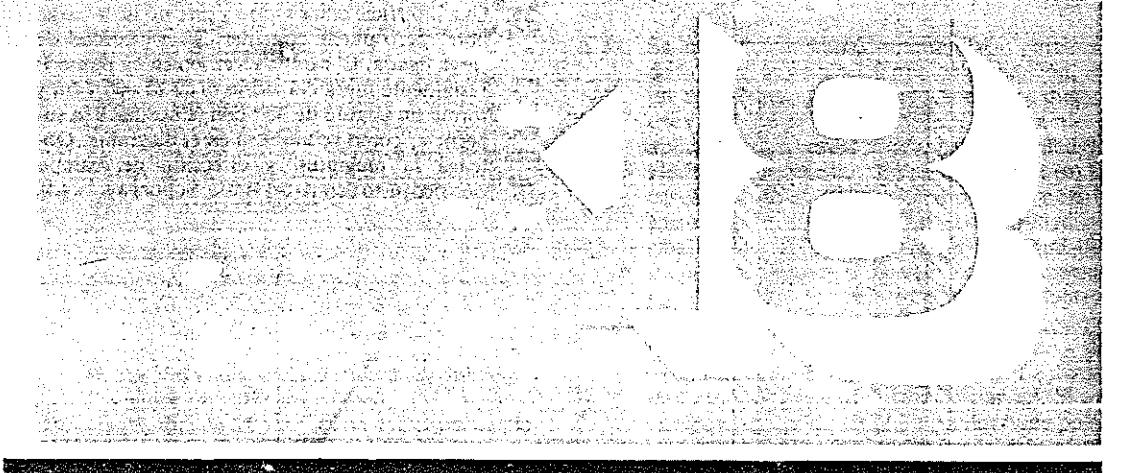


# CORRIENTES CONSTANTES Y CIRCUITOS

## DE CORRIENTE DISEÑADA



### 18.1 Introducción

En la sociedad contemporánea, de inmediato se asocia la palabra *electricidad* a dispositivos como lámparas, motores, ventiladores, radios y televisores. En la escala histórica, todo lo anterior es de origen comparativamente reciente. Durante unos dos mil años antes de 1800, el conocimiento humano de la electricidad se limitó estrictamente a los fenómenos *electrostáticos*, que habían observado ya los antiguos griegos. Pero la ciencia electrostática no se desarrolló mucho sino hasta el Renacimiento, y hacia 1800 el trabajo de científicos como Coulomb, Gauss, Gilbert y Franklin había hecho avanzar el conocimiento de la electrostática casi hasta su estado actual.

Después de 1800 ocurrió un desarrollo explosivo de los conocimientos de la electricidad, comenzando con el descubrimiento de Oersted de los campos magnéticos que acompañan a las corrientes eléctricas, y que culminó en 1864 con la brillante obra teórica de Maxwell que predijo la existencia de las ondas electromagnéticas, y con la producción y detección por Hertz, en 1888, de esas "ondas de radio". Durante este periodo se inventaron el motor y el generador eléctricos, se desarrollaron las comunicaciones eléctricas por medio del telégrafo y teléfono, y se comenzó a usar cotidianamente otros dispositivos eléctricos y electromecánicos. Alrededor de 1888 se contaba prácticamente con todo el conocimiento científico necesario para desarrollar la elabora-

rada tecnología de las telecomunicaciones, incluyendo los sistemas de radio, televisión y microondas. La producción material de estos dispositivos se redujo entonces simplemente a encontrar formas prácticas de aplicar dicho conocimiento en la construcción de dispositivos y sistemas útiles.

El hecho de que se comenzara a comprender intensivamente la electricidad poco después de 1800 se debió a determinados eventos que ocurrieron entre 1786 y 1800, a los que no parece dárseles su significado apropiado en muchos textos contemporáneos de física. Hasta 1786 no había una forma práctica de establecer un flujo estable y continuo (una *corriente*) de carga eléctrica, lo que limitó el conocimiento experimental de la electricidad al caso de sistemas con equilibrio de carga, es decir, a sistemas *electrostáticos*. Desde luego, fue posible establecer experimentos en que ocurrían flujos de electricidad, por ejemplo, en la carga o descarga de un condensador o en la producción repentina de una chispa entre dos electrodos a distintos potenciales. Pero en estos casos, el flujo de carga eléctrica ocurre tan rápidamente y concluye tan pronto, que era imposible observar ninguno de sus efectos físicos con los aparatos de detección relativamente simples de entonces.

En 1786, el científico italiano Aloisio Galvani observó que al establecer contacto eléctrico en un circuito que ponía las terminales nerviosas de las patas de una rana en serie con un conductor que contenía dos metales distintos, se presentaban en esos órganos contracciones musculares continuas. Alessandro Volta (1745-1827) continuó las investigaciones de Galvani; atribuyó esta "acción galvánica" a la presencia de los metales disímiles y luego construyó "pilas voltaicas" consistentes en piezas de metales no semejantes como cinc y cobre, separadas por trozos de tela humedecidos con una solución salina. Estas pilas voltaicas —que ahora se conocen como *pilas* o *celdas electroquímicas*— podían generar químicamente diferencias de potencial eléctrico y eran capaces de provocar flujos de carga relativamente intensos y constantes a través de circuitos conductores.

En consecuencia, el invento de la pila de Volta allanó el camino para los investigadores

subsecuentes como Oersted, Ampère, Faraday, Henry, Maxwell y Hertz, quienes rápidamente descubrieron y analizaron los efectos magnéticos, térmicos y químicos relacionados con las *corrientes continuas* de electricidad. No fue accidente que en 1820 ocurriera el descubrimiento de Oersted de que la aguja de una brújula se desvió en presencia de un conductor que lleve una corriente de electricidad. Esto no pudo haber sucedido con anterioridad, pues antes de que apareciera la pila voltaica nadie había podido producir un flujo considerable y continuo de corriente. Una vez que se contó con tal dispositivo, comenzaron a producirse los descubrimientos sorprendentes e importantes relacionados con la electricidad dinámica.

En el estudio de la electricidad realizado en este libro se ha llegado ya al estado de los conocimientos que prevalecían en 1800. Ahora el lector comenzará a familiarizarse con los venturosos descubrimientos del siglo XIX en los que se funda la era moderna de la tecnología eléctrica y la comunicación instantánea.

### 18.2 Flujo de carga en los conductores: corriente y densidad de corriente

Cuando ocurre un flujo de carga en un conductor, las condiciones dentro de la sustancia conductora ya no son las de equilibrio electrostático. En especial, ya no se verifica que el campo eléctrico sea cero en todas partes del conductor. En efecto, el campo eléctrico *tiene que ser distinto de cero* para establecer y mantener el flujo de carga.

En las sustancias metálicas, que son la clase más importante y conocida de los conductores, los electrones de valencia de los átomos ya no están unidos firmemente a dichos átomos, sino que pueden moverse con libertad dentro del conductor. Lo anterior resulta de la interacción entre los átomos que constituyen la red cristalina del metal. Siempre que una fuerza actúe sobre estos *electrones libres* en una sustancia conductora, como sucede por ejemplo cuando se aplica un campo eléctrico, la distribución de cargas libres se moverá estableciendo un flujo de electricidad o *corriente eléctrica*. Es importante notar que como el

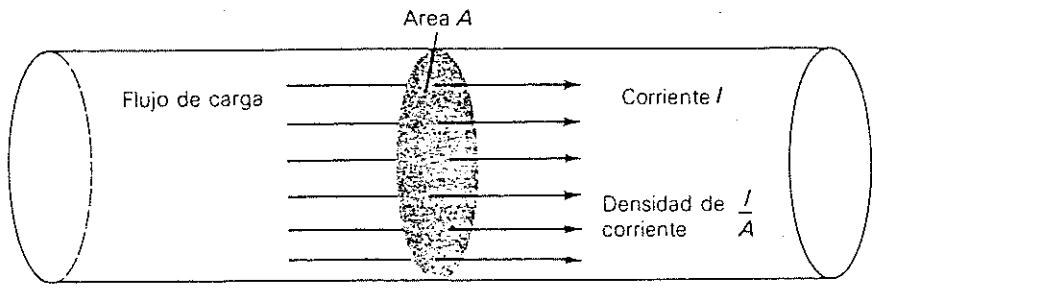


FIGURA 18.1. Concepto de la corriente eléctrica como un flujo de carga, y de la densidad de corriente eléctrica como un flujo de carga por unidad de área.

número de electrones libres de valencia está equilibrado por un número igual de cargas positivas en los iones metálicos del conductor, en general, este mismo, en conjunto, es eléctricamente neutro y no tiene una carga neta. Sin embargo, las cargas positivas en los iones metálicos están *fijas* en la red cristalina del metal y no se pueden mover como los electrones libres. Entonces, cuando existe un campo eléctrico dentro del conductor, son estos electrones libres los que constituyen el flujo de carga, mientras que los iones metálicos cargados positivamente se mantienen fijos y no ejercen ninguna influencia, excepto la de mantener la neutralidad eléctrica global de la sustancia. En general, el paso de la corriente en un conductor no necesita ser constante en el tiempo; pero cuando lo es (en intensidad y sentido), se dice que se ha establecido una *corriente continua (CC)* o *corriente directa (CD)*. En este capítulo se limitará el estudio, con una excepción, a los casos en que así ocurre. En capítulos posteriores se tendrá ocasión de investigar corrientes no constantes.

Primero considérese el caso de un conductor uniforme que lleva una corriente uniforme y constante en todos los puntos dentro de aquél. La *corriente I* en el conductor se define como la cantidad de carga móvil total que pasa por una sección transversal fija normal al conductor, por unidad de tiempo. De acuerdo con esta definición, si una cantidad de carga móvil  $\Delta q$  cruza el área sombreada de la figura 18.1 en el tiempo  $\Delta t$ , entonces

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (18.2.1)$$

Para las corrientes que varían en el tiempo, la intensidad de la corriente en el instante  $t$  se define como el límite de  $\Delta q/\Delta t$  cuando el intervalo de tiempo se hace infinitesimalmente pequeño; por tanto,

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (18.2.2)$$

De estas ecuaciones, es obvio que la intensidad de la corriente es una cantidad *escalar* y que la unidad de corriente en el Sistema Internacional es el coulomb por segundo, conocida más comúnmente como *ampere* (símbolo: A).<sup>1</sup>

Otra cantidad relacionada con la corriente es la *densidad de corriente*, que expresa la intensidad o concentración de flujo de carga en un punto de un medio conductor. La densidad de corriente es un *vector en la dirección del flujo de carga* en el punto dado. Su magnitud se determina tomando el límite del flujo de carga —o corriente— por unidad de área a través de un área pequeña  $\Delta a'$ , orientada perpendicularmente a la dirección de la corriente

<sup>1</sup> En honor de André Marie Ampère (1775-1836), físico francés que investigó los efectos magnéticos de las corrientes eléctricas y que expresó por primera vez la ley general que gobierna esos efectos.

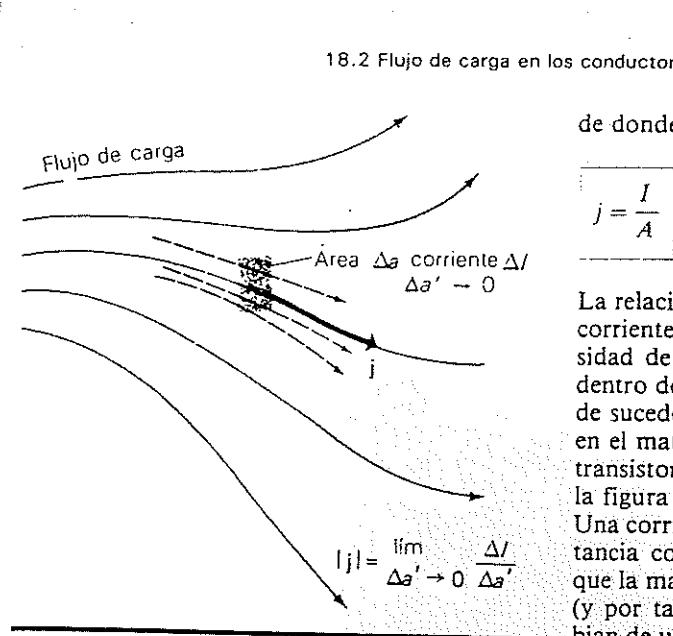


FIGURA 18.2. Densidad de corriente en un flujo de carga no uniforme.

en el punto y a medida que el área  $\Delta a'$  tiende a cero, como se muestra en la figura 18.2. Matemáticamente, esto quiere decir que la magnitud del vector densidad de corriente  $j$  está dada por

$$j = \lim_{\Delta a' \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta a'} = \frac{dI}{da'} \quad (18.2.3)$$

donde, desde luego

$$dI = j da' \quad (18.2.4)$$

En el caso de un conductor dentro del cual la intensidad de flujo de cargas libres es la misma en todos los puntos, como se muestra en la figura 18.1, la densidad de corriente  $j$  es la misma en todo el conductor. La relación entre la corriente total  $I$  y la densidad de corriente  $j$  puede encontrarse integrando (18.2.4) sobre el área transversal sombreada del conductor, considerando a  $j$  constante. De esta manera se obtiene

$$I = \int j da' = j \int_A da' = jA \quad (18.2.5)$$

de donde

$$j = \frac{I}{A} \quad (18.2.6)$$

La relación entre la densidad de corriente y la corriente total es más compleja cuando la densidad de corriente varía de un punto a otro dentro de la sustancia conductora, como puede suceder en un tubo de descarga gaseosa o en el material cristalino semiconductor de un transistor o rectificador de estado sólido. En la figura 18.3 se muestra un caso de ese tipo. Una corriente total  $I$  fluye a través de una sustancia conductora de forma irregular, en la que la magnitud y dirección del flujo de carga (y por tanto, la densidad de corriente) cambian de un punto a otro. Primero se considera una superficie  $S$  que atraviese el conductor —en principio, una superficie cualquiera— y se centra la atención en un elemento infinitesimal de área de la superficie,  $da$ , cuya orientación está especificada por el vector unitario *normal*  $n$  perpendicular al elemento. En general, la superficie  $S$  no es normal a la dirección de flujo de la corriente, definida por la dirección del vector densidad de corriente  $j$ . La magnitud del vector densidad de corriente se define por la corriente que pasa a través del elemento de área  $da'$  normal a la dirección de flujo de carga, como lo expresa la ecuación (18.2.4). Pero, de la figura 18.3, la relación entre las magnitudes de estos dos elementos es

$$da' = da \cos \theta \quad (18.2.7)$$

en que  $\theta$  es el ángulo entre la densidad de corriente  $j$  y el vector unitario  $n$  que especifica la orientación de la superficie  $S$  en el punto de que se trate. Entonces, de (18.2.4),

$$dI = j \cos \theta da \quad (18.2.8)$$

De la definición del producto escalar y del hecho de que el vector  $n$  es de magnitud unitaria,  $j \cos \theta$  es igual que  $j \cdot n$ . Entonces, la ecuación (18.2.5) queda como

$$dI = j \cdot n da \quad (18.2.9)$$

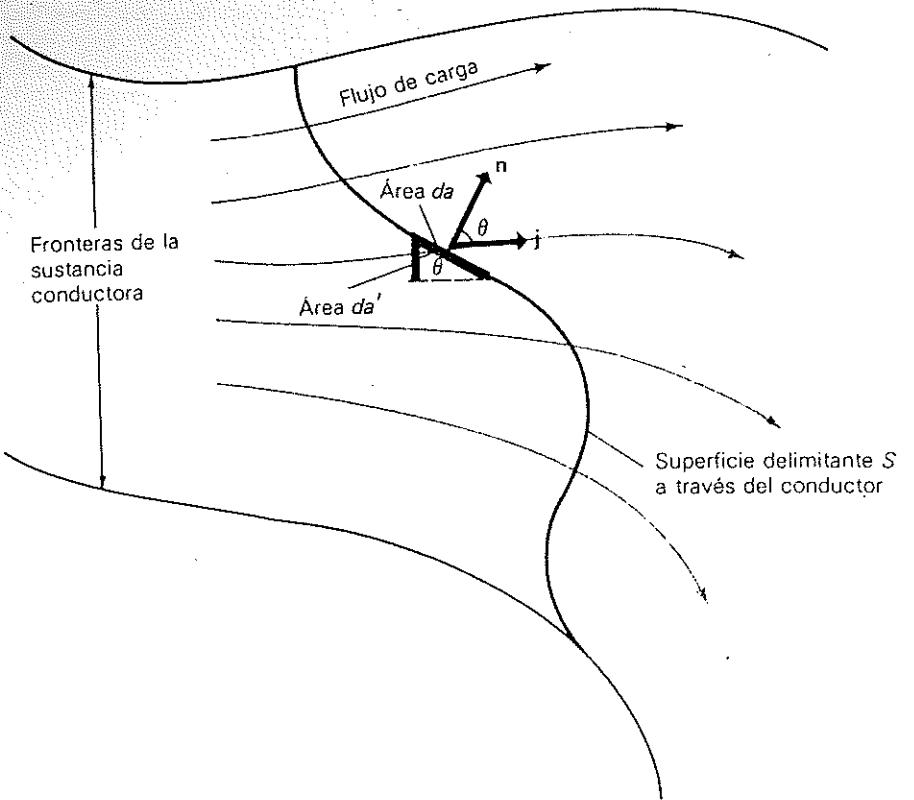


FIGURA 18.3. Evaluación de la relación general entre corriente y densidad de corriente.

que puede integrarse sobre toda la superficie  $S$  para dar

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{a} \quad (18.2.10)$$

Esta es la relación entre la corriente total y la densidad de corriente en el caso más general. La forma de esta relación y el hecho de que expresa el flujo total de carga a través de la superficie, puede ayudar a comprender con mayor claridad por qué se define el "flujo" eléctrico  $\Phi$  a través de una superficie como lo expresa la ecuación (16.3.3).

Puede utilizarse el patrón de vectores de densidad de corriente en un medio donde fluye una corriente eléctrica para trazar diagrame

mas de *líneas de flujo de carga eléctrica* en forma parecida al patrón de vectores de intensidad eléctrica que producen mapas o diagramas de las líneas de fuerza de un campo electrostático. Las líneas marcadas *flujo de carga* en las figuras 18.2 y 18.3 son precisamente líneas de corriente de este tipo. Las *líneas de corriente eléctrica* también son muy semejantes a las líneas de velocidad en un campo de flujo de un fluido, por lo que es evidente que la densidad de corriente puede considerarse un *campo vectorial*.

Sin embargo, es importante comprender que aunque un campo eléctrico puede ser lo que establece un flujo dado de corriente, las líneas de corriente no necesariamente son las mismas que las líneas de fuerza que actúan en las cargas. La razón es que las líneas de

corriente apuntan en la dirección de la *velocidad* de las cargas individuales, mientras que las líneas de fuerza asociadas al campo eléctrico apuntan en la dirección de la *fuerza eléctrica* que experimentan y por tanto, de acuerdo con Newton, en la dirección de su *aceleración*. Pero como ya se ha visto muchas veces en el estudio de la mecánica, los vectores de la velocidad y la aceleración de una partícula no necesariamente tienen la misma dirección. El ejemplo más sencillo se encuentra en el movimiento circular uniforme, en donde el vector velocidad es tangente a la trayectoria circular, mientras que los vectores fuerza y aceleración son normales a aquél, dirigidos radialmente hacia el interior. Por tanto, las líneas de flujo de corriente y las líneas de campo eléctrico pueden tener direcciones distintas en general, en cuyo caso los diagramas de líneas de fuerza y de líneas de corriente tienen aspecto muy distinto.

Otra relación importante es la que existe entre la densidad de corriente, y la *velocidad* de las cargas que constituyen el flujo de corriente en cualquier punto. Esto puede comprenderse considerando la figura 18.4, que ilustra una parte del patrón de flujo de corriente confinado a un "tubo de flujo de corriente" de área  $da'$ , análogo a un tubo de flujo de un fluido, como se describió en el

Capítulo II del Tomo I. Como las líneas de corriente son paralelas a los lados del tubo de flujo, no fluye corriente a través de estos lados. En un intervalo  $dt$ , toda carga dentro de la sustancia se moverá según el flujo de corriente en una cierta distancia  $dx = v dt$ , en que  $v$  es la velocidad media de las cargas. En este intervalo de tiempo, por el área sombreada  $da'$  fluye una carga total  $dq$ . La *densidad* de carga eléctrica se denotará mediante  $\rho$ , que representa la carga eléctrica por unidad de volumen en el elemento volumétrico que se muestra. Entonces la cantidad de carga  $dq$  dentro del volumen  $dV$  es

$$dq = \rho dV = (\rho da') dx \quad (18.2.11)$$

Pero puesto que  $dx = v dt$ , se puede escribir

$$dq = (\rho v da') dt \quad (18.2.12)$$

o sea,

$$\frac{dq}{dt} = \rho v da' \quad (18.2.13)$$

Sin embargo, de acuerdo con (18.1.2),  $dq/dt$  representa la corriente total en el tubo de flujo y está relacionada con la densidad de corriente ahí, mediante (18.2.4). Sustituyendo  $j da'$  por  $dq/dt$  en (18.2.13) y cancelando los elementos de área, se ve que la densidad de corriente, la densidad de carga y velocidad de las cargas están relacionados como sigue

$$j = \rho v \quad (18.2.14)$$

En efecto, puesto que el vector densidad de corriente y el vector velocidad tienen la misma dirección, esta relación también es válida como una relación vectorial de la forma

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (18.2.15)$$

En consecuencia, la densidad de corriente es igual a la densidad de carga multiplicada por la velocidad de las cargas en todos los puntos dentro de la sustancia conductora.

Si las cargas dentro de la sustancia existen (como siempre ocurre) en números considerables de partículas elementales cargadas, en

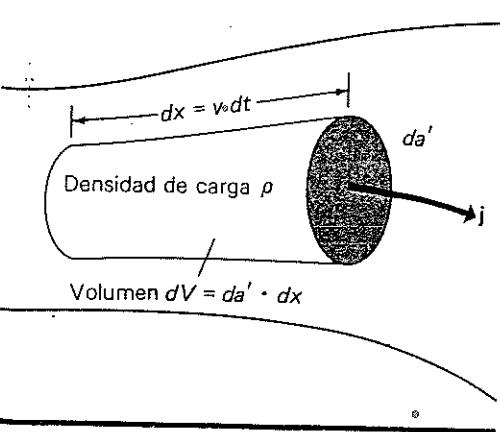


FIGURA 18.4. Evaluación de la relación entre densidad de corriente y la densidad de cargas móviles

tonces la carga por unidad de volumen estará dada por

$$\rho = nq_0 \quad (18.2.16)$$

en que  $n$  es el número de partículas por unidad de volumen y  $q_0$  es la carga asociada a cada una. Entonces, la ecuación (18.2.15) toma la forma

$$j = nq_0\bar{v} \quad (18.2.17)$$

en que  $\bar{v}$  representa la velocidad media de las partículas cargadas. Por último, si las cargas elementales son electrones, su carga  $q_0$  es  $-e$ , en que  $e$  representa la magnitud de la carga del electrón, igual a  $1.6022 \times 10^{-19}$  C. En este caso

$$j = -ne\bar{v} \quad (18.2.18)$$

#### EJEMPLO 18.2.1

Un conductor de sección transversal uniforme lleva una corriente constante de 1.00 A. ¿Cuántos electrones por segundo fluyen por cualquier punto del conductor?

Si la corriente es de 1.00 A, entonces la intensidad total de flujo de carga por cualquier punto vale 1.00 coulomb por segundo. Pero como la magnitud de la carga electrónica está dada por  $e = 1.6022 \times 10^{-19}$  C y ya que el número de electrones en 1 C es el *recíproco* de esta cantidad, o sea,  $6.241 \times 10^{18}$  electrones por coulomb, el número de electrones que pasa por cualquier punto del conductor que transporte una corriente de 1.00 A ( $= 1.00$  C/s) es precisamente el número de cargas electrónicas en 1 C, o sea  $6.241 \times 10^{18}$ . Los instrumentos de medición de corriente más sensibles pueden medir intensidades del orden de  $10^{-16}$  A, que corresponde a  $(6.241 \times 10^{18}) \cdot (10^{-16}) \equiv 600$  electrones por segundo.

