

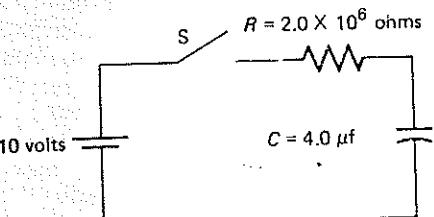
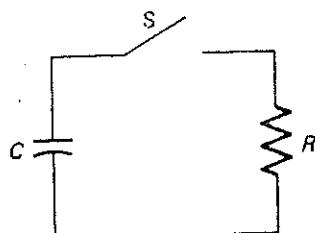
50. Explique, con cálculos adecuados, cómo puede convertirse un galvanómetro de 0 a $50 \mu\text{A}$ (microamperes) con 400Ω de resistencia en un instrumento que indique (a) de 0 a 3 A, (b) de 0 a 10 V, (c) de 0 a 5 A, (d) de 0 a 30 V.
51. Un capacitor C se carga a una tensión o diferencia de potencial ΔV . En $t = 0$ se cierra un interruptor, completando un circuito con una resistencia R en serie. Entonces, la carga en el capacitor está dada por

$$q = q_0 e^{-t/RC}$$

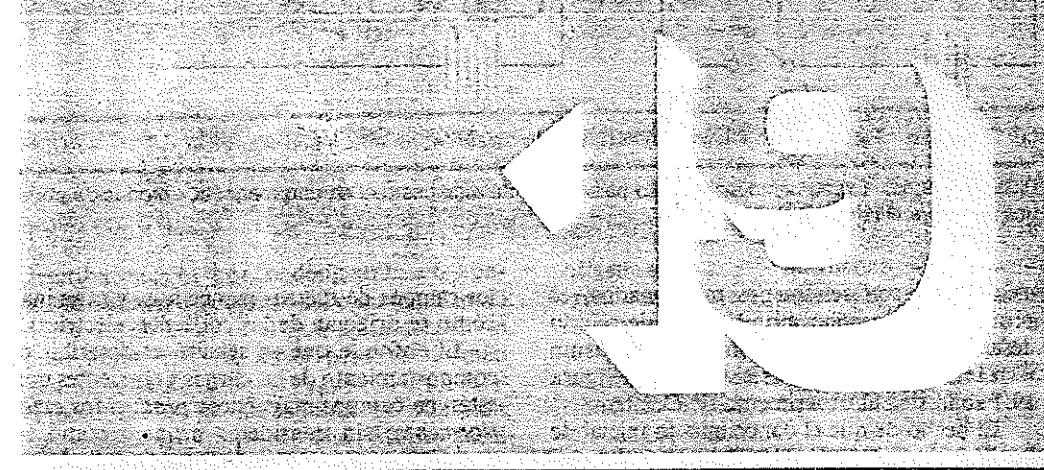
Calcule la energía total disipada en la resistencia y demuestre que es igual a la energía almacenada inicialmente por el capacitor.

52. Se carga un capacitor de $5 \mu\text{F}$ a 300 V y luego se descarga a través de un resistor de $75\,000 \Omega$. Despues de 3 s de descarga, evalúe la carga remanente en el capacitor, la corriente a través de la resistencia y la intensidad a la que se produce calor por efecto Joule en la resistencia.
53. El capacitor en un circuito RC se carga hasta 0.1% de su carga máxima. ¿Cuántas constantes de tiempo transcurren desde que comenzó el proceso de carga? En el diagrama, un capacitor de $2 \times 10^{-6} \text{ F}$ tiene una carga de $3 \times 10^{-6} \text{ C}$. El valor de la resistencia es de $4 \times 10^6 \Omega$. ¿Cuál es la carga del capacitor 24 s después de cerrado el interruptor? Halle la corriente que pasa por la resistencia inmediatamente después de cerrado el interruptor.

54. Se conecta una batería de 12 V en serie con un resistor de resistencia $R = 3.0 \times 10^6 \Omega$ y un capacitor con capacidad $C = 2.0 \mu\text{F}$. Evalúe la constante de tiempo del circuito. Cuando la carga del capacitor es un medio del valor máximo, ¿qué carga tiene?
55. En el circuito del diagrama se cierra el interruptor en $t = 0$. (a) Trace una gráfica del voltaje ΔV_c del capacitor en función del tiempo. (b) Calcule la carga en el capacitor después de transcurrido un tiempo muy largo. (c) ¿Cuánta energía proporciona la batería en el proceso de carga? (d) ¿Cuánta energía queda almacenada en el capacitor cuando está cargado totalmente? (e) ¿A dónde va el resto de la energía?



CAMPOS MAGNÉTICOS DE CORRIENTES CONSTANTES



19.1 Introducción

El fenómeno del magnetismo se conoce casi desde hace tanto tiempo como la electricidad estática. Los antiguos griegos conocían las fuerzas magnéticas que ejercían las sustancias imantadas o imanadas permanentemente, como la magnetita, sobre objetos hechos de hierro, y los chinos ya utilizaban brújulas o agujas magnéticas hacia el año 1 000 d.C. En el tiempo en que ocurrió la guerra de independencia de Estados Unidos, la brújula ya era un instrumento náutico suficientemente confiable para que los barcos pudieran navegar por todo el mundo, y se había delimitado con exactitud el magnetismo terrestre. Por entonces ya se sabía que los polos magnéticos

terrestres no coinciden con los del eje de rotación, de manera que se habían trazado mapas exactos de la declinación magnética, en los que se señalaba la desviación del "norte magnético" con respecto al norte verdadero. Durante la segunda parte del siglo XIX se especuló muchísimo acerca de las posibles relaciones entre los fenómenos eléctricos y los magnéticos.

Pero sólo hasta 1819 el científico danés Hans Christian Oersted (1777-1851), utilizando la recién descubierta "pila voltaica" para establecer una corriente constante, descubrió que una aguja de brújula se desviaba en la proximidad de un conductor por el que fluye una corriente eléctrica. La implicación de este experimento, es decir, que el magnetismo y la

CAMPOS MAGNÉTICOS DE CORRIENTES CONSTANTES

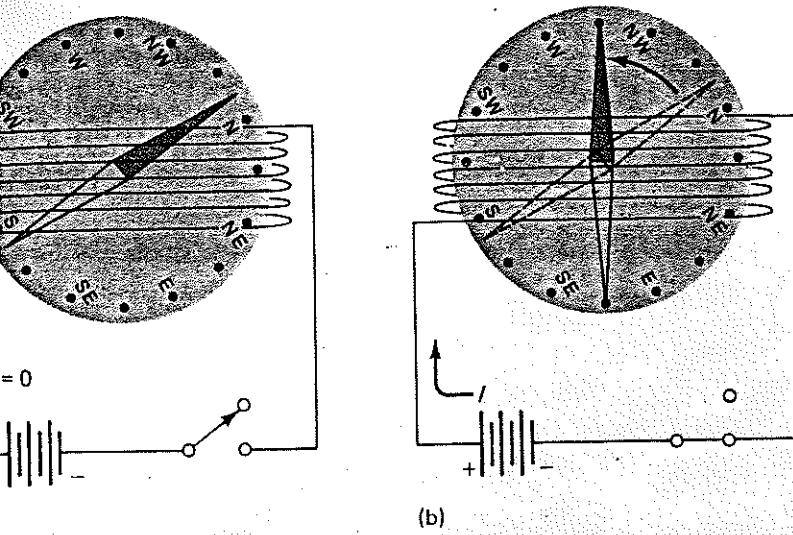


FIGURA 19.1. Experimento de Oersted para poner de manifiesto el campo magnético producido por una corriente eléctrica.

Electricidad y magnetismo son fenómenos relacionados, es decir, la electricidad dio lugar a un periodo de rápido desarrollo de la comprensión del magnetismo en relación con la electricidad. En la figura 19.1 se ilustra el experimento de Oersted. El hecho de que el conocimiento inicial de las fuerzas magnéticas se debiera a imanes permanentes naturales tendió a oscurecer la relación entre el magnetismo y la electricidad, en vez de aclararla. Sólo después de un período relativamente largo, se comprendió de manera general que todos los campos magnéticos, incluso los asociados a imanes permanentes, se deben al flujo de corrientes eléctricas. Los campos magnéticos de las sustancias magnetizadas permanentemente se deben a las corrientes que circulan dentro de los átomos de la sustancia y que se suman en la superficie del imán para producir una corriente superficial equivalente, como lo ilustra la figura 19.2. La corriente superficial es la que constituye la fuente del campo magnético. El magnetismo permanente, que se conoce también como *omagnetismo*, es un tema complejo que no tratará de explicar en detalle, aunque se abordará más de ello en el Capítulo 21. Por tanto, el objetivo será definir y comprender

los campos de fuerzas magnéticas, y examinar cómo se originan de las corrientes eléctricas.

El enfoque que se seguirá es describir el comportamiento de las cargas y corrientes que están en campos magnéticos *producidos exteriormente*, sin considerar primero cómo se crea el campo magnético. Este procedimiento tiene la ventaja de que permite formular una definición razonable de la intensidad de un campo magnético desde el principio. Una vez logrado lo anterior, se atenderá la descripción y comprensión de los campos magnéticos producidos por cargas móviles y por corrientes que fluyen en conductores, y a explicar las fuerzas entre conductores portadores de corriente.

19.2 Fuerzas y campos magnéticos: dipolos magnéticos

Mucho antes del descubrimiento por Oersted del electromagnetismo ya se habían establecido ciertos hechos básicos relativos a las fuerzas entre los polos de los imanes y el comportamiento de las sustancias magnéticas. Al

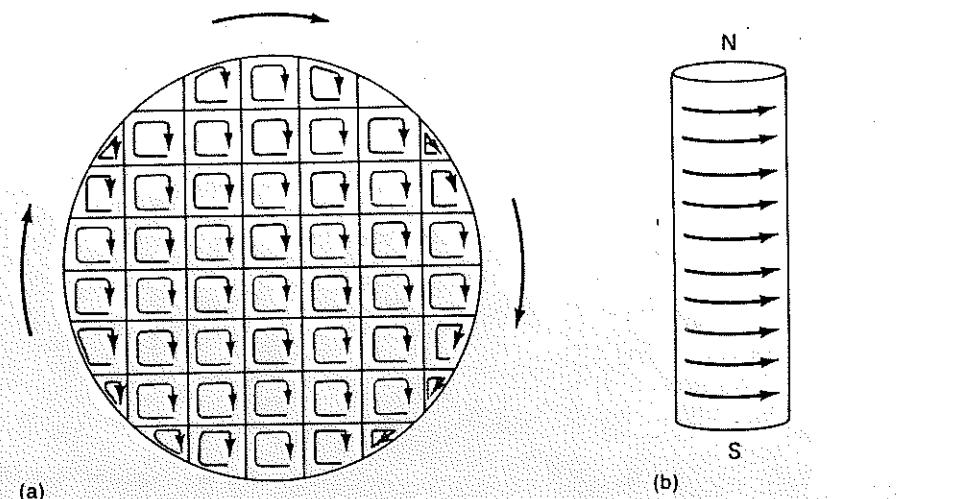


FIGURA 19.2. Diagrama que ilustra en (a) las corrientes atómicas circulantes. En los límites interiores indicados, estas corrientes se acumulan o cancelan mutuamente, pero en la superficie se suman para producir una corriente de magnetización superficial equivalente, que se representa en (b).

describir estos hechos, se designarán a los polos de un imán como norte (N) o sur (S). El polo norte de un imán es el que apunta hacia el polo norte terrestre aquél permite al imán girar libremente como una aguja de brújula, y el polo sur es el que apunta en dirección contraria en esas circunstancias. Mucho antes de que naciera Oersted ya se sabía que los polos magnéticos opuestos se atraen mutuamente y que los polos iguales se repelen entre sí. Haciendo mediciones cuantitativas de las fuerzas entre polos de imanes de barra largos y delgados (de manera que el extremo norte del imán esencialmente no esté interferido por los efectos creados por su propio polo sur) ya se había reconocido que estas fuerzas de atracción y repulsión son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre los polos de los imanes. En muchos sentidos, las fuerzas entre polos magnéticos se asemejan a las fuerzas de Coulomb entre cargas eléctricas, especialmente en el sentido de que presentan la misma dependencia *inversa al cuadrado* de la distancia. Sería tentador suponer que hay cargas magnéticas positivas (N) y negativas (S) en los imanes que actúan, de acuerdo con la ley de las fuerzas de Coulomb, como

origen del campo magnético, exactamente igual como las cargas eléctricas son la fuente de los campos eléctricos. Pero es desafortunado que esto no resulte cierto, pues hasta ahora ha fracasado todo esfuerzo experimental para tratar de demostrar la existencia de tales cargas magnéticas. En electrostática no es difícil producir objetos con carga neta positiva o negativa. Basta con utilizar el pedazo de ámbar y la piel de gato o la barra de vidrio y la tela de seda para lograrlo. También es posible dividir o partir un dipolo eléctrico en dos partes, obteniendo así una porción cargada positivamente y otra con carga negativa. Por otra parte, *invariablemente los imanes tienen polos norte y sur de intensidades precisamente iguales*, por lo que esencialmente son *dipolos*. Más aún, cuando se corta en dos partes un imán de barra, en vez de obtenerse un polo norte y un polo sur aislados se obtienen dos mitades, cada una de las cuales tiene polos norte y sur de intensidad exactamente igual, como se ilustra en la figura 19.3. Se han ideado otros métodos más complejos para aislar las "cargas" magnéticas norte o sur, pero todos han resultado en el más rotundo fracaso, por lo que hay que

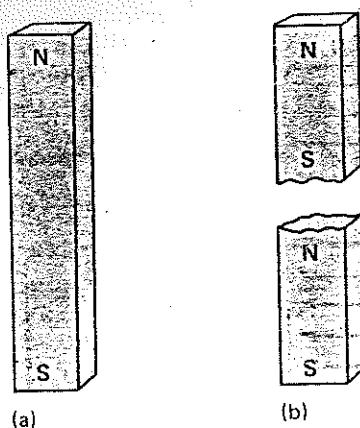


FIGURA 19.3. Cuando un imán se parte a la mitad, se producen dos imanes con polos norte y sur de igual magnitud. Esto indica que los campos magnéticos son de naturaleza esencialmente dipolar, y no provienen de cargas magnéticas libres.

concluir que aunque puedan tenerse dipolos magnéticos, no existen aisladamente los polos norte o sur. Este comportamiento notable puede explicarse afirmando que la *única fuente de magnetismo, incluso en los imanes permanentes, es una corriente eléctrica*. En las sustancias imantadas permanentemente, estas corrientes circulan dentro de los átomos de la

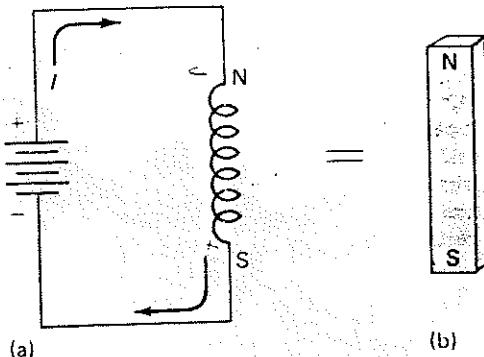


FIGURA 19.4. Una corriente eléctrica de intensidad constante en un inductor (o bobina) produce exactamente la misma clase de campo magnético que un imán de barra.

sustancia, como se mencionó antes y se ilustra en la figura 19.2.

Cuando una corriente eléctrica fluye a través de una bobina de alambre, como la de la figura 19.4, establece un campo magnético muy semejante al campo de un imán de barra. El campo que aparece tiene todas las características de un campo *dipolar* de Coulomb y sus propiedades son análogas en todos sentidos al campo eléctrico asociado a los dipolos eléctricos, como se estudió en el capítulo 16. Desde luego, en estas circunstancias no tiene sentido hablar de separar un polo norte de uno sur. Empero, los campos que se producen son en todo sentido idénticos a los originados por los imanes permanentes con los que se tiene familiaridad. Además, si se somete a la bobina portadora de corriente a un campo magnético *producido exteriormente*, como el de un imán de barra, le afectarán las fuerzas magnéticas de atracción o de repulsión igual como si fuera un imán permanente. En consecuencia, el polo norte de la bobina es atraído por el polo sur de un imán permanente y repelido por su polo norte. De hecho, ya que cualquier conductor en que fluye una corriente tiene asociado a él un campo magnético, *habrá una fuerza magnética en cualquier conductor con corriente que esté en un campo magnético producido exteriormente*. Por último, como una corriente se debe al movimiento de cualquier partícula cargada, *debe existir la acción de una fuerza magnética sobre cualquier carga móvil en un campo magnético producido exteriormente*.

Ahora debe examinarse el problema de cómo establecer una definición cuantitativa de la intensidad de un campo magnético. La manera más obvia de hacerlo es proceder en forma análoga al caso electrostático y expresar la intensidad del campo magnético en términos de la fuerza por unidad de "carga" magnética que experimentaría una "carga" de tal clase colocada en el campo. Pero como hasta donde se sabe, no existen las cargas magnéticas, jamás podrá implementarse experimentalmente este procedimiento, por lo que es incongruente desde el punto de vista de la lógica e imposible desde el punto de vista operativo. Entonces, debe tratarse de encontrar alguna otra manera de lograr en esencia el

mismo propósito en forma que, al menos en principio, sea factible desde el punto de vista experimental.

Puede comenzarse recordando del estudio de la electrostática que el momento de rotación en un dipolo eléctrico cuyo momento dipolar es \mathbf{p} está dado por la ecuación (16.6.28) como

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (19.2.1)$$

De acuerdo con esta expresión, la magnitud del momento es

$$\tau = pE \sin \theta \quad (19.2.2)$$

en que θ es el ángulo entre el vector de campo \mathbf{E} y la dirección del momento dipolar. El momento se anula cuando $\theta = 0$, lo que significa que cuando el dipolo se alinea en la dirección del campo, no hay momento neto y el dipolo está en *equilibrio*. Por tanto, podría visualizarse la dirección del campo notando la dirección en que apunta un dipolo de prueba suspendido libremente, cuando está en equilibrio.

Puede adoptarse el mismo enfoque para reconocer la dirección del campo magnético. Se observa que tanto los electroimanes como los imanes permanentes se comportan como *dipolos magnéticos*. Se designará el *momento magnético dipolar* del imán mediante \mathbf{p}_m y por medio de \mathbf{B} al vector que representa el campo magnético, que en adelante se llamará *inducción magnética*. En el caso de un dipolo eléctrico, generalmente puede expresarse el momento como el producto de la carga eléctrica en uno de los extremos del dipolo por la longitud de éste. En el caso magnético, esto ya no es posible, pues no hay carga magnética como tal. Por tanto, sólo se cuenta con el *momento magnético \mathbf{p}_m* para describir el imán y sirve como el único parámetro fundamental que establece su intensidad. Sin embargo, más adelante se verá que este momento está relacionado con la corriente que actúa como fuente del campo y con la magnitud del circuito por el que fluye. Sería conveniente definir la inducción magnética \mathbf{B} como un campo que tiene las mismas propiedades con respecto a la carga magnética que tiene \mathbf{E} en relación con la carga eléctrica —o que tendría, si existiera la

carga magnética. En este caso, el momento de rotación en un dipolo *magnético* de intensidad \mathbf{p}_m en cualquier punto de un campo magnético \mathbf{B} producido exteriormente debe ser

$$\tau = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} \quad (19.2.3)$$

De nuevo, la magnitud de este momento de rotación es

$$\tau = p_m B \sin \theta \quad (19.2.4)$$

en que θ es el ángulo entre el eje del dipolo magnético y la dirección del campo de inducción magnética \mathbf{B} en el punto donde está ubicado el dipolo. Como antes, este momento se hace cero y se equilibra el dipolo suspendido libremente, cuando el eje del mismo está alineado paralelamente al vector inducción magnética \mathbf{B} .

Utilizando estas ideas como base, puede visualizarse el campo de inducción magnética \mathbf{B} notando la dirección que toma un pequeño dipolo magnético suspendido libremente (como una brújula,) en distintos puntos dentro del campo, como se ilustra en la figura 19.5. De esta manera se trazan fácilmente los dibujos de las líneas de fuerza magnéticas análogos a los que se estudiaron antes y que co-

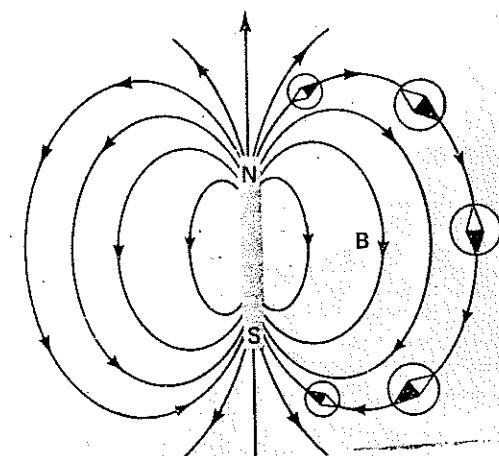


FIGURA 19.5. Líneas de fuerza magnética detectadas con ayuda de una brújula.

