

suponga que el potencial de una carga puntual estuviera dado por  $(4\pi\epsilon_0)^{-1} qe^{-\beta r}/r$ , en que  $\beta$  es una constante. En tales condiciones, demuestre que el potencial fuera de un cascarón esférico cargado ya no está dado por esta expresión, sino que es

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\beta R}}{2R} \left( 1 + \frac{R}{r} \right) \quad \text{para } r > R$$

en que  $R$  es el radio del cascarón. Demuestre también que el potencial dentro de la esfera ya no vale cero.

43. Una distribución de carga continua y esféricamente simétrica, produce un potencial que varía proporcionalmente a  $\ln r$ . ¿Cómo varía el campo eléctrico? ¿Qué clase de distribución de carga produciría este campo?

44. Un alambre de longitud  $L$  tiene una densidad de carga longitudinal uniforme  $\lambda$ . Determine el campo eléctrico en función de la distancia  $r$  desde el centro del alambre (medida perpendicularmente a éste).

45. Calcule el potencial electrostático a la distancia  $x$  desde una lámina cargada finita pero muy grande, que tiene una densidad de carga uniforme  $\sigma$ . Utilizando este resultado, evalúe el campo eléctrico. Aplique luego el límite para una lámina infinita y demuestre que el campo concuerda con el que se obtiene a partir de la ley de Gauss. Para simplificar, suponga que la lámina es circular y que el punto de campo está en un eje perpendicular al centro de la misma.

46. El campo eléctrico en una pequeña región del espacio está dado por  $E_x = 0$ ,  $E_y = 0$ ,  $E_z = 10z$  volts/metro. (a) Determine el flujo que pasa por un cubo que tiene 30 cm de lado y está centrado en el origen; las caras del cubo son normales a los ejes de coordenadas. (b) ¿Cuánta carga contiene el cubo? (c) Obtenga una expresión para la densidad de carga  $\rho$ .

47. Un globo de radio  $r$  tiene una carga  $Q$  distribuida uniformemente en su superficie. Demuestre que el globo experimenta una fuerza electrostática hacia afuera por unidad de área superficial dada por

$$\frac{F}{A} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

[Sugerencia: Halie cómo varía la energía potencial con  $r$ .]

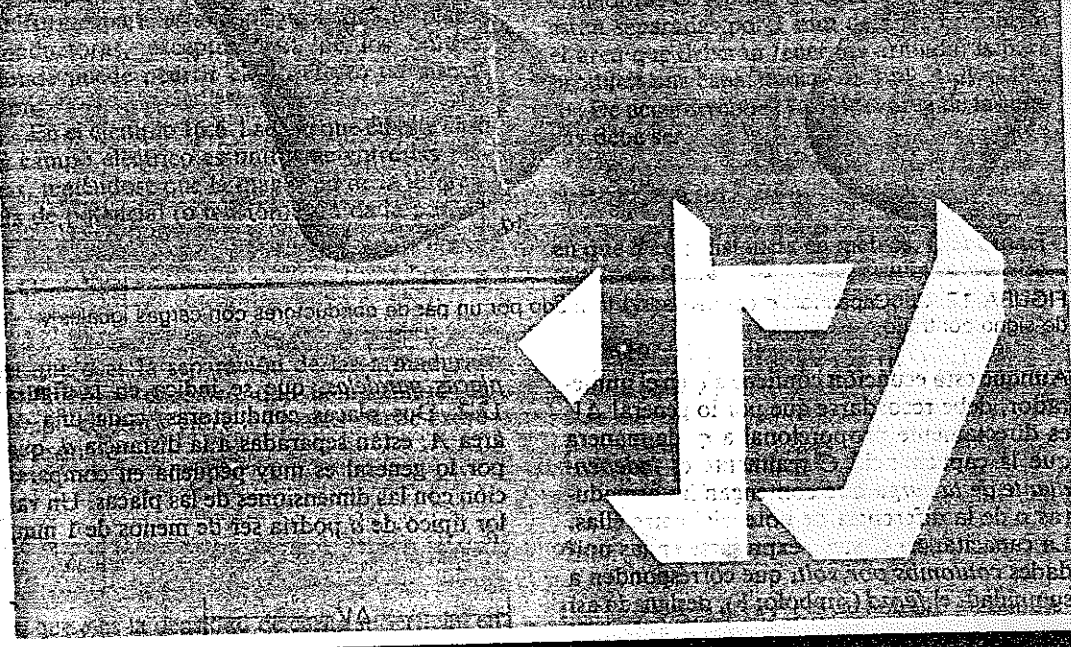
48. El campo eléctrico en una región dada está expresado por  $E_x = 3x^2$  volts/metro,  $E_y = 0$ ,  $E_z = 0$ . Determine la carga que contiene un cubo de 1 m de lado, si una de sus caras está en el plano  $xy$  y la cara opuesta está en  $x_z = 1$  m.

49. Suponga por un momento que el protón es una carga puntual. ¿Qué trabajo se realiza para traer un electrón desde el infinito hasta una distancia de  $10^{-16}$  cm del centro del protón? Si se supone que el protón es una esfera de  $10^{-15}$  cm de radio y que tiene una distribución de carga uniforme en todo su volumen, ¿qué trabajo se necesita para mover un electrón desde el infinito hasta una distancia de  $10^{-16}$  cm desde el centro del protón?

50. Suponga que en un átomo de helio los dos electrones están en órbitas circulares con radios de  $0.5 \times 10^{-8}$  cm y  $1.0 \times 10^{-8}$  cm alrededor de un núcleo puntual con carga  $+2e$ . Calcule los valores máximo y mínimo de la energía potencial del sistema.

51. Una distribución de densidad de carga es uniforme en las direcciones  $y$  y  $z$ , pero varía en la dirección  $x$  de acuerdo con la ecuación  $\rho(x) = \alpha x^2$ , en que  $\alpha$  es una constante. Se sabe que el campo eléctrico es nulo en  $x = 0$ . Obtenga: (a) el campo eléctrico a una distancia  $x$  del plano  $x = 0$ , (b) la diferencia de potencial entre cualquier punto y el plano  $x = 0$ .

# CAPACITANCIA, MATERIALES DIELECTRICOS Y POLARIZACIÓN



## 17.1 Capacitancia

Hay muchos dispositivos, *elementos de circuito*, que se usan cotidianamente en los circuitos eléctricos ordinarios. En los capítulos restantes del libro se estudiarán algunos de ellos en detalle. Uno de los más importantes es un elemento *electrostático* que se conoce por *capacitor* (o, anteriormente, *condensador*). Considérense dos cuerpos conductores  $A_1$  y  $A_2$  que tienen cargas de igual magnitud pero signo contrario, como se muestra en la figura 17.1. Las cargas  $-q$  y  $+q$  contenidas en ellos, respectivamente, están distribuidas en la superficie. Como se vio en el capítulo anterior, cada una de las superficies conductoras debe ser equipotencial, por lo que todo el cuerpo  $A_1$  está al potencial  $V_1$  mientras que todo el cuerpo  $A_2$  está al potencial  $V_2$ . Cualquier disposición semejante de conductores (llamados

armaduras) con cargas iguales y opuestas se conoce como *capacitor*.

La magnitud de la diferencia de potencial  $V_2 - V_1$  entre estas armaduras se denota por  $\Delta V$ . De ordinario, esta diferencia de potencial es *directamente proporcional* a la magnitud de la carga  $q$ . La constante de proporcionalidad se puede escribir como  $1/C$ , en que  $C$  se conoce como la *capacitancia* (o, *anteriormente, capacidad electrostática*) del dispositivo de dos conductores. Así, se puede escribir

$$\Delta V = \frac{1}{C} q$$

o también

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

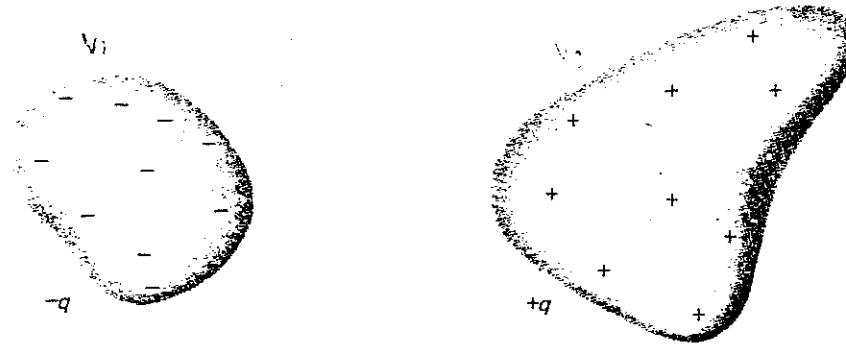


FIGURA 17.1. Capacitor (o condensador) formado por un par de conductores con cargas iguales y de signo contrario.

Aunque esta ecuación contiene a  $q$  en el numerador, debe recordarse que por lo general  $\Delta V$  es directamente proporcional a  $q$ , de manera que la capacitancia  $C$  realmente es independiente de la carga que contengan las armaduras o de la diferencia de potencial entre ellas. La capacitancia  $C$  suele expresarse en las unidades *coulombs por volt*, que corresponden a su unidad, el *farad* (símbolo: F), designada así en honor del físico inglés Michael Faraday. El farad es una unidad de capacitancia sumamente grande para la práctica; de modo que, por lo general, son unidades más apropiadas el microfarad ( $\mu\text{F}$ , igual a  $10^{-6}$  F) o el picofarad (pF, igual a  $10^{-12}$  F).

La capacitancia de un sistema dado de conductores depende de dos factores importantes:

1. La *disposición geométrica* de los conductores, que incluye el tamaño, la forma y el espaciamiento de las armaduras, al igual que sus relaciones geométricas.
2. Las propiedades del *medio* en que están dichos conductores (aire, vacío, material aislante o dieléctrico, etc.).

Más adelante en este capítulo se estudiará la influencia del medio, después de analizar ciertas propiedades importantes de los dieléctricos. Por ahora se estudiará el problema de cómo la capacitancia depende de la configuración geométrica. Quizá el ejemplo más sencillo de capacitor sea el llamado *capacitor de*

*placas paralelas*, que se indica en la figura 17.2. Dos placas conductoras, cada una de área  $A$ , están separadas a la distancia  $d$ , que por lo general es muy pequeña en comparación con las dimensiones de las placas. Un valor típico de  $d$  podría ser de menos de 1 mm,

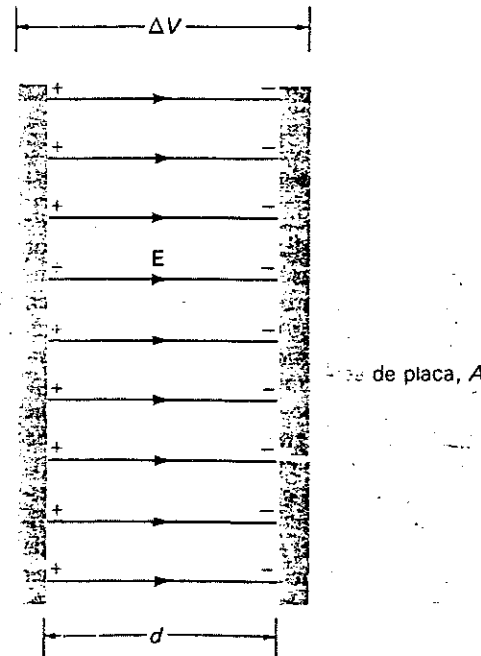


FIGURA 17.2. Capacitor de placas paralelas

en tanto que las dimensiones de la placa pueden ser cientos o miles de veces mayores. El campo eléctrico entre las placas es bastante uniforme para esta configuración de placas conductoras, excepto cerca de los bordes, donde puede ocurrir cierto efecto de dispersión.

En el ejemplo 16.6.1 se vio que en este caso el campo eléctrico es uniforme entre las placas, teniéndose que la magnitud de la diferencia de potencial (o tensión) está dada por

$$\Delta V = Ed \quad (17.1.2)$$

en que  $d$  es la separación de las armaduras. También se encontró que la magnitud del campo eléctrico entre las placas puede expresarse como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (17.1.3)$$

en que  $\sigma$  es la densidad de carga superficial en aquellas. Utilizando la expresión  $\sigma = q/A$  en combinación con las ecuaciones (17.1.1) a (17.1.3), se encuentra que

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{Ed} = \frac{q}{(\sigma/\epsilon_0)d} = \frac{qA\epsilon_0}{qd}$$

o sea también,

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (17.1.4)$$

para la *capacitancia de un capacitor de placas paralelas en el vacío*. En este cálculo se utilizó la permisividad dieléctrica,  $\epsilon_0$ , del vacío, que no es muy distinta de la del aire. Se puede prever que este resultado tenga que ser modificado en cierta medida si se llena el espacio entre las placas conductoras con un material dieléctrico, en cuyo caso se altera la permisividad. Más adelante se estudiará cómo y por qué se modifica esta propiedad, por la presencia de diversas sustancias aislantes.

### EJEMPLO 17.1.1

Un capacitor de placas paralelas se hace con armaduras de lámina de aluminio. Las placas están separadas por 1 mm de aire. Encontrar el área que deberán tener las armaduras para producir una capacitancia de 1 pF, 1  $\mu\text{F}$  o 1 F.

De acuerdo con (17.1.4), el área de las placas debe ser

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0}$$

en que  $d$  es la distancia en metros,  $C$  la capacitancia en farads y  $\epsilon_0$  la permisividad del aire. Sustituyendo estos valores, se obtiene

$$A_1 = \frac{(10^{-12})(10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{(10^{-6})(10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^2 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{(1)(10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}} = 1.13 \times 10^8 \text{ m}^2$$

Es claro que el área  $A_1$  es de tamaño razonable y que bien puede corresponder a un capacitor real. Por otra parte,  $A_2$  es bastante grande mientras que  $A_3$  es en verdad grandísima. Es obvio decir que sería totalmente impráctico construir un capacitor de 1 F utilizando el diseño anterior.

### EJEMPLO 17.1.2

La ruptura eléctrica del aire ocurre siempre que la intensidad del campo eléctrico excede de unos 30 000 V/cm. Hallar la máxima carga que puede contener un capacitor de placas paralelas de 0.002  $\mu\text{F}$  si sus placas tienen 100  $\text{cm}^2$  de área.

La carga máxima  $q_{\text{máx}}$  es proporcional al voltaje máximo  $V_{\text{máx}}$  que puede aplicarse entre las placas:

$$q_{\text{máx}} = C \Delta V_{\text{máx}} \quad (17.1.5)$$

pero

$$E_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{d}$$

en que  $d$  es la separación de las placas. Puesto que

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{y} \quad E_{\text{máx}} = \frac{V}{d}$$

observando se obtiene que  $30\,000 \text{ V/cm} = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$  y  $100 \text{ cm}^2 = 0.01 \text{ m}^2$ , entonces

$$q_{\text{máx}} = CE_{\text{máx}}d = E_{\text{máx}}\epsilon_0 A \\ = (3 \times 10^6)(8.85 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^{-2}) \\ = 2.66 \times 10^{-7} \text{ C}$$

Si la carga de placas es mayor que esta cantidad, el aire se vuelve conductor y se neutralizarán las cargas en las mismas.

Además del capacitor de placas paralelas, hay mas tipos de capacitores simples. En los dos ejemplos siguientes se estudian los casos de capacitores cilíndricos y esféricos.

#### EJEMPLO 17.1.3 CAPACITOR CILÍNDRICO

Como se muestra en la figura 17.3, consiste en dos conductores cilíndricos largos y huecos, de radios  $r_a$  y  $r_b$ , montados coaxialmente. Obtener una expresión para la capacitancia por unidad de longitud si la región entre los cilindros contiene aire.

