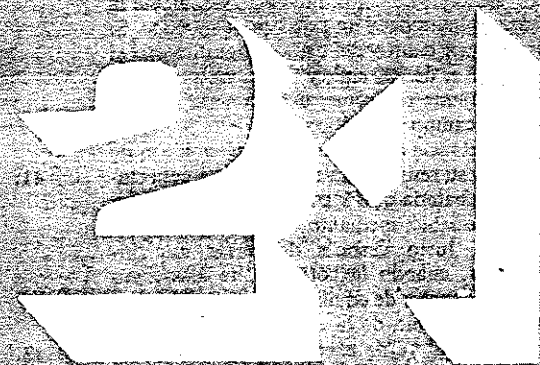


# PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA



## 21.1 Introducción

El magnetismo se conoce desde tiempos antiguos como resultado de las propiedades magnéticas de la *pedra imán* o *magnetita*, que es un óxido de hierro,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ . Cientos de años antes de que se descubriera la relación entre los campos magnéticos y las corrientes eléctricas, ya se utilizaba el magnetismo permanente del hierro. En el capítulo anterior se mencionó el uso de los núcleos de hierro o acero para bobinas y transformadores, lo que puede producir cambios significativos en sus características, mismos que son sumamente importantes en determinadas aplicaciones. En la actualidad, es muy común también emplear materiales magnéticos en micrófonos, bocinas o altavoces

y demás equipo de comunicaciones; también se usan extensamente en las memorias de computadoras, circuitos lógicos y aplicaciones de conmutación de alta velocidad. En consecuencia, es importante comprender algunos de los principios básicos que gobiernan la interacción de campos magnéticos con la materia.

La teoría general de las propiedades magnéticas de la materia es muy compleja, y en este libro no se tratará de explicar detalladamente todos sus aspectos. En particular, en sustancias magnetizables permanentemente, es necesario el conocimiento de la mecánica cuántica de átomos y moléculas para entender la base de las interacciones magnéticas, lo que es demasiado complejo de abordar por ahora. Por otro lado, se encontrará que es posible

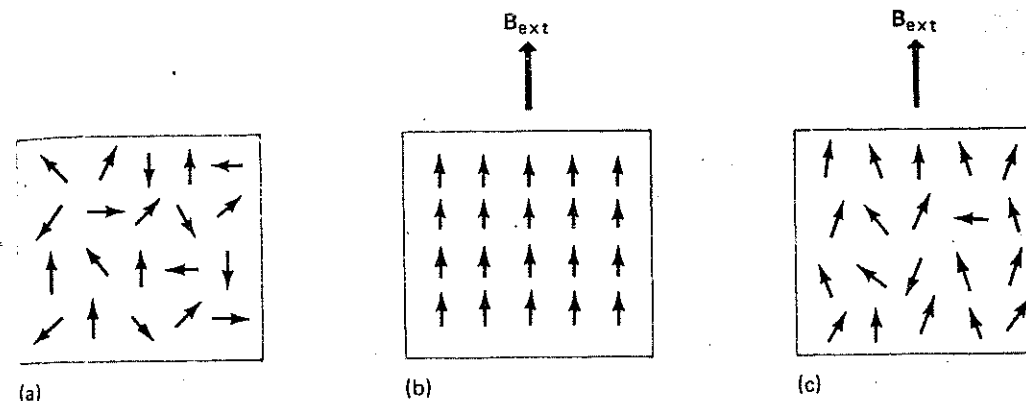


FIGURA 21.1. (a) Alineación al azar de los momentos magnéticos atómicos provocada por la agitación térmica. (b) Alineación magnética total en un sistema sujeto a la acción de un campo exterior intenso, en el que la agitación térmica es despreciable. (c) Alineación magnética parcial en un sistema en el que son significativas las tendencias contrapuestas de la agitación térmica y el campo exterior alineante.

comprender buena parte del comportamiento observado de las sustancias magnéticas, estudiando los efectos de las corrientes que circulan en los átomos cuando se crean momentos magnéticos atómicos, y considerando la interacción de estos momentos y campos magnéticos aplicados exteriormente. En el estudio del comportamiento eléctrico de los dieléctricos se encontró muy útil formular la ley de Gauss para casos en que hay materiales eléctricamente polarizables. En la forma, se encontrará sensato comenzar el estudio de las sustancias magnéticas, tratando de formular el teorema fundamental que relaciona los campos magnéticos con las corrientes que los originan, en caso de haber sustancias magnetizables. Naturalmente, el teorema fundamental es la ley de Ampère que, como se sabe, se asemeja a la ley de Gauss para campos eléctricos en determinados aspectos importantes. En consecuencia, se verá lo que indica la ley de Ampère cuando hay materiales magnéticos en consideración.

## 21.2 Magnetización, intensidad magnética y la ley de Ampère

El hecho de que los materiales magnetizables puedan actuar como fuente de campos magné-

ticos se deriva del hecho de que los átomos de una sustancia poseen momentos magnéticos. Estos momentos magnéticos atómicos se deben a trayectorias de corriente asociadas al movimiento de electrones dentro de los átomos, y al hecho de que el *giro* o *espín* de los electrones cargados negativamente da a cada electrón un momento magnético intrínseco de espín.<sup>1</sup>

Es muy importante entender que el momento magnético neto asociado a cualquier material es el resultado de una lucha entre dos efectos competitivos: la tendencia de los campos aplicados exteriormente o los campos moleculares que se originan dentro del propio material, a hacer que los momentos magnéticos atómicos se alineen en la misma dirección, y la tendencia de la *agitación térmica* al azar a desarreglar los momentos alineados, y producir una distribución completamente aleatoria de magnetización atómica correspondiente al momento magnético total cero (fig. 21.1). Se verán ejemplos frecuentes que ilustran su interrelación. Al considerar su comportamiento debe notarse que los efectos de alineación de

<sup>1</sup> En el capítulo 28 el espín intrínseco del electrón y el momento magnético asociado se estudian con mayor detalle.

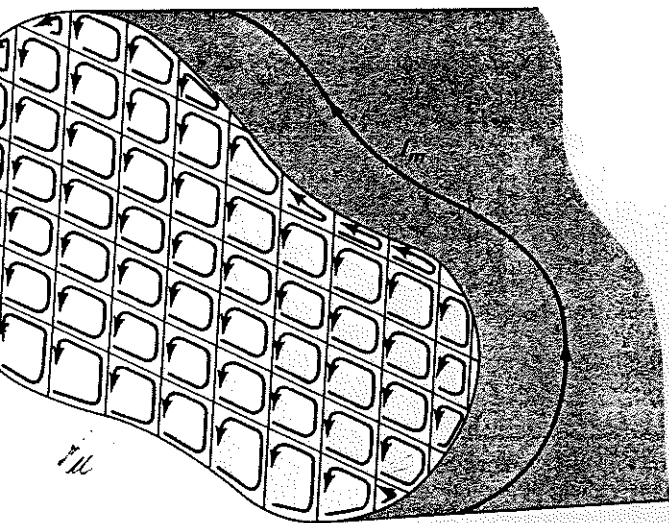


FIG. 21.2. Cancelación de las corrientes atómicas circulantes en los límites internos, que resulta en un efecto magnético neto atribuible a una corriente de magnetización superficial circulante que pasa por la superficie externa de la muestra.

Los campos aplicados son proporcionales a la intensidad del campo, pero independientes de la temperatura, en tanto que la influencia aleatoria de la agitación térmica es proporcional a la temperatura, pero independiente del campo aplicado.

Como todos los campos magnéticos se deben a corrientes, es razonable tratar de relacionar el campo magnético debido a los momentos magnéticos atómicos de la sustancia magnetizada, con las corrientes electrónicas que circulan dentro de los átomos de una sustancia.

En un capítulo anterior, en relación con la figura 19.2, se sugirió la forma como puede ser el campo magnético debido a los momentos dipolares magnéticos; en la figura 21.2 se muestra con más detalles. En esta ilustración, cada cuadro representa el volumen que ocupa un solo átomo. Las flechas alrededor de la periferia de cada cuadro señalan la circulación de la corriente electrónica dentro de cada celda atómica. Las flechas a lo largo de cada frontera

interna van en sentido contrario, por lo que se cancelan mutuamente aportaciones a una distribución de corriente total. Pero las corrientes atómicas en la superficie del material no se cancelan de esta manera, y contribuyen a una corriente de magnetización superficial neta  $I_m$ , que fluye por la superficie externa de la sustancia, en el sentido mostrado. Se puede considerar esta corriente superficial de magnetización como la fuente del campo magnético de la muestra, y a éste como un campo dipolar magnético originado de un momento dipolar  $p_m$  dado por

$$p_m = I_m A = \mathcal{M} \quad (21.2.1)$$

en que  $A$  es el área transversal. La certeza de esto puede apreciarse notando de la figura 21.2 que la intensidad de la corriente superficial de magnetización  $I_m$  es igual a la de la corriente atómica en cada celda. Pero el momento dipolar individual  $\Delta p_m$  asociado a cada celda es simplemente la corriente que circula,

igual a  $I_m$ , multiplicada por el área  $\Delta A$  de la celda:

$$\Delta p_m = I_m \Delta A \quad (21.2.2)$$

Pero si se juntan todas las celdas, la suma de los momentos dipolares individuales es el momento dipolar total  $p_m$ , en tanto que las áreas individuales se suman para dar el área total  $A$  lo que lleva directamente a (21.2.1).

En el capítulo 17 se vio que se puede describir la intensidad del campo eléctrico de un dieléctrico polarizado mediante un vector polarización que representa el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen. De la misma manera, puede expresarse el campo magnético de una sustancia magnetizada en términos de un vector magnetización  $M$ , relacionado con el momento dipolar magnético  $\Delta p_m$  correspondiente al volumen  $\Delta V$  de material, como se muestra en la figura 21.3 mediante

$$M = \frac{\Delta p_m}{\Delta V} \quad (21.2.3)$$

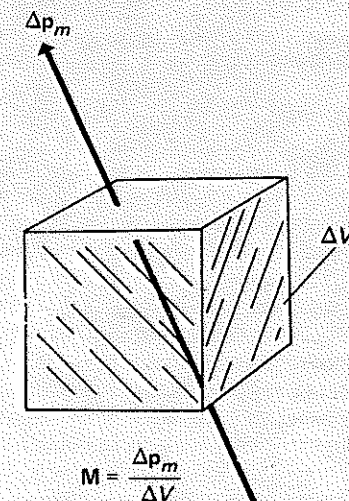


FIGURA 21.3. Esquema que ilustra cómo se define la magnetización como la razón del momento magnético dipolar al volumen para cada elemento voluminal de la muestra.

Entonces se dice que  $M$  es la magnetización asociada al elemento de volumen  $\Delta V$ . Si el momento dipolar  $\Delta p_m$  es el mismo para todos los elementos del volumen de magnitud  $\Delta V$  en la muestra, la magnetización es constante en todas partes dentro del material; éste es el único caso que aquí se considerará en detalle. Si distintos elementos de volumen dan lugar a distintos momentos dipolares como resultado de un alineamiento más completo de los dipolos atómicos en una región que en otra, entonces se puede hacer que el elemento de volumen  $\Delta V$  que rodea a cualquier punto  $P$  se haga indefinidamente pequeño, y el vector magnetización en ese punto se expresa como

$$M = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta p_m}{\Delta V} = \frac{dp_m}{dV} \quad (21.2.4)$$

Entonces, la magnetización será un vector cuya magnitud y dirección pueden variar de punto a punto dentro de la muestra. Ya que de (21.2.4) se tiene

$$dp_m = M dV \quad (21.2.5)$$

el momento dipolar total será

$$p_m = \int_V M dV \quad (21.2.6)$$

en que la integral se toma sobre el volumen total de la muestra magnetizada. Cuando la magnetización  $M$  es constante, se puede escribir fuera de la integral:

$$p_m = M \int_V dV$$

o sea,

$$p_m = MV \quad (21.2.7)$$

Si el momento dipolar de la muestra se expresa en términos de una distribución de corriente atómica efectiva por ejemplo, mediante (21.2.2), es claro que la magnetización  $M$  se determina por esta distribución de corriente; y a la inversa, si se conoce  $M$  puede determinarse

se la distribución de corriente de magnetización.

Con estos antecedentes, se verá qué ocurre cuando se aplica la ley de Ampère a una sustancia magnetizada. Debido a la complejidad de las matemáticas necesarias, no se podrá hacer en la forma más general. En vez de ello, se desarrollarán los resultados considerando el comportamiento de una bobina toroidal delgada, que se forma arrollando  $N$  vueltas totales de alambre sobre la superficie de una pieza toroidal uniforme de material magnetizable. Los resultados obtenidos de esa manera son de aplicabilidad general, e ilustran bien los principios físicos esenciales comprendidos. Es mejor visualizar la sustancia magnética sobre la que se enrolla la bobina como una sustancia que adquiere determinada magnetización proporcional a la corriente en el devanado, en lugar de por una sustancia magnetizable permanentemente; la magnetización desaparece con posterioridad si la corriente se reduce a cero. Al hacerlo así, no se excluye la posibilidad de utilizar un núcleo que se pueda magnetizar permanentemente, sino que se ahorra la molestia de dar lugar a ciertas preguntas, que se pospondrán hasta el momento en que se tengan conocimientos suficientes para contestar-

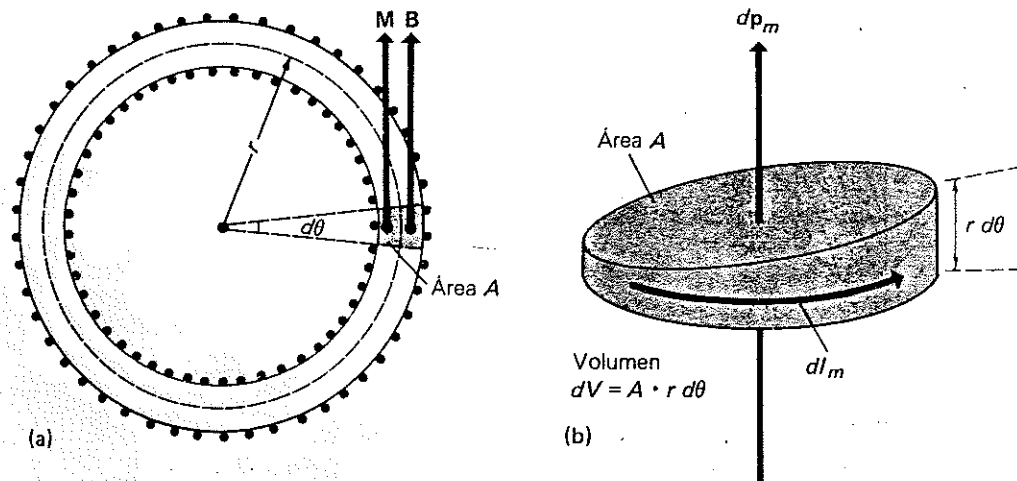


FIGURA 21.4. Relaciones entre la corriente, la inducción magnética y la magnetización en el caso de una muestra toroidal magnetizada uniformemente.

las (fig. 21.4). Se supondrá que en la bobina toroidal fluye una corriente constante  $I$ , y se aplicará la ley de Ampère (19.6.9) alrededor de una trayectoria circular  $C$  cuyo radio  $r$  es el radio medio del toroide. La corriente total que atraviesa el contorno  $C$  consiste en la corriente  $NI$  que fluye en el devanado y también en la corriente de magnetización atómica  $I_m$  que circula alrededor de la sección transversal del toroide, como se muestra en la figura 21.4, b.