#### EJEMPLO 18.2.2

Un conductor de plata (densidad, 10.50 g/cm<sup>3</sup> y masa atómica, 107.9 g/mol) tiene 0.1 cm de diámetro de sección transversal circular uni-

forme. El conductor transporta una corriente constante de 100 A. Halle la densidad de corriente y la velocidad media con que se mueven las cargas dentro del conductor, suponiendo que cada átomo de plata contribuye con un electrón libre móvil a la corriente.

En este caso, puesto que el conductor es homogéneo y de sección transversal uniforme, la densidad de corriente es la misma en todas partes y se puede encontrar dividiendo la corriente entre el área, como lo expresa (18.2.6). El área transversal  $A$  es

$$A = \pi r^2 = (3.1416)(0.05^2) = 0.00785 \text{ cm}^2$$

Entonces, la densidad de corriente vale

$$\begin{aligned} j &= \frac{I}{A} = \frac{100}{0.00785} = 12\,740 \text{ A/m}^2 \\ &= 1.274 \times 10^8 \text{ A/cm}^2 \end{aligned}$$

La velocidad media de las cargas puede obtenerse de la ecuación (18.2.18). En un mol de plata, que contiene 107.9 g de la sustancia, hay  $N_A = 6.023 \times 10^{23}$  átomos, y por tanto,  $6.023 \times 10^{23}$  electrones libres. Por otra parte, ya que la densidad es 10.50 g/cm<sup>3</sup>, un mol de plata ocupa  $107.9/10.50 = 10.28 \text{ cm}^3$  de volumen, por lo que en cada centímetro cúbico hay  $N_A/10.28 = (6.023 \times 10^{23})/10.28 = 5.86 \times 10^{22}$  átomos, y por tanto,  $n = 5.86 \times 10^{22}$  electrones/cm<sup>3</sup> =  $5.86 \times 10^{28}$  electrones/m<sup>3</sup>. Entonces, de acuerdo con (18.2.18),

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{j}{ne} = \frac{1.274 \times 10^8}{(5.86 \times 10^{28})(1.602 \times 10^{-19})} \\ &= 1.357 \times 10^{-2} \text{ m/s} = 1.357 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

Al utilizar las ecuaciones (18.2.15) y (18.2.18) es importante *no usar más que unidades SI*, expresando  $j$  en A/m<sup>2</sup>,  $\rho$  en C/m<sup>3</sup>,  $n$  en electrones/m<sup>3</sup> y  $v$  en m/s. Aunque en algunos contextos es útil expresar la densidad de corriente en A/cm<sup>2</sup> y la densidad electrónica en electrones/cm<sup>3</sup>, éstas *no* son unidades SI y producen resultados erróneos cuando se utilizan sin discriminación en las ecuaciones antes deducidas.

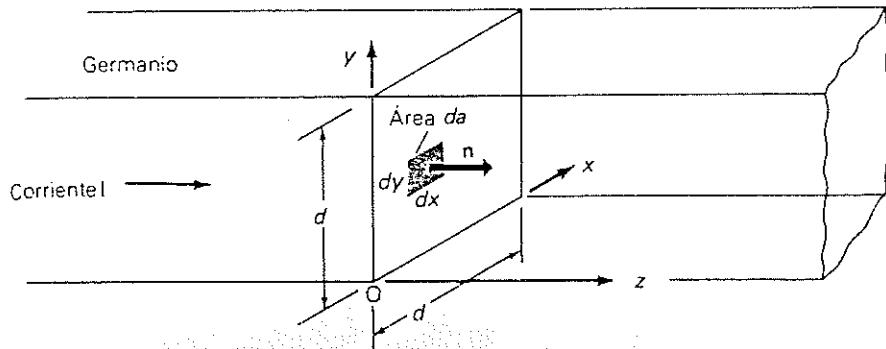


FIGURA 18.5

#### EJEMPLO 18.2.3

Una barra de cristal *semiconductor* como el germanio tiene sección transversal cuadrada uniforme con longitud de 0.1 cm por lado, como se muestra en la figura 18.5. Debido a las propiedades semiconductoras de la sustancia, la densidad de corriente no es uniforme en la sección transversal de la muestra, sino que varía de punto a punto de acuerdo con la ecuación

$$j = j_0 \left( \sin \frac{\pi x}{h} \sin \frac{\pi y}{h} \right) i_z \quad (18.2.19)$$

en que  $h$  representa el lado de 0.1 cm de la muestra. Esta ecuación expresa simplemente que la densidad de corriente se reduce a cero en la superficie de la barra en  $x = 0$ ,  $x = h$ , y en  $y = 0$ ,  $y = h$ ; tiene el valor máximo  $j_0$  en el centro en  $x = y = h/2$ ; y varía sinusoidalmente en función de  $x$  y  $y$  en las demás partes. De acuerdo con (18.2.19), la dirección de  $j$  es paralela al eje  $z$  en todas partes, es decir, a longitud de la barra. Suponiendo que el valor de  $j_0$  es de 800 A/m<sup>2</sup>, encontrar la corriente total  $I$  que pasa por la muestra.

En este ejemplo, la densidad de corriente varía de punto a punto en la muestra, por lo que debe comenzarse con la ecuación (18.2.10), integrando la cantidad  $j \cdot n$  en la sección transversal de la muestra. Se puede considerar que la citada sección transversal está formada por elementos de área rectangulares con las di-

mensiones  $dx$  y  $dy$ , como se muestra en la figura 18.5; puesto que el plano de la sección es normal a la dirección  $z$ , el vector unitario normal  $n$  perpendicular al elemento de área apunta según el eje  $z$ . Como esto representa la magnitud y la dirección del vector  $i_z$ , en tal caso se puede escribir

$$n = i_z \quad (18.2.20)$$

Sustituyendo (18.2.19) y (18.2.20) en (18.2.10) y notando que  $i_z \cdot i_z = 1$ , se obtiene

$$I = \int_S j \cdot n \, da = \int j_0 \left( \sin \frac{\pi x}{h} \sin \frac{\pi y}{h} \right) dx \, dy \quad (18.2.21)$$

Al integrar sobre toda el área transversal de la muestra, debe operarse *dos veces*, una vez según  $dx$  desde  $x = 0$  hasta  $x = h$  para producir el elemento rectangular de ancho  $dy$  que se muestra en la figura 18.6, y luego según  $dy$  desde  $y = 0$  hasta  $y = h$  para abarcar toda el área. Al evaluar la primera integral, según  $dx$ , debe considerarse que  $y$  es *constante*, ya que todos los elementos de área en la franja tienen la misma altura sobre el eje de las  $x$ . De esta manera puede escribirse

$$I = j_0 \int_0^h \int_0^h \sin \frac{\pi x}{h} \sin \frac{\pi y}{h} \, dx \, dy \quad (18.2.22)$$

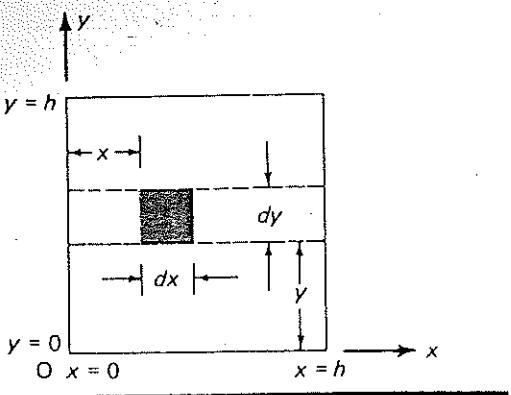


FIGURA 18.6

Integrando según  $x$  y luego con respecto a  $y$  se obtiene

$$\begin{aligned} I &= j_0 \int_0^h \frac{1}{\pi} \left[ -\cos \frac{\pi x}{h} \right]_0^h \sin \frac{\pi y}{h} dy \\ &= \frac{2j_0 h}{\pi} \int_0^h \sin \frac{\pi y}{h} dy = \frac{2j_0 h^2}{\pi^2} \left[ -\cos \frac{\pi y}{h} \right]_0^h \\ &= \frac{4j_0 h^2}{\pi^2} \end{aligned} \quad (18.2.23)$$

Puesto que  $h^2$  representa el área transversal to-

tal  $A$  de la muestra, la anterior finalmente se reduce a

$$I = \frac{4j_0 A}{\pi^2} = \frac{(4)(800)(10^{-6})}{(3.1416)^2} = 3.24 \times 10^{-4} \text{ amp} \quad (18.2.24)$$

### 18.3 Fuerza electromotriz y diferencia de potencial (o tensión)

Considere el caso que se muestra en la figura 18.7, en el que se conecta una fuente de CD (representada por el símbolo  $\text{---}|\text{---}||\text{---}$ ) a un circuito cerrado que contiene un motor que efectúa trabajo mecánico levantando un peso. Es evidente que determinadas fuerzas deben actuar sobre las cargas móviles del circuito conductor y en los alambres que constituyen las bobinas del motor. De no ser así, jamás podría establecerse una corriente en este circuito. También es evidente que *el trabajo que hace el motor se debe al flujo de corriente a través de su devanado, y por tanto, a las fuerzas que provocan el flujo de la carga eléctrica*.

Se sabe que las cargas ejercen fuerzas electrostáticas entre sí, cuya acción está descrita por la ley de Coulomb y la ley de Gauss. La distribución de cargas crea un *campo electrostático*, que se puede llamar  $E_0$ , cuya intensi-

dad en cualquier punto está definida por

$$E_0 = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F_0}{q} \quad (18.3.1)$$

en que  $F_0$  representa la suma vectorial de todas las fuerzas de Coulomb sobre la "carga de prueba"  $q$ , que provienen de las *otras* cargas presentes. Si se designan como  $q_1, q_2, \dots, q_n$  a esas cargas, entonces la fuerza  $F_0$ , de acuerdo con la ley de Coulomb, siempre será de la forma

$$F_0 = \sum_{k=1}^n \frac{qq_k}{r_k^2} \cdot \frac{r_k}{r_k} \quad (18.3.2)$$

en que  $r_k$  es el vector de posición que describe la ubicación de la carga  $q_k$  con respecto a la carga de prueba  $q$ .

Del estudio de la electrostática se sabe que se puede asociar una energía potencial a las fuerzas electrostáticas, al igual que a las fuerzas gravitacionales. Por tanto, es posible llegar a la conclusión de que las fuerzas electrostáticas son *conservativas*. Pero en el Capítulo 5 (Tomo I) se vio que *debe ser nulo el trabajo efectuado por una fuerza conservativa al recorrer cualquier trayectoria cerrada*. Ya que la fuerza electrostática que actúa en la carga  $q$  es  $qE_0$ , esto quiere decir que el trabajo que efectúa puede escribirse como

$$W = \oint_c F \cdot dl = q \oint_c E_0 \cdot dl = 0$$

de donde

$$\oint_c E_0 \cdot dl = 0 \quad (18.3.3)$$

De aquí se ve que vale *zero* el trabajo neto efectuado por las fuerzas electrostáticas sobre cualquier carga al recorrer el circuito. Como consecuencia de ello, se debe llegar a la conclusión de que a las *fuerzas electrostáticas* no puede atribuirseles la realización del trabajo por las corrientes eléctricas, o incluso, de establecer o mantener el flujo de corriente en un circuito conductor, ya que esto también requiere trabajo.

De esta manera es necesario llegar a la conclusión de que las corrientes constantes

sólo pueden fluir como resultado de que sobre las cargas actúen fuerzas *no electrostáticas*. En este punto es necesario comprender que en tanto que las cargas ejercen fuerzas electrostáticas entre sí, también pueden estar sometidas a la acción de fuerzas distintas a las de Coulomb debidas a otras cargas. Entonces, en general, el campo eléctrico total  $E$  que representa la fuerza *total* por unidad experimentada por una carga dada *puede no ser de origen completamente electrostático*. En consecuencia, un *campo electrostático* sólo es un caso especial particularmente simple de un *campo eléctrico*. No obstante, siempre puede escribirse la intensidad del campo eléctrico total  $E$  en términos de la suma vectorial de las fuerzas electrostáticas y no electrostáticas que actúan una carga de prueba  $q$ , de donde

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F_0}{q} + \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F'}{q} = E_0 + E' \quad (18.3.4)$$

en que  $F_0$  es la fuerza electrostática neta que experimenta la carga  $q$  y  $F'$  es la fuerza resultante no electrostática. De esta manera puede expresarse el campo total como la suma de un *campo electrostático*  $E_0$  y un *campo no electrostático*  $E'$ . Sólo campos de este segundo tipo, que *pueden deberse a fuentes magnéticas, químicas, térmicas o de otro tipo, provocan un flujo de corriente constante en un circuito eléctrico*.

Haciendo nueva referencia a la figura 18.7, es evidente que en cualquier intervalo dado, de tiempo durante el cual el motor efectúa trabajo mecánico externo  $\Delta W_m$ , de alguna manera debe hacerse una cantidad equivalente de trabajo sobre las cargas móviles que constituyen la corriente. Esto debe verificarse como resultado de la ley de la conservación de la energía; el motor efectúa trabajo debido a que se hace que fluya corriente a través de sus devanados, por lo que tiene que realizarse una cantidad equivalente de trabajo sobre las cargas que forman la corriente, para mantener el flujo de la misma. De no ser así, se obtendría trabajo de la nada, y podría utilizarse el motor para operar un generador que generara más corriente que efectuara más trabajo que a su vez generara más corriente, *ad infinitum* — o

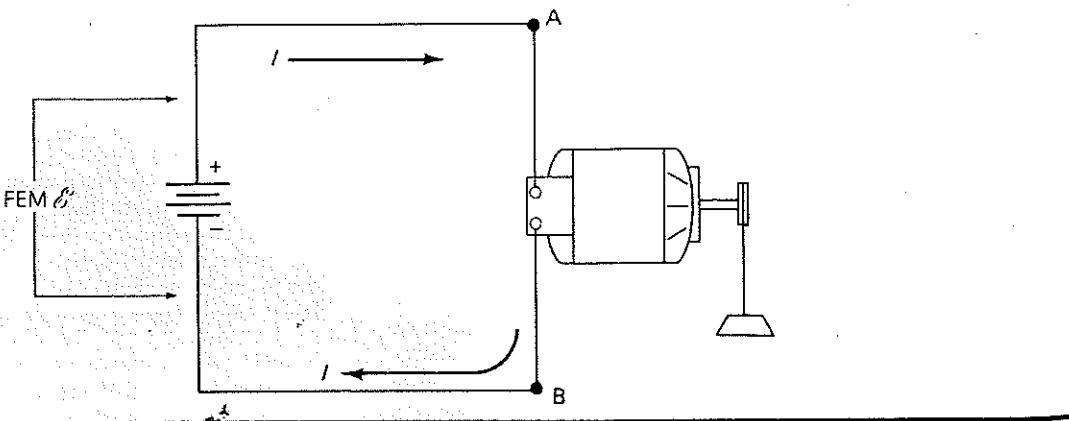


FIGURA 18.7. Corriente eléctrica que efectúa trabajo mecánico.

sea, máquina de movimiento perpetuo. Como ya se ha visto, las fuerzas *no electrostáticas* que actúan sobre las cargas son las que deben realizar ese trabajo. Entonces, el efecto de una fuente de corriente, como una pila o batería, un generador o una fotocelda, es hacer trabajo sobre las cargas en el circuito, *aumentando su energía potencial* a medida que fluyen a través del dispositivo. A la cantidad de energía potencial *por unidad de carga* que puede impartir este tipo de fuente se le conoce como su *fuerza electromotriz (FEM)*. Por tanto, si una fuente de corriente puede aumentar la energía potencial de una carga  $q$  en la cantidad  $\Delta U_p$ , su FEM  $\mathcal{E}$  está dada por

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta U_p}{q} \quad (18.3.5)$$

Como la energía potencial  $\Delta U_p$  de la carga  $q$  está relacionada con una diferencia en el *potencial eléctrico*  $\Delta V$  mediante la relación  $\Delta U_p = q \Delta V$ , es evidente que se puede escribir (18.3.5) simplemente como

$$\mathcal{E} = \frac{q \Delta V}{q} = \Delta V \quad (18.3.6)$$

Esta ecuación permite interpretar la FEM  $\mathcal{E}$  como una *diferencia de potencial, o tensión atribuible a fuerzas no electrostáticas, capaz de establecer una corriente constante en un circuito conductor cerrado*.

De (18.2.6), es claro que la FEM de una fuente de corriente tiene las dimensiones de diferencia de potencial, o sea, *volts* en el Sistema Internacional. En consecuencia, una batería (o acumulador) cuya FEM es de 12 V puede mantener una diferencia de potencial de tal voltaje entre sus terminales, mediante procesos químicos. Cuando fluye carga a través de ese tipo de batería, cada coulomb que entra por la terminal negativa de la fuente recibe un aumento de energía potencial de 12 joules (J) dentro de la batería, antes de salir por la terminal positiva. Al recorrer el circuito externo, representado por el motor de la figura 18.7, cada coulomb de carga efectúa 12 J de trabajo contra las fuerzas externas (representadas por

la pesa que mueve el motor), con lo que *su energía potencial disminuye en 12 J al regresar a la terminal negativa de la batería*. Suponiendo que en el tiempo  $\Delta t$  fluye la carga  $\Delta q$ , entonces, puesto que  $I = \Delta q / \Delta t$ , la potencia que proporciona la FEM es

$$P = \frac{\Delta U_p}{\Delta t} = \frac{\Delta q \Delta V}{\Delta t} = I \Delta V \quad (18.3.7)$$

o, recordando (18.3.6),

$$P = \mathcal{E} I \quad (18.3.8)$$

Cabe señalar que realmente es inapropiado el término *fuerza electromotriz*, ya que la FEM no es propiamente una fuerza sino una diferencia de potencial. Se hubiera designado con mayor exactitud como “tensión (diferencia de potencial) electromotriz”, pero ya se ha utilizado tanto el término “fuerza electromotriz”, que en la actualidad sería inútil tratar de cambiarlo. En consecuencia, se continuará utilizando el término FEM en la forma acostumbrada, recordando siempre —es de esperar— que se trata de una diferencia de potencial o voltaje, y no de una fuerza.

Aunque fuentes de FEM distintas de las baterías se apoyan en procesos internos distintos para producir y mantener sus diferencias de potencial entre terminales, se comportan esencialmente de la misma manera cuando se incorporan en circuitos conductores. En todos los casos se mantiene una diferencia de potencial constante no electrostática entre las terminales de la fuente. Idealmente, esta tensión o FEM es *independiente de la corriente* que fluye y de cualesquiera campos eléctricos de origen externo que puedan existir. Las fuentes reales de fuerza electromotriz se apartan algo de este comportamiento ideal, por razones simples y bien comprendidas, aunque su estudio se pospondrá para un capítulo posterior.

En las figuras 18.8 y 18.9 se ilustran los campos eléctricos —ahora se habla de *eléctricos* y no de *electrostáticos*, y en adelante se distinguirá cuidadosamente entre estos términos— que existen alrededor de circuitos en que hay fuentes de FEM. En la figura 18.8 hay

un espacio separador en el circuito conductor de forma rectangular, el circuito se mantiene abierto y no fluye corriente. En la figura 18.9 se ha eliminado el espacio (por ejemplo, cerrando un interruptor intercalado), se completó el circuito y fluye así una corriente constante  $I$  por el circuito de conducción. En la primera de las figuras, tomando en cuenta que está presente el FEM de la fuente, el caso es esencialmente de equilibrio de cargas. Como se tiene FEM, la parte inferior del conductor rectangular está (por así decirlo) al potencial uniforme  $V = 0$ , y la parte superior está al potencial de  $+\mathcal{E}$  volts. Ya que en equilibrio no puede haber campo eléctrico dentro de un conductor, toda la rama inferior del circuito es una región equipotencial con potencial cero. Hay determinada distribución de carga en la superficie del conductor, que se forma de manera que garantiza que así suceda. En forma análoga, toda la rama superior del circuito conductor es una región equipotencial con  $+\mathcal{E}$  volts de potencial. Parte de la distribución de carga superficial consiste en una acumulación de cargas positivas en la rama superior del circuito, en el punto donde está interrumpido, y de una distribución igual de cargas negativas en la superficie del extremo de la rama inferior. El espacio libre en el circuito conductor se asemeja mucho a un condensador de placas paralelas cargado a un potencial que corresponde a la FEM  $\mathcal{E}$  de la fuente de potencial. Hay un intenso campo electrostático en este espacio, cuya origen son estas cargas positivas y negativas en las superficies conductoras. La caída en el potencial electrostático de  $-\mathcal{E}$  volts entre A y B apenas equilibra la elevación en potencial de  $+\mathcal{E}$  volts desde C hasta D ocasionada por la FEM de la fuente. Ya que hay una fuerte caída de potencial entre A y B, una serie de contornos equipotenciales estrechamente espaciados cortará toda línea que une a A y B, como se muestra.

Lo mismo puede decirse de la fuente en la figura 18.8. Ya que sus terminales C y D están a distinto potencial, es necesario cruzar una serie semejante de contornos equipotenciales al pasar de C a D. Lejos del espacio libre en el circuito y fuera de la fuente, habrá campos dispersos como se indica, que terminan en las superficies equipotenciales del circuito. De la

misma manera, fuera del circuito pero próximas de él, hay líneas equipotenciales que siguen el contorno del circuito muy de cerca, y que son mucho más redondeadas a mayores distancias. Estas características generales se suman para producir la configuración de líneas de campo y contorno equipotenciales que se muestra en la figura 18.8.

Cuando el circuito se completa (o cierra) y fluye una corriente constante  $I$ , la imagen cambia notablemente a la que se muestra en la figura 18.9. Ahora el campo dentro del conductor ya no es cero sino que tiene la magnitud constante  $\mathcal{E}/l$ , en que  $l$  es la longitud del conductor; el campo está *en la dirección* del conductor en todos los puntos. Este patrón del campo establece uno semejante de líneas de corriente en el circuito —un caso en que los diagramas de intensidad de campo eléctrico y de flujo de corriente son los mismos. La caída de potencial de  $-\mathcal{E}$  volts en el circuito conductor externo entre A y B ya no está concentrada en un espacio externo, sino que se extiende gradual y uniformemente por toda la longitud del conductor. La superficie de este último ya no es equipotencial. Por el contrario, ahora hay superficies planas equipotenciales que *cortan* al conductor normalmente a intervalos iguales de distancia sobre su longitud, y son perpendiculares a las líneas del campo en el interior. Además, la diferencia de potencial entre las terminales de la batería establece una serie de líneas equipotenciales *dentro* de la fuente de FEM, como se muestra. El aumento en potencial de  $+\mathcal{E}$  volts dentro de la fuente desde C hasta D está equilibrado por la caída gradual de potencial de  $-\mathcal{E}$  volts sobre toda la longitud del circuito, desde A hasta B. La diferencia de potencial entre las terminales de la fuente también da lugar a un campo disperso fuera del circuito, como se ilustra en el diagrama. Juntas, estas características producen la configuración de líneas de campo y contorno equipotenciales que se muestra en la figura 18.9.

El estudio anterior es muy importante. El tiempo y esfuerzo invertidos para entenderlo claramente compensados con amplitud al poder comprenderse el comportamiento físico de los circuitos conductores en que se tiene FEM.