Supóngase que el cilindro interno tiene una carga por unidad de longitud de  $+\lambda$ , la que debe residir en la pared exterior del casca-

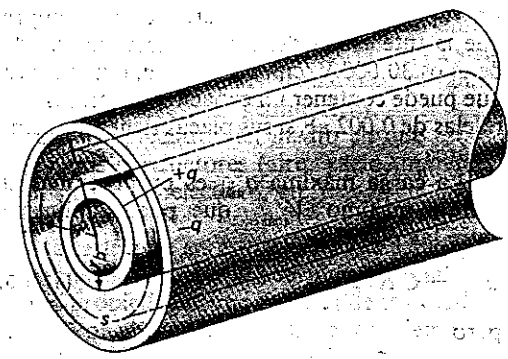


FIGURA 17.3. Capacitor cilíndrico de gran longitud

ron cilíndrico para que el campo dentro del conductor sea cero. El cilindro externo tiene una carga por unidad de longitud de  $-\lambda$ , localizada en la frontera interior. De acuerdo con la ley de Gauss y utilizando una superficie gaussiana cilíndrica de radio  $r$ , el campo eléctrico apunta radialmente hacia el exterior y se obtiene de

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = (E)(2\pi r l) = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

o sea,

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (17.1.6)$$

Según (16.5.22), la diferencia de potencial entre los cilindros tiene la magnitud

$$\Delta V = \int_{r_b}^{r_a} E \, dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_b}^{r_a} \frac{dr}{r}$$

o sea,

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_b} \quad (17.1.7)$$

Un tramo de longitud de  $l$  del cilindro tiene una carga  $q = \lambda l$ , por lo que dicho tramo tendrá la capacitancia

$$C = \frac{\lambda l}{\Delta V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_a}{r_b}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \quad (17.1.8)$$

En consecuencia, la capacitancia por unidad de longitud es

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_a}{r_b}} \quad (17.1.9)$$

#### EJEMPLO 17.1.4 CAPACITOR ESFÉRICO

Dos esferas conductoras concéntricas tienen radios  $r_a$  y  $r_b$ , como se muestra en la figura

17.4. Determinar la capacitancia de este dispositivo.

El campo eléctrico se puede obtener utilizando la ley de Gauss en combinación con la superficie gaussiana que se indica en la figura 17.4. Así, se puede escribir

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = 4\pi r^2 E \quad \text{o sea,} \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (17.1.10)$$

en la región entre las esferas. Por tanto, la diferencia de potencial entre estas últimas se encuentra nuevamente de (16.5.22):

$$\Delta V = \int_{r_b}^{r_a} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Por tanto,

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a} \quad (17.1.11)$$

A menudo conviene hablar de la capacitancia de un solo conductor, en cuyo caso se supone que el segundo conductor con carga opuesta está ubicado en el infinito. Con esta definición

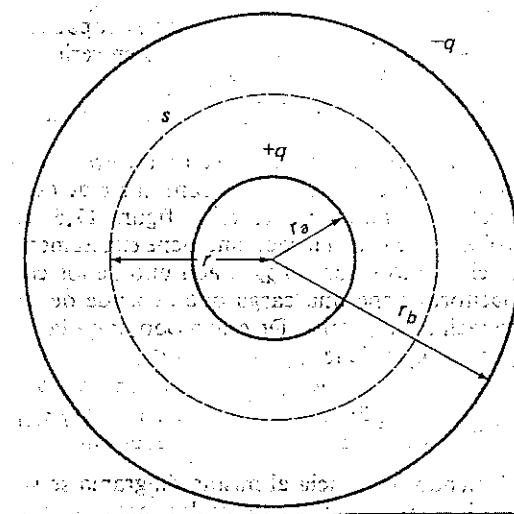


FIGURA 17.4. Capacitor esférico.

se puede utilizar la ecuación (17.1.10) para calcular la capacitancia de un solo conductor esférico de radio  $r_a$ . En este caso considera al segundo como una esfera de radio muy grande  $r_b$  (es decir,  $r_b \rightarrow \infty$ ). De esta manera se puede obtener virtualmente

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_a$$

como la capacitancia de una esfera de radio  $r_a$ .

#### 17.2 Capacitores conectados en serie o en paralelo

En los circuitos eléctricos se pueden conectar los capacitores entre sí y con otros elementos de circuito en una diversidad de formas. En un diagrama de circuito se utiliza el símbolo  $\text{---}||\text{---}$  para representar un capacitor de capacitancia fija y el símbolo  $\text{---}||\text{---}$  para representar un capacitor con capacitancia variable. En un capacitor de este último tipo se tienen medios para ajustar la separación o la disposición entre las armaduras paralelas, por ejemplo, mediante una perilla. Desde luego, hay otras maneras de construir capacitores cuya capacitancia pueda ajustarse.

Ahora se considerará el efecto de conectar dos capacitores diferentes, inicialmente descargados, como se muestra en la figura 17.5a. Si se aplica un voltaje o tensión entre los puntos  $a$  y  $c$ , aparecerán cargas en las cuatro superficies conductoras. Para simplificar, supóngase que se está trabajando con capacitores de placas paralelas, cuya separación entre sí es mucho mayor que la existente entre las placas de cualquiera de ellos. Al aplicar el voltaje aparece la carga  $+q$  en la placa 1, y en la placa 4 debe aparecer una carga opuesta  $-q$ . Originalmente, las placas 2 y 3, así como el dispositivo externo que proporciona el voltaje eran eléctricamente neutros y deben permanecer de esa manera, pues se supone que están aislados de sus alrededores. Por tanto, si en la placa 1 aparece la carga  $+q$ , en la placa 2 debe aparecer una carga de compensación  $-q$ , lo que dejará a la placa 3 con una carga  $+q$ ; puesto que la suma de las cargas en las placas 2 y 3, deben ser cero. Pero, la carga  $+q$  en la placa 3 será exactamente la necesaria para equilibrar la carga  $-q$  en la placa 4, o más

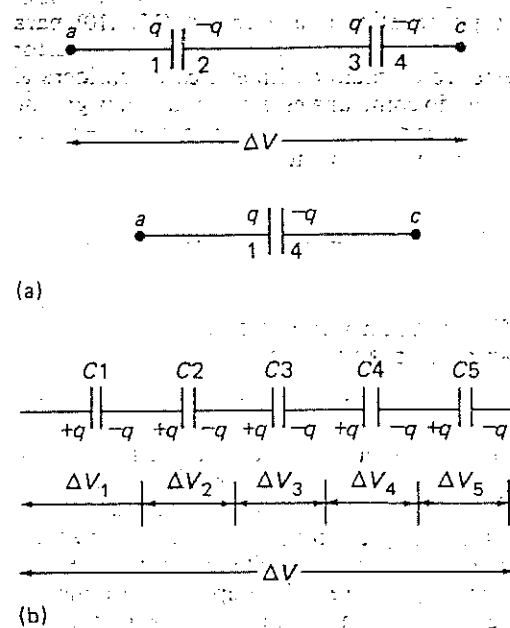


FIGURA 17.5. (a) Dos capacitores en serie (arriba) y su capacitor equivalente (abajo). (b) Cargas y diferencias de potencial para una conexión en serie de varios capacitores.

Como las placas 1 y 4 son conductores con cargas opuestas, constituyen una especie de capacitor. Sin embargo éste no es un capacitor *simple* de placas paralelas, pues éstas están muy separadas, además de que hay otros conductores en medio. Se puede considerar que las placas 2 y 3 y su conductor de conexión son *una sola armadura* en la que ha ocurrido una separación de cargas positivas y negativas. Entonces, como se explicara antes, la carga en la placa 2 debe ser \$-q\$, mientras que en la placa 3 debe ser \$+q\$. Cuando los capacitores se conectan como en la figura 17.5a, se dice que están *en serie*. La afirmación de que los capacitores están conectados en serie implica que todo incremento de carga que aparezca en uno de los capacitores necesariamente aparece en los demás. En este caso de dos capacitores inicialmente descargados, en el primero aumentó su carga desde 0 hasta \$q\$, y como se ha visto, necesariamente el segundo experimentó el mismo incremento. Como se mencionara an-

tes, se puede considerar que esta combinación de capacitores es *uno solo* con cierta *capacitancia equivalente* \$C\$, como se indica en la figura 17.5b. Entonces, \$C\$ está relacionada con \$\Delta V\_{AC}\$ por

$$\Delta V_{AC} = \frac{q}{C} \quad (17.2.1)$$

Pero es claro que

$$\Delta V_{AC} = \Delta V_{AB} + \Delta V_{BC}$$

o sea,

$$\Delta V_{AC} = \frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \quad (17.2.2)$$

En consecuencia, la capacitancia equivalente \$C\$ debe estar dada por

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{o bien} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (17.2.3)$$

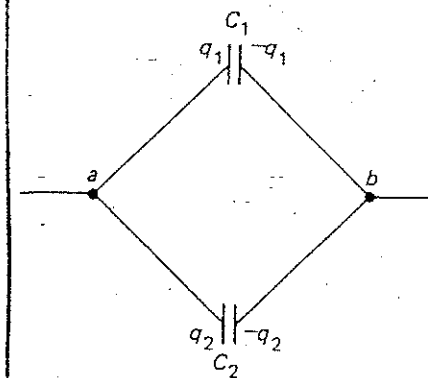
Por lo tanto, si se deseara reemplazar los dos capacitores \$C\_1\$ y \$C\_2\$ por uno solo que obtuviera la *misma* carga \$q\$ al aplicarle el *mismo* voltaje \$\Delta V\_{AC}\$, su capacitancia estaría dada por la ecuación (17.2.3). La generalización de (17.2.3) al caso de \$N\$ capacitores conectados en serie es muy directa y da el siguiente resultado

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad \text{para } N \text{ capacitores en serie} \quad (17.2.4)$$

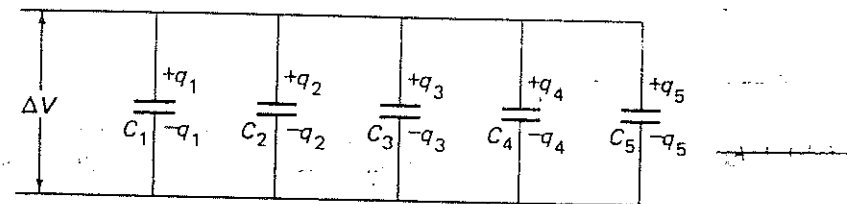
También se puede conectar un grupo de capacitores *en paralelo*. Al conectarse de esta manera, como se indica en la figura 17.6, el voltaje o tensión en cada uno tiene exactamente el mismo valor \$\Delta V\_{AB}\$. Cada uno de los capacitores tiene una carga que depende de su capacitancia propia. De este modo, para la figura 17.6 se tiene

$$\Delta V_{AB} = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \quad (17.2.5)$$

Haciendo referencia al mismo diagrama se ve que las armaduras que tienen las cargas \$+q\_1\$ y \$+q\_2\$ pueden considerarse como una sola, en



(a)



(b)

FIGURA 17.6. (a) Representaciones equivalentes de una combinación en paralelo de dos capacitores. (b) Cargas y diferencias de potencial de una conexión en paralelo de varios capacitores.

tanto que las que tienen las cargas \$-q\_1\$ y \$-q\_2\$, pueden considerarse también como una sola armadura. Por tanto, la combinación puede reemplazarse por un solo capacitor *equivalente* de carga \$q\_1 + q\_2\$ que también tiene un voltaje \$\Delta V\_{AB}\$ a través de él. Como el capacitor combinado o equivalente tiene la capacitancia \$C = (q\_1 + q\_2)/\Delta V\_{AB}\$, se encuentra que

$$C = \frac{q_1 + q_2}{\Delta V_{AB}} = \frac{q_1}{\Delta V_{AB}} + \frac{q_2}{\Delta V_{AB}} = C_1 + C_2 \quad (17.2.6)$$

Por tanto, la capacitancia equivalente de un grupo de capacitores *en paralelo* se obtiene sumando sus capacitancias individuales. Para \$N\$ capacitores en paralelo, la capacitancia equivalente será

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_N \quad \text{para } N \text{ capacitores en paralelo} \quad (17.2.7)$$

Utilizando las leyes para la combinación en serie o en paralelo antes deducidas, es posible reducir gradualmente redes complejas de capacitores, como la que se muestra en la figura 17.7, a un capacitor equivalente simple. Pero hay muchas redes eléctricas en las que esto no es posible. En el circuito de los capacitores de la figura 17.8 se presenta un caso de esta naturaleza. Por ahora, la atención se centrará en problemas que puedan manejarse en función de combinaciones en serie y en paralelo.

#### EJEMPLO 17.2.1

Dos capacitores de placas paralelas con capacitancias de \$4 \mu\text{F}\$ y \$6 \mu\text{F}\$, se tienen para experimentación en un laboratorio. Encontrar los valores posibles de capacitancia que pueden obtenerse combinándolos. Si se aplica una



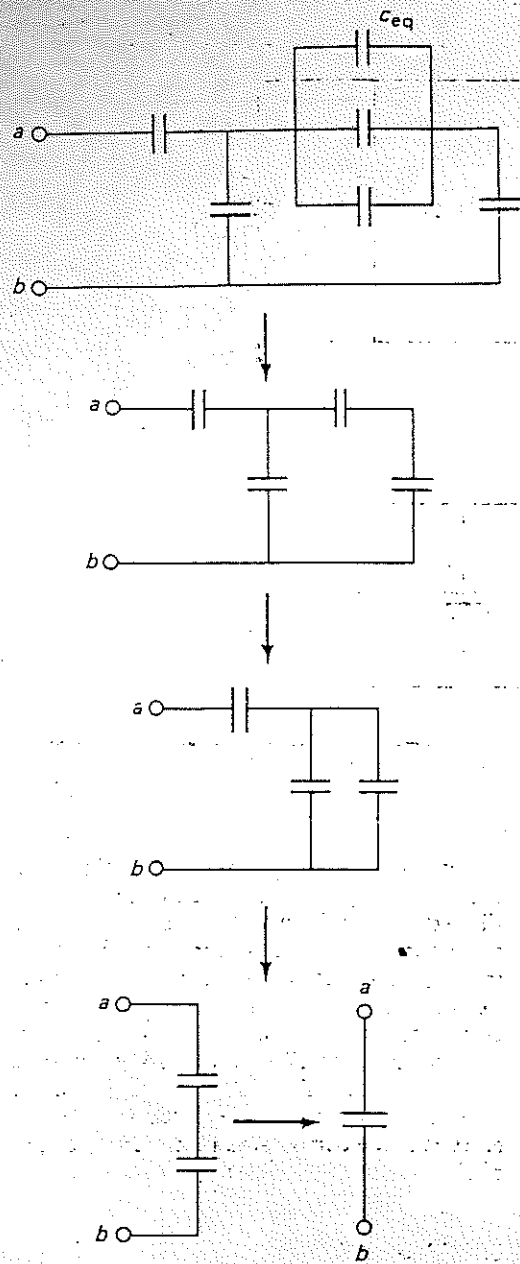


FIGURA 17.7. Reducción de una red de capacitancia a un solo capacitor equivalente mediante la aplicación sucesiva de leyes deducidas para la capacitancia equivalente en serie y en paralelo.

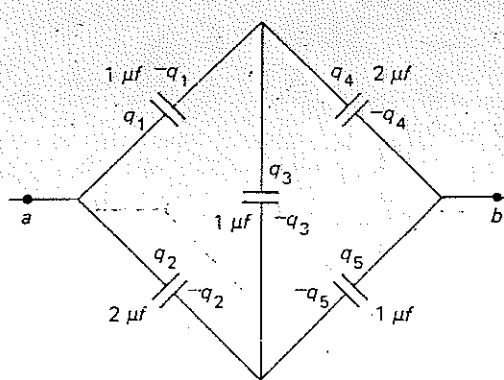


FIGURA 17.8. Red de capacitores que no pueden representarse como una combinación simple en serie o en paralelo.

tensión de 6 V a cada una de las combinaciones de capacitores, determinar la carga en cada capacitor, suponiendo que no hay carga inicial.

Hay cuatro valores posibles de capacitancia:

- (a)  $C_1 = 4 \mu\text{F}$  el capacitor 1 solo
- (b)  $C_2 = 6 \mu\text{F}$  el capacitor 2 solo
- (c)  $C_1 + C_2 = 10 \mu\text{F}$  los 1 y 2 en paralelo

- (d)  $\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2.4 \mu\text{F}$  los 1 y 2 en serie

En el caso (a), una diferencia de potencial de 6 V carga el capacitor de manera que

$$q_1 = C_1 \Delta V = 2.4 \times 10^{-5} \text{ C}$$

En igual forma, en el caso (b) el capacitor 2 desarrolla una carga

$$q_2 = C_2 \Delta V = 3.6 \times 10^{-5} \text{ C}$$

Para la conexión en paralelo (c), la carga total en la combinación es  $q_1 + q_2$ , en que nuevamente  $q_1 = 2.4 \times 10^{-5} \text{ C}$  y  $q_2 = 3.6 \times 10^{-5} \text{ C}$ .

Por último, para la combinación en serie (d), la carga en el capacitor combinado es

$$q = (2.4 \times 10^{-5})(6) = 1.44 \times 10^{-5} \text{ C}$$

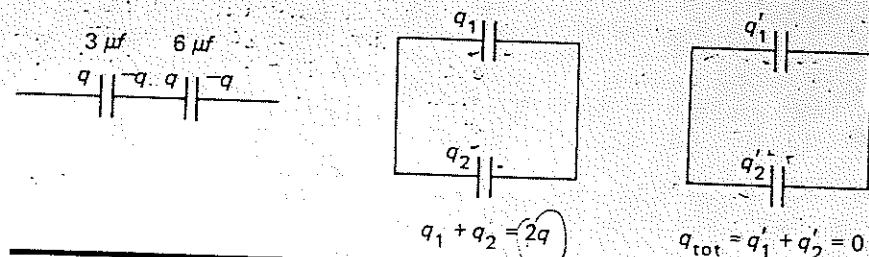


FIGURA 17.9

### EJEMPLO 17.2.2

Tres capacitores idénticos, cada uno de  $1 \mu\text{F}$  de capacitancia, se cargan respectivamente aplicándoles 1 V, 2 V y 4 V. Luego se suprimen las fuentes de tensión dejando a los tres capacitores cargados. En seguida se conectan en paralelo, conectando entre sí, las placas cargadas negativamente y conectando de igual manera las cargadas positivamente. Evaluar las cargas y voltajes en cada uno de los capacitores después de hacer esta conexión. Determinar la capacitancia de la combinación.

