida del sistema de diezmo.

Aunque el empleo de múltiples bucles de realimentación como el de la Figura 4.66 parece que permite incrementar mucho la reducción de ruido, no está exento de problemas. Concretamente, para valores grandes de p , aumenta la posibilidad de que aparezcan inestabilidades y oscilaciones. En el Problema 4.62 se considera una estructura alternativa conocida como conformación multietapa de ruido (MASH, *multistage noise shaping*).

4.9.3. Sobremuestreo y conformación de ruido en la conversión D/A

En las Secciones 4.9.1 y 4.9.2 presentamos el uso del sobremuestreo para simplificar el proceso de conversión analógico-digital. Como hemos mencionado, la señal se sobremuestra inicialmente para simplificar el filtrado antialiasing y mejorar la precisión, pero la salida final del convertidor A/D se muestra a la frecuencia de Nyquist de $x_a(t)$. Trabajar con la mínima frecuencia de muestreo es, por supuesto, algo altamente deseable para tratamiento digital de señales o simplemente para representar la señal analógica en forma digital, como por ejemplo en un sistema de grabación de audio en CD. Es natural aplicar los mismos principios a la inversa para conseguir mejoras en el proceso de conversión D/A.

El sistema básico, contrapartida del que se muestra en la Figura 4.56, se muestra en la Figura 4.67. La secuencia $y[n]$, que se va a convertir en una señal en tiempo continuo, se interpola en primer lugar, produciéndose la secuencia $f[n]$, que se vuelve a cuantificar

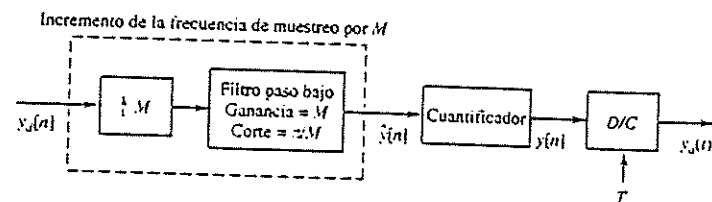


Figura 4.67. Conversión D/A sobremuestreada.

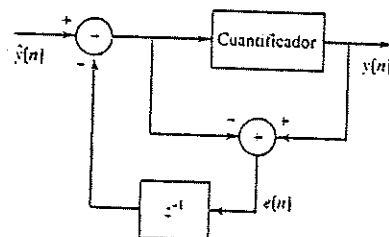


Figura 4.68. Sistema de conformación de ruido de primer orden para la cuantificación D/A sobremuestreada.

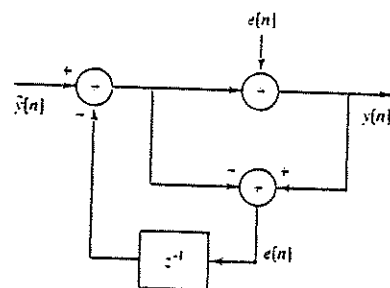


Figura 4.69. El sistema de la Figura 4.68 con el cuantificador sustituido por un modelo lineal de ruido.

antes de enviarla al conversor D/A. Este conversor admite muestras binarias con el número de bits producido por el proceso de recuantificación. Podemos utilizar un conversor D/A más simple, con menos bits, si aseguramos que el ruido de cuantificación no ocupa la banda de la señal. En ese caso, el ruido se puede eliminar con un filtrado analógico poco costoso.

En la Figura 4.68 se muestra una estructura de cuantificador que conforma el ruido de cuantificación de forma similar al sistema de primer orden que se muestra en la Figura 4.61. Para analizar el sistema de las Figuras 4.67 y 4.68, sustituiremos el cuantificador de la Figura 4.68 por el de la Figura 4.69. La función de transferencia desde $y[n]$ a $y[n]$ es la unidad. Es decir, la señal sobremuestreada $y[n]$ aparece inalterada a la salida. La función de transferencia $H_e(z)$ desde $e[n]$ hasta $y[n]$ es

$$H_e(z) = 1 - z^{-1}$$

Por tanto, la componente de ruido de cuantificación $e[n]$ que aparece a la salida del sistema de conformación de ruido de la Figura 4.69 tiene como densidad espectral de potencia

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 (2 \sin \omega/2)^2, \quad (4.170)$$

donde, de nuevo $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$.