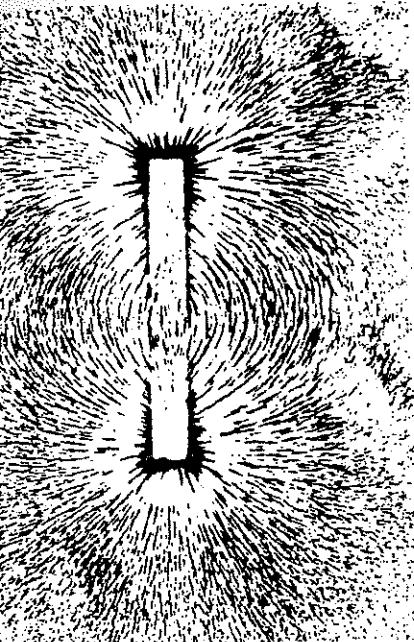


FIGURA 19.6. Patrón o figura formada por las líneas de fuerza eléctricas.

responden a las líneas de fuerza eléctricas. Se puede hacer visible la configuración de campos magnéticos esparciendo limaduras de hierro sobre una hoja de papel colocada en un campo magnético. Los momentos magnéticos atómicos en las limaduras se alinearán paralelamente al campo externo \mathbf{B} cuando se colocan en éste, lo que produce un momento dipolar magnético *inducido* en cada una de las limaduras, la que entonces se alinea con el campo externo, produciendo figuras como la de la figura 19.6, donde se aprecian claramente las líneas del campo. Este fenómeno del *magnetismo inducido* en muestras inicialmente no magnetizadas de materiales magnetizables permanentemente es al que se debe la atracción que ejercen los imanes, incluso de pequeños trozos de hierro no magnetizados. El efecto, ilustrado en la figura 19.7, se asemeja a la producción de un momento dipolar eléctrico inducido en un cuerpo conductor descargado, que se lleva a un campo eléctrico. Los mecanismos físicos responsables del magnetismo inducido difieren de aquellos de los que dependen los momentos eléctricos inducidos en los conductores, ya que en el caso eléctrico participa el movimiento de las cargas libres. En el Capítulo 21 se estudiará con más detalle

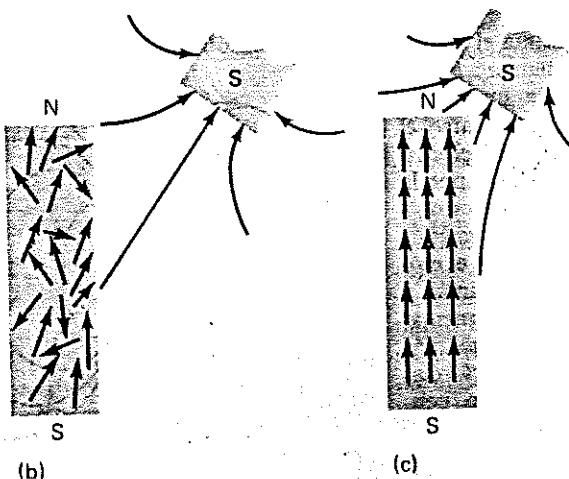


FIGURA 19.7. Alineación de imanes atómicos en un trozo de hierro inicialmente no magnetizado.

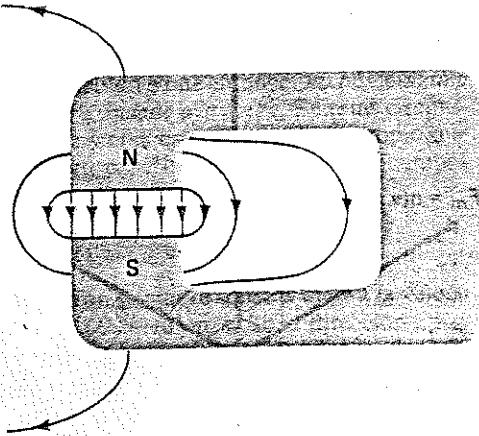


FIGURA 19.8. Campo magnético uniforme en el entrehierro que separa los polos norte y sur de un imán en herradura.

el magnetismo inducido y los efectos relacionados que tienen que ver con el comportamiento de los materiales magnetizables en los campos magnéticos.

Se puede obtener la magnitud del campo \mathbf{B} determinando el momento de rotación necesario para desplazar un dipolo de prueba un cierto ángulo respecto de la posición de equilibrio. De acuerdo con (19.2.4), este momento es proporcional a la magnitud de \mathbf{B} . Utilizando estos métodos, pueden trazarse sistemáticamente líneas de inducción magnética y determinar la magnitud relativa de \mathbf{B} en condiciones experimentales. En especial, se encontrarán determinadas disposiciones de fuentes de corriente o polos magnéticos que producen un campo \mathbf{B} de magnitud y dirección constantes, y tienen un papel particularmente importante en las investigaciones experimentales de los fenómenos magnéticos.

Dos de estas disposiciones tienen especial importancia. La primera puede obtenerse doblando un imán de barra a la forma de un anillo, dejando sólo una pequeña separación en sus extremos con límites planos paralelos, o sea, un espacio de aire entre los dos polos del imán. Entonces, el campo \mathbf{B} prácticamente será constante en magnitud y dirección dentro de este espacio, como se ilustra en la figura 19.8. Es evidente la analogía entre este caso y

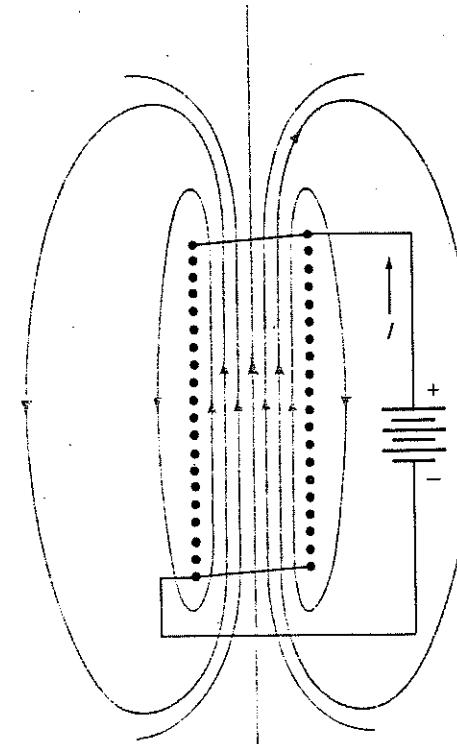


FIGURA 19.9. Campo magnético uniforme en el interior de una bobina larga de enrollamiento muy cerrado que conduce una corriente constante.

el del campo eléctrico de un capacitor de placas paralelas. La segunda disposición con la que se puede producir un campo de inducción magnética constante se obtiene en el interior de una bobina cilíndrica larga, de espiras muy cerradas con corriente. En este caso se encuentra que la intensidad del campo magnético es estrictamente proporcional a la corriente en la bobina y se puede cambiar a voluntad variando la intensidad de la corriente. Tal sistema se muestra en la figura 19.9. Más adelante se verá por qué esta configuración especial lleva a un campo interior constante y la relación que hay entre el campo y la corriente. En todo caso, estas configuraciones —que pueden realizarse fácilmente— permiten hacer experimentos simples y exactos para determinar

la naturaleza de las fuerzas magnéticas que actúan sobre cargas móviles en campos magnéticos y sobre conductores con corriente situados en campos magnéticos.

En el caso de una partícula con carga eléctrica, los resultados de experimentos como éstos llevan a las siguientes conclusiones: 1) La fuerza magnética sobre una partícula cargada es perpendicular tanto al vector \mathbf{B} como al vector velocidad de la partícula. 2) La fuerza es proporcional en magnitud a la del campo \mathbf{B} , a la velocidad de la partícula y a la carga que lleva. 3) La fuerza es proporcional en magnitud al seno del ángulo entre el vector velocidad de la carga y el vector \mathbf{B} . Las observaciones 2) y 3) permiten llegar a la conclusión de que la magnitud de la fuerza magnética sobre una partícula cargada es proporcional a $q\mathbf{B}\mathbf{v} \sin \theta$, en que θ es el ángulo entre el vector velocidad \mathbf{v} y el vector del campo \mathbf{B} . La observación 1) indica que la fuerza es perpendicular tanto a \mathbf{v} como a \mathbf{B} . De la definición del producto vectorial, se puede expresar la fuerza magnética \mathbf{F}_m como

$$\mathbf{F}_m = \lambda q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (19.2.5)$$

en que λ es una constante de proporcionalidad cuyo valor dependerá de la magnitud de las unidades elegidas para expresar la magnitud de \mathbf{B} . Naturalmente, es mejor escoger estas unidades de manera que la constante λ tenga el valor unitario. En el SI esto significa que si la inducción magnética es de magnitud unitaria, una carga puntual de 1 coulomb que se mueve perpendicularmente a \mathbf{B} con velocidad de 1 metro por segundo experimentará una fuerza (perpendicular tanto a \mathbf{B} como a \mathbf{v}) de 1 newton de magnitud. Por (19.2.5), se llega a la conclusión de que las unidades de \mathbf{B} son newton-segundo/coulomb-metro. Pero como 1 C/S equivale a 1 A, se puede escribir igualmente la unidad como newton/ampere-metro.* En la figura 19.10 se ilustra la relación geométrica entre \mathbf{B} , \mathbf{v} y \mathbf{F}_m . La magnitud de la unidad SI de la inducción magnética puede visualizarse notando que la inducción magnética terrestre típicamente es de cerca de 10^{-4} N/A · m, mientras que la inducción en la pro-

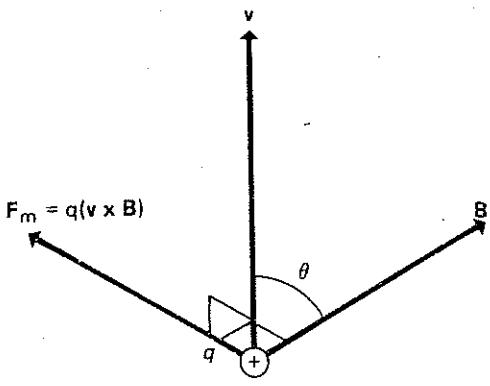


FIGURA 19.10. Relación entre los vectores que representan el campo magnético, la velocidad de una carga eléctrica y la fuerza magnética.

ximidad de la cerca del polo de un imán permanente de gran potencia es del orden de 0.2 N/A · m. Los electroimanes más potentes disponibles en la actualidad pueden crear inducciones cercanas a 10 N/A · m.¹ La ecuación (19.2.5) puede expresarse como

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (19.2.6)$$

Si hay tanto un campo eléctrico \mathbf{E} como un campo magnético \mathbf{B} , se producirá una fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ además de la fuerza dada por (19.2.6). La fuerza total sobre la carga será entonces la suma vectorial de las fuerzas eléctrica y magnética, o sea,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (19.2.7)$$

Esta es la fuerza que experimenta una partícula cargada en las circunstancias más generales cuando actúan sobre ella campos eléctricos y magnéticos. A veces se conoce como expresión de la fuerza de Lorentz en honor del físico holandés H. L. A. Lorentz (1853 - 1928). Es

* N. del S. Esta unidad SI se denomina específicamente tesla (símbolo: T).

¹ Como la unidad SI de inducción magnética es demasiado grande para ciertos usos, a veces se utiliza mejor el oersted definido como 10^{-4} N/A · m. Desde luego, si \mathbf{B} se mide en oersteds la constante λ en (19.2.5) ya no es la unidad sino que su valor es de 1.00×10^{-4} . En este libro se utilizarán de preferencia las unidades SI.

ción de la inducción magnética constante \mathbf{B} a partir de estos datos.

De (19.2.6), se puede escribir

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (19.2.8)$$

o, en términos de componentes,

$$\frac{1}{q} (F_x \mathbf{i}_x + F_y \mathbf{i}_y + F_z \mathbf{i}_z) \\ = (v_x \mathbf{i}_x + v_y \mathbf{i}_y + 0 \mathbf{i}_z) \times (B_x \mathbf{i}_x + B_y \mathbf{i}_y + B_z \mathbf{i}_z) \quad (19.2.9)$$

notando que $v_z = 0$. Evaluando el producto vectorial e igualando las componentes x , y y z de los vectores en ambos miembros de la ecuación resultante, es evidente que

$$\frac{F_x}{q} = v_y B_z \quad (19.2.10)$$

$$\frac{F_y}{q} = -v_x B_z \quad (19.2.11)$$

$$\frac{F_z}{q} = v_x B_y - v_y B_x \quad (19.2.12)$$

Ahora se conocen v_x , v_y , F_x , F_y y q , por lo que puede obtenerse B_z de (19.2.10) o de (19.2.11). Por otra parte, sólo se tiene una ecuación para B_x y B_y , la ecuación (19.2.12), de manera que no se puede utilizar para obtener las dos magnitudes. Esta es una consecuencia del hecho de que hay distintos campos posibles \mathbf{B} que pueden originar la misma fuerza magnética sobre una carga con velocidad dada. Por tanto, para determinar en forma única a B_x y B_y , se necesita un segundo conjunto de datos en los que se midan las componentes de fuerza con alguna otra velocidad conocida; por esa razón en el enunciado del problema se especifica la fuerza \mathbf{F}' que resulta cuando la velocidad de la carga es \mathbf{v}' . De (19.2.6), \mathbf{F}' debe estar relacionada con \mathbf{v}' mediante $\mathbf{F}'/q = \mathbf{v}' \times \mathbf{B}$, en que el campo magnético es el mismo en ambos casos. De nuevo se pueden escribir las componentes, como en

, evaluar el producto vectorial e las componentes x , y y z para tener

$$(19.2.13)$$

 B_z $-v_x' B_z$

$$(19.2.14)$$

 $v_x' B_y - v_y' B_x$

$$(19.2.15)$$

mo es posible obtener B_z de (19.2.13) o (19.2.14); ahora hay no menos de cuatro as de evaluar esta componente. ¡Por cierto, todas concuerdan! Por ejemplo, de (19.2.15) se obtiene

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{37.5 \times 10^{-8}}{(3.00 \times 10^{-8})(50)} = 0.25 \text{ N/A} \cdot \text{m}$$

(19.2.12) y (19.2.15) dan dos ecuaciones independientes de las que se puede obtener B_z ; utilizando los valores dados para las componentes de la fuerza y de la velocidad,

$$-50B_x = -20$$

$$-30B_x = -12$$

lizando la ecuación de abajo por 2 y sumando a la de arriba, se encuentra que $B_x = 0.4 \text{ A} \cdot \text{m}$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores se obtiene $B_z = 0$. Es evidente que el vector \mathbf{B} está en el plano xy . Su magnitud es

$$B_x^2 + B_z^2 = \sqrt{(0.4)^2 + (0.25)^2}$$

$$0.472 \text{ N/A} \cdot \text{m}$$

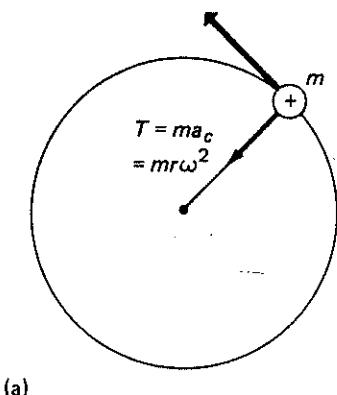
gente del ángulo θ entre \mathbf{B} y el eje z está

$$\frac{B_x}{B_z} = \frac{0.4}{0.25} = 1.6$$

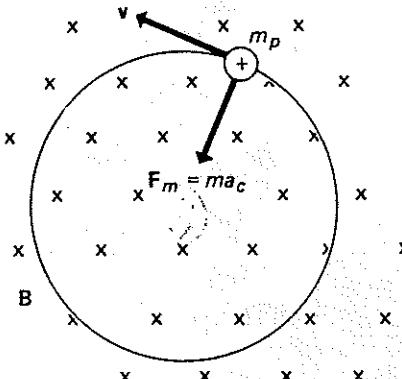
$$\text{de } \theta = 58.0^\circ.$$

PLO 19.2.3

roduce un protón en una región donde el campo magnético constante en la



(a)



(b)

FIGURA 19.11. Esquema que ilustra la acción de la fuerza magnética como fuerza centrípeta, en el caso de una partícula cargada que se mueve con velocidad constante en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme.

dirección z ; esa partícula tiene un vector velocidad inicial que está en el plano xy y es de magnitud $5.00 \times 10^6 \text{ m/s}$. Se encuentra que se mueve en una órbita circular de 12.5 cm de radio en el plano xy . Explicar por qué el protón sigue una trayectoria circular, evaluar su velocidad angular y determinar la magnitud del campo magnético \mathbf{B} a partir de los datos.

En el campo magnético constante, el protón experimenta una fuerza magnética de magnitud también constante que siempre está en dirección perpendicular a la del movimiento, por lo que tiene todas las características

físicas de una fuerza *centrípeta*, y es semejante en todo sentido a la tensión en una cuerda que mantiene a un objeto giratorio en movimiento circular uniforme. El caso se ilustra en la figura 19.11. Puesto que la fuerza \mathbf{F}_m es perpendicular tanto a \mathbf{B} como a \mathbf{v} , debe producir la aceleración centrípeta $r\omega^2$. De esta manera se obtiene

$$q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = qrB = mr\omega^2 \quad (19.2.16)$$

Pero \mathbf{v} y ω están relacionados por la expresión $\mathbf{v} = r\omega$. Sustituyendo el valor $r\omega$ por \mathbf{v} en (19.2.16) y despejando

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad (19.2.17)$$

Como se conocen \mathbf{v} y r ,

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{5.00 \times 10^6}{12.5} = 4 \times 10^5 \text{ rad/s}$$

Sustituyendo esto junto con la carga $q = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ y la masa del protón $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ en (19.2.17), se puede despejar B , obteniendo un valor de $0.00417 \text{ N/A} \cdot \text{m}$.

19.3 Flujo magnético y ley de Gauss para el campo magnético

Del Capítulo 16 se recordará que se definió el *flujo eléctrico* a través de una superficie como la integral de la componente de \mathbf{E} normal a la superficie, sobre un área dada. En analogía exacta con lo anterior, se definirá el *flujo magnético* Φ_m a través de una superficie dada S como la integral de la componente de \mathbf{B} normal a la superficie, sobre el área especificada. Para una superficie como la que se muestra en la figura 19.12, en el punto P hay un pequeño elemento de área da y en ese punto puede trazarse un vector \mathbf{n} de magnitud unitaria normal al citado elemento de área. Por lo general, la inducción magnética \mathbf{B} no será constante ni en magnitud ni en dirección sobre toda la superficie, sino que el vector \mathbf{B} que determina el valor local del campo magnético en el punto P será como se muestra en la figura 19.12. La componente de \mathbf{B} perpendicular a la superficie en este punto, es simplemente la componente

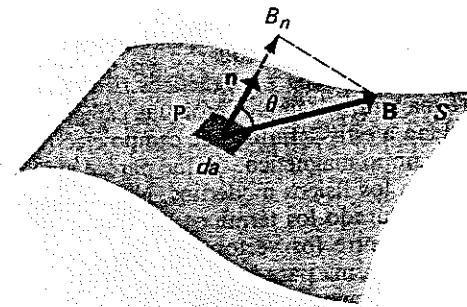


FIGURA 19.12. Cantidad vectorial que intervienen en la definición de flujo magnético.

de \mathbf{B} en la dirección del vector normal \mathbf{n} , que es $B \cos \theta$. Pero como \mathbf{n} es de magnitud unitaria, el producto escalar $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ también tiene el valor $B \cos \theta$ y se puede expresar la componente de \mathbf{B} normal a la superficie como

$$B_n = B \cos \theta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \quad (19.3.1)$$

El elemento de flujo magnético a través del área da se define como la componente de la inducción magnética normal a la superficie por el área da , es decir,

$$d\Phi_m = B_n da = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (19.3.2)$$

Esto indica que el flujo magnético a través de da es la componente de la inducción B_n , normal a la superficie, por el área da . El lector notará la analogía precisa entre esta definición del flujo magnético y la relación entre la corriente y la densidad de corriente descrita en el Capítulo 18 como la ecuación (18.2.9). Ahí, la corriente dI que pasa a través del elemento de área da era la componente normal de la densidad de corriente \mathbf{j} multiplicada por da ; por lo tanto, $dI = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da$. Aquí, la idea es la misma (e igual en el caso del flujo eléctrico que se estudió en el Capítulo 16). Es natural la idea del flujo de carga relacionado con un vector de intensidad superficial de corriente \mathbf{j} . En el caso del campo magnético, parece forzada la analogía de un "flujo" semejante, relacionado de la misma manera con un vector de intensidad superficial de campo \mathbf{B} , en el sentido de que se trata de una fluencia física de materia o de energía que constituya lo que de ordinario

se conoce como flujo. Empero, los científicos del siglo XIX que desarrollaron las ideas de los campos eléctricos y magnéticos pensaban de otra manera, y le impidieron una categoría de realidad a estos "flujos" de campo eléctrico y de campo magnético, lo que parece algo superfluo a los físicos modernos. No obstante, han perdurado los términos, y la relación matemática entre los vectores de flujo y de campo es la misma para los campos eléctricos y magnéticos que para el flujo de carga, por lo que se siguen utilizando los términos aunque se comprende que su interpretación literal en el caso de los flujos eléctrico y magnético es engañosa. En el siguiente capítulo se verá que el concepto de flujo magnético es muy importante para estudiar las FEMs inducidas en circuitos eléctricos por campos magnéticos variables.

En todo caso, la ecuación (19.3.2) describe el elemento de flujo $d\Phi_m$ asociado a un elemento de área da . Para evaluar el flujo magnético total Φ_m que pasa por toda la superficie S en la figura 19.12, basta con integrar sobre todos los elementos de área que constituyen a S . De esta manera puede expresarse el flujo magnético como la integral de la componente de B normal a S en cada punto, sobre toda la superficie, o sea

$$\Phi_m = \int_S B \cdot n \, da \quad (19.3.3)$$

En general, evaluar esta integral puede ser una tarea tardada y difícil. Pero el trabajo es mucho más fácil si la inducción magnética B es de magnitud y dirección constantes en todos los puntos y si es plana la superficie S a través de la cual se calcula el flujo, de manera que el vector normal n también sea constante en todos los puntos. En estas circunstancias la cantidad $B \cdot n$ es la misma para todos los elementos de área de S , por lo que puede escribirse fuera de la integral:

$$\Phi_m = B \cdot n \int_S da \quad (19.3.4)$$

o bien,

$$\Phi_m = (B \cdot n)A = BA \cos \theta \quad (19.3.5)$$

en que A denota el área total de la superficie S . Si además la dirección de B es normal a la superficie, el ángulo θ entre B y el vector normal n es cero, y (19.3.5) queda como

$$\Phi_m = BA \quad (19.3.6)$$

La unidad de flujo magnético corresponde a las de la inducción magnética multiplicada por el área, que se puede escribir como newton-metro/ampere, o bien joule/ampere. Esta unidad SI del flujo magnético se conoce normalmente como *weber* (símbolo: Wb), en honor del físico alemán Wilhelm Weber (1804-

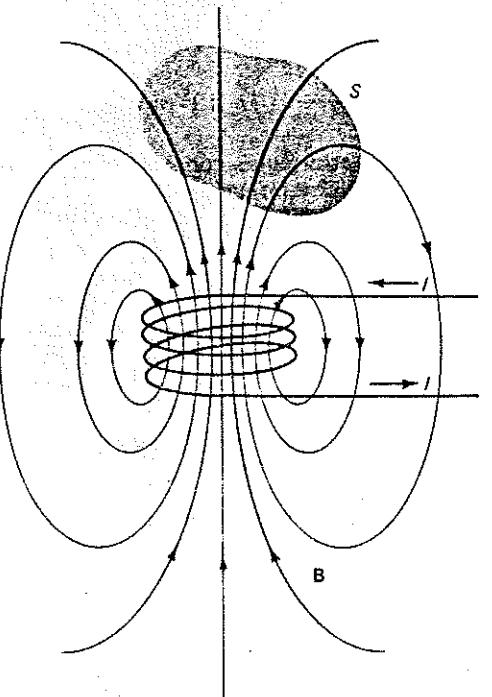


FIGURA 19.13. Las líneas de fuerza magnética no comienzan ni terminan en cargas libres, puesto que no existen las cargas magnéticas. Por tanto, deben cerrarse sobre sí mismas, formando trayectorias cerradas, como se ilustra. En este caso, toda línea de flujo que entre a una superficie cerrada deberá también salir de ella, lo que conduce a la ley de Gauss para el magnetismo, dada por la ecuación (19.3.8).