Inicialmente, los capacitores individuales tienen las cargas

$$q_1 = C_1 \Delta V_1 = (1 \times 10^{-6})(1) = 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_2 = C_2 \Delta V_2 = (1 \times 10^{-6})(2) = 2 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_4 = C_4 \Delta V_4 = (1 \times 10^{-6})(4) = 4 \times 10^{-6} \text{ C}$$

Después de la conexión, el voltaje en cada uno de los capacitores es idéntico, pues están conectados en paralelo. Denótese con  $\Delta V$  el voltaje desconocido en los capacitores, y sean  $q_1'$ ,  $q_2'$  y  $q_4'$  sus cargas respectivas. Entonces, de (17.1.1),

$$\Delta V = \frac{q_1'}{1 \mu\text{F}} = \frac{q_2'}{1 \mu\text{F}} = \frac{q_4'}{1 \mu\text{F}}$$

por lo que, como cada uno de los capacitores es idéntico a los demás, tendrá la misma carga. Así, se tiene

$$q_1 + q_2 + q_4 = 7 \times 10^{-6} \text{ C} = 3q_1'$$

y también,

$$q_1' = q_2' = q_4' = \frac{7}{3} \times 10^{-6} \text{ C} = 2.33 \times 10^{-6} \text{ C}$$

En consecuencia, el voltaje  $\Delta V$  es

$$\Delta V = \frac{2.33 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-6}} = 2.33 \text{ V}$$

Es claro que la capacitancia de la combinación es

$$C_1 + C_2 + C_4 = 3 \mu\text{F}$$

ya que los capacitores están conectados en paralelo.

### EJEMPLO 17.2.3

Dos capacitores de  $3 \mu\text{F}$  y  $6 \mu\text{F}$  de capacitancia están conectados en serie y a los terminales de un acumulador (o "batería") de 12 V. Calcular las cargas y diferencias de potencial en cada uno. Luego se desconectan de la fuente y se conectan en paralelo. Encontrar la diferencia de potencial resultante en ambas formas de conexión.

Las cargas adquiridas durante la conexión en serie se encuentran de manera por demás simple utilizando la fórmula

$$q = C \Delta V$$

en que  $C$ , la capacitancia equivalente, tiene el valor  $C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ , de donde

$$C = \frac{(3)(6)}{(3+6)} = 2 \mu\text{F}$$

En consecuencia, la carga en la combinación, y también en cada uno de los capacitores, es

$$q = C \Delta V = (2 \times 10^{-6})(12) = 2.4 \times 10^{-5} \text{ C}$$

Después de quitar la batería se separan los capacitores y se supondrá que cada uno retiene su carga hasta que se conecten de nuevo. En la figura 17.9 se ilustran las dos conexiones posibles en paralelo. Si se conectan entre sí las placas positivas, el capacitor combinado tiene la carga  $2q$ , o sea  $4.8 \times 10^{-5} \text{ C}$ . Puesto que la capacitancia equivalente es  $C_1 + C_2 = 9 \mu\text{F}$ , el voltaje de la combinación es

$$\Delta V = \frac{2q}{C_1 + C_2} = \frac{4.8 \times 10^{-5} \text{ C}}{9 \times 10^{-6} \text{ F}} = 5.33 \text{ V}$$

y las cargas en los capacitores respectivos son

$$q_1 = C_1 \Delta V = 1.6 \times 10^{-5} \text{ C}$$

$$q_2 = C_2 \Delta V = 3.2 \times 10^{-5} \text{ C}$$

Cuando se efectúa la conexión con las polaridades opuestas, la carga neta es cero, de manera que el voltaje también es cero. En este caso los capacitores volverán a su condición sin carga.

### 17.3 Almacenamiento de energía en un capacitor

La utilidad de los capacitores como elementos de circuito proviene de su capacidad para *almacenar energía*. A fin de comprender el proceso, considérese un capacitor simple de placas paralelas que inicialmente está descargado (fig. 17.10a). El capacitor se conecta a una fuente de potencial representada por un acumulador de voltaje  $\Delta V_f$ , que cuando se cierra el interruptor como se ve en la figura 17.10b, transfiere carga de una placa a la otra hasta que la diferencia de potencial a través del capacitor sea *igual* (aunque de polaridad opuesta) a la que proporciona la fuente. Cuando se alcanza esta etapa, ilustrada en la figura 17.10c, se detiene el flujo de carga de la batería al capacitor. Este queda cargado a una diferencia de potencial  $\Delta V_f$  y tiene una carga  $\pm Q$  en sus placas. Después de estudiar los conceptos de resistencia y las ecuaciones de Kirchhoff para circuitos que se presentan en el siguiente capítulo, se entrará en mayores detalles de este proceso de carga de capacitores.

En cierta etapa intermedia del proceso,

como la que se muestra en la figura 17.10b, una placa tiene la carga  $-q$  mientras que la otra tiene la carga  $+q$ . En este momento, la diferencia de potencial en el capacitor está dada por

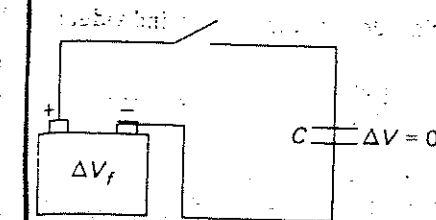
$$\Delta V = \frac{q}{C} \quad (17.3.1)$$

Después de transcurrido un pequeño intervalo de tiempo  $dt$ , la carga habrá aumentado en una cantidad  $dq$ . Este incremento corresponde a un cambio en la energía potencial igual a  $dq$  multiplicado por la diferencia de potencial  $\Delta V$ , a través de la cual se ha transferido la carga, de acuerdo con la ecuación (16.6.1). En consecuencia, en el tiempo  $dt$  la energía potencial del capacitor ha aumentado en la cantidad

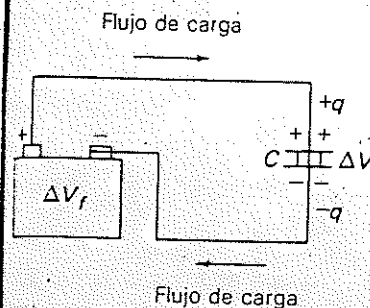
$$dU = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq \quad (17.3.2)$$

Este aumento de energía ocurre a costa de la fuente que realiza *trabajo* sobre el sistema, incrementando la energía potencial de las cargas. En la figura 17.10d se muestra una analogía mecánica, en la que un individuo efectúa trabajo levantando cajas hasta una plataforma suspendida de unas cuerdas. En este caso, el hombre hace trabajo siempre que levanta una caja e incrementa así la energía potencial gravitacional del sistema. No obstante, hay aquí una diferencia importante entre los dos casos que se ilustran en la figura 17.10. La diferencia de energía potencial entre las placas del capacitor es *variable*, de manera que la cantidad de trabajo realizado por la batería no solamente depende de  $dq$ , sino también de la *diferencia de potencial*  $\Delta V$  entre las placas, que *cambia* a medida que se acumula la carga. En la analogía mecánica, el individuo efectúa la misma cantidad de trabajo siempre que levanta una caja, pues no cambia la altura de levantamiento. ¿Puede pensarse en alguna modificación de tal analogía para que se asemeje más al resultado expresado por la ecuación (17.3.2)?

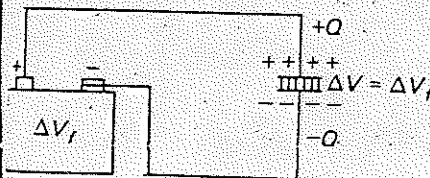
Utilizando la (17.3.2) se puede obtener por integración la energía total almacenada por el capacitor. Al integrar, es posible colocar la ca-



(a)



(b)



(c)

El hombre efectúa trabajo aumentando la energía potencial de las cajas que sube a la plataforma (d)

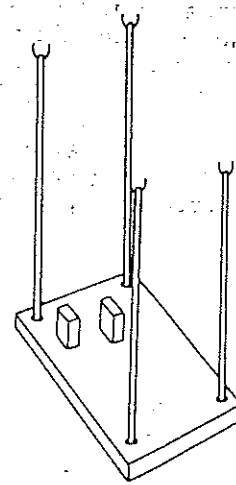


FIGURA 17.10. (a), (b) y (c). Etapas sucesivas de la carga de un condensador con una batería; en (c) se alcanza una condición de equilibrio, en la que se almacena determinada cantidad de energía electrostática en el capacitor. (d) Proceso mecánico análogo al de almacenamiento de energía potencial electrostática ilustrado en (a), (b) y (c). En este proceso, se almacena energía potencial mecánica al colocar ladrillos en la plataforma elevada. En ambos casos, la fuente original de la energía potencial almacenada es energía química transformada en energía eléctrica por la batería o acumulador en (a), (b) y (c), y en energía mecánica por el organismo humano en (d).

pacitancia  $C$  fuera de la integral, pues es *independiente* de la carga  $q$  del capacitor:

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (17.3.3)$$

En que  $Q$  es la carga final impartida al capacitor. La ecuación (17.3.3) puede escribirse de varias maneras utilizando la relación (17.1.1) entre  $Q$ ,  $C$  y la tensión final  $\Delta V$ . En conse-

cuencia,<sup>1</sup>

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \quad (17.3.4)$$

<sup>1</sup> Este caso es muy parecido al que se estudió en el ejemplo 16.6.4. El proceso que se estudió ahí equivale a cargar una sola esfera conductora de radio  $R$  hasta una carga final  $Q$ . Como se vio en el ejemplo 17.1, se puede

La energía de potencial electrostática almacenada en el capacitor se puede utilizar conectándolo con algún otro circuito eléctrico. El uso de esta energía es análogo a la posibilidad de utilizar la energía potencial de las cajas levantadas de la figura 17.10d. Por ejemplo, si se soltaran las cuerdas de la figura, las cajas perderían su energía potencial y podrían realizar un trabajo útil.

### EJEMPLO 17.3.1

Se conectan en serie dos capacitores de  $5 \mu\text{F}$  y de  $3 \mu\text{F}$ , que inicialmente están descargados. Si se aplica una diferencia de potencial de  $10 \text{ V}$  a la combinación en serie, calcular la energía total y la energía almacenada por cada capacitor. Se desconectan luego de la fuente y uno de otro, y se vuelven a conectar en paralelo uniéndolo entre sí las placas positivas, y en la misma forma las placas negativas. Encontrar la nueva energía del sistema y explicar por qué es distinta a la de la conexión original en serie.

La capacitancia equivalente de esta conexión en serie es

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{15}{8} \mu\text{F}$$

Cuando se conecta esta combinación a una fuente de  $10 \text{ V}$ , cada capacitor adquiere una carga de

$$q = C \Delta V = \left(\frac{15}{8} \times 10^{-6}\right)(10) = 1.88 \times 10^{-5} \text{ C}$$

De acuerdo con (17.3.3), la energía de la combinación es entonces

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{15}{8} \times 10^{-6}\right) (10)^2 = 9.4 \times 10^{-5} \text{ J}$$

considerar que tal esfera es una armadura de un capacitor esférico en el que la otra placa tiene radio infinito y la capacitancia es  $4\pi\epsilon_0 R$ . Será evidente que la ecuación (16.6.25), que representa la energía potencial almacenada en este capacitor esférico, se puede escribir como  $U = Q^2/2C$ , en que  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ ; en esta forma, es idéntica al resultado dado anteriormente.

Las energías de los capacitores individuales son

$$U_1 = \frac{q^2}{2C_1} = \frac{(1.88 \times 10^{-5})^2}{2(5 \times 10^{-6})} = 3.5 \times 10^{-5} \text{ J}$$

$$U_2 = \frac{q^2}{2C_2} = \frac{(1.88 \times 10^{-5})^2}{2(3 \times 10^{-6})} = 5.9 \times 10^{-5} \text{ J}$$

Cuando las placas se reconectan en paralelo, se tiene una capacitancia equivalente de

$$C_1 + C_2 = 8 \mu\text{F}$$

con una carga igual a

$$2q = 3.76 \times 10^{-5} \text{ C}$$

y por tanto, una energía de

$$U' = \frac{(3.76 \times 10^{-5})^2}{2(8 \times 10^{-6})} = 8.8 \times 10^{-5} \text{ J}$$

Se ve que la energía final  $U'$  es menor que la energía inicial  $U$ . La diferencia en la energía electrostática corresponde a la energía perdida como calor en el proceso de transferir la carga desde uno de los conductores hasta el otro.<sup>2</sup> Este proceso de pérdida de energía, que se conoce como *calentamiento por efecto Joule*, se estudia en el siguiente capítulo.

### EJEMPLO 17.3.2

Se desea conectar  $N$  capacitores idénticos, cada uno de capacitancia  $C$ , a una fuente de voltaje  $V$ . Deducir las expresiones para la energía almacenada en los casos de las conexiones en serie y en paralelo.

Para la conexión en serie, la energía almacenada es

$$U_s = \frac{1}{2} C_s (\Delta V)^2, \text{ en que}$$

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C} + \dots + \frac{1}{C} = \frac{N}{C}$$

<sup>2</sup> Desde luego, inicialmente la energía electrostática aparece como *energía cinética* de los electrones libres que se mueven en los conductores cuando se vuelven a conectar las placas, pero se disipa finalmente como calor a medida que los electrones en movimiento sufren colisiones inelásticas dentro de los conductores.

o sea,  $C_s = \frac{C}{N}$ . (17.3.5)

Por tanto,

$$U_s = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \frac{1}{N} \quad (17.3.6)$$

Cuando los capacitores se conectan en paralelo, cada uno tiene la energía  $\frac{1}{2} C (\Delta V)^2$ ; la energía en todos es  $U_p$ , en que

$$U_p = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 N \quad (17.3.7)$$

En consecuencia, en el caso de una conexión en paralelo claramente es posible obtener mayor almacenamiento de energía. Cuando se tiene una diferencia de potencial fija, la energía almacenada es directamente proporcional a la capacitancia, y es *mucho mayor cuando se tienen  $N$  capacitores en paralelo que para  $N$  en serie*.

Cabe señalar que las armaduras de un capacitor de placas paralelas se atraen eléctricamente, pues tienen cargas opuestas. Es fácil calcular esta fuerza de atracción a partir de la energía potencial  $U$ , si se expresa, esta cantidad en términos de la separación  $x$  de las placas del capacitor. La energía potencial está dada por

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 A} \quad (17.3.8)$$

Ahora puede expresarse la fuerza como

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \quad (17.3.9)$$

En consecuencia, las placas experimentan una atracción mutua que varía en proporción al cuadrado de la carga en el capacitor.

Se encontró que la energía electrostática almacenada por un capacitor es igual al trabajo que se requiere para cargarlo. En vista de lo anterior, la energía almacenada corresponde a la energía potencial electrostática de las cargas que se hallan en las placas del dispositivo. Puede expresarse otro punto de vista con una formulación en términos de los *campos eléctricos* establecidos entre las placas del ca-

pacitor. De acuerdo con esta nueva forma, es posible definir una *densidad de energía  $u$* , como la *energía electrostática almacenada por unidad de volumen*. Esta cantidad es análoga a otras densidades, como la densidad de masa o la de carga. Resulta así que en cualquier punto, la densidad de energía eléctrica  $u$ , depende del cuadrado del campo eléctrico  $E$  en dicho punto. Con mayor precisión, se puede demostrar que  $u$ , está dada por

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (17.3.10)$$

Esta relación es muy general, y aunque no se intentará dar una demostración general, se probará la compatibilidad de esta ecuación con las expresiones para la energía de diversos capacitores. Por lo tanto, como se verá, puede considerarse que en cierta manera la energía de un capacitor está *distribuida en todo el volumen del espacio que contiene el campo eléctrico creado por el capacitor*. Desde este punto de vista, la energía es el *trabajo necesario para establecer ese campo eléctrico en su totalidad*.

Por ejemplo, el capacitor de placas paralelas tiene un campo eléctrico constante  $E$  dentro del volumen comprendido entre sus placas, como está ilustrado en la figura 17.11. La ecuación (17.1.3) da la intensidad de este campo y (17.1.2) expresa la relación entre el campo y la diferencia de potencial  $\Delta V$ . Estas relaciones permiten calcular la capacitancia,

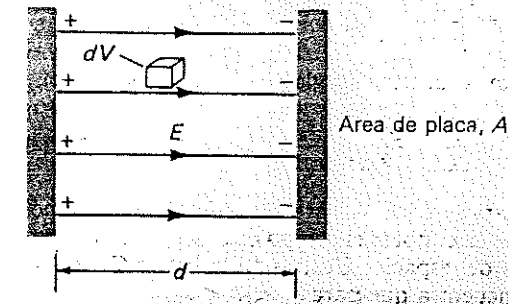


FIGURA 17.11. El elemento de volumen  $dV$  en un campo eléctrico de intensidad  $E$  contiene una energía electrostática igual a  $(\epsilon_0 E^2/2)dV$ .

como se muestra en la ecuación (17.1.4). Según (17.3.4), la energía electrostática total de la distribución de cargas, es  $U = C(\Delta V)^2/2$ . Sin embargo, en el caso del capacitor de placas paralelas, (17.1.3) y (17.1.1) permiten escribir

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (E^2 d^2) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A d \quad (17.3.11)$$

Pero  $Ad$  es sencillamente el volumen de la región entre las placas del condensador. Dividiendo ambos miembros de (17.3.11) entre esta cantidad, es evidente que, al menos en el caso del condensador de placas paralelas, la energía por unidad de volumen dentro de la región del campo es  $\epsilon_0 E^2/2$ , como predijera la ecuación (17.3.10). Esta última ecuación es de aplicación muy general, y proporciona una forma de calcular la energía electrostática asociada a una configuración de campo debida a cualquier distribución de carga, sin importar si la crea el capacitor o no.

