Señales y Sistemas (66.07)

Práctica 1: Señales

0) Graficar las siguientes señales: $-2\delta[n+2]$; $2^n u[n]$; $2^{-n}u[n]$; $2^{-n}u[-n]$; $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)u[n-2]$.

1) Sea $y[n]=(\,1+a\,+\cdots\cdots+a^n\,)\,u[n]$, $\quad a=2$.

   Determinar:
   a) y[3]
   b) y[2000]
   c) y[∞], si existe
   d) Repetir a), b) y c) con $a=-1/2$
   e) Repetir c) con $a=1/2$

2) Evaluar las siguientes sumas (si es posible) y expresar su respuesta en forma cartesiana (rectangular) y polar:

   (a) $\sum_{n=0}^{9} e^{j\pi n/2}$

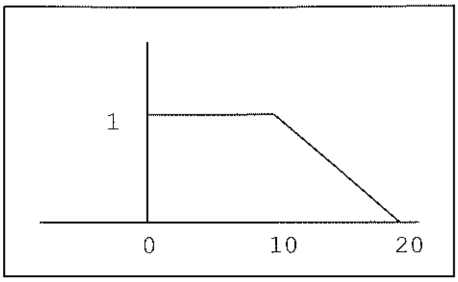
   (b) $\sum_{n=-2}^{7} e^{j\pi n/2}$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{j\pi n/2}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

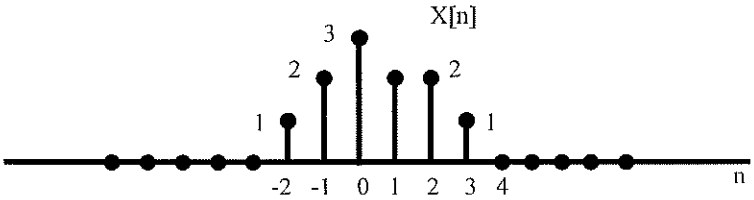
3)
   a) Para la señal $x(t)$ descripta mediante el grafico siguiente determinar:

      i) $x(3t/2+1)$
      ii) $x(-2t-1)$
      iii) $x(t/2-1/2)$



b) Simular la parte a) de este ejercicio en MATLAB, considerando que las señales son discretas, es decir $t = n$, con n entero.

4) Sea la señal discreta $x[n]$ del siguiente grafico.



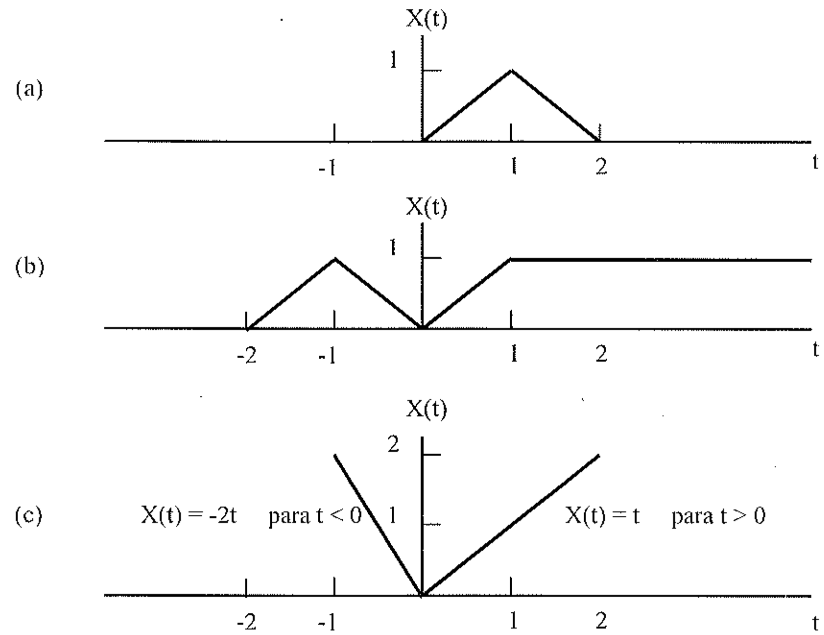
Dibujar y etiquetar cada una de las siguientes señales:

a) $x[n]u[2-n]$.