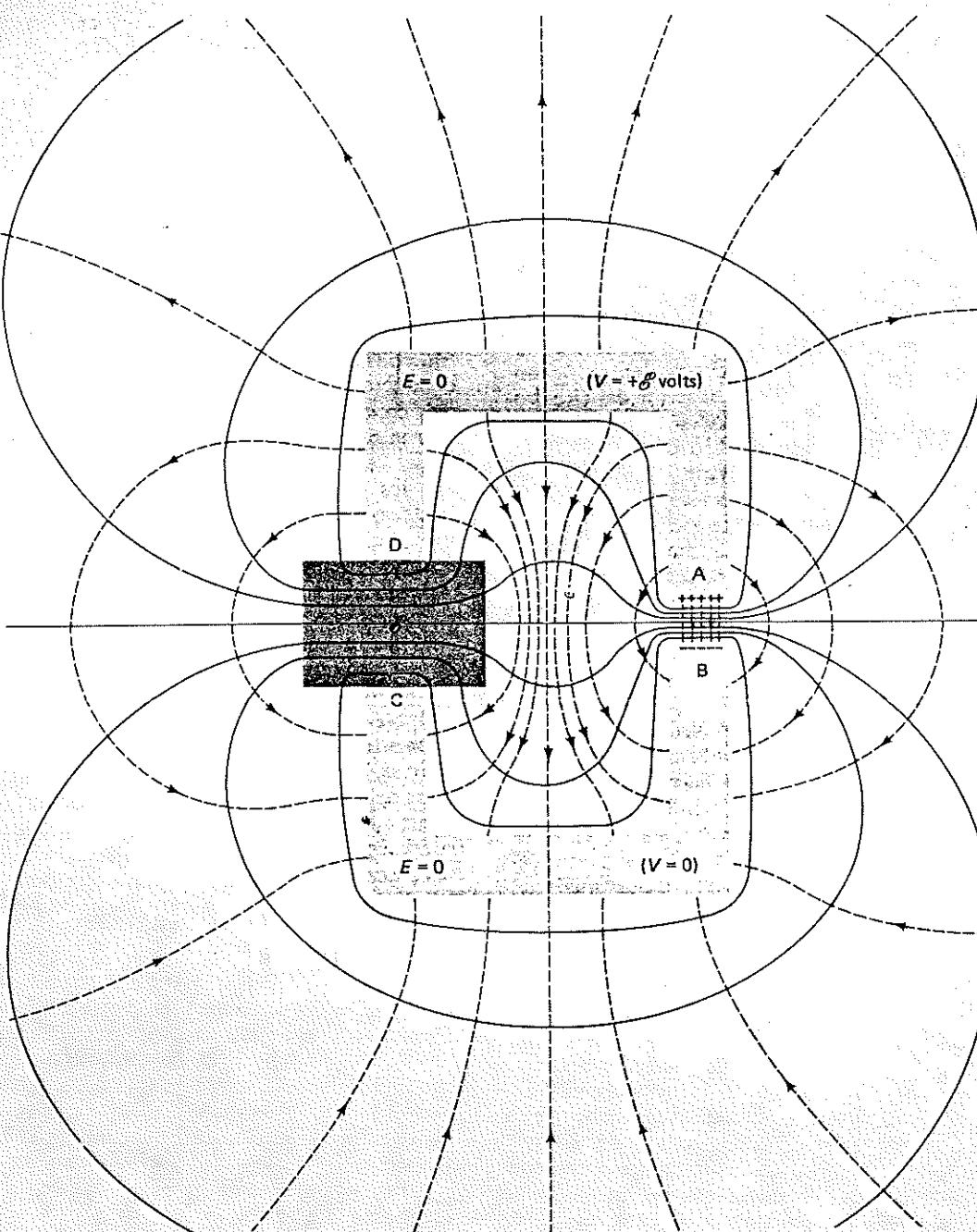


FIGURA 18.8. Campo eléctrico que rodea un circuito en el que un espacio libre (o entrehierro) impide el paso de corriente.

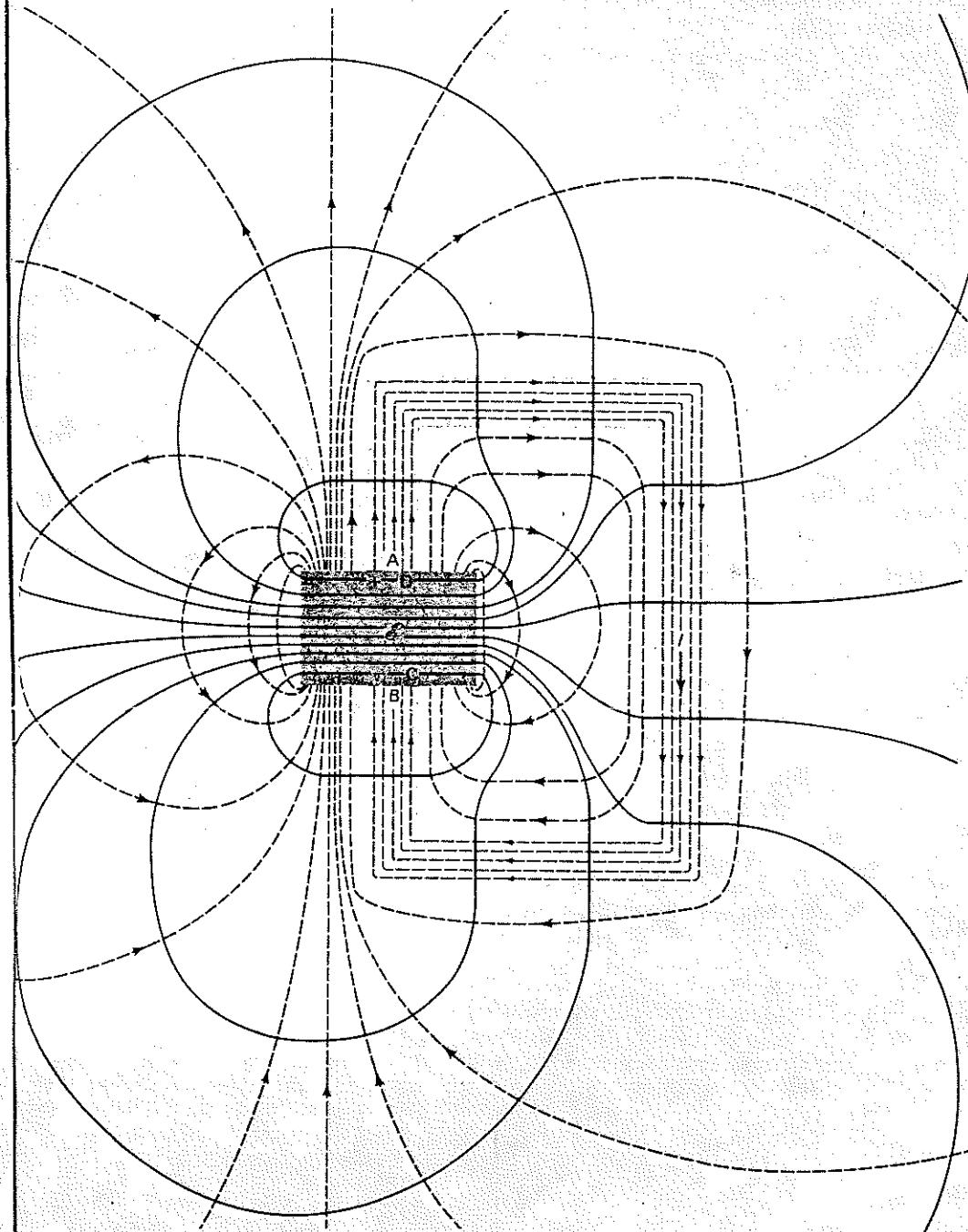


FIGURA 18.9. Campo eléctrico que rodea un circuito en el que circula una corriente constante.

### 18.4 Ley de Ohm y conducción de electricidad por electrones libres

Cuando se conecta una fuente de FEM, como una batería, a un circuito conductor externo como se ilustra en la figura 18.9, se observa experimentalmente que fluye una corriente constante a través de la sustancia conductora. De los experimentos, también ha quedado demostrado que para la mayoría de los materiales conductores, la densidad de corriente  $j$  en cualquier punto es directamente proporcional al campo eléctrico  $E$  dentro del conductor en ese punto, siempre que la intensidad del campo no sea excesiva. Estas observaciones experimentales pueden resumirse en una ecuación:

$$j = \sigma E \quad (18.4.1)$$

en que  $\sigma$  es una constante de proporcionalidad que expresa la densidad de corriente que se obtiene por unidad de intensidad de campo eléctrico. El valor de la constante  $\sigma$  depende del material conductor específico del circuito y también, aunque por lo común en menor medida, de la temperatura. A la cantidad  $\sigma$  se le conoce como *conductividad eléctrica* del material que constituye el circuito. Su unidad es la de densidad de corriente dividida entre la de intensidad de campo, o sea,  $A \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$ . La conductividad eléctrica de las sustancias varía muchísimo de un material a otro; los conductores metálicos tienen una conductividad del orden de  $10^8 A \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$ , en tanto que los buenos aislantes pueden tener conductividades del orden de  $10^{-13} A \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$ , o incluso menores. La ley experimental expresada por la ecuación (18.4.1) fue establecida por primera vez en 1826 por el físico alemán Georg Simon Ohm (1789-1854) y se conoce universalmente como *ley de Ohm*. Esta ley a veces se expresa como

$$E = \frac{1}{\sigma} j = \rho j \quad (18.4.2)$$

en que

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (18.4.3)$$

Al recíproco de la conductividad eléctrica, que se representó por  $\rho$ , generalmente se le conoce como *resistividad eléctrica*; sus dimensiones son volt-metro/ampere.

Habitualmente se dice que fluyen corrientes en los materiales conductores cuando se les aplica un campo eléctrico porque los electrones libres del conductor se ponen en movimiento por efecto del campo. De ser así, debe ser posible entonces expresar las fuerzas sobre los electrones libres en términos del campo aplicado, escribir su ecuación de movimiento utilizando la segunda ley de Newton, y encontrar finalmente su velocidad, a partir de lo cual se puede obtener la densidad de corriente. De esta manera es de esperar que sea posible deducir la ley de Ohm a partir de ciertos principios utilizando un modelo de electrones libres como base para los cálculos. Pronto se tendrá que hacer precisamente lo anterior, aunque se encontrará que deben comprenderse ciertos aspectos adicionales del modelo en cuestión para poder concluir con éxito la deducción.

En primer lugar, es importante conocer que la velocidad de corrimiento (o deriva) de un electrón impartida por la FEM aplicada, y que se calculó para un caso típico en el ejemplo 18.3.2, por lo general sólo es una *parte extremadamente pequeña* de su velocidad instantánea total. La razón de ello es que a temperaturas ordinarias, los electrones tienen *energía térmica* como la asociada a las moléculas de un gas. En efecto, la distribución de los electrones libres en un conductor metálico o en una sustancia semiconductora a menudo se conoce como *gas de electrones*, y muchos sentidos se comporta como un gas de partículas cargadas confinado por los límites físicos de la sustancia, igual que un gas está limitado por un recipiente. En el Capítulo 13 del Tomo I, ecuación (13.6.15), se encontró que la velocidad media de una molécula con masa  $m$  en un gas ideal con la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, está dada por

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (18.4.4)$$

Si se sustituye  $k = 1.381 \times 10^{-23} J/molécula \cdot K$ ,  $T = 300 K$  y  $m = 9.11 \times 10^{-31} kg$ , (la

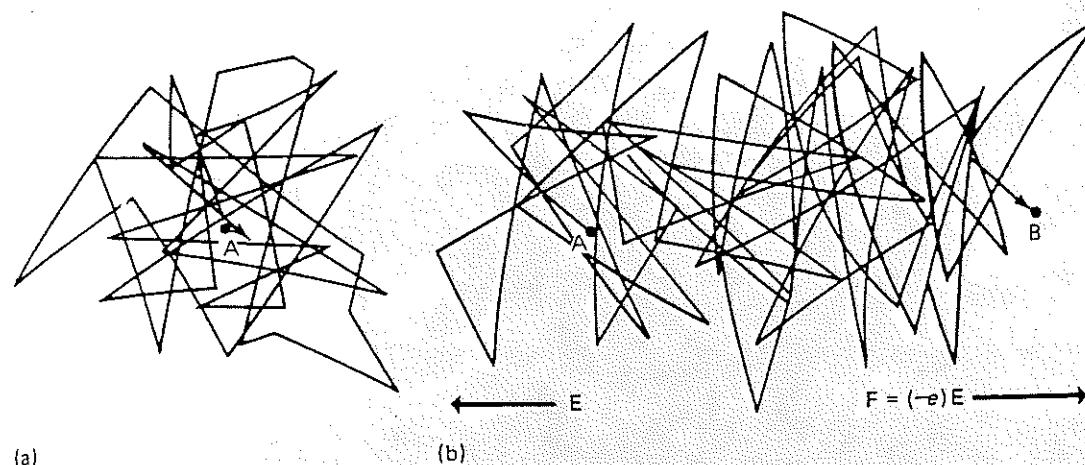


FIGURA 18.10. (a) Movimiento térmico de cargas libres en un conductor en el que no pasa corriente. (b) Movimiento de cargas libres en un conductor en el que hay un campo eléctrico externamente aplicado y en el que circula una corriente.

masa del electrón) en (18.4.4), se encuentra  $\bar{v} = 1.07 \times 10^5 m/s$ . En realidad, como los electrones obedecen las leyes de la mecánica cuántica en vez de las de la mecánica clásica, al menos en los metales, su distribución de energía difiere de la distribución de Maxwell-Boltzmann, lo que produce valores todavía mayores de la velocidad térmica promedio. Claramente, la velocidad media de los electrones debida a su energía térmica es bastante mayor que la velocidad de corrimiento que de ordinario adquiriría de cualquier FEM aplicada; esta velocidad calculada para un caso típico de flujo de corriente constante en el ejemplo 18.3.2, sólo es una pequeña fracción de metro por segundo.

Por otra parte, el movimiento térmico al azar de los electrones no aporta *nada* a la corriente, debido a que son iguales el número de electrones que tienen determinadas componentes  $x$  de velocidad positiva  $+v_x$  debida a los movimientos térmicos, y el número de los que tienen componentes negativas iguales  $-v_x$ . La componente  $x$  promedio de la velocidad asociada al movimiento de equilibrio térmico es entonces *cero*, lo que es evidente (por la distribución de Maxwell-Boltzmann) a partir de la ecuación (13.6.8) y de la figura 13.12, aunque debe ser cierto sin importar la forma

que tenga la distribución de equilibrio de las velocidades. Desde luego se aplican las mismas observaciones a las componentes  $y$  y  $z$  de la velocidad. Puesto que los valores medios de  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  asociados al movimiento térmico son cero, y como la densidad de corriente es igual a la densidad de carga multiplicada por la velocidad, esto quiere decir que los valores medios de  $j_x$ ,  $j_y$  y  $j_z$  asociados al movimiento térmico de los electrones también son cero, y que el movimiento térmico de los electrones libres jamás constituye corriente alguna. Por tanto, toda corriente que fluya en una sustancia conductora se debe completamente a la velocidad que adquieren los electrones libres por el campo eléctrico aplicado, aunque esa velocidad pueda ser mucho más pequeña que la velocidad media que tiene un electrón por virtud de su energía térmica. A menudo se llama *velocidad de corrimiento* o *deriva* del electrón a esta velocidad que imparte la FEM aplicada, y la cantidad  $\bar{v}$  utilizada en las expresiones de la sección 18.1 debe interpretarse como el promedio de las velocidades de deriva de los electrones libres que participan en el flujo de corriente.

Es fácil comprender lo anterior haciendo referencia a la figura 18.10. En (a), se ve la trayectoria aleatoria de un solo electrón libre

en una sustancia conductora en equilibrio. No hay fuerza externa sobre el electrón y su trayectoria se asemeja a la de una molécula en un gas ideal monoatómico. Los segmentos de la trayectoria son líneas rectas, ya que la velocidad es cero entre las colisiones que cambian el curso y la rapidez del electrón. Se puede considerar que el electrón está inicialmente en el punto A. Aunque a veces su deambular fortuito lo lleve a mucha distancia de ese punto, tiene la misma probabilidad de encontrarse a la izquierda de A que a la derecha de A. Su desplazamiento promedio, y por tanto su velocidad media, es cero. En promedio, después de un tiempo bastante largo, no llega a ningún punto. En la figura 18.10(b) se ve lo que sucede cuando hay un campo eléctrico debido a una FEM aplicada. En este caso, el vector de campo eléctrico apunta a la izquierda y da lugar a una fuerza constante  $-eE$ , hacia la derecha, sobre el electrón. Durante cada segmento de la trayectoria de la partícula, esta fuerza le imparte una pequeña velocidad de deriva, que sumada a su velocidad térmica aleatoria, hace que la trayectoria del electrón termine apenas ligeramente a la derecha de donde hubiera estado si no hubiera habido campo. Por tanto, el electrón se corre o "deriva" sistemáticamente hacia la derecha durante cada recorrido parcial de trayectoria, y los extremos de los segmentos ya no quedan distribuidos muy aleatoriamente. En vez de ello, hay una ligera tendencia del electrón de terminar un poco más "corriente abajo" en cada tramo sucesivo de su trayectoria, de lo que hubiera sucedido si el movimiento fuera puramente aleatorio. Así, puede considerarse que su movimiento es un desplazamiento térmico puramente aleatorio, como el de una molécula en un gas a la que se superpone una deriva sistemática en la dirección de flujo de la corriente. Cuando existe el campo, los segmentos de trayectoria ya no son rectos sino que se curvan ligeramente en trayectorias parabólicas, siendo esta curvatura la que finalmente hace que el electrón termine un poco a la derecha de donde estaba, si no hubiera habido campo. En consecuencia, el problema es el de una partícula que se mueve en un plano sujeto a una fuerza constante —y por tanto a una aceleración constante— que produce una trayec-

toria parabólica en vez de recta, como se recordará del estudio anterior del movimiento balístico.

Utilizando esta imagen física como base, ahora puede comenzarse a evaluar cuantitativamente la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico dentro del conductor. Primero se considerará el movimiento de un solo electrón en una sustancia conductora uniforme a la que repentinamente se aplica un campo eléctrico constante  $E$  al tiempo  $t = 0$ . Suponiendo que el campo eléctrico  $E$  está en la dirección  $x$ , entonces, y ya que la intensidad de campo representa la fuerza por unidad de carga, se puede escribir la fuerza sobre el electrón como

$$F_x = -eE \quad (18.4.5)$$

Utilizando la segunda ley de Newton para relacionar la fuerza con la aceleración, lo anterior puede escribirse como una ecuación de movimiento de la forma

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{eE}{m} \quad (18.4.6)$$

Suponiendo que el campo  $E$  es constante, esto representa un movimiento uniformemente acelerado, y por tanto la velocidad  $v_x$  debe estar dada por

$$v_x = v_{0x} + a_x t = v_{0x} - \frac{eEt}{m} \quad (18.4.7)$$

Es natural que como el vector de campo eléctrico no tiene componentes  $y$  y  $z$ ,  $a_y$  y  $a_z$  son cero, por lo que las componentes de velocidad en las direcciones  $y$  y  $z$  tienen los valores de equilibrio  $v_{0y}$  y  $v_{0z}$ . Si no hubiera campo eléctrico, el segundo término de la derecha en la ecuación (18.4.7) sería cero, dejando sólo la cantidad  $v_{0x}$ , independiente del campo. En consecuencia, esta cantidad debe representar el efecto del movimiento térmico de los electrones, ya que después de todo, es lo único que queda si no hay campo. De la misma manera, el segundo término, que es el único que depende del campo, expresa claramente la velocidad de deriva que adquiere el electrón debido a la acción del campo. Si ahora se promedia  $v_x$  para todos los electrones en el con-

dutor, se encontrará que puesto que es cero el valor medio de  $v_{0x}$  del movimiento térmico aleatorio, y como cada electrón en la sustancia adquiere la misma velocidad de deriva  $-eEt/m$  en el mismo intervalo de tiempo, el valor medio de  $v_x$  será

$$\bar{v}_x = -\frac{eEt}{m} \quad (18.4.8)$$

De (18.1.18), esto quiere decir que la densidad de la corriente será

$$j_x = -ne\bar{v}_x = \frac{ne^2}{m} Et \quad (18.4.9)$$

con  $j_x = j_z = 0$ , puesto que  $\bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$ .

En la forma presentada, este resultado no es la ley de Ohm; en realidad, es absurdo, pues expresa que la densidad de corriente debe aumentar linealmente con el tiempo, en vez de ser constante. De acuerdo con esto, si se espera el tiempo suficiente; ¡la densidad de la corriente será tan grande como se quiera! El origen de este resultado paradójico puede encontrarse en la ecuación (18.4.7) que expresa que la velocidad de deriva de un electrón en la dirección del campo aplicado aumenta linealmente en el tiempo. Esto es cierto hasta este punto, pero lo que omite es el hecho de que este incremento en la velocidad de deriva no prosigue indefinidamente, sino que cesará tan pronto como el electrón sufra una colisión que radicalmente altere su curso y rapidez. Después de este tipo de choque, el electrón tomará una dirección distinta con una velocidad diferente. La colisión elimina todo el movimiento de deriva del electrón y sirve sencillamente para hacer regresar las características de su movimiento a las del equilibrio térmico. En otras palabras, el efecto de los choques es transformar la energía cinética que había adquirido el electrón por virtud de su velocidad de deriva en energía térmica aleatoria, es decir, en calor. Estas consideraciones subrayan la importancia crítica de las colisiones en el proceso de conducción. Pronto se verá que cuando se incorpora su efecto en los cálculos, inmediatamente los resultados se hacen mucho más razonables.

Ya que el efecto de las colisiones es hacer regresar a los electrones a un estado de equili-

brio térmico, se puede suponer que en promedio, una colisión reduce la velocidad de deriva a cero. Si así fuera, entonces durante el tiempo entre las colisiones sucesivas se puede imaginar que la velocidad de deriva o corrimiento tiene la forma que se muestra en la figura 18.11. El electrón parte en  $t = 0$ , en cuyo momento el valor inicial medio de  $v_x$  será cero, como se indica. Desde luego, la mayor parte del tiempo la velocidad  $v_x$  no será devuelta a cero por las colisiones; en vez de ello, habrá una distribución amplia de las velocidades finales. La cuestión es que como este tipo de distribución corresponde en esencia al equilibrio térmico, es cero el valor medio de  $v_x$  después de una colisión. Empero, se puede simplificar el trabajo lo más posible suponiendo que siempre sucede así, ya que posteriormente se tendrá que promediar de todas maneras para todos los electrones.

De cualquier modo, si el electrón parte del reposo en  $t = 0$ , su velocidad de deriva subsiguiente en la dirección  $x$  aumenta linealmente en el tiempo, como lo predice (18.4.8), hasta que el electrón sufra una colisión al tiempo  $t = t_c$ , en cuyo momento, en promedio, decae a cero su componente  $x$  velocidad. En la figura 18.11 se muestra esta dependencia de la veloci-

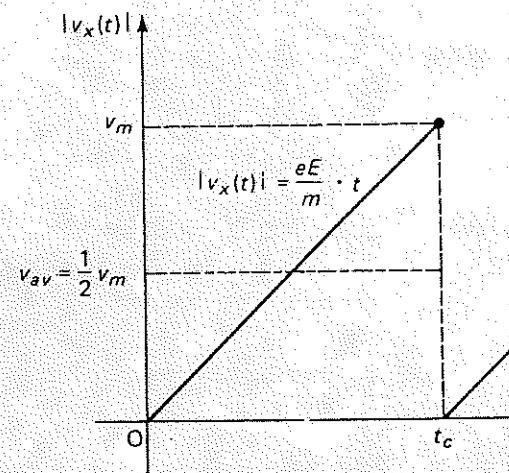


FIGURA 18.11. Efecto medio de los choques sobre el movimiento de cargas en un conductor.

dad de deriva respecto del tiempo, en la que para simplificar sólo se grafica la magnitud de  $v_x$ , y por el momento se omite su signo negativo. El proceso se repite después de la colisión en  $t = \tau_c$ , y la velocidad de deriva crece linealmente hasta que de nuevo se reduzca a cero en forma brusca por una segunda colisión un tiempo después. Este ciclo de eventos ocurre indefinidamente una y otra vez. En el intervalo desde  $t = 0$  hasta  $t = \tau_c$ , como la velocidad de deriva aumenta *linealmente* en el tiempo desde cero hasta un valor máximo de  $v_m = -eE\tau_c/m$  en  $t = \tau_c$ , su valor medio durante este ciclo específico será precisamente la mitad del valor máximo, o sea,

$$\bar{v}_x = -\frac{eE\tau_c}{2m} \quad (18.4.10)$$

La cantidad  $\tau_c$  de esta ecuación representa el tiempo libre de deriva entre una colisión y la siguiente. Este intervalo entre colisiones sucesivas no siempre será el mismo, pues debido a la naturaleza aleatoria del movimiento térmico del electrón, habrá ocasiones en que los choques sucesivos ocurran con mucha rapidez y otras en que las colisiones sucesivas ocurran sólo a intervalos mucho más largos. Estos intervalos libres entre colisiones tienen una distribución estadística de magnitudes, pero en un lapso prolongado habrá un tiempo libre medio  $\bar{\tau}_c$  entre los choques y la velocidad media de deriva del electrón durante dicho período será

$$\bar{\tau}_c = \frac{eE\bar{\tau}_c}{2m} \quad (18.4.11)$$

De (18.2.18), puede escribirse ahora la densidad de corriente como

$$j_x = -ne\bar{v}_x = \frac{ne^2\bar{\tau}_c}{2m} E \quad (18.4.12)$$

mientras que, como antes,  $j_z = j_x = 0$ .