Utilizando esta última, también se puede relacionar la magnetización  $M$  con el momento dipolar  $dp_m$  de la sección delgada del núcleo toroidal que se muestra, y con la parte de la corriente superficial de magnetización que fluye alrededor de esta sección y representa la fuente de su campo magnético. De (21.2.4) y (21.2.1), se puede escribir la magnitud del vector magnetización  $M$  como

$$M = \frac{dp_m}{dV} = \frac{A dI_m}{A(r d\theta)} = \frac{dI_m}{r d\theta} \quad (21.2.8)$$

$dI_m$  es la porción de la corriente superficial total de magnetización que fluye alrededor de la sección delgada de material que sustituye un ángulo central  $d\theta$  como se muestra en la figura 21.4, b. En consecuencia, esta porción de  $I_m$  es

igual a la corriente total  $I_m$  multiplicada por la relación  $d\theta/2\pi$  que representa la parte fraccionaria del toroide subtendida por el ángulo central  $d\theta$ . En forma de ecuación, esto quiere decir que

$$dI_m = I_m \frac{d\theta}{2\pi} \quad (21.2.9)$$

Sustituyendo en (21.2.8) se encuentra que

$$M = I_m \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{r d\theta} = \frac{I_m}{2\pi r}$$

o sea,

$$I_m = 2\pi r M \quad (21.2.10)$$

De (21.2.4), es evidente que el vector  $M$  tiene la misma dirección que el vector  $dp_m$ , y de la figura 21.4, b, es igualmente evidente que la dirección de este vector es *tangencial* al contorno circular  $C$  en todas partes. En consecuencia, los vectores  $M$  y  $B$  siempre son paralelos, debido a que, como se sabe por los estudios anteriores, el campo  $B$  de una bobina toroidal tiene este mismo carácter tangencial. Además, si se calcula la integral de  $M \cdot d\mathbf{l}$  alrededor del contorno  $C$ , se encuentra

$$\oint_C M \cdot d\mathbf{l} = \oint_C M dl = M \oint_C dl = 2\pi r M \quad (21.2.11)$$

Pero, usando (21.2.10) puede relacionarse ahora a  $M$  y a  $I_m$  mediante

$$I_m = \oint_C M \cdot d\mathbf{l} \quad (21.2.12)$$

De modo que es posible aplicar la ley de Ampère dada por (19.6.9) al contorno  $C$ , expresando la corriente total  $I$ , encerrada por  $C$  como la suma de la corriente  $NI$  que fluye en el devanado y la corriente de magnetización  $I_m$ . En esta forma, la ley de Ampère indica que

$$\oint_C B \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_t = \mu_0 (NI + I_m) \quad (21.2.13)$$

Utilizando (21.2.12), esta expresión queda como

$$\oint_C B \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 NI + \mu_0 \oint_C M \cdot d\mathbf{l} \quad (21.2.14)$$

o sea,

$$\oint_C \left( \frac{B}{\mu_0} - M \right) \cdot d\mathbf{l} = NI \quad (21.2.15)$$

De aquí es evidente que la corriente verdadera  $NI$  que fluye en el devanado está relacionada con la inducción magnética por medio de la integral de la cantidad  $[(B/\mu_0) - M] \cdot d\mathbf{l}$ , en vez de simplemente por la integral de  $B \cdot d\mathbf{l}/\mu_0$ , como sería el caso si no existiera una sustancia magnética. A la cantidad  $(B/\mu_0) - M$  se le llama *intensidad magnética* (o *intensidad de campo magnético*) y generalmente se designa por el símbolo  $H$ . Utilizando esta notación se puede escribir (21.2.15) como

$$\oint_C H \cdot d\mathbf{l} = I_c \quad (21.2.16)$$

en que  $I_c (= NI)$  es la *verdadera corriente* que se debe al flujo de cargas móviles encerradas por el contorno  $C$ , y donde la intensidad magnética  $H$  está dada por

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \quad (21.2.17)$$

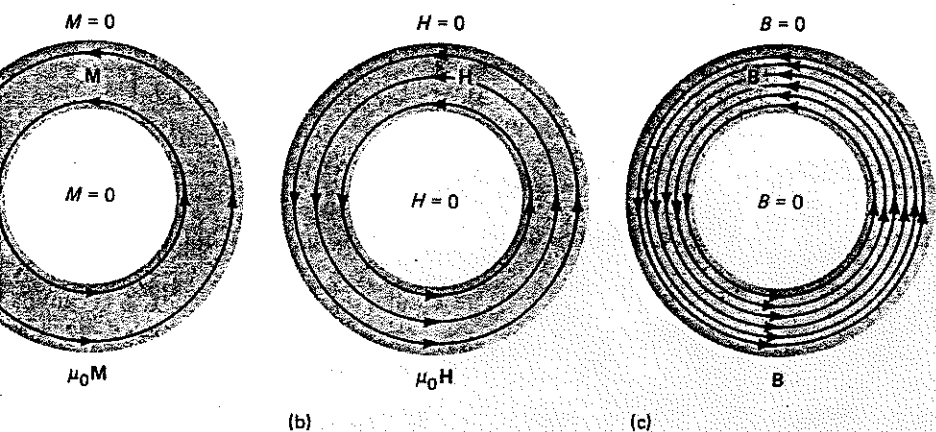
Despejando  $B$  de esta ecuación:

$$B = \mu_0 (H + M) \quad (21.2.18)$$

Generalmente, las (21.2.14) a (21.2.18) son aplicables a todos los casos en que hay campos magnéticos y materiales magnetizables, aunque sólo se deducen para el caso toroidal. De (21.2.16), es claro que la unidad SI para la intensidad magnética  $H$  es A/m. De (21.2.17), fácilmente se ve que  $M$  y  $H$  tienen las mismas dimensiones. En la figura 21.5 se ilustran las relaciones entre  $H$ ,  $M$  y  $B$  en una muestra toroidal magnetizada.

El caso se parece al de los materiales eléctricamente polarizables visto en el Capítulo 17, donde se encontró que la ley de Gauss cuando hay materiales polarizables expresa que se debe igualar la integral de superficie de  $(\epsilon_0 E + P) \cdot \mathbf{n}$  (en vez de la  $\epsilon_0 E \cdot \mathbf{n}$ ) a





21.5. Los campos (a) de la magnetización, (b) de la intensidad magnética y (c) de la inducción magnética en una muestra toroidal uniformemente magnetizada.

libre móvil dentro de la superficie dada  $\mathcal{E}_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ . En este caso se le designa  $\mathbf{D}$ , y se la llamó el desplazamiento eléctrico.

En el caso magnético, se ve que en efecto el flujo de línea cerrada de la cantidad  $-\mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$  es la que da la verdadera intensidad magnética encerrada por el contorno, y no la integral de  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ .

En consecuencia, será necesario considerar la intensidad  $(\mathbf{B}/\mu_0) - \mathbf{M}$  como un campo magnético que se llamará intensidad magnética verdadera, cuando la ley de Ampère en la forma  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  alrededor de una trayectoria cerrada, y haciendo su valor igual a  $I_c$ , se obtiene una expresión de la intensidad magnética  $\mathbf{H}$  en términos de la corriente verdadera que fluye en los circuitos externos que producen la magnetización desde el principio. Se puede encontrar la inducción  $\mathbf{B}$  por el método simple que comprende el cálculo de  $\mathbf{B}$ , que se describirá directamente. En la figura 21.5 se muestran las líneas de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  y la magnetización  $\mathbf{M}$  para una muestra toroidal.

Es importante señalar que la ley de Ampère para el campo  $\mathbf{B}$  con la corriente total, es decir, la corriente verdadera debida al movimiento macroscópico de carga en los me-

dios conductores, y las corrientes atómicas circulantes que puedan ocurrir sobre las sustancias magnetizables o dentro de ellas. Por otra parte, en esencia la intensidad magnética  $\mathbf{H}$  está relacionada de la misma manera por la ley de Ampère sólo con la corriente verdadera. Por tanto, puede decirse que la intensidad magnética  $\mathbf{H}$  es un campo que se debe a una distribución de corriente que consiste únicamente en corrientes verdaderas en medios conductores, en tanto que la inducción magnética  $\mathbf{B}$  es un campo relacionado, en forma parecida, con una distribución de corriente total que consiste en corrientes verdaderas más corrientes de magnetización atómicas.

En el caso de electrostático, se encontró que el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  está relacionado por la ley de Gauss con una distribución originante que consiste en todas las cargas presentes, incluyendo las cargas de polarización asociadas a las sustancias dieléctricas polarizables, en tanto que el desplazamiento  $\mathbf{D}$  estaba relacionado de la misma manera con una distribución que consiste sólo en cargas que pueden moverse libremente como respuesta a las fuerzas eléctricas que actúan sobre ellas. Por tanto, hay cierta analogía que se puede establecer en un caso entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , y por otra parte, entre  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{H}$ .

Aunque el campo  $\mathbf{H}$  está relacionado me-

dianamente la ley de Ampère con una distribución originante o fuente que consiste sólo en corrientes efectivas o verdaderas, esto no quiere decir que la intensidad magnética esté completamente libre de influencias de las corrientes de magnetización y de los materiales magnéticos que puedan estar presentes. La ley de Ampère sólo garantiza que la integral de  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  alrededor de una trayectoria cerrada estará determinada únicamente por corrientes verdaderas dentro de la trayectoria. Pero todavía es posible influir en la magnitud y dirección de  $\mathbf{H}$  en determinadas formas, mediante corrientes de magnetización, aunque la integral de  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  no sea afectada por éstas.

Por ejemplo, en el caso de un imán permanente, no hay ninguna corriente verdadera y la integral de  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$  alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero. Sin embargo, cuando se examinen estos campos con mayor detalle se verá que esto no garantiza que la propia  $\mathbf{H}$  sea cero. Lo mismo ocurre en electrostática, en relación con el campo electrostático  $\mathbf{E}$ . En el capítulo 16 se vio que la integral de  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  alrededor de una trayectoria cerrada siempre es cero, pero claramente esto no implica que el propio  $\mathbf{E}$  deba anularse.

En la práctica, por lo general se conoce la distribución de las corrientes verdaderas que actúan como las fuentes de campos magnéticos. Por el contrario, es común que se desconozca la distribución de las corrientes de magnetización circulantes asociadas a los materiales magnéticos que estén presentes. En consecuencia, por lo común es bastante simple encontrar la intensidad magnética  $\mathbf{H}$  utilizando la ley de Ampère y los resultados obtenidos antes. Pero habrá muchos casos en que tenga que determinarse la inducción magnética  $\mathbf{B}$ , además de  $\mathbf{H}$ ; por ejemplo, al utilizar la ley de Faraday de la inducción, se necesita conocer  $d\mathbf{B}/dt$  en vez de  $d\mathbf{H}/dt$ . En este caso, y de acuerdo con (21.2.18), no se puede evitar el hecho de que para determinar  $\mathbf{B}$ , de alguna manera deberá encontrarse la magnetización  $\mathbf{M}$ .

Ya que ordinariamente el efecto magnético de una distribución de corriente verdadera produce la magnetización neta del material, es razonable suponer que hay alguna relación simple entre la magnetización del material y la

intensidad magnética  $\mathbf{H}$ . En el caso más sencillo posible, esta relación sería una proporcionalidad directa de la forma

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (21.2.19)$$

en que  $\chi_m$  es una cantidad constante independiente de  $\mathbf{H}$ . En realidad, se encuentra que muchas sustancias magnetizables se comportan de esta manera, al menos para valores de intensidad magnética que no son excesivos. Se dice que estas sustancias presentan comportamiento magnético lineal, y a menudo se conocen como materiales magnéticos lineales. La constante  $\chi_m$  de proporcionalidad en (21.2.19) usualmente se conoce como susceptibilidad magnética del material. En muchos casos, es posible calcular la susceptibilidad a partir de las propiedades magnéticas fundamentales de los átomos de una sustancia, pudiendo así predecir su dependencia de la temperatura, su composición y otros parámetros físicos. Más adelante, en este capítulo, se verá cómo se hace lo anterior, en algunos ejemplos simples.

Aun en el caso de sustancias magnetizables que muestran comportamiento magnético lineal para valores moderados de intensidad magnética, la simple relación lineal dada por (21.2.19) no se cumple cuando la intensidad magnética se hace demasiado grande. Además, las sustancias permanentemente magnetizables, como hierro, níquel y cobalto, rara vez exhiben un comportamiento magnético lineal como se define en (21.2.19). La susceptibilidad depende del campo magnético en esos materiales, incluso para valores sensiblemente pequeños de  $\mathbf{H}$ , y más aún, puede depender de influencias magnéticas anteriores que haya sufrido la muestra. En otra parte de este capítulo se investigarán las razones físicas de las propiedades especiales de estas sustancias llamadas ferromagnéticas.

Sin embargo, por ahora se supondrá que se obedece la relación (21.2.19) y aquí se describen primero las propiedades de los materiales magnéticos lineales. Se considerará que se pueden encontrar formas apropiadas de medir  $\chi_m$  experimentalmente, y que, por tanto, es una constante conocida del material magnético en estudio. Pronto se verá cómo puede

lograrse esta medición experimental de la susceptibilidad. Entonces, usando (21.2.19) para expresar  $\mathbf{M}$  en términos de  $\mathbf{H}$ , puede escribirse (21.2.18) como

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (21.2.20)$$

en que la cantidad  $\mu$ , definida por

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (21.2.21)$$

se conoce como *permeabilidad magnética* (absoluta) del material. También a veces es útil hablar de la *permeabilidad magnética relativa*  $K_m$ , que se define como la relación de la permeabilidad magnética  $\mu$  a la permeabilidad magnética del vacío,  $\mu_0$ . En consecuencia, la permeabilidad relativa se puede expresar como

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (21.2.22)$$

En estas definiciones se destacan las analogías entre las susceptibilidades eléctrica y magnética, la permeabilidad magnética y la permisividad dieléctrica, y entre la permeabilidad relativa (constante magnética) y la constante dieléctrica.

Si no hay ningún material magnético, entonces  $\mathbf{M} = 0$  y de (21.2.18),  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ . Si en vez de ello, sin perturbar la distribución de corriente verdadera que forma la fuente del campo  $\mathbf{H}$ , se introduce un material con susceptibilidad magnética positiva apreciable, el valor de  $\mathbf{H}$  no cambia, mientras que la magnitud de  $\mathbf{B}$  dada por (21.2.20) se hace mucho mayor. Por esta razón, el campo de inducción magnética  $\mathbf{B}$  dentro de los materiales de alta permeabilidad magnética es mucho mayor de lo que sería si no estuvieran presentes tales sustancias. Por tanto, se observa que las líneas del campo  $\mathbf{B}$  de inducción tienden a *concentrarse* intensamente en sustancias de alta permeabilidad. Por esta razón, un cambio dado en la corriente verdadera puede dar un cambio de flujo mucho mayor a través de materiales magnéticamente permeables que a través de la misma región en el vacío. Esta es la

razón esencial del gran aumento en la inducción que se observa cuando se usa un núcleo de hierro, en vez de aire o vacío en un inductor. Sin embargo, cabe recordar que aunque dicho metal siempre muestra valores muy grandes de permeabilidad, no obedece la relación lineal (21.2.19) entre la intensidad magnética y la magnetización.

La tabla 21.1 da las susceptibilidades magnéticas de varias sustancias a la temperatura ambiente. Se observará que en la mayoría de los casos, las magnitudes numéricas de las susceptibilidades magnéticas son bastante pequeñas; mucho *menores*, en efecto, que las susceptibilidades eléctricas de las sustancias aislantes comunes. La excepción es el hierro, que va al otro extremo, y que presenta valores de susceptibilidad magnética mucho mayores que los de otros materiales, y en realidad, mucho mayores que los de susceptibilidades eléctricas de la mayoría de las sustancias. No puede darse un valor fijo para este metal, puesto que no es una sustancia magnética lineal, como lo muestra el hecho de que su susceptibilidad varía con la intensidad magnética aplicada, la historia de su magnetización ante-

TABLA 21.1. Susceptibilidades magnéticas

Sustancia	$\chi_m$
Aluminio	$2.3 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1.7 \times 10^{-4}$
Cobre	$-1.0 \times 10^{-5}$
Oro	$-3.6 \times 10^{-5}$
Plomo	$-1.7 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1.2 \times 10^{-5}$
Platino	$2.9 \times 10^{-4}$
Plata	$-2.6 \times 10^{-5}$
Agua	$-0.88 \times 10^{-5}$
$\text{CrK}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$	$2.32 \times 10^{-5}$
$\text{Cu}(\text{SO}_4) \cdot 5\text{H}_2\text{O}$	$1.43 \times 10^{-5}$
$\text{Gd}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$	$2.21 \times 10^{-4}$
$\text{MnF}_2$	$4.59 \times 10^{-4}$
$\text{CoCl}_2$	$3.38 \times 10^{-4}$
$\text{FeCl}_2$	$3.10 \times 10^{-4}$
$\text{FeCl}_3$	$2.40 \times 10^{-4}$
$\text{NiCl}_2$	$1.71 \times 10^{-4}$
Fierro (dulce)	$\sim 5000$

rior y la elaboración metalúrgica de la muestra. Los grandes valores de permeabilidad observados en el hierro y en otras sustancias magnetizables permanentemente se deben a que en esos materiales ferromagnéticos, los dipolos magnéticos atómicos tienden también a *alinearse unos con otros*, y no sólo en respuesta a la acción de campos magnéticos aplicados exteriormente.

Hay otras sustancias con susceptibilidades magnéticas positivas que son mucho menores y cuyas susceptibilidades (al menos para campos razonablemente pequeños), son independientes de la intensidad magnética aplicada. En tales sustancias, los momentos magnéticos atómicos tienden a alinearse paralelamente al campo externo aplicado, pero no se influyen mutuamente de manera significativa, como en los materiales ferromagnéticos. Estas sustancias se llaman *paramagnéticas*.

Por último, a partir de los valores de la tabla 21.1 se observa que hay muchos materiales cuya susceptibilidad magnética es *negativa*, lo que corresponde a permeabilidades relativas inferiores a la unidad. En este tipo de materiales, en tanto que los momentos magnéticos atómicos prácticamente son independientes entre sí, como en los materiales paramagnéticos, tienden a alinearse en dirección opuesta a la del campo aplicado exteriormente. Estas sustancias se llaman *diamagnéticas*.

La mayor parte del resto de este capítulo se dedicará a tratar de explicar, con base en la interacción de momentos atómicos y electrónicos con campos externos y entre sí, las magnitudes de las susceptibilidades magnéticas observadas de diversas sustancias, y por qué la susceptibilidad varía como lo hace con la temperatura y el campo aplicado. **Primeramente** se centrará la atención en las sustancias paramagnéticas y diamagnéticas, y se pasará luego a los materiales ferromagnéticos, para al último, mencionar brevemente los sistemas magnéticos más comunes y confusivos: los imanes permanentes.

#### EJEMPLO 21.2.1

En un átomo de hidrógeno se puede considerar que un electrón gira alrededor de un pro-

tón en una órbita circular de radio  $r = 0.528 \times 10^{-10}$  m con velocidad angular constante  $\omega$ . La atracción electrostática entre el electrón y el protón proporciona la fuerza centrípeta necesaria para retener al electrón en su órbita circular. Utilizando el concepto clásico de que el momento magnético es el producto de la corriente por el área encerrada por la trayectoria en que circula, determinar el momento magnético orbital del átomo de hidrógeno. ¿Cuál es la relación de este momento magnético a la cantidad de movimiento angular del electrón?