1891). De hecho, es más frecuente que la unidad de la inducción magnética se expresa como Wb/m^2 que como $\text{N/A} \cdot \text{m}$, que es como se ha llamado aquí hasta este momento. Por tanto, en adelante se seguirá la costumbre y se utilizará la unidad Wb/m^2 para B .* También es común referirse a la inducción magnética B como *densidad de flujo magnético*, en vista de que puede considerarse como flujo por unidad de área. El lector debe percatarse de esta terminología, aunque no se adoptará aquí.

Antes se mencionó que las fuerzas magnéticas entre los polos de imanes de barra largos y delgados (en que son despreciables los efectos de los polos en extremos opuestos) obedecen a la ley de Coulomb en el sentido de que decrecen inversamente con el cuadrado de la distancia entre los mismos. En la sección 19.5 se verá expresada esta ley con mayor precisión. De lo anterior, se recordará que precisamente esta dependencia de la intensidad del campo sobre la distancia es lo que permite demostrar la ley de Gauss para los campos eléctricos. Como las "cargas magnéticas" que pueden considerarse como fuentes de los dipolos magnéticos dan lugar a campos magnéticos de variación inversa al cuadrado de la distancia, se puede demostrar la ley de Gauss para el magnetismo, en forma temporal, imaginando que el campo magnético (para fines de la demostración) se origina en la "carga magnética". La demostración se realiza de la misma manera que para el campo eléctrico. El resultado es

$$\oint B \cdot n \, da = 4\pi k q_m \quad (19.3.7)$$

La integral del flujo magnético se (evalúa) sobre cualquier superficie cerrada S y la cantidad q_m designa la "carga magnética total" encerrada por esta "superficie gaussiana." La constante k de proporcionalidad en la expresión de la ley de Coulomb relaciona el campo B con la "carga magnética" q_m y la distancia, es decir $B = k(q_m/r^2)$.

Desde luego, realmente no existe la "carga magnética". La única causa de los campos magnéticos son las corrientes eléctricas y los

campos magnéticos son invariablemente de carácter dipolar, lo que corresponde a cero carga magnética, equivalente total. Por tanto, la cantidad q_m en el segundo miembro de la ecuación (19.3.7) siempre debe ser cero, y para toda configuración de campo magnético lograble, la ley de Gauss para el campo magnético debe ser

$$\oint B \cdot n \, da = 0 \quad (19.3.8)$$

en que S es cualquier superficie cerrada.

Geométricamente se puede comprender el significado de este resultado recordando que las líneas electrostáticas de fuerza siempreemanan de, o terminan en, cargas eléctricas. Empero, ya que no hay cargas magnéticas, las líneas de inducción magnética no pueden comenzar o terminar en cualquier parte, sino que deben formar líneas cerradas, como se muestra en la figura 19.13. En el caso de un imán permanente, como se ilustra en la figura 19.5, las líneas se cierran dentro del propio imán. El requisito de que el segundo miembro de (19.3.8) sea cero, se satisface entonces en la medida de que todas las líneas de campo que entran a cualquier superficie cerrada como S , también deben salir de esa superficie por alguna parte; ninguna línea puede comenzar o terminar dentro de la superficie.

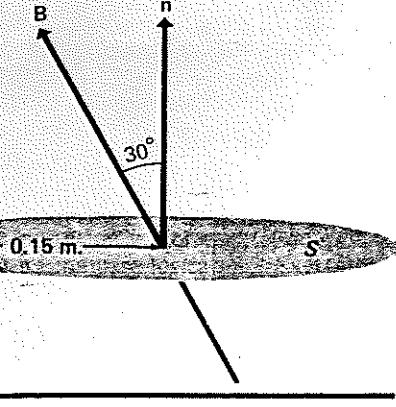
EJEMPLO 19.3.1

Encontrar el flujo magnético a través de una espira circular de 30 cm de diámetro cuya normal forma un ángulo de 30° con una inducción magnética constante de 0.8 Wb/m^2 , como se ilustra en la figura 19.14. Determinar el flujo si el plano de la espira es perpendicular al campo magnético.

En este caso debe determinarse el flujo a través de un área circular plana de 30 cm de diámetro. La magnitud y dirección de la inducción magnética B es constante y el ángulo entre los vectores B y n es de 30° . Por tanto, puede utilizarse la expresión simple (19.3.5) para calcular el flujo:

$$\Phi_m = B \cdot A \cos \theta = (0.8)(\pi)(0.15)^2(0.866) = 0.0490 \text{ Wb}$$

* N. del S. La denominación actual para esta unidad del SI es tesla (símbolo: T).



19.14

de corriente y calcular la intensidad del momento dipolar de una espira que lleva corriente.

Primero se considerará el caso de un conductor de sección transversal uniforme A que lleva una corriente constante I , como se muestra en la figura 19.15. La carga dentro del conductor se mueve con la velocidad v y en el tiempo dt describe un volumen $dV = A \, dl$, como se muestra en el diagrama. El desplazamiento de la carga es dl , vector que apunta en la dirección de conducción en tal punto. Por la definición de la velocidad instantánea, se puede escribir la velocidad v con que fluye la carga por el conductor como

$$v = \frac{dl}{dt} \quad (19.4.1)$$

De las ecuaciones (19.2.6) y (19.4.1), el elemento de fuerza dF que actúa sobre el elemento de carga dq es

$$dF = dq \frac{dl}{dt} \times B \quad (19.4.2)$$

Pero si se denota la densidad de carga por unidad de volumen como ρ ,

$$dq = \rho \, dV = \rho A \, dl \quad (19.4.3)$$

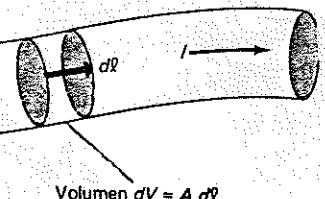
Sustituyendo esto en (19.4.2), entonces puede encontrarse que

$$dF = \rho A \frac{dl}{dt} (dl \times B) \quad (19.4.4)$$

Por (19.4.1) se ve que dl/dt es simplemente la magnitud de la velocidad v . Más aún, como la densidad de carga multiplicada por la velocidad representa la densidad de corriente, y como la densidad de corriente multiplicada por el área es la corriente total I , se puede sustituir $\rho A (dl/dt)$ en (19.4.4) por I , obteniéndose el resultado final

$$dF = I(dl \times B) \quad (19.4.5)$$

Esta ecuación da el elemento de fuerza dF que actúa sobre el elemento de carga dq dentro de un segmento de conductor con longitud dl . El vector dl en esta ecuación es un



19.15. Paso de una corriente por un conductor de sección triangular.

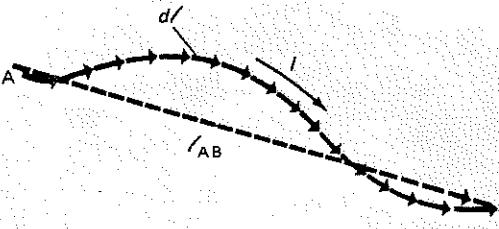


FIGURA 19.16. El vector I_{AB} entre dos puntos dados de un circuito corresponde a la suma de elementos infinitesimales dl situados a lo largo de la trayectoria real de la corriente.

vector de longitud dl ($= v \, dt$) que apunta en la dirección del conductor en la región donde fluye el elemento de carga dq , como se muestra en la figura 19.15. La fuerza total sobre un segmento finito de conductor puede encontrarse integrando (19.4.5) sobre los elementos sucesivos dl que definen tal segmento finito, como se muestra en la figura 19.16. Entonces, la ecuación (19.4.5) se escribe como

$$\mathbf{F} = \int_c d\mathbf{F} = I \int_A^B dl \times B \quad (19.4.6)$$

La corriente I sale de la integral debido a que es la misma a través de cada elemento del segmento conductor. Para un circuito completo, la integral se evalúa alrededor de la trayectoria

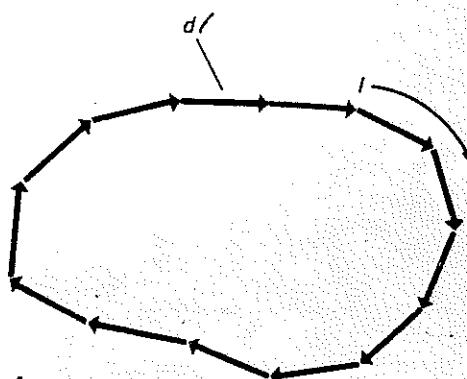


FIGURA 19.17. La suma vectorial de elementos infinitesimales tomados alrededor de un circuito cerrado vale cero, según las leyes de la adición vectorial.

cerrada formada por el conductor, y ahora la integral se escribe como

$$\mathbf{F} = I \oint_c dl \times B \quad (19.4.7)$$

Hay dos casos especiales que merecen énfasis especial. En ambos, el campo magnético producido exteriormente es de magnitud y dirección *uniformes* en todas las partes del conductor. Si así sucede, entonces también se puede escribir B fuera de la integral como una constante y (19.4.6) queda

$$\mathbf{F} = \left[I \int_A^B dl \right] \times B \quad (19.4.8)$$

La integral anterior dentro de los corchetes representa simplemente la *suma vectorial* de todos los pequeños vectores dl que se muestran en la figura 19.16, y de acuerdo con la interpretación geométrica de la adición vectorial, es precisamente el vector I_{AB} , cuyo origen está en A y cuya punta está en B . En este caso, se puede escribir (19.4.8) como

$$\mathbf{F} = I(I_{AB} \times B) \quad (19.4.9)$$

El segundo caso especial es aquél en que B nuevamente es uniforme y en que la trayectoria de la corriente es una espira cerrada. Los elementos dl forman un *polígono cerrado* como se ilustra en la figura 19.17 y la suma vectorial es cero, de acuerdo con el método del polígono para la adición vectorial. La integral de (19.4.8) se anula, y el resultado queda ahora como

$$\mathbf{F} = 0 \quad \text{espira cerrada, } B \text{ constante} \quad (19.4.10)$$

En este caso, es importante notar que aunque se reduzca a cero la fuerza resultante sobre una espira con corriente, de todas maneras el campo magnético puede dar lugar a un *momento de rotación neto* sobre la espira, como se verá después o más adelante.

Considérese la espira que se indica en la figura 19.18. Como se presenta en este ejemplo, hay una corriente I que fluye en una espira rectangular plana ABCD. La pieza conductora está en una región donde hay un campo

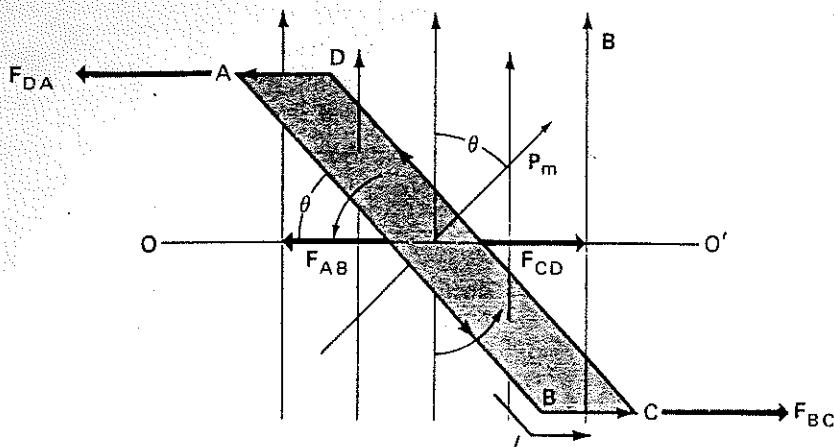


FIGURA 19.18. Espira rectangular que conduce una corriente constante en un campo magnético. El plano de la espira se ha representado como casi normal a la página de modo que su lado AB está más cerca del lector que el CD.

magnético constante \mathbf{B} , dirigido verticalmente hacia arriba. La espira puede girar con libertad alrededor del eje OO' , que debe ser perpendicular al plano de la página. En el diagrama, se ve que el plano de la espira forma un ángulo θ con el plano normal a la inducción magnética \mathbf{B} . Puesto que la corriente fluye en un circuito cerrado, la fuerza resultante sobre la espira debe ser cero, de acuerdo con (19.4.10). Pero las fuerzas sobre los cuatro lados del rectángulo pueden calcularse por separado según (19.4.9), o sea,

$$\mathbf{F}_{AB} = I(\mathbf{l}_{AB} \times \mathbf{B}) \quad (19.4.11)$$

$$\mathbf{F}_{BC} = I(\mathbf{l}_{BC} \times \mathbf{B}) \quad (19.4.12)$$

$$\mathbf{F}_{CD} = I(\mathbf{l}_{CD} \times \mathbf{B}) \quad (19.4.13)$$

$$\mathbf{F}_{DA} = I(\mathbf{l}_{DA} \times \mathbf{B}) \quad (19.4.14)$$

donde el vector \mathbf{l}_{AB} se extiende en la dirección del lado que va de A a B, \mathbf{l}_{BC} va desde B hasta C, etc. Por las reglas para la multiplicación vectorial, es evidente que las fuerzas \mathbf{F}_{AB} , \mathbf{F}_{CD} son de igual magnitud ($\mathbf{l}_{AB} = \mathbf{l}_{CD}$, ya que la espira es rectangular) y de dirección opuesta, estando sus líneas de acción sobre el eje OO' . Es claro que estas fuerzas no dan lugar a un momento neto de rotación. Las fuerzas \mathbf{F}_{BC} y

\mathbf{F}_{DA} son de igual magnitud, pues $\mathbf{l}_{BC} = \mathbf{l}_{DA}$, y también de dirección opuesta. Pero debido a que el plano de la espira está inclinado formando un ángulo θ con la vertical, las líneas de acción de estas dos fuerzas no coinciden y dan lugar entonces a un momento de rotación alrededor de OO' , como se representa, que tiende a hacer girar la espira hasta que su plano sea normal al campo \mathbf{B} . Estas fuerzas se muestran en forma más clara en la figura 19.19, donde se indica el eje OO' exactamente perpendicular a la página. De este diagrama es claro que el brazo de momento asociado a \mathbf{F}_{DA} y \mathbf{F}_{BC} es $\mathbf{l}_{AB} \sin \theta$ y que entonces la magnitud del momento de rotación τ será

$$\tau = \frac{1}{2} F_{DA} l_{AB} \sin \theta + \frac{1}{2} F_{BC} l_{AB} \sin \theta \quad (19.4.15)$$

Pero como \mathbf{l}_{DA} y \mathbf{l}_{BC} son perpendiculares a \mathbf{B} , por (19.4.12) y (19.4.14), $F_{DA} = I l_{DA} B$ y $F_{BC} = I l_{BC} B$. Utilizando estos resultados y recordando que l_{DA} y l_{BC} son iguales, (19.4.15) queda como sigue:

$$\tau = I l_{BC} l_{AB} B \sin \theta = IAB \sin \theta \quad (19.4.16)$$

en que A es el área de la espira. La dirección del vector momento rotacional τ es vertical y hacia afuera de la página en la figura 19.19

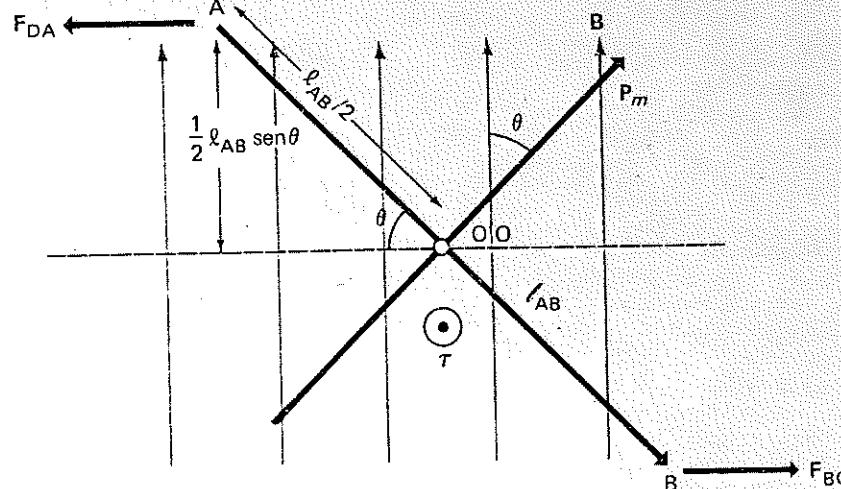


FIGURA 19.19. Otra vista de la espira rectangular de la figura 19.18, en la que los lados AD y BC y la recta OO' son normales a la página.

Este resultado puede expresarse de manera más simple definiendo el vector \mathbf{p}_m como un vector normal a la espira y cuya magnitud está dada por IA , es decir, el producto de la corriente por el área de la espira. Si se hace esto, entonces es evidente de inmediato que el vector momento τ puede expresarse como

$$\tau = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B} \quad (19.4.17)$$

porque entonces la magnitud de τ será la dada por (19.4.16) y su dirección será verticalmente hacia arriba, saliendo de la página, en la figura 19.19.

Es fácil ver que las ecuaciones (19.4.17) y (19.2.3) son idénticas, lo que sólo significa que la ley de la fuerza magnética de Lorentz (19.2.6) y la ecuación (19.4.5), que se sigue directamente de la anterior, llevan a la conclusión de que el momento de rotación sobre una espira con corriente en un campo magnético, es justamente igual al que se esperaría que actuara sobre un dipolo magnético en un campo magnético; lo anterior concuerda con lo que se observa físicamente en espiras con corriente y otros electroimanes cuando se colocan en campos magnéticos producidos exteriormente, y se puede considerar como una de las veri-

ficaciones experimentales importantes de la ley de Lorentz. Más aún, se encuentra que la magnitud del momento dipolar magnético IA que se obtiene de la citada ley de Lorentz predice con exactitud la magnitud de los momentos de rotación que se observan en espiras individuales y en electroimanes de solenoide en campos magnéticos. De hecho, se encuentra que las espiras con corriente se comportan en todos sentidos como dipolos magnéticos; más adelante se verá que los campos magnéticos que generan son dipolares.

Los resultados anteriores se obtuvieron rigurosamente sólo para espiras rectangulares con corriente, pero son correctos sin importar la forma que tenga la espira conductora, siempre que el momento dipolar se exprese como el producto de la corriente en la espira por su área. Al relacionar la dirección del momento dipolar magnético asociado a una espira, es útil recordar la regla de que si la mano derecha se coloca de manera que los dedos se encorven en el sentido del flujo de corriente en la espira, el pulgar extendido apuntará en la dirección del vector momento magnético \mathbf{p}_m asociado a la corriente, lo que se ve en las figuras 19.18 y 19.19, pero se ilustra con mayor claridad en la 19.20.

O 19.4.1

miento recto de un conductor horizontal de 75 cm de longitud que lleva una corriente se coloca bajo la acción de una inducción magnética constante, de dirección vertical magnitud igual a 0.25 Wb/m^2 . Calcular la magnitud y dirección de la fuerza sobre el conductor.

Supone que dicho conductor está ubicado de tal manera que la corriente fluye en la dirección del eje x y el campo B está en la dirección del eje z . Puesto que el campo B es constante, puede expresarse la fuerza sobre el conductor por medio de la ecuación (19.4.9). Ya que $l_{AB} = 0.15 \text{ m}$ y como la corriente fluye en la dirección del eje x , se puede escribir $I_{AB} = i_x$; y puesto que el vector de inducción magnético está en la dirección del eje z y su magnitud vale 0.25 Wb/m^2 , es posible expresar $B = 0.25i_z$. Entonces, la ecuación dada,

$$I_{AB} \times B = (75)(0.15i_x) \times 0.25i_z$$

$$(0.15)(0.25)(i_x \times i_z) = 2.81(-i_y)$$

En consecuencia, la fuerza es de 2.81 N en la dirección del eje y negativo, como se muestra en la figura 19.21. De otra manera, se observa que la magnitud de F está dada por

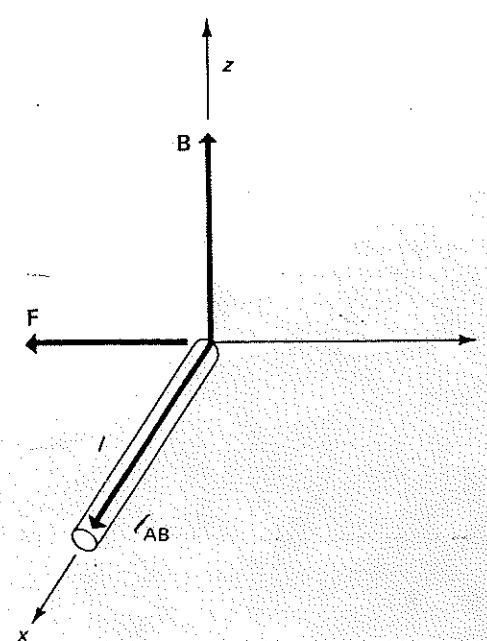


FIGURA 19.21

tra en la figura 19.21. De otra manera, se observa que la magnitud de F está dada por

$$F = I l_{AB} B \sin \theta = (75)(0.15)(0.25)(1) = 2.81 \text{ N}$$

ya que el ángulo θ entre I_{AB} y B es de 90° , y el vector fuerza F debe estar en la dirección que se indica en la figura 19.21, como consecuencia de la definición del producto vectorial.