La Figura 4.70 muestra una ilustración del proceso de conversión D/A. En la Figura 4.70(a) se muestra el espectro de potencia $\Phi_{y_d y_d}(e^{j\omega})$ de la entrada $y_d[n]$ de la Figura 4.67. Nótese que suponemos que la señal $y_d[n]$ está muestreada a la frecuencia de Nyquist. La Figura 4.70(b) muestra el correspondiente espectro de potencia de la salida del sistema de interpolación (por M), y en la Figura 4.70(c) se muestra el espectro de ruido de cuantificación a la salida del cuantificador/conformador de ruido. Finalmente, la Figura 4.70(d) mues-

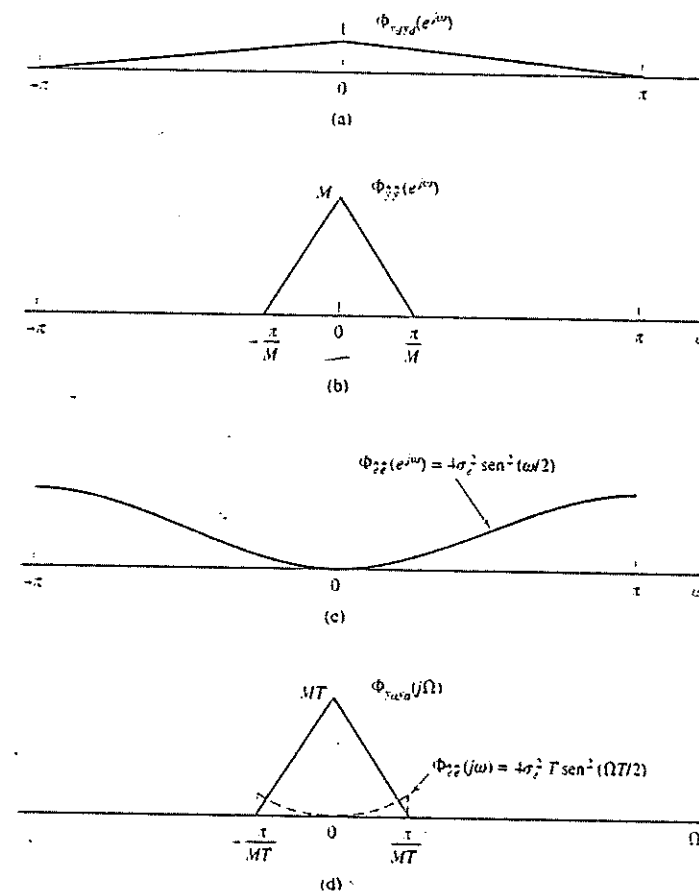


Figura 4.70. (a) Densidad espectral de potencia de la señal $y_d[n]$. (b) Densidad espectral de potencia de la señal $y[n]$. (c) Densidad espectral de potencia del ruido de cuantificación. (d) Densidad espectral de potencia de la señal en tiempo continuo y el ruido de cuantificación.

tra el espectro de potencia de la componente de señal juntamente con el espectro de potencia de la componente de ruido en la salida analógica del conversor D/C de la Figura 4.67. En este caso, suponemos que el conversor D/C tiene un filtro de reconstrucción paso bajo ideal con frecuencia de corte $\pi/(MT)$, que eliminará tanto ruido de cuantificación como sea posible.

En un aspecto práctico, desearíamos evitar filtros de reconstrucción analógicos con caídas abruptas en la frecuencia de corte. Observando la Figura 4.70(d) resulta claro que si podemos tolerar algo más de ruido de cuantificación, el filtro de reconstrucción D/C no necesita tener una caída tan abrupta. Además, si utilizamos técnicas multietapa en la conformación del ruido, se puede obtener un espectro de ruido de salida de la forma

$$\Phi_{\epsilon\epsilon}(e^{j\omega}) = \sigma_{\epsilon}^2 (2 \sin \omega/2)^{2r},$$

que colocaría más ruido en las altas frecuencias. En este caso, las especificaciones del filtro de reconstrucción analógico podrían relajarse aún más.