La fuerza centrípeta  $-m\omega^2 r$  debe ser precisamente la fuerza atractiva entre el electrón y protón, que vale  $(+e)(-e)/4\pi\epsilon_0 r^2$ . Igualando estas dos cantidades, se obtiene

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\omega^2 r$$

de donde se puede despejar  $\omega$  y tener

$$\omega = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r^3}} \quad (21.2.23)$$

El sistema puede visualizarse como una espira circular de radio  $r$  en la que fluye una corriente conforme el electrón de carga negativa gira alrededor del protón. La corriente es la carga que circula, en este caso la carga electrónica elemental, dividida entre el tiempo requerido para una revolución completa, que es el período de revolución  $2\pi/\omega$ . En consecuencia, se puede escribir

$$I = \frac{\omega e}{2\pi} = \frac{e^2}{2\pi\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r^3}} \quad (21.2.24)$$

El momento magnético orbital del átomo es la corriente expresada arriba multiplicada por el área del "circuito", que en este ejemplo es  $\pi r^2$ ; lo anterior lleva finalmente a

$$\mu_m = IA = \frac{e^2}{4} \sqrt{\frac{r}{\pi\epsilon_0 m}} \quad (21.2.25)$$

Introduciendo los valores conocidos de la carga y masa del electrón y el valor  $r = 0.528 \times 10^{-10}$  m para el radio de la órbita, se encuentra que

$$\frac{6.02 \times 10^{-19}}{4} \sqrt{\frac{0.528 \times 10^{-10}}{\pi(8.853 \times 10^{-12})(9.11 \times 10^{-31})}}$$

$$27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

cantidad de movimiento (o ímpetu)  $p$  orbital del electrón con respecto al  $\mathbf{r}$  está dada por

$$r^2 \omega \quad (21.2.26)$$

de (21.2.24) y (21.2.25),

$$A = \frac{\omega e}{2\pi} \pi r^2 = \frac{e \omega r^2}{2} \quad (21.2.27)$$

ces, de estas dos ecuaciones, se ve finalmente que

$$\frac{e}{m} \quad (21.2.28)$$

ente que el momento magnético orbital  $\mathbf{m}_l$  es directamente proporcional al momento cinético orbital, y la constante de proporcionalidad está expresada simplemente en términos de la relación de carga a la masa del electrón. La proporcionalidad del momento magnético y el momento cinético es válida para sistemas atómicos en general, aunque la constante de proporcionalidad pueda variar de caso a otro.

Además de este momento magnético orbital, también hay momentos magnéticos asociados a lo que se conoce como *giro propio* o ("spin") de la partícula. El espín del electrón, o del protón, corresponde a una cantidad de movimiento angular, y es una *propiedad característica* de la partícula, como su masa en reposo o su carga. Toda partícula con carga eléctrica y esta cantidad de movimiento angular o momento cinético se comporta como una distribución de cargas en rotación, y, en consecuencia, como una espira con corriente; en consecuencia, posee un *momento magnético* intrínseco. El espín característico del electrón y

El S. Para simplificar la terminología, en adelante usaremos la denominación de *momento cinético* para el momento angular o momento de la cantidad de movimiento.

otras partículas elementales se estudian más completamente en el capítulo 28; se recomienda al lector que se entere brevemente de ese estudio, pues en el presente capítulo se estudiará algo más sobre el espín del electrón. Sin embargo, en este ejemplo específico sólo interesa el momento cinético *orbital*, y el momento magnético del átomo, por lo que no se seguirán considerando aquí los momentos cinéticos propios o de espín.

### EJEMPLO 21.2.2

La bobina toroidal delgada de los ejemplos 20.4.1 y 20.4.2 tiene un radio medio de 10 cm y un área transversal de 3.0 cm<sup>2</sup>; además cuenta con 3 142 vueltas de alambre (50 vueltas/cm a lo largo de la circunferencia media). Supóngase que la bobina está arrollada sobre la superficie de un núcleo paramagnético toroidal de susceptibilidad  $\chi_m = 4.59 \times 10^{-4}$ . Se hace fluir una corriente constante de 3.5 A en el devanado. Hallar (a) la intensidad magnética  $H$  dentro de la bobina, (b) la magnetización  $M$ , (c) la inducción magnética  $B$  dentro de la bobina y (d) la corriente superficial total de magnetización  $I_m$ . ¿Cuál sería la inducción  $B$  si no hubiera un núcleo paramagnético? Dar las respuestas a las preguntas anteriores, si en vez del núcleo paramagnético se utiliza un núcleo *ferromagnético* con permeabilidad relativa de 1 200, y cuyo comportamiento magnético es lineal.

La intensidad magnética  $H$  se puede obtener de la ley de Ampère (21.2.16). Puesto que el campo  $H$  es tangencial en todas partes, como lo es  $B$ , se puede integrar alrededor de una trayectoria circular  $C$  con un radio igual al radio medio del toroide, y se escribe así

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = I_c = NI$$

o sea,

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{(3412)(3.5)}{(2\pi)(0.1)} = 19\,000 \text{ A/m}$$

La magnetización  $M$  está relacionada con  $H$  mediante (21.2.19), de donde

$$M = \chi_m H = (4.59 \times 10^{-4})(1.9 \times 10^4) = 8.721 \text{ A/m}$$

La inducción se obtiene de (21.2.20), en que la permeabilidad está dada por

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) = (4\pi \times 10^{-7})(1.000459) = 12.572139 \times 10^{-7}$$

y la inducción  $B$  por

$$B = \mu H = (12.572139 \times 10^{-7})(19\,000) = 0.0238871 \text{ Wb/m}^2$$

En estos cálculos se incluye una cantidad poco común de cifras significativas, simplemente porque la permeabilidad apenas es distinta del valor del vacío  $\mu_0$ , pues  $\chi_m$  es mucho menor que la unidad. En este caso, la magnitud de  $B$  difiere muy poco del valor que tendría sin el núcleo paramagnético. Por tanto, para que pueda hacerse una comparación válida entre estos valores, se deberán calcular con muchas más cifras significativas que las que serían justificables por la exactitud con que se especifican los parámetros de la bobina y la corriente.

De acuerdo con (21.2.10), la corriente de magnetización  $I_m$  será

$$I_m = 2\pi r M = (2\pi)(0.1)(8.721) = 5.48 \text{ A}$$

Se ve que esto es mucho menor que la corriente  $I_c = NI = (3412)(3.5) = 11\,940 \text{ A}$  debido al pequeño valor de la susceptibilidad. Si no hubiera núcleo paramagnético, de acuerdo con la ley de Ampère el valor de  $B$  hubiera sido (con la corriente de magnetización  $I_m$  igual a cero),

$$B = \frac{\mu_0 NI_{\text{tot}}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} = 0.0238761 \text{ Wb/m}^2$$

Esta respuesta puede obtenerse en forma todavía más simple, notando que sin el núcleo paramagnético, la permeabilidad de la región dentro de la bobina es la del vacío,  $\mu_0$ . En este caso, la relación entre  $B$  y  $H$  está dada de acuerdo con (21.2.20) por  $B = \mu_0 H$ . Como ya se tiene calculada  $H$ , el valor de  $B$  se sigue directamente de aquí. De estos resultados es evidente que el núcleo paramagnético adquiere una corriente de magnetización que, aunque pequeña en comparación con la corriente verdadera  $NI$ , es perceptible. A su vez, esta corriente de magnetización provoca un

aumento pequeño pero detectable en el campo  $B$  dentro de la bobina, lo que aumenta el flujo magnético a través de la misma, y que a su vez incrementa la inductancia de la bobina. La permeabilidad relativa  $K_m$  del núcleo está dada por (21.2.2) por

$$K_m = 1 + \chi_m = 1.000459$$

Cuando se emplea un núcleo ferromagnético lineal de permeabilidad relativa  $K_m = 1\,200$  en vez del núcleo paramagnético, de (21.2.22) se encuentra que  $\chi_m = K_m - 1 = 1\,199$ . El campo  $H$  se determina como antes, y como  $I_c = NI = (3.5)(3412) = 11\,942 \text{ A}$  como antes, su valor no cambia. Ahora, la magnetización está dada por  $M = \chi_m H = (1199)(19\,000) = 2.28 \times 10^7 \text{ A/m}$ . En este caso, la permeabilidad magnética es  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m) = (1200)(4\pi \times 10^{-7}) = 1.508 \times 10^{-3} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$ , en tanto que  $B = \mu H = (1.508 \times 10^{-3})(19\,000) = 28.7 \text{ Wb/m}^2$ . Ahora, la corriente de magnetización está dada por  $I_m = 2\pi r M = (2\pi)(0.1)(2.28 \times 10^7) = 1.43 \times 10^7 \text{ A}$ , una intensidad de corriente verdaderamente formidable. Esta intensa corriente superficial de magnetización provoca un aumento muy grande en el campo  $B$  y en el flujo magnético, que a su vez hace aumentar la inductancia de la bobina en mucho mayor grado de lo que sería sin el núcleo ferromagnético. Está presente, aunque no se puede ver ni sentir, mientras circula alrededor de la superficie del núcleo magnético, además de que fácilmente se observa su efecto en la inductancia de la bobina.

Sin embargo, debe notarse que a menudo las sustancias ferromagnéticas presentan comportamiento magnético que no puede describirse ni siquiera aproximadamente por la ley lineal (21.2.19), que en este caso se supone válida. En algunas circunstancias, especialmente en las que participan valores pequeños de  $H$ , hay determinados tipos de sustancias ferromagnéticas, como el hierro dulce, que se comportan en forma casi lineal, y su magnetización está bien descrita por una susceptibilidad o una permeabilidad constantes. No obstante, para otros materiales ferromagnéticos, especialmente para aquellos con los que es fácil elaborar imanes permanentes, el resultado

es muy distinto, y suponer magnetización lineal o permeabilidad constante puede producir resultados falsos o sumamente engañosos. Este caso se estudiará en una sección posterior, con detalle.

### 21.3 Sustancias diamagnéticas y paramagnéticas: teoría de Larmor del diamagnetismo

En toda sustancia dada, hay una serie de efectos magnéticos importantes para determinar la susceptibilidad magnética total del mismo. Algunos de estos efectos individuales pueden llevar al diamagnetismo, en tanto que otros pueden ocasionar contribuciones paramagnéticas. La cuestión de la susceptibilidad total del material y de si es paramagnética o diamagnética la susceptibilidad neta, depende de la importancia relativa de estos efectos separados e independientes en la sustancia en estudio. Por tanto, es razonable considerar los efectos más importantes bajo el mismo epígrafe general.

En las sustancias cuyos átomos poseen momentos dipolares magnéticos netos permanentes, por lo común estos momentos son los que realizan la contribución predominante a la susceptibilidad magnética. Como tales momentos atómicos tienden a alinearse en la dirección del campo aplicado, la magnetización resultante neta también está en esa dirección, por lo que los materiales son paramagnéticos. Sin embargo, en algunos otros materiales puede suceder que las corrientes circulantes debidas a los electrones atómicos den un momento magnético orbital total igual a *cero*. Aunque los electrones puedan tener valores no nulos de cantidad de movimiento angular, esto sucede porque hay *pares* de electrones cuyos momentos cinéticos son iguales y opuestos, lo que da una cantidad de movimiento angular total igual a *cero*, por lo que de acuerdo con (21.2.28), origina un momento magnético neto nulo. También puede suceder que los momentos magnéticos del espín neto estén agrupados por pares, y que den *cero* de la misma manera. Aunque los átomos de estos tipos de sustancias tienen momento magnético nulo en ausencia de campos externos, cuando se aplica un campo magnético, el flujo magnéti-

co cambiante que produce puede interactuar con las trayectorias de corriente circulante asociadas a los electrones atómicos, de manera que aparece un momento magnético *inducido*. De acuerdo con la ley de Lenz, la dirección de este momento magnético de inducción debe ser *opuesta* a la del campo magnético aplicado, por lo que este efecto lleva a una susceptibilidad *diamagnética* débil. Naturalmente, este efecto diamagnético existe incluso en materiales sin momentos magnéticos atómicos netos, pero en tales casos el efecto generalmente está opacado por el paramagnetismo más intenso, debido a los momentos atómicos permanentes. El débil diamagnetismo inducido asociado a las corrientes electroicas en circulación, se conoce como *diamagnetismo de Larmor*, en honor de Sir Joseph Larmor, el científico inglés que lo descubrió.

En las sustancias diamagnéticas y las paramagnéticas, es importante notar que aunque el alineamiento de los momentos atómicos está influido por el campo aplicado externo, la *acción magnética de los momentos atómicos entre sí es despreciable*. Esto se debe a que los campos magnéticos que experimentan los átomos por efecto de los momentos magnéticos de otros átomos son bastante pequeños, y también porque la energía de campo magnético asociada a los momentos atómicos es menor que la energía térmica de los átomos.

En la figura 21.6, se puede ver como ocurre el diamagnetismo de Larmor. La ilustración muestra dos electrones que sólo pueden moverse en sentidos contrarios en una órbita circular de radio fijo  $r_0$  alrededor de un núcleo cargado positivamente, cuya carga total es  $+Ze$ , siendo  $Z$  un entero. Cuando el campo magnético externo es nulo, la fuerza electrostática  $-e(+Ze)/4\pi\epsilon_0 r_0^2$  sobre cada electrón es la fuerza centrípeta total, que puede hacerse igual a la aceleración centrípeta  $-mr_0\omega_0^2$ . En consecuencia, para cualquiera de los electrones se tiene

$$mr_0\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad \text{o sea que} \quad \omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mr_0^3} \quad (21.3.1)$$

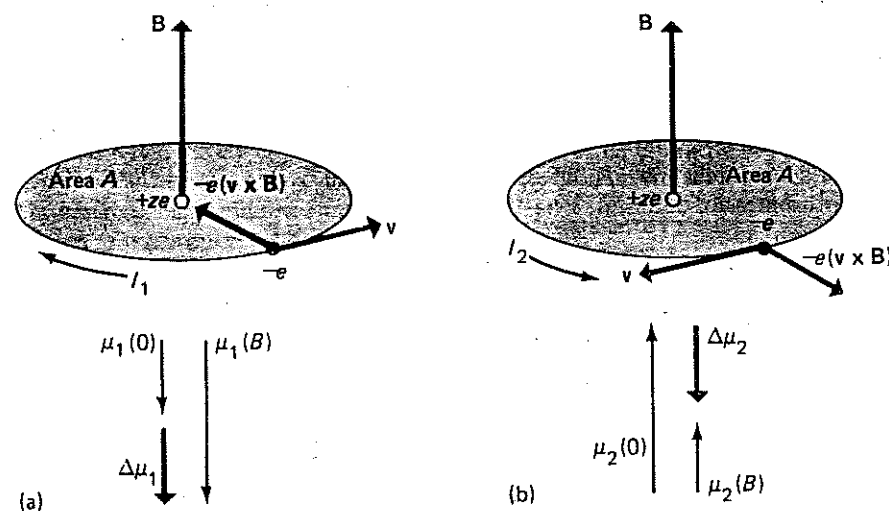


FIGURA 21.6. Fuerzas magnéticas ejercidas sobre electrones atómicos que circulan (a) en sentido contrario al del reloj y (b) en el sentido del reloj.

En ausencia del campo magnético externo, ambos electrones giran con la misma velocidad angular  $\omega_0$ , aunque en sentidos opuestos. Sus momentos magnéticos individuales están dados por el producto de la corriente y el área de la órbita, de donde, como en el ejemplo 21.2.1,

$$\mu_{m1}(0) = \frac{(-e)\omega_0}{2\pi} (\pi r_0^2) = -\frac{1}{2} e\omega_0 r_0^2 \quad (21.3.2)$$

en tanto que

$$\mu_{m2}(0) = \frac{(-e)(-\omega_0)}{2\pi} (\pi r_0^2) = +\frac{1}{2} e\omega_0 r_0^2 \quad (21.3.3)$$

De aquí, es claro que para  $B = 0$ , los momentos magnéticos de los electrones se cancelan, sin dejar un momento magnético neto. También se supone que los momentos magnéticos de espín son opuestos de manera semejante, y que su suma también da *cero*, del mismo modo.

Cuando existe el campo magnético  $B$ , además de la atracción electrostática hay fuerzas magnéticas  $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  que actúan sobre los electrones en las direcciones que se indican en la figura 21.6. Para el primer electrón, como se

muestra en (a), esta fuerza magnética incrementa la fuerza centrípeta, y por tanto, la aceleración centrípeta  $-mr\omega^2$ . En consecuencia, la velocidad angular de este electrón se hace mayor que antes, cambiando el momento magnético en una cantidad  $\Delta\mu_{m1}$ . Pero para el segundo electrón, como indica en (b), la fuerza magnética disminuye la fuerza centrípeta, por lo que hace que la velocidad angular de este electrón sea menor que antes. Su momento magnético cambia en la cantidad  $\Delta\mu_{m2}$ , como se muestra en la figura 21.6, b. Puesto que  $\Delta\mu_{m1}$  y  $\Delta\mu_{m2}$  están en direcciones opuestas a  $B$ , el material es diamagnético.