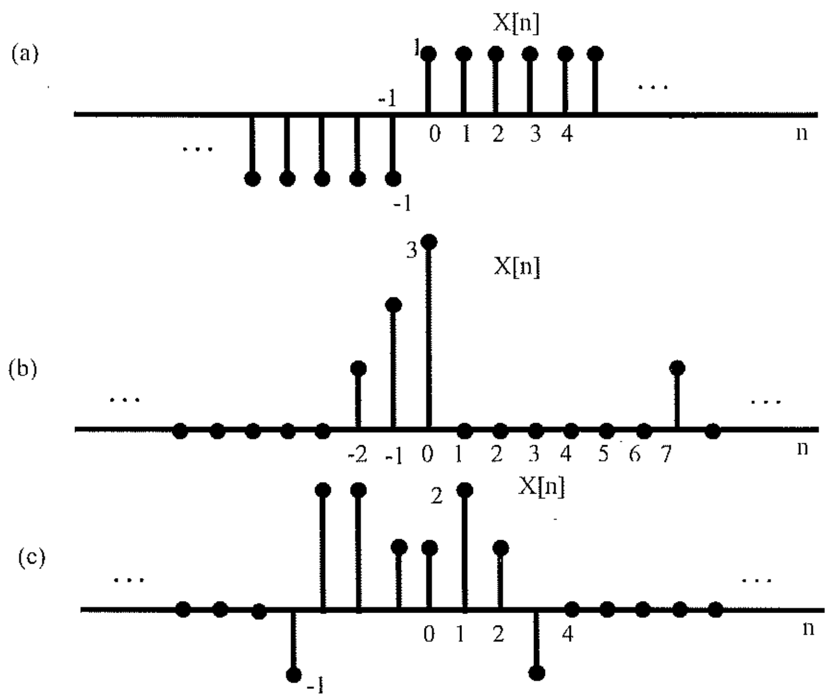
b) $x[n-1]\delta[n-3]$.

c) $\frac{1}{2}x[n]+\frac{1}{2}(-1)^n x[n]$.

5) Determinar y dibujar las partes par e impar de las señales ilustradas en la siguientes figuras. Etiquete cuidadosamente los dibujos.



6) Determinar y dibujar las partes par e impar de las señales ilustradas en la siguientes figuras. Etiquete cuidadosamente los dibujos.



7) Sea $x(t)$ una señal continua, y sea

$$y_1(t) = x(2t) \text{ y } y_2(t) = x(t/2).$$

La señal $y_1(t)$ representa una versión acelerada de $x(t)$ en el sentido de que la duración de la señal disminuye a la mitad. De manera similar, $y_2(t)$ representa una versión más lenta de $x(t)$ en el sentido de que la duración de la señal se ha duplicado. Considere las siguientes afirmaciones:

1. Si $x(t)$ es periódica, entonces $y_1(t)$ es periódica.
2. Si $y_1(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.
3. Si $x(t)$ es periódica, entonces $y_2(t)$ es periódica.
4. Si $y_2(t)$ es periódica, entonces $x(t)$ es periódica.

Para cada afirmación, determine si es verdadera, y si lo es, determine la relación entre los periodos fundamentales de las dos señales consideradas en el enunciado.
Si no es verdadera, haga un contraejemplo de ella.

8) Sea $x[n]$ una señal discreta, y sea

$$y_1[n] = x[2n] \text{ y } y_2[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Las señales $y_1[n]$ y $y_2[n]$ representan respectivamente en algún sentido las versiones acelerada y retardada de $x[n]$. Sin embargo, se debe notar que las nociones de tiempo discreto de la aceleración y el retardo tienen sutiles diferencias con respecto a sus contrapartes continuas. Considere las siguientes afirmaciones:

1. Si $x[n]$ es periódica, entonces $y_1[n]$ es periódica.
2. Si $y_1[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.
3. Si $x[n]$ es periódica, entonces $y_2[n]$ es periódica.
4. Si $y_2[n]$ es periódica, entonces $x[n]$ es periódica.