4.10. RESUMEN

En este capítulo hemos desarrollado y explorado las relaciones entre las señales en tiempo continuo y las secuencias en tiempo discreto que se obtienen mediante muestreo periódico. El teorema fundamental que permite representar la señal en tiempo continuo mediante una secuencia de muestras es el teorema de Nyquist. Dicho teorema establece que para una señal de banda limitada, las muestras periódicas constituyen una representación suficiente siempre que la frecuencia de muestreo sea suficientemente alta con respecto a la máxima frecuencia de la señal en tiempo continuo. Bajo esta condición, la señal en tiempo continuo se puede reconstruir a partir de las muestras mediante filtrado paso bajo, que corresponde a una interpolación de banda limitada. Si la frecuencia de muestreo es demasiado baja relativa al ancho de banda de la señal, se produce distorsión de solapamiento.

La posibilidad de representar señales mediante muestreo permite el procesamiento en tiempo discreto de señales en tiempo continuo. Esto se realiza mediante un muestreo inicial, seguido por una aplicación de un procesamiento en tiempo discreto y, finalmente, por la reconstrucción de una señal continua a partir del resultado del procesamiento anterior. Se presentan ejemplos sobre filtrado paso bajo y diferenciación.

Una clase particularmente importante de procesamiento es la correspondiente al cambio de la frecuencia de muestreo. El diezmado de una señal en tiempo discreto corresponde en el dominio de la frecuencia a una replicación del espectro en tiempo discreto con un cambio de escala del eje de frecuencias, que puede requerir una limitación adicional de la banda para evitar el solapamiento. La interpolación corresponde a aumentar de forma efectiva la frecuencia de muestreo y se representa también en el dominio de la frecuencia por un cambio de escala del eje de frecuencias. Combinando el diezmado y la interpolación en cantidades enteras, se pueden conseguir cambios en la frecuencia de muestreo por factores no enteros. Hemos presentado la forma eficiente de conseguirlo utilizando técnicas multitasas.

En las secciones finales del capítulo, exploramos diversas consideraciones prácticas asociadas al procesamiento en tiempo discreto de señales en tiempo continuo, incluyendo el uso de filtrado previo para evitar solapamiento, errores de cuantificación en la conversión analógico-digital y algunos aspectos relacionados con el filtrado utilizado en el muestreo y la reconstrucción de señales en tiempo continuo. Finalmente, demostramos cómo el diezmado y la interpolación en tiempo discreto, y la conformación de ruido se pueden utilizar para simplificar la parte analógica en la conversión A/D y D/A.

Problemas básicos con respuestas

- 4.1. La señal

$$x_c(t) = \sin(2\pi(100)t)$$

se muestrea con un periodo de muestreo de $T = 1/400$ segundos y se obtiene una señal en tiempo discreto $x[n]$. ¿Cuál es la señal resultante $x[n]$?

- 4.2. La secuencia

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad -\infty < n < \infty.$$

se obtiene muestreando la señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t), \quad -\infty < t < \infty.$$

con una frecuencia de 1.000 muestras/s. Indique dos posibles valores de Ω_0 que pueden producir la secuencia $x[n]$.

- 4.3. La señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \cos(4.000\pi t)$$

se muestrea con periodo T y se obtiene la señal en tiempo discreto

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right).$$

- (a) Determine un valor de T que sea consistente con esta información.
(b) ¿Es único el valor de T obtenido en (a)? Si es así, explique por qué. Si no, indique otro valor de T que sea consistente con la información dada.

- 4.4. La señal en tiempo continuo

$$x_c(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t)$$

se muestrea con periodo de muestreo T y se obtiene la señal en tiempo discreto

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right).$$

- (a) Determine un valor de T que sea consistente con esta información.
(b) ¿Es único el valor de T obtenido en (a)? Si es así, explique por qué. Si no, indique otro valor de T que sea consistente con la información dada.

- 4.5. Considere el sistema de la Figura 4.11, en el que el sistema en tiempo discreto es un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte $\pi/8$ radianes/s.

- (a) Si $x_c(t)$ es de banda limitada a 5 kHz, ¿Cuál es el máximo valor de T para que se evite el solapamiento en el conversor C/D?
(b) Si $1/T = 10$ kHz, ¿Cuál será la frecuencia de corte del filtro efectivo en tiempo continuo?
(c) Repita el Apartado (b) para $1/T = 20$ kHz.

- 4.6. Sea $h_c(t)$ la respuesta al impulso de un filtro en tiempo continuo lineal e invariante con el tiempo y $h_d[n]$ la respuesta al impulso de un filtro en tiempo discreto lineal e invariante con el tiempo.