Se pueden calcular los momentos magnéticos, y después la susceptibilidad, escribiendo la fuerza radial neta sobre cada electrón y haciéndola igual a la aceleración centrípeta  $-mr\omega^2$ . Para el primer electrón, en la figura 21.6, a, se tiene

$$F_1 = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -mr_0\omega^2 \quad (21.3.4)$$

Pero, de (21.3.1),  $Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r_0^3) = mr_0\omega_0^2$ , en que  $\omega_0$  es la velocidad angular inicial en ausen-



campo  $B$ . Más aún, como  $v = r_0\omega$ , se describe (21.3.4) como

$$mr_0\omega_0^2 - er_0\omega B = -mr_0\omega^2 \quad (21.3.5)$$

acción correspondiente para el segundo electrón es la misma, excepto porque el término  $-B$ , que representa la fuerza magnética  $B$ , es de signo contrario; entonces,

$$mr_0\omega_0^2 + er_0\omega B = -mr_0\omega^2 \quad (21.3.6)$$

Siendo ahora ambos miembros de (21.3.5) y (21.3.6) entre  $mr_0^2$ , se pueden escribir ecuaciones como

$$\omega_L - \omega_0^2 = 0 \quad (21.3.7)$$

$$\omega_L - \omega_0^2 = 0 \quad (21.3.8)$$

La frecuencia de Larmor  $\omega_L$  está definida por

$$\frac{eB}{2m} \quad (21.3.9)$$

Siendo  $\omega_L^2$  a ambos lados de la ecuación

$$\omega_L^2 + \omega_0^2 = \omega_0^2 + \omega_L^2$$

$$\omega_L^2 = \omega_0^2 + \omega_L^2 \quad (21.3.10)$$

De (21.3.1) y (21.3.9), es evidente que se puede expresar la relación de  $\omega_L$  a  $\omega_0$  como

$$\frac{\sqrt{\pi r_0^3}}{mZ} \quad (21.3.11)$$

Se determinará el máximo valor que alcanza esta relación. El mayor valor se logra experimentalmente para  $B$  de 100 Wb/m<sup>2</sup>. En la mayoría de sustancias sólidas, un mol ocupa un volumen aproximado de 10 cm<sup>3</sup>, o sea 10<sup>-5</sup> m<sup>3</sup>. En consecuencia, típicamente hay cerca de 6 × 10<sup>23</sup> átomos por cm<sup>3</sup>, o sea 6 × 10<sup>28</sup> átomos por m<sup>3</sup>, lo que corresponde a un volumen atómico de 1.7 × 10<sup>-29</sup> m<sup>3</sup> por átomo. Si se asume una raíz cúbica, se obtiene 2.6 × 10<sup>-10</sup>, que

debe corresponder al diámetro atómico 2r<sub>0</sub>. En consecuencia, es razonable hacer r<sub>0</sub> igual a 1.3 × 10<sup>-10</sup> m. También, la relación  $\omega_L/\omega_0$  será máxima cuando Z tenga el mínimo valor, de manera que se hace Z = 1. Sustituyendo estos valores en (21.3.11) junto con  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F/m y  $m = 9.11 \times 10^{-31}$  kg, se encuentra

$$\frac{\omega_L}{\omega_0} = (100) \left( \frac{(\pi)(8.85 \times 10^{-12})(1.3 \times 10^{-10})^3}{(9.11 \times 10^{-31})(1)} \right)^{1/2} = 8.2 \times 10^{-4}$$

Entonces, es claro que  $\omega_L \ll \omega_0$  en todas las condiciones experimentalmente logrables. Por tanto, se puede despreciar  $\omega_L^2$  sin mayores consecuencias en el segundo miembro de (21.3.10) en comparación con  $\omega_0^2$  y, sacando la raíz cuadrada en ambos lados puede escribirse

$$\omega = \omega_0 + \omega_L = \omega_1 \quad (21.3.12)$$

Para el segundo electrón, se suma  $\omega_L^2$  a ambos miembros de (21.3.8):

$$(\omega + \omega_L)^2 = \omega_0^2 + \omega_L^2 \quad (21.3.13)$$

Nuevamente, es posible despreciar  $\omega_L^2$  en comparación con  $\omega_0^2$  a la derecha, y sacando la raíz cuadrada en ambos lados, se obtiene para la frecuencia angular  $\omega_2$  del segundo electrón

$$\omega = \omega_0 - \omega_L = \omega_2 \quad (21.3.14)$$

Ahora, el momento magnético debido al primer electrón es

$$p_{m1} = I_1 A = \frac{-e\omega_1}{2\pi} \pi r_0^2 = -\frac{er_0^2}{2} (\omega_0 + \omega_L) \quad (21.3.15)$$

en tanto que para el segundo,

$$p_{m2} = I_2 A = \frac{(-e)(-\omega_2)}{2\pi} \pi r_0^2 = \frac{er_0^2}{2} (\omega_0 - \omega_L) \quad (21.3.16)$$

Luego entonces, el momento magnético total por átomo es

$$p_m = p_{m1} + p_{m2} = -er_0^2\omega_L = -er_0^2 \frac{eB}{2m} = -\frac{e^2 r_0^2 B}{2m} \quad (21.3.17)$$

El momento magnético por unidad de volumen es el momento magnético por átomo, multiplicado por el número de átomos por volumen unitario,  $n$ . Sin embargo, por definición, esto también representa la magnetización  $M$ . También, como la susceptibilidad es la magnetización por unidad de intensidad magnética y como en el espacio vacío en que los electrones se mueven alrededor del núcleo  $H = B/\mu_0$ , finalmente se puede escribir

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0}{B} n p_m = -\frac{\mu_0 n e^2 r_0^2}{2m} \quad (21.3.18)$$

Para un "átomo" típico formado según el modelo burdo adoptado aquí, ya se ha calculado que el radio  $r_0$  es alrededor de 1.3 × 10<sup>-10</sup> m y que el número de átomos por unidad de volumen,  $n$ , es cerca de 6 × 10<sup>28</sup> por m<sup>3</sup>. Sustituyendo estos valores junto con los valores conocidos para las otras cantidades en (21.3.18), se encuentra

$$\chi_m = -\frac{(4\pi \times 10^{-7})(6 \times 10^{28}) \times (1.6 \times 10^{-19})^2 (1.3 \times 10^{-10})^2}{(2)(9.11 \times 10^{-31})}$$

o

$$\chi_m = -1.8 \times 10^{-5}$$

Esta susceptibilidad diamagnética es débil pero medible. Se notará que concuerda, al menos en el orden de magnitud, con los valores de susceptibilidad listados en la tabla 21.1 para sustancias diamagnéticas típicas. También, de (21.3.18), es evidente que la susceptibilidad diamagnética de Larmor debe ser esencialmente independiente de la temperatura; esto también concuerda en forma general con los experimentos.

No debe esperarse más que esto, pues en efecto, el modelo adoptado de "átomo" es bastante burdo. En realidad, los electrones no circulan en órbitas circulares, ni permanecen a distancias fijas del núcleo. En átomos con varios electrones hay fuerzas electrostáticas entre los propios electrones, igual que entre los electrones individuales y el núcleo, que aquí se despreciaron totalmente. Asimismo, se usó la mecánica clásica, en lugar de la mecánica cuántica, para describir el comportamiento del sistema atómico; como se sabe, este procedimiento puede producir resultados incorrectos. Por último, en cualquier muestra que contenga muchos átomos, no se puede esperar que todos estén moviéndose en un plano perpendicular al campo  $B$  aplicado, como se supuso arriba. De cualquier modo, la teoría de Larmor incorpora con éxito los mecanismos físicos de los que surge el diamagnetismo atómico real.

## 21.4 Paramagnetismo clásico de sustancias que tienen momentos atómicos netos permanentes

En el caso de sustancias cuyos átomos o moléculas tienen momentos magnéticos permanentes, estos momentos experimentan fuerzas magnéticas que tienden a alinearlos paralelamente a campos magnéticos aplicados en el exterior. En consecuencia, estos materiales son paramagnéticos. Al mismo tiempo, la energía térmica aleatoria de los átomos de la sustancia tiende a destruir esta alineación y producir una disposición completamente desordenada de momentos atómicos, cuya suma para el momento magnético total es igual a cero. En los gases, esta energía térmica es casi totalmente igual a la energía cinética de las moléculas, y la desordenación de los momentos atómicos ocurre en las colisiones intermoleculares. En las sustancias sólidas, la energía térmica se manifiesta como energía de vibración de la red cristalina, la que es responsable del desordenamiento de los momentos. En los líquidos están presentes ambos efectos en forma apreciable. Pero en todas las sustancias hay una oposición entre la influencia alineadora del campo aplicado exteriormente y el



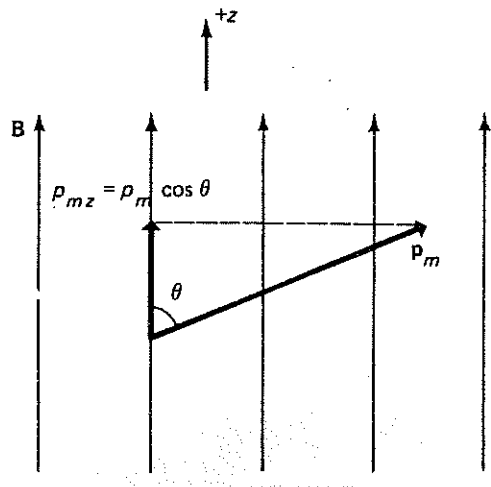


FIGURA 21.7. Contribución de momento magnético a un dipolo magnético parcialmente alineado.

efecto de desorden asociado a la energía térmica interna de la sustancia, como se ilustra en la figura 21.1. En general, el resultado de esta pugna es producir una alineación *parcial* de momentos, cuya extensión depende de la intensidad del campo externo y de la temperatura, como se muestra en la figura 21.1 c.<sup>2</sup>

Si no hay campo magnético externo, todos los dipolos atómicos están orientados al azar; la componente vertical  $z$  *promedio* de sus momentos magnéticos será cero, ya que los valores positivos y negativos de esa componente (o de cualquiera otra) ocurren con igual probabilidad. Si se aplica un campo externo a lo largo de una dirección dada, como el eje  $z$ , mostrado en la figura 21.7, habrá más momentos atómicos con componentes  $z$  *positivas*, que negativas. Entonces se tendrá alguna compo-

<sup>2</sup> Los resultados que se obtendrán en esta sección relativos a la susceptibilidad magnética de sustancias cuyos átomos tienen momentos magnéticos atómicos permanentes, son igualmente aplicables al estudio de la susceptibilidad eléctrica de dieléctricos, cuyos átomos tienen momentos dipolares eléctricos permanentes. Estos cálculos se hacen exactamente de la misma manera, sustituyendo el momento dipolar eléctrico del átomo en vez del momento magnético. La ecuación (17.6.9) de la sección 17.6 es el análogo exacto de la ecuación (21.4.20) en esta sección.

nente  $z$  promedio *positiva* del momento atómico. De la figura 21.7, es claro que, como

$$p_{mz} = p_m \cos \theta \quad (21.4.1)$$

lo que quiere decir que el valor medio de la componente  $z$  de todos los momentos atómicos en la muestra,  $\bar{p}_{mz}$ , está relacionado con el ángulo medio  $\theta$  que forma un momento atómico con el campo magnético mediante

$$\bar{p}_{mz} = p_m \overline{\cos \theta} \quad (21.4.2)$$

Ya que no hay componentes de campo magnético a lo largo de las direcciones  $x$  y  $y$ , es evidente que debe ser cero el valor medio de los momentos magnéticos atómicos a lo largo de cada una de esas direcciones. Entonces el magnético total de la muestra por unidad de volumen, que por definición es la magnetización  $M$ , se puede obtener simplemente multiplicando el momento atómico promedio (21.4.2) por el número de átomos por volumen unitario para dar

$$M = n\bar{p}_{mz} = np_m \overline{\cos \theta} \quad (21.4.3)$$

En consecuencia, el problema de encontrar la magnetización de la muestra equivale a hallar el valor promedio del coseno del ángulo entre un momento atómico y el campo externo.

De las ecuaciones (19.2.4) y (16.6.30) se sabe que la energía potencial de un dipolo magnético que forma un ángulo  $\theta$  con un campo magnético, es

$$U_m = -p_m B \cos \theta \quad (21.4.4)$$

De acuerdo con la ley de distribución de la energía de Maxwell-Boltzmann, la probabilidad de que se encuentre un momento atómico orientado dentro del área sombreada  $dA$  que se muestra en la figura 21.8 será

$$C e^{-U_m/kT} dA \quad (21.4.5)$$

en que  $C$  es una constante. Debe notarse cuidadosamente que la probabilidad de orientación dentro del área  $dA$  es proporcional al tamaño de esa área, al igual que la probabilidad de que las moléculas tengan intervalos dados de velocidad —expresados por (13.6.7) o por (13.6.10)— es proporcional al tamaño del

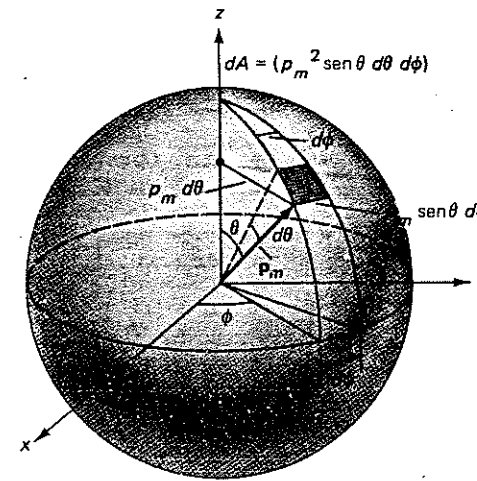


FIGURA 21.8. El cálculo de la probabilidad de que un dipolo orientado al azar de momento  $p_m$  está dentro del área sombreada  $dA$  que se ilustra, depende sencillamente de evaluar la razón del área  $dA$  al área total de la esfera.

elemento en el espacio de velocidades que define el intervalo de velocidad en cuestión.

Si se llama  $N(\theta, \phi)dA$  al número de dipolos atómicos orientados dentro del área sombreada  $dA$  en la figura 21.8, entonces, de (21.4.5) y de (21.4.4),

$$N(\theta, \phi) dA = C e^{p_m B \cos \theta / kT} dA \quad (21.4.6)$$

El valor medio de  $\cos \theta$  para todos los dipolos atómicos se obtiene entonces multiplicando el número de dipolos dentro del área  $dA$  por  $\cos \theta$ , sumando esa contribución en todas las orientaciones posibles mediante integración, y dividiendo entre el número total de dipolos  $N_0$ , que por (21.4.6), está dado por

$$N_0 = \int N(\theta, \phi) dA \quad (21.4.7)$$

El cálculo equivale en todos aspectos al que se desarrolló en el ejemplo 13.6.1, cuando se determinó la velocidad media de una molécula en un gas ideal. Ya que el área  $dA$ , de la figura 21.8, puede expresarse en términos de las co-

ordenadas angulares  $\theta$  y  $\phi$  y la magnitud de  $p_m$  mediante

$$dA = p_m^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (21.4.8)$$

se puede escribir

$$\begin{aligned} \overline{\cos \theta} &= \frac{\int N(\theta, \phi) \cos \theta dA}{\int N(\theta, \phi) dA} \\ &= \frac{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{p_m B \cos \theta / kT} \cos \theta \sin \theta d\phi d\theta}{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{p_m B \cos \theta / kT} \sin \theta d\phi d\theta} \quad (21.4.9) \end{aligned}$$

En esta expresión se cancelaron los factores constantes  $C$  y  $p_m^2$  del numerador y denominador de la expresión del lado derecho, en la que también es evidente que los integrados del numerador y del denominador son completamente *independientes* del ángulo acimutal  $\phi$ . Siendo esto cierto, tales factores son *constantes* en relación con la integración respecto de  $\phi$ , por lo que pueden sacarse del signo integral relativo a esa, con el resultado de que

$$\begin{aligned} \overline{\cos \theta} &= \frac{\int_0^{\pi} e^{p_m B \cos \theta / kT} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi}{\int_0^{\pi} e^{p_m B \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi} \\ &= \frac{\int_0^{\pi} e^{p_m B \cos \theta / kT} \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi} e^{p_m B \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta} \quad (21.4.10) \end{aligned}$$

La integración restante en  $\theta$  puede hacerse fácilmente teniendo

$$\alpha = p_m B / kT \quad (21.4.11)$$

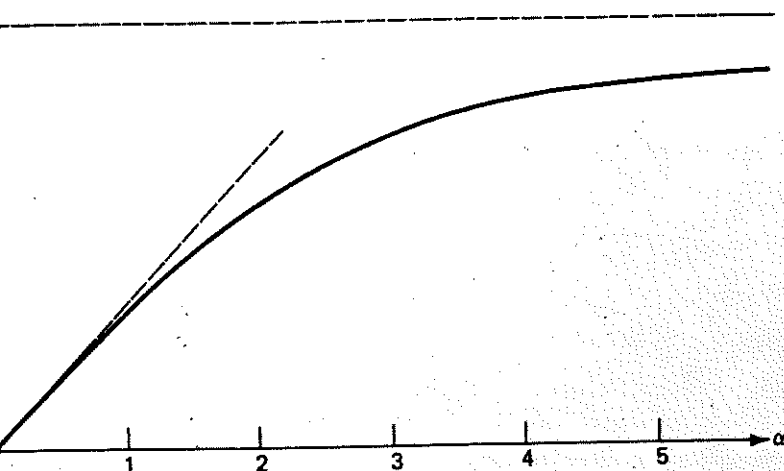
y también

$$w = \cos \theta \quad dw = -\sin \theta d\theta \quad (21.4.12)$$

Sustituyendo lo anterior en (21.4.10) y notando, en los límites de las integrales, que  $w = -1$  cuando  $\theta = \pi$  y  $w = +1$  cuando  $\theta = 0$ ,

$$\overline{\cos \theta} = \frac{\int_{-1}^{+1} w e^{\alpha w} dw}{\int_{-1}^{+1} e^{\alpha w} dw} = \frac{\left[ \frac{e^{\alpha w}}{\alpha} (w - 1) \right]_{-1}^{+1}}{\left[ \frac{e^{\alpha w}}{\alpha} \right]_{-1}^{+1}} \quad (21.4.13)$$

α)


 A 21.9. Gráfica de la función  $f(\alpha)$  definida por la ecuación (21.4.15), en función de  $\alpha$ .

$$= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{e^{\alpha}(\alpha - 1) + e^{-\alpha}(\alpha + 1)}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\alpha(e^{\alpha} + e^{-\alpha}) - (e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} \right)$$

$$= \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \quad (21.4.14)$$

a se obtiene la magnetización  $M$  de (21.4.3):

$$np_m \left( \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) = np_m f(\alpha) \quad (21.4.15)$$

La susceptibilidad magnética se determina de la ecuación (21.4.19) como la relación de la magnetización con la intensidad magnética  $H$ . Pero la susceptibilidad que experimentan los momentos magnéticos individuales de los átomos es esencialmente la del vacío, ya que, después de to-

do, son magnéticamente independientes entre sí. En consecuencia, se puede escribir

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{\mu_0 np_m f(\alpha)}{B} \quad (21.4.16)$$

en que  $f(\alpha)$  se define mediante (21.4.15).