Si el tiempo promedio  $\bar{\tau}_c$  entre las colisiones es independiente del campo  $E$ , esta ecuación indica que la densidad media de corriente es proporcional al campo eléctrico, es decir, que se cumple la ley de Ohm. Ya que el

tiempo entre las colisiones depende primordialmente de la velocidad térmica de los electrones, y como esta velocidad apenas se altera por la pequeña velocidad de deriva impuesta por el campo, es fácil comprender en base física que efectivamente el valor de  $E$  no debe alterar el intervalo  $\bar{\tau}_c$ . Siendo así, es posible escribir (18.4.11)

$$j_x = \sigma E_x \quad (18.4.13)$$

que concuerda con la ley de Ohm, en que ahora

$$\sigma = \frac{ne^2\bar{\tau}_c}{2m} \quad (18.4.14)$$

expresa la conductividad. En el caso de una sustancia para la que se conoce la conductividad, se puede calcular el tiempo libre medio  $\bar{\tau}_c$  utilizando esta ecuación.<sup>2</sup> Por ejemplo, para cobre a la temperatura ambiente, el valor medido de la conductividad es  $\sigma = 5.91 \times 10^7 \text{ A} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Sustituyendo este valor en (18.4.14), junto con  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  y  $n = 8.47 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3$  (calculado suponiendo densidad de  $8.93 \text{ g/cm}^3$ , masa molecular de  $63.54 \text{ g/mol}$  y un electrón libre por átomo, utilizando los métodos del ejemplo 18.2.2), se encuentra que

$$\bar{\tau}_c = 4.95 \times 10^{-14} \text{ s}$$

En efecto, éste es un tiempo sumamente corto; indica que los electrones sufren colisiones con extrema frecuencia. Los valores típicos de  $\bar{\tau}_c$  para la mayor parte de los conductores en condiciones experimentales de laboratorio están dentro de  $10^{-12}$  a  $10^{-14}$  segundos.

Debido a que el tiempo medio entre colisiones sucesivas entre electrones es tan pequeño, es imposible observar determinados efectos de "apertura" y "cierre" que pudieran observarse normalmente cuando se

<sup>2</sup> En algunos otros textos y obras de consulta, a menudo se escribe la ecuación (18.4.14) como  $\sigma = ne^2\tau/m$ , en que no aparece el factor 2 en el denominador, y a la cantidad  $\tau$  del numerador se le conoce como *tiempo de relajación*. La diferencia entre estas dos representaciones se debe simplemente a que el tiempo de relajación  $\tau$  se define de tal manera que equivale a la mitad del tiempo libre medio ..

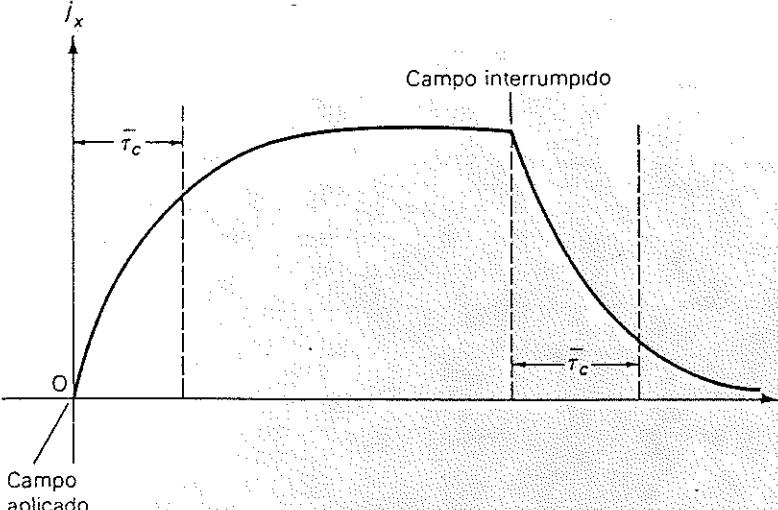


FIGURA 18.12. Aumento y disminución retrasados de la corriente debidos a la inercia de los electrones de conducción.

abren y cierran los circuitos. Por ejemplo, supóngase que las colisiones entre electrones ocurren en promedio a razón de una por minuto para cada electrón. Suponiendo que se conecta el circuito y aparece el campo en  $t = 0$ , el número de electrones detenidos por las colisiones durante los primeros segundos será despreciable, y la densidad de corriente aumenta linealmente en el tiempo, como lo predice (18.4.9). Este incremento en la densidad de corriente con el tiempo aumenta hasta que casi todos los electrones hayan experimentado al menos una colisión —lo que necesita un intervalo de tiempo del orden de  $\bar{\tau}_c$ , o en este caso, de 1 minuto después de lo cual la densidad de corriente se nivelea al valor constante dado por (18.4.11). Entonces, la rapidez con que los electrones adquieren energía cinética del campo equilibra exactamente la intensidad con que se pierde como calor en las colisiones.

De la misma manera, si repentinamente se reduce el campo a cero por ejemplo, poniendo la fuente en cortocircuito, —la densidad de corriente no cae a cero al instante, sino que los electrones siguen "deslizándose" durante cierto tiempo, con su velocidad de deriva sin disminuir en la dirección del campo, como lo

requiere la primera ley de Newton. Este "deslizamiento" persiste hasta que los electrones experimenten colisiones que, sin embargo, sólo ocurrirán pasado un tiempo medio del orden de  $\bar{\tau}_c$  después de que el campo se anula. Entonces la densidad de corriente se reduce gradualmente a cero, con un tiempo característico de decaimiento aproximado de  $\bar{\tau}_c$  segundos, o en este ejemplo específico, 1 minuto (fig. 18.12). Que no se observen estos efectos se debe al hecho de que el tiempo medio  $\bar{\tau}_c$  entre las colisiones no es de 1 minuto sino el valor notablemente pequeño de unos  $10^{-13}$  segundos. Estos intervalos tan cortos están más allá de la capacidad de resolución incluso de los osciloscopios más rápidos y otros detectores electrónicos.

Hasta ahora se ha destacado la importancia de los choques de los electrones en el proceso de conducción, pero deliberadamente no se respondió a la pregunta de ¿colisiones contra qué? Se puede haber tenido la impresión de que se ha estado hablando de colisiones entre electrones; de ser así, de inmediato va a desengañarse. Desde luego, es cierto que las colisiones entre electrones ocurren con frecuencia, pero este tipo de interacciones esencialmente no re-

duce la velocidad media de deriva, lo que puede comprenderse fácilmente recordando que en los choques entre electrones debe conservarse la cantidad de movimiento lineal, al igual que en los otros tipos de colisión. En las colisiones de dos electrones, la igualdad de la cantidad de movimiento inicial y final requiere que para la componente  $x$  del vector cantidad de movimiento,

$$mu_{1x} + mu_{2x} = mv_{1x} + mv_{2x} \quad (18.4.15)$$

en que  $u_1$  y  $u_2$  son las velocidades iniciales y  $v_1$  y  $v_2$  las finales. Multiplicando esta ecuación por  $-e/m$ , se obtiene

$$-eu_{1x} - eu_{2x} = -ev_{1x} - ev_{2x} \quad (18.4.16)$$

Pero ahora  $-eu_{1x}$  representa la componente  $x$  inicial del flujo de corriente llevada por el primer electrón —se recordará que el producto de carga por velocidad es igual a corriente. De manera análoga,  $-eu_{2x}$  es la componente  $x$  inicial de la corriente llevada por el segundo electrón, en tanto que  $-ev_{1x}$  y  $-ev_{2x}$  son las componentes  $x$  finales de corriente de los dos electrones. Entonces, lo que indica la ecuación (18.4.16) es que una colisión entre dos electrones no cambia la componente  $x$  de la corriente que llevan colectivamente. Se pueden hacer observaciones semejantes con respecto a las componentes  $y$  y  $z$ , ya que se conservan todas las componentes del vector cantidad de movimiento. En vez de reducir la corriente a cero, una colisión de electrón con electrón no cambia la corriente que llevan los dos electrones.

De acuerdo con lo anterior, ¿qué puede decirse de la posibilidad de que los electrones sufran choques contra los átomos de la red cristalina? Por lo que respecta a la *mecánica clásica*, no hay razón en absoluto para que no ocurran esas colisiones y que no limiten la velocidad de deriva de la distribución electrónica. Empero, es suficientemente extraño que las leyes de la *mecánica cuántica* —que después de todo son los árbitros finales del comportamiento partículas elementales como los electrones— predigan que un electrón en un *cristal perfectamente periódico* no chocará en absoluto con los átomos de la red, sino que se moverá en forma parecida a una partícula

libre en el vacío! En este punto parece que no hay nada con lo cual pueda chocar un electrón, lo que sencillamente no ocurre.

El enigma reside en las palabras “*cristal perfectamente periódico*”. Aunque un electrón no sufra de interacciones de colisión en una red cristalina perfectamente periódica, las condiciones si pueden ocurrir en *una red cristalina en que haya algo menos que periodicidad perfecta*. En realidad, las divergencias de la periodicidad perfecta pueden ocurrir de dos maneras importantes: primero que todo, los átomos de un cristal *vibran* alrededor de sus posiciones de equilibrio como resultado de su energía térmica. Las vibraciones térmicas de la red producen desviaciones de la periodicidad perfecta. Si se tomara una foto instantánea de los átomos en determinado momento, no se encontrarían en las posiciones de equilibrio espaciadas perfecta y periódicamente sino desplazados al azar apenas un poco distantes de las mismas posiciones, como resultado de sus vibraciones originadas térmicamente. A mayor temperatura, mayores serán en promedio estos desplazamientos de vibración y más estará apartada la red de la sustancia respecto de la periodicidad perfecta. Estas desviaciones térmicas respecto de la condición periódica dan lugar a la posibilidad de colisiones ocasionales de los electrones libres contra la red cristalina, y estas interacciones entre el electrón y la red son los “choques” que tienen el papel dominante de limitar la velocidad de deriva en muchos casos, especialmente en cristales puros y a valores superiores de la temperatura. En las sustancias metálicas puras, el hecho de que las colisiones entre los electrones y la red ocurran con mayor frecuencia al aumentar la temperatura significa que el tiempo libre medio  $\bar{\tau}_e$  se hace cada vez más pequeño al elevarse la temperatura. Como resultado de ello disminuye la conductividad eléctrica, dada por la ecuación (18.4.14) a medida que aumenta la temperatura.

Además de lo anterior, la presencia de átomos extraños de impurezas en los cristales, que ahora ya no son perfectos, también produce una desviación de la periodicidad perfecta en la proximidad de dichos átomos, lo que también da lugar a la posibilidad de colisiones entre electrones y átomos de impurezas que

pueden limitar la velocidad de deriva de la distribución de electrones. El tiempo medio entre esas colisiones varía inversamente con la concentración de las impurezas, y las altas concentraciones de átomos extraños producen pequeños valores de  $\bar{\tau}_e$  y baja conductividad eléctrica, y viceversa. Las interacciones entre los electrones y las impurezas son las dominantes en los cristales impuros, especialmente a bajas temperaturas cuando las vibraciones térmicas son débiles. Estas interacciones ocasionan que generalmente las aleaciones tengan conductividad eléctrica mucho más baja que los elementos metálicos puros de los que están formadas. Por ejemplo, los fabricantes de cobre deben tener muchísimo cuidado de producir cobre sumamente puro para utilizarlo en conductores eléctricos, debido a que incluso la presencia de concentraciones pequeñas de impurezas origina las interacciones entre electrones e impurezas que disminuyen la conductividad eléctrica.

Ya se estudió la ley de Ohm y se describió con detalle la base física de la conductividad eléctrica en conductores en los que se cumple la citada ley de Ohm, debido a que este tipo de conducción eléctrica se observa con mayor frecuencia en materiales conductores comunes. Empero, hay casos en que no se verifica la ley de Ohm, y en los que, por tanto, no es lineal la relación entre la densidad de corriente y la intensidad del campo eléctrico. Los casos más simples se encuentran en los tubos electrónicos al vacío (“bulbos”), rectificadores de semiconductores y en los transistores. La *superconductividad* representa un ejemplo menos común de comportamiento *no óhmico*, que consiste en una propiedad que presentan muchos metales y sus compuestos, a temperaturas muy bajas.

Por lo tanto, una sustancia superconductora exhibe una conductividad eléctrica que, hasta donde se sabe ahora, es verdaderamente infinita; se puede hacer que en un circuito superconductor fluya una corriente eléctrica constante aunque no haya ninguna FEM en el circuito y el campo eléctrico sea cero. Una vez establecida, este tipo de corriente persistirá durante días, semanas o meses —en realidad, mientras dure el sistema de refrigeración. Pero desafortunadamente, la temperatura

más alta a la que se ha observado la superconductividad es alrededor de 23 K. ~~mal~~  $\rightarrow$  184 K

No se tratará de explicar las razones físicas del comportamiento no óhmico de sustancias y sistemas como los descritos antes: están más allá del alcance de este libro y son de carácter incidental a los objetivos del mismo. Empero, es importante comprender que la ley de Ohm no se cumple universalmente, sino que se resstringe a límites específicos, aunque conocidos, de sustancias y condiciones.

### 18.5 Resistencia eléctrica: ley de Ohm para los circuitos

Considérese el caso que se ilustra en la figura 18.13, en el que fluye una corriente unidireccional constante (*o directa*) por un conductor de área transversal uniforme y conductividad constante  $\sigma$ . En estas circunstancias habrá un campo eléctrico constante  $E$  en el conductor. Suponiendo que el proceso de conducción dentro de la sustancia esté descrito en forma adecuada por la ley de Ohm, la relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico estará dada por

$$j = \sigma E \quad (18.5.1)$$

De acuerdo con (16.5.22), la diferencia de potencial  $dV$  a través de un segmento infinitesimal de longitud  $dl$ , que se puede describir en forma vectorial como un vector  $d\ell$  en la dirección del conductor, será

$$dV = -E \cdot d\ell = -E dl \quad (18.5.2)$$

En esta ecuación, el producto escalar tiene el valor  $-E dl$  debido a que los vectores  $E$  y  $d\ell$  son paralelos. Se puede integrar la ecuación (18.5.2) a lo largo del segmento finito de conductor que se muestra en la figura 18.13. Al escribir la integral se puede sacar el campo —que es constante— del signo de integración:

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = V_2 - V_1 = -E \int dl \quad (18.5.3)$$

o sea que

$$\Delta V = -El \quad (18.5.4)$$

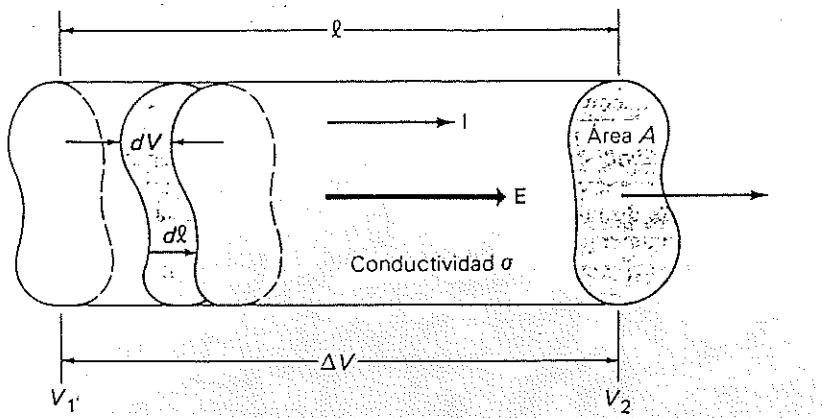


FIGURA 18.13. Intensidad de la corriente y carga que circula en un conductor de sección transversal uniforme.

en que la diferencia de potencial entre los extremos del segmento,  $V_2 - V_1$ , se escribe como  $\Delta V$ . El signo negativo de (18.5.4) refleja el hecho de que el cambio desde  $V_1$  hasta  $V_2$  es una caída de potencial, en vez de una elevación del mismo. En lo que sigue sólo se tendrá interés en las magnitudes relativas de la corriente y de la diferencia de potencial, y no en sus signos, por lo que se ignorará el signo negativo, dando por hecho sencillamente que todo cambio de potencial en la dirección del flujo de la corriente en un conductor es una *caída*. Así, sustituyendo el valor del campo  $E = \Delta V/l$  dado por (18.4.1), puede escribirse la ley de Ohm para un conductor uniforme como

$$j = \frac{I}{A} = \sigma \frac{\Delta V}{l} \quad (18.5.5)$$

o, despejando  $I$ ,

$$I = \frac{\sigma A}{l} \Delta V \quad (18.5.6)$$

Esto puede expresarse en forma ligeramente más conocida sustituyendo  $\sigma$  por el valor  $1/\rho$ , en que  $\rho$  es la resistividad eléctrica,<sup>3</sup> y expre-

sando (18.5.6) como

$$I = \frac{A}{\rho l} \Delta V = \frac{\Delta V}{\rho l} \quad (18.5.7)$$

o sea

$$I = \frac{\Delta V}{R} \quad (18.5.8)$$

en que

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{l}{\sigma A} \quad (18.5.9)$$

A la cantidad  $R$  se le llama *resistencia eléctrica* del segmento de material conductor de que se trata. Por (18.5.9), la resistencia de cualquier conductor de sección transversal y constitución uniformes será proporcional

en el contexto utilizado; pero para evitar confusión, se explicará lo que significa, siempre que haya la menor posibilidad de confusión. En este capítulo se utiliza  $\rho$  para la densidad de carga en la sección 18.2 y para la resistividad en las secciones posteriores. Es especialmente importante saber que el símbolo  $\rho$ , en las ecuaciones (18.2.15) y (18.4.2) se refiere a distintas —repétimos, *distintas*— cantidades. En la primera, es *densidad de carga* y en la segunda es *resistividad*.

<sup>3</sup> Es importante observar que se utiliza el mismo símbolo  $\rho$  para la *densidad de carga eléctrica* y para la *resistividad*. Lo anterior es desafortunado, pero como esta notación se utiliza casi universalmente, se tuvo que adoptarla en este texto. Por lo general, el significado del símbolo  $\rho$  es claro

directamente a su longitud e inversamente proporcional a su área transversal. La ecuación (18.5.8), que expresa la ley de Ohm en términos de corriente, resistencia y caída de potencial es una relación muy conocida entre electricistas y técnicos en electrónica. En tanto que se tendrá oportunidad frecuente de utilizar la ley de Ohm de esta manera, debe reconocerse que la forma (18.5.1) es superior en cierto modo, especialmente porque expresa la conductividad como una propiedad atómica fundamental del material conductor y porque es independiente del tamaño o forma de cualquier muestra que pueda tomarse del mismo material.

Dado que (18.5.8) puede escribirse como  $R = \Delta V/I$ , la resistencia eléctrica de un conductor tiene las unidades de volt/ampere o voltsegundo/coulomb. Estas unidades equivalen a la llamada *ohm* (símbolo:  $\Omega$ ), de manera que los valores de la resistencia siempre se dan en esta unidad. Más aún, ya que de (18.5.9)  $\rho = AR/l$  y  $\sigma = 1/\rho$ , generalmente se puede (y así se hace) representar las unidades de resistividad como ohm-metro ( $\Omega \cdot m$ ) o como ohm-centímetro ( $\Omega \cdot cm$ ), y las de conductividad como  $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$  o como  $\Omega^{-1} \cdot cm^{-1}$ . De (18.5.8), es claro que en un conductor cuya resistencia es  $1 \Omega$ , una diferencia de potencial de  $1 \text{ V}$  hace que fluya la corriente de  $1 \text{ A}$ . El mismo razonamiento aplicado a (18.5.9) debe convencerlos de que la resistividad de un material en  $\Omega \cdot m$  es numéricamente igual a la resistencia en ohms entre caras opuestas de una muestra cúbica de  $1 \text{ m}$  de arista; de la misma manera, la resistividad en  $\Omega \cdot cm$  es numéricamente igual a la resistencia en ohms entre caras opuestas de un cubo de  $1 \text{ cm}$ .

En un conductor de forma irregular, como el de la figura 18.14, por lo general no es posible incluso definir un área transversal o longitud únicas ni calcular su resistencia a partir de la ecuación (18.5.9). Empero, si el objeto se hace de una sustancia que obedezca la ley de Ohm, la densidad de corriente en todos los puntos dentro de la sustancia será estrictamente proporcional al valor local del campo eléctrico. En la muestra de la figura 18.14, esto quiere decir que si se duplica la diferencia de potencial aplicada exteriormente  $\Delta V$ , el campo eléctrico en el interior se duplica res-

pecto de su valor anterior, la densidad de corriente se duplica en todas partes respecto de su magnitud anterior, y como resultado de ello, también se duplica la corriente total que pasa por la muestra. Entonces, la corriente que fluye a través de este tipo de sustancia es estrictamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada, aunque ya no se pueda aplicar la ecuación (18.5.9) —que se obtuvo para conductores de sección transversal uniforme— para calcular la resistencia. En esos casos, se puede definir y medir la resistencia como la *relación constante* entre la diferencia de potencial aplicada exteriormente y la intensidad de la corriente. En otras palabras, se *define* la resistencia como el valor de la relación constante

$$R = \frac{\Delta V}{I} \quad (18.5.10)$$

de acuerdo con (18.5.8), que estrictamente, hablando, se obtuvo para casos de sección transversal uniforme.

#### EJEMPLO 18.5.1

El trozo de material conductor óhmico de la figura 18.14 lleva una corriente de  $3.55 \text{ A}$  cuando se aplica una diferencia de potencial de  $75 \text{ V}$  entre las dos terminales. Halle la resistencia eléctrica de la muestra.

Este es el ejemplo más sencillo posible de la aplicación de la ley Ohm. Basta con introducir los valores dados de amperaje y voltaje en (18.5.10):

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{75}{3.55} = 21.1 \text{ ohms}$$

En este ejemplo es evidente que sería muy difícil calcular la resistencia de la muestra incluso si se conociera con exactitud su conductividad y sus dimensiones. A pesar de ello, se ve que es posible *medir* simple y exactamente la resistencia con sólo determinar la relación de la corriente a la tensión o diferencia de potencial.

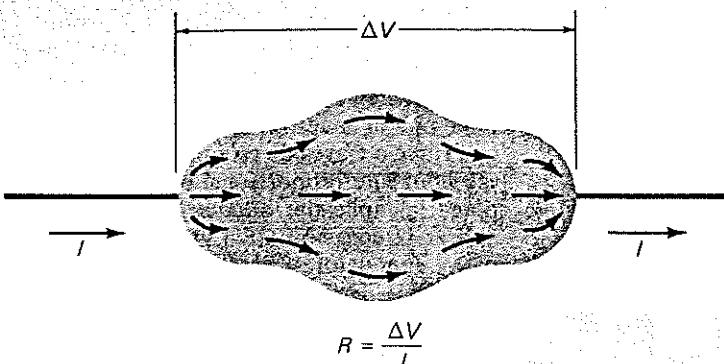


FIGURA 18.14. Paso de corriente en un conductor de forma irregular.

## EJEMPLO 18.5.2

Se vierte una muestra de agua de mar a una celda conductometrígica (de medición de conductividad) como la que se muestra en la figura 18.15. Las superficies cuadradas de los extremos de la celda, de  $5.00 \times 5.00$  cm son placas altamente conductoras, pero el resto de la celda es de vidrio. La longitud de ésta es de 30.0 cm. A las terminales de la celda se conecta una pila o batería como se indica y se conectan también en el circuito un voltímetro y un amperímetro para medir la corriente en el circuito y la diferencia de potencial a través del agua. Se encuentra que el amperímetro indica 0.730 A de corriente, y que el voltímetro indica 12.00 V de diferencia de potencial. Suponiendo que el agua de mar es una sustancia conductora óhmica, determine su resistividad. Exprese la respuesta en unidades CGS y SI.