EJEMPLO 19.4.2

En la figura 19.22 se muestra el esquema de un galvanómetro de d'Arsonval, que comúnmente se utiliza como un instrumento para la medición precisa de corriente. Una bobina que consiste en varios cientos de vueltas de alambre muy delgado puede girar en un campo magnético uniforme generado por un imán permanente. La rotación de la bobina está restringida por un resorte espiral muy delgado, de manera que cuando la corriente fluye por la bobina, experimenta un momento rotacional por acción del campo magnético, y gira hasta que es contrarrestado el momento anter-

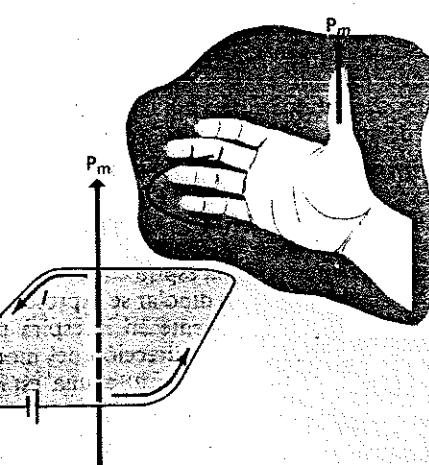
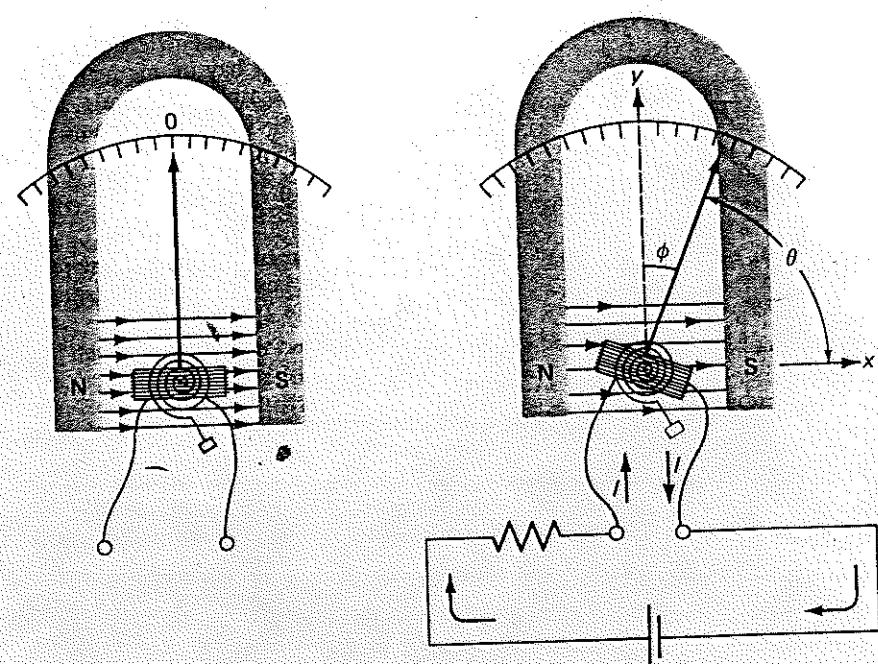
FIGURA 19.20. "Regla de la mano derecha" para la dirección del momento dipolar (i y el campo magnético axial) de una espira en función de la dirección de corriente.

FIGURA 19.22. Galvanómetro de d'Arsonval.

rior por un momento igual y opuesto de restauración debido al resorte, y nuevamente se logra el equilibrio. En este nuevo estado de cosas, la bobina y su índice o aguja indicadora han girado un ángulo ϕ , que está relacionado con la corriente que pasa por la bobina. Encontrar la relación general entre el ángulo ϕ y la corriente, suponiendo que el momento restaurador del resorte espiral es directamente proporcional a ϕ . En el caso de un imán que produce un campo uniforme de 0.25 Wb/m^2 , una bobina rectangular de 3 cm de longitud y 2 cm de ancho, con 300 vueltas de alambre y un resorte con una constante de torsión de $1.60 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m/rad}$, ¿qué corriente debe circular en la bobina para producir una deflexión de 30° ?

De acuerdo con (19.4.16), el momento de rotación sobre una sola espira con corriente es $IAB \sin \theta$, en que θ es el ángulo entre la normal al plano de la espira y la dirección de B . En este caso, el ángulo θ es igual a $90^\circ - \phi$, como se indica en la figura 19.22, b. Además,

puesto que hay muchas vueltas de alambre en la bobina, efectivamente hay N espiras con corriente, siendo N el número de vueltas. Como los momentos de rotación de cada espira son aditivos, el momento rotacional sobre la bobina será N veces el momento sobre una sola espira; por tanto, de acuerdo con (19.4.16), el momento de rotación sobre una bobina de este tipo será

$$\tau = NIAB \sin(90^\circ - \phi) = NIAB \cos \phi \quad (19.4.18)$$

El resorte ejercerá un momento de restauración negativo τ_r sobre la bobina. Suponiendo que el resorte es ideal, este momento estará dado por

$$\tau_r = -k'\phi \quad (19.4.19)$$

en que k' es la constante de torsión, que expresa el momento necesario para producir un desplazamiento angular unitario. Se logra el equilibrio y la aguja queda en reposo cuando el momento resultante (igual a la suma de

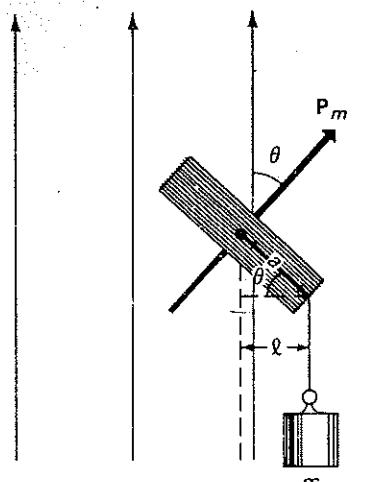


FIGURA 19.23

los momentos anteriores) es cero. En estas circunstancias,

$$\sum \tau = NIAB \cos \phi - k'\phi = 0 \quad (19.4.20)$$

Despejando la corriente de esta ecuación, se obtiene

$$I = \frac{k'\phi}{NAB \cos \phi} \quad (19.4.21)$$

Sustituyendo en esta ecuación los valores numéricos dados en el enunciado del problema, resulta $I = 2.15 \times 10^{-6}$ A.

EJEMPLO 19.4.3

Supóngase que la bobina descrita en el ejemplo anterior está montada para que gire libremente alrededor de un eje horizontal en un campo magnético vertical constante de 1.5 Wb/m². En este ejemplo no se tiene una restricción mediante un resorte, sino que se cuelga una masa de 1 g en uno de los lados de la bobina, como se muestra en la figura 19.23. Encontrar el ángulo θ entre el vector P_m , normal al plano de la bobina, y el campo magnético, cuando fluye una corriente de $I = 2 \times 10^{-4}$ A por la bobina.

Nuevamente el problema comprende el equilibrio de momentos. Otra vez interviene el

momento de origen magnético dado por (19.4.16), pero ahora hay un momento rotacional de signo negativo provocado por el peso de la masa suspendida. Este momento se puede expresar así:

$$\tau_m = -mgl = -mga \cos \theta \quad (19.4.22)$$

en tanto que el momento de fuerza magnético, de (19.4.16), puede expresarse por medio de

$$\tau = NIAB \sin \theta \quad (19.4.23)$$

Si el sistema está en equilibrio, la suma de momentos debe ser cero; por tanto,

$$\sum \tau = NIAB \sin \theta - mgl \cos \theta = 0 \quad (19.4.24)$$

Dividiendo ambos miembros de esta ecuación entre $\cos \theta$, observando que $\sin \theta / \cos \theta = \tan \theta$ y despejando $\tan \theta$ resulta que

$$\tan \theta = \frac{mga}{NIAB} \quad (19.4.25)$$

En este caso, $a = 1.0$ cm = 0.01 m, $m = 0.001$ kg, $N = 300$, $I = 2 \times 10^{-4}$ A, $A = 0.0006$ m², $B = 1.5$ Wb/m². Sustituyendo estos valores en (19.4.25), se obtiene $\tan \theta = 1.815$, $\theta = 61.1^\circ$.

19.5 Campo magnético de un conductor que lleva corriente: ley de Biot y Savart

Hasta ahora se ha centrado la atención en la descripción de fuerzas sobre cargas y corrientes ubicadas en campos magnéticos producidos exteriormente. En este proceso no se tomó en cuenta el campo magnético propio producido por las corrientes o las cargas móviles, por lo que no se atacó el problema de describir y explicar los resultados de los experimentos de Oersted. El avance fue orientado por la necesidad de definir y comprender el vector inducción magnética \mathbf{B} . Después de lograr este objetivo, ahora conviene volver a los experimentos de Oersted y describir el campo magnético producido por una corriente constante sobre un conductor uniforme.

En el estudio de la electrostática se observó que la ley de Coulomb que describe el campo

eléctrico de cargas puntuales, era sencillamente la manera como podía resumirse mejor las observaciones *experimentales* relativas a las fuerzas electrostáticas sobre cuerpos cargados. El caso es igual con relación a los campos magnéticos producidos por corrientes constantes. No hay manera de deducir una expresión para estos campos; lo único que puede hacerse es observar experimentalmente las fuerzas magnéticas creadas por las corrientes reales, y luego tratar de encontrar una expresión matemática para el campo magnético que concuerde con los resultados de todas las observaciones. De esta manera se llegó precisamente a la *ley de Biot y Savart*, que evalúa el campo magnético creado por el flujo de corriente en un conductor. Dicha ley expresa que el elemento de inducción magnética $d\mathbf{B}$ asociado a una corriente I en un segmento de conductor descrito por el vector dl cumple las siguientes condiciones:

1. Está en dirección perpendicular tanto a dl como al, vector de posición r desde el segmento de conductor hasta el punto P, donde se mide el campo, como se ilustra en la figura 19.24;
2. Es directamente proporcional a la longitud dl del segmento y a la corriente I que conduce;
3. Es directamente proporcional en magnitud al cuadrado de la distancia r entre el elemento de corriente y el punto P;
4. Es proporcional al seno del ángulo θ entre los vectores dl y r .

En forma matemática, esta ley queda como

$$d\mathbf{B} = \text{const} \cdot \frac{I}{r^2} dl \times \mathbf{i}_r \quad (19.5.1)$$

en que \mathbf{i}_r es un vector *unitario* en la dirección del vector r de la figura 19.24. Es evidente que la ecuación (19.5.1) comprende todos los resultados expresados antes, ya que indica que $d\mathbf{B}$ es perpendicular tanto a dl como r y que su magnitud es proporcional a $I dl \sin \theta / r^2$, precisamente lo observado. Antes se hizo referencia al hecho de que las fuerzas magnéticas presentan una dependencia en razón inversa al

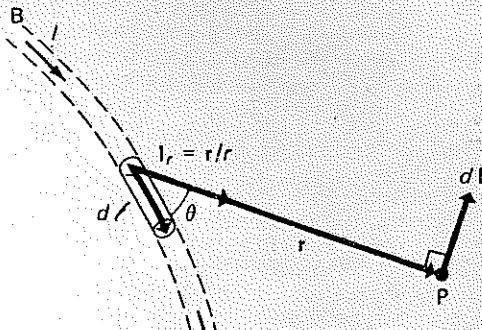


FIGURA 19.24. Campo magnético de magnitud dB producido en un punto P por un elemento de corriente dl en un conductor por el que circula una corriente constante I de acuerdo con la ley de Biot y Savart.

cuadrado de la distancia, como las fuerzas de Coulomb entre cargas eléctricas. Claramente, (19.5.1) indica lo anterior. Por lo general, la constante de proporcionalidad en la ecuación (19.5.1) se expresa como $\mu_0/4\pi$, por razones parecidas a las expresadas para escribir la constante de proporcionalidad en la ley de Coulomb para campos eléctricos como $1/4\pi\epsilon_0$. Escribiendo la constante de proporcionalidad de esta manera, (19.5.1) queda

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{i}_r}{r^2} \quad (19.5.2)$$

Ya que puede obtenerse el vector unitario \mathbf{i}_r en la dirección de r tomando este vector (la magnitud r) y dividiéndolo entre su propia magnitud, se puede escribir

$$\mathbf{i}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (19.5.3)$$

Entonces, la ecuación (19.5.2) es

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (19.5.4)$$

La constante μ_0 es una medida fundamental de la intensidad del magnetismo asociado al flujo

a eléctrica; se conoce como *permeabilidad del vacío*. Desde luego, su valor depende del sistema de unidades que se utilice para expresar las otras cantidades en la ecuación. En el SI esta constante es igual a 10^{-7} Wb/A · m.

Es extraño que el valor de esta constante sea un múltiplo exacto de 4π ; y de hecho no es ningún accidente: se debe a que el valor de μ_0 no es sencillamente una cantidad aritmética de carga, ni el ampere (coulomb/segundo) es un valor arbitrario de corriente. La definición del ampere —y por tanto, la del volt— se escogió de modo que se requiere que el valor de μ_0 fuera el adoptado. Se puede comprobar que esto sucede con mayor claridad si se estudian las fuerzas que actúan entre los conductores rectos paralelos que llevan corrientes constantes.

Fortunadamente, la ley de Biot y Savart sólo evalúa el *elemento diferencial* de inducción magnética en un punto debido a un segmento diferencial de conductor. Para determinar la inducción magnética total debida a un conductor de tamaño finito, debe integrarse (19.5.4) sobre los elementos diferenciales dI que constituyen dicho conductor finito. Entonces se puede escribir la inducción magnética total \mathbf{B} como la integral

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dI \times r}{r^3} \quad (19.5.5)$$

Se hace lo mismo sobre la porción de conductor considerada.

Es más simple en que puede hacerse esto para un conductor infinitamente largo y de diámetro despreciable. Se estudiará esto en detalle. Supóngase que el conductor coincide con el eje z y que la corriente I fluye desde $z = -\infty$ hasta $z = +\infty$, como se muestra en la figura 19.25. Se tratará de calcular la inducción magnética en el punto P situado a una distancia a del conductor a lo largo del eje x . Primero se considerará la parte de la inducción que se debe a un elemento de corriente de longitud dz que se extiende desde z hasta $z + dz$ a lo largo del eje z . Ya que el vector dI

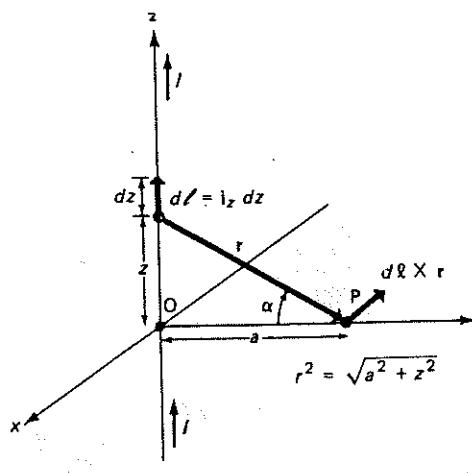


FIGURA 19.25

puede escribirse como $dI = i_z dz$, y el vector r (cuya componente y es a y cuya componente z es $-z$) se puede escribir como $r = ai_y - zi_x$, la ecuación (19.5.4) se expresa como

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{i_z dz \times (ai_y - zi_x)}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{adz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} i_x \end{aligned} \quad (19.5.6)$$

La expresión en el extremo derecho es el resultado del desarrollo del producto vectorial utilizando las reglas para la multiplicación de cruz de vectores unitarios. Es evidente que el vector $d\mathbf{B}$ está en la dirección $-x$; también es cierto esto para la inducción magnética total \mathbf{B} , debido a que los vectores dI y r siempre están en el plano yz , por lo que su producto vectorial sólo debe tener componente x .

Ahora puede evaluarse \mathbf{B} integrando (19.5.6) desde $z = -\infty$ hasta $z = +\infty$ para obtener

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I a}{4\pi} i_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (19.5.7)$$

En esta expresión se saca el vector unitario i_x de la integral, ya que es de magnitud y dirección constantes. Esta integral puede evaluarse con mayor facilidad expresando todas las fun-

ciones de z en términos del ángulo α , que se muestra en la figura 19.25. Por tanto,

$$r = \sqrt{a^2 + z^2} = \frac{a}{\cos \alpha} \quad (19.5.8)$$

$$z = a \tan \alpha \quad (19.5.9)$$

$$dz = a \sec^2 \alpha d\alpha = \frac{a d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (19.5.10)$$

Sustituyendo todo esto en (19.5.7), se puede escribir esta ecuación en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} i_x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} i_x [\sin \alpha]_{-\pi/2}^{\pi/2} \end{aligned} \quad (19.5.11)$$

En esta expresión, la integración sobre el ángulo α se toma entre los límites $-\pi/2$ a $+\pi/2$, debido a que al integrar sobre dz desde $-\infty$ hasta $+\infty$, como lo requiere (19.5.7), el ángulo α de la figura 19.25 varía entre esos dos valores. Evaluando (19.5.11) entre esos límites, finalmente se obtiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (-i_x) \quad (19.5.12)$$

Esto indica que la magnitud de \mathbf{B} es $\mu_0 I / 2\pi a$, en que a es la distancia entre el conductor y el punto P , y la dirección de \mathbf{B} es la del eje $-x$. No hay nada especialmente importante acerca de que se haya escogido el punto P en el eje y , sólo fue cuestión de conveniencia para los cálculos. De otra manera se pudo haber escogido primero P y luego orientar el eje x de tal modo que coincidiera con dicho punto. Por tanto, la magnitud de \mathbf{B} es la misma para cualquier punto que esté a la distancia a desde el conductor, y su dirección siempre será perpendicular tanto a la dirección de la corriente como al segmento OP entre el punto P y el conductor, pues ésta es la dirección de $dI \times r$. Estos resultados se resumen en el dibujo del campo que se muestra en la figura 19.26. Las líneas de \mathbf{B} son circulares, y la dirección del vector \mathbf{B} es la que indican los dedos curvados de la mano derecha cuando el pulgar apunta en la

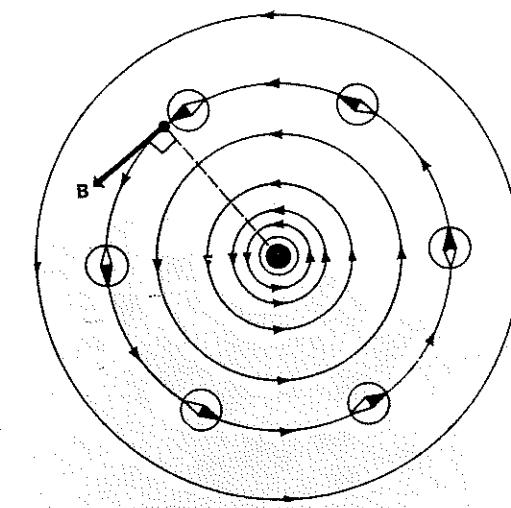


FIGURA 19.26. Campo magnético que rodea un conductor recto de gran longitud y por el que pasa una corriente constante.

dirección de la corriente. Es extremadamente importante apreciar con claridad las características del campo que rodea a un conductor largo y recto, para poder comprender campos más complejos y estar en condiciones de manejar fuerzas que ejercen entre sí conductores que llevan corriente. Históricamente, el resultado (19.5.12) para un conductor largo y recto precedió a la forma diferencial más fundamental (19.5.4), y de ordinario se conoce también como ley de Biot y Savart.

Los campos magnéticos producidos por distintas corrientes pueden superponerse o sumarse para obtener un campo magnético total, al igual que se pueden superponer los campos debidos a una serie de cargas eléctricas puntuales para obtener un campo eléctrico total. Por tanto, si hay una cierta cantidad de conductores que llevan las corrientes I_1, I_2, I_3, \dots , las cuales dan lugar respectivamente a los campos magnéticos $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \dots$, de acuerdo con la ley de Biot y Savart expresada por (19.5.5), la inducción magnética total \mathbf{B} puede representarse como la suma vectorial de los campos individuales $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \dots$, lo que permite escribir

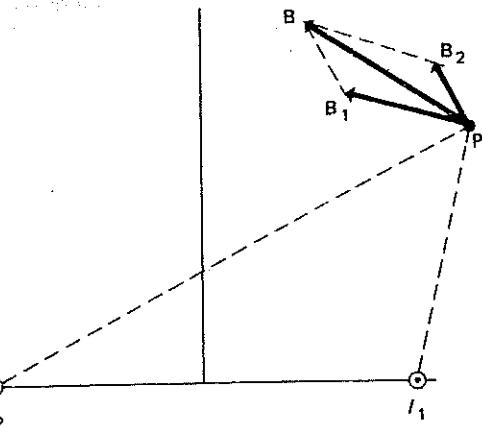


FIGURA 19.27. Superposición de campos magnéticos por la ley de la adición vectorial.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \cdots + \mathbf{B}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i$$

(19.5.13)

en que cada uno de los campos individuales \mathbf{B}_i está relacionado con su propia corriente generatriz I_i por medio de

$$\mathbf{B}_i = \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \int_{c_i} \frac{dl_i \times r_i}{r_i^3} \quad (19.5.14)$$

En esta ecuación, dl_i son los elementos diferenciales dl que constituyen el conductor c_i , por el cual pasa la corriente I_i , en tanto que r_i es el vector que va desde el elemento diferencial dl_i hasta el punto P en que se evalúa el campo. Al superponer los campos magnéticos individuales de esta manera, es importante que se sumen como *vectores*, ejecutando la suma indicada en (19.5.13) siguiendo las leyes de adición *vectorial*.