La expresión  $f(\alpha)$  se muestra graficada en función de  $\alpha$  ( $= p_m B/kT$ ) en la figura 21.9. Para bajos valores de  $\alpha$ , que corresponden a campos magnéticos relativamente pequeños o a temperaturas relativamente altas, es la función *lineal* de  $\alpha$ , con pendiente  $1/3$ , lo que no se ve fácilmente de (21.4.15); pero, esto no es difícil de demostrar, partiendo de las integrales originales que se muestran en (21.4.13). Para  $\alpha \ll 1$ , puede escribirse en esas integrales, usando el desarrollo en serie de potencias para  $e^{\alpha}$ ,

$$e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \quad (21.4.17)$$

Pero para valores de  $\alpha$  pequeños en comparación con la unidad, los términos en  $\alpha^2$ ,  $\alpha^3$ ,

etc., son despreciables en comparación con los dos primeros. En consecuencia, para  $\alpha \ll 1$ , se puede escribir

$$e^{\alpha} \approx 1 + \alpha$$

Sustituyendo esto en las integrales de (21.4.13), se encuentra

$$f(\alpha) = \frac{\int_{-1}^1 (w + \alpha w^2) dw}{\int_{-1}^1 (1 + \alpha w) dw} = \frac{\left[ \frac{w^2}{2} + \frac{\alpha w^3}{3} \right]_{-1}^1}{\left[ w + \frac{\alpha w^2}{2} \right]_{-1}^1} = \frac{\alpha}{3} \quad (21.4.18)$$

que es el resultado mencionado antes. Pero de (21.4.11),  $\alpha = p_m B/kT$ . En consecuencia, de acuerdo con (21.4.15), en condiciones para las que el valor de  $\alpha$  es *pequeño* en comparación con la unidad, la magnetización será

$$M = \frac{np_m^2 B}{3kT} \quad (21.4.19)$$

en tanto que, de (21.4.16), la susceptibilidad es

$$\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{\mu_0 np_m^2}{3kT} \quad (21.4.20)$$

En estas circunstancias, la susceptibilidad magnética es constante en el sentido de que no depende del campo magnético. Pero es evidente que sí depende inversamente de la temperatura. Esta dependencia ocurre debido a que conforme aumenta la temperatura, también aumenta la energía interna térmica aleatoria de los átomos o moléculas, lo que tiende a disminuir el grado de alineación de los momentos atómicos para cualquier valor fijo del campo externo.

Para campos magnéticos muy grandes, o para temperaturas muy bajas, el valor de  $\alpha$  puede exceder de la unidad, y en condiciones extremas, puede incluso ser mucho mayor que la unidad. Ahora la magnetización, expresada por la ecuación (21.4.15) o por la figura 21.9, alcanza un *valor de saturación* asintótico de  $np_m$ , ya que en estas condiciones  $f(\alpha)$  se aproxima a la unidad. En este límite se tiende a una condición de alineamiento completo de los di-

polos atómicos, en la dirección del campo externo. Entonces es de esperar que el momento magnético por unidad de volumen sea igual al producto del momento atómico  $p_m$  por el número de átomos por volumen unitario, que es precisamente lo que predijeron los cálculos anteriores. A la temperatura ambiente, los campos magnéticos que se requieren para hacer a  $\alpha$  mucho mayor que la unidad, y por tanto, saturar la magnetización, son tan grandes que no pueden lograrse experimentalmente; pero a temperaturas más bajas se necesitan campos proporcionalmente menores. Esto se ilustra por la definición de  $\alpha$  en (21.4.11) y también por la figura 21.10.

De nuevo, en este cálculo se supone que los átomos de la sustancia obedecen las leyes de la mecánica clásica en todos aspectos. Clásicamente, de acuerdo con (21.4.4), la energía potencial del átomo en el campo magnético puede tomar cualquier valor, desde  $U_m = -p_m B$  que corresponde a  $\theta = 0$ , hasta  $U_m = +p_m B$ , que corresponde a  $\theta = 180^\circ$ . Pero naturalmente, se sabe que a veces las leyes de la mecánica clásica no describen bien el comportamiento de los sistemas atómicos, y que en esos casos debe acudirse a la mecánica cuántica. Este es uno de tales casos. La teoría cuántica predice que hay una cantidad de valores permitidos *discretos* de energía que están entre  $-p_m B$  y  $+p_m B$ , y que corresponde a determinados valores discretos de  $\cos \theta$  en (21.4.4). En consecuencia, las leyes de la mecánica cuántica no permiten al momento atómico tener todas las orientaciones posibles con respecto a la dirección del campo magnético, sino sólo una serie discreta de orientaciones permitidas, que corresponden a determinados valores discretos también permitidos del ángulo  $\theta$ . Esto introduce complicaciones adicionales en el cálculo de la susceptibilidad que modifican un poco la forma de la función  $f(\alpha)$ . Sin embargo tales modificaciones son menores, y no afectan significativamente la forma general de la curva que se muestra en la figura 21.9, ni ninguna de las conclusiones físicas que se obtuvieron del cálculo clásico, aunque, desde luego, el resultado de la mecánica cuántica concuerda mejor con los datos experimentales que el de la mecánica clásica, que se obtuvo antes.

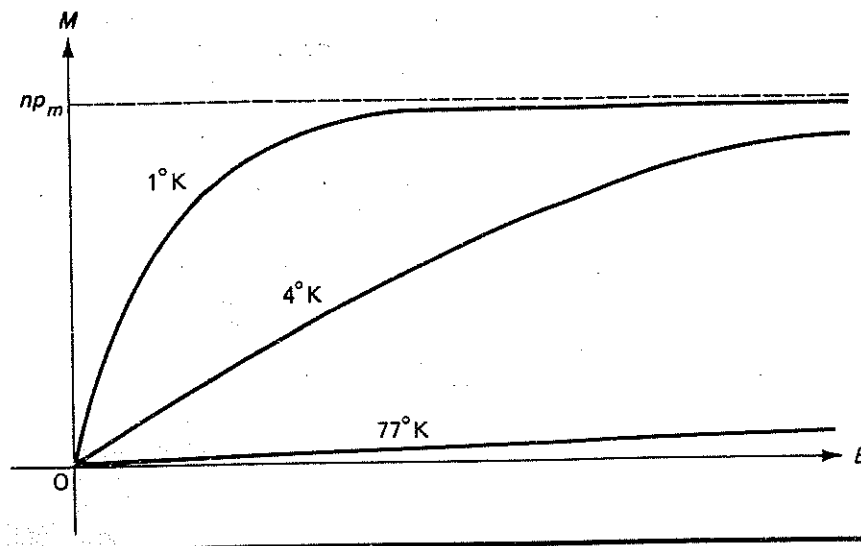


FIGURA 21.10. Gráfica de la magnetización en función de la inducción magnética, de acuerdo con la ecuación (21.4.15), para diversos valores de la temperatura.

Si en la ecuación (21.4.20) se sustituyen los valores típicos  $n = 6 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  y  $p_m = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , se encuentra que para la temperatura ambiente (300K), se obtiene  $\chi_m = 5.2 \times 10^{-4}$ , lo que concuerda razonablemente bien con los valores de  $\chi_m$  listados en la tabla 21.1 para sales paramagnéticas como  $\text{MnF}_2$  o  $\text{CoCl}_2$ , pero es mucho más alto que las susceptibilidades observadas en el laboratorio para metales paramagnéticos, como el aluminio o el magnesio. En este tipo de sustancias, el paramagnetismo se debe sólo a los electrones de conducción, y los iones metálicos en los puntos de la red cristalina no tienen momentos magnéticos netos, debido a que sus momentos orbitales y sus momentos de espín están en pares y su suma es igual a cero. El paramagnetismo que muestran los electrones de conducción se debe sólo a sus momentos magnéticos de espín, puesto que no tienen movimiento orbital. Pero muchos de los electrones no pueden alinearse magnéticamente con un campo aplicado, pues entonces tendrían que ocupar un estado cuántico de energía que ya está lleno. Como las leyes de la mecánica cuántica permiten a un electrón ocupar sólo

un estado cuántico dado, lo anterior no puede ocurrir. Entonces este efecto reduce mucho su susceptibilidad paramagnética, lo que produce susceptibilidades comparativamente bajas, que se observan en la mayoría de las sustancias metálicas paramagnéticas.

#### EJEMPLO 21.4.1

Determinar el valor de la inducción magnética necesario para "saturar" el momento magnético de una sustancia paramagnética típica, al grado de que la magnetización alcance 80% del valor asíntotico  $np_m$  a la temperatura de 1K. ¿Qué valor de campo se necesita para producir el mismo efecto a 77K, el punto de ebullición del nitrógeno? ¿Y a la temperatura ambiente de 300K? Se supondrá que  $p_m = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .

La magnetización es proporcional a  $f(\alpha)$ . De la figura 21.9, es evidente que  $\alpha$  debe ser bastante grande en comparación con la unidad, para que  $f(\alpha)$  se aproxime al valor asíntotico de 1. Sin embargo, en este caso,  $\alpha$  es muy grande y  $e^{-\alpha}$  es muy pequeño, de manera que el término que contiene estas cantidades expo-

nenciales en (21.4.15) se aproxima mucho a la unidad, por lo que puede escribirse

$$f(\alpha) \cong 1 - \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha \gg 1) \quad (21.4.21)$$

Para que la magnetización sea 80% del valor de saturación  $np_m$ ,  $f(\alpha)$  debe tener el valor de 0.80, de donde —de acuerdo con (21.4.21)— se obtiene  $\alpha = 5$ . Pero por (21.4.11) esto requiere que

$$\frac{p_m B}{kT} = 5$$

$$B = 5 \frac{kT}{p_m} \quad (21.4.22)$$

Para  $T = 1 \text{ K}$ , esto da

$$B = \frac{(5)(1.38 \times 10^{-23})(1.0)}{(9.27 \times 10^{-24})} = 7.44 \text{ Wb/m}^2$$

Este es un campo magnético muy grande, pero posible de producir en el laboratorio sin demasiada dificultad. El campo correspondiente a 77 K sería 77 veces mayor, de acuerdo con (21.4.22), por lo que sería de  $573 \text{ Wb/m}^2$ . A 300 K se requeriría un campo de  $2230 \text{ Wb/m}^2$  para lograr el mismo grado de saturación. Los campos de esta magnitud están mucho más allá de lo que puede lograrse experimentalmente. En efecto, a temperaturas de 77 K o mayores, es casi imposible observar nada que no esté en la porción lineal de la curva de magnetización que corresponde a la condición  $\alpha \ll 1$ .

### 21.5 Materiales ferromagnéticos

En las sustancias ferromagnéticas como el hierro, el níquel y el cobalto, hay interacciones tan intensas entre los momentos magnéticos de átomos vecinos que los momentos atómicos pueden alinearse con poca o ninguna ayuda de campos aplicados exteriormente. Es natural que si hubiera campos externos presentes, los momentos atómicos se alinearían en la dirección de éstos; en realidad, casi se alinean por completo, incluso cuando se tienen campos externos que no sean dema-

siado intensos. En consecuencia, los materiales ferromagnéticos presentan permeabilidades magnéticas muy grandes, y en general, se pueden imantar o magnetizar permanentemente. Puesto que los momentos atómicos casi se alinean del todo, incluso con campos externos relativamente poco intensos el valor saturante de la magnetización se obtiene fácilmente con valores pequeños de la intensidad magnética, y la magnetización  $n\mu$  es una función lineal del campo aplicado  $H$ . Como consecuencia de ello, la susceptibilidad magnética de las sustancias ferromagnéticas no es constante, sino que varía con la intensidad del campo externo  $H$ .

Sería tentador llegar a la conclusión prematura de que las fuerzas que producen el alineamiento magnético en los materiales ferromagnéticos, son las fuerzas dipolares magnéticas que ejercen entre sí los imanes atómicos individuales, lo que no puede ser cierto. Estas fuerzas magnéticas no son significativamente más intensas en los materiales ferromagnéticos que en las sustancias paramagnéticas, donde, como se ha visto, son demasiado débiles para oponerse a los efectos aleatorizantes que se deben a los movimientos atómicos o moleculares producidos térmicamente. Los momentos atómicos en las sustancias ferromagnéticas, como en las que son paramagnéticas, son demasiado débiles, incluso para alinearse por sí solos.

En toda sustancia cristalina sólida hay fuerzas de repulsión entre átomos vecinos a medida que comienzan a traslaparse las regiones alrededor de los núcleos ocupadas por los electrones atómicos. En realidad estas fuerzas son las que mantienen separados a los átomos y las que establecen una condición de equilibrio que da su carácter al espaciado interatómico del cristal. Cuando se trata de comprimir una sustancia cristalina sólida, se perciben esas fuerzas: permiten al material resistir la compresión, en vez de que se colapse por la acción de las fuerzas aplicadas. Las características de la nube de electrones que rodea al núcleo de cada átomo determinan la magnitud y dirección de esas fuerzas. A su vez, las características de la nube dependen del número de electrones, y de cómo interactúan éstos según las leyes de la mecánica cuántica.

acción electrostática entre los electrones núcleo atómico, y la repulsión también electrostática entre un electrón y otro contribuye a la configuración resultante de la nube de electrones, pero no en forma simple como se supone por la ley de Coulomb y las leyes de la mecánica clásica. Las leyes de la mecánica cuántica modifican en determinadas formas la forma en que estas partículas interactúan, una de las cuales es que prohíben que los electrones de un solo átomo ejecuten la misma forma de movimiento orbital. Esta prohibición es importante en la mecánica cuántica de los electrones en los sistemas atómicos y en los cristales, y se le conoce como *principio de exclusión de Pauli*, el cual se verá más adelante, y con mayor detalle en el Capítulo 28. De todas formas, se puede afirmar que las fuerzas entre átomos en los sólidos dependen de las especies atómicas que intervienen, y que aunque no son fuerzas electrostáticas en el sentido usual del término, dependen principalmente a las acciones electrostáticas entre partículas elementales. Especialmente, se encuentra que el carácter de las fuerzas está determinado por la configuración de la nube electrónica que rodea al núcleo del átomo.

En embargo, la configuración de la nube de electrones, y por tanto, las fuerzas que actúan entre átomos vecinos, es función muy dependiente de las cantidades de movimiento angular y de giro propio de los electrones en los átomos. Al mismo tiempo, de los resultados del ejemplo 21.2.1 se sabe que los momentos magnéticos orbital y de espín de un átomo dependen de manera proporcional a las cantidades de movimiento angular (momentos cinéticos) correspondientes, lo que quiere decir que el momento magnético de un átomo puede depender en el de sus vecinos —en efecto, indirectamente— por medio de las interacciones electrónicas que ocurren cuando se superponen las nubes de electrones de átomos vecinos. Se dice que hay *acoplamiento* entre los momentos atómicos. Como básicamente las interacciones electrostáticas originan este momento, en vez de las magnéticas, puede ser miles de veces más intenso que las fuerzas magnéticas directas entre átomos vecinos. Por otra parte, puede ser también débil, o incluso

actuar de manera que tienda a alinear los momentos vecinos en forma *antiparalela*<sup>3</sup> en vez de paralela; todo depende de la configuración específica de la nube de electrones que rodea a cada átomo.

Hay pocos elementos, notablemente el hierro, cobalto, níquel, gadolinio, disprosio y manganeso, en que la forma de la distribución de los electrones que rodean al átomo produce acoplamientos muy fuertes entre átomos vecinos, que tiende a alinear sus momentos magnéticos paralelamente entre sí. Estos elementos son sustancias ferromagnéticas, y en condiciones apropiadas, presentan todos los efectos descritos antes, que son característicos de esos materiales.<sup>4</sup>

Aunque el acoplamiento entre átomos vecinos en las sustancias ferromagnéticas pueda ser muy intenso, el efecto de desordenamiento de la energía térmica del cristal también es importante, y a una temperatura suficientemente alta, puede ser tan intenso que llegara a vencer del todo al efecto del acoplamiento ferromagnético. Dependiendo de la intensidad del acoplamiento ferromagnético entre los átomos, arriba de esta temperatura (que varía de una sustancia a otra) los materiales ferromagnéticos pierden bruscamente su magnetización espontánea y presentan un comportamiento esencialmente paramagnético. Esta temperatura de transición se llama *temperatura de Curie*, y para el hierro puro es de 1043°C. En la tabla 21.2 se presentan las temperaturas de Curie para algunas otras sustancias ferromagnéticas.

Las sustancias de naturaleza ferromagnética muestran una gama considerable de propiedades magnéticas, que dependen de la composición de la sustancia, de que sea una sustancia policristalina o de un solo cristal (en el primer caso, también del tamaño y forma de los pequeños cristales que la forman), y del

<sup>3</sup> A las sustancias en que existe este tipo de acoplamiento se las llama materiales *antiferromagnéticos*.