Para cada afirmación, determine si es verdadera, y si lo es, determine la relación entre los períodos fundamentales de las dos señales consideradas en el enunciado.
Si no es verdadera, haga un contraejemplo de la afirmación.

9) Sea $x(t)$ la señal continua exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

con frecuencia fundamental ω_0 y periodo fundamental $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Considere la señal discreta obtenida al tomar muestras de $x(t)$ igualmente espaciadas, esto es,

$$x[n] = x(nT) = e^{j\omega_0 nT}$$

a. Demuestre que $x[n]$ es periódica si y solo si T/T_0 es un número racional, es decir, si y sólo si algún múltiplo del intervalo de muestreo *es exactamente igual* a un múltiplo del periodo $x(t)$.

b. Suponga que $x[n]$ es periódica, esto es, que

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{q}, \qquad (1)$$

donde p y q son enteros. ¿Cuál es el periodo fundamental y cuál la frecuencia fundamental de $x[n]$? Exprese la frecuencia fundamental como una fracción de $\omega_0 T$.

c. Suponiendo nuevamente que T/T_0 satisface la ecuación (1), determine con precisión cuántos periodos de $x(t)$ se necesitan para obtener las muestras que forman un solo periodo de $x[n]$.

10) Grafique en MATLAB las siguientes señales y determine si son o no periódicas:

i. $x[n] = \cos(2\pi\, n/12)$
ii. $x[n] = \cos(8\pi\, n/31)$
iii. $x[n] = \cos(n/6)$
iv. $x[n]$ definida como las muestras de una senoide de frecuencia 10Hz, muestreada con Δt = 1/1000Hz.
v. $y[n] = \sum x_k[n]$, con $x_k[n] = \cos(k(\pi\ \ 32)n)$, para $0 < k < 50$.
vi. Idem v) pero $x_k[n] = \mathrm{Re}(a_k e^{jk\frac{\pi}{256}n})$, con $a_k = \mathrm{sen}(k\pi\ \ 4)/(k\pi)$.
vii. $y[n] = \sum x_k[n]$, con $x_k[n] = \cos(\mathrm{f}(k)(\pi\ \ 2)n)$, para $0 < k < 50$ y $\mathrm{f}(k) = 100\,\mathrm{tg}(k3\pi\ /400)$.

Señales y Sistemas 6607

Práctica 2. Sistemas en general y sistema LTI

1. Determinar si los siguientes sistemas son:
   Lineales
   Estables
   Causales
   Sin memoria
   Invariantes en el tiempo

   a) $y(t) = x(t/3)$
   b) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$
   c) $y(t) = 2x(t) + 1$
   d) $y(n) = x(-n)$
   e) $y(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0 \\ \pi\, x(n) & \text{para } n \text{ distinto de } 0 \end{cases}$
   f) $y(n) = n \cdot x(n)$

2. Determinar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar la respuesta.

   a) La conexión en cascada de sistemas lineales e invariantes en el tiempo es un sistema lineal e invariante en el tiempo.
   b) La conexión en cascada de sistemas no lineales es un sistema no lineal.
   c) La conexión en cascada de sistemas no invariantes es un sistema no invariante.
   d) La conexión en cascada de sistemas causales con sistemas no causales es siempre no causal.
   e) El orden de conexión de sistemas no invariantes no altera la salida para una misma entrada.
   f) En un sistema LTI si la entrada es periódica entonces la salida también lo es.
   g) En un sistema LTI si la entrada es no periódica entonces la salida también lo es.