El ejemplo más simple de la superposición de campos magnéticos lo proporciona el caso de dos conductores rectos paralelos, en que el campo resultante \mathbf{B} es la suma vectorial de las contribuciones \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 de los campos individuales que son originados por las dos corrientes en los conductores separados (fig. 19.27).

EJEMPLO 19.5.1

Evaluar la inducción magnética en un punto del eje z creada por una corriente I que fluye en una espira circular de radio a en el plano xy , y cuyo centro está en el origen (fig. 19.28).

En este ejemplo, es importante percibirse de que el campo total \mathbf{B} en todos los puntos del eje z está en la dirección de éste y *sólo* tiene una componente z , lo que se comprende considerando las contribuciones separadas al campo total \mathbf{B} por el elemento dl que se muestra en la figura 19.28, y el elemento dl' de igual longitud pero diametralmente opuesto en la espira. Estas dos contribuciones $d\mathbf{B}$ y $d\mathbf{B}'$ están cada una en la dirección de $dl \times r$ y $dl' \times r'$, por lo que se hallan en el plano definido por OQP , que es perpendicular al elemento dl y pasa por el vector de posición r . Es claro que las componentes horizontales de $d\mathbf{B}$ y $d\mathbf{B}'$ son de signo contrario por lo que su suma será cero cuando se reúnan todas las contribuciones de

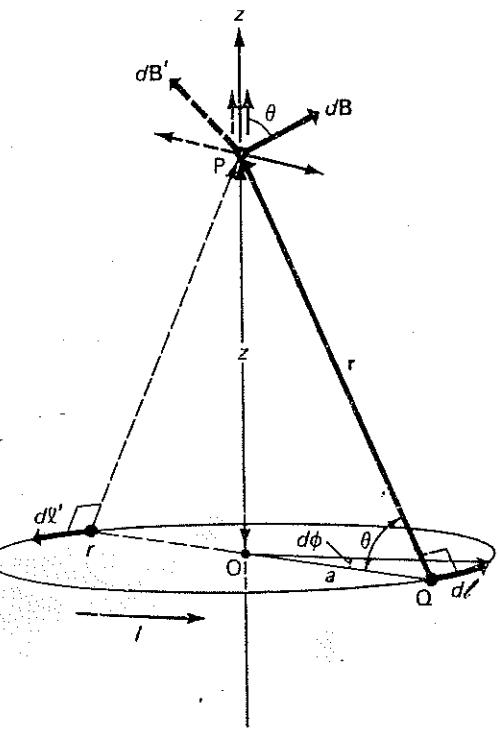


FIGURA 19.28

pero las componentes verticales son de igual signo y su suma tendrá una contribución definitiva al integrarse sobre todos los elementos dl . Ya que cada elemento de la espira tiene su compañero diametralmente opuesto dl' en el otro lado de aquella, no puede haber componente horizontal del campo resultante \mathbf{B} , por lo que \mathbf{B} sólo tendrá componente vertical z . En consecuencia, al sumar las contribuciones de los elementos de la espira con corriente, basta considerar las componentes z de los vectores $d\mathbf{B}$, pues ya se sabe que las componentes horizontales se cancelan.

Como son iguales los vectores en uno y otro miembro de la ecuación (19.5.4), sus componentes z deben ser también iguales. Entonces pueden igualarse las componentes z de estos vectores para obtener

$$dB_z = \frac{\mu_0 I (dl \times r)}{4\pi r^3} \quad (19.5.15)$$

De la figura 19.28 y de la definición del producto vectorial, la componente z de $dl \times r$ está dada por

$$(dl \times r)_z = |dl \times r| \cos \theta = r dl \frac{a \sin \theta}{r} = a dl \quad (19.5.16)$$

También, la longitud de arco dl puede expresarse como el producto del radio a de la espira circular multiplicado por el ángulo central $d\phi$. Por tanto, (19.5.16) queda como

$$(dl \times r)_z = a^2 d\phi \quad (19.5.17)$$

que al sustituir en (19.5.15) da

$$dB_z = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3} d\phi \quad (19.5.18)$$

Ahora puede integrarse esta ecuación sobre $d\phi$ y al hacerlo sacar de la integral el coeficiente de $d\phi$, pues al integrar sobre todos los elementos dl de la espira, la cantidad r^3 es la misma para cada elemento, y por tanto, es una constante en esta integración. Integrando sobre la longitud circular desde $\phi = 0$ hasta $\phi = 2\pi$, se obtiene

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \quad (19.5.19)$$

De la figura es evidente que $r^2 = a^2 + z^2$, y por tanto, que (19.5.19) se puede escribir finalmente como

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (19.5.20)$$

Este resultado puede expresarse en términos del momento magnético p_m de la espira conductora, recordando que $p_m = \pi a^2 I$. De esta manera, (19.5.20) queda como

$$B_z = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (19.5.21)$$

Es más difícil calcular la inducción magnética en puntos que no estén en el eje de la espira, de modo que no se tratará de hacerlo aquí. Baste decir que a distancias considerables de la espira, se puede demostrar que el campo \mathbf{B} es el de un dipolo cuyo momento es $p_m i$. Para valores de z mucho mayores que el radio a , se desprecia el valor de a en el denominador de (19.5.21); entonces, la expresión para el campo queda como

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{p_m}{z^3}$$

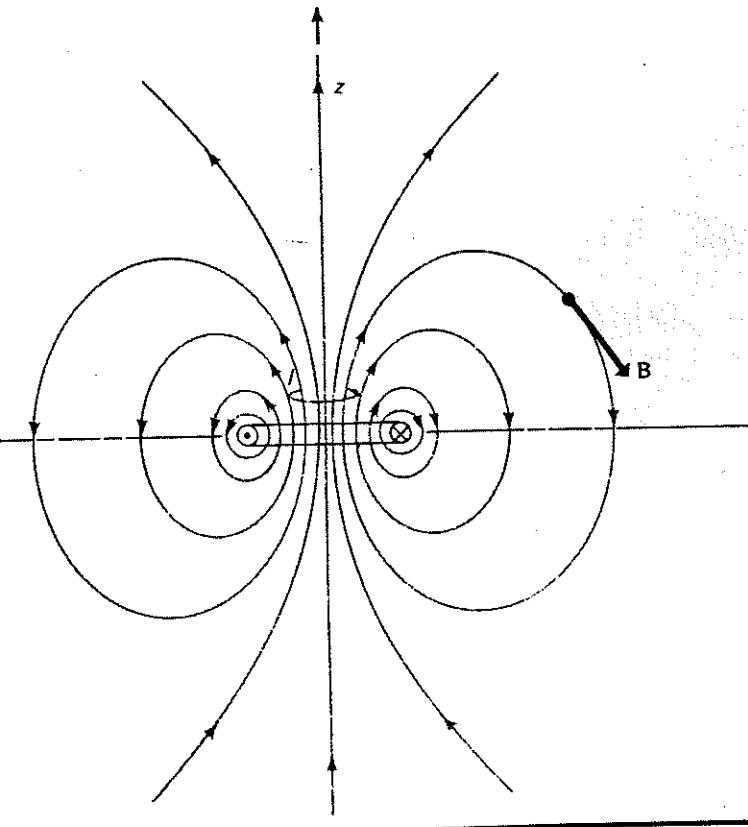
Esto es comparable a la expresión para el campo eléctrico axial de un dipolo eléctrico, que se dedujo en el Capítulo 16; es evidente la similitud en la forma. En la figura 19.29 se muestran las líneas de \mathbf{B} para este campo; en análisis posteriores se harán frecuentes referencias a esta configuración de campo.

EJEMPLO 19.5.2

Calcular la inducción magnética en el centro de una bobina circular de 100 vueltas, cuyo diámetro es de 10 cm y que lleva una corriente constante de 10 A.

Este ejemplo puede considerarse como un caso especial del anterior. La ecuación (19.5.20) da el campo en el eje de una espira circular. Tratándose de una bobina circular de N vueltas, habrá N espiras con corriente en vez de una sola y los campos se superponen para dar un campo N veces mayor que el expresado por (19.5.19). Al mismo tiempo, si

TIPOS MAGNÉTICOS DE CORRIENTES CONSTANTES



19.29. Campo magnético establecido por una espira circular con corriente.

evaluar el campo en el centro de la
debe hacerse z igual a cero en
(19.5.20). Multiplicando el segundo miembro
(19.5.20) por N y haciendo $z = 0$ en
(19.5.20), se obtiene

$$\frac{\mu_0 I}{a} \quad (19.5.22)$$

Por ejemplo, $N = 100$, $I = 10 \text{ A}$ y $a = 5$
 0.05 m , en cuyo caso (19.5.22) indica

$$\frac{0.00126}{(2)(0.05)} = 0.0126 \text{ Wb/m}^2$$

EJEMPLO 19.5.3

Determinar el campo en el punto P en el diagrama que se muestra en la figura 19.30. Obtener el valor numérico de la inducción B para el circuito en que $a = 5 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, $I = 10 \text{ cm}$ e $I = 100 \text{ A}$.

En este ejemplo, primero deben calcularse los campos de los tramos rectos AB y CD, y luego los de los tramos circulares BC y DA, superponiendo por último todos, por adición vectorial. Para los segmentos rectos AB y CD, los elementos de $d\ell$ son *paralelos* al vector r que une el elemento de corriente y el punto P donde desea determinarse el campo. Para estos segmentos, $d\ell \times r$ es *cero*, de manera que

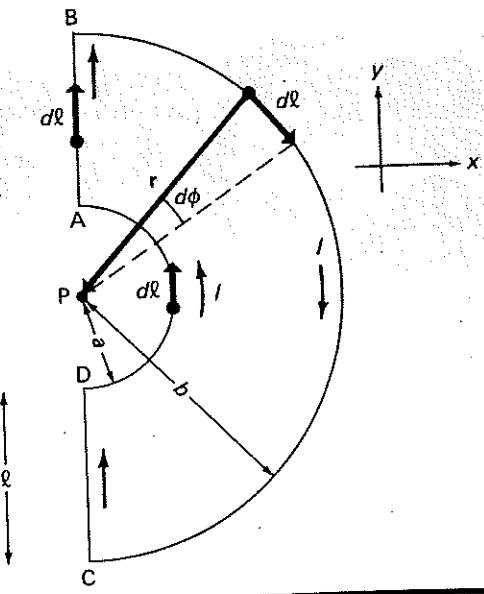


FIGURA 19.30

de acuerdo con (19.5.4), no puede haber contribución al campo por estas porciones del circuito. En el segmento circular externo, es claro que $d\ell \times B$ no tendrá componente x ni y , y que

$$(d\ell \times r)_z = -r dl = -(b)(b d\phi) = -b^2 d\phi \quad (19.5.23)$$

El signo negativo es necesario debido a que la dirección del vector del producto $d\ell \times r$ es *hacia adentro* de la página, es decir, que está en la dirección z negativa en el sistema de coordenadas que se usa. Entonces, de (19.5.4) puede escribirse

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-b^2 d\phi}{b^3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} d\phi \quad (19.5.24)$$

notando que $r = b$ en cada punto de este segmento del circuito. Esto puede integrarse sobre el semicírculo BC desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \pi$, dando

$$B_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_0^\pi d\phi = -\frac{\mu_0 I}{4b} \quad (19.5.25)$$

El campo B'_z del segmento circular DA se calcula exactamente de la misma manera. La única diferencia es que ahora el vector del producto $d\ell \times r$ sale de la página, en la dirección z positiva. El resultado de este cálculo es de la misma forma que (19.5.25), excepto que ahora no hay signo negativo y que b está reemplazada por a . Por tanto, puede escribirse

$$B'_z = \frac{\mu_0 I}{4a} \quad (19.5.26)$$

El campo total en P se obtiene por la adición vectorial de los dos campos dados por las ecuaciones (19.5.25) y (19.5.26). Como estos dos campos sólo tienen componentes z , en este caso basta sumar estas componentes para obtener

$$B_{z(\text{tot})} = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (19.5.27)$$

Si $a = 0.05 \text{ m}$, $b = 0.15 \text{ m}$ e $I = 100 \text{ A}$, esta expresión indica que $B_{z(\text{tot})} = 4.19 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$.

EJEMPLO 19.5.4

La figura 19.31 muestra dos espiras circulares idénticas que llevan corrientes iguales I . Sus planos están inclinados entre sí formando un ángulo que se muestra como 2θ en el diagrama. Demostrar que en cualquier parte del plano AB que biseca este ángulo, la inducción magnética total debe ser normal al plano.

Se comprende este resultado notando que los circuitos con corrientes iguales son idénticos y conducen asimismo, los campos B_1 y B_2 asociados a las espiras circulares, como se muestra en la figura 19.29, son simétricos. En el plano AB todos los puntos *equidistan* de los centros de las dos espiras. Ahora considérese una línea representativa de inducción magnética en el campo B_1 producido por la espira de la izquierda, por ejemplo, la línea QP, y su correspondiente PQ' en el campo B_2 producido por la espira del lado derecho. Por la simetría de campos con respecto a los planos de las espiras y la disposición simétrica del plano AB con respecto a las mismas, es evidente que son iguales las longitudes de arco QP y $Q'P$ sobre las líneas correspondientes de

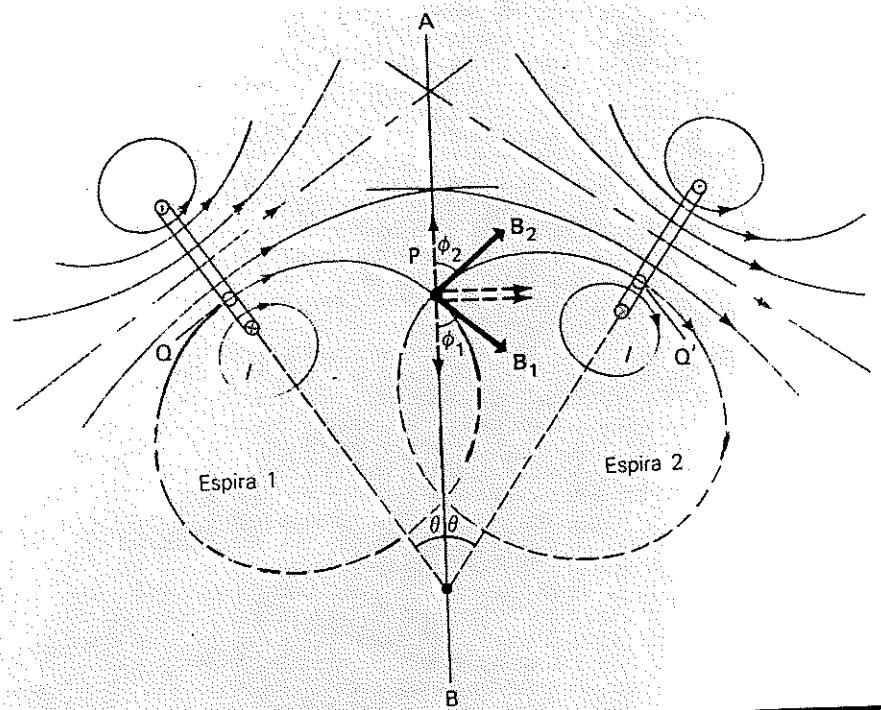


FIGURA 19.31

B , lo mismo que sus ángulos de intersección con el plano AB , ϕ_1 y ϕ_2 . Para que las corrientes en las dos espiras sean iguales, las magnitudes B_1 y B_2 también tendrán que ser las mismas. En estas circunstancias, de la figura 19.31 es claro que las componentes transversales $B_1 \cos \phi_1$ y $B_2 \cos \phi_2$ son de igual magnitud pero de signo contrario, por lo que se cancelan, dejando sólo las componentes normales $B_1 \sin \phi_1$ y $B_2 \sin \phi_2$. En consecuencia, el campo resultante B en el punto P es normal al plano AB y su magnitud está dada por

$$B = B_1 \sin \phi_1 + B_2 \sin \phi_2 \\ = 2B_1 \sin \phi_1 \quad (19.5.28)$$

Puesto que se ha escogido P arbitrariamente y es representativo de cualquier punto que esté en el plano AB , estos resultados serán ciertos para todos los puntos en el plano. Los resultados de este ejemplo son importantes, y se

tendrá ocasión de referirse a ellos de nuevo cuando se investiguen los campos magnéticos en el interior de bobinas toroidales y solenoidales.

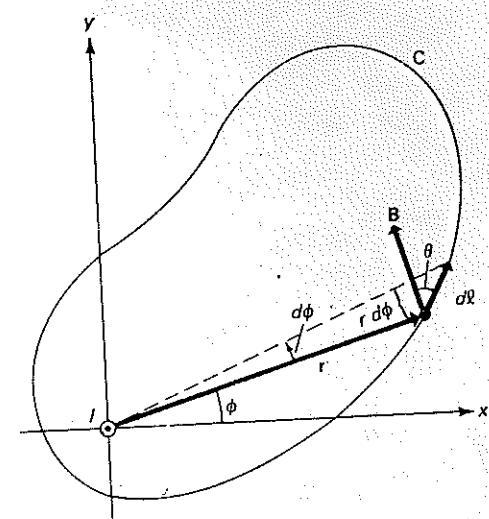
19.6 Ley de Ampère

En el estudio de la electrostática se encontró que en tanto que a menudo puede determinarse el campo eléctrico establecido por una distribución dada de cargas, superponiendo la contribución de campo de los elementos individuales de carga, el introducir la ley de Gauss proporciona otra forma por demás útil e importante de lograr el mismo propósito. Lo mismo ocurre en la determinación del campo magnético a partir de sus corrientes generatrices, aunque con ciertos aspectos que son distintos. Ya se han descrito las características principales de la determinación de los campos magnéticos por superposición de campos que

se deben a elementos individuales de corriente. Se podría esperar que la ley de Gauss del magnetismo sea en este caso una alternativa útil, igual que en electrostática. Por desgracia, no sucede así, pues en el caso de los campos magnéticos la integral de superficie del flujo magnético a través de una superficie cerrada invariablemente es *cero*, en vista de que no existen cargas magnéticas. La ley de Gauss para el magnetismo es informativa y tiene importante significado fundamental en relación con las propiedades de los campos magnéticos, pero poca utilidad práctica como para ayudar a calcular campos magnéticos a partir de distribuciones de corriente.

Por tanto, debe buscarse un método distinto que ayude esencialmente como lo hace la ley de Gauss en electrostática. La alternativa buscada la proporciona el teorema denominado *ley de Ampère*, que relaciona la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada, con la corriente total que fluye a través de la trayectoria de integración. La ley de Ampère se asemeja a la ley de Gauss para las cargas eléctricas en que una integral sobre una trayectoria cerrada arbitraria tiene relación con la intensidad de la fuente que encierra. Por tanto, la aplicación práctica de la ley de Ampère para calcular campos magnéticos sigue más o menos las mismas líneas que la ley de Gauss, excepto que la de Ampère comprende una integración de elementos de *línea* alrededor de una curva cerrada, mientras que la de Gauss corresponde a la integración de elementos de *superficie* sobre una cerrada.

Ya se ha demostrado cómo la ley de Gauss para los campos electrostáticos se obtiene como consecuencia directa de la ley de las fuerzas de Coulomb. También es cierto que es posible demostrar que la ley de Ampère se sigue directamente de la forma diferencial de la ley de Biot y Savart expresada por la ecuación (19.5.4). Es desafortunado que esta tarea matemática sea formidable, incluso con la ayuda de matemáticas mucho más avanzadas que el nivel usado en este libro. Por tanto, tendrá que presentarse una demostración de la ley de Ampère que es mucho menos amplia que lo que es de desear, pero se tendrá cuidado en señalar que los resultados obtenidos se aplican en casos mucho más generales.

FIGURA 19.32. Cálculo de la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de una trayectoria cerrada C que rodea un conductor largo y recto, que lleva una corriente de intensidad constante.

Considérese el caso que se ilustra en la figura 19.32, donde fluye una corriente constante I hacia afuera de la página en un conductor largo y recto, normal a aquella. Por comodidad, se escogió el sistema de coordenadas, de manera que la corriente fluya a lo largo del eje z , saliendo por el origen en el plano xy . Se muestra una curva cerrada arbitraria C que está en el plano xy y que rodea el conductor; se procederá evaluando la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sobre todos los elementos $d\mathbf{l}$ que constituyen la curva C . Por la definición del producto escalar de dos vectores, se sabe que

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cos \theta \, dl \quad (19.6.1)$$

en que θ es el ángulo entre los vectores \mathbf{B} y $d\mathbf{l}$. Pero, de la figura 19.32 es evidente que

$$dl \cos \theta = r \, d\phi \quad (19.6.2)$$

También se ha visto que la ley de Biot y Savart para un conductor largo y recto, representada por (19.5.12), indica que la magnitud de \mathbf{B} debe ser

CAMPOS MAGNÉTICOS DE CORRIENTES CONSTANTES

tegral sobre $d\phi$ en el segundo miembro de (19.6.5) sería

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_1} d\phi \right)$$

$(A \rightarrow B) \quad (B \rightarrow A)$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} (\phi_2 - \phi_1 + \phi_1 - \phi_2) = 0 \quad (19.6.7)$$

Así puede verse que la integral de $\mathbf{B} \cdot d\ell$ alrededor de una curva cerrada por la que pasa una corriente I es igual a $\mu_0 I$, pero que si la corriente no fluye a través de la curva cerrada, la integral es cero. Este es el contenido esencial de la ley de Ampère.

La demostración se limita al caso de un conductor recto de longitud finita y una curva C que está en un plano normal a aquél. Fácilmente se extiende al caso en que hay una serie de conductores largos rectos y paralelos que llevan las corrientes $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$, que dan lugar a los campos individuales $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \dots, \mathbf{B}_n$, cuya suma vectorial es el campo total \mathbf{B} . En este caso se calcula la integral de $\mathbf{B}_1 \cdot d\ell, \mathbf{B}_2 \cdot d\ell, \mathbf{B}_3 \cdot d\ell, \dots$, etc., alrededor de la curva C , obteniéndose $\mu_0 I_1, \mu_0 I_2, \dots$, en tanto las corrientes pasen a través de C , pero *haciéndose cero si no sucede esto último*. Luego se suman las integrales, obteniéndose el resultado

$$\oint_C (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \dots + \mathbf{B}_n) \cdot d\ell = \mu_0 I_c \quad (19.6.8)$$

o sea,

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I_c} \quad (19.6.9)$$

en que I_c representa la corriente total que fluye a través de la trayectoria cerrada arbitraria de integración C . En general, esto será menor que la suma de todas las corrientes $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ en la magnitud de la suma de las corrientes que no pasan por C , por lo que no contribuyen nada a la integral.