<sup>4</sup> En el caso del manganeso, la sustancia metálica pura no es ferromagnética, pero puede lograrse acoplamiento ferromagnético entre los átomos del manganeso, alterando ligeramente el espaciado interatómico con el vecino más próximo; lo anterior puede conseguirse aleando este metal con otras sustancias, que por sí mismas pueden ser completamente no ferromagnéticas.

TABLA 21.2. Temperaturas de Curie de sustancias ferromagnéticas

Sustancia	Temperatura de Curie, °C
Hierro	770
Cobalto	1122
Níquel	358
Gadolinio	16
Disprosio	-188

tratamiento térmico y magnético a que se haya sometido antes. A pesar de las amplias variaciones en las propiedades magnéticas, hay dos clases generales importantes de materiales ferromagnéticos: las sustancias ferromagnéticas *duras*, como ciertas clases de acero, que pueden retener su magnetización aunque se suprima la corriente magnetizante; y los materiales ferromagnéticos *suaves*, como el hierro dulce, que aunque se magnetizan fácilmente, pierden casi toda su imantación cuando se interrumpe la corriente de magnetización. Las sustancias ferromagnéticas duras producen fácilmente imanes permanentes poderosos, lo que es prácticamente imposible en el caso de las ferromagnéticas suaves. Aunque los términos “duro” y “suave” son de uso común, no son apropiados, pues hay algunas sustancias que presentan las propiedades magnéticas “duras”, aunque son suaves o blandas estructuralmente y se pueden deformar con facilidad, y viceversa. No obstante, se utilizarán aquí esos calificativos para designar las dos clases de materiales magnéticos, pero siempre precedidos del término “magnéticamente” para evitar confusión con las propiedades mecánicas de la sustancia de que se trate.

Ahora se considerará lo que sucede cuando se magnetiza una sustancia ferromagnética dura colocándola en un campo magnético, creado por una corriente eléctrica que circula en una *bobina toroidal*. En la figura 21.11 se muestra la dependencia de la magnetización  $M$  de la muestra toroidal respecto de la intensidad magnética  $H$ . Aquí se supone que inicialmente la muestra no está imantada, y que la intensidad magnética inicial también es cero. Por tanto, al principio se está en O, en que

$H = 0$  y  $M = 0$ . Ahora se supondrá que crece la intensidad magnética al aumentar la corriente de la bobina. Los momentos atómicos se alinean con el campo, provocando un incremento de  $M$  que casi es lineal con  $H$  al principio, pero que tiende a la saturación conforme se alcanza el alineamiento magnético total. En consecuencia, la magnetización de la muestra recorre la línea OA. Si se llevara más adelante la imantación, naturalmente se alcanzaría una *magnetización de saturación*  $M = np_m$ , que corresponde al alineamiento de todos los dipolos atómicos de la muestra, en la dirección de  $H$ . Sin embargo, supóngase que se detiene el proceso en el punto A y que luego se reduce el campo  $H$ . Sin embargo, cuando se hace lo anterior, la magnetización no vuelve a recorrer la curva OA, sino que sigue la trayectoria AB. Cuando se reduce  $H$  a cero, se llega al punto B. En este punto, aunque la intensidad magnética es cero, una gran proporción de los dipolos atómicos retiene su alineación anterior, por lo que queda una magnetización considerable,  $M_r$ , que se conoce como *magnetismo remanente* de la muestra. Ahora se tiene un *imán permanente* que tiene una magnetización y que produce su propio campo  $B$ , aunque no haya corriente magnetizante, y al menos en el caso de una muestra toroidal, aunque tampoco exista un campo  $H$ .

Si ahora se invierte al sentido de la corriente, se invertirá también la dirección de la intensidad magnética  $H$ , lo que tiende a deshacer la alineación magnética de la muestra; y en el punto C, donde se alcanza determinado valor negativo de  $H$  (llamado *fuerza coercitiva*,  $H_c$ ) la magnetización se elimina completamente y la muestra de nuevo queda sin magnetismo. Para valores negativos mayores de  $H$ , la magnetización se vuelve negativa y sigue la curva CD, llegando a D cuando el campo  $H$  es igual y opuesto al que había en A. Si nuevamente se hace crecer el valor de  $H$ , se recorre la trayectoria DEFA, hasta que finalmente, cuando el campo  $H$  vuelve a su valor máximo anterior, se regresa al punto A. Al recorrer estos pasos se hace que la muestra pase por el ciclo de la figura 21.11.

Estos procesos ilustran claramente el hecho de que la magnetización no sólo depende de la intensidad magnética, sino también de



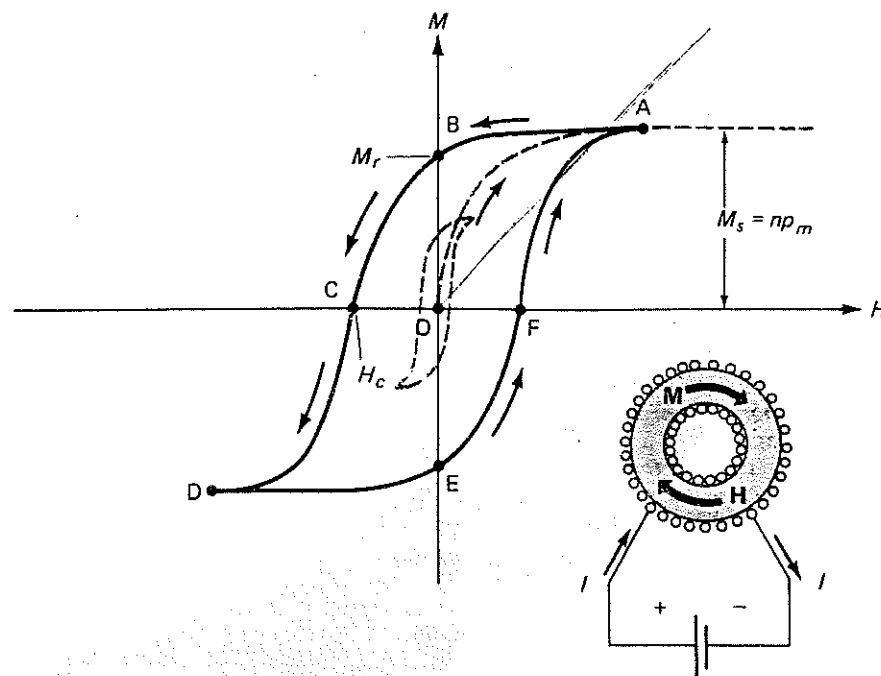


FIGURA 21.11. La magnetización en función de la intensidad magnética en el caso de una muestra ferromagnética toroidal, que presenta el fenómeno de histéresis magnética.

la "historia magnética" de la muestra. El hecho de que se siga la trayectoria AB en vez de la trayectoria inicial OA es una consecuencia directa de que se comienza con una muestra alineada magnéticamente, en vez de con una no magnetizada al principio. El valor de  $H$  que hace cero la magnetización también depende de si se va desde B hacia C, o desde E hacia F. A este efecto se le llama *histéresis magnética* y es mostrado en cierto grado por todas las sustancias ferromagnéticas, aunque es más notable en materiales ferromagnéticos duros. El ciclo cerrado de la figura 21.11 se llama *ciclo de histéresis*. Su tamaño y su forma dependen de la composición y naturaleza cristalina de la muestra, y de los valores máximos elegidos para la intensidad magnética en A y D. Las líneas punteadas de la figura 21.11 muestran un ciclo de histéresis más pequeño, resultado de someter la muestra a intensidades magnéticas máximas más pequeñas.

En la citada figura 21.11, se ilustra el efecto de la histéresis graficando la magnetización en función de  $H$ , debido a que es muy fácil visualizar lo que sucede a la magnetización al aumentar el campo  $H$ , o disminuirlo. Pero con frecuencia es interesante ilustrar el efecto de la histéresis en una gráfica de la inducción magnética  $B$  en función de  $H$ , que es muy parecida a la curva original que relaciona  $M$  y  $H$ , porque como se vio en el ejemplo 21.22, cuando se trata de una sustancia muy fácilmente magnetizable ( $\mu \gg 1$ ), la corriente de magnetización atómica  $I_m$  es mucho mayor que la corriente verdadera  $I$ , de conducción por lo que  $M$  es mucho mayor que la intensidad magnética  $H$ . En consecuencia, de la ecuación (21.2.18), en todos esos casos  $B \approx \mu_0 M$ , y una gráfica de  $M$  versus  $H$  difiere de una gráfica de  $B$  versus  $H$  solamente en el factor de escala constante  $\mu_0$ . En la figura 21.12 se muestra una gráfica de  $B$  en función de  $H$ .

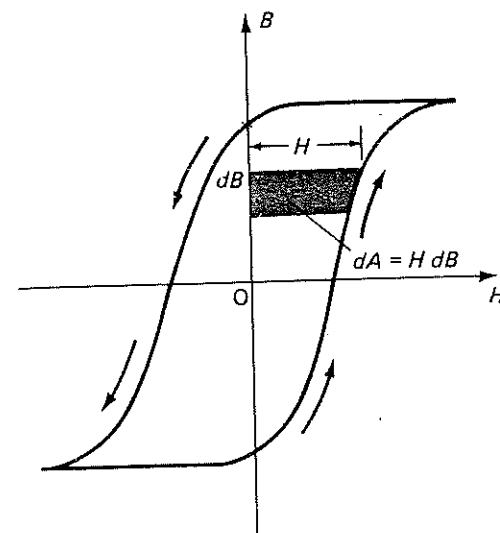


FIGURA 21.12. La inducción magnética en función de la intensidad magnética, en forma que ilustra el hecho de que el área del ciclo de histéresis representa la energía magnética disipada durante un proceso cíclico de magnetización.

Si se magnetizara la muestra y repentinamente se sustituyera la FEM externa que proporciona la corriente de magnetización, con una trayectoria conductora entre las terminales externas del devanado toroidal, el colapso del campo magnético dentro de la bobina generaría una FEM de autoinducción  $\mathcal{E}$  ( $= N d\Phi_m/dt$ ) que trataría de mantener la corriente en el circuito externo, la que entonces decrecería exponencialmente, con una constante de tiempo determinada por la autoinductancia de la bobina y la resistencia del circuito. Ahora puede calcularse la energía magnética disipada en cualquier intervalo de tiempo  $dt$  escribiendo, por la conservación de la energía,

$$dU_m + \mathcal{E} I dt = 0 \quad (21.5.1)$$

de donde

$$dU_m = -\mathcal{E} I dt = N \frac{d\Phi_m}{dt} I dt \quad (21.5.2)$$

$$dU_m = NI d\Phi_m$$

Sin embargo, ya que  $\Phi_m = BA$ , y como el área es constante, se puede escribir

$$d\Phi_m = A dB \quad (21.5.3)$$

También, de (21.2.16) y del ejemplo 21.2.2, se sabe que

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{NI}{l} \quad (21.5.4)$$

o sea,

$$NI = lH \quad (21.5.5)$$

en que  $l$  es circunferencia media de la bobina. Sustituyendo (21.5.5) y (21.5.3) en (21.5.2), se encuentra que

$$dU_m = AlH dB = VH dB \quad (21.5.6)$$

en que  $Al = V$  es el volumen interior de la bobina; de (21.5.6) puede escribirse

$$\frac{1}{V} dU_m = H dB \quad (21.5.7)$$

o integrando,

$$\frac{\Delta U_m}{V} = \int H dB \quad (21.5.8)$$

Es claro que la integral en (21.5.8) representa el cambio en la energía magnética por unidad de volumen dentro de una sustancia magnetizada que resulta de un cambio en la magnetización. Además, de la figura 21.12 es evidente que la integral de (21.5.8), evaluada alrededor de todo el ciclo de magnetización (que corresponde al *área limitada por el ciclo de histéresis* en una gráfica de  $B$  versus  $H$ ) representa el cambio en la energía magnética de la muestra durante el ciclo de magnetización. El caso es muy parecido al que se encontró antes en relación con las máquinas térmicas cíclicas, en que el área del ciclo cerrado en el diagrama de  $P$  versus  $V$  que representa el proceso cíclico, corresponde al trabajo efectuado por el sistema en el curso de un ciclo.

este caso se encuentra que los campos dentro de la muestra efectúan *trabajo* durante el ciclo de magnetización. El trabajo neto se realiza contra determinados procesos disipativos, dentro de la sustancia se *opone* a la acción de la intensidad magnética para cambiar la magnetización. Los efectos de la fricción, estos procesos en la energía del campo magnético en la energía interna que eleva la temperatura de la muestra. Al mismo tiempo, para repetir el ciclo de magnetización una y otra vez, la fuente externa debe suministrar energía.

Es evidente que la histéresis convierte la energía del campo magnético en calor, y que la pérdida de energía magnética disipada de esta manera en cada ciclo es proporcional al área del ciclo de histéresis. Este fenómeno es el principal responsable del hecho muy común de que los transformadores y reactores (de reactancia) con núcleo de acero, producen más calor del que se puede explicar por las pérdidas resistivas y la generación de corrientes de Foucault. Los materiales ferromagnéticos duros tienen ciclos de histéresis anchos que tienen áreas grandes en las gráficas de  $B$  versus  $H$ , lo que se debe a su alta coercitividad magnética, como lo indica la distancia  $OC$  en la figura 21.11, y porque se requieren campos coercitivos bastante grandes para destruir la magnetización una vez establecida, como lo señala la distancia  $OC$  en la figura 21.11.

Se encuentra que estos materiales constituyen buenos núcleos para transformadores o inductores, pues desperdician una parte de la potencia de entrada que se requiere, por la producción de calor debido a la histéresis. Por otra parte, estos valores de la remanencia magnética y campo coercitivo son lo que hace a las sustancias ferromagnéticas duras, muy adecuadas para imanes permanentes, que (además de sus usos como curiosidades) tienen amplio uso en instrumentos de medidores, altavoces o bobinado telefónico y determinadas clases de motores.

En los inductores y transformadores con núcleo de hierro se trataría de usar naturalmente materiales ferromagnéticos con la máxima remanencia magnética posible y con los menores campos coercitivos posibles. Esta

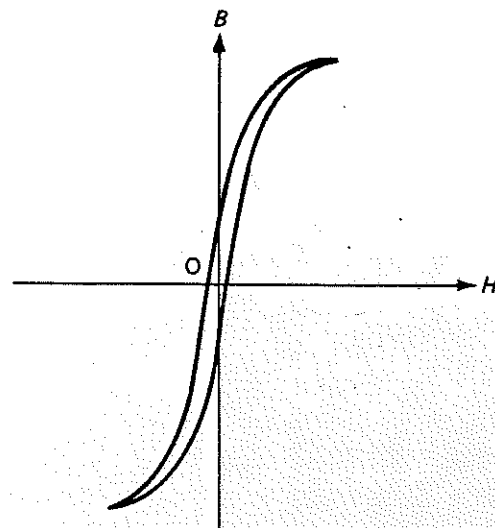


FIGURA 21.13. Ciclo de histéresis de un núcleo de transformador ferromagnético, considerado "bueno".

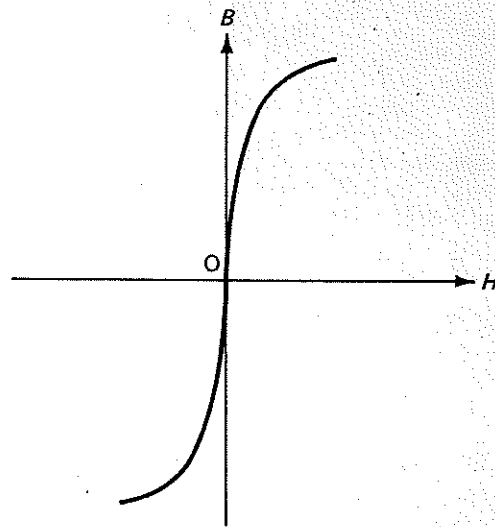


FIGURA 21.14. Curva de histéresis de una sustancia ferromagnética suave "ideal".

Esta clase de materiales tienen ciclos de histéresis muy estrechos o angostos, como lo ilustra la figura 21.13, que limitan áreas muy pequeñas

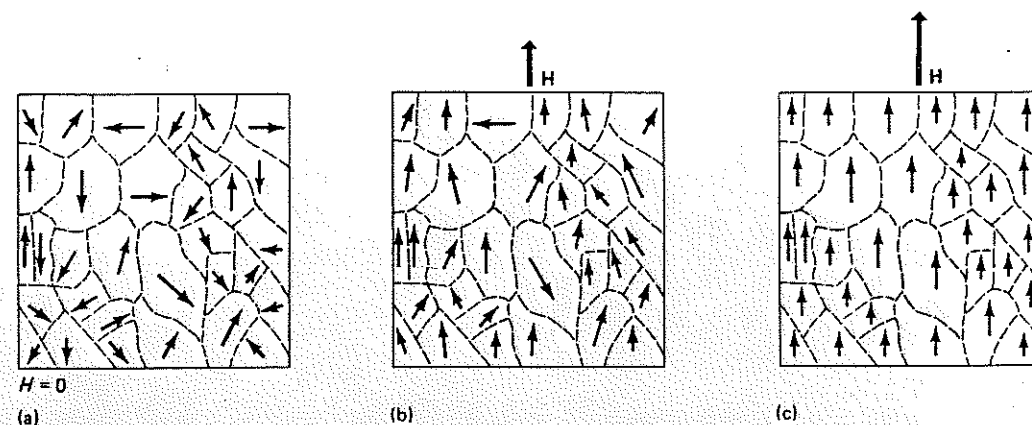


FIGURA 21.15. Alineamiento magnético logrado por alineación de dominios fijos.

en una gráfica de  $B$  versus  $H$ . Naturalmente, lo que se desea en forma ideal es una sustancia de permeabilidad muy alta que sea del todo reversible, y que no presente histéresis en absoluto, como se indica en la figura 21.14. El hierro dulce y algunas sustancias ferromagnéticas suaves tienen estas características, que en ciertos casos se aproximan al caso ideal de la figura 21.14, aunque jamás lo alcanzan. En esta clase de materiales, los procesos disipativos que resisten a los cambios de magnetización son sumamente débiles y se puede repetir el ciclo de magnetización, con frecuencia sin mucha disipación de energía. Por otra parte, es virtualmente imposible magnetizarlos para que retengan cantidades significativas de magnetismo permanente. Además de los casos extremos de las sustancias ferromagnéticas suaves y duras, naturalmente también hay una amplia variedad de materiales cuyas propiedades magnéticas son de carácter intermedio, y que no se asemejan mucho las de los materiales magnéticamente duros o suaves.