La resistencia del agua de mar se obtiene como en el ejemplo anterior:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{12.00}{0.730} = 16.43 \text{ ohms}$$

Para un conductor óhmico de sección transversal uniforme, como la porción de agua de mar en la celda, la resistividad está relacionada con la resistencia, longitud y área transversal por medio de (18.5.9):

$$\rho = \frac{A}{l} R = \frac{(5.00)^2}{(30.0)} (16.43) = 13.69 \text{ ohm-cm}$$

Para expresar este resultado en unidades SI ( $\Omega \cdot \text{m}$ ), se observa que

$$1 \text{ ohm-cm} = 1 \text{ ohm-cm} \left( \frac{1}{100} \right) \text{ m} = 0.01 \text{ ohm-m}$$

de donde

$$\rho = (0.01)(13.69) = 0.1369 \text{ ohm-m}$$

## EJEMPLO 18.5.3

Una bobina de alambre de cobre de  $2.54 \times 10^{-2}$  cm de diámetro consistente en 300 vueltas, tiene 1.27 cm de diámetro medio. La resistividad del cobre a  $20^\circ \text{C}$  es de  $1.692 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$ . Halle la resistencia de la bobina a  $20^\circ \text{C}$ .

La resistividad y la resistencia están relacionadas mediante

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

En este caso, si  $r$  es el radio de la sección transversal circular del alambre, el área es

$$A = \pi r^2 = (3.1416)(0.0127)^2 = 5.067 \times 10^{-4} \text{ cm}^2$$

en tanto que si  $r'$  es el radio medio de la bobina y  $n$  el número de vueltas, la longitud será

$$l = 2\pi r' n = (2)(3.1416)(0.635)(300) = 1197 \text{ cm}$$

Sustituyendo estos valores junto con el de la resistividad en la expresión anterior para la resistencia, se obtiene  $R = 3.997 \Omega$ .

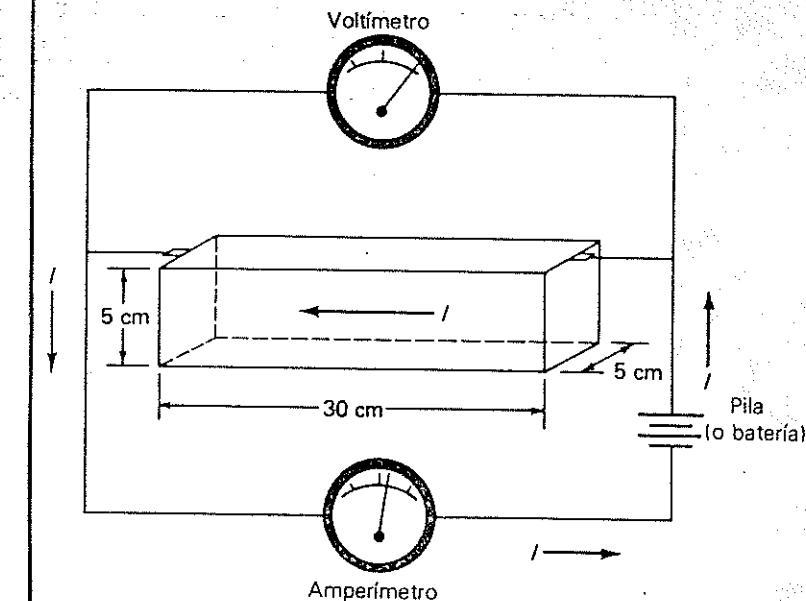


FIGURA 18.15

## EJEMPLO 18.5.4

La temperatura de la bobina descrita en el ejemplo anterior se eleva a  $100^\circ \text{C}$  y se encuentra que su resistencia a esa temperatura es de  $5.536 \Omega$ . Suponiendo que la resistividad del cobre varía linealmente con la temperatura absoluta entre  $0$  y  $100^\circ \text{C}$ , determine el *coeficiente térmico de resistividad* que expresa el cambio relativo de resistencia por cambio unitario de temperatura dentro de estos límites de temperaturas.

El cambio relativo de la resistividad provocado por un cambio  $\Delta T$  en la temperatura será  $\Delta\rho/\rho$ ; en consecuencia, el coeficiente térmico de resistividad  $\delta$  será la relación de  $\Delta\rho/\rho$  a  $\Delta T$ , o sea,

$$\delta = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\Delta T} \quad (18.5.11)$$

Si el cambio de la resistividad con la temperatura es lineal, entonces  $\Delta\rho$  será simplemente una constante multiplicada por  $\Delta T$  y  $\delta$  será entonces también una constante. En el enunciado del ejemplo se da el cambio en la resis-

tencia en vez del cambio en la resistividad. Empero, de (18.5.9), ya que  $l$  y  $A$  son constantes,  $\Delta R = (l/A)\Delta\rho$ ; por tanto,

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} \quad (18.5.12)$$

Introduciendo este resultado en (18.5.11) se obtiene

$$\delta = \frac{1}{R} \frac{\Delta R}{\Delta T} \quad (18.5.13)$$

Sustituyendo los valores numéricos  $\Delta R = 5.536 - 3.997 = 1.539 \Omega$ ,  $R = 3.997 \Omega$ ,  $\Delta T = 373 - 273 = 100 \text{ K}$ , se encuentra que  $\delta = 0.00385 \text{ K}^{-1}$ .

## 18.6 Resistencias y FEMs en serie y en paralelo: resistencia equivalente de redes

Cuando se conectan *en serie* una cantidad, de FEMs ideales, como se muestra en la figura 18.16, al unirse sus terminales como las A y B en la figura tendrán el mismo potencial final.

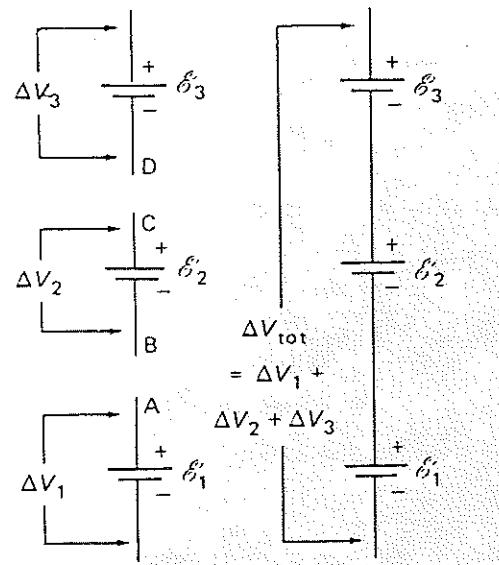


FIGURA 18.16. Fuentes de FEM en serie.

Puesto que al pasar por los elementos en serie, una carga experimenta un aumento de energía potencial igual a la suma de las ganancias de

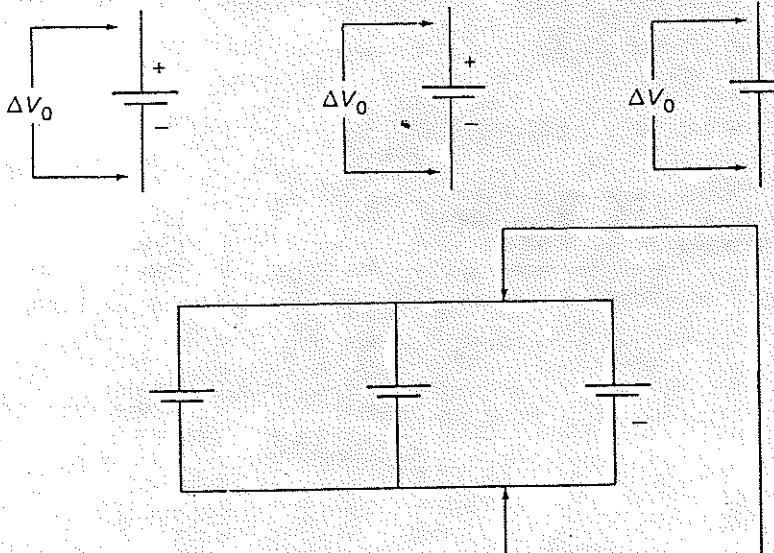


FIGURA 18.17. Fuentes de FEM en paralelo.

energía potencial en cada fuente de FEM, el aumento total de potencial en la conexión en serie,  $\Delta V$ , debe ser igual a la suma de los incrementos individuales de potencial. Entonces para FEMs en serie

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \cdots + \Delta V_n \quad (18.6.1)$$

de donde, de acuerdo con (18.3.6),

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \cdots + \mathcal{E}_n \quad (18.6.2)$$

Cuando se conectan *en paralelo* FEMs *idénticas*, como se muestra en la figura 18.17, todas las terminales negativas están a un potencial común y las terminales positivas igualmente están a un potencial común que es más alto por la elevación de potencial  $\Delta V_0$  en cada fuente, de donde, para FEMs *idénticas* en paralelo

$$\mathcal{E} = \Delta V_0 \quad (18.6.3)$$

Cuando se conectan en paralelo fuentes cuyas FEMs no son idénticas (o casi idénticas), fluyen corrientes circulantes y las diferencias de

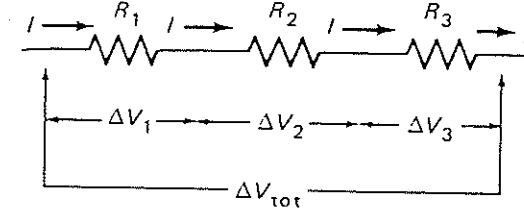


FIGURA 18.18. Resistores (resistencias) en serie.

potencial observadas dependerán críticamente de la resistencia de los conductores del circuito y de las resistencias internas de las fuentes, de manera que no siempre es fácil de calcular. Como se verá en uno de los ejemplos al final de esta sección, ésta es una excelente manera de arruinar baterías o pilas.

Las resistencias, que en los diagramas de circuito se denotan por el símbolo  $\sim\!\!\sim$ , también pueden combinarse en serie y en paralelo. Cuando se disponen en serie, como se muestra en la figura 18.18, fluye por todas las resistencias la misma corriente  $I$ . Si esta corriente se debe a una diferencia de potencial  $\Delta V$  aplicada exteriormente a través del conjunto de las resistencias, de la figura es claro que para  $n$  resistencias en serie

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \cdots + \Delta V_n \quad (18.6.4)$$

Pero si el comportamiento de esas resistencias es óhmico, entonces, como la corriente a través de cada una tiene el valor común  $I$ ,

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= IR_1 \\ \Delta V_2 &= IR_2 \\ \Delta V_3 &= IR_3 \\ &\vdots \\ \Delta V_n &= IR_n \end{aligned} \quad (18.6.5)$$

Sumando estas ecuaciones, utilizando (18.6.4) y notando que la resistencia equivalente  $R$  es igual al producto de la corriente por la caída de potencial total a través de la conexión se puede escribir

$$\Delta V = I(R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n) = IR \quad (18.6.6)$$

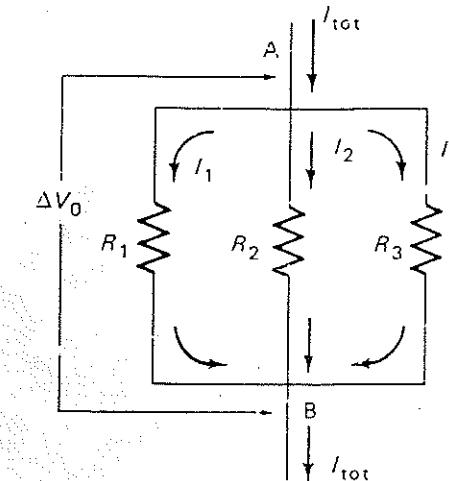


FIGURA 18.19. Resistores en paralelo.

de donde

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n \quad (18.6.7)$$

Entonces, la resistencia equivalente de una conexión de resistencias en serie es igual a la suma de las resistencias individuales.

En el caso de una cantidad de resistencias conectadas en paralelo, como se muestra en la figura 18.19, la diferencia de potencial a través de todas las resistencias tiene el mismo valor  $\Delta V_0$ . Empero, la corriente total  $I$  que fluye a través del sistema se divide en el punto A en una serie de corrientes más pequeñas, cada una de las cuales fluye a través de una de las resistencias y luego se reúne con las otras en B. Para una conexión de  $n$  resistencias en paralelo, la corriente total  $I$  siempre debe ser igual a la suma de estas corrientes individuales:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n \quad (18.6.8)$$

No obstante, si las resistencias obedecen la ley de Ohm, la corriente y la caída de potencial asociada a cada una se puede escribir como

$$\begin{aligned} I_1 &= \Delta V_0 / R_1 \\ I_2 &= \Delta V_0 / R_2 \\ I_3 &= \Delta V_0 / R_3 \\ &\vdots \\ I_n &= \Delta V_0 / R_n \end{aligned} \quad (18.6.9)$$

## 738 CORRIENTES CONSTANTES Y CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA

ya que la caída de potencial a través de cada resistencia tiene el mismo valor  $\Delta V_0$ . Si se suman todas estas ecuaciones utilizando (18.6.4) y notando que la corriente total debe ser igual a la caída de potencial  $\Delta V_0$  a través del sistema dividida entre su resistencia equivalente  $R$ , se obtiene

$$I = \frac{\Delta V_0}{R} = \Delta V_0 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n} \right) \quad (18.6.10)$$

de donde

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad (18.6.11)$$

En consecuencia, el recíproco de la resistencia equivalente es igual a la suma de los recíprocos de las resistencias individuales en paralelo.

La resistencia equivalente de un grupo de resistencias en serie siempre es mayor que cualquiera de las resistencias, mientras que en el caso de resistencias en paralelo siempre es más pequeña que cualquiera de las resistencias individuales. En este último caso, los diversos caminos de corriente permiten que fluya más corriente a través de todo el conjunto que a través de una sola de las resistencias. Desde luego es posible conectar las resistencias en formas más complejas que las combinaciones simples en serie o en paralelo. A menudo, aunque no siempre, estas conexiones pueden reducirse a un modo simple en serie o paralelo por medio de un proceso de reducción gradual en que se identifican partes del sistema como combinaciones en serie o en paralelo y se reemplazan por sus resistencias equivalentes dadas por (18.6.7) o (18.6.11). Prosiguiendo este proceso se puede llegar a una resistencia equivalente de toda la combinación. En la serie de ejemplos que siguen se ilustran algunos ejemplos de esta técnica. Para redes más complejas, debe acudirse a un plan más general de análisis de circuitos, que se desarrollará en una sección posterior.

En muchos de los estudios del comportamiento de circuitos eléctricos será conveniente efectuar los cálculos en términos de elementos de circuito *ideales*, lo que quiere decir resistencias puramente resitivas y sin capacitancia u

otra propiedad que pudiera alterar de alguna manera su comportamiento, y fuentes de FEM que no hagan *nada* más que mantener determinada diferencia de potencial constante entre sus terminales. Por lo general se considera que estos elementos están conectados mediante conductores que análogamente no aportan resistencia al paso de la corriente. De ordinario se entiende que los símbolos en los diagramas de circuito que se muestran aquí representan elementos de circuito "ideales" de esta clase, a menos que se haga alguna especificación en contrario.

En realidad no existen elementos verdaderamente ideales de circuito: los conductores de conexión pueden tener muy poca resistencia en comparación con otros elementos resitivos del circuito, pero su resistencia no es cero. Invariablemente, las resistencias tienen cierta capacitancia asociada, aunque para casi todos los fines sus efectos pueden ser despreciables. Por último, y lo que es más importante en este momento, las FEMs pueden no ser dispositivos ideales que no hagan más que establecer una diferencia de potencial fija entre sus terminales, sino que pueden presentar tensiones en las terminales que dependan de los procesos físicos y químicos que ocurren dentro de ellas, y en especial, de la cantidad de corriente que deban entregar al circuito externo. Por ejemplo, si una pila eléctrica fuera una "FEM ideal" se esperaría que mantuviera la diferencia de potencial nominal entre sus terminales, sin importar la resistencia del circuito externo al que esté conectada. Entonces, en principio, si se ponen en cortocircuito sus terminales con un conductor óhmico de resistencia despreciable, sería de esperar que entregara corrientes exageradamente intensas, lo que es sabido no sucede en la práctica, debido a los procesos disipativos que ocurren *dentro de la propia fuente de FEM* y que convierten la energía eléctrica en calor. Después de todo, en una pila la corriente debe fluir a través del electrólito y de otras sustancias en que ocurren los mismos procesos de colisión que en los conductores óhmicos para restringir la trayectoria libre de los electrones, y convertir su energía cinética en calor. Como resultado de ello, la diferencia de potencial terminal de cualquier fuente real de FEM disminuye al aumentar la

cantidad de corriente que proporciona, reduciéndose en realidad a cero con cierto valor finito de la corriente. Esta última condición se presenta cuando se ponen en cortocircuito las terminales de la fuente de FEM de manera que a la corriente límite se le conoce a veces como *corriente de cortocircuito* de la fuente. Es como si una fuente real de FEM, además de generar un aumento en el potencial ofreciera una *resistencia interna* al paso de la corriente. En efecto, se puede decir que toda fuente de FEM se comporta en forma bastante parecida a una FEM ideal conectada en serie con una resistencia ideal dentro del propio dispositivo.

En la figura 18.20 se ilustra una representación de una fuente real, por ejemplo, una pila o "batería". En el diagrama,  $R_i$  representa la resistencia interna de la pila y  $\mathcal{E}$  su diferencia de potencial "ideal" entre terminales cuando no proporciona corriente. Las líneas punteadas indican esquemáticamente los límites de la fuente, o sea, la envolvente o caja de la pila. Desde luego, cuando la corriente  $I$  es cero, la diferencia de potencial entre las terminales A y B es igual a la  $\mathcal{E}$ /FEM; Cuando fluye una corriente  $I$ , la energía potencial de una carga disminuye en la cantidad  $-\Delta V_i$  al pasar por la "resistencia interna"  $R_i$ . La diferencia de potencial a través de  $R_i$  en la dirección del flujo de la corriente es el cambio en la energía potencial por unidad de carga, o sea,  $-\Delta V_i$ . Entonces, el aumento neto de potencial entre las terminales A y B está dado por

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E} - \Delta V_i \quad (18.6.12)$$

Si la resistencia interna se comporta óhmicamente, entonces  $\Delta V_i = IR_i$ , y se puede escribir (18.6.12) como

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E} - IR_i \quad (18.6.13)$$

Cuando la corriente es tan intensa que  $IR_i$  es igual a  $\mathcal{E}$ , la diferencia de potencial  $\Delta V_{AB}$  entre las terminales se reduce a cero, lo que ocurre cuando existe un cortocircuito externo entre A y B. Ahora bien, la corriente que fluye es la corriente de cortocircuito cuyo valor está dado por

$$I_{sc} = \frac{\mathcal{E}}{R_i} \quad (18.6.14)$$

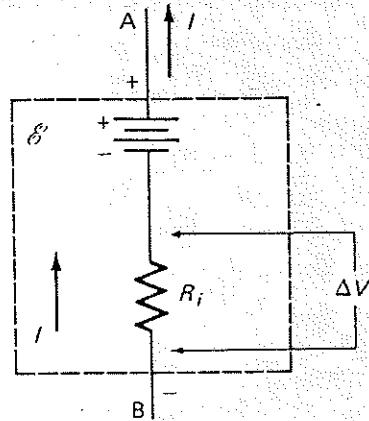


FIGURA 18.20. Efecto de la resistencia interna de una fuente de FEM.

Esta es la mayor corriente posible que puede entregar la fuente a un circuito externo.

El modelo físico sugerido por la ecuación (18.6.12) y representado por la figura 18.20 está muy simplificado, pues la resistencia interna de las fuentes reales a veces no es de naturaleza óhmica. Tratándose de las pilas o baterías, a menudo la consideración de resistencia interna óhmica es bastante buena aunque hay otras fuentes importantes de FEM, por ejemplo, fotoceldas de estado sólido, en que no sucede así. En estos casos es necesario elaborar un modelo físico más complejo de la fuente de FEM.

## EJEMPLO 18.6.1

Un destacado abogado muy influyente, miembro de varias comisiones públicas que tienen a su cargo formular la legislación sobre la contaminación ambiental y acerca de la generación, conversión y distribución de la energía eléctrica, tiene dos automóviles, un Cadillac nuevo y un Volkswagen viejo. Su esposa utiliza normalmente el VW para sus viajes locales. Una mañana, el VW no arrancaba pues sus luces quedaron encendidas durante toda la noche y su acumulador o "batería" (de 6.3 volts de FEM y 0.02 ohms de resistencia interna) se descargó por completo. Los conocimientos

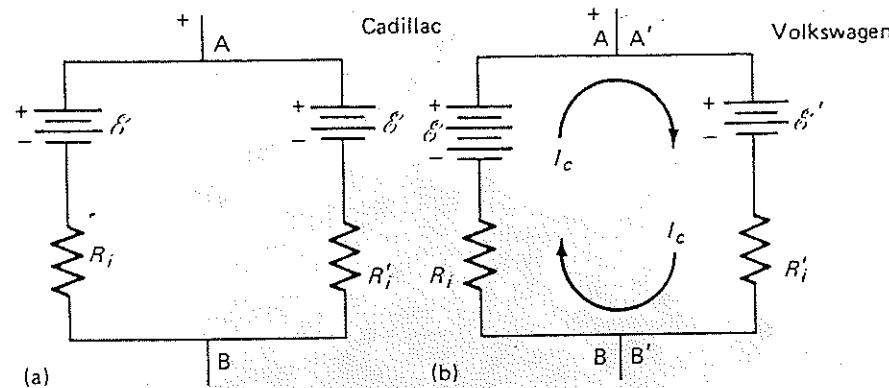


FIGURA 18.21

mientos técnicos del abogado le dicen que aunque el acumulador de 6 voltios del VW no podría utilizarse para arrancar el Cadillac, la batería de 12.6 voltios de este último (con resistencia interna de 0.03 ohms) sí podrá hacer arrancar el VW.

Así pues, lleva su automóvil junto al VW, saca del portaequipajes (o cajuela) unos cables de conexión, conecta las baterías positivo con positivo y negativo con negativo (siguiendo rigurosamente las instrucciones), se mete al VW, inserta la llave en el encendido —y en este momento se le interrumpe para que tome una llamada telefónica de larga distancia, lo que le mantiene ocupado durante media hora. Al regresar, no tiene dificultad en arrancar el VW, guarda los cables y se dirige a su Cadillac, felicitándose interiormente por su dominio magistral de la electrotecnología elemental. Pero al tratar de encender el motor de su automóvil encuentra que ahora éste no quiere arrancar. Sorprendido e irritado, llama al técnico local para que ponga en marcha su automóvil, ya que como todo mundo sabe, no se puede arrancar un automóvil de 12 voltios con una batería de 6 voltios. Esa tarde, para rematar apropiadamente los eventos del día, descubre que los faros del pobre VW están inservibles. Explicaremos a continuación las circunstancias extrañas en este trágico episodio del fracaso de dos automóviles.

No hay razón especial que impida combinar en paralelo las baterías u otras fuentes de

FEM, como se muestra en la figura 18.21, a, en tanto que sus FEMs sean idénticas o casi idénticas. En ese caso, la tensión terminal  $\Delta V_{AB}$  (de corriente cero) será igual al valor común de FEM y la resistencia interna de la combinación en paralelo será menor que la de cualquiera de las fuentes, ya que ahora las dos resistencias internas están en paralelo. Empero, cuando las FEMs de las dos fuentes,  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$ , son notablemente distintas, como se ilustra en la figura 18.21, b, la FEM mayor  $\mathcal{E}$  hace pasar una *corriente circulante*  $I_c$  por el circuito y a través de la FEM  $\mathcal{E}'$  menor, en sentido *contrario*, de positivo a negativo. Esto sucede cuando se conecta la batería de 12 voltios del Cadillac en paralelo con la de 6 voltios del Volkswagen, y esa es la corriente responsable de haber cargado el acumulador del VW y de haber descargado el del Cadillac.