### EJEMPLO 17.3.3

Un capacitor esférico consiste en una esfera de radio exterior  $r_b$ , concéntrica con una esfera mayor de radio interior  $r_a$ . Si el capacitor tiene una carga total  $Q$ , hallar la energía total del sistema (a) expresando la energía por medio de la ecuación (17.3.4), y (b) integrando  $u_e$  sobre todo el espacio (fig. 17.12). De acuerdo con (17.1.10), la capacitancia de este condensador esférico es

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a}$$

por lo que la energía almacenada es

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2(r_b - r_a)}{8\pi\epsilon_0 r_a r_b} \quad (17.3.12)$$

Para resolver la parte (b) del problema se necesita conocer el campo eléctrico en cada punto del espacio. Utilizando la ley de Gauss, se encuentra que para  $r_a < r < r_b$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (17.3.13)$$

mientras que  $E = 0$  para los demás valores de  $r$ . Por tanto, toda la energía está contenida entre  $r_a$  y  $r_b$ . En esta región, la densidad de energía es  $\epsilon_0 E^2/2$ , o sea,

$$u_e = \epsilon_0 \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} \quad (17.3.14)$$

La energía  $dU$  entre  $r$  y  $r + dr$  es la energía contenida entre esferas de estos radios. Como el volumen entre dichas esferas es  $4\pi r^2 dr$ , resulta que

$$\begin{aligned} dU &= \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} (4\pi r^2 dr) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr \end{aligned} \quad (17.3.15)$$

En consecuencia, la energía total es

$$\begin{aligned} U &= \int_{r_a}^{r_b} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \left[ \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r} \right]_{r_a}^{r_b} \\ &= \frac{Q^2(r_b - r_a)}{8\pi\epsilon_0 r_a r_b} \end{aligned} \quad (17.3.16)$$

como se obtuvo antes.

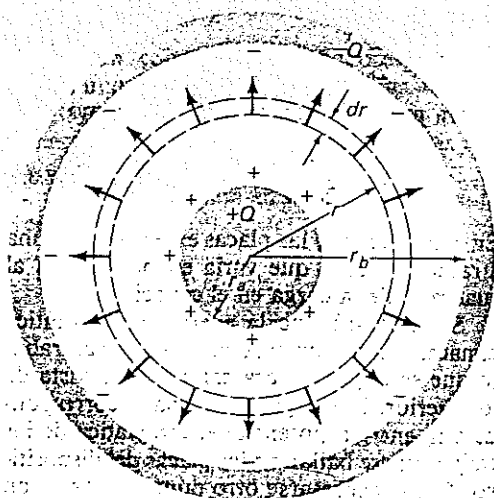


FIGURA 17.12

### 17.4 Los dieléctricos aumentan la capacitancia

Como se vio en las secciones anteriores, la capacitancia de un par de conductores depende de su configuración geométrica. En tales secciones se supuso que la región entre los conductores del capacitor está ocupada por aire (o más concretamente, que está al vacío). Michael Faraday descubrió que tratándose de una configuración fija, se puede aumentar la capacitancia de un condensador llenando el espacio con un *dieléctrico*, es decir, con una sustancia aislante.

Antes de estudiar lo que sucede cuando se utiliza un dieléctrico en un condensador, se considerará la forma como se altera el capacitor de placas paralelas si se reemplaza por un conductor, *parte* del espacio entre las placas, como se muestra en la figura 17.13. Inicialmente, el valor de la capacitancia es

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (17.4.1)$$

Supóngase ahora que el conductor introducido está a la distancia  $a_1$  de una de las placas, y a la distancia  $a_2$  de la otra. Puesto que el campo eléctrico se anula dentro del conductor, este último debe establecer un campo eléctrico en su interior, que cancele exactamente el campo producido por el capacitor. En el caso de un conductor, esto va acompañado por una separación de cargas libres, que produce una

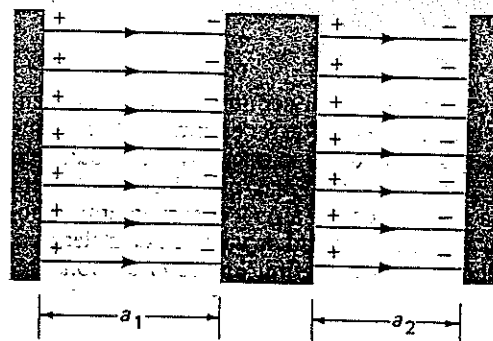


FIGURA 17.13. Capacitor de placas paralelas dentro del cual se coloca una placa conductora descargada.

densidad de carga positiva en una superficie y una densidad de carga negativa en la otra. Del hecho de que ahora se tienen dos capacitores en serie, con capacitancias

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{a_1} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{a_2} \quad (17.4.2)$$

se sigue que la capacitancia equivalente es

$$C = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = \frac{\epsilon_0 A}{a_1 + a_2} \quad (17.4.3)$$

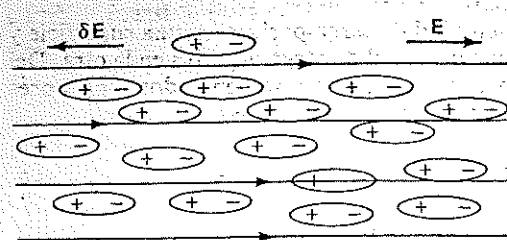
Pero como necesariamente  $a_1 + a_2$  debe ser menor que  $d$ , esto significa que  $C$  debe ser *mayor* que antes.

Es fácil comprender que haya una mayor capacitancia después de introducir un material conductor. Todo material de esta clase contiene cargas que pueden moverse libremente por efecto de campos eléctricos aplicados. Las cargas así separadas, producen un campo eléctrico que anula en el interior del conductor el campo aplicado. La misma cantidad de carga se almacena en las placas, pero mediante una diferencia de potencial exterior *más pequeña* que la que había originalmente, lo que quiere decir que ha aumentado la capacitancia, relación de la carga almacenada a la diferencia de potencial.

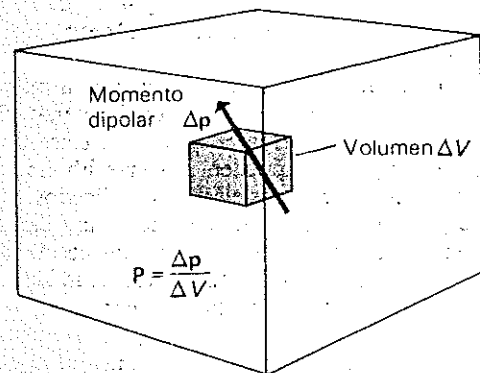
Ahora se tratará de repetir las observaciones anteriores, introduciendo esta vez una sustancia aislante o material *dieléctrico*, como el vidrio o la mica. Como encontró Faraday, resulta que aunque no hay cargas libres que se muevan en respuesta a los campos eléctricos aplicados, un dieléctrico también puede aumentar la capacitancia. Faraday demostró de manera concluyente que en el caso de cualquier configuración geométrica, el efecto de *llenar completamente* el espacio entre los conductores con un dieléctrico equivale a multiplicar la capacitancia por una constante  $K$ , que sólo depende de la elección del dieléctrico. Dicha constante es independiente de la configuración del capacitor, y también es prácticamente independiente de la diferencia de potencial en el dispositivo, siempre que el campo interior no sea excesivamente grande.

La constante  $K$  recibe el nombre de *constante dieléctrica* del aislante. En el caso del





(a)



(b)

FIGURA 17.14. Momentos dipolares elementales inducidos por la aplicación de un campo eléctrico externo. El campo eléctrico total dentro de la sustancia es la suma del campo externo y los campos correspondientes a los dipolos inducidos.

vacío tiene el valor 1, mientras que para el aire es apenas ligeramente mayor: 1.0006 en condiciones normales. La constante dieléctrica del vidrio es aproximadamente 6, en tanto que la del agua vale 81. Se tratará de explicar ahora por qué un dieléctrico aumenta la capacitancia, y por qué tal aumento sólo depende de las propiedades del medio. Primero se intentará obtener un modelo macroscópico razonable de por qué se altera la capacitancia, y luego se estudiarán algunos aspectos de la teoría microscópica de los dieléctricos.

Ya se vio que cuando se introduce un conductor entre las placas de un capacitor, la separación macroscópica de cargas crea un campo eléctrico que anula completamente el producido por las placas del capacitor en su interior. El hecho de que un dieléctrico también aumente la capacitancia, indica que también en éste puede producirse un campo eléctrico. ¿Qué mecanismo es responsable de este último campo? En el capítulo anterior se estableció que aunque los *dipolos eléctricos* son eléctricamente neutros, pueden producir campos eléctricos. Los átomos y las moléculas de la mayoría de las sustancias no tienen momentos dipolares inherentes en ausencia de campos eléctricos. Pero cuando se aplica un campo eléctrico externo, su efecto es *inducir* un momento dipolar en cada átomo o molécula, y tal momento es directamente proporcional a la intensidad del campo. Más adelante se volverá al tema, pero por ahora se supone que un campo eléctrico aplicado ocasiona una relativamente pequeña separación espacial de carga dentro de cada átomo o molécula, con la consecuencia que cada una produce un campo eléctrico dipolar cuya dirección se opone a la del campo aplicado  $E$  (fig. 17.14).

Supóngase que la  $i$ -ésima molécula adquiere un pequeño momento dipolar  $p_i$ . Por tanto, un elemento macroscópico de volumen  $\Delta V$  que contenga  $m$  dipolos de esta clase tendrá un momento dipolar<sup>3</sup>

$$\Delta p = \sum_{i=1}^m p_i \quad (17.4.4)$$

Aunque  $\Delta V$  puede ser un volumen sumamente pequeño,  $m$  puede ser enorme, debido a que es muy grande el número de moléculas en cualquier elemento macroscópico de volumen. La relación de  $\Delta p$  a  $\Delta V$  es el momento dipolar medio por unidad de volumen de dieléctrico. Ahora se puede definir un *vector de polarización*

<sup>3</sup> En esta sección se utilizará el símbolo  $V$  para representar el volumen, evitando así la confusión con la velocidad ( $v$ ) y el potencial ( $V$ ).

ción macroscópica  $P$  en todo punto dentro del dieléctrico, como sigue:

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta V} = \frac{dp}{dV} \quad (17.4.5)$$

Esto define un nuevo campo vectorial dentro del dieléctrico. De acuerdo con esta definición, la polarización es un vector que representa el momento dipolar adquirido por cada elemento de volumen  $\Delta V$ , dividido entre el volumen de ese elemento. El anterior procedimiento de límite expresa que  $\Delta V$  tiende a

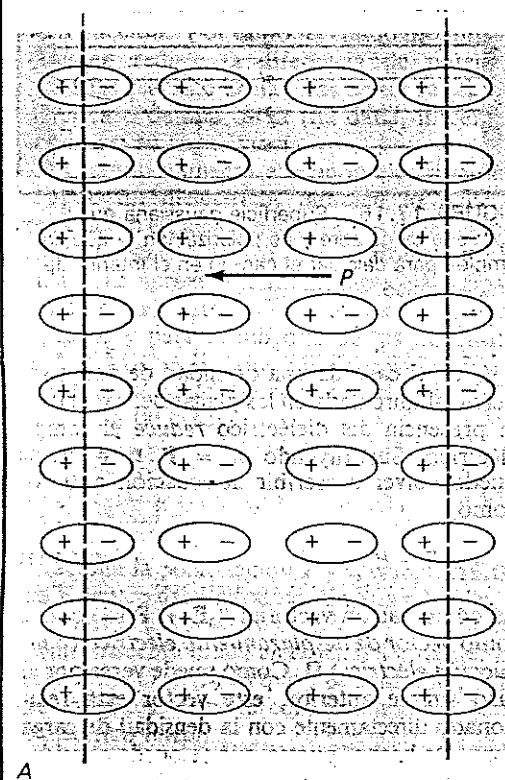


FIGURA 17.15. En un dieléctrico polarizado uniformemente, las cargas de dipolos internos adyacentes se cancelan mutuamente; el campo neto producido se debe únicamente a la distribución superficial de carga desequilibrada que aparece en las superficies externas del material.

cero, pero no es necesario tomar literalmente este límite, pues en realidad  $\Delta V$  sólo debe ser muy pequeño en comparación con las dimensiones macroscópicas de la muestra, pero al mismo tiempo de tamaño suficiente para que contenga un número muy grande de moléculas.

La existencia de la polarización  $P$  implica la presencia de un campo eléctrico adicional que cancela parcialmente el campo original que produjo  $P$  al principio. Sin embargo, es difícil calcular el nuevo campo eléctrico superponiendo directamente los campos producidos por cada elemento de volumen dentro del dieléctrico. Hay un método mejor, en que se utilizan la ley de Gauss y determinadas relaciones entre la polarización y la densidad de carga. Considérese un material dieléctrico en que  $P$  es uniforme en todas partes, como se muestra en la figura 17.15. La densidad de carga total en cualquier volumen interior pequeño será cero, pues habrá ahí tantas cargas positivas como negativas. Por otra parte, como puede verse en la figura 17.15, en las superficies exteriores izquierda y derecha del dieléctrico se desarrolla una *densidad de carga superficial*. Supóngase que dentro de cualquier molécula o átomo se produce una separación media  $\Delta$  entre las cargas  $+q$  y  $-q$ . Sea  $A$  el área de la placa de dieléctrico. Entonces, dentro del volumen  $A\Delta$  habrá  $NA\Delta$  moléculas, en que  $N$  es el número por unidad de volumen.

En consecuencia, en la cara izquierda se tiene una carga total, que se conoce como *carga ligada* o *carga de polarización*,

$$q_b = +qNA\Delta$$

o una densidad superficial de carga positiva  $\sigma$ , dada por

$$\sigma_b = qN\Delta \quad (17.4.6)$$

La magnitud del vector de polarización  $P$  es el momento dipolar por unidad de volumen, y debe estar dada por el producto del momento dipolar  $q\Delta$  de una molécula individual y el número de moléculas por volumen unitario:

$$P = qN\Delta \quad (17.4.7)$$

En consecuencia, para el caso especial que se estudia aquí, en que el vector de polarización es perpendicular a la superficie o frontera, la magnitud del vector de polarización es igual a la densidad de carga ligada:

$$P = \sigma_b \quad (17.4.8)$$

En forma más general, si el vector de polarización local  $\mathbf{P}$  forma un ángulo  $\theta$  con la frontera, la densidad de carga ligada es

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \theta \quad (17.4.9)$$

en que  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario de la frontera.

La densidad de carga  $\sigma_b$  es tan real como cualquier otra densidad de carga que se haya encontrado. Usar calificativos como "ligada" y "libre" solamente sirve para distinguir entre la densidad de carga que se debe a la polarización de un dieléctrico, y a la densidad de carga presente sobre o dentro de un conductor. Desde luego, una distribución de carga libre puede moverse con entera libertad cuando hay campos eléctricos, lo que no sucede en el caso de una distribución de carga ligada o de polarización.

Utilizando la densidad de carga  $\sigma_b$ , se calcula el campo eléctrico dentro del dieléctrico con ayuda de la ley de Gauss. Se escoge una superficie gaussiana, como se indica en la figura 17.16. La carga que contiene esta superficie consiste ahora en cargas libres negativa en la superficie conductora, al igual que en cargas ligadas positivas. De la ley de Gauss se obtiene

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = EA = \left( \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\epsilon_0} \right) A$$

o

$$E = \frac{\sigma_f - \sigma_b}{\epsilon_0} \quad (17.4.10)$$

<sup>4</sup> Es fácil ver por qué lo anterior es así, observando que si el vector de polarización fuese *paralelo* a la frontera, no habría en absoluto carga superficial. Por tanto, sólo la componente del vector de polarización *normal* a la superficie (es decir,  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$ ) es la que produce efectivamente una distribución superficial de carga ligada.

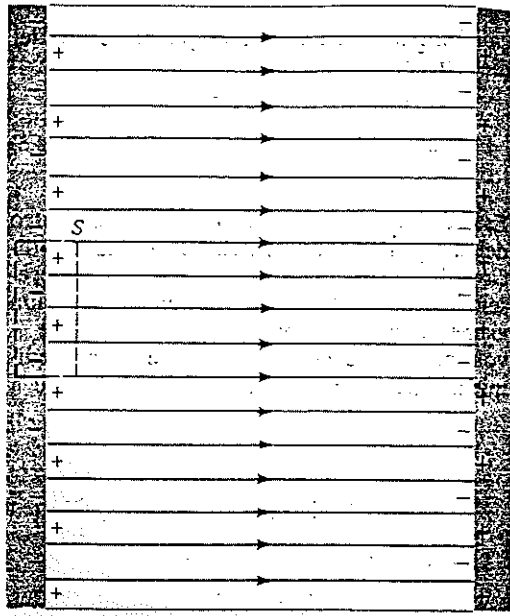


FIGURA 17.16. Superficie gaussiana que contiene carga libre y de polarización, y que se emplea para calcular el campo en el interior de un dieléctrico.