Todas las sustancias ferromagnéticas presentan el fenómeno de la *formación de dominios*, en el que hay pequeñas regiones bien definidas, llamadas *dominios magnéticos*, cada una de las cuales presenta una alineación magnética completa, aunque la muestra en conjunto diste del estado de saturación magnética, o incluso, aunque no tenga nada de magnetización. En consecuencia, el efecto de los

campos magnéticos aplicados es principalmente cambiar la dirección de la alineación magnética de los dominios que ya están totalmente alineados, o extender las fronteras de los dominios alineados paralelamente al campo aplicado, a costa de los que están alineados en otras direcciones. En las figuras 21.15 y 21.16 se ilustran estos efectos. El primero de ellos, en que los dominios ya alineados cambian la dirección de su alineación para que coincida con la del campo aplicado, ocurre con mayor frecuencia en sustancias en que son agregados policristalinos, (con gran número de cristales sumamente pequeños) de manera que constituyen dominios aislados por sí mismos, o que contienen impurezas o imperfecciones que interfieren con el movimiento de las fronteras de los dominios. El segundo, en que los dominios alineados con el campo externo crecen a costa de los alineados en otras direcciones, ocurre con mayor frecuencia en muestras monocristalinas grandes y de material puro, en que nada interfiere con el movimiento de las fronteras de los dominios. Naturalmente, hay casos intermedios en que ambos efectos ocurren al mismo tiempo. El tamaño de los dominios magnéticos puede variar en una gama amplia, desde dimensiones del orden de  $10^{-4}$  cm hasta magnitudes del orden de milímetros, o incluso centímetros.

La formación de dominios ocurre debido a que su creación disminuye la energía potencial

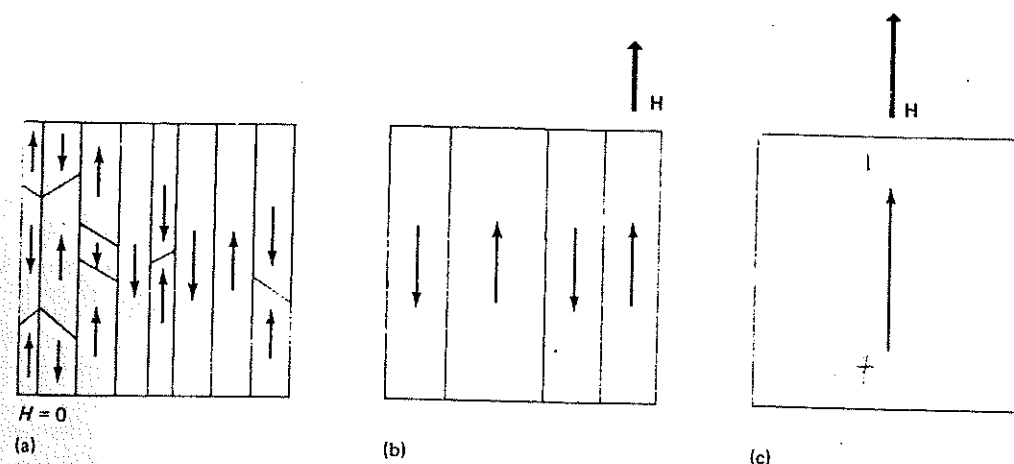


FIGURA 21.16. Alineamiento magnético obtenido por movimiento de las fronteras de los dominios.

almacenada en el campo magnético externo de una sustancia magnetizable, y permite al sistema de momentos atómicos aproximarse a una condición de *equilibrio* que corresponde a una energía potencial almacenada mínima. En este sentido, el caso se parece al que se tiene cuando se estira un resorte. Este es capaz de almacenar energía potencial, elástica y por tanto, de ejercer fuerzas sobre objetos que estén sujetos a él. Sin embargo, la condición de equilibrio, en que la fuerza neta es cero, corresponde a la condición de resorte no estirado, en que la energía potencial almacenada es de valor mínimo. En el caso de un solo cristal, alineado magnéticamente del todo, se almacena mucha energía potencial en el campo magnético de la muestra; la cantidad precisa se puede calcular evaluando la integral de la energía por unidad de volumen (dada por  $B^2/2\mu$ ) sobre todo el campo magnético. Pero si se dividiera el cristal en dos dominios de tamaño igual y alineación opuesta, se reduciría el campo externo de la muestra, y por tanto, la energía magnética que contiene.

El efecto está ilustrado en la figura 21.17. Una subdivisión en más dominios puede reducir aún más esta energía de campo almacenada,

y de hecho, puede ocurrir hasta que apenas exista un campo externo detectable asociado a la muestra. Sin embargo, el proceso de formación de dominios no puede proseguir indefinidamente, porque después de todo, hay fuerzas intensas *entre átomos vecinos* que tratan de alinearlos ferromagnéticamente con los momentos paralelos. En consecuencia, se alcanza una condición de equilibrio cuando los cambios de energía correspondientes a estos dos requisitos conflictivos se equilibran mutuamente. Al alcanzarse este equilibrio se determina un tamaño promedio de dominio, característico del cristal específico de que se trate. Los procesos disipativos asociados a las pérdidas por histéresis en los materiales magnéticos, están relacionados principalmente con las energías que se requieren para lograr el alineamiento magnético de los dominios individuales y para lograr el movimiento de las fronteras de los mismos. Aplicando una suspensión líquida de material ferromagnético finamente molido a la superficie de la muestra que se examina con un microscopio es posible observar las fronteras de los dominios magnéticos. Las pequeñas partículas, que actúan como limaduras de hierro espolvoreadas alrede-

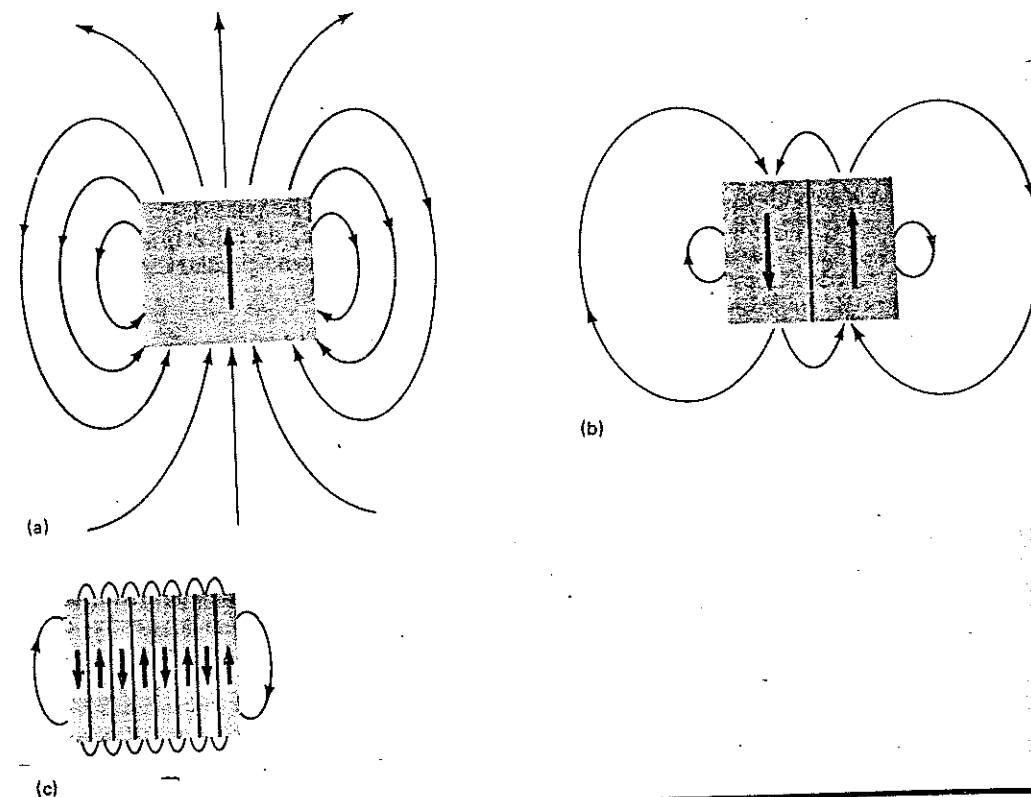


FIGURA 21.17. Reducción en la energía del campo externo como resultado de la formación de dominios.

dor de un imán, tienden a congregarse en las fronteras entre los dominios, permitiendo observarlas directamente.

## 21.6 Imanes permanentes

Casi todo mundo tiene cierto conocimiento del magnetismo, por haber advertido el comportamiento curioso de los imanes permanentes. Las fuerzas que ejercen mutuamente, y sobre sustancias ferromagnéticas inicialmente no magnetizadas, parecen provenir de fuentes invisibles, por lo que a veces se les asigna cierta calidad mágica o esotérica. Es cierto que el magnetismo se comprende mejor estableciendo firmemente la relación entre los campos

magnéticos y las corrientes eléctricas desde el principio, como se hizo aquí en el estudio de esta materia, y también se cumple que en el caso de los imanes permanentes, en cierto modo parece haberse perdido esta correlación. Empero, un examen más detallado muestra que el magnetismo permanente puede describirse por las mismas leyes que permiten entender el electromagnetismo.

Probablemente, lo mejor es comenzar volviendo a la configuración toroidal, ahora bien conocida, de la sección 21.1. En una sustancia imantada permanentemente, la corriente verdadera externa es *cero*, y la única corriente que existe es la de magnetización equivalente  $I_m$ ; dada por las ecuaciones (21.2.10) y (21.2.12); puede visualizarse como una

ente de superficie que fluye por el exterior del toroide, como se ilustra en las figuras 21.4 y 21.4. Dicha corriente es generada por corrientes electrónicas que circulan en los átomos del material ferromagnético, y no es sujeta a los procesos usuales de dispersión por colisiones, que impiden el flujo de electrones libres en los conductores ordinarios. Por tanto, una vez establecidas corrientes de magnetización por la alineación de los momentos atómicos dentro de la muestra, fluyen sin impedimento en el interior de la muestra —eternamente, o al menos que algo cambie o destruya la alineación atómica. En este sentido, el caso recuerda el de corrientes eléctricas verdaderas en los superconductores a muy bajas temperaturas. En realidad, hay muchas similitudes entre los fenómenos del ferromagnetismo y la superconductividad.

En una muestra toroidal con un campo de magnetización  $M$  permanente y uniforme, se muestra en la figura 21.18, a, se puede encontrar  $H$  a partir de la ley de Ampère, expresada por (21.2.16), en la forma usual. Pero en este caso es *cero* la verdadera corriente a través de cualquier contorno circular  $C$ ; por tanto,

$$\oint_C d\mathbf{l} = 2\pi r H = 0$$

(21.6.1)

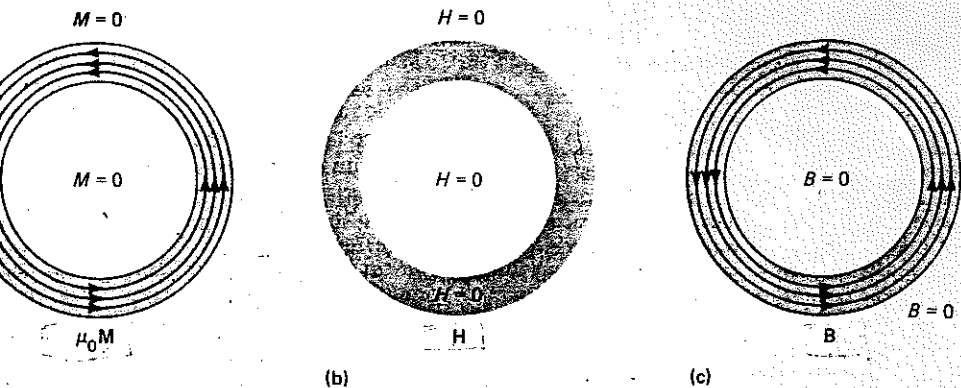


FIGURA 21.18. Campos de (a) magnetización, (b) intensidad magnética y (c) inducción magnética para el caso de una muestra toroidal magnetizada permanentemente.

Lo anterior es, sin que importe si el contorno  $C$  está dentro del toroide o no, de manera que no hay campo  $H$  en ninguna parte. Este resultado no es inesperado, a la vista del hecho de que no hay verdaderas corrientes de conducción en ninguna parte, aunque como se verá pronto, por sí mismo no garantiza que  $H$  deba anularse en todos los puntos. Calculando  $B$  de la misma manera, de (21.2.13) se encuentra que para un contorno circular  $C$  dentro del toroide,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = \mu_0 I_m \quad (21.6.2)$$

ya que la corriente verdadera  $I$  es nula, mientras que en el exterior, donde la corriente total dentro de cualquier contorno es cero,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = 0 \quad (21.6.3)$$

Como la corriente de magnetización en la superficie del toroide está dada por (21.2.10), la expresión (21.6.2) indica que, dentro de la muestra,

$$B = \mu_0 M \quad (21.6.4)$$

mientras que fuera de la misma, de (21.6.3),

$$B = 0 \quad (21.6.5)$$

Estos resultados también pueden obtenerse sustituyendo  $H = 0$ , dada por (21.6.1), en

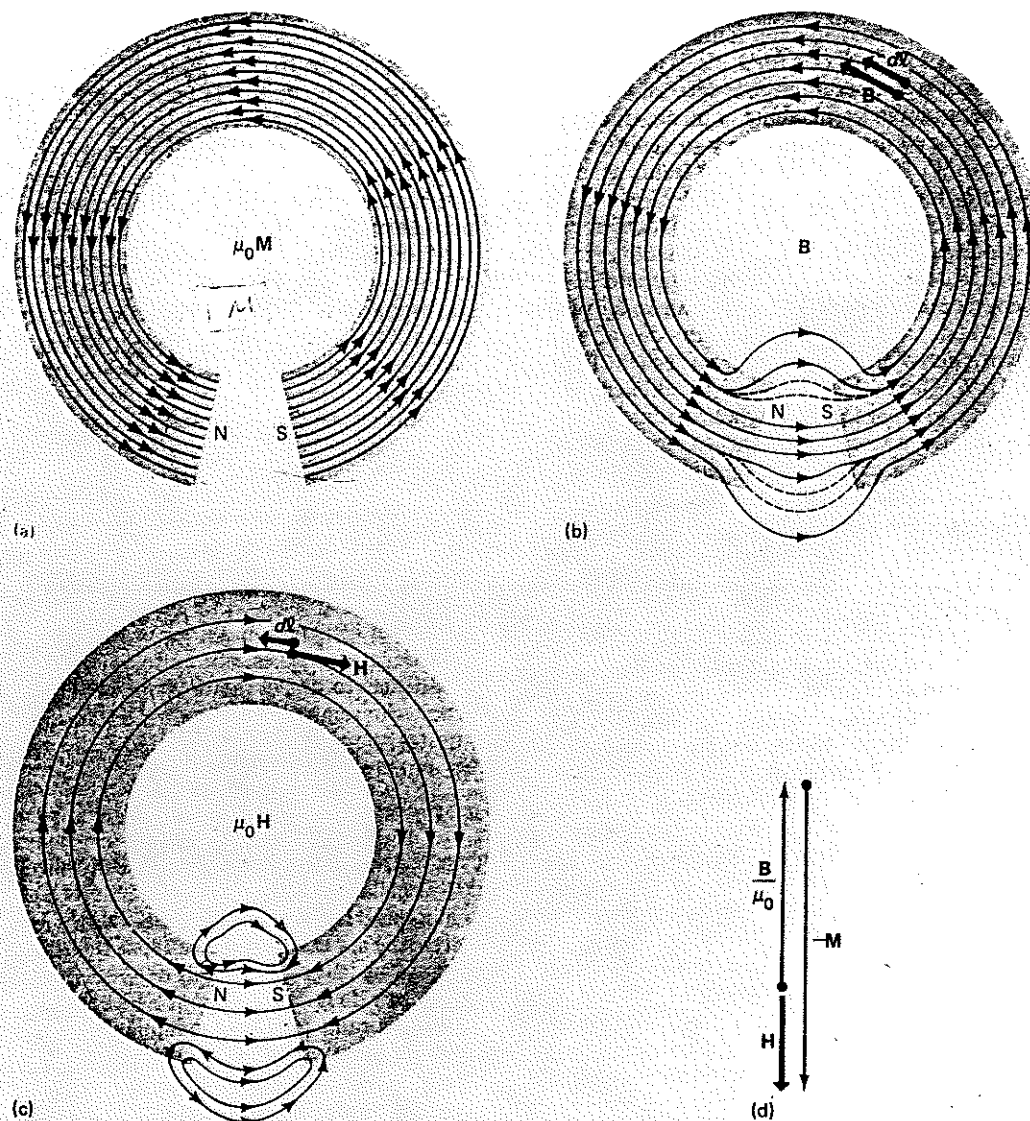


FIGURA 21.19. Líneas de (a) magnetización, (b) inducción magnética, (c) intensidad magnética para un imán permanente de forma toroidal con un entrehierro, (d) Relaciones entre  $B$ ,  $M$  y  $H$  en el interior del imán.