Se puede calcular la (intensidad) de esta corriente circulante razonando como sigue: como los puntos A y A' son realmente idénticos, al igual que los puntos B y B', las diferencias de potencial  $\Delta V_{AB}$  en el lado izquierdo del circuito, y  $\Delta V_{A'B'}$  en el lado derecho, deben ser iguales. No obstante, de la ecuación (18.6.13), se sabe que  $\Delta V_{AB}$  debe estar dada por

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E} - I_c R_i \quad (18.6.15)$$

Sin embargo, en el caso de  $\Delta V_{A'B'}$ , la corriente fluye por la resistencia interna en sentido *contrario* al que se indica en la figura 18.20,

por lo que la diferencia de potencial  $\Delta V_{A'B'}$  de (18.6.12) a través de esta resistencia es *de signo opuesto* a las diferencias de potencial en (18.6.12) y (18.6.13). Al pasar de B' a A', la diferencia de potencial a través de  $R_i$  es una elevación de potencial en vez de una caída. Consecuentemente, la diferencia de potencial entre B' y A' en el lado derecho del circuito debe ser

$$\Delta V_{A'B'} = \mathcal{E}' + I_c R_i \quad (18.6.16)$$

Pero como se señalara antes,  $\Delta V_{AB}$  y  $\Delta V_{A'B'}$  deben ser iguales. Por tanto, igualando los segundos miembros de (18.6.15) y (18.6.16) y despejando  $I_c$

$$I_c = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}'}{R_i + R'_i} \quad (18.6.17)$$

En el caso en que intervino el notable abogado,  $\mathcal{E} = 12.6$  V,  $\mathcal{E}' = 6.3$  V,  $R'_i = 0.02$  Ω y a  $R_i = 0.03$  Ω. Sustituyendo estos valores numéricos en (18.6.17) se encuentra que la corriente circulante es de 126 A. Esta corriente, proporcionada por la FEM de la batería del Cadillac, basta para descargarla en media hora hasta el punto en que ya no pueda hacer arrancar el automóvil<sup>4</sup>. Al mismo tiempo, como las celdas electroquímicas de plomo y ácido de los acumuladores son reversibles, la corriente circulante que fluye en sentido contrario por la batería del Volkswagen basta para cargarla hasta el punto en que pueda hacer arrancar el automóvil. Si las celdas fueran irreversibles, como las pilas secas de las linternas de mano, el único efecto observable hubiera sido la descarga de la batería de mayor FEM.

El valor común de  $\Delta V_{AB}$  y  $\Delta V_{A'B'}$  se puede calcular sustituyendo los valores numéricos dados de las FEMs y las resistencias, junto con el valor  $I_c = 126$  A, en (18.6.15) o (18.6.16). De esta manera es fácil comprobar que  $\Delta V_{AB} = \Delta V_{A'B'} = 8.82$  V. Esta diferen-

<sup>4</sup> Desde luego, las resistencias  $R$  y  $R'$  cambian debido a la descarga de una batería y a la carga de la otra. Como resultado de ello, la corriente circulante  $I_c$  disminuye a medida que se descarga la batería del Cadillac; empero, este efecto no es importante para los propósitos del ejemplo.

cia de potencial aplicada a los faros del VW, después de que el infeliz olvidó abrir el interruptor de las luces antes de conectar sus cables, fue la causante de que se inutilizaran los faros de 6.3 V, del VW.<sup>5</sup> El poeta Alexander Pope expresó la moraleja de esta historia como sigue:

*A little learning is a dangerous thing.  
Drink deep, or taste not the Pierian spring.  
There, shallow drafts intoxicate the brain,  
While drinking largely sobers us again.*

*Essay on Man*

El saber poco es peligroso.  
Bebe a tragos, o no paladees el pierio manantial.  
Pequeños sorbos intoxican el cerebro,  
Beber copiosamente nos devuelve después  
la sobriedad.

(Trad. de F.P.B.)

#### EJEMPLO 18.6.2

Calcular la corriente que fluye en el circuito de la figura 18.22, a.

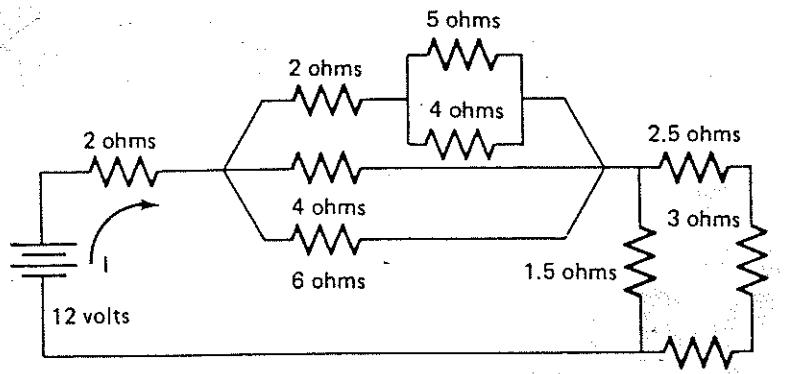
Este circuito consiste en una red complicada de resistencias, pero utilizando las ecuaciones que se desarrollaron antes para la resistencia equivalente de conexiones en serie o en paralelo, puede reducirse a una sola resistencia equivalente, como se ilustra en las figuras 18.22, b, c y d. Por ejemplo, en la figura 18.22, b, se reemplaza la combinación en paralelo de las resistencias de 4 y de 5 Ω de la rama superior del circuito original por su resistencia equivalente, que de acuerdo con (18.6.11) es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} \text{ ohm}^{-1}$$

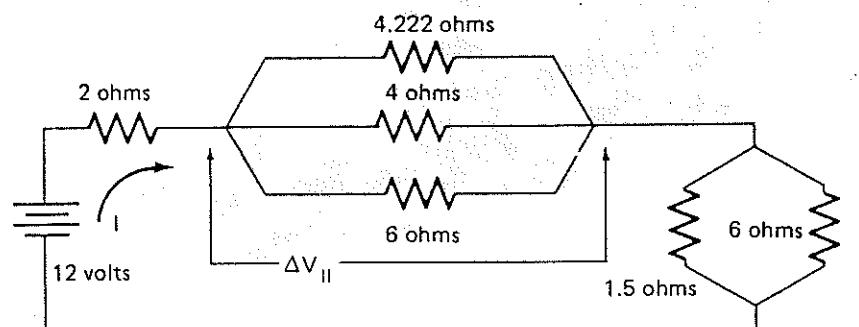
$$R = \frac{20}{9} = 2.222 \text{ ohms}$$

Desde luego, esta resistencia está en serie con una resistencia de 2 Ω, por lo que, según (18.6.7), la resistencia total en la rama superior de ese circuito es de  $2.222 + 2 = 4.222$  Ω,

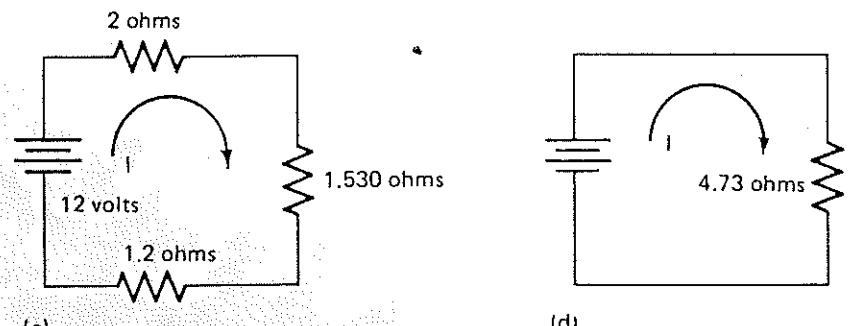
<sup>5</sup> En realidad, lo que pasó es que se fundió el fusible del circuito de las luces, pero el avisado técnico del taller le cobró a nuestro héroe un par de nuevos faros.



(a)



(b)



(c)

(d)

FIGURA 18.22

como se muestra. Ahora es claro que las resistencias de 2.5, 3 y 0.5 Ω de la rama derecha están en serie, y de acuerdo con (18.6.7), pueden reemplazarse con una sola resistencia de 6 Ω,

que entonces estará en paralelo con la resistencia de 1.5 Ω. En la figura 18.22, c, se reemplazó la resistencia equivalente de las tres resistencias en paralelo de la figura 18.22, b, por una resis-

$$I_3 = \frac{\Delta V}{R_3} = \frac{3.886}{6.00} = 0.648 \text{ A}$$

ya que la caída de potencial  $\Delta V$  aparece a través de las tres resistencias. Se pueden calcular las corrientes en las otras ramas del circuito en forma parecida, y esto se deja como ejercicio para el lector.

Hay muchas redes cuya resistencia equivalente se puede encontrar de esta manera, reemplazando sucesivamente las combinaciones en serie y en paralelo por sus resistencias equivalentes, hasta que sólo queda una resistencia total equivalente. Pero hay otras redes que no pueden resolverse mediante esta técnica. En tales casos debe acudirse a un método más general de análisis de circuitos, que se presentará en la sección 18.8.

### 18.7 Energía y potencial en los circuitos de CD

En la sección 18.2 se vio que una FEM  $\delta$  que proporciona una corriente  $I$  a un circuito externo le suministra también una potencia

$$P = \delta I$$

(18.7.1)

Las corrientes que fluyen a través de las resistencias individuales en las conexiones en paralelo se calculan primero determinando la caída de potencial a través del sistema, y luego las corrientes individuales utilizando la ley de Ohm. Por tanto, para las tres ramas de resistencia de 4.222, 4 y 6 Ω de la figura 18.22b, la resistencia equivalente del conjunto es de 1.530 Ω. La corriente total de 2.54 A fluye a través del sistema, de manera que su caída de potencial debe ser igual a

$$\Delta V = IR = (2.54)(1.530) = 3.886 \text{ V}$$

Entonces, las corrientes en las ramas de 4.222, 4 y 6 Ω deben ser

$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{3.886}{4.222} = 0.920 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{3.886}{4.00} = 0.972 \text{ A}$$

<sup>6</sup> En realidad, es más preciso decir en energía térmica interna. En este ejemplo es instructivo leer de nuevo el Capítulo 12, sección 2, del tomo I.

$$P = \frac{\Delta U_p}{\Delta t} = \frac{\Delta q \Delta V}{\Delta t} = I \Delta V \quad (18.7.2)$$

ya que  $I = \Delta q / \Delta t$ . La cantidad total de energía eléctrica consumida, y por tanto la energía térmica total generada, será

$$\Delta U_p = \Delta Q = P \Delta t = I \Delta V \Delta t \quad (18.7.3)$$

Desde luego, la conversión en calor de la energía eléctrica proporcionada por una fuente de FEM por el paso de corriente a través de una resistencia, es la base en que operan los elementos calefactores eléctricos más conocidos. Si la resistencia es de naturaleza óhmica, entonces  $\Delta V = IR$ , en cuyo caso se puede escribir (18.7.2) como

$$P = I^2 R \quad (18.7.4)$$

De manera alternativa, en (18.7.2) se puede utilizar la ley de Ohm para expresar  $I$  en términos de  $\Delta V$  como  $I = \Delta V / R$  y escribir (18.7.2) en una forma también distinta como

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} \quad (18.7.5)$$

Es importante notar, de (18.7.3), que la rapidez a la que se convierte la energía eléctrica en calor en una resistencia óhmica es proporcional al cuadrado de la corriente que fluye a través de ella. A esta conversión de energía eléctrica en calor por el paso de corriente a través de una resistencia se le llama calentamiento por efecto de Joule.

#### EJEMPLO 18.7.1

¿Cuál es la resistencia de una lámpara incandescente que consume 60 W de potencia eléctrica trabajando a 117 V? Determine qué corriente fluye por esa resistencia en tales condiciones.

El consumo eléctrico es de 60 W de potencia cuando la caída de potencial es de 117 V. Sustituyendo estos valores en (18.7.5), se encuentra que

$$60 = \frac{117^2}{R}$$

$$R = \frac{117^2}{60} = 228 \text{ ohms}$$

Entonces, por la ley de Ohm la corriente es:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{117}{228} = 0.513 \text{ amp}$$

Igualmente se podría calcular  $I$  primero a partir de (18.7.2), calculando luego  $R$  por medio de (18.7.3) o de (18.7.5).

#### EJEMPLO 18.7.2

Una pila o batería de FEM  $\mathcal{E}$  y resistencia interna  $R_i$  está conectada como se ve en la figura 18.23 a un circuito externo de resistencia  $R$ , que es ajustable. Indicar cómo debe ajustarse la resistencia externa para que se disipe la máxima cantidad posible de energía en el circuito externo. Hallar el valor de la máxima potencia de dissipación.

En la figura 18.23, la FEM  $\mathcal{E}$  establece una elevación de potencial de  $\mathcal{E}$  volts entre A' y B. Esto establece una corriente  $I$  que fluye por el circuito externo y que produce una caída de potencial  $\Delta V = IR$  en la resistencia externa  $R$  y una caída de potencial  $\Delta V_i = IR_i$  debida a la resistencia interna de la fuente. Es claro que la suma de estas dos caídas alrededor del circuito BAA' es exactamente igual a la elevación de potencial desde A' hasta B. De no ser así, una carga que pasara por el circuito experimentaría una elevación o caída netas de potencial cada vez que lo recorriera por completo, y el sistema posiblemente no podría estar en estado estable. En estas circunstancias, se puede escribir

$$\mathcal{E} = \Delta V + \Delta V_i = I(R + R_i) \quad (18.7.6)$$

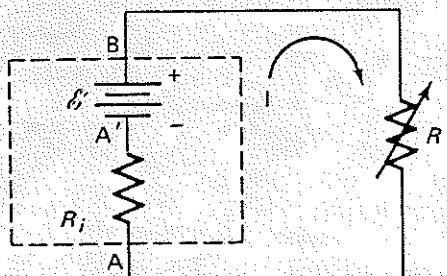


FIGURA 18.23

de donde

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i} \quad (18.7.7)$$

De acuerdo con (18.7.3), la potencia disipada como calor en la resistencia externa  $R$  será

$$P_{\text{ext}} = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + R_i)^2} \quad (18.7.8)$$

Para encontrar el valor de  $R$  para el que  $P_{\text{ext}}$  es máxima, debe evaluarse la derivada de  $P_{\text{ext}}$  con respecto a  $R$  y hacerla igual a cero. De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{ext}}}{dR} &= \mathcal{E}^2 \frac{d}{dR} [R(R + R_i)^{-2}] \\ &= \mathcal{E}^2 [(R + R_i)^{-2} - 2R(R + R_i)^{-3}] \\ &= \mathcal{E}^2 \left( \frac{1}{(R + R_i)^2} - \frac{2R}{(R + R_i)^3} \right) \\ &= \mathcal{E}^2 \frac{R + R_i - 2R}{(R + R_i)^3} \end{aligned}$$

o sea,

$$\frac{dP_{\text{ext}}}{dR} = \mathcal{E}^2 \frac{R_i - R}{(R + R_i)^3} \quad (18.7.9)$$

La expresión anterior de  $dP_{\text{ext}}/dR$  sólo puede ser cero si se anula el numerador, es decir, únicamente si

$$R = R_i \quad (18.7.10)$$

En consecuencia, la potencia máxima de dissipación en el circuito externo se tiene cuando la resistencia externa  $R$  es igual a la resistencia interna de la fuente.

Este es el ejemplo más sencillo posible de un principio bastante general que se conoce como de igualación de impedancias. Por lo anterior hay que conectar las bocinas estéreo fónicas de 8 ohms a los terminales de salida de "8 ohms" del amplificador, pues la resistencia interna efectiva del amplificador entre esas terminales es igual a la resistencia de las bocinas, o altavoces asegurando así que se disipa una máxima potencia de señal en el circuito externo. Se determina la potencia disipada en tales condiciones haciendo  $R$  igual a  $R_i$  en (18.7.8), de donde

$$P_{\text{ext}}^{(\text{máx})} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R_i} \quad (18.7.11)$$

La potencia disipada en la fuente de FEM es  $P_i R_i$ , y como  $I$  está dada por (18.7.7),

$$P_i = I^2 R_i = \frac{\mathcal{E}^2 R_i}{(R + R_i)^2} \quad (18.7.12)$$

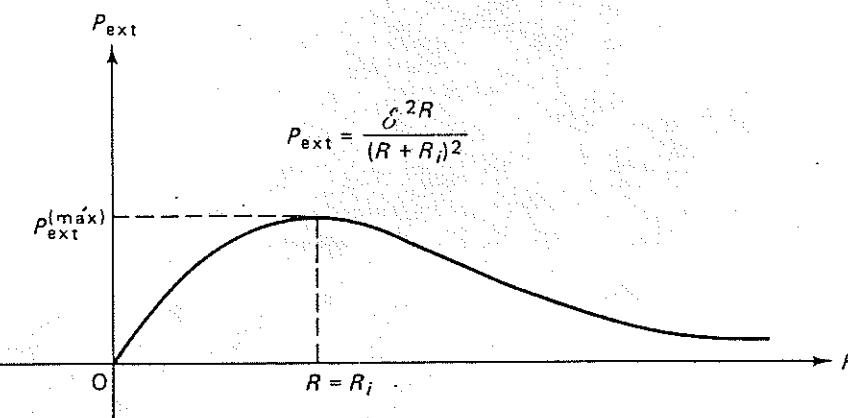


FIGURA 18.24

Cuando  $R = R_i$ , esto indica que la disipación interna de potencia es

$$P_i = \frac{\mathcal{E}^2}{4R_i} = P_{ext}^{(máx)} \quad (18.7.13)$$

La caída de potencial a través de la resistencia externa es  $IR$ , o sustituyendo el valor de  $I$  de (18.7.7),

$$\Delta V = \frac{\mathcal{E}R}{R + R_i} \quad (18.7.14)$$

En condiciones de máxima disipación de potencia externa, cuando  $R$  es igual a  $R_i$ , la anterior queda como

$$\Delta V = \mathcal{E}/2 \quad (18.7.15)$$

y entonces la mitad de la diferencia de potencial que crea la FEM aparece a través de la resistencia externa y la otra mitad a través de la resistencia interna de la fuente de FEM. En la figura 18.24 se muestra una gráfica de la disipación externa de potencia en función de  $R$ , dada por (18.7.7). Esta gráfica muestra claramente el valor máximo en  $R = R_i$ .

### 18.8 Análisis de circuitos de CD mediante las leyes de Kirchhoff

Hasta ahora sólo se necesitaron las definiciones de potencial, FEM, corriente y ley de Ohm para describir el comportamiento de los circuitos eléctricos simples que se han examinado. Empero, no bastan estos métodos sencillos para analizar redes más complejas, para las que tendrá que acudirse a un conjunto más general de principios que se conocen como *leyes de Kirchhoff para circuitos de CD*. La denominación de estas leyes es en honor del físico alemán Gustav Kirchhoff (1824-1887). Se basan en la conservación de la carga y la corriente, eléctricas y en el hecho de que el potencial siempre vuelve a su valor original después de un recorrido completo por cualquier trayectoria cerrada. Las leyes de Kirchhoff pueden expresarse como sigue:

I. La suma algebraica de las corrientes que fluyen hacia cualquier punto de unión de conductores de un circuito es cero.

II. La suma algebraica de las elevaciones y las caídas de potencial alrededor de cualquier recorrido cerrado en un circuito es cero.

La ley I puede expresarse en forma distinta para indicar que la suma de las corrientes que fluyen hacia cualquier punto de unión (o *nodo*) en un circuito es igual a la suma de las corrientes que fluyen desde ese punto. Expresada de esa manera, es claro que surge de la conservación de la carga; si entra más corriente a un punto de unión que la que sale, obviamente habrá acumulación de carga en el nodo, lo que no puede suceder en un circuito de CD en estado estable —pues no habría así entonces ninguna estabilidad. La primera ley de Kirchhoff puede comprenderse fácilmente recurriendo a la figura 18.25, a.

La ley II sencillamente expresa el hecho de que el potencial eléctrico puede expresarse únicamente en cualquier punto de un circuito en estado estable. Entonces al recorrer una trayectoria cerrada, el valor del potencial siempre debe volver a su valor inicial al regresar al punto de partida, lo que quiere decir que debe ser cero la suma  $\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4$  en la figura 18.25, b.

La serie de ejemplos que sigue ilustrará la aplicación de las leyes de Kirchhoff a circuitos eléctricos reales. En estos y en otros problemas, generalmente no se sabrá a ciencia cierta cuál es el sentido de flujo de la corriente en las *ramas* de circuito individual, por lo que deberán suponerse sentidos arbitrarios para la corriente en cada rama. No es necesario que los supuestos sean correctos; si no lo fueran, las soluciones darán valores negativos de corriente cuando el flujo de la misma sea opuesto al que se consideró.

#### EJEMPLO 18.8.1

En el caso de los automóviles Cadillac y Volkswagen descritos en el ejemplo 18.6.1 e ilustrados en la figura 18.21, b, se omitió el hecho de que las luces del segundo estaban encendidas durante los eventos descritos, lo que quiere decir que había una resistencia adicional  $R_0$  de  $0.2\ \Omega$  conectada a las terminales positiva y negativa de las dos baterías. Hallar el efecto de esta resistencia sobre las cantida-

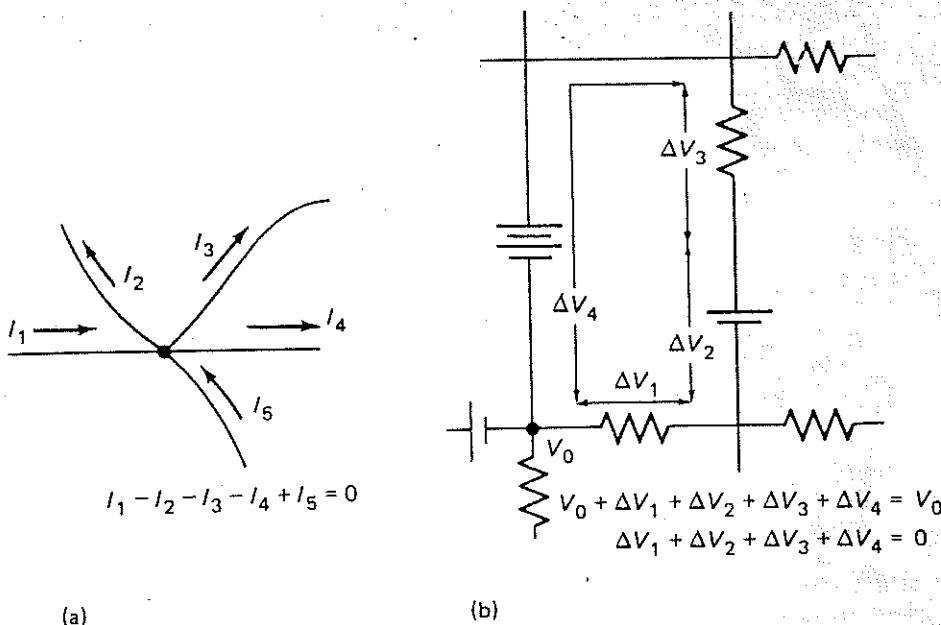


FIGURA 18.25. Leyes de Kirchhoff para circuitos eléctricos. (a) La suma algebraica de las corrientes que llegan a un nodo (punto de unión de conductores) es cero. (b) La suma algebraica de la diferencia de potencial alrededor de una malla (circuito cerrado) es cero.

des calculadas en el ejemplo 18.6.1, suponiendo para los fines de este cálculo, que los filamentos de los fanales o el fusible correspondiente no estaban fundidos.