Así, en el caso de una densidad de carga superficial libre dada en las placas del capacitor, la presencia del dieléctrico *reduce* el campo eléctrico. Sustituyendo  $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P$ , se puede volver a escribir la ecuación anterior como

$$\sigma_f = \epsilon_0 E + P \quad (17.4.11)$$

La combinación vectorial  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  se conoce como *vector de desplazamiento eléctrico* (o *inducción eléctrica*)  $\mathbf{D}$ . Como puede verse por el caso simple anterior, este vector está relacionado directamente con la densidad de carga libre. De hecho, puesto que se puede considerar que  $\sigma_b A / \epsilon_0 = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) A / \epsilon_0$  es la integral de  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) / \epsilon_0$  sobre la superficie gaussiana, es posible *volver a expresar* la ley de Gauss en función de  $\mathbf{D}$  en la forma simple

$$\oint_s (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_s \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = q_f \quad (17.4.12)$$

en que  $q_f$  es la cantidad total de carga libre dentro de la superficie gaussiana. Esta es la forma como se utiliza generalmente la ley de Gauss en el caso en que hay materiales dieléctricos. Debe notarse que la carga en el primer miembro de la ecuación es sólo la carga libre dentro de la superficie gaussiana; al incluir el término de polarización en la integral se toman en cuenta completamente los efectos debidos a la distribución de carga ligada. En una sección posterior se volverá a un estudio algo más detallado del vector desplazamiento  $\mathbf{D}$ .

Por el análisis anterior, se ve que en un dieléctrico existe un mecanismo para reducir un campo eléctrico externo aplicado. La presencia de las cargas ligadas toma en cuenta esta reducción. Por tanto, el citado mecanismo también reduce la diferencia de potencial entre las placas o armaduras de un capacitor, en el caso de una carga fija dada, incrementando así su capacitancia.

Cuando aumenta el campo eléctrico dentro de un dieléctrico, también lo hace la separación espacial de los centros de carga positiva y negativa dentro de cada átomo o molécula. Una aproximación razonable, válida para los campos eléctricos que no son demasiado intensos y para la mayoría de los materiales dieléctricos, es suponer que la polarización  $\mathbf{P}$  varía *linealmente* con el campo eléctrico aplicado. En tal caso,

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (17.4.13)$$

relaciona la polarización  $\mathbf{P}$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  dentro del dieléctrico. En esta relación, la constante de proporcionalidad  $\chi$  se conoce como *susceptibilidad eléctrica* del aislante. La ecuación (17.4.13) en que  $\chi$  es constante, define lo que se conoce como comportamiento dieléctrico *lineal*.

Ahora se sustituirá la ecuación (17.4.13) en la (17.4.11). Entonces resulta que

$$\sigma_f = \epsilon_0 E + \chi \epsilon_0 E = (1 + \chi) \epsilon_0 E$$

o bien,

$$E = \frac{1}{1 + \chi} \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_f}{\epsilon} \quad (17.4.14)$$

en que  $\epsilon$  se define mediante la relación

$$\epsilon = (1 + \chi) \epsilon_0 \quad (17.4.15)$$

La cantidad  $\epsilon$  definida de esta manera se conoce como *permisividad del dieléctrico*. Como  $\chi$  siempre es un número positivo, la permisividad de un dieléctrico siempre excede el valor  $\epsilon_0$  asociado al vacío.

Como ahora se sabe que el campo dentro del dieléctrico es  $\sigma_f / \epsilon$ , según (17.4.14), puede volverse a calcular la capacitancia de un condensador de placas paralelas, suponiendo que el espacio entre ellas esté completamente lleno con un medio aislante uniforme de permisividad  $\epsilon$ . Como esta vez el campo dentro del dieléctrico está dado por (17.4.14), se puede escribir

$$\sigma_f = q_f / A = \epsilon E = \frac{\epsilon \Delta V}{d}$$

de donde

$$C = \frac{q_f}{\Delta V} = \frac{\epsilon A}{d} \quad (17.4.16)$$

Es claro que la capacitancia aumentó en el factor  $\epsilon / \epsilon_0$  con respecto al caso en que no hay dieléctrico presente. Empero, este factor es el que se empleó justamente para definir la *constante dieléctrica*  $K$ , a que se hizo alusión en las fases iniciales de este estudio, por lo que se ve que la constante dieléctrica debe estar dada por

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi \quad (17.4.17)$$

#### EJEMPLO 17.4.1

La capacidad de un capacitor de placas paralelas es  $C_0 = 10^{-6}$  F en el aire. Está cargado a 200 V y tiene una separación entre placas de 2 mm. Luego se introduce un dieléctrico con susceptibilidad eléctrica igual a 49, de manera que llene todo el espacio entre las placas. (a) Hallar el nuevo valor de la capacitancia. (b)

Determinar la cantidad de carga ligada que tiene una de las fronteras del dieléctrico. (c) Evaluar la polarización del mismo. (d) ¿Qué valor tienen el campo eléctrico y la inducción o desplazamiento dentro del material dieléctrico.

De acuerdo con (17.4.16), al introducir un dieléctrico con  $\chi = 49$  (que corresponde a  $K = 50$ ), se aumenta la capacitancia hasta

$$C = (1 + 49)C_0 = 50C_0 = 50 \times 10^{-6} \text{ F}$$

Para obtener la cantidad de carga ligada, primero se calcula el vector polarización en el dieléctrico. De (17.4.13),

$$P = 49\epsilon_0 E \quad (17.4.18)$$

Según (17.4.14), esto también puede escribirse como

$$P = 49\epsilon_0 \cdot \frac{1}{50} \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} = 0.98\sigma_f$$

Puesto que la polarización  $P$  es igual a la densidad de carga ligada,

$$\sigma_b = 0.98\sigma_f$$

o sea,

$$q_b = 0.98q_f = 0.98C_0 \Delta V = (0.98)(10^{-6})(200) = 1.96 \times 10^{-4} \text{ C}$$

En consecuencia, la polarización es

$$\begin{aligned} P = \sigma_b = \frac{q_b}{A} &= \frac{q_b \epsilon_0}{C_0 d} \\ &= \frac{(1.96 \times 10^{-4})(8.85 \times 10^{-12})}{(10^{-6})(2 \times 10^{-3})} \\ &= 8.7 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2 \end{aligned} \quad (17.4.19)$$

La intensidad de campo dentro del dieléctrico es

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{50} \frac{q_f}{\epsilon_0} = 0.02 \frac{q_f}{A\epsilon_0} = 0.02 \times \frac{C_0 \Delta V}{A\epsilon_0} \\ &= 0.02 \frac{\epsilon_0 A}{Ad\epsilon_0} \Delta V = 0.02 \frac{\Delta V}{d} \end{aligned}$$

como era de esperar

Por tanto,

$$E = 0.02 \frac{200}{2 \times 10^{-3}} = 2 \times 10^3 \text{ V/m} \quad (17.4.20)$$

Por último, la magnitud del vector desplazamiento  $D$  es la densidad de carga libre; véase (17.4.11):

$$D = \frac{q_f}{A} = \epsilon_0 \frac{\Delta V}{d} = 8.85 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

Como comprobación se nota que

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \frac{\Delta V}{d} &= \epsilon_0 \frac{1}{1+\chi} \frac{\Delta V}{d} + \epsilon_0 \frac{\chi}{1+\chi} \frac{\Delta V}{d} \\ D &= \epsilon_0 E + P \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 17.4.2

Se conectan dos capacitores, de  $3 \mu\text{F}$  y  $6 \mu\text{F}$ , en serie a una diferencia de potencial de  $100 \text{ V}$ . Es posible alterar la capacitancia equivalente insertando un material dieléctrico entre las placas de cada capacitor por separado, o simultáneamente en ambos. Si la constante dieléctrica del material es  $15$ , encontrar los posibles valores de capacitancia que pueden obtenerse. En cada caso, hallar la diferencia de potencial en los terminales de la combinación. En todos los casos, hay que suponer que el dieléctrico llena por completo el espacio entre las placas.

Originalmente se tiene un capacitor de  $3 \mu\text{F}$  con una diferencia de potencial  $\Delta V_3$  en sus terminales, y un capacitor de  $6 \mu\text{F}$  con una diferencia de potencial  $\Delta V_6$ . Es claro que

$$Q_f = C_3 \Delta V_3 = C_6 \Delta V_6$$

y que

$$V_3 + V_6 = 100 \text{ V}$$

Lo que implica que

$$\Delta V_3 = 66.7 \text{ V}$$

$$\Delta V_6 = 33.3 \text{ V}$$

Cuando se altera el capacitor de  $3 \mu\text{F}$  introduciendo el dieléctrico, su capacitancia aumenta a  $(3)(15) = 45 \mu\text{F}$  y su voltaje se reduce a  $66.7/15 = 4.44 \text{ V}$ . Por tanto, la capacitancia de la combinación equivalente es

$$C = \frac{(45)(6)}{45 + 6} = 5.29 \mu\text{F}$$

Y la tensión a través de él vale

$$\Delta V = 4.44 + 33.3 = 37.7 \text{ V}$$

Si se inserta el dieléctrico en el capacitor de  $6 \mu\text{F}$ , su capacitancia es ahora de  $6 \times 15 = 90 \mu\text{F}$  y el voltaje será  $33.3/15 = 2.22 \text{ V}$ . El capacitor equivalente tiene la capacitancia

$$C = \frac{(3)(90)}{3 + 90} = 2.90 \mu\text{F}$$

El voltaje en la combinación es

$$\Delta V = 66.7 + 2.22 = 68.9 \text{ V}$$

Por último, si se alteran simultáneamente ambos capacitores, la capacitancia equivalente será

$$C = \frac{(45)(90)}{45 + 90} = (15) \frac{(3)(6)}{3 + 6} = 30 \mu\text{F}$$

y el voltaje,

$$\Delta V = \frac{100}{15} = 6.66 \text{ V}$$

Se nota que en cada caso, el producto de la capacitancia equivalente  $C$  por el voltaje  $\Delta V$  tiene el valor constante de  $200 \times 10^{-6} \text{ C}$ , que corresponde al hecho de que no se altera la carga libre en el capacitor.

#### 17.5. Condiciones de frontera en E, P y D

Los vectores  $E$ ,  $P$  y  $D$  desempeñan un papel importante en la teoría de los fenómenos dieléctricos. El enunciado de la ley de Gauss puede estar en términos del campo eléctrico  $E$ , en cuyo caso la carga que aparece en la ecuación es la carga total (libre más ligada),

o se puede expresar utilizando la inducción o desplazamiento  $D$ , en cuyo caso sólo aparece la carga libre. Hay una diferencia fundamental que debe destacarse entre los vectores  $E$  y  $D$ . En tanto que  $E$  representa una suma de campos microscópicos producidos por átomos o moléculas individuales,  $D$  es necesariamente un campo macroscópico que proviene de la polarización de un volumen macroscópico. Dicho de otra manera, sería enteramente razonable considerar el campo eléctrico medio producido por una o dos moléculas, pero no tendría significado estudiar el vector desplazamiento  $D$  en el caso de un sistema con pocas moléculas.

La solución a problemas en que intervienen dieléctricos requiere conocer la forma como cambian los vectores  $E$ ,  $P$  y  $D$  en la frontera entre dos dieléctricos distintos. Ahora se tomará en cuenta una pequeña porción de una interficie entre materiales con constantes dieléctricas  $K_1$  y  $K_2$ , respectivamente, como se muestra en la figura 17.17. En dicha superficie de separación habrá una densidad de carga ligada si los dieléctricos están polarizados, e igualmente (es una posibilidad) una densidad de carga libre  $\sigma_f$ . Se considera la integral de  $E \cdot d\mathbf{l}$  alrededor de la trayectoria rectangular que consiste en los lados  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  y  $da$ , como se muestra en la figura 17.17a. Esta integral debe anularse en electrostática, como consecuencia del carácter conservativo del campo.<sup>5</sup> Las contribuciones de los segmentos  $bc$  y  $da$  se anulan debido a que estas distancias se escogen como infinitesimalmente pequeñas. Por tanto, con  $l = cd = ab$  resulta

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 = (E_1 \cos \theta_1)l - (E_2 \cos \theta_2)l = 0$$

o sea,  $E_1 \cos \theta_1 = E_2 \cos \theta_2$

$$E_{1p} = E_{2p} \quad (17.5.1)$$

en que el subíndice  $p$  indica la componente de un vector paralela a la frontera. En conse-

<sup>5</sup> Esto se debe a que el trabajo efectuado por una fuerza conservativa al recorrer una trayectoria cerrada debe ser cero.

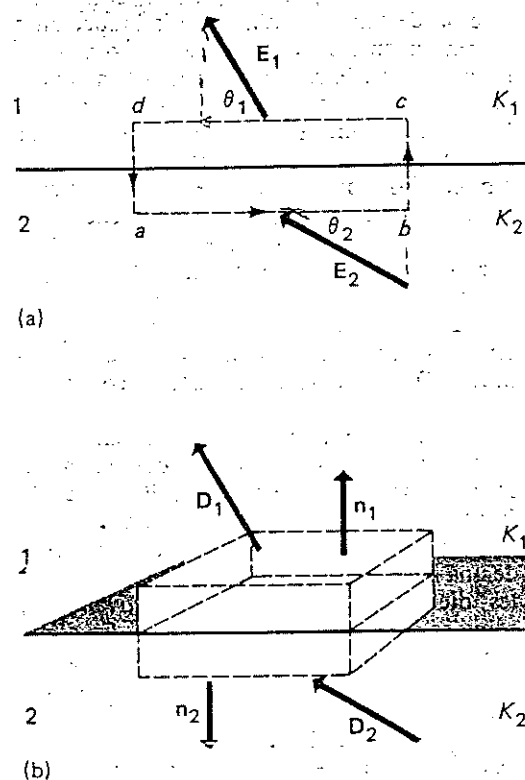


FIGURA 17.17. Condiciones de frontera para los vectores  $E$  y  $D$  en la interficie de dos medios dieléctricos de distinta permisividad. (a) La componente de  $E$  paralela a la superficie intermedia es la misma en ambos materiales. (b) La componente de  $D$  normal a dicha superficie es la misma en ambas sustancias.

cuencia, la ecuación (17.5.1) expresa que la componente paralela del campo eléctrico es continua a través de la frontera.

Luego hay que considerar la condición sobre el vector de desplazamiento  $D$  que se sigue de la aplicación de la ley de Gauss en la forma de la ecuación (17.4.12). En la figura 17.17b se muestra una superficie gaussiana que consiste en caras rectangulares de igual área  $A$  paralelas a la frontera, al igual que de cuatro caras adicionales, cada una de área infinitesimal. El flujo del vector  $D$  sólo proviene

de las caras paralelas a la frontera. Se puede escribir que

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = (D_{1n} - D_{2n})A \quad (17.5.2)$$

en que  $D_{1n}$  y  $D_{2n}$  son, respectivamente, las componentes normales de los vectores de desplazamiento en los dos medios. De acuerdo con la ecuación (17.4.12), este flujo es exactamente igual a  $q_f = \sigma_f A$ , la carga libre contenida por la superficie gaussiana. Por tanto, se obtiene

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_f \quad (17.5.3)$$

que implica una discontinuidad de la componente normal de  $D$  cuando hay carga libre en la frontera. En ausencia de la carga libre, la componente normal de  $D$  es continua a través de la interficie, aunque ahí hayan cargas ligadas de polarización.

En el caso de un dieléctrico lineal e isotrópico, las ecuaciones (17.5.1) y (17.5.3) bastan para determinar las condiciones de frontera impuestas sobre la componente normal de  $E$ , la componente paralela (tangencial) de  $D$  y también las componentes de  $P$ . De (17.4.13) y de la relación

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (17.5.4)$$

se obtiene

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (17.5.5)$$

$$\mathbf{D} = (1 + \chi) \epsilon_0 \mathbf{E} = K \epsilon_0 \mathbf{E} \Rightarrow \epsilon \mathbf{E} \quad (17.5.6)$$

En consecuencia, la continuidad de la componente paralela de  $E$  implica que

$$\frac{P_{1p}}{\chi_1} = \frac{P_{2p}}{\chi_2} \quad (17.5.7)$$

y además

$$\frac{D_{1p}}{K_1} = \frac{D_{2p}}{K_2} \quad (17.5.8)$$

Por otra parte, junto con (17.5.4), (17.5.5) y (17.5.6), la ecuación (17.5.3) indica que

$$K_1 E_{1n} - K_2 E_{2n} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \quad (17.5.9)$$

y que

$$\frac{K_1 P_{1n}}{\chi_1} - \frac{K_2 P_{2n}}{\chi_2} = \sigma_f$$

$$\left(1 + \frac{1}{\chi_1}\right) P_{1n} - \left(1 + \frac{1}{\chi_2}\right) P_{2n} = \sigma_f \quad (17.5.10)$$

Por lo tanto, se ve que todas las condiciones de frontera pueden expresarse en términos de la densidad de carga libre. La aplicación de la ley de Gauss al campo eléctrico, expresada por (16.3.12), da el resultado

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_f + \sigma_b)$$

o sea,

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{1}{\epsilon_0} (D_{1n} - D_{2n} + \sigma_b) \quad (17.5.11)$$

Cuando se combina la anterior con (17.5.4), se encuentra que la densidad de carga ligada en una interficie está dada por

$$P_{1n} - P_{2n} = -\sigma_b \quad (17.5.12)$$

Si la región 1 es vacío en tanto que la región 2 es un dieléctrico, la anterior se reduce al caso especial obtenido antes,  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \sigma_b$ , como se estudió antes.