Sin embargo, la ley de Ampère es mucho más general que esto. No importa si los conductores son rectos o curvos, largos o cortos, paralelos o no. En efecto, no importa si hay conductores individuales o una distribución

continua de la densidad de la corriente. La trayectoria de integración C no necesita estar en un plano normal a la corriente, y de hecho, ni siquiera tiene que estar en un plano. La relación (19.6.9) que expresa la ley de Ampère es válida en todos los casos.

En cierta medida, la aplicación de la ley de Ampère sigue un curso semejante al que se siguió al emplear la ley de Gauss en electrostática. Por lo general es deseable escoger un contorno C sobre el cual la simetría de la distribución de la corriente permita la evaluación simple de la integral $\mathbf{B} \cdot d\ell$. Cuando no existe tal simetría, puede ser difícil o imposible utilizar la ley de Ampère en la forma dada antes para relacionar \mathbf{B} con la distribución de la corriente. La siguiente serie de ejemplos ilustrará las aplicaciones de la ley de Ampère.

EJEMPLO 19.6.1

Utilizar la ley de Ampère para encontrar la inducción magnética \mathbf{B} en la proximidad de un conductor cilíndrico infinitamente largo de radio a que lleva una corriente I . Se supone que la densidad de corriente es *uniforme* en la sección transversal del conductor.

Como se muestra en la figura 19.34, la simetría del caso permite conjeturar que las líneas de \mathbf{B} son circulares concéntricas. Por lo que respecta a la simetría, naturalmente pudieran ser radiales, pero por la forma de la ley de Biot y Savart (19.5.4) y de la experiencia en deducir (19.5.12) se sabe que esto no es realista. En las condiciones dadas, es difícil ver que pueda existir una componente de \mathbf{B} que no sea de tal forma. De ser así, ¿por qué tendrá la magnitud que tiene y por qué está en la dirección indicada? El que estas preguntas no puedan responderse, permite llegar a la conclusión de que efectivamente no hay componentes de \mathbf{B} en la dirección radial o en la dirección z .

Ya que así sucede, tiene sentido escoger trayectorias *circulares* como C y C' para realizar la integración especificada en la ley de Ampère. Los vectores \mathbf{B} y $d\ell$ siempre son paralelos en tales contornos, de manera que para esas trayectorias

$$\mathbf{B} \cdot d\ell = B d\ell \quad (19.6.10)$$

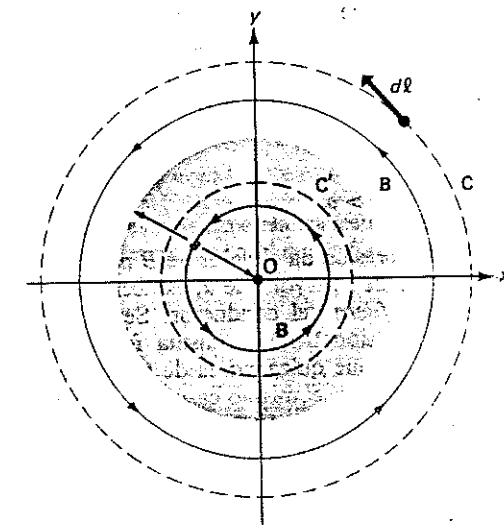


FIGURA 19.34

Más aún, la simetría circular total del conductor y del flujo de la corriente respecto del punto O, inducen la conclusión de que la *magnitud* de \mathbf{B} será la misma en todos los puntos de esta trayectoria. ¿Por qué deberá ser diferente en un punto de C , por ejemplo, a la que haya en algún otro punto? De nuevo, el hecho de que no pueda responderse la pregunta lleva a la conclusión inevitable de que efectivamente no es así. En estas circunstancias, B es la misma para todos los elementos $d\ell$ que constituyen la trayectoria C , por lo que puede considerarse como constante en la evaluación de la integral de $\mathbf{B} \cdot d\ell$. En vista de estas consideraciones y de (19.6.10), la ley de Ampère (19.6.6) se puede escribir como

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \oint_C B d\ell = B \oint_C d\ell = \mu_0 I_c \quad (19.6.11)$$

La integral de $d\ell$ alrededor de la trayectoria C es sencillamente la longitud de la trayectoria, que en este caso es la circunferencia C . Denotando el radio de la trayectoria circular C mediante r , (19.6.11) queda

$$Bl = 2\pi r B = \mu_0 I_c \quad (19.6.12)$$

I_c es la corriente total que fluye a través de la curva cerrada C . Si el radio r de la trayectoria

C es mayor que el radio del conductor, I_C es sencillamente la corriente total I que lleva el conductor. En este caso,

$$2\pi rB = \mu_0 I$$

de donde

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r > a \quad (19.6.13)$$

Esta expresión da el valor de B para cualquier valor de r mayor que a , es decir, en todas partes fuera del conductor. Se advierte que la expresión tiene la misma forma que (19.5.12), lo que quizás no es de sorprender, aunque este no es el mismo caso que el que se consideró al deducir (19.5.12), debido a que aquí se limitó la corriente a una línea a lo largo del eje z en vez de a un conductor de radio finito. Para puntos dentro del conductor, debe procederse en forma ligeramente distinta.² Supóngase que se desea aplicar la ley de Ampère alrededor de la trayectoria circular C' que está dentro del conductor y cuyo radio r es menor que el radio del mismo. La integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ se evalúa exactamente de la misma manera y tiene el valor $2\pi rB$ dado por (19.6.12). Pero ahora debe igualarse a μ_0 multiplicado por $I_{C'}$, que representa la corriente que fluye a través de la trayectoria C' y éste es ahora sólo una fracción de la corriente total I . Si se supone que la densidad de corriente j es uniforme en el área transversal del conductor, la corriente que pasa por C' es sencillamente la densidad de corriente multiplicada por el área limitada por la trayectoria cerrada C' . De acuerdo con ello,

$$I_{C'} = j\pi r^2 \quad (19.6.14)$$

Puesto que la densidad de corriente es la corriente total I dividida entre el área total del conductor, que es πa^2 , se puede escribir (19.6.14) como

$$I_{C'} = I \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = I \frac{r^2}{a^2} \quad (19.6.15)$$

² Aunque es cierto que en el equilibrio electrostático no puede haber campo eléctrico dentro de un cuerpo conductor, no hay ley que impida que haya un campo magnético en el interior de un cuerpo tal. Como pronto se verá, los campos magnéticos dentro de los conductores pueden ser tanto o más intensos que los que están en el exterior.

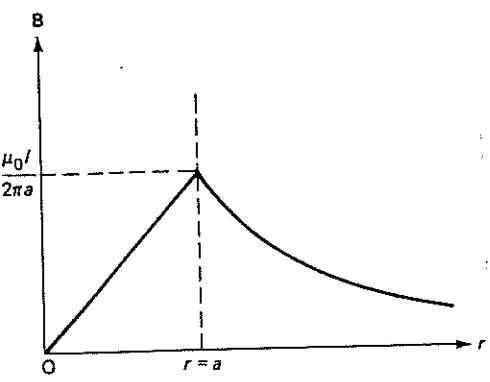


FIGURA 19.35. Gráfica de inducción magnética en función de la distancia radial r a partir del centro del conductor mostrado en la figura 19.34.

Si ahora se iguala la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$, que tiene el valor $2\pi rB$ como antes, a $\mu_0 I_{C'}$, de acuerdo con la ley de Ampère puede escribirse

$$2\pi rB = \mu_0 I_{C'} = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2} \quad (19.6.16)$$

Luego se despeja B a fin de obtener, r menor que a ,

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \quad r < a \quad (19.6.17)$$

Por tanto, fuera del conductor, B está dado por (19.6.13) y decrece a medida que aumenta la distancia en proporción a $1/r$, mientras que dentro del conductor está expresado por (19.6.17) y aumenta linealmente en función de r desde el centro hasta la superficie exterior. En la superficie, donde $r = a$, tanto (19.6.13) como (19.6.17) llevan al mismo valor para el campo, $B = \mu_0 I / 2\pi a$. Ya que el vector \mathbf{B} es tangente en todas partes a las trayectorias circulares como C o C' , las líneas de \mathbf{B} son circulares, como se ilustra en la figura 19.34. En la figura 19.35 se presenta la variación de B en función de r . Para un conductor de 1 mm de radio que lleva una corriente de 100 A, la máxima inducción, que ocurre en la superficie del conductor, será

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{(4\pi)(10^{-7})(100)}{(2\pi)(10^{-3})} = 0.0200 \text{ Wb/m}^2$$

EJEMPLO 19.6.2

Utilizar la ley de Ampère para evaluar el campo magnético de un conductor cilíndrico hueco, infinitamente largo, de radio exterior a y radio interior b , que lleva una corriente total I . Determinar el campo fuera del conductor, en la sustancia conductora y dentro de la cavidad tubular hueca, cerca del centro. Se supone que la densidad de corriente es constante en el conductor.

En la figura 19.36 se muestra una sección transversal de este elemento. Nuevamente, la simetría del conductor y el flujo de la corriente es tal que puede suponerse con seguridad que las líneas de \mathbf{B} son circulares, de manera que el vector \mathbf{B} siempre es tangente a ellas, como se ilustra. Por este motivo, si se escogen trayectorias circulares como C , C' y C'' para evaluar la integral de Ampère, nuevamente se encontrará que \mathbf{B} y los elementos de $d\mathbf{l}$ de la trayectoria siempre son paralelos, y que $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ simplemente se reduce a $B dl$. También en este caso, la simetría es tal que la magnitud de \mathbf{B} será la misma en todas las partes de los contornos circulares, por lo que se puede escribir fuera de la integral. Como en el ejemplo anterior, puede expresarse la ley de Ampère como

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_C dl = \mu_0 I_C \quad (19.6.18)$$

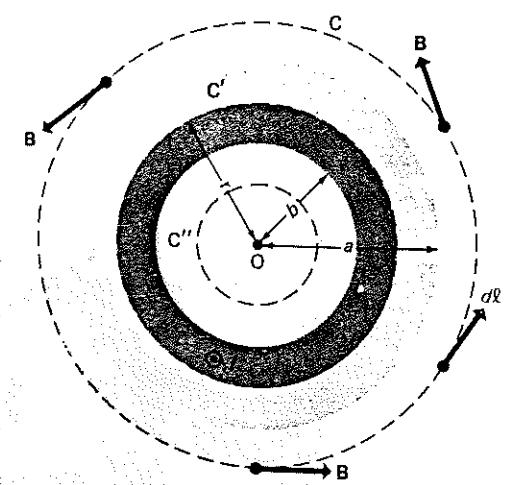


FIGURA 19.36

De nuevo, la integral de $d\mathbf{l}$ alrededor de la trayectoria es la longitud del arco total del contorno, en este caso, una circunferencia. Por tanto, para el contorno C que está totalmente fuera del conductor, se tiene

$$2\pi rB = \mu_0 I_C = \mu_0 I \quad r > a \quad (19.6.19)$$

en que r es el radio de la trayectoria circular C e I es la corriente total que lleva el conductor. Despejando B ,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r > a \quad (19.6.20)$$

Este es el mismo resultado que se encontró en el ejemplo anterior para un conductor cilíndrico macizo. Por tanto, con sólo observar el campo magnético fuera del conductor, no es posible decir si es macizo o hueco.

Dentro del conductor, en una trayectoria de integración como C' , debe igualarse la integral de Ampère a la parte de la corriente total $I_{C'}$ que pasa a través del contorno. La corriente dentro del mismo, puede expresarse como el producto de la densidad de corriente constante j por el área de la sección transversal del conductor, queda dentro del contorno C' de radio r , el cual se muestra sombreado en tono más oscuro en la figura 19.36. Como esta área es $\pi r^2 - \pi b^2$, se tiene

$$I_{C'} = j\pi(r^2 - b^2) \quad (19.6.21)$$

Pero como puede expresarse la densidad de corriente j como la corriente total I dividida entre el área transversal total del conductor, que en este caso es $\pi a^2 - \pi b^2$, es posible escribir (19.6.21) como

$$I_{C'} = \frac{I(r^2 - b^2)}{a^2 - b^2} \quad (19.6.22)$$

Como antes, la integral de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de C' es $2\pi rB$, de manera que la ley de Ampère de

$$2\pi rB = \mu_0 I_{C'} = \frac{\mu_0 I(r^2 - b^2)}{a^2 - b^2} \quad (19.6.23)$$

o sea que

$$B = \frac{\mu_0 I(r^2 - b^2)}{2\pi r(a^2 - b^2)} \quad b < r < a \quad (19.6.24)$$

gráfica del campo B en función de r , dado por (19.6.20), (19.6.24) y (19.6.25).

EJEMPLO 19.6.3

La figura 19.38 muestra la sección transversal de un conductor cilíndrico infinitamente largo, en el que se ha hecho un agujero descentralizado. El conductor lleva una corriente I distribuida uniformemente en el área transversal conductora. El radio externo del conductor es a , el radio del agujero es b , y el eje del conductor y el agujero están a la distancia c , como se muestra en la figura. Encontrar la magnitud y dirección de la inducción magnética en el eje O' del agujero.

Este es un ejemplo difícil que a primera vista parece desafiar todos los métodos de ataque. Ya que el agujero está descentralizado, no se puede concluir que el campo B sea cero dentro de él, ni puede evaluarse con facilidad de integral de Ampère alrededor de un contorno circular centrado en O o en O' , de manera que ya no se justifica suponer que el campo B sea tangente a circunferencias centradas en uno u otro punto. Ello significa que en una trayectoria circular de este tipo, \mathbf{B} y $d\ell$ ya no son paralelos y $\mathbf{B} d\ell$ ya no es igual a $\mathbf{B} d\ell$ sino a $\mathbf{B} d\ell \cos \theta$, en que θ es el ángulo desconocido entre los

FIGURA 19.37. Gráfica de la inducción magnética en función de la distancia radial desde el eje del sistema correspondiente al conductor hueco de la figura 19.36.

El radio de la trayectoria de integración es menor que el radio interno del conductor, como sucede en el caso del contorno C'' de la figura 19.36, no fluye corriente a través de la trayectoria cerrada de integración. Por tanto, para toda trayectoria de ese tipo, $I_{C''} = 0$. La ley de Ampère da

$$\mu_0 I_{C''} = 0$$

(19.6.25)

Entonces, es cero la inducción magnética en el interior del conductor hueco. Este resultado es contrario al que se obtuvo de la ley de Gauss para la electricidad estacionaria para el caso de un cuerpo esférico hueco cargado, en el cual se encontró que el campo eléctrico en la cavidad esférica interior es cero. También recuerda que se anula el campo gravitacional en el interior de un cuerpo esférico hueco. Empero, en el caso del campo magnético, se halla que el campo se anula dentro de cilindros huecos en lugar de cavidades huecas, debido a que la ley de Biot y Savart es algo distinta en su forma a la ley de Coulomb. Nuevamente se notará que cuando $r = b$, tanto (19.6.20) como (19.6.14) se reducen a $B\mu_0 J/2\pi a$, en tanto que para $r = b$, (19.6.24) da $B = 0$, lo que concuerda con (19.6.25). En la figura 19.37 se muestra una



FIGURA 19.37.

gráfica del campo B en función de r , dado por (19.6.20), (19.6.24) y (19.6.25).

dos vectores. Tampoco está totalmente claro cómo debía escogerse una trayectoria no circular en que \mathbf{B} y $d\ell$ sean paralelos. La respuesta podría obtenerse superponiendo las contribuciones de campo de todos los elementos de corriente en el conductor, de acuerdo con la ley de Biot y Savart (19.5.4), pero el cálculo es difícil, definitivamente no recomendado para quienes no se sientan a gusto con las matemáticas. Empero, puede resolverse con relativa facilidad utilizando la combinación apropiada de la ley de Ampère y la superposición si se procede desde el punto de vista del concepto físico, y no del formalismo matemático. En efecto, proporciona una valiosa demostración del valor de la percepción física sobre el cálculo matemático directo. Hablando metafóricamente se trata de una carrera de resistencia, más que de una carrera de velocidad.

El truco consiste en percatarse de que la distribución de corriente especificada por el enunciado del ejemplo, puede lograrse superponiendo una densidad de corriente uniforme j (hacia afuera de la página) que se extiende por todo el interior del conductor, *incluyendo* al agujero, y una densidad de corriente igual pero en dirección opuesta $-j$ (hacia adentro de la página) y que sólo se extiende sobre la región del hueco. La suma de estas dos distribuciones da la densidad de corriente uniforme j en el conductor y cero en la región hueca, que es precisamente lo que se tiene. Entonces puede calcularse el campo magnético \mathbf{B}_1 debido a la primera de las distribuciones mencionadas, utilizando la ley de Ampère. Al hacerlo, ahora es perfectamente razonable la simetría del flujo de corriente y del conductor, que permite hacer las suposiciones simplificativas usuales con respecto a \mathbf{B}_1 y $d\ell$. De la misma manera puede calcularse el campo magnético \mathbf{B}_2 que se debe a la segunda distribución de corriente en la región del agujero, usando nuevamente la simplificación. Entonces basta superponer los campos \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 mediante adición vectorial para obtener el campo total \mathbf{B} correspondiente a la distribución total de corriente, que es lo que se especificó en el enunciado del ejemplo.

En realidad, no se necesitan hacer los cálculos de la ley de Ampère, pues ya se conocen los resultados del ejemplo 19.6.1. Por las

ecuaciones (19.6.14) y (19.6.16), fácilmente se ve que el campo \mathbf{B}_1 en el interior del conductor cilíndrico de radio a con densidad de corriente uniforme j es

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j r}{2} \quad (19.6.26)$$

Las líneas de \mathbf{B}_1 son círculos centrados en O y el campo \mathbf{B}_1 en cualquier punto como P , siempre será perpendicular al vector r que lo une con el origen. En el caso de \mathbf{B}_2 se tiene un campo que proviene de una densidad de corriente $-j$ (que entra a la página) extendido en una región circular centrada en O' . De acuerdo con la ecuación (19.6.14) y (19.6.16), la magnitud de este campo será

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 (-j) \pi r'^2}{2\pi r'} = -\frac{\mu_0 j r'}{2} \quad (19.6.27)$$

en que r' es la distancia desde el punto P , donde se requiere evaluar el campo, al centro de la distribución de densidad de corriente en O' . Las líneas de \mathbf{B}_2 son círculos con centro en O' y la dirección de \mathbf{B}_2 en un punto como P naturalmente será perpendicular al vector r' que une al punto con O' . De aquí, es claro que en general, \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 están en direcciones distintas y que al expresar el campo total \mathbf{B} como la suma $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$, es necesario tomar cuidadosamente en cuenta las leyes de la adición vectorial. Aun así, las direcciones de los dos campos están especificadas de manera bastante simple por los vectores r , r' y la distancia OO' ; y aunque deben efectuarse ciertos cálculos relativamente tediosos, no es demasiado difícil obtener expresiones matemáticas para las componentes de \mathbf{B} en cualquier punto.

Pero no se pidió hacer esto, sino sólo encontrar la magnitud y dirección de $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ en el punto O' . Si se moviera el punto P a O' , se tendría $r' = 0$; y de (19.6.27), $\mathbf{B}_2 = 0$. En estas circunstancias, el vector r se extendería desde O hasta O' y su magnitud es entonces $r = c$. Por tanto, en este punto $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ y de (19.6.26),

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 j c}{2}$$

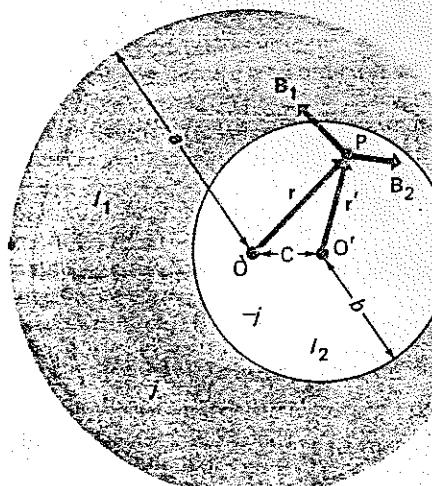


FIGURA 19.38

De la figura 19.38, es evidente que la dirección de \mathbf{B} en estas condiciones sería verticalmente hacia arriba en el plano de la página.

Ahora sólo necesita encontrarse la relación entre la densidad de corriente j y la corriente total I que lleva el conductor. La corriente total I_1 que se supuso era el origen de \mathbf{B}_1 está dada por la densidad de corriente j multiplicada por el área total limitada por la frontera exterior del conductor, de donde

$$I_1 = \pi a^2 j \quad (19.6.29)$$

De la misma manera, la corriente total I_2 que actúa como origen de \mathbf{B}_2 es la densidad de corriente $-j$ multiplicada por el área del agujero:

$$I_2 = -\pi b^2 j \quad (19.6.30)$$

La suma algebraica de estas dos corrientes es la corriente neta I que realmente lleva el conductor:

$$I = I_1 + I_2 = \pi j(a^2 - b^2)$$

o sea,

$$j = \frac{I}{\pi(a^2 - b^2)} \quad (19.6.31)$$

Sustituyendo esto en (19.6.28), finalmente se obtiene

$$B = \frac{\mu_0 I c}{2\pi(a^2 - b^2)} \quad (19.6.32)$$

Puede notarse que cuando $c = 0$, el agujero es concéntrico. En este caso, (19.6.32) da $B = 0$, lo que concuerda con el resultado que se obtuvo en el ejemplo 19.6.2.

19.7 Campos magnéticos en el interior de bobinas toroidales y solenoides

Las bobinas toroidales (anulares) y los solenoides (bobinas cilíndricas) son de especial importancia en trabajos experimentales de electromagnetismo en el laboratorio, al igual que en la tecnología. También se encontrará que puede comprenderse mejor la ley de Ampère por el estudio de estos elementos. Por ahora se emprenderá una investigación

de estas estructuras desde el punto de partida de la ley de Ampère.