Ahora el circuito es como se ilustra en la figura 18.26. La corriente de las luces  $I_0$  fluye por la resistencia  $R_0$  que representa el circuito de alumbrado del VW. Los métodos anterio-

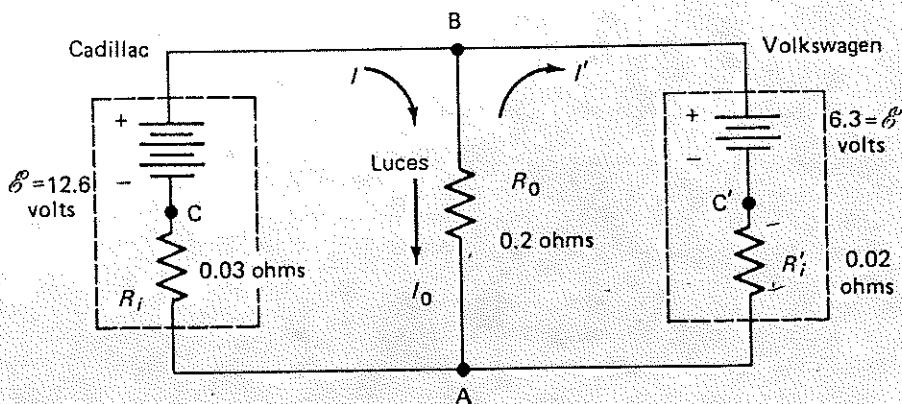


FIGURA 18.26

res de análisis no se aplican directamente en este caso, aunque ahora se puede proceder aplicando las leyes de Kirchhoff. La ley I aplicada a las corrientes que fluyen hacia y desde el punto B indica que

$$I - I' - I_0 = 0 \quad (18.8.1)$$

Al escribir esta ecuación se supone arbitrariamente que las corrientes  $I$ ,  $I'$  e  $I_0$  tienen los sentidos que se muestran en la figura 18.26, y que las corrientes hacia el punto de unión B son positivas y que las corrientes que salen de ahí son negativas. Se pudo haber hecho igualmente la consideración opuesta, pero hay que escoger una u otra y mantenerla constantemente en todo el proceso.

Ahora se puede aplicar la ley II a la rama izquierda del circuito; se parte del punto C y se avanza en el sentido del reloj alrededor del circuito CBAC. Al hacerlo, se suma toda elevación o caída de potencial alrededor del circuito y el resultado se iguala a cero. De C a B, hay una *elevación* de potencial  $\Delta V_{CB} = +\mathcal{E}$  volts. De B a A hay una *caída* de potencial debida al paso de la corriente  $I_0$  por la resistencia  $R_0$ , igual a  $\Delta V_{AB} = -I_0 R_0$  y de A a C hay también una caída  $\Delta V_{AC} = -IR_i$  debida al paso de la corriente  $I$  por la resistencia interna  $R_i$ . Sumando estos tres cambios de potencial e igualando su suma a cero se obtiene

$$\Delta V_{CB} + \Delta V_{BA} + \Delta V_{AC} = +\mathcal{E} - I_0 R_0 - IR_i = 0 \quad (18.8.2)$$

Al escribir esta ecuación es importante notar que la corriente que pasa por la rama ACB es  $I$ , mientras que la que pasa por la rama BA es  $I_0$ .

De manera análoga se puede aplicar la ley II al circuito del lado derecho, partiendo del punto B y recorriendo en el sentido del reloj. El primer cambio de potencial que se encuentra, entre B y C', es una *caída* de potencial al pasar por la FEM  $\mathcal{E}'$  de positivo a negativo —es decir, en el “sentido equivocado”, ya que en este caso la FEM trata, infructuosamente, de hacer que la corriente fluya en el sentido opuesto. Por tanto, se escribe  $\Delta V_{BC'} = -\mathcal{E}'$ . De C' a A hay otra *caída* de potencial,  $\Delta V_{C'A} = -I'R_i'$  conforme la corriente

$I'$  fluye a través de  $R_i'$ . De A a B hay un *aumento* en el potencial a través de la resistencia  $R_0$  debido al flujo de la corriente  $I_0$ . Si se hubiera recorrido el circuito en sentido contrario al del reloj, de B a A, el cambio en el potencial hubiera sido una *disminución* asociada a la *caída* de potencial a través de  $R_0$ . Pero, en la forma actual, esta parte del circuito se recorre desde A hasta B en sentido *contrario* al de la corriente  $I_0$ . Como el paso de  $I_0$  por  $R_0$  hace al potencial del extremo de  $R_0$  próximo a A, más bajo que el del extremo cercano a B, el cambio en potencial de A a B es positivo, por lo que  $\Delta V_{AB} = +I_0 R_0$ . Sumando los cambios de potencial e igualando su suma a cero, se obtiene

$$\Delta V_{BC} + \Delta V_{C'A} + \Delta V_{AB} = -\mathcal{E}' + I_0 R_0 - I'R_i = 0 \quad (18.8.3)$$

No se conoce ninguna de las tres corrientes  $I$ ,  $I'$  e  $I_0$ , pero las ecuaciones (18.8.1), (18.8.2) y (18.8.3) dan tres ecuaciones que pueden resolverse simultáneamente para hallar estas tres cantidades. Sumando (18.8.2) y (18.8.3) se obtiene

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}' - IR_i - I'R_i = 0 \quad (18.8.4)$$

Sustituyendo el valor  $I_0 = I - I'$  de (18.8.1) en (18.8.2) se encuentra

$$\mathcal{E} - I(R_i + R_i') + I'R_0 = 0 \quad (18.8.5)$$

Ahora puede multiplicarse (18.8.4) por  $R_0$ , (18.8.5) por  $R_i'$ , sumar las dos ecuaciones y despejar  $I$ :

$$I = \frac{R_0(\mathcal{E} - \mathcal{E}') + \mathcal{E}R_i'}{R_0R_i + R_0R_i' + R_iR_i'} \quad (18.8.6)$$

Sustituyendo esta expresión de  $I$  en (18.8.4) y despejando  $I'$  se puede escribir, después de muchas operaciones algebraicas,

$$I' = \frac{(\mathcal{E} - \mathcal{E}')R_0 - \mathcal{E}'R_i}{R_0R_i + R_0R_i' + R_iR_i'} \quad (18.8.7)$$

Por último, de (18.8.1), (18.8.6) y (18.8.7),

$$I_0 = I - I' = \frac{\mathcal{E}R_i' + \mathcal{E}'R_i}{R_0R_i + R_0R_i' + R_iR_i'} \quad (18.8.8)$$

Como se viera antes, la diferencia de potencial  $\Delta V_{AB}$  entre los puntos B y A es

$$\Delta V_{AB} = I_0 R_0 = \frac{(\mathcal{E}R_i' + \mathcal{E}'R_i)R_0}{R_0R_i + R_0R_i' + R_iR_i'} \quad (18.8.9)$$

Sustituyendo los valores numéricos  $R_i = 0.03 \Omega$ ,  $R_i' = 0.02 \Omega$ ,  $R_0 = 0.2 \Omega$ ,  $\mathcal{E} = 12.6 \text{ V}$  y  $\mathcal{E}' = 6.3 \text{ V}$ , por las ecuaciones (18.8.6) a (18.8.9) se encuentra que  $I = 142.6 \text{ A}$ ,  $I' = 101.0 \text{ A}$ ,  $I_0 = 41.6 \text{ A}$  y  $\Delta V_{AB} = 8.32 \text{ V}$ , resultados que deben compararse con los que se encontraron en el ejemplo 18.6.1. Las razones de que las corrientes  $I$  e  $I'$  no sean muy distintas de la corriente circulante  $I_c$  del ejemplo 18.6.1, y de que los valores obtenidos para la diferencia de potencial  $\Delta V_{AB}$  sean casi los mismos en ambos casos provienen del hecho de que la resistencia del circuito de alumbrado  $R_0$  es mucho mayor que la resistencia interna de ambas baterías.

#### EJEMPLO 18.8.2

En el circuito o red de CD de la figura 18.27, determinar las corrientes que fluyen en cada rama de circuito y la diferencia de potencial  $\Delta V_{AB}$  entre los puntos A y B.

Este problema de circuitos puede resolverse mediante una aplicación directa de las leyes de Kirchhoff. Al principio, no se sabe con certeza el sentido de todas las corrientes en las diversas ramas de circuito, por lo que se comienza suponiendo que las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  e  $I_6$  de la figura 18.27 tienen los sentidos que se muestran ahí. Por la ley I, en los puntos B, C y D se puede escribir

$$I_1 - I_2 - I_4 = 0 \quad (\text{B}) \quad (18.8.10)$$

$$I_2 + I_6 - I_3 = 0 \quad (\text{C}) \quad (18.8.11)$$

$$I_4 + I_5 - I_6 = 0 \quad (\text{D}) \quad (18.8.12)$$

Se necesitan seis ecuaciones para determinar completamente las seis corrientes; las tres restantes pueden obtenerse aplicando la ley II a los circuitos EBCAE, CADCA y BCDB. Para el circuito EBCAE, partiendo de E, se puede escribir  $24 - 6I_1 - 12 - 4I_2 - 4I_3 + 8 = 0$ , en que el cambio de potencial asociado a

la batería de 12 V es una caída y no una elevación, ya que se recorre de positivo a negativo el circuito. La ecuación puede simplificarse a

$$6I_1 + 4I_2 + 4I_3 = 20 \quad (18.8.13)$$

Para el circuito CADCA, partiendo de C, de la misma manera se obtiene la ecuación  $-4I_3 + 8 - 3I_5 - 6 - 2I_6 = 0$ , que se puede simplificar a

$$4I_3 + 3I_5 + 2I_6 = 2 \quad (18.8.14)$$

Para el circuito BCDB, comenzando en B, se puede escribir  $-12 - 4I_2 + 2I_6 + 6 + 3I_4 = 0$ , en que los signos del tercero y quinto términos son positivos porque en cada caso se recorre la resistencia en sentido contrario al que se supuso para el flujo de la corriente, lo que significa que el potencial aumenta en vez de disminuir al pasar por la resistencia. Esta ecuación se puede escribir de manera más simple como

$$-4I_2 + 3I_4 + 2I_6 = 6 \quad (18.8.15)$$

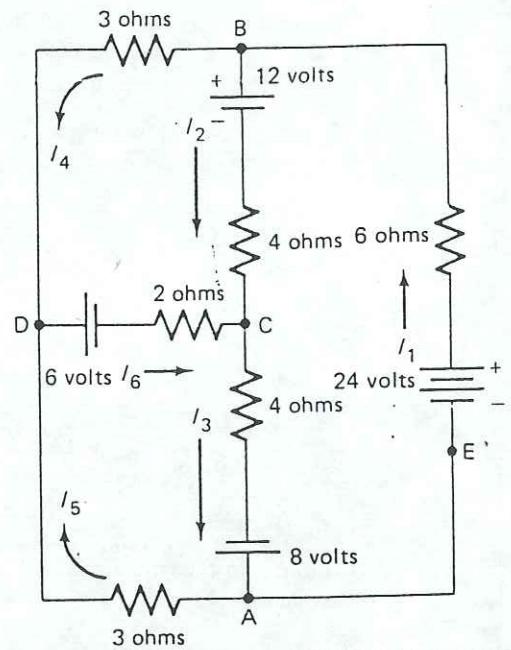


FIGURA 18.27



## 752 CORRIENTES CONSTANTES Y CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA

se muestra en la figura 18.29. Calcular la corriente que pasa por cada resistencia como una fracción de la corriente de circuito  $I_0$ , y determinar la resistencia equivalente  $R_{\text{tot}}$  del conjunto.

En el circuito de la figura 18.29 hay 12 resistencias individuales y 12 corrientes de rama. En consecuencia, a primera vista el problema parecería muy difícil pero todas las resistencias son idénticas y están conectadas en una forma especialmente simétrica. Se utilizarán las *propiedades de simetría* de la conexión para descubrir que no hay 12, sino sólo cuatro corrientes que deben determinarse, pues ciertas corrientes de rama deben ser iguales. Esta técnica de simplificación en que se acude a las propiedades de simetría es muy útil en muchos problemas físicos, especialmente en la física cuántica de átomos, moléculas y redes cristalinas.

Si se observa que el circuito es perfectamente simétrico con respecto a las rectas AA' y BB', se puede llegar a la conclusión de que todas las corrientes en la parte del circuito que está sobre BB' deben ser iguales a las que están abajo de esa línea, y que todas las corrientes a la derecha de AA' deben de ser de la misma intensidad que todas las que están a la izquierda, pero con sentido opuesto, debido a que la corriente  $I_0$  que fluye a la línea AA' desde la izquierda sale de esa línea hacia la derecha. En consecuencia, es claro que sólo puede haber cuatro corrientes diferentes, como se indica en el diagrama. Utilizando la ley I se puede escribir para los nodos P y Q las ecuaciones

$$2I_1 + I_2 = I_0 \quad (18.8.32)$$

$$I_1 - I_3 - I_4 = 0 \quad (18.8.33)$$

La ley II alrededor de los circuitos QPS y TQS da  $I_1R - I_2R + I_3R = 0$  e  $I_4R - I_3R - I_2R = 0$ , o sea

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (18.8.34)$$

$$-2I_3 + I_4 = 0 \quad (18.8.35)$$

Las ecuaciones (18.8.32) a (18.8.35) constituyen un sistema de ecuaciones simultáneas en  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$ . De (18.8.35) se puede obtener  $I_4$

$= 2I_3$ ; sustituyendo esto en (18.8.33) se obtiene  $I_1 = 3I_3$ . A su vez, sustituyendo estos valores en (18.8.32) y (18.8.34) se obtiene

$$6I_3 + I_2 = I_0 \quad (18.8.36)$$

y también

$$4I_3 - I_2 = 0 \quad (18.8.37)$$

Sumando estas dos ecuaciones se elimina  $I_2$  y se puede expresar  $I_3$  en términos de  $I_0$  como

$$I_3 = I_0/10 \quad (18.8.38)$$

Entonces, de (18.8.37),

$$I_2 = 4I_3 = 4I_0/10 \quad (18.8.39)$$

$$I_1 = 3I_3 = 3I_0/10 \quad (18.8.40)$$

$$I_4 = 2I_3 = 2I_0/10 \quad (18.8.41)$$

Usando la ley II alrededor del circuito CPQTUC, se obtiene

$$\mathcal{E} - I_1R - I_4R - I_2R = 0 \quad (18.8.42)$$

que se puede escribir en la forma

$$\mathcal{E} = R(2I_1 + I_4) = I_0R_{\text{tot}} \quad (18.8.43)$$

en que  $R_{\text{tot}}$  representa la resistencia equivalente de la red. Pero  $I_1$  e  $I_4$  se pueden expresar en términos de  $I_0$  a partir de (18.8.40) y (18.8.41). Por tanto, puede escribirse (18.8.43) en la forma

$$\mathcal{E} = I_0R_{\text{tot}} = R\left(\frac{6I_0}{10} + \frac{2I_0}{10}\right) \quad (18.8.44)$$

de donde

$$R_{\text{tot}} = \frac{4}{5}R \quad (18.8.45)$$

## 18.9 Carga y descarga de capacitores: circuitos R-C simples

Hasta ahora se ha limitado el estudio a casos de estado estable o de corriente constante (o continua, CC). Ahora se tomará en cuenta un ejemplo especialmente importante en que las corrientes y diferencias de potencial en el circuito dependen del tiempo. Este ejemplo comprende la carga de un capacitor  $C$  mediante

una fuente de FEM/ $\mathcal{E}$  a través de una resistencia  $R$ , y la descarga subsecuente del capacitor a través de una segunda resistencia  $R'$ , como se ilustra en la figura 18.30, a y b, respectivamente.

Supóngase que el capacitor  $C$  está inicialmente descargado, y que el interruptor S se conecta hacia la izquierda para completar el circuito de la figura 18.30, a, en  $t = 0$ . En el sentido indicado fluye una corriente  $I$  que disminuye en el tiempo a medida que se carga el condensador, de cayendo asintóticamente a cero a medida que la diferencia de potencial a través del capacitor se aproxima a la FEM/ $\mathcal{E}$ . Se puede describir matemáticamente lo que sucede expresando la ley II de Kirchhoff para el circuito, recordando que la diferencia de potencial a través del capacitor en cualquier tiempo  $t$  está relacionada con la carga  $q$  en el mismo en ese tiempo, mediante

$$\Delta V_c = \frac{q}{C} \quad (18.9.1)$$

De esta manera, como la diferencia de potencial a través del resistor es  $IR$  se puede escribir

$$\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} = 0$$

o

$$IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad (18.9.2)$$

Esta ecuación difiere de las ecuaciones de circuito anterior en, sólo en que tanto  $I$  como  $q$  son *funciones del tiempo*. Puesto que  $q$  es cero al tiempo  $t = 0$ , es claro que el valor instantáneo de  $I$  cuando  $t = 0$  debe estar dado por

$$I(0) = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad (18.9.3)$$

También, como no fluye carga a través del condensador, la rapidez con la que se acumula la

carga  $q$  en las placas está relacionada con la corriente  $I$  mediante

$$\frac{dq}{dt} = I \quad (18.9.4)$$

De aquí es evidente que (18.9.2) es en realidad una ecuación *diferencial*, que puede resolverse con facilidad diferenciando primero ambos miembros con respecto al tiempo y reemplazando  $dq/dt$  por  $I$ , de acuerdo con (18.9.4), para obtener

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC} I \quad (18.9.5)$$

Multiplicando ambos miembros por  $dt$  y dividiendo entre  $I$ , la expresión anterior queda:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt \quad (18.9.6)$$

Ahora se integrará esta ecuación entre los límites  $t = 0$  cuando  $I = I_0 = \mathcal{E}/R$ , y un tiempo posterior  $t$  cuando la corriente tenga un valor correspondiente  $I(t)$ . De esta manera se obtiene

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

de donde

$$[\ln I]_{I_0}^I = \ln I - \ln I_0 = -\frac{1}{RC} [t]_0^t$$

o bien,

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{t}{RC} \quad (18.9.7)$$

recordando que la diferencia de los logaritmos de dos cantidades es el logaritmo de su cociente. Exponencializando ambos miembros de esta ecuación, se puede escribir finalmente, notando de (18.9.3) que  $I_0 = \mathcal{E}/R$ ,

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \quad (18.9.8)$$

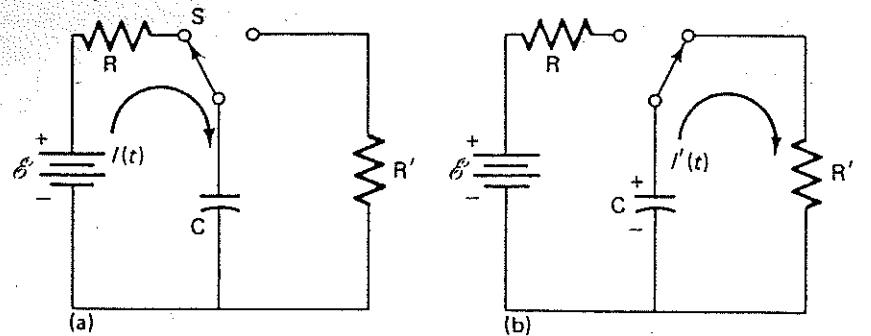


FIGURA 18.30. Circuito  $R-C$  (de resistencia y capacitancia) en serie simple. En (a), la FEM  $\mathcal{E}$  produce la carga del capacitor a través de la resistencia  $R$ . En (b), el capacitor se descarga a través de la resistencia  $R'$ .

Ahora puede determinarse la carga  $q$  en el condensador utilizando (18.9.4), que expresa que

$$dq = I(t) dt = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} dt \quad (18.9.9)$$

Luego puede integrarse esto entre los límites  $t = 0$  cuando  $q$  también es cero y el condensador está inicialmente descargado, y un tiempo posterior  $t$  cuando  $q$  tiene el valor  $q(t)$ . De esta manera,

$$\int_0^q dq = \frac{\mathcal{E}}{R} \int_0^t e^{-t/RC} dt$$

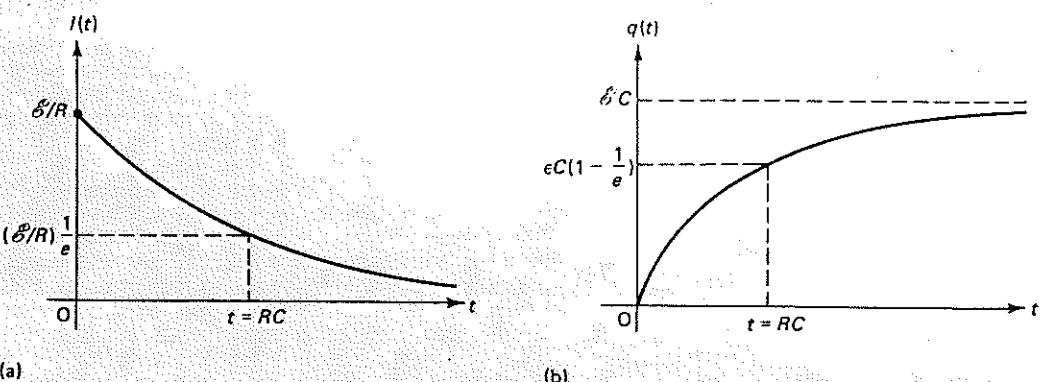


FIGURA 18.31. Gráficas de (a) intensidad de corriente versus tiempo y (b) carga del condensador versus tiempo, correspondientes al circuito de la figura 18.30 (a).

descargado, no hay diferencia de potencial a través de él cuando  $t = 0$ , por lo que inicialmente se aplica al resistor toda la diferencia de potencial debida a la FEM, lo que da lugar a una corriente inicial  $\mathcal{E}/R$ . A medida que la carga fluye hacia el capacitor, se eleva la diferencia de potencial, lo que hace que haya una tensión correspondientemente más pequeña en la resistencia, y por tanto se reduce la intensidad de la corriente. A medida que el capacitor se carga del todo, la caída de potencial en él se approxima al valor de la FEM y la caída de potencial en la resistencia se aproxima a cero, al igual que la corriente en el circuito. Por último se carga el condensador a una diferencia de potencial  $\Delta V = \mathcal{E}$  volts y ya no fluye corriente. De (18.9.8) o de la figura 18.31, es evidente que después de cierto tiempo  $t = RC$  (en segundos), la corriente ha disminuido hasta  $1/e$  de su valor inicial y la diferencia entre la carga  $q$  y su valor final ha disminuido hasta  $1/e$  de dicho valor. A la cantidad  $RC$  se le conoce como *constante de tiempo* del circuito, ya que expresa la escala de tiempo en que dura la corriente y se carga el condensador.

Si después de cargado completamente el capacitor hasta la diferencia de potencial de  $\mathcal{E}$  volts se pasa el interruptor a la posición del lado derecho, como se ve en la figura 18.30, b, la carga del condensador fluirá como una corriente a través de la resistencia  $R'$  hasta que se descargue aquél. Se puede calcular la dependencia de la corriente y la carga en función del tiempo después de cerrado el interruptor, por métodos parecidos a los anteriores. Suponiendo que el interruptor se cierra al tiempo  $t = 0$ , en el que se ahora se supone que el capacitor está cargado a un potencial de  $\mathcal{E}$  volts, la ley II de Kirchhoff aplicada al circuito del lado derecho en la figura 18.30, b, recorrido en el sentido de la corriente, dice que

$$-I'R' + \frac{q}{C} = 0 \quad (18.9.11)$$

Se notará que en este caso el capacitor se comporta en forma parecida a una fuente de FEM y la diferencia de potencial a través de sus placas es lo que hace fluir la corriente. Pero no

conviene considerar al capacitor como una fuente, ya que no convierte energía eléctrica en energía eléctrica, sino que sólo transforma un modo de energía eléctrica en otro al convertir la energía potencial del campo electrostático entre sus placas, en energía cinética de deriva de los electrones en un circuito conductor. Sin embargo, en este caso la rapidez con la que varía en el tiempo la carga en las placas es *negativa*, debido a que dicha carga disminuye continuamente en el tiempo.