(21.2.18), debido a que la magnetización tiene el valor constante  $M$  dentro de la muestra y es cero en el exterior.

Por tanto, el caso es como lo ilustra la figura 21.18. Existe un campo  $M$  y un campo  $B$  que se le parece mucho, aunque no hay un



campo  $H$ . Todo ello es muy claro. Sin embargo, desafortunadamente, tanto  $B$  como  $H$  son cero en todas partes fuera de la muestra, de manera que sería imposible determinar que se tiene un imán permanente, a menos que de alguna manera se profundice y se descubra que el campo  $B$  está ahí, lo que el lector aceptará que es muy difícil.

Entonces, para hacer más realista el caso supóngase que de alguna forma se corta un imán toroidal, quitándole un segmento en arco, de manera que quede un imán en herradura con un pequeño espacio de aire, o *entrehierro* como se muestra en la figura 21.19. Desde luego, este procedimiento no afecta el campo de magnetización  $M$ , y se mantiene como se ilustra en dicha figura 21.19, a. La inducción magnética  $B$  puede determinarse como antes, utilizando la ley de Ampère, aunque el hacerlo ocasiona ciertas complicaciones, pues al quitar el pedazo de material magnetizado, se destruye la simetría toroidal perfecta de la muestra. Por tanto, ya no puede asegurarse que la magnitud de  $B$  sea la misma en todas partes de un contorno circular, ni que su dirección sea tangente al círculo. Empero, como se tiene un imán permanente, se confía en que tiene que haber un campo  $B$  en el espacio; como por otra parte, jamás nadie ha podido capturar una carga magnética aislada, se tiene la certeza de que las líneas de este campo  $B$  deben cerrarse sobre sí mismas, por lo que han de continuar hacia el material magnetizado, más o menos como se muestra en la figura 21.19, b. Estudiándolo desde un punto de vista ligeramente distinto, también se puede notar que la relación del campo  $B$  con las corrientes de magnetización y las corrientes de conducción es la misma; no hay manera de decir, dentro o fuera de la muestra, si el campo  $B$  se debe a una corriente de magnetización, o a una corriente verdadera de la misma intensidad, que fluye en un conductor.

Por tanto, el campo  $B$  debe verse como el que sería producido por una bobina toroidal estrechamente arrollada, portadora de corriente, sin un núcleo magnetizado, aunque con un espacio en el devanado, que corresponde al entrehierro o espacio de aire del imán permanente. En todo caso, se llega a la ima-

gen del campo de inducción magnética que se muestra en la figura 21.19, b. El campo es intenso tanto dentro del material como en el entrehierro, aunque en la proximidad de éste, las líneas se dispersen respecto del espacio, y produzcan un magnetismo débil en el volumen circundante. También, dentro del material magnetizado, la inducción magnética será apenas un poco menor que el valor anterior  $\mu_0 M$ , debido a que la corriente  $I_m$  de magnetización ha disminuido en la cantidad que corresponde al pedazo faltante. Esto también queda claro de la expresión usual para el campo  $B$  dentro de una bobina toroidal delgada,  $B = \mu_0 n I_{\text{tot}}$ .

Tratándose de la intensidad magnética  $H$ , de (21.2.18) es evidente que fuera de la sustancia magnetizada, en especial dentro y alrededor del entrehierro, se debe tener

$$H = \frac{B}{\mu_0} \quad (\text{fuera de la muestra}) \quad (21.6.6)$$

porque en esta región  $M = 0$ . El campo  $H$  fuera de la muestra es, por tanto, igual al campo  $B$ , excepto por el factor  $\mu_0$  de escala constante. Sin embargo, en el interior de la muestra, por (21.2.18) puede deducirse que Sin embargo,

$$\mu_0 H = B - \mu_0 M \quad (\text{dentro de la muestra}) \quad (21.6.7)$$

Pero como acaba de llegarse a la conclusión de que en las profundidades del imán toroidal, la magnitud de  $B$  es menor que el valor  $\mu_0 M$  en un toroide sin el espacio de aire, se tendrá que aceptar que la dirección de  $H$  debe ser *opuesta* a la de  $M$  y de  $B$  en esa región. Esta conclusión es corroborada por el razonamiento de que, como no hay verdaderas corrientes ahí, de acuerdo con (21.2.16),

$$\oint_C H \cdot dl = 0 \quad (21.6.8)$$

Pero a lo largo de la circunferencia media de la bobina, la integral de  $H \cdot dl$ , en el entrehierro es claramente positiva, por lo que para satisfacer (21.6.8), su valor debe de ser de *signo contrario*, dentro del material magnetizado, a lo largo del resto del contorno circular. Pero esto sólo puede ser si  $H$  y  $dl$  están en

direcciones opuestas, por lo que sólo ocurrirá si la dirección de  $H$  es opuesta —o casi— a la de  $B$ . En la figura 21.19, c se muestra el campo resultante. Como  $H$  está en la dirección opuesta a  $B$  en el interior del material magnetizado, y en la misma dirección que  $B$  en el entrehierro, es evidente que las líneas de  $H$  sufren una *inversión de dirección* en las caras del corte. Esta inversión del campo está ilustrada en la figura 21.19, c; es característica del comportamiento de las líneas de la intensidad magnética en las caras de los polos de los imanes permanentes. Es claro que sin esta inversión, no podría satisfacerse el requisito de la ley de Ampère, de que sea cero la integral de  $H \cdot dl$  alrededor de toda trayectoria cerrada posible, pues sin aquél,  $H$  y  $dl$  siempre estarían en la misma dirección, alrededor de todas las espiras cerradas formadas por las líneas de intensidad, y el producto escalar tendría que dar una suma positiva alrededor de cualquiera de estas trayectorias.

En el caso del imán toroidal no interrumpido que se estudió en relación con la figura 21.18, se encontró que  $H$  era cero dentro del material magnético al igual que en el exterior, mientras que  $B$  y  $\mu_0 M$  eran iguales dentro del imán. En el ejemplo de la figura 21.19, se ve que  $B$  es un poco menor que  $\mu_0 M$  en la parte más interna del imán, pero que ahora hay un campo  $H$  dentro del material, en dirección opuesta a  $B$ . Este campo  $H$  toma en cuenta la diferencia entre  $\mu_0 M$  y  $B$ , que se requiere por la ecuación (21.2.18); ésta exige que en todo punto dentro de la sustancia,  $H = (B/\mu_0) - M$ , como en la figura 21.19, d.

## RESUMEN

Todas las sustancias materiales muestran efectos magnéticos cuando se les somete a campos magnéticos producidos exteriormente. Tales efectos se deben a la orientación de momentos magnéticos atómicos o moleculares, permanentes o inducidos. Los efectos crean un momento dipolar magnético en todo elemento de volumen de la sustancia. La *magnetización* del material en un punto dado se define como el

momento dipolar local por unidad de volumen:

$$M = \frac{\Delta p_m}{\Delta V}$$

Ya que los momentos dipolares atómicos pueden expresarse como corriente circulante por área, la magnetización puede relacionarse con una corriente superficial  $I_m$  de circulación, que para una sustancia magnetizada uniformemente puede escribirse como

$$I_m = M \cdot l$$

en que  $l$  es la circunferencia o perímetro de la sección transversal. En la figura 21.2 se indica la corriente superficial circulante. También, en una sustancia de este tipo el momento dipolar total es

$$p_m = MV = M/A = I_m A n$$

en que  $n$  es un vector unitario normal al plano del área  $A$ .

La ley de Ampère para los sistemas que contienen materiales magnetizables puede expresarse como

$$\oint_C B \cdot dl = \mu_0 (I + I_m)$$

en que  $I$  es la corriente verdadera o de conducción debida al movimiento macroscópico de las cargas libres, e  $I_m$  es la corriente circulante de magnetización. Empero, la corriente de magnetización siempre puede expresarse como

$$I_m = \oint_C M \cdot dl$$

que permite escribir la ley de Ampère como

$$\oint_C H \cdot dl = I$$

en que

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

Al vector  $H$ , definido aquí, se le llama *intensidad magnética*.

En muchas sustancias magnetizables, en

para pequeños valores de la intensidad magnética, la magnetización es directamente proporcional a la intensidad de campo magnético, lo que permite escribir

H

a la constante de proporcionalidad  $\chi_m$  se llama la *susceptibilidad magnética*. Esta define el comportamiento de un material magnético *lineal*. Luego entonces, se define

$1 + \chi_m$

La permeabilidad  $\mu$  se conoce como *permeabilidad magnética* de la sustancia. La permeabilidad  $\mu_0$  (o constante magnética)  $K_m$  se define

$$\mu = (1 + \chi_m) \mu_0$$

Los materiales para los que  $\chi_m$  es positiva se conocen como *sustancias paramagnéticas*. Los momentos atómicos se alinean paralelos al campo externo. También hay sustancias para las que  $\chi_m$  es negativa. En estos llamamos *materiales diamagnéticos*, los momentos están alineados antiparalelos al campo externo. En las sustancias ferromagnéticas, el alineamiento de los dipolos se debe sólo por la influencia directa del campo externo, sino también por una interacción de acoplamiento entre los propios momentos atómicos individuales. Arriba de una cierta temperatura, que se conoce como *temperatura de Curie*, los materiales ferromagnéticos pierden este carácter, y se comportan como sustancias paramagnéticas. Los materiales ferromagnéticos, abajo del punto de Curie, presentan susceptibilidades muy gran-  
de y su comportamiento magnético que decide si es lineal. Se pueden magnetizar fuertemente y muestran efectos de *histéresis* magnética, en que la magnetización no depende de la intensidad magnética, sino de la historia o influencia magnética que haya sufrido la muestra. Los mate-

riales ferromagnéticos también presentan el fenómeno de la *formación de dominios*, en que se forman pequeñas regiones bien definidas de magnetización saturada, cuyo efecto es reducir la energía magnética almacenada en el campo externo de la muestra.

## PREGUNTAS

1. ¿Cuáles dos efectos competitivos determinan el momento magnético total de cualquier material?
2. El vector de magnetización en un punto es el momento dipolar por unidad de volumen cerca del punto. Indicar las dificultades que surgen si el elemento de volumen es infinitesimalmente pequeño.
3. Describa la diferencia entre la inducción magnética y la intensidad magnética en materiales magnetizables y en el vacío.
4. Analice las similitudes entre el vector magnetización  $M$  y el vector polarización  $P$ .
5. Explique brevemente la diferencia entre paramagnetismo, diamagnetismo y ferromagnetismo.
6. Una presilla de acero no magnetizado para papel es atraída por un imán de barra. Explique el origen de la fuerza de atracción.
7. ¿Qué propiedades del hierro hacen que sea ferromagnético un material?
8. La susceptibilidad paramagnética depende mucho de la temperatura, en tanto que la susceptibilidad diamagnética casi es independiente de la temperatura. ¿Puede explicar estas observaciones?
9. ¿Por qué algunos materiales tienen átomos o moléculas con momentos dipolares magnéticos permanentes, en tanto que otros no?
10. La susceptibilidad magnética de los materiales ferromagnéticos varía según la intensidad  $H$  del campo externo. Explique que, en términos de la curva de  $B$  en función de  $H$  observada durante la magnetización de una muestra.
11. ¿Qué significado tiene la temperatura de Curie?
12. Ordinariamente no se emplean los materiales ferromagnéticos suaves para hacer imanes permanentes fuertes. Explique.

## PROBLEMAS

1. Una pequeña muestra de una sustancia magnetizable tiene la forma de un cubo de 1.0 mm de lado. El momento magnético de la muestra es

$1.0 \times 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Determine (a) la magnetización de la muestra, suponiendo que es uniforme (b) la corriente superficial de magnetización. Suponga que el vector momento magnético es normal a una de las caras del cubo.

2. La susceptibilidad magnética de una muestra magnetizada uniformemente vale  $2.4 \times 10^{-4}$ . (a) ¿Qué permeabilidad magnética tiene? (b) ¿Cuál es su permeabilidad relativa?
3. La magnetización de una muestra de hierro es tal que aporta  $1.9 \text{ Wb/m}^2$  a una inducción magnética uniforme  $B$ . ¿Cuál es el momento magnético de un volumen de  $1 \text{ cm}^3$  de este material?
4. Un imán de barra de 20 cm de largo por 6 mm de diámetro está hecho de hierro con una susceptibilidad magnética de 5 000. En el centro del imán, la inducción magnética es de  $0.85 \text{ Wb/m}^2$ . Suponiendo magnetización uniforme del metal, calcule (a) la intensidad magnética en el centro, (b) la magnetización dentro del material, y (c) el momento magnético del imán.
5. En el caso del problema anterior, ¿cuántos electrones se necesitan para producir el momento magnético observado, si cada partícula aporta el momento magnético dado por la ecuación (21.2.25)? Compare este resultado con el número total de átomos de hierro. La densidad del hierro es  $7.85 \text{ g/cm}^3$  y su masa molar  $56 \text{ g/mol}$ .
6. La inducción magnética uniforme dentro de una muestra de aluminio es de  $1 \text{ Wb/m}^2$  cuando se coloca entre los polos de un imán. Evalúe la intensidad magnética y la magnetización dentro del aluminio. Si el volumen de éste es de  $10 \text{ cm}^3$ , ¿qué valor tiene su momento magnético?
7. Se enrolla un solenoide largo sobre un núcleo de hierro con susceptibilidad magnética igual a 200. Si la corriente en aquél es de 2 A y tiene 750 vueltas de conductor por metro, calcule (a) la intensidad magnética  $H$  dentro del solenoide, (b) la inducción magnética  $B$ , (c) la magnetización, y (d) el momento magnético por longitud unitaria, suponiendo un área transversal de  $8 \text{ cm}^2$ . Para contestar puede suponerse que el hierro está magnetizado uniformemente, y que la inducción magnética es uniforme en todo el solenoide.
8. Una bobina toroidal tiene una circunferencia media de 40 cm, un área transversal de  $5 \text{ cm}^2$ , y está formada por 400 vueltas de alambre sobre un núcleo de hierro con susceptibilidad magnética igual a 550. Una corriente de 1.5 A pasa por el alambre. (a) Utilizando la ecuación (21.2.16), determine la intensidad magnética. (b) Determine también la inducción magnética.

(c) Calcule el flujo magnético total que atraviesa la muestra. Se supone que el comportamiento magnético del hierro es lineal.

9. Una muestra toroidal de material magnetizable tiene un radio medio igual a  $12.5 \text{ cm}$  y su área transversal es igual a  $4.0 \text{ cm}^2$ . Está bobinada con alambre fino, a razón de 80 vueltas por cm, a lo largo de la circunferencia media. Su susceptibilidad magnética vale  $3.60 \times 10^{-4}$ . El devanado lleva una corriente constante de 5.0 A. Halle (a) las magnitudes de los campos  $H$  y  $B$  dentro de la sustancia, (b) la magnitud de la magnetización dentro de la sustancia, y (c) la corriente superficial de magnetización. (d, e) Calcule la magnitud que tendrían los vectores magnéticos  $B$  y  $H$ , si no hubiera el núcleo paramagnético.
10. Dé las respuestas al problema anterior, si se sustituye un núcleo de hierro dulce con susceptibilidad constante de 750 en vez del núcleo paramagnético original.
11. Halle (a) la inductancia de la bobina toroidal del problema 9, (b) la inductancia de la bobina del problema 10.
12. ¿Cuánta energía magnética se almacena en las bobinas descritas en el inciso (a) del problema 9 y en el (b) del problema 10?
13. La inducción magnética  $B$  dentro de un solenoide largo con núcleo de hierro es de  $0.28 \text{ Wb/m}^2$  cuando se le aplica una intensidad de campo de  $205 \text{ A/m}$ . Calcule la permeabilidad del núcleo metálico. Suponga comportamiento magnético lineal, y magnetización e inducción magnética uniformes en todo el núcleo.
14. Para un solenoide infinito de  $n$  vueltas por metro y corriente  $I$ , la inducción magnética en el eje está dada por  $B = \mu_0 n I$ . (a) Determine si el campo de inducción  $B$  en el eje aumentará, disminuirá o se mantendrá igual si se introduce en el solenoide un núcleo de (i) material ferromagnético, (ii) material diamagnético, (iii) material paramagnético. (b) Si se inserta un material magnético lineal de permeabilidad  $\mu$ , ¿qué intensidad magnética  $H$  habrá en el eje del solenoide?
15. Calcule la magnitud de la magnetización de un material en cada uno de los siguientes casos: (a) Cada átomo tiene un momento dipolar magnético de  $1.7 \times 10^{-33} \text{ A} \cdot \text{m}^2$  y hay  $9.4 \times 10^{28}$  átomos/ $\text{m}^3$ ; los momentos son paralelos entre sí. (b) La susceptibilidad magnética es  $\chi_m = 3 \times 10^{-6}$  y  $B = 3.6 \times 10^{-5} \text{ Wb/m}^2$ . (c)  $H = 0.40 \text{ A/m}$  y la permeabilidad relativa es 1.00041.
- \*16. En el análisis del diamagnetismo en la sección 21.3, se supuso que la aplicación de una induc-