Es natural pensar que la mejor manera de empezar sería con la bobina solenoidal recta, infinitamente larga y de espiras muy próximas que aparentemente es el electroimán más simple. En efecto, en muchos libros se comienza utilizando la ley de Ampère en una deducción muy simple de la inducción magnética dentro de este tipo de bobina, cuya única virtud es la que se obtiene la respuesta correcta. Pero la aplicación de la ley de Ampère a un solenoide no es cuestión sencilla, si se insiste en comprender claramente las respuestas a todas las preguntas que surgen durante el proceso.

En consecuencia, se procederá investigando primero las propiedades de los *toroides*, que son realmente más simples y fáciles de analizar que los solenoides. En el ejemplo 19.5.4 y en la figura 19.31, que le corresponde, se establecieron las bases para este trabajo. El objeto de dicho ejemplo fue demostrar que el campo \mathbf{B} dentro de una bobina toroidal de espiras muy cercanas como la de la figura 19.39, es solamente tangente a líneas circulares y que no tiene componente alguna en un plano perpendicular al eje de la bobina, es decir, en un plano como AB. Es inmediatamente

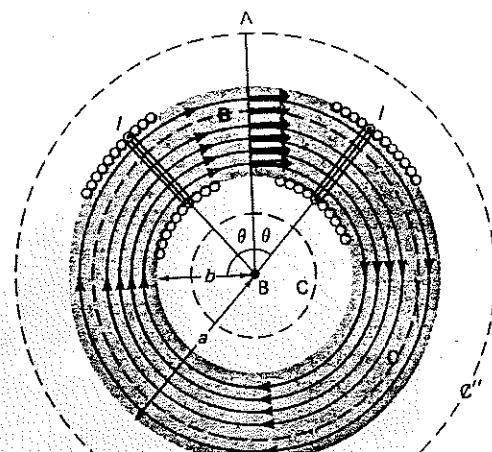


FIGURA 19.39. Bobina toroidal (o tórica) que conduce una corriente constante I .

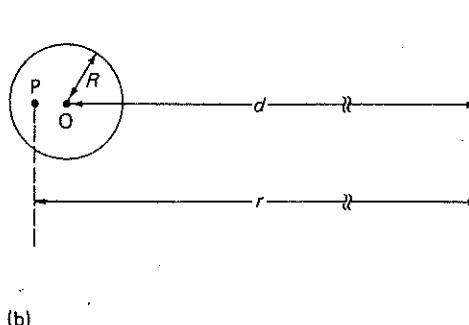
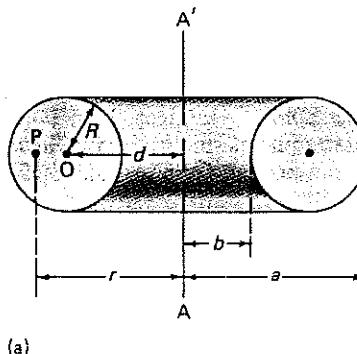


FIGURA 19.40. Parámetros geométricos de un toroide "grueso" (a) y uno "delgado" (b).

acerca de la dirección de \mathbf{B} en cualquier parte del toroide. La conclusión es que el campo \mathbf{B} en una bobina toroidal siempre debe ser tangente a una línea circular y que, por tanto, las líneas de \mathbf{B} deben ser círculos concéntricos, como se muestra en la figura 19.39. De la sola simetría, también se puede concluir que la *magnitud* de \mathbf{B} es la misma en todas partes en cualquier círculo centrado en A.

Supóngase ahora que el radio exterior de la bobina es a y que el radio interior es b lo que significa que el radio *medio* está dado por

$$d = \frac{a+b}{2} \quad (19.7.1)$$

Entonces, la circunferencia media c será

$$c = 2\pi d = \pi(a+b) \quad (19.7.2)$$

En la figura 19.40, a se ilustran estos parámetros dimensionales. Supóngase que el número total de vueltas de conductor (o espiras) es N , por lo que el número de vueltas por unidad de longitud es

$$n = \frac{N}{c} = \frac{N}{\pi(a+b)} \quad (19.7.3)$$

Ahora se aplica la ley de Ampère a la bobina de la figura 19.39, utilizando contornos circulares como C , C' y C'' a lo largo de los cuales se puede evaluar la integral de $\mathbf{B} \cdot dl$. Para una trayectoria como C , puede escribirse la ley de Ampère como

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot dl = B \oint_C dl = 2\pi r B = \mu_0 I_C \quad (19.7.4)$$

en que r es el radio de la trayectoria circular C . Pero para una trayectoria como C' , cuyo radio es menor que el radio interno b , $I_{C'} = 0$, por lo que (19.7.4) indica que

$$B = 0 \quad r < b \quad (19.7.5)$$

A lo largo de una curva como C'' , la corriente $I_{C''}$ que atraviesa la trayectoria cerrada de integración, es sencillamente NI , pues hay N espiras conductoras, cada una de las cuales

corriente I . La ley de Ampère evaluada a lo largo de una trayectoria como ésta da

$$= B \oint_C dl = 2\pi r B = \mu_0 N I \quad (19.7.6)$$

Al sustituir en la ecuación (19.7.6) la ecuación (19.7.5), se obtiene la ecuación, dentro del toroide, para $b < r < a$

$$\frac{I}{r} \quad b < r < a \quad (19.7.7)$$

Al sustituir en la ecuación (19.7.3), $N = n\pi(a + b)$, en que n es el número medio de vueltas por unidad de longitud de la bobina, también se puede escribir (19.7.7) como

$$\frac{n(a + b)I}{2r} = \mu_0 n I \frac{d}{r} \quad (19.7.8)$$

Al considerar el radio interno de la bobina, donde $r = d - \frac{1}{2}(a + b)$, el campo B estará dado por

$$onI \quad (19.7.9)$$

Al considerarse que esta expresión da el campo magnético en el interior de la bobina toroidal, se obtiene trayectorias circulares como C' , en las cuales el radio es mayor que el radio máximo del toroide, nuevamente $I_{C''}$ se hace cero, pues en cada vuelta hay una corriente I que entra y sale de la figura y una corriente igual pero de signo contrario, $-I$, que sale. La suma de estas corrientes para cada espira es cero, lo que da $I_{C''} = 0$. Por tanto, la ley de Ampère indica que

$$dl = 2\pi r B = \mu_0 I_{C''} = 0 \quad (19.7.10)$$

Al sustituir en la ecuación (19.7.10) la ecuación (19.7.9) se obtiene

$$r > a \quad (19.7.11)$$

Los resultados son notables porque el campo magnético dentro del toroide puede haber un intenso campo magnético dado por (19.7.8) o por (19.7.10), mientras que fuera de la bobina toroidal no hay ningún campo. Esta propiedad de las bobinas lleva a su extenso uso en circuitos eléctricos, donde es necesario generar un campo magnético intenso, pero resulta in-

deseable tener campos externos dispersos que puedan interferir en la operación de otros elementos de circuito. En realidad, el enrollamiento de las bobinas toroidales, o en general, el de cualquier bobina, realmente no produce espiras circulares planas sino que es una hélice cuyo paso es tan pequeño que sus espiras casi son de forma circular. Por ese motivo, además de fluir alrededor de la sección transversal circular, la corriente también avanza a lo largo de un toroide o un solenoide, recorriendo los aros a toda su longitud. Esto quiere decir que el campo exterior de una bobina toroidal real jamás es verdaderamente cero, sino que tiene un pequeño valor residual en forma parecida al que estaría asociado a la corriente I que fluyera en una sola espira circular de radio d . Pero pueden ser miles de veces más pequeño que el campo interior.

* El caso del solenoide muy largo puede tratarse como el caso límite de la bobina toroidal cuando el radio medio d se hace infinitamente grande, mientras se mantiene constante el radio de la sección transversal R , como se ilustra en la figura 19.40. Después de todo, es verdad que puede considerarse a una línea recta como un segmento de una circunferencia de radio infinito. De las ecuaciones (19.7.8) y (19.7.9), es claro de inmediato que el campo en el centro del toroide siempre tiene el valor $B_c = \mu_0 n I$, que es totalmente independiente del radio d . Entonces, esta ecuación da el campo en el centro de la bobina en el punto O en la figura 19.40, sin importar la magnitud del radio, incluso en el límite cuando d tiende a infinito.

La expresión (19.7.8) da el campo en otros puntos en el interior de la bobina, en que r es la distancia del punto desde el eje central AA'. Cuando el radio medio d es relativamente pequeño, como en la figura 19.40, a, la relación d/r de la ecuación (19.7.8) puede ser apreciablemente mayor o menor que la unidad para puntos dentro de la bobina que pueden estar cerca del radio interno o externo. Pero cuando d se hace muy grande (y la sección transversal de la bobina se mantiene constante) como se ilustra en la figura 19.40, b, la relación d/r para cualquier punto dentro de la bobina jamás puede diferir demasiado de la unidad. De hecho, a medida que d aumenta sin límite, la relación d/r para todos los puntos

internos se aproxima a la unidad, por tanto en la ecuación (19.7.8) se encuentra que en todas partes en el interior de la bobina, el campo estará dado por

$$B = B_c = \mu_0 n I \quad (19.7.12)$$

en que n es el número de vueltas por unidad de longitud. Al mismo tiempo, de (19.7.5) y de (19.7.11), el campo en todas partes fuera de la bobina será cero. Por tanto, los campos asociados a las bobinas toroidales y a las solenoidales de longitud infinita tienen las configuraciones que se muestran en la figura 19.41.

Desafortunadamente, todos los solenoides con que debe tratarse en la realidad son de longitud finita, por lo que sus propiedades se apartan en mayor o menor grado a las del solenoide infinito ideal descrito. En ningún caso ocurre que el campo magnético externo de un solenoide finito sea cero como el de uno de longitud infinita. En vez de ello, para un solenoide largo y delgado el campo externo es similar al de un imán de barra recto y largo (fig. 19.4), mientras que para un solenoide corto y grueso, el campo es muy parecido al de la espira circular ilustrada en la figura 19.29. Sin embargo tratándose de un solenoide largo y delgado, el campo dentro de la bobina es bastante uniforme en una parte considerable del interior y tiene aproximadamente el valor constante dado por (19.7.12). En la figura

19.42 se muestra la configuración del campo en este tipo de solenoide; estas bobinas se pueden utilizar provechosamente para generar un campo magnético constante en el laboratorio, y también en la construcción de electroimanes, bobinas de relevadores y otros dispositivos electromecánicos.

EJEMPLO 19.7.1

Una bobina toroidal tiene un diámetro interno $a = 5$ cm, un diámetro externo $b = 10$ cm, 1 500 vueltas de alambre y conduce una corriente de 5 A. Encontrar (a) el campo magnético en el centro de la sección transversal circular, (b) el campo interior justamente después del radio interno y (c) el campo interno justo antes del radio externo. (d) Indicar qué campo habrá dentro de un solenoide infinito que tuviera precisamente el mismo número de vueltas por unidad de longitud.

En este ejemplo, el radio interno es de 0.05 m, el radio externo de 0.10 m y el radio medio o central d está dado por

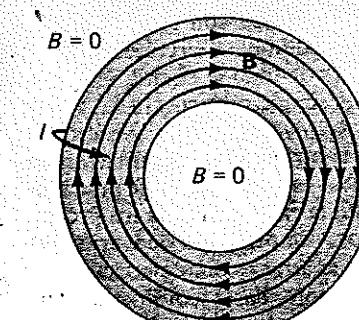
$$d = \frac{1}{2}(a + b) = \left(\frac{1}{2}\right)(0.15) = 0.075 \text{ m}$$

Por tanto, la circunferencia media es

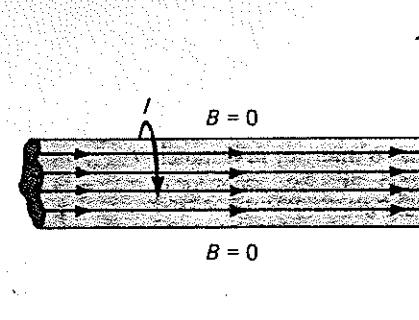
$$c = 2\pi d = (2\pi)(0.075) = 0.4712 \text{ m}$$

El número de vueltas por longitud unitaria es

$$n = \frac{N}{c} = \frac{1500}{0.4712} = 3183 \text{ vueltas/m}$$



(a)



(b)

FIGURA 19.41. Configuración de campo para (a) una bobina toroidal y (b) un solenoide largo y recto.

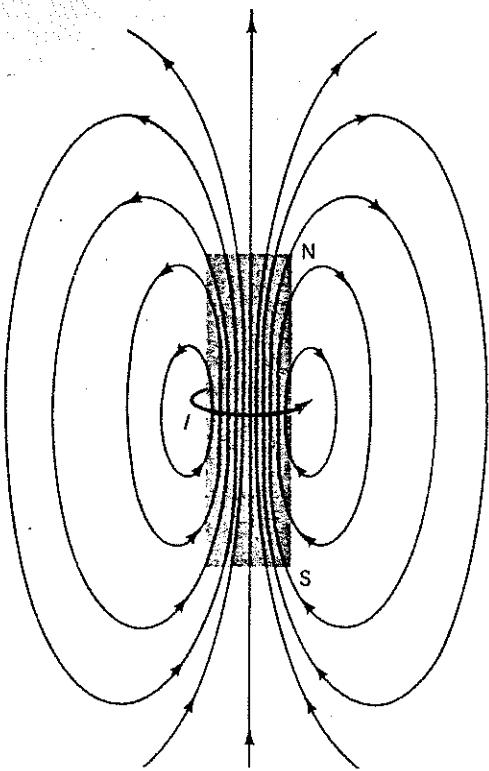


FIGURA 19.42. Configuración del campo magnético de un solenoide largo y finito.

De acuerdo con (19.7.9), el campo central B_c será

$$B_c = \mu_0 n I = (4\pi)(10^{-7})(3183)(5) \\ = 0.0200 \text{ Wb/m}^2$$

Justo después del radio interno, la distancia r al origen es de 0.05 m. De acuerdo con (19.7.8), el campo ahí es

$$B = \mu_0 n I \frac{d}{r} = \frac{(0.0200)(0.075)}{(0.05)} = 0.0300 \text{ Wb/m}^2$$

Justo antes del radio externo, $r = 0.10 \text{ m}$ y B estará dado por

$$B = \mu_0 n I \frac{d}{r} = \frac{(0.020)(0.075)}{(0.10)} = 0.0150 \text{ Wb/m}^2$$

Para un solenoide de longitud infinita con el mismo número de vueltas por unidad de longitud, el campo en todas partes del interior es

$$B = \mu_0 n I = (4\pi)(10^{-7})(3183)(5)$$

$$= 0.0200 \text{ Wb/m}^2$$

19.8 Fuerza entre corriente y definición del ampere

Antes ya se estudió el hecho de que las corrientes en los conductores dan lugar a campos magnéticos, y también que los conductores en los que fluye corriente experimentan fuerzas cuando se las expone a campos magnéticos externos. Reuniendo estas dos observaciones, puede comprenderse fácilmente que las corrientes pueden ejercer fuerzas entre sí a través de sus campos magnéticos.

Es bastante fácil escribir una expresión matemática para ese tipo de fuerzas, de la forma

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dl_2 \times (dl_1 \times r_{12})}{r_{12}^3} \quad (19.8.1)$$

En esta expresión, F_{12} representa la fuerza sobre la corriente I_2 que fluye en un conductor C_2 compuesto por los elementos dl_2 , debida a la corriente I_1 que fluye en otro conductor C_1 descrito análogamente por los elementos dl_1 . El vector r_{12} es un vector que va del elemento dl_1 del primer conductor al dl_2 del segundo. Las integrales se evalúan con respecto a los elementos dl_1 y dl_2 de ambos circuitos y deben tomarse alrededor de todo el circuito en cada caso. Aunque es simple deducir (19.8.1) partiendo de (19.4.5) y de (19.5.4), no tiene mucho sentido hacerlo, pues la evaluación de la integral anterior es tan tediosa que prácticamente hace inútil la expresión para los propósitos inmediatos. Empero, su deducción es instructiva, y se le asigna como ejercicio.

En este momento basta considerar sencillamente el caso de dos conductores rectos paralelos, infinitamente largos, separados a la distancia a , y que llevan las corrientes constantes I_1 e I_2 , como se ilustra en la figura 19.43. De la ley de Biot y Savart, o de la ley de Ampère, se sabe que la inducción magnética B_1

De hecho, ya que B_1 es constante en toda parte del conductor de la derecha, se puede escribir la fuerza total sobre un segmento de ese conductor de longitud l como

$$F = I_2(l \times B_1) \quad (19.8.5)$$

El vector l se ilustra en la figura 19.43. Ahí es claro que el vector F tiene la dirección mostrada, por lo que la corriente de la derecha experimenta una fuerza de *atracción* hacia la corriente paralela de la izquierda. De acuerdo con (19.8.5) y de (19.8.3), la magnitud de la fuerza F debe ser

$$F = I_2(l \times B_1) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} \quad (19.8.6)$$

Se pueden resumir estos resultados expresando que la fuerza por unidad de longitud que experimenta el conductor de la derecha, es de atracción y está dada por

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (19.8.7)$$

Un cálculo semejante de la fuerza experimentada por el conductor de la izquierda debido al campo magnético de la corriente en el conductor de la derecha, indica que la fuerza que actúa en aquel conductor es de magnitud igual y de dirección opuesta a la dada por (19.8.7), lo que es de esperar para que se cumpla la tercera ley de Newton, ya que estas fuerzas califican en todas formas como una pareja de acción y reacción.

Si se invierte el sentido de la corriente I_2 , el vector l también invierte su dirección, lo que a su vez invierte la dirección de la fuerza. Entonces se encuentra que las dos corrientes se repelen entre sí, por lo que la ley será que

las corrientes paralelas se atraen mientras que las antiparalelas se repelen.

Ahora se calculará la fuerza sobre un tramo de 1 m de conductor que lleva una corriente de exactamente 1 A, situado en forma paralela, el cual se encuentra a 1 m de distancia y que lleva la misma corriente. En este caso, $l = 1.0$

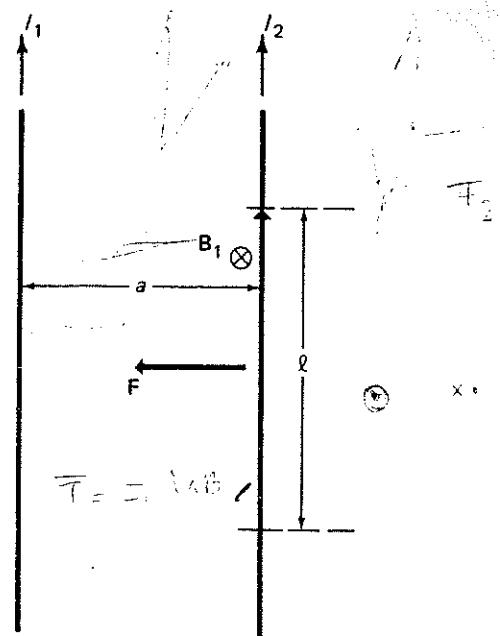


FIGURA 19.43. Determinación de las fuerzas magnéticas entre conductores rectos, paralelos y de gran longitud que conducen corrientes constantes.

debida a la corriente I_1 en el conductor de la izquierda es

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad (19.8.2)$$

en que r es la distancia desde el conductor. La dirección de B_1 será perpendicular hacia el borde superior de la página, como se muestra en la figura 19.43, de acuerdo con la regla de la mano derecha. Claramente, la magnitud de B_1 en el sitio del segundo conductor, donde $r = a$, es

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \quad (19.8.3)$$

De acuerdo con (19.4.5), la fuerza sobre un elemento dl del conductor de la derecha —que lleva la corriente I_2 — debida a este campo magnético será,

$$dF = I_2(dl \times B_1) \quad (19.8.4)$$

CAMPOS MAGNÉTICOS DE CORRIENTES CONSTANTES

$I_2 = 1.000 \text{ A}$ (exactos) y $a = 1.000 \text{ m}$,
nómera que (19.8.7) da

$$\frac{\pi(10^{-7})(1.0)(1.0)}{(2\pi)(1.0)} = 2.00\dots \times 10^{-7} \text{ N}$$

ma exacta. El hecho de que el resultado del cálculo sea $2.00\dots \times 10^{-7} \text{ N}$ no es accidental sino que se debe a que el ampere *ine como la corriente que, cuando fluye es de un conductor recto paralelo a una corriente igual y a 1 m de distancia, una fuerza de atracción de precisamente $10\dots \times 10^{-7}$ newtons por metro.* A su vez esta definición fija la magnitud del A , ya que esta unidad puede considerarse como la cantidad de carga que se transfiere por un punto dado en un conductor, cuando fluye una corriente de 1 ampere durante 1 s.

esta definición del ampere y del coulomb también determina el valor de la constante de permeabilidad μ_0 . Por ejemplo, supóngase que se conociera el valor de μ_0 y que se intentara definir el A en la forma antes descrita. Entonces se hubiera tenido que insistir en que en ese caso se producía una fuerza de precisamente $2.00\dots \times 10^{-7}$ newtons y entonces la corriente tendría que ser de $1.00\dots \text{ amperes}$, es decir, $1.00\dots \text{ coulomb/segundo}$. Sustituyendo estos valores en (19.8.7), se obtendría que

$$\dots \times 10^{-7} = \frac{(\mu_0)(1.0)(1.0)}{(2\pi)(1.0)}$$

onde

$$4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A.m}$$

tanto, la manera de definir el ampere, y de definir el coulomb, determina que el valor de μ_0 sea $4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A.m}$. Si se acepta esta definición del coulomb y se pregunta la magnitud de la fuerza electrostática que deben ejercer dos cargas puntuales de 1 C a 1 m de distancia, experimentalmente se encuentra que esta fuerza *casualmente* tiene el valor peculiar de $8.988 \times 10^{-9} \text{ N}$. Empero, al

escribir la ley de Coulomb para las fuerzas electrostáticas entre cargas puntuales, se tiene

$$F = k \frac{qq'}{r^2} \quad (19.8.8)$$

en que k es la constante de proporcionalidad. Para $q = q' = 1.00\dots \text{ coulomb}$ y $r = 1.00\dots \text{ metro}$,

$$8.988 \times 10^9 = k \frac{(1.00\dots)(1.00\dots)}{(1.00\dots)^2} = k$$

que indica que la constante de proporcionalidad que debe utilizarse en la ley de Coulomb de las fuerzas electrostáticas tendrá que ser

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

o sea

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

Desde luego, es razonable preguntar por qué a μ_0 se le da un valor tan simple, en vez de a ϵ_0 . La respuesta es que debido a la disponibilidad de las fuentes de corriente constante como las celdas electroquímicas (baterías o acumuladores) y a los instrumentos precisos de medición de corriente como el galvanómetro de d'Arsonval, es mucho más fácil medir fuerzas entre corrientes y estandarizar estas últimas, que medir cargas electrostáticas. Por tanto, históricamente, cuando se necesitó contar con patrones eléctricos definidos con exactitud, fue mucho más sencillo disponer de un A reproducible y fácilmente medible de corriente, que de una carga precisa de un C. En realidad, en el sistema gaussiano CGS de unidades eléctricas, que se utiliza ahora ocasionalmente, la constante en la ley de Coulomb de las cargas tiene asignado un valor igual a la unidad, lo que a su vez fija la magnitud de la unidad electrostática de carga (ues) en ese sistema. Entonces la constante μ_0 ya no tiene el valor numérico simple que se le asigna en el SI.