Por tanto, debe relacionarse el cambio (negativo) de carga  $dq$  con la corriente (que es positiva) mediante<sup>7</sup>

$$-\frac{dq}{dt} = I' \quad (18.9.12)$$

Ahora puede diferenciarse (18.9.11) con respecto al tiempo y utilizar (18.9.12) para relacionar  $I'$  y  $dq/dt$ , obteniendo así

$$\frac{dI'}{dt} = -\frac{I'}{R'C} \quad (18.9.13)$$

que se puede reordenar como antes para tener

$$\frac{dI'}{I'} = -\frac{1}{R'C} dt \quad (18.9.14)$$

Ahora es posible integrar esto desde  $t = 0$  cuando  $q$  tiene el valor inicial  $q_0 = \mathcal{E}C$  (por lo que, de acuerdo con (18.1.11),  $I'$  debe tener el valor inicial  $I'_0 = \mathcal{E}/R'$ ) hasta un tiempo posterior  $t$ , cuando la corriente tiene un valor  $I'(t)$ . El resultado es

$$\int_{I'_0}^{I'} \frac{dI}{I} = -\frac{1}{R'C} \int_0^t dt \quad (18.9.15)$$

<sup>7</sup> Para comprender por qué anteriormente se utilizó  $I = dq/dt$  y ahora se utiliza la relación  $I' = dq/dt$ , el lector debe tener cuidado de notar que en esta sección se utilizan (18.9.4) y (18.9.11) *no* para relacionar el flujo de carga por un punto dado en un conductor, con la corriente en el mismo, como (18.1.2) en la sección 18.1, sino para relacionar la corriente en un circuito dado con la cantidad de carga que se ha acumulado en las placas de un capacitor en el circuito, lo que es un concepto muy distinto.

de donde, exactamente como antes,

$$I'(t) = I'_0 e^{-t/R'C} = \frac{\delta}{R'} e^{-t/R'C} \quad (18.9.16)$$

De (18.9.12) y (18.9.16) se puede expresar la carga  $q$  en el capacitor como

$$dq = -I'(t) dt = -\frac{\delta}{R'} e^{-t/R'C} dt \quad (18.9.17)$$

que puede integrarse desde  $t = 0$  cuando  $q = q_0 = \delta C$  hasta un tiempo posterior  $t$  cuando  $q$  tiene el valor  $q(t)$ . En consecuencia, se tiene

$$\int_{q_0}^q dq = -\frac{\delta}{R'} \int_0^t e^{-t/R'C} dt \quad (18.9.18)$$

de donde

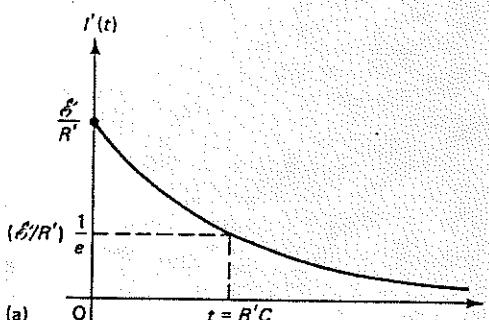
$$[q]_{q_0}^q = -\frac{\delta}{R'} R'C [-e^{-t/R'C}]_0^t$$

$$q - \delta C = -\delta C (-e^{-t/R'C} + 1)$$

o finalmente,

$$q(t) = \delta C e^{-t/R'C}$$

En este caso, tanto la corriente como la carga en el capacitor decrecen exponencialmente con la constante de tiempo  $R'C$ , como se ilustra en la figura 18.32. Ahora es fácil ob-



tener de (18.9.16) la diferencia de potencial a través del resistor  $R'$  en cualquier momento  $t$ , que es igual a  $I' R'$ . De la misma manera, de (18.9.19) se puede obtener la diferencia de potencial a través del capacitor en cualquier instante, la que es igual a  $q/C$ .

#### EJEMPLO 18.9.1

En el circuito de la figura 18.30 se carga un capacitor de capacitancia  $C = 2.0 \mu F$  mediante una FEM de 100 V a través de una resistencia  $R = 5000 \Omega$ . Hallar qué tiempo se necesita para cargar el capacitor hasta una diferencia de potencial igual a 99% de la creada por la FEM. Si posteriormente se descarga el condensador a través de una resistencia de 20 000  $\Omega$ , determinar la corriente inicial y la corriente a los 0.15 segundos. Se supone una diferencia de potencial inicial de 100 V en el condensador.

La tensión del capacitor está relacionada con la carga que lleva, por  $\Delta V_c = q/C$ . Pero durante el proceso de carga, esta cantidad se expresa en función del tiempo por (18.9.10), por lo que la diferencia de potencial se puede expresar como

$$\Delta V_c = \delta (1 - e^{-t/R'C})$$

Haciendo  $\Delta V_c$  igual a 0.99 $\delta$ , lo anterior queda como

$$0.99 = 1 - e^{-t/R'C}$$

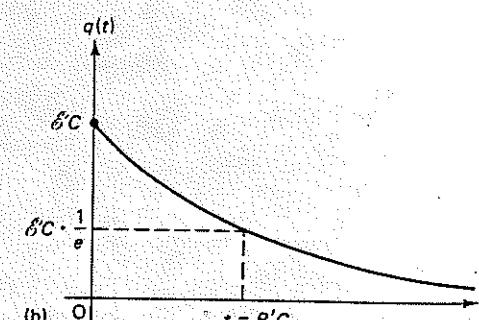


FIGURA 18.32. Gráficas de (a) intensidad de corriente versus tiempo y (b) carga del condensador versus tiempo, para el circuito de la figura 18.30 (b).

o sea,

$$e^{-t/R'C} = 0.01$$

Tomando el logaritmo natural de ambos miembros y despejando  $t$  se obtiene

$$t = -RC \ln 0.01 = RC \ln 100$$

ya que  $\ln(1/x) = -\ln x$ . Sustituyendo los valores numéricos dados de  $R$  y  $C$  se puede obtener, por último,

$$t = (5 \times 10^3)(2 \times 10^{-6})(4.605) = 0.0461 \text{ s}$$

Si el capacitor se carga a la diferencia de potencial  $\delta = 100 \text{ V}$  y luego se descarga a través de una resistencia de 20 000  $\Omega$ , la corriente está dada en función del tiempo por (18.9.16). Para  $t = 0$ , la corriente inicial es

$$I'(0) = \frac{\delta}{R'} = \frac{100}{20000} = 0.005 \text{ amp}$$

Después de transcurridos 0.15 segundos, la corriente será

$$\begin{aligned} I &= \frac{\delta}{R'} e^{-t/R'C} = 0.005 e^{-0.15/(2 \times 10^{-6})} \\ &= 0.005 e^{-3.75} = (0.005)(0.02352) \\ &= 0.0001176 \text{ amp} \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 18.9.2

Se ha mencionado que ya que como un capacitor almacena energía eléctrica, en cierto sentido se comporta como una fuente de FEM. Entonces, ¿por qué se utilizan acumuladores en vez de capacitores como fuentes de corriente para usos en el arranque de automóviles?

Para poner en marcha un automóvil se necesita una corriente de unos 200 A a 12 V, y sería posible suministrar esta corriente durante 3 min, quizás antes de descargar notablemente la fuente. En estas circunstancias la resistencia  $R$  del circuito de arranque será

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{12}{200} = 0.06 \text{ ohm}$$

Para suministrar una corriente de 200 A por descarga de un capacitor durante 3 min, se necesitaría una constante de tiempo igual a esta duración como mínimo, por lo que

$$RC = 180 \text{ s}$$

o sea,

$$C = \frac{180}{R} = \frac{180}{0.06} = 3000 \text{ F}$$

Esta es una capacitancia muy grande. En circunstancias favorables, los dieléctricos que se utilizan en los capacitores pueden soportar un campo eléctrico próximo a  $10^7 \text{ V/m}$  antes de la ruptura. Si  $\Delta V$  es la diferencia de potencial entre las placas y  $d$  su separación, y si el valor del campo en el interior es de  $10^7 \text{ V/m}$ , entonces, suponiendo una configuración de placas paralelas

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{12}{d} = 10^7 \text{ V/m}$$

y la separación de las placas  $d$  debe ser al menos

$$d = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Al mismo tiempo, la capacitancia de un capacitor de placas paralelas está dada por

$$C = \frac{K \epsilon_0 A}{d}$$

en que  $K$  es la constante dieléctrica, que en un buen aislante puede ser aproximadamente de 4.0. Si ahora se toma  $C = 3000 \text{ F}$  y  $d = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}$  en esta ecuación, con  $K = 4.0$  resulta

$$3000 = \frac{(4.0)(8.854 \times 10^{-12})}{1.2 \times 10^{-6}} A$$

que indica que se debe tener

$$A = 1.016 \times 10^8 \text{ m}^2$$

Entonces, el volumen del capacitor debe ser

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= Ad = (1.016 \times 10^8)(1.2 \times 10^{-6}) \\ &= 122 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Apenas podría tenerse este volumen en un cubo de 5 m de lado. Por tanto, el capacitor de almacenamiento tendría que ser mucho mayor que el propio automóvil, lo que debe compararse con el tamaño de una batería o acumulador de plomo y ácido, que es capaz de almacenar tanta o más energía *química* en un volumen de unos 0.02 m<sup>3</sup>. La batería de plomo y ácido tiene una densidad de energía almacenada cerca de 6 000 veces mayor que la de un capacitor. Además hay otros problemas, el más importante de los cuales es que no existe ningún dieléctrico o aislante perfecto, por lo que incluso en los mejores dieléctricos hay corrientes de escape que descargan el capacitor interíormente después de cierto tiempo, indebidamente breve para la aplicación que aquí se considera.

El uso de acumuladores de plomo y ácido como fuente primaria de energía para operar automóviles se ha considerado cuidadosamente, e incluso se ha puesto en práctica en ocasiones. Pero aunque las baterías proporcionan densidades de energía almacenada más altas que los capacitores, aun así no pueden almacenar tanta energía por unidad de volumen como la que se obtiene de la combustión de hidrocarburos como la gasolina o el petróleo Diesel. Por tanto, aunque proporcionan suficiente energía para el arranque de motores de combustión interna y la operación de su equipo auxiliar, su uso como *unidades de almacenamiento primario de energía* para las aplicaciones automotrices es cuando mucho marginal. En la actualidad se lleva a cabo extensa investigación científica con el propósito de dar a las baterías mejores características de almacenamiento de energía, y para desarrollar las *pilas eléctricas de combustible* que convierten directamente la energía química de hidrocarburos en energía eléctrica. De disponerse de tales unidades a costos razonables, sería posible producir automóviles eléctricos prácticos, que eliminaran parte del ruido y la contaminación atmosférica que se tienen ahora gracias al uso tan amplio de los vehículos con motor de combustión interna.

## RESUMEN

Siempre que existe un campo eléctrico dentro de un conductor ocurre un flujo de carga que

se conoce como *corriente eléctrica*. La intensidad  $I$  de la corriente en un conductor se refiere a la cantidad de carga  $dq$  que pasa por un punto dado en el conductor, durante un tiempo  $dt$ . Por tanto, la corriente es una cantidad *escalar* definida por

$$I = dq/dt$$

La unidad de corriente es el *ampere* (A) que equivale a un coulomb/segundo.

La *densidad de corriente* es una cantidad *vectorial* cuya dirección es la del flujo de las cargas en cualquier punto dentro del conductor, y su magnitud es la corriente por unidad de área a través de un área infinitesimal  $da$  orientada normalmente al flujo de carga en ese punto; esto quiere decir que la corriente  $dI$  a través de una superficie  $da$  que puede no ser normal al flujo de las cargas se puede expresar como

$$dI = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da$$

en que  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a  $da$ . La corriente total  $I$  que fluye a través de una superficie  $S$  puede obtenerse integrando la densidad de corriente sobre la superficie, de donde

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da$$

Para el caso de un conductor de área transversal  $A$  que lleva una corriente con densidad uniforme  $j$ , esto quiere decir

$$j = \frac{I}{A}$$

Las unidades de la densidad de corriente son A/m<sup>2</sup> o A/cm<sup>2</sup>. La antedicha densidad está relacionada con la densidad de carga  $\rho$  y su velocidad promedio de flujo  $v$  por

$$j = \rho v$$

En el caso de un conductor en que la corriente fluye debido al movimiento de electrones libres,  $j = -ne$ , en que  $n$  es el número de electrones de valencia por unidad de volumen.

Entonces, la ecuación anterior se reduce a

$$j = -nev$$

Para mantener un flujo estable de corriente dentro de un conductor se necesita una fuente de *FEM* (*fuerza electromotriz*). Una FEM aumenta la energía potencial de las cargas por medios no electrostáticos. Se puede definir la FEM como una diferencia de potencial  $\Delta V$ , atribuible a fuerzas no electrostáticas, capaz de establecer una corriente constante en un circuito cerrado. De esta definición es evidente que la magnitud  $\mathcal{E}$  de la FEM y la diferencia de potencial no electrostática que crea es

$$\mathcal{E} = \Delta V$$

La potencia que suministra una FEM  $\mathcal{E}$  a un circuito es

$$P = \mathcal{E}I = I\Delta V$$

La densidad de corriente en muchos conductores es directamente proporcional al campo eléctrico en cada punto. De esas sustancias se dice que son conductores *óhmicos* o que obedecen la ley de Ohm. En forma matemática, la ley de Ohm indica que

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{o bien,} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = \rho \mathbf{j}$$

en que a los factores de proporcionalidad  $\sigma$  y  $\rho$  se les conoce, respectivamente, como *conductividad* y *resistividad* eléctricas de material conductor. Nótese que el símbolo  $\rho$  se utiliza tanto para una práctica desafortunada pero la densidad de carga eléctrica como para la resistividad, lo que es muy extendida. El comportamiento óhmico de los conductores puede comprenderse físicamente suponiendo que los electrones libres sufren aceleración de acuerdo con las leyes de Newton, pero que experimentan colisiones frecuentes cuyo efecto es en promedio, reducir a cero la velocidad de derivada recibida por ellos del campo eléctrico, regresándolos así a la condición de equilibrio térmico y disipando su energía de derivada como calor.

En un conductor óhmico de sección transversal uniforme  $A$  y longitud  $l$ , la corriente y caída de potencial están relacionadas mediante

$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

en que la *resistencia*  $R$  se define por

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{\rho l}{A}$$

y  $\rho$  es la resistividad eléctrica. La relación  $I = \Delta V/R$  también es válida en otros conductores óhmicos, y en todos los casos la resistencia es el factor de proporcionalidad que relaciona a  $I$  y  $\Delta V$ .

Para las resistencias conectadas *en serie* se tiene una resistencia equivalente igual a la suma de las resistencias individuales, por lo que

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

La resistencia equivalente de resistencias conectadas *en paralelo* está dada

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Las resistencias en serie llevan la misma corriente, mientras que en paralelo todas experimentan la misma diferencia de potencial.

La potencia disipada en el *calentamiento por efecto Joule* en una resistencia se expresa por

$$P = I^2 R = I \Delta V = (\Delta V)^2 / R$$

Los circuitos que no es posible descomponer en combinaciones simples de resistencias en serie y en paralelo pueden analizarse aplicando las *leyes de Kirchhoff*, que se expresan como sigue:

- I. La suma algebraica de las corrientes que llegan a un nodo o punto de unión de conductores es cero.
- II. La suma algebraica de elevaciones y caídas de potencial alrededor de cualquier circuito cerrado es cero.

Utilizando las leyes de Kirchhoff se pueden investigar las relaciones de potencial y corriente que dependen del tiempo en circuitos simples de resistencia y capacitancia (*RC*). Se encuentra que la carga y descarga de combinaciones *RC* en serie se presentan como funciones exponenciales del tiempo, y que la escala temporal en que ocurren la carga y descarga de un capacitor, y el aumento y disminución de la corriente, está descrita por una *constante de tiempo*  $t_0$  dada por

$$t_0 = RC$$

## PREGUNTAS

- Describa brevemente las principales diferencias entre los materiales metálicos y los no metálicos.
- ¿Qué carga pasa a través de un tubo de rayos X durante una exposición de 0.1, cuando la corriente es de 150 miliampères (mA).
- ¿Es cierto que un conductor tiene cargas libres sólo si tiene exceso de carga?
- En electrostática siempre se utiliza el hecho de que el campo eléctrico dentro de un conductor es cero. ¿Cómo se concilia esto con la necesidad de tener un campo no nulo dentro de un conductor para producir un flujo de corriente?
- ¿Es cierto que la relación  $R = \Delta V/I$  es una expresión de la ley de Ohm, o también debe satisfacer alguna otra condición?
- Describa la principal diferencia entre una FEM y un "voltaje". Dé algunos ejemplos en que la existencia de una tensión (diferencia de potencial) no indique la presencia de una FEM.
- Si se establece una corriente en un conductor y luego se interrumpe repentinamente, quitando la FEM, ¿cuánto tiempo pasa para que la corriente decaiga a cero?
- ¿Qué es un superconductor? Describa su comportamiento eléctrico.
- Dos conductores tienen la misma resistencia y la misma longitud pero uno de ellos tiene doble sección transversal que el otro. ¿Cómo están relacionadas las conductividades de los dos?
- ¿Puede imaginar ejemplos de flujos, distintos al de la carga eléctrica, en los que la resistencia al flujo sea proporcional a la longitud e inversamente proporcional al área?
- Describa de manera cuidadosa cómo se sabe cuando algunos elementos (como los resistores) están en serie. Haga lo mismo en el caso de elementos en paralelo.

- Explique cualitativamente por qué la resistencia equivalente de una combinación de resistores en serie siempre es mayor que cualquiera de las resistencias individuales. En el caso de una combinación en paralelo, explique por qué la resistencia equivalente es menor que cualquiera de las resistencias conectadas.
- ¿Por qué es más probable que se funda el filamento de una lámpara eléctrica al encenderlo que cuando ya está en operación?
- Se especifica un fusible para "10 amperes". ¿Qué significa eso? ¿Por qué es peligroso reemplazar un fusible de 10 A por uno especificado para 20 A?
- Describa lo que sucede a la intensidad de la luz de cada lámpara en un circuito en serie, al agregar más lámparas.
- Una cierta cantidad de lámparas está en paralelo. Describa lo que sucede a la intensidad de cada una, al agregar más lámparas.
- La energía eléctrica se transmite a grandes distancias a alto voltaje. Explique por qué.
- Sería muy peligroso afeitarse con una rasuradora eléctrica que se conecte a un receptáculo de pared, mientras se toma un baño. Sin embargo, el peligro disminuye si la rasuradora funciona con pilas. Explique.
- De una explicación, a nivel atómico, de las diferencias entre los procesos que participan en la conducción de la electricidad en un metal y en el gas ionizado de un tubo luminoso de neon.
- Puede sugerir un posible diseño para un "transformador de CD" que aumente el voltaje de una batería en un factor grande, utilizando resistores, capacitores e interruptores?

## PROBLEMAS

- Un conductor de sección transversal uniforme lleva una corriente de 5.00 A. ¿Cuántos electrones fluyen por un punto dado durante 1 min?
- En un proceso de galvanostegia (o electrochapado) se han de transmitir 40 000 C a una corriente de 10 A. ¿Qué tiempo se necesita?
- La densidad del cobre es de 9.0 g/cm<sup>3</sup> y tiene un electrón de conducción por átomo. En un alambre cuya sección transversal circular uniforme tiene 0.1 cm de diámetro, se establece una corriente constante de 50 A. (a) Determine la densidad de corriente  $j$ . (b) ¿Cuál es la velocidad media de los electrones?
- La resistividad del cobre a 20°C es de  $1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . ¿Cuál es a esta temperatura la resistencia de un alambre de cobre de

5 m de longitud, si el radio de su sección transversal circular es de 0.1 cm?

- Un alambre de aluminio de longitud  $l$  y sección transversal circular con radio  $r$  tiene una resistencia  $R$ . Determine el factor por el que queda multiplicada la resistencia en cada uno de los siguientes casos: (a) Se duplica la longitud del alambre. (b) Se triplica la longitud del alambre y se disminuye el radio a  $r/3$ . (c) Se duplican  $l$  y  $r$ .
- La densidad de corriente  $j$  en un alambre largo y recto con sección transversal circular de radio  $R$ , varía con la distancia desde el centro del alambre, de acuerdo con la relación  $j = \lambda r$ , en que  $\lambda$  es una constante de proporcionalidad. Demuestre que la corriente que fluye a través del alambre está dada por  $i = 2\pi\lambda R^3/3$ .
- El área transversal de un riel (o carril) de acero es de 30 cm<sup>2</sup>. Si la resistividad de este metal es de  $6.0 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ , halle la resistencia de un riel de 6 km de largo.
- Las dimensiones de un bloque de hierro como un sólido de sección rectangular son de 2 cm  $\times$  3 cm  $\times$  100 cm. Su resistividad a 20°C es igual a  $1.0 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ . Determine la resistencia entre los tres pares de caras opuestas, es decir, entre los dos extremos, entre los dos lados y entre las partes superior e inferior.
- Una barra de cobre mide 0.1 m  $\times$  0.3 m  $\times$  5 m. La resistividad del cobre es de  $1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Calcule la resistencia de la barra si la corriente fluye a lo largo de la misma.
- Una barra metálica con 12 m de longitud contiene  $6 \times 10^{25}$  electrones libres. Si en la barra fluye una corriente de 3 A, evalúe la velocidad de deriva de los electrones.
- La resistividad de la plata es de  $1.6 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  a 20°C. Se quiere hacer una bobina con 25 km de alambre de ese metal de 1 mm de diámetro. ¿Cuál es su resistencia? Si el alambre se estira uniformemente hasta una longitud de 50 km, ¿qué valor tendrá la nueva resistencia?
- La densidad del aluminio es de  $2.7 \text{ g/cm}^3$  y su masa atómica de 27 g/mol; cada átomo tiene tres electrones de conducción. Halle el número de electrones libres de conducción por cm<sup>3</sup>. Si en un alambre de aluminio de 1 mm<sup>2</sup> de área transversal, fluye una corriente de  $10^{-3}$  A, obtenga la velocidad de deriva de los electrones.
- La resistencia de un alambre de sección transversal uniforme es de 2 Ω y su longitud de 5 m. Si la resistividad del material es de  $1.6 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ , ¿cuál es el área de la sección transversal del alambre?
- La atmósfera lleva cargas positivas hacia la superficie terrestre y retira de ésta cargas negativas. La corriente total es de 1 800 A. Suponiendo que el flujo de carga es simétrico con respecto a la superficie de la Tierra, halle la magnitud de la densidad de corriente en dicha superficie. El campo eléctrico en la mencionada superficie tiene un valor de 100 V/m, en dirección hacia aquélla. Determine la conductividad eléctrica del aire cerca de la superficie terrestre.
- La banda de un generador van de Graaff es de 75 cm de ancho y se mueve a 30 m/s. Si transmite una corriente de  $2 \times 10^{-4}$  A a la esfera colectora, obtenga la densidad superficial de cargas en la banda.
- Dentro de límites restringidos de temperatura, la resistividad de un material varía según  $\rho(T) = \rho(T_0)[1 + \delta(T - T_0)]$ , en que  $T_0$  es cierta temperatura de referencia y  $T$  es la temperatura a la que se requiere la resistividad. La constante  $\delta$  se conoce como coeficiente de temperatura de la resistividad. Para el cobre y la plata se tiene

$$\rho_{\text{Cu}}(20^\circ\text{C}) = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\delta_{\text{Cu}} = 3.9 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\rho_{\text{Ag}}(20^\circ\text{C}) = 1.6 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\delta_{\text{Ag}} = 3.8 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

- (a) A qué temperatura la resistividad de la plata es igual a la del cobre a 20°C. (b) Una barra tiene 12.00 Ω de resistencia a 40°C. Determine su resistencia si se calienta hasta 100°C. Desprecie toda dilatación posible de la barra.

- Se calienta una barra de cobre desde 20°C hasta 200°C y se estira uniformemente al doble de su longitud inicial, no cambiando su volumen. Si inicialmente la barra media 1 m de longitud y su resistencia era de 0.02 Ω, evalúe (a) al área transversal de la barra antes de ser estirada, y (b) la resistencia de la misma después de su estiramiento y de la elevación de su temperatura.
- A 20°C, un alambre de cobre de 5 m de longitud con área transversal de 0.1 cm<sup>2</sup> lleva una corriente de 2 A. Calcule la diferencia de potencial entre los extremos del alambre.
- Una bobina circular de alambre de aluminio de 0.254 mm de diámetro tiene 400 vueltas y su diámetro medio es de 17.78 mm. La resistividad del aluminio a 20°C es de  $2.8 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ . Si entre los extremos de la bobina se aplica una tensión de 12 V, halle la corriente que fluye y también del calor disipado durante un intervalo de 5 min.
- Un calentador de inmersión de 350 W opera en una línea de 120 V, y se utiliza para elevar la