Estas condiciones de frontera son importantes para determinar la manera cómo funcionan los capacitores en presencia de dieléctricos, además de ser muy importantes en la teoría de la óptica geométrica, y se pueden utilizar para comprender el comportamiento de la luz en la frontera entre dos materiales. Ahora se considerarán varios ejemplos que ilustran la manera cómo los dieléctricos modifican la capacitancia, y cómo pueden cal-

cularse los vectores estudiados antes, en una diversidad de circunstancias.

### EJEMPLO 17.5.1

La capacitancia de un capacitor de placas paralelas en el vacío es  $C_0 = 2 \times 10^{-6} \text{ F}$  y está cargado a 50 V. Las placas están separadas 5 mm y entre ellas se coloca una lámina muy delgada, sin carga, de material dieléctrico de 2 mm, como se muestra en la figura 17.18. Si la susceptibilidad de este dieléctrico es 15, encontrar: (a) el campo eléctrico dentro y fuera del dieléctrico, es decir, en las regiones 1, 2, y 3; (b) el vector desplazamiento en cada una de estas regiones; (c) el vector polarización; (d) la carga superficial ligada en las fronteras del dieléctrico; y (e) la capacitancia del dispositivo.

Primero se calcula la densidad de carga en las placas del capacitor. La carga total en la placa positiva es  $Q = C_0 \Delta V = (\epsilon_0 A/d) \Delta V$ ; por tanto, la densidad de carga está dada por

$$\sigma_f = \frac{\epsilon_0 \Delta V}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(50)}{5 \times 10^{-3}} = 8.85 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \quad (17.5.13)$$

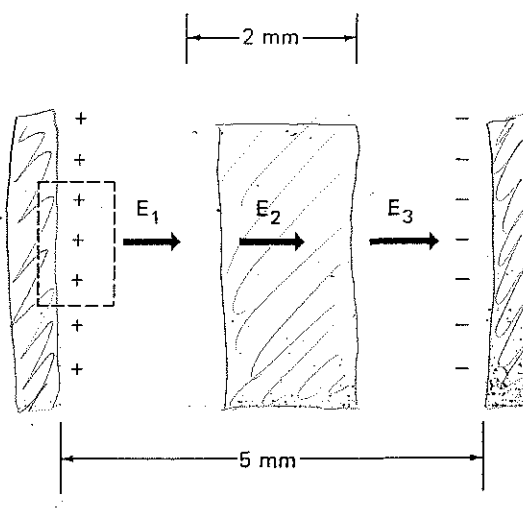


FIGURA 17.18



Escogiendo una superficie gaussiana con un lado dentro del conductor, es fácil demostrar que el campo eléctrico en las regiones 1 y 3 apunta hacia la derecha y tiene el valor

$$E_1 = E_3 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} = 10^4 \text{ V/m} \quad (17.5.14)$$

En la interficie entre las regiones 1 y 2 no hay densidad de carga libre, por lo que con  $K_1 = 1$  y  $K_2 = 1 + 15 = 16$ , de la ecuación (17.5.9) se puede encontrar que

$$E_1 - 16E_2 = 0 \quad (17.5.15)$$

$$E_2 = 0.063E_1 = 6.25 \times 10^2 \text{ V/m}$$

Nótese que para esta configuración, todos los vectores de campo ya son normales a las superficies conductoras y dieléctricas.

El vector desplazamiento o inducción eléctrica en cada una de las regiones se obtiene de (17.5.6). Es claro que  $\mathbf{D}$  debe ser continuo, pues no hay carga libre contenida en las fronteras. Por tanto,

$$D_1 = D_2 = D_3 = 8.85 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \quad (17.5.16)$$

El vector polarización se obtiene de (17.5.5). En el vacío, donde la susceptibilidad es cero, se tiene

$$P_1 = P_3 = 0$$

mientras que en la región 2

$$P_2 = 15\epsilon_0 E_2 = 8.30 \times 10^{-8} \quad (17.5.17)$$

En la frontera izquierda se tiene una densidad de carga ligada

$$\sigma_b = -8.30 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

y una carga total

$$Q_b = \sigma_b A = \sigma_b \frac{C_0 d}{\epsilon_0}$$

$$= -(8.30 \times 10^{-8}) \frac{(2 \times 10^{-6})(5 \times 10^{-3})}{8.85 \times 10^{-12}}$$

$$= -9.38 \times 10^{-5} \text{ C} \quad (17.5.18)$$

En la frontera derecha del dieléctrico, la carga ligada es de  $+9.38 \times 10^{-5} \text{ C}$

La diferencia de potencial entre las placas del capacitor se encuentra integrando  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  desde la placa izquierda hasta la de la derecha, a través de las tres regiones dentro del espacio intermedio.

$$\Delta V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (10^4)(1.5 \times 10^{-3})$$

$$+ (0.0625 \times 10^4)(2 \times 10^{-3})$$

$$+ (10^4)(1.5 \times 10^{-3})$$

$$= 31.25 \text{ V}$$

En consecuencia, el nuevo valor de la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{50}{31.25} C_0 = 3.2 \times 10^{-6} \text{ F} \quad (17.5.19)$$

Nótese que aunque al principio se introdujeron los dieléctricos llenando completamente el espacio con un material aislante, ahora se puede determinar la variación de la capacitancia cuando se utiliza cualquier cantidad de dieléctrico.

### EJEMPLO 17.5.2

Una carga puntual de  $5 \times 10^{-6} \text{ C}$  está rodeada por un dieléctrico esférico de vidrio Pyrex, neutro, de radio interior igual a 10 cm y radio exterior de 15 cm. La región entre la carga puntual y el vidrio contiene hidrógeno gaseoso, y la región externa al vidrio es aire. (a) Encontrar la variación del campo eléctrico con la distancia desde la carga. (b) Obtener la densidad de carga ligada en las superficies interna y externa del vidrio. (c) Obtener una expresión para la polarización media de los átomos de hidrógeno a 5 cm de la carga puntual. Cuál es la separación media de cargas positivas y negativas en cada uno de estos átomos. En la tabla 17.1 se listan las constantes dieléctricas a diversas temperaturas de algunos aislantes. La densidad del hidrógeno atómico puede considerarse como de  $2.69 \times 10^{19}$  átomos por  $\text{cm}^3$  a 1 atmósfera y  $0^\circ \text{C}$ .

Se utilizará la ley de Gauss para el vector inducción eléctrica  $\mathbf{D}$ , escogiendo una superfi-

Tabla 17.1 Constantes dieléctricas aproximadas de algunos materiales

Material	Constante dieléctrica $K$	$T, ^\circ \text{C}$
Vacío	1	
Aire	1.00059 (1 atm)	20
Hidrógeno	1.00026	100
Agua	80.4	20
Mica	3-6	25
Plexiglás	3.12	27
Cuarzo (fundido)	3.75-4.1	20
Vidrio (Pyrex)	4.5	20
Lucita	2.84	23
Hule	2.94	27
Parafina	2-2.5	20

cie gaussiana esférica, como se muestra en la figura 17.19. La única carga libre está ubicada en el origen, por lo que

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = D \times 4\pi r^2 = q$$

o sea,

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (17.5.20)$$

Esta cantidad es continua en las tres regiones, ya que no hay cargas libres en ninguna de las fronteras. El campo eléctrico se puede obtener en cada región utilizando la relación  $\mathbf{D} = K\epsilon_0 \mathbf{E}$ . Por tanto, se encuentra que  $\mathbf{E}$  en las tres regiones vale

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1.00026)}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (4.5)} \quad (17.5.21)$$

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1.00054)}$$

Ahora se calculará el vector polarización en las porciones interna y externa de la superficie de vidrio, utilizando las expresiones  $\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} = (K - 1)\epsilon_0 \mathbf{E}$ . Por tanto

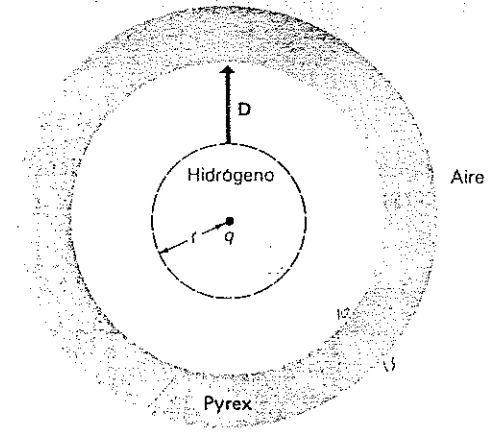


FIGURA 17.19

$$P_1 (a 0.1 \text{ m}) = (1.00026 - 1)\epsilon_0 E_1 (0.1 \text{ m})$$

$$= (0.00026) \frac{5 \times 10^{-6}}{(4\pi)(1.00026)(0.1)^2}$$

$$= 1.03 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

$$P_2 (a 0.1 \text{ m}) = (4.5 - 1)\epsilon_0 E_2 (0.1 \text{ m})$$

$$= (3.5) \frac{5 \times 10^{-6}}{(4\pi)(4.5)(0.1)^2}$$

$$= 3.09 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2 \quad (17.5.22)$$

$$P_2 (a 0.15 \text{ m}) = (4.5 - 1)\epsilon_0 E_2 (0.15 \text{ m})$$

$$= (3.5) \frac{5 \times 10^{-6}}{(4\pi)(4.5)(0.15)^2}$$

$$= 1.37 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

$$P_3 (a 0.15 \text{ m}) = (1.00054)\epsilon_0 E_3 (0.15 \text{ m})$$

$$= (0.00054) \frac{5 \times 10^{-6}}{(4\pi)(1.00054)(0.15)^2}$$

$$= 0.95 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2$$

En la interficie en  $r = 0.1$  m, hay una densidad de carga ligada

$$P_1(0.1 \text{ m}) - P_2(0.1 \text{ m}) = -3.089 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2 \quad (17.5.23)$$

mientras que en la superficie exterior, la densidad de carga también ligada es

$$P_2(0.15 \text{ m}) - P_3(0.15 \text{ m}) = 1.369 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2 \quad (17.5.24)$$

En  $r = 0.05$  m, la magnitud del vector polarización es

$$P_1(0.05 \text{ m}) = 4.12 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 \quad (17.5.25)$$

El vector polarización es el momento dipolar medio por unidad de volumen, de manera que es igual al número de átomos por volumen unitario multiplicado por el momento dipolar medio por átomo, por lo que

$$4.12 \times 10^{-8} \text{ C/m}^2 = (2.69 \times 10^{25})p$$

en que  $p$  es el momento dipolar atómico promedio. De esto se encuentra que

$$p = 1.53 \times 10^{-33} \text{ C}\cdot\text{m} \quad (17.5.26)$$

Como

$$p = q\Delta = (1.6 \times 10^{-19})\Delta = 1.53 \times 10^{-33} \text{ C}\cdot\text{m}$$

resulta una separación media entre cargas igual a

$$\Delta = 0.96 \times 10^{-14} \text{ m} = 0.96 \times 10^{-12} \text{ cm} \quad (17.5.27)$$

El tamaño promedio del átomo de hidrógeno es de alrededor de  $0.5 \times 10^{-8}$  cm, pero en condiciones ordinarias, el centro de la distribución media de las cargas electrónicas coincide exactamente con la carga del protón. Ahora es claro que, debido a la aplicación de un campo externo, se puede lograr determinada separación de cargas positivas y negativas. Aunque esta separación es notablemente pequeña, incluso a escala atómica, un número grande de átomos puede producir colectivamente una polarización macroscópica, alterando así el campo eléctrico dentro de una sustancia dieléctrica.

### 17.6 Teoría microscópica de la polarización

Se supuso que un dieléctrico isotrópico y lineal desarrolla una polarización  $P$  proporcional al campo aplicado  $E$  si éste no es demasiado intenso. Desde luego, hay algunas sustancias en las que no se cumplen estas condiciones, pero en realidad una variedad considerable de materiales satisfacen los criterios simples que se han supuesto. Primero se considerará cómo se produce una polarización macroscópica en algunos casos sencillos. A fin de obtener exactitud completa, se tendrían que estudiar los fenómenos de polarización utilizando la mecánica cuántica y la física estadística, pero este tipo de estudio queda fuera del alcance del libro. En vez de ello, se tratará de utilizar ciertos conceptos físicos elementales para describir la polarización de átomos y moléculas.

Supóngase que se tiene un gas formado por átomos de hidrógeno. Se puede considerar simplemente que el electrón está en una órbita circular alrededor del protón en el centro, como se muestra en la figura 17.20a. Se supone que existe este caso en ausencia de campos aplicados. En tales condiciones, la distribución media de cargas electrónicas coincide precisamente con la carga del protón, ya que la carga electrónica es simétrica con respecto a éste. Por tanto, el átomo de hidrógeno no tiene momento dipolar *permanente* y se dice entonces que es *no polar*. Luego se aplica un campo eléctrico  $E$ , por ejemplo en la dirección  $z$ . En ausencia de este campo, el electrón circulante tiene una coordenada  $z$  que experimenta movimiento armónico simple, por lo que satisface una ecuación de movimiento de la forma

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + m\omega_0^2 z = 0 \quad (17.6.1)$$

en que  $\omega_0$  es la frecuencia angular del electrón en su órbita. Cuando se aplica un campo eléctrico constante  $E$  en dicha dirección  $z$ , hay una fuerza adicional  $-eE$  que actúa sobre el electrón, y una fuerza  $+eE$  que actúa sobre el protón. Empero, en comparación con el electrón, el protón apenas es afectado, pues su

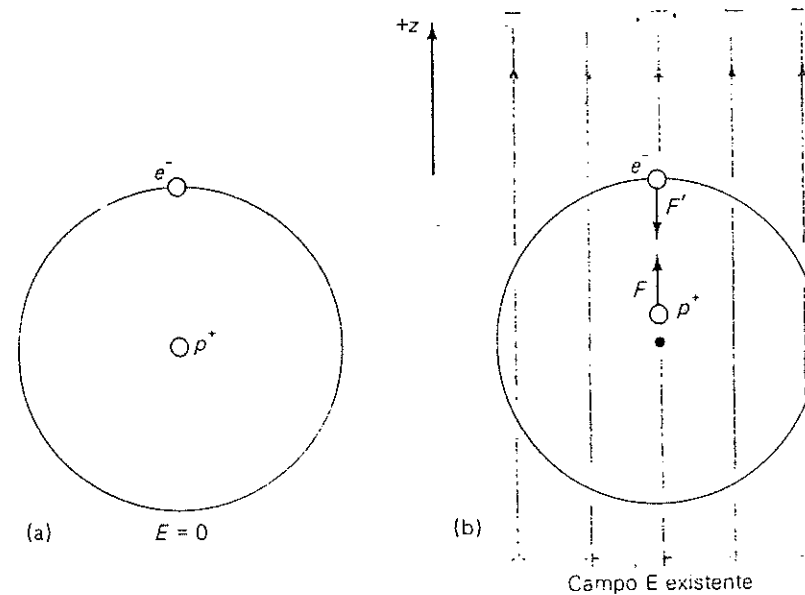


FIGURA 17.20. Polarización de un átomo de hidrógeno por un campo eléctrico aplicado externamente.

masa es mucho mayor. En presencia de este campo, la ecuación (17.5.2) se altera quedando

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + m\omega_0^2 z = -eE \quad (17.6.2)$$

Haciendo  $z_0 = -eE/m\omega_0^2$ , y observando que como  $z_0$  es constante,  $d(z - z_0)/dt = dz/dt$ , se puede escribir esta ecuación ahora en la forma

$$m \frac{d^2 (z - z_0)}{dt^2} + m\omega_0^2 (z - z_0) = 0 \quad (17.6.3)$$

Nótese que para un campo  $E$  constante,  $z_0$  es independiente de  $t$ . La ecuación (17.6.1) describe un movimiento armónico simple en la dirección  $z$  con un valor promedio de  $z$  igual a cero, mientras que la ecuación (17.6.3) expresa un movimiento semejante, en que el valor promedio de  $z$  se ha desplazado a  $z_0$ . Por tanto, se ve que en el átomo se desarrolla un momento dipolar microscópico orientado en la dirección del campo  $E$  como se indica en la figura 17.20b. Este dipolo se crea debido a que

en presencia del campo aplicado, la posición media de la carga electrónica *ya no coincide* con la posición promedio de la carga protónica.