Aprovechando este tema de la numerología de μ_0 y ϵ_0 es interesante señalar que las dimensiones de la cantidad $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ son las de velocidad, lo que puede apreciarse recordando

que el Wb es una unidad de flujo magnético, que a su vez es igual a inducción magnética multiplicada por área (m^2). Entonces, dimensionalmente ($\text{N/A} \cdot \text{m}$, o bien, Wb/m^2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} &= \frac{\text{amp} \cdot \text{m}}{\text{weber}} \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = \frac{\text{amp}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \\ &= \frac{\text{amp}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = \frac{\text{C}^2 \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2 \cdot \text{s}^2} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \quad (19.8.9) \end{aligned}$$

Ahora tratará de determinarse la magnitud de la velocidad $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Sustituyendo los valores numéricos conocidos de μ_0 y ϵ_0 que, el lector recordará se obtienen midiendo fuerzas entre corrientes y entre cargas eléctricas, resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} &= \frac{1}{\sqrt{(1.256637 \times 10^{-6})(8.854185 \times 10^{-12})}} \\ &= 2.997925 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

o sea que

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 299 792.5 \text{ km/s} \quad (19.8.10)$$

Al comparar esto con la *velocidad de la luz*, en forma independiente y con exactitud se determinó es de 299 792 kilómetros por segundo, se encuentra que ambos números concuerdan tanto que debe ser más que accidental sean tan cercanos. Por tanto, es de sospechar en cierta forma la luz debe estar relacionada íntimamente con los campos eléctrico y magnético.

Aunque todavía no se está en condiciones de aclarar esta relación, debe tenerse presente el hecho de ser uno de los objetivos que se persiguen. En el capítulo 23 se verá que las propiedades de los campos eléctrico y magnético llevan directamente a la posibilidad de *ondas electromagnéticas* formadas por campos eléctrico y magnético variables en el tiempo, que se propagan a la velocidad $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, y que exhiben todas las características observadas experimentalmente de las ondas luminosas.

RESUMEN

Una corriente eléctrica en un conductor, o una carga móvil en el espacio, produce un campo

magnético. De manera análoga, toda corriente o carga con movimiento en un campo magnético producido exteriormente, experimenta una fuerza magnética, perpendicular tanto al campo magnético como al vector velocidad de la carga, o a la dirección de flujo de la corriente. En realidad, puede expresarse por medio de

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{para una carga móvil}$$

o

$$d\mathbf{F}_m = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

para un elemento $d\mathbf{l}$ de un circuito portador de corriente

Se puede considerar que estas expresiones definen la magnitud y la dirección del vector \mathbf{B} de inducción magnética. Si sobre una carga móvil q actúan fuerzas eléctrica y magnética, la fuerza total que experimenta la carga es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Por analogía con el flujo eléctrico, el flujo magnético a través de una superficie dada S está definido por

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da$$

Para un campo magnético constante y una superficie plana, la anterior se reduce a

$$\Phi_m = BA \cos \theta$$

en que θ es el ángulo entre la dirección de \mathbf{B} y la normal a la superficie. La ley de Gauss para la inducción magnética tiene la forma

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = 0$$

en que el cero de la derecha refleja la inexistencia de la carga magnética, o el hecho de que las corrientes eléctricas son el origen de todos los campos magnéticos.

El campo magnético de una espira con corriente eléctrica es de carácter dipolar. El momento dipolar magnético p_m de toda espira con corriente se puede expresar por medio de

$$\frac{p_m}{M} = IA$$

en que A es el área de la espira. Las dirección del vector momento dipolar es normal al plano de la espira, y apunta en la dirección indicada por el pulgar de la mano derecha, cuando los otros dedos se curvan sobre la espira en el sentido de la corriente. El momento de rotación sobre una espira con corriente y situada en un campo magnético externo es

$$\tau = p_m \times B$$

en que p_m es el momento dipolar magnético del circuito.

El campo magnético creado por una corriente dada puede encontrarse de dos maneras principales: En primer lugar, de acuerdo con la ley de Biot y Savart se puede expresar el elemento de campo $d\mathbf{B}$ que resulta del flujo de corriente I a lo largo del elemento dl de un conductor como

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times r}{r^3}$$

en que r es el vector que va del elemento de trayectoria dl al punto P donde desea calcularse el elemento de campo $d\mathbf{B}$. Luego se puede obtener el campo total integrando sobre todos los elementos de trayectoria dl a lo largo de los que fluye la corriente. Al realizar la adición debe tenerse cuidado de utilizar las reglas de la suma vectorial. Por tanto,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{dl \times r}{r^3}$$

En estas expresiones, la constante μ_0 tiene el valor de $4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$ en unidades SI. Se llama *permeabilidad magnética del vacío*. En el caso de un conductor largo y recto que lleva la corriente I , la integración de la forma diferencial de la ley de Biot y Savart sobre los elementos dl de conductor para el campo a la distancia r del mismo, da el resultado simple

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

En este caso, las líneas de \mathbf{B} son círculos que rodean al conductor en el sentido indicado por los dedos curvados de la mano derecha, cuando el pulgar apunta en la dirección de la corriente.

Una segunda forma de obtener el campo magnético asociado a una distribución de corriente dada es por la ley de Ampère, que expresa que para cualquier trayectoria cerrada C ,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C$$

en que I_C es la corriente que fluye a través de la trayectoria C alrededor de la cual se calcula la integral. La ley de Ampère es especialmente útil en casos en que la simetría permite que la integral anterior se exprese como la magnitud de B multiplicada por la longitud del camino cerrado C . La ley de Biot y Savart es un enunciado parecido al de la ley de Coulomb, en tanto que la ley de Ampère tiene gran analogía con la ley de Gauss de la electrostática.

El campo magnético fuera de una bobina toroidal ideal es cero. Dentro de la bobina, a lo largo del eje de la sección transversal, el campo magnético es paralelo al eje central del toroide y su magnitud es

$$B = \mu_0 nI$$

en que I es la corriente en la bobina y n el número medio de vueltas por unidad de longitud a lo largo del toroide. En un solenoide de gran longitud, el campo dentro de la bobina es uniforme, apunta en la dirección del eje de la bobina y su magnitud es

$$B = \mu_0 nI$$

siendo n número de vueltas por unidad de longitud e I la corriente en la bobina.

La fuerza por longitud unitaria de un conductor recto que conduce la corriente I_1 y está a la distancia a de un segundo conductor recto paralelo que lleva la corriente I_2 es

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

La fuerza es de atracción si las dos corrientes están en la misma dirección y de repulsión si están en direcciones opuestas.

La unidad ampere es la corriente que, cuando fluye a través de un conductor recto paralelo a otro igual con una corriente de igual intensidad y sentido, a 1 m de distancia, experimenta una fuerza de atracción de exac-

tamente $2.000 \dots \times 10^{-7}$ newtons por metro. Esta definición fija también la magnitud del coulomb, que equivale a $1 \text{ A} \cdot \text{s}$.

PREGUNTAS

1. El campo eléctrico se define de manera que la fuerza eléctrica sea paralela al campo. ¿Podría definirse el campo magnético de manera que la fuerza magnética fuese paralela a este campo?
2. La máxima velocidad de una partícula con carga q es v_0 . ¿Cuál es la magnitud máxima y la mínima de la fuerza magnética que actúa sobre ella?
3. Una partícula de carga q y velocidad v no se desvía cuando se mueve a través de una región del espacio en que hay campos uniformes E y B . Obtenga una expresión para E en términos de las otras cantidades.
4. Los campos magnéticos se deben al movimiento de cargas eléctricas. ¿Existen otras formas en que pueda producirse un campo B ?
5. En un tubo de rayos catódicos, inicialmente se proyectan los electrones en la dirección del eje z positivo y el haz se desvía hacia los valores negativos de x en el plano xy . Si la deflexión se debe a un campo magnético, halle la dirección del mismo.
6. Un alambre que lleva una corriente I no experimenta fuerza magnética alguna aunque esté en un campo magnético uniforme. ¿Cómo puede explicarse lo anterior?
7. En las partes del norte de Canadá, el flujo de rayos cósmicos es mayor que en el Ecuador. ¿Cómo puede explicarse éste?
8. Un niño que mira la televisión, nota una distorsión en la imagen siempre que acerca su pequeño imán de juguete a la pantalla. Explique esto.
9. Analice los diversos factores que determinan el flujo magnético a través de una superficie dada. ¿Siempre es cierto que el flujo magnético a través de una superficie cerrada vale cero?
10. ¿Puede sugerir un método para medir el momento dipolar de una aguja de brújula?
11. Señale y compare las diferencias entre la ley de Biot y Savart y la ley de Coulomb para las cargas eléctricas.
12. Indique si la ley de Ampère es válida para todas las trayectorias cerradas posibles que pudieran escogerse. ¿Es útil para todas ellas?
13. Se puede utilizar la ley de Ampère y la ley de Biot y Savart para calcular campos magnéticos. Indique cuál es más general, en términos de aplicabilidad.
14. El campo magnético debido a un toroide está completamente limitado a su interior, mientras que el campo debido a un solenoide largo no se anula en el exterior. Explique esto en términos de la necesidad de que cierran las líneas del campo magnético.
15. Explique en términos simples por qué la fuerza entre dos alambres que llevan corriente, es proporcional al producto de las intensidades.
16. Un protón se mueve de occidente a oriente cerca del Ecuador terrestre. ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética que experimenta?
17. Dos partículas de carga igual están limitadas a moverse paralelamente una a la otra. Analice los campos magnéticos y las fuerzas producidas y experimentadas por cada una de las cargas.
18. En Estados Unidos y Gran Bretaña están creándose muchas discusiones acerca de la adopción de las unidades métricas en vez de las del sistema inglés. Pero por lo que respecta a las unidades *eléctricas*, ambos países han utilizado el sistema métrico durante más de un siglo, ya que el volt, el ampere, el coulomb, el ohm y el watt eran y son unidades MKS. Sólo por molestar a los propugnantes afanosos del Sistema Internacional, ¿puede sugerir una forma de definir las unidades eléctricas con base en el sistema *inglés* o "británico"? ¿Qué valor tendrían los factores de conversión entre las posibles unidades "britcoulomb", "britvolt", "britampere", "britwatt" y "britohm" y las unidades normales del SI? ¿Qué valores tendrían ϵ_0 y μ_0 en las unidades inventadas del "Sistema Británico"?

PROBLEMAS

1. Una carga puntual de $1.8 \times 10^{-6} \text{ C}$ se mueve sobre el eje $+x$ a 800 m/s. Hay una inducción magnética constante \mathbf{B} cuya magnitud es de $0.72 \text{ N/A} \cdot \text{m}$. El campo \mathbf{B} está en el plano yz y forma un ángulo de 45° con el eje $+y$. Determine la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre la carga.
2. Una carga puntual de $2.7 \times 10^{-5} \text{ C}$ se mueve sobre el eje $+y$ a 600 m/s. Hay un campo constante \mathbf{B} de $0.96 \text{ N/A} \cdot \text{m}$ (o Wb/m^2). Su dirección está en el plano xy , formando ángulos iguales con los ejes $+x$ y $+y$. Obtenga la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre la carga.

campo eléctrico de 1.200 V/m y un campo magnético de 0.080 Wb/m^2 actúan sobre un protón para producir una fuerza neta igual a cero. Si los campos eléctrico y magnético son perpendiculares, indique la magnitud y dirección de la velocidad del electrón.

Un deuteron (de masa $2m_p$, y carga $+e$) se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 500 V , adquiriendo con ello la velocidad v . Para esta última magnitud, evalúe el radio de su órbita en un campo magnético de 0.2 Wb/m^2 .

Demuestre que la energía cinética de una partícula de carga q y masa m en un campo magnético B está dada por $q^2 B^2 r^2 / 2m$, en que el radio de su trayectoria orbital circular.

Si $v_0 = 0$, se proyecta una partícula de carga q y masa m a una región del espacio donde actúa sobre ella un campo magnético uniforme $B = 0.2 \text{ Wb/m}^2$. Si la velocidad inicial es $v_0 = v_{0,i} \hat{i}_x + v_{0,j} \hat{j}_y$, determine su movimiento subsecuente. Calcule la velocidad v a un tiempo arbitrario t .

Una partícula de carga $q_0 = 6 \times 10^{-5} \text{ C}$ se mueve a razón de 500 m/s sobre el eje x , en presencia de un campo magnético B de 8.0 Wb/m^2 que está en el plano xy formando un ángulo de 30° con el eje x . Halle la magnitud y dirección de la fuerza sobre la carga.

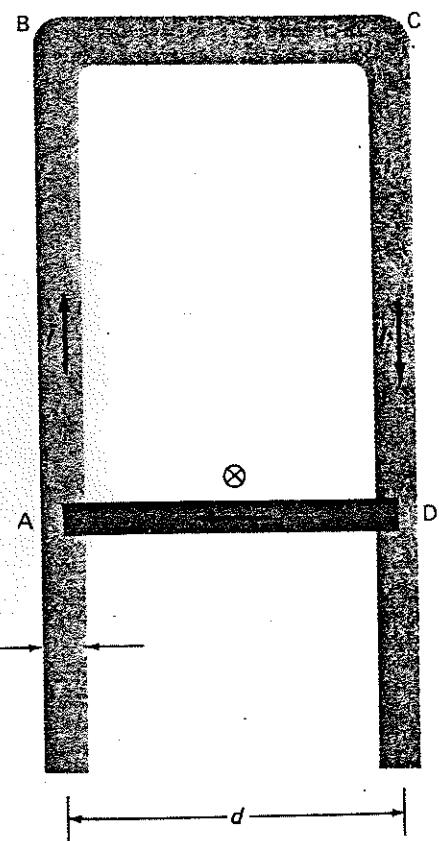
Un protón circunda a la Tierra siguiendo una órbita circular sobre el Ecuador. El radio de la órbita (medido desde el centro de la Tierra) es $1.2 \times 10^6 \text{ km}$. Se supone que el campo magnético presente en la órbita es de $1.5 \times 10^{-5} \text{ Wb/m}^2$ y su dirección paralela a su eje, y se desprecian los efectos gravitacionales. Utilizando $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, determine (a) la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica sobre el protón y (b) el periodo de movimiento orbital del protón.

La velocidad de un electrón es de 10^7 m/s y es perpendicular a un campo magnético, determinar la intensidad que debe tener el campo para que la órbita del electrón sea de 1 m de radio.

Una partícula de carga q y masa m entra a una región con un campo magnético uniforme B a una velocidad inicial v_0 . Calculando el trabajo realizado por la fuerza magnética, demuestre que la energía cinética de la partícula es constante.

Un ion con carga $+3e$ se proyecta a un campo magnético uniforme de 1.5 Wb/m^2 . Viaja a 10^7 m/s formando un ángulo de 45° con la dirección del campo. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza sobre el ion.

12. Entre las armaduras de un capacitor de placas paralelas con separación d , existe una diferencia de potencial ΔV . Entre las placas hay un campo magnético uniforme B , perpendicular al campo eléctrico. Se proyectan electrones a la región y se observa que no se desvian cuando hay un valor apropiado de ΔV . Luego se suprime el campo eléctrico, ΔV decrece a cero y se aprecia que los electrones viajan según una trayectoria circular de radio r . (a) Obtenga una expresión para e/m en términos de ΔV , B , r y d . (b) Si el voltaje ΔV es tal que produce un campo eléctrico de 10^4 V/m si B y r son 10^{-3} Wb/m^2 y 5.71 cm , respectivamente, determine la relación de la carga a la masa, e/m .
13. En una región dada del espacio hay un campo magnético uniforme de 0.2 Wb/m^2 . A esta región entra una partícula cargada con una velocidad de 10^5 m/s , y su vector velocidad forma un ángulo de 30° con la dirección de B . Halle la magnitud y dirección del campo eléctrico que hará que no se desvíe la trayectoria de la partícula.
14. Un campo magnético B apunta en la dirección z , y su magnitud es de 2 Wb/m^2 . Evalúe el flujo magnético Φ_m que atraviesa una espira cuadrada de 2 m^2 de área, si el plano de la espira forma un ángulo de 15° con el eje z .
15. Se coloca una bobina rectangular de 18 cm por 36 cm en un campo de inducción magnética constante de 0.24 Wb/m^2 . El vector B forma un ángulo de 53° con el plano de la bobina. Halle el flujo magnético que atraviesa la bobina.
16. La magnitud de un campo de inducción magnética cuya dirección es paralela al eje z varía en la dirección del eje x y está dada por $B = B_0(1 + (x/x_0)^2)$, en que B_0 y x_0 son constantes. Demuestre que el flujo magnético que atraviesa una espira rectangular en el plano xy de longitud a y anchura b , y cuyo centro está en el punto $x = c, y = 0$, puede expresarse como $\Phi_m = AB(c) + AB_0b^2/12x_0^2$, en que $B(c)$ es el valor de B en el centro de la espira. Se supone que el lado de la espira de longitud b es paralelo al eje x .
17. Utilizando la ecuación (19.3.8), demuestre que es imposible tener un campo magnético radial esféricamente simétrico, es decir, un campo magnético tal que $B = (k/r^2)\hat{r}$, semejante al campo coulombico de una carga puntual.
18. Las masas atómicas de dos isótopos de cierto elemento son m_1 y m_2 . Ambos están ionizados simplemente y se aceleran a través de la misma diferencia de potencial. Después de ser acelerados desde el reposo, ambos átomos entran a un campo magnético uniforme, viajan siguiendo un semicírculo y se detectan en una placa fotográfica. Si describen trayectorias con radios r_1 y r_2 , respectivamente, halle la relación de sus masas.
19. Un alambre largo y recto lleva una corriente de 50 A . Se coloca en un campo magnético uniforme de 0.0200 Wb/m^2 , que forma un ángulo de 30° con el alambre. Obtenga la fuerza magnética por unidad de longitud del conductor.
20. El campo magnético de la Tierra en el Ecuador es horizontal, apunta hacia el Norte y su intensidad es aproximadamente de $1.0 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$. Una línea de transmisión de 100 m de longitud conduce una corriente de 700 A de oriente a poniente. Evalúe la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre la línea de transmisión debida al campo magnético terrestre.
21. Una bobina rectangular de 0.12 m de longitud y 0.18 m de ancho consiste en 240 vueltas de alambre fino. (a) Determine el momento dipolar de esta bobina cuando lleva una corriente de 6.0 A . (b) Determine el momento de rotación que experimentará en un campo de inducción magnética uniforme de 0.24 Wb/m^2 y que forma un ángulo de 30° con el plano de la bobina.
22. Una espira circular delgada hecha de material aislante y con 0.16 m de radio, tiene una carga distribuida uniformemente de $1.8 \times 10^{-5} \text{ C}$. Gira alrededor de su eje a la velocidad angular de $3\,000 \text{ rpm}$. Evalúe su momento magnético.
23. Un disco delgado de material aislante y radio R , con una densidad de carga uniforme σ , gira con frecuencia angular ω alrededor de su eje. Halle el momento magnético del disco.
24. Un galvanómetro consiste en una bobina de 2.5 cm de longitud por 2 cm de ancho, formada con 250 vueltas de alambre y colocada en un campo magnético uniforme de 0.12 Wb/m^2 . El plano de la bobina es normal al campo cuando no pasa corriente por el instrumento. Si una corriente de $5 \times 10^{-6} \text{ A}$ provoca una deflexión de 45° en la bobina, determine la constante de torsión del resorte del galvanómetro.
25. Un momento magnético p_m en un campo magnético uniforme B experimenta un momento de rotación dado por la ecuación (19.4.17). Este momento debe ser igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular dL/dt . Si el momento magnético es proporcional a la cantidad de movimiento angular, es decir, $p_m = \lambda L$, estudie el movimiento del vector momento cinético angular L en el campo magnético B .
26. Una bobina rectangular de 6 por 12 cm contiene 500 vueltas de alambre y lleva una corriente de 10^{-6} A . Calcule el máximo momento de rotación sobre la bobina en un campo magnético uniforme de 0.2 Wb/m^2 .
27. En el diagrama anexo se muestran dos conductores paralelos muy largos, AB y CD; están en un plano horizontal y conectados mediante el puente fijo BC y por un conductor deslizante sin fricción, AD, cuya masa es m . Como se muestra, por el circuito fluye una corriente I . Despreciando el efecto de la corriente en el conductor BC, que se supone que está muy alejado de AD, obtenga una expresión para la aceleración del conductor deslizante AD.



28. Un alambre largo y recto de longitud L lleva una corriente I . Utilizando la ley de Biot y Savart, calcule el campo magnético producido a la distancia r del centro del conductor, en un plano perpendicular a éste. Luego, L tiende a