Este dipolo microscópico tiene un momento dipolar

$$p = e|z_0| = \frac{e^2 E}{m\omega_0^2} \quad (17.6.4)$$

La frecuencia angular  $\omega_0$  puede obtenerse a partir de la energía de ionización del nivel cuántico más bajo de energía del hidrógeno, como  $\omega_0 = 2.06 \times 10^{15}$  rad/s. Puesto que cada átomo tiene un momento dipolar en la dirección  $z$ , la polarización macroscópica es

$$P = \frac{Ne^2}{m\omega_0^2 \epsilon_0} E = \chi \epsilon_0 E \quad (17.6.5)$$

en que  $N = 2.69 \times 10^{25}$  átomos por  $\text{m}^3$  a temperatura y presión normales. Por lo tanto, se encuentra que la susceptibilidad del hidrógeno gaseoso es

$$\chi = \frac{Ne^2}{m\omega_0^2\epsilon_0}$$

$$= \frac{(2.69 \times 10^{25})(1.6 \times 10^{-19})^2}{(9.11 \times 10^{-31})(2.07 \times 10^{16})^2(8.85 \times 10^{-12})}$$

$$= 0.00020$$

La susceptibilidad observada experimentalmente vale 0.00026, de manera que este cálculo clásico concuerda bastante bien con el valor real. Para una mejor concordancia, se tendría que utilizar la mecánica cuántica en vez de la clásica. El cálculo de la susceptibilidad para otros gases no polares es algo más complicado, pero puede realizarse todavía con razonable exactitud.

Ahora se llevará a cabo el cálculo para un sistema en que cada átomo o molécula contiene un dipolo *permanente*: A estos materiales se les conoce como *sustancias polares*, debido a la presencia de estos dipolos microscópicos permanentes. En este caso el cálculo es muy distinto. Para los materiales no polares, el campo eléctrico realmente produce dipolos microscópicos, cada uno de magnitud muy pequeña y todos alineados con los demás. Por lo general, una sustancia polar tiene un momento dipolar permanente considerable, asociado a cada molécula o átomo. En ausencia de un campo aplicado, el momento dipolar medio por unidad de volumen se anula como resultado de las cancelaciones de los diversos dipolos, que apuntan en direcciones al azar. Cuando se aplica un campo eléctrico, los dipolos tienden a alinearse en la dirección del campo, lo que da la configuración que produce la energía mínima. Desde luego que hay procesos de colisión que tienden a dar carácter aleatorio a los momentos, por lo que sólo puede lograrse alineación parcial, como se indica en la figura 17.21, que ilustra el proceso de alineación.

El grado de alineamiento que ocurre en cualquier caso dado depende de la intensidad del campo aplicado y también, inversamente, de la efectividad con que operan los procesos térmicos para aleatorizar los momentos. Por tanto, cabe esperar que el momento dipolar real por unidad de volumen sea directamente

proporcional a la intensidad del campo alineante  $E$ , e inversamente proporcional a la temperatura, puesto que la efectividad de la agitación térmica para aleatorizar la distribución depende en forma directa de la temperatura. Aunque no se abundará en los detalles del cálculo de la polarización en este caso, de hecho puede demostrarse que para valores moderados de la intensidad de campo y para temperaturas dentro de los límites del ambiente, la polarización  $P$  está dada por

$$P = \frac{Np^2E}{3kT} = \chi\epsilon_0 E \quad (17.6.6)$$

de donde

$$\chi = \frac{Np^2}{3\epsilon_0 kT} \quad (17.6.7)$$

En estas expresiones,  $N$  representa el número de moléculas por unidad de volumen y  $p$  es la intensidad de los dipolos moleculares permanentes. Por ejemplo, si estos resultados se aplican al vapor de agua a temperaturas normales, concuerdan muy bien con los experimentos. Desde luego, es claro que la ecuación (17.6.7) no puede ser válida a temperaturas muy bajas, pues predice una susceptibilidad infinita conforme  $T$  se aproxima a cero.

El estudio de dieléctricos líquidos como el agua y de sólidos como el cuarzo queda fuera del alcance de este libro. Sin embargo, los dos casos antes descritos sirven para ilustrar el origen de la pequeña susceptibilidad que se presenta en el caso de materiales polares y no polares simples. Se demostró que en cada caso la polarización varía linealmente con el campo aplicado  $E$ . Pero en el caso del material no polar, el campo  $E$  ocasiona que cada molécula o átomo desarrolle un dipolo microscópico, todos los cuales están alineados. En los materiales polares todas las moléculas tienen dipolos permanentes; la aplicación de un campo eléctrico produce entonces una ali-

<sup>6</sup> En el capítulo 21 se considerarán los detalles de este cálculo cuando se deduzcan resultados que son completamente análogos a éstos, en el caso de dipolos *magnéticos* permanentes en un campo magnético aplicado exteriormente y que produce alineación.

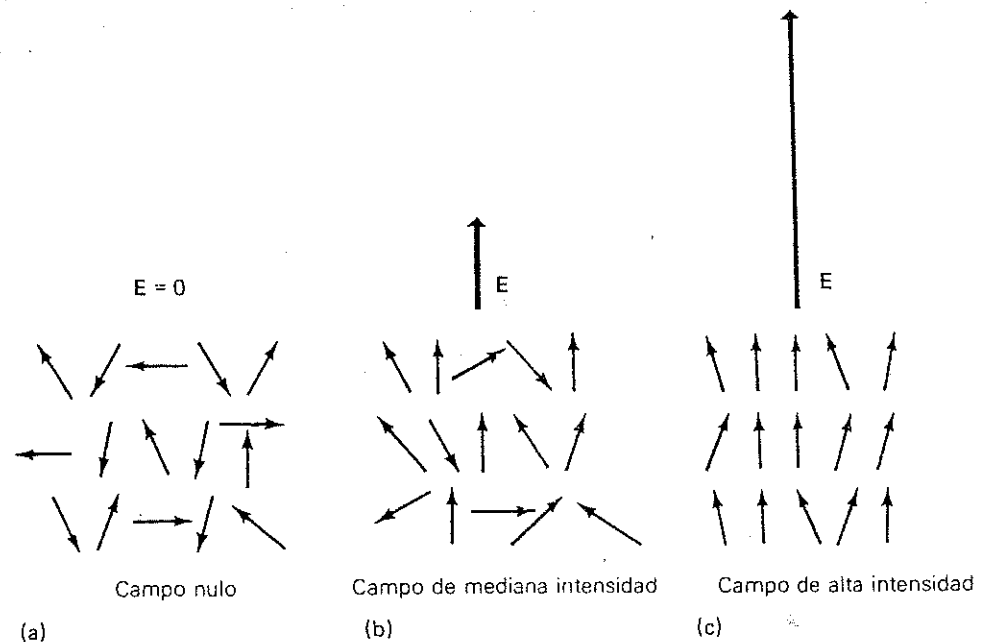


FIGURA 17.21. Moléculas dipolares orientadas al azar y polarizadas por un campo exterior aplicado.

neación parcial, que lleva a una polarización macroscópica.

## RESUMEN

Un *capacitor* (o condensador) es un dispositivo eléctrico formado por dos conductores que tienen cargas iguales y opuestas. La *capacitancia* (o capacidad) de este dispositivo se define por la carga almacenada dividida entre la diferencia de potencial entre los conductores o *armaduras*:

$$C = \frac{q}{\Delta V}$$

La unidad de capacitancia es el *farad* (F), que equivale a coulomb/volt. La capacitancia de un condensador dado depende de la configuración y espaciamiento de sus armaduras. La capacidad de un capacitor ideal de placas paralelas es

$$C = \epsilon_0 A/d$$

en que  $A$  es el área de las placas y  $d$  su distancia. El campo eléctrico en este dispositivo está relacionado con la tensión o diferencia de potencial  $\Delta V$  por

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

En capacitores en serie, la capacitancia equivalente está dada por

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

en tanto que en el caso de capacitores en paralelo,

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

En la conexión en serie, la carga en cada capacitor tiene el mismo valor, mientras que en la conexión en paralelo, la carga total es la suma de las cargas en cada condensador.

Un capacitor almacena energía electrostática en la cantidad

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}q \Delta V = \frac{1}{2}C (\Delta V)^2$$

La densidad de energía, o energía electrostática por unidad de volumen, en el capacitor, está dada por

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Cuando una sustancia aislante, o material *dieléctrico*, llena la región entre las placas de un capacitor, su capacidad aumenta en un factor igual a la *constante dieléctrica*  $K$  de dicha sustancia. Cuando se tiene un material dieléctrico, el campo induce momentos dipolares atómicos dentro de cada átomo, o bien alinea dipolos atómicos permanentes. En uno y otro caso, el resultado es inducir un momento dipolar directamente proporcional al campo, al menos idealmente, en todo elemento de volumen del dieléctrico. El *vector polarización eléctrica*  $\mathbf{P}$  en cualquier punto es la relación del momento dipolar  $\Delta p$  adquirido por un pequeño elemento de volumen alrededor del punto, a su volumen  $\Delta V$ , o sea,

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta p}{\Delta V}$$

En dieléctricos polarizados uniformemente, es posible considerar que la polarización se debe a una distribución de cargas superficiales ligadas, sobre las superficies del dieléctrico. La densidad superficial de la carga ligada de polarización

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \theta$$

en que  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie y  $\theta$  el ángulo entre los vectores  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{P}$ . Es importante notar que la carga de polarización superficial está fija en la muestra y *no puede moverse con libertad*, como las cargas que están en la superficie o dentro de un conductor.

La polarización de un dieléctrico lineal

ideal está relacionada con el campo en su interior por

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}$$

en que  $\chi$  a la constante de proporcionalidad se le conoce como *susceptibilidad eléctrica*. La carga libre en las placas metálicas de un condensador con dieléctrico es

$$\sigma_f = \epsilon_0 E + P$$

en que  $\mathbf{E}$  es el campo dentro del dieléctrico en la superficie de la placa. La cantidad vectorial  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  se conoce como *inducción eléctrica o desplazamiento eléctrico*  $\mathbf{D}$ , por lo que

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

La ley de Gauss en sistemas en que hay sustancias dieléctricas se puede expresar como

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = q_f$$

en que  $q_f$  es la cantidad total de carga libre dentro de la superficie gaussiana cerrada.

En un dieléctrico lineal ideal,  $\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$ ; en este caso, se puede escribir  $\mathbf{D}$  como

$$\mathbf{D} = (1 + \chi) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$$

en que

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$$

A la cantidad  $\epsilon$  se le conoce como *permisividad* o *permitividad* del dieléctrico. La constante dieléctrica  $K$  es la relación de la permisividad  $\epsilon$  del dieléctrico a  $\epsilon_0$ , la permisividad del vacío. Por tanto,

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi$$

En una superficie de separación entre dos dieléctricos o materiales aislantes que tengan constantes dieléctricas  $K_1$  y  $K_2$  existen las siguientes relaciones entre los vectores de cam-

po, desplazamiento y polarización en uno y otro lado:

$$E_{1p} = E_{2p}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_f$$

$$\frac{P_{1p}}{\chi_1} = \frac{P_{2p}}{\chi_2}$$

$$P_{1n} - P_{2n} = \sigma_b$$

En estas expresiones, los subíndices  $n$  y  $p$  se refieren respectivamente a las componentes normal y paralela a la interficie, en tanto que  $\sigma_f$  y  $\sigma_b$  designan respectivamente, la densidad de carga libre y de carga de polarización en dicha superficie intermedia. En los casos más simples que comprenden el equilibrio electrostático de sustancias dieléctricas ordinarias, por lo general  $\sigma_f$  será cero.

## PREGUNTAS

1. ¿Las placas de un capacitor siempre deben tener cantidades iguales de carga pero con signo contrario? Si no es así, cite un ejemplo.
2. La diferencia de potencial o tensión en un capacitor de placas paralelas se reduce a la mitad, por lo que disminuye la cantidad de energía almacenada. ¿En qué factor cambia?
3. Indique si la capacitancia de un capacitor depende de la diferencia de potencial. Describa lo que pudiera suceder cuando la diferencia de potencial de un capacitor crece inconmensurablemente.
4. Cuando se conectan en serie dos capacitores  $C_1$  y  $C_2$ , la capacitancia equivalente siempre es menor que  $C_1$  o  $C_2$ . Por otra parte, si se conectan en paralelo, la capacitancia equivalente es mayor que  $C_1$  o que  $C_2$ . ¿Puede explicar estos hechos de manera cualitativa?
5. En el espacio entre las armaduras de un capacitor de placas paralelas se almacenan energía. ¿Es posible lo anterior si hay un vacío perfecto entre las placas?
6. El máximo voltaje disponible para almacenar  $1.2 \times 10^{-5}$  C de carga en un capacitor es de 1 500 V. Determine la máxima capacitancia necesaria.

7. Analice y establezca claramente la diferencia entre el potencial electrostático y la energía potencial de un capacitor.
8. Describa dos funciones útiles que realiza un material aislante o dieléctrico cuando se utiliza en un capacitor.
9. ¿Qué diferencia hay entre la rigidez dieléctrica (*dielectric strength*) de un material y su constante dieléctrica? Investigue.
10. Se carga un capacitor conectándolo a una batería que luego se desconecta. Luego se sumerge en un material dieléctrico líquido con constante dieléctrica  $K$ . ¿El contenido de energía del capacitor se altera en este proceso? En caso afirmativo, ¿en qué factor?
11. Se gira la perilla de un capacitor de sintonización de un radio, reduciendo el área efectiva de las placas de 50 a 20 cm<sup>2</sup>. Halle la relación de la capacitancia final a la inicial.
12. ¿Por qué un líquido como el agua no es satisfactorio para utilizarse como dieléctrico de un capacitor?
13. Si se emplea un material polar como dieléctrico de un capacitor, ¿es de esperar que la capacitancia varíe con la temperatura?
14. ¿Qué diferencia hay entre carga libre y carga ligada?
15. ¿Qué dimensiones tiene la densidad de energía? Determine lo anterior obteniendo las dimensiones de  $\epsilon_0 E^2/2$ .
16. La capacitancia de una esfera única es  $4\pi \epsilon_0 R$ . ¿Qué magnitud debe tener  $R$  para obtener una capacitancia de 1 F?

## PROBLEMAS

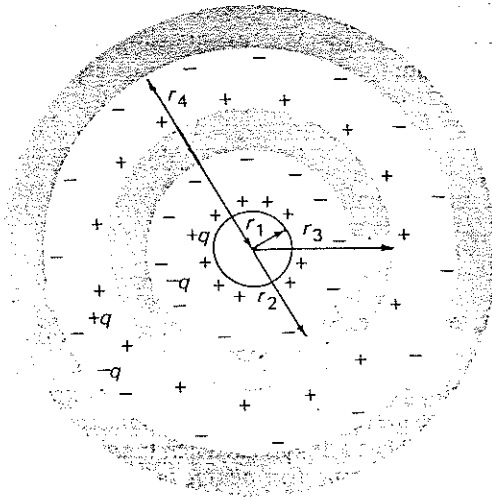
1. Se carga a  $30 \times 10^{-6}$  C un capacitor de placa paralelas de 200  $\mu$ F. Si la separación entre sus armaduras es de 5 mm, calcule el campo eléctrico entre las placas.
2. Se observa que un capacitor tiene una carga de  $2.5 \times 10^{-6}$  C cuando se mantiene una diferencia de potencial de 125 volts entre sus terminales. Determine su capacitancia.
3. La carga de un capacitor aumenta en  $6.0 \times 10^{-6}$  C cuando su diferencia de potencial aumenta desde 100 hasta 120 volts. Halle su capacitancia.
4. El área efectiva de un capacitor de placas paralelas con dieléctrico de aire y de 0.0025  $\mu$ F, es de 0.80 m<sup>2</sup>. (a) Calcule la separación entre las placas. (b) Evalúe la diferencia de potencial máxima que puede aplicarse al capacitor, suponiendo que el aire entre las placas puede so-



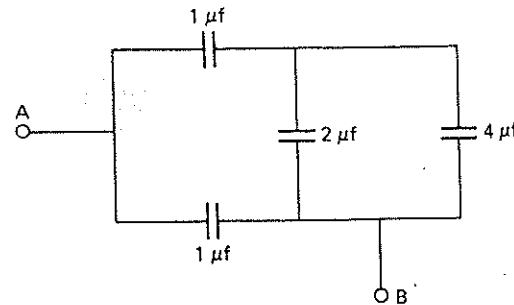
portar un campo máximo de  $3.0 \times 10^6$  V/m antes de que ocurra la ruptura eléctrica o descarga por chispa.

5. Ha de diseñarse un capacitor de placas paralelas y  $0.1 \mu\text{F}$ , de modo que el área de sus placas no sea mayor que  $0.10 \text{ m}^2$ . (a) Calcule la máxima diferencia de potencial que puede soportar el condensador sin "perforarse", suponiendo que el espacio entre las placas está lleno de aire. (b) ¿Qué densidad de carga máxima en las placas hay en estas circunstancias?
6. Un capacitor tubular consiste en dos cilindros conductores coaxiales muy largos. El radio externo del cilindro interior es de  $9.50 \text{ cm}$  y el radio interno del cilindro exterior es de  $10.0 \text{ cm}$ . (a) Determine la capacitancia de esta estructura, por unidad de longitud. (b) Obtenga la magnitud de la diferencia de potencial o voltaje que puede soportar esta estructura sin que sufra ruptura eléctrica, suponiendo que la disrupción eléctrica del aire situado en la región entre las placas, ocurre cuando se establece un campo eléctrico de  $3.0 \times 10^6 \text{ V/m}$  en cualquier punto.
7. ¿Cuáles serían las respuestas al problema anterior en el caso de un capacitor esférico concéntrico con los mismos radios interno y externo?
8. Se forma un capacitor de placas paralelas, con dieléctrico de aire y capacidad de  $0.0014 \mu\text{F}$ , utilizando placas circulares de radio  $r$  y separación  $d$ . Halle el menor valor que puede tener  $r$  sin que se produzca ruptura eléctrica del aire cuando se aplican  $500 \text{ V}$ .
9. Determine la capacitancia de una esfera metálica con radio igual al de la Tierra. Si se carga a  $1000 \text{ V}$ , calcule la carga en la esfera, la densidad de carga y el campo eléctrico en la superficie.
10. Cuatro capacitores de capacitancia  $1, 2, 3$  y  $4 \mu\text{F}$  están conectados en serie. Obtenga su capacitancia equivalente. ¿Cuál es su capacidad si se conectan en paralelo?
11. Un capacitor cilíndrico largo consiste en un cilindro interno de  $1 \text{ m}$  de radio y otro externo de  $2 \text{ m}$  de radio. Si se aplica una diferencia de potencial de  $200 \text{ V}$ , halle la carga que tiene un tramo de  $5 \text{ m}$  del conductor externo.
12. Un capacitor cilíndrico consiste en tubos coaxiales de radios  $r_1, r_2, r_3$  y  $r_4$ , como se indica en la figura. Demuestre que la capacitancia por unidad de longitud está dada por

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}}$$



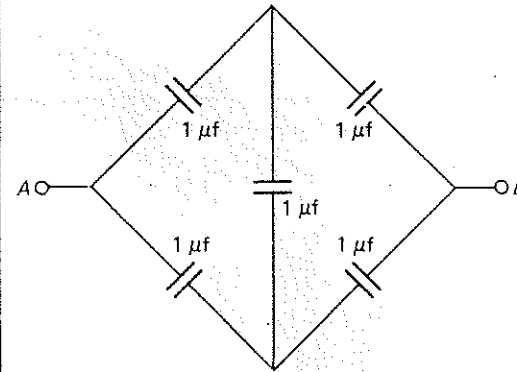
13. Dos capacitores descargados, con capacitancias respectivas de  $1 \mu\text{F}$  y  $3 \mu\text{F}$ , se conectan en paralelo y a una batería o acumulador que proporciona una diferencia de potencial de  $12 \text{ V}$ . Calcule la cantidad de carga en cada placa. Luego se desconectan de la fuente sin perder su carga y se conectan en serie, de manera que la placa cargada positivamente del capacitor de  $1 \mu\text{F}$  quede conectada a la placa cargada negativamente del capacitor de  $3 \mu\text{F}$ . Halle la diferencia de potencial del capacitor equivalente. ¿Cuál es la diferencia de potencial en cada capacitor?
14. Varios capacitores están conectados en el circuito que se muestra en el diagrama. Las capacitancias son de  $1, 1, 2$  y  $4 \mu\text{F}$ , como se indica. Calcule la capacitancia equivalente de la combinación y también la cantidad de carga en cada capacitor, cuando  $\Delta V_{AB} = 50 \text{ V}$ .



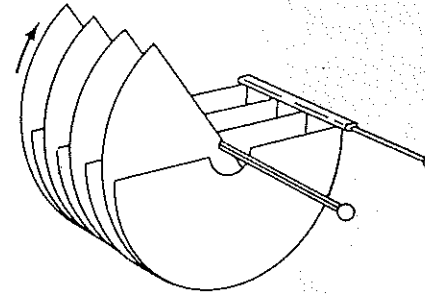
15. Se pueden conectar en serie o en paralelo dos capacitores  $C_1$  y  $C_2$ . Cuando están en serie la

capacitancia equivalente es  $C_1/3$ , y cuando están en paralelo, vale  $3 \mu\text{F}$ . Calcule  $C_1$  y  $C_2$ .

16. Cinco capacitores, cada uno de  $1 \mu\text{F}$ , se conectan como se muestra en la figura. Determine la capacitancia efectiva.



17. Un capacitor variable de aire consiste en cuatro placas móviles y tres estacionarias, como se indica en el diagrama. Demuestre que la máxima capacitancia es  $C_{\text{max}} = 3\epsilon_0 A/d$ , en que  $A$  es el área de las placas y  $d$  su separación.



18. Dos capacitores, con capacidades de  $2 \mu\text{F}$  y  $9 \mu\text{F}$ , respectivamente, se conectan en serie y a una diferencia de potencial de  $1000 \text{ V}$ . Determine la carga y el voltaje o tensión en cada uno. Luego se desconectan los capacitores de la fuente y se conectan entre sí. Para ambas polaridades de la conexión, evalúe la carga y la diferencia de potencial de cada capacitor.
19. Cuando se inserta una placa conductora de espesor  $b$  entre las armaduras de un capacitor de placas paralelas, demuestre que la capacitancia es  $C = C_0/(1 - b/d)$ , en que  $C_0$  es la capacitancia original y  $d$  la separación original de las

placas. Luego suponga que se introduce un cascarón esférico conductor de espesor  $b$  en un capacitor también esférico cuyas placas están separadas una distancia  $d$ . Obtenga la expresión correspondiente a la anterior y que se aplique a esta última configuración. Suponga que las armaduras esféricas tienen los radios  $r_1$  y  $r_2$ , y que los radios del cascarón introducido son  $r_3$  y  $r_4$ .

20. Se conectan dos capacitores, cada uno de capacitancia  $C$ , en serie con una fuente de voltaje  $\Delta V$ . Halle la carga y la energía almacenada en el capacitor equivalente. Luego se desconectan los capacitores de la fuente y uno del otro y se vuelven a conectar en paralelo, o sea, placa positiva con placa positiva y placa negativa con placa negativa. Determine el voltaje de la combinación y la energía almacenada. Explique la diferencia en el valor de la energía en los dos casos.
21. Se conectan en paralelo 200 capacitores idénticos, cada uno con  $10 \mu\text{F}$  de capacitancia, y se cargan a  $30000 \text{ V}$ . A razón de  $3\text{c}$  (de dólar) por kilowatt-hora, ¿cuánto valdría la energía almacenada? Si los capacitores se cargan al estar conectados en serie, ¿cuánto vale entonces la energía almacenada?
22. Una esfera metálica de  $50 \text{ cm}$  de radio tiene una carga de  $10^{-6} \text{ C}$  en su superficie. Obtenga la densidad de energía eléctrica  $u$ , para todos los valores de  $r$ . Calcule el radio  $R$  tal que la mitad de la energía almacenada esté dentro de una esfera de radio  $R$ .
23. Una densidad uniforme de carga está distribuida dentro de una esfera pequeña de  $10^{-13} \text{ cm}$  de radio. Si la cantidad de carga es la de un protón,  $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , halle la densidad de energía y la energía total en todo el espacio. ¿Cuánta energía contiene una esfera de  $5 \text{ cm}$  de radio, si la densidad de energía es uniforme y tiene el valor dado por la densidad de energía obtenida antes a  $r = 0.5 \times 10^{-3} \text{ cm}$ ?
24. Partiendo de  $u = \epsilon_0 E^2/2$  y la expresión (17.1.9), verifique por integración sobre la región de campo entre los electrodos, que la energía total almacenada en un capacitor cilíndrico puede expresarse como  $q(\Delta V)/2$ , en que  $\Delta V$  está dada por la expresión dada precisamente antes de (17.1.10).
25. Dos conductores cilíndricos huecos largos, delgados y coaxiales, con radios  $r_1$  y  $r_1 + x$  respectivamente, tienen las cargas  $q_1$  y  $-2q_1$ , respectivamente, en una longitud  $l$ . (a) Evalúe el campo eléctrico en cada región del espacio. (b) Obtenga la densidad de energía en todas partes. (c) Determine la cantidad de energía por



unidad de longitud que contiene el espacio entre los conductores. (d) Determine la fuerza de atracción entre los conductores para la longitud  $l$ .

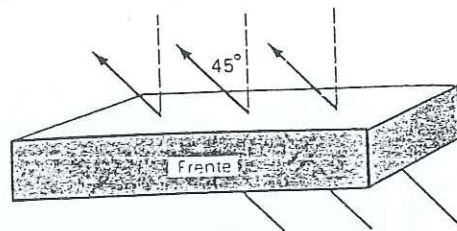
26. Se dobla un alambre de longitud  $L$  para que forme una semicircunferencia. Si tiene una carga total  $Q$ , halle la densidad de energía en el centro del círculo, suponiendo que la carga está distribuida uniformemente a lo largo del arco semicircular.
27. Un conductor esférico de radio  $r$  y carga  $Q$  consiste en dos hemisferios separables. Demuestre que la fuerza necesaria para mantener unidas las mitades es  $Q^2/32\pi\epsilon r^2$ . (Sugerencia: Calcule primero la fuerza neta hacia afuera a partir de  $-dU/dr$ , en que  $U$  es la energía potencial de la esfera.)
28. Una carga puntual positiva  $Q$  establece un campo eléctrico esféricamente simétrico. Se orienta un dipolo  $p$  en la dirección de una línea de campo, con su carga negativa más próxima a  $Q$ . Demuestre que la energía potencial del sistema es aproximadamente

$$U = -\frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

en que  $r$  es la distancia al centro del dipolo y  $d$  la separación entre sus cargas  $\pm q$ .

29. Una fuente de 25 V carga un capacitor de placas paralelas y  $6 \mu\text{F}$  de capacitancia. Entre sus placas se inserta un dieléctrico lineal de constante dieléctrica 3, y que llena completamente toda la región entre las mismas. (a) Determine la nueva diferencia de potencial entre las armaduras. (b) ¿Cuál es la densidad de carga ligada en las superficies del dieléctrico. (c) Obtenga la energía en el capacitor antes y después de que se inserte el dieléctrico. Explique la diferencia.
30. Un condensador de placas paralelas y  $0.003 \mu\text{F}$  de capacitancia emplea papel ( $K = 3.5$ ) como dieléctrico entre las placas, y se conecta a una fuente de 12 V. (a) ¿Cuánta carga adquiere? (b) Si se quita el papel y se reemplaza por una hoja de mica ( $K = 5.4$ ), manteniendo conectada la fuente durante el proceso, calcule la carga en el condensador en estas condiciones (c) ¿Cuál es su capacitancia en las circunstancias de la parte (b).
31. Se coloca una hoja de cuarzo, cuya constante dieléctrica es 3.8, en un campo eléctrico de 20 kV/m, como se muestra en la figura. El vector de campo eléctrico forma un ángulo de  $45^\circ$  con las caras superior e inferior, y es paralelo a

las caras del frente y posterior. Obtenga la densidad de carga en cada una de las caras.



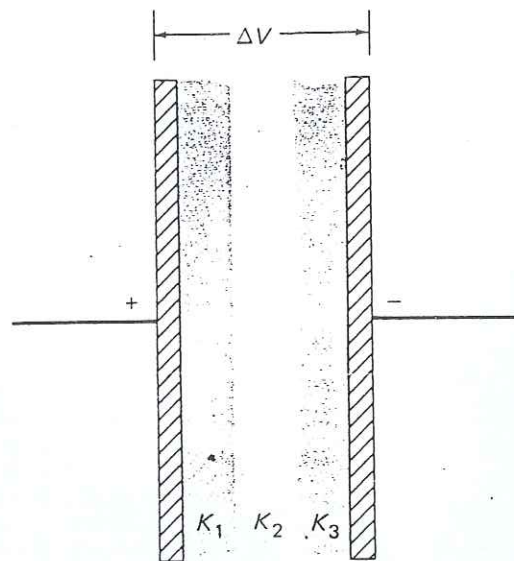
32. Se introduce un capacitor con placas paralelas de  $0.12 \text{ m}^2$  de área y  $1.0 \text{ mm}$  de separación, en un dieléctrico uniforme con constante dieléctrica  $K = 3.6$ . A dicho capacitor se le mantiene aplicada una diferencia de potencial de 360 V. Halle (a) la capacitancia del dispositivo, (b) la carga libre en las placas, (c) la carga de polarización en el dieléctrico, (d) la intensidad de campo en el dieléctrico, (e) la magnitud del desplazamiento en el dieléctrico, (f) la magnitud de la polarización también en el aislante.
33. Determinado dieléctrico "ficticio" contiene dipolos eléctricos atómicos permanentes de magnitud igual a  $3 \times 10^{-22} \text{ C} \cdot \text{Vm}$ . La densidad atómica es de  $10^{26}$  átomos por  $\text{m}^3$ . Si un campo eléctrico de  $10^4 \text{ V/m}$  produce una polarización efectiva que corresponde a la alineación de 25% de los dipolos atómicos en la dirección del campo, calcule la susceptibilidad del dieléctrico.
- \*34. Una placa plana de material aislante, con espesor  $a$  y constante dieléctrica  $K$ , se inserta en un condensador con placas paralelas de área  $A$  y distancia  $d$  (siendo  $d > a$ ), de manera que se llena parcialmente el espacio entre las placas del condensador por el material dieléctrico. Este último está en contacto con la placa de la izquierda del capacitor, y deja un hueco de espesor  $d - a$  entre la otra superficie del dieléctrico y la placa derecha del capacitor. La placa de la izquierda está al potencial cero y la de la derecha, al potencial más alto  $\Delta V$ . Halle (a) la intensidad de campo dentro del dieléctrico; (b) el campo en el resto de la región entre las placas; (c, d) el desplazamiento en las dos regiones mencionadas, respectivamente, en (a) y (b); (e) la polarización dentro del dieléctrico; (f) la carga ligada sobre las superficies de la placa de dieléctrico, (g) la carga libre en las placas del condensador, (h) la capacitancia de

dicho condensador, e (i) el potencial en la interficie de aire y dieléctrico en el capacitor.

35. Un capacitor de placas paralelas está lleno de material aislante, como se muestra en el diagrama. Demuestre que su capacitancia está dada por

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \right)$$

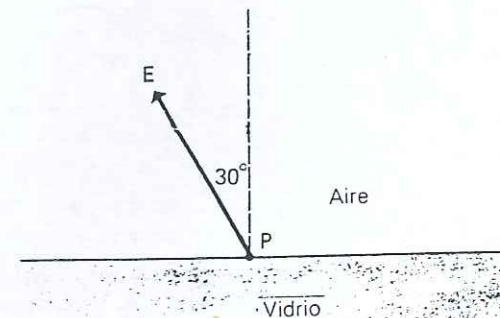
en que  $C_0$  es la capacitancia cuando no hay aislante  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  son las constantes dieléctricas de los tres materiales indicados.



36. Una carga puntual de  $10^{-6} \text{ C}$  está en el centro de una esfera de material dieléctrico de  $10 \text{ cm}$  de radio y susceptibilidad  $\chi = 5$ . Evalúe los vectores de polarización e inducción eléctricas en la superficie de la esfera. ¿Cuánta carga ligada hay en la superficie?
37. Un capacitor cilíndrico consiste en un tubo conductor largo de radio interno igual a  $2 \text{ cm}$  y radio externo de  $3 \text{ cm}$ , y un segundo tubo de radio interior igual a  $5 \text{ cm}$  y radio exterior de  $6 \text{ cm}$ . Las regiones  $r < 2 \text{ cm}$  y  $3 \text{ cm} < r < 5 \text{ cm}$  contienen un dieléctrico de  $K = 3$ . La región  $r > 6 \text{ cm}$  es aire. El capacitor se carga a  $300 \text{ V}$ .

Halle (a) la capacitancia por unidad de longitud (b) el vector desplazamiento en cada región, (c) el vector polarización en cada región, (d) la densidad de carga ligada en cada interficie, y (e) la energía almacenada por longitud unitaria.

38. Un prisma largo de vidrio con sección transversal cuadrada, tiene en su interior componentes de campo eléctrico uniforme de  $2000$  y  $3000$  volts/metro en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Determine la polarización y la inducción o desplazamiento en las fronteras internas del vidrio. Determine también el campo eléctrico en puntos justamente del vidrio. Suponga que  $K = 4.0$  para el vidrio.
39. Una interficie entre vidrio y aire no tiene carga libre, pero puede contener cierta cantidad de carga ligada. El campo eléctrico en un punto  $P$  justamente fuera del vidrio es de  $20000 \text{ V/m}$  y forma un ángulo de  $30^\circ$  con la normal a la superficie, como se muestra en el diagrama. Obtenga la magnitud y dirección del campo eléctrico justo dentro del vidrio. Suponga  $K = 4.0$ .



40. Un capacitor de placas paralelas con área  $A$ , y separación  $d$  entre sus placas se carga a un voltaje  $\Delta V$  mediante una batería. Mientras que el capacitor todavía está conectado a la fuente, se inserta una lámina de constante dieléctrica  $K$  y espesor  $d/3$  paralelamente a las placas. Calcule la capacitancia, la carga sobre las placas y la energía almacenada después de que se coloca la pieza de dieléctrico en su lugar.