3. Dos sistemas LTI con respuesta al impulso $h_1(n)$ y $h_2(n)$ son conectados en cascada en ese orden. La entrada no se conoce pero la salida $y(n)$ es como muestra la figura1.

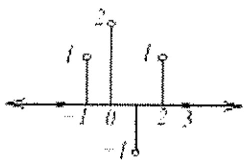


Figura 1: Salida $y(n)$

a) En qué momento comienza la señal de entrada si los dos sistemas son causales
b) La entrada x(n) que produjo la salida y(n) anterior es aplicada a un nuevo par de sistemas conectados en cascada donde el primero tiene una respuesta impulsiva $h_a(n) = h_1(n+1)$ y el segundo $h_b(n) = 2\,h_2(n)$. Dibujar la salida.

4. Sea un sistema LTI en tiempo discreto definido por el siguiente sistema de ecuaciones y la condición de reposo inicial:

$$x_1[n] = -4x_1[n-1] - x_2[n-1] + u[n]$$
$$x_2[n] = 5x_1[n-1] + 2x_2[n-1]$$
$$y[n] = x_1[n] - x_2[n]$$

a) Hallar la función de transferencia entre la entrada u[n] y la salida y[n].
b) Hallar la salida si la entrada es $u[n] = (1/2)^n$ para $n \geq 0$ y 0 en el resto.

5. Para la entrada x(t) aplicada a un sistema con respuesta al impulso h(t) calcular la salida y(t) utilizando la integral de convolución.

$x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$
$h(t) = e^t\,u(1-t)$

6. Dado un sistema cuya respuesta impulsiva está dada por un pulso triangular de altura 1 ancho 2 y centrado en cero, al cual se le aplica una entrada x(t) que consiste en un tren de impulsos de período T calcular mediante la integral de convolución y graficar la salida y(t) para los siguientes casos:

a) T = 4
b) T = 3/2
c) T = 1

7. Dado un sistema LTI con respuesta impulsiva h(n) = u(n) – u (n-4) calcular mediante la fórmula de convolución la respuesta del sistema a las siguientes entradas.

a) $x(n) = \alpha^n u(n)$ con $\alpha < 1$
b) $x(n) = 2 \cdot u(2-n)$
c) Obtener la ecuación en diferencias que caracteriza a dicho sistema.

8. Para el mismo sistema del punto anterior
   a) Calcular mediante la función "*conv*" de Matlab la respuesta del sistema a una entrada $x(n) = (1 + \cos(n\pi/4)) \cdot u(n)$.
   Graficar la entrada y la salida. Podría usarse la función " *conv*" si la respuesta impulsiva tuviera duración infinita?
   c) Calcular nuevamente la respuesta a la entrada x(n) pero utilizando la función "*filter*".

9. Realizar los mismos cálculos del punto anterior para los sistemas con respuesta al impulso

   a) $h(n) = u(n) - u(n-20)$
   b) $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$.

   Comparar los resultados con los obtenidos en el punto anterior.

10. Calcular y graficar la respuesta impulsiva y la respuesta al escalón para el sistema definido por la ecuación en diferencias:

$$y(n) = x(n) + A\, y(n-1)$$

con A = 1.2 y A = 0.5. Analizar la estabilidad del sistema para todas las respuestas posibles (Solución causal y anticausal).
Realizar nuevamente el ejercicio utilizando la función "*filter*" de Matlab

Señales y Sistemas (66.07)

Práctica 3: Serie de Fourier

1. a)Calcule los coeficientes de la serie exponencial de Fourier para una función de período 2π definida en el intervalo $(-\pi,\pi)$ como:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{para } (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

Escriba los 6 primeros términos de la serie. Grafique el espectro de amplitudes y de fase. Calcule el porcentaje de la potencia media total que se obtiene con los 6 primeros términos. Escriba los 6 primeros términos de la serie trigonométrica.

b) Repita a) no por cálculo directo de los coeficientes sino usando propiedades y los coeficientes obtenidos en a), para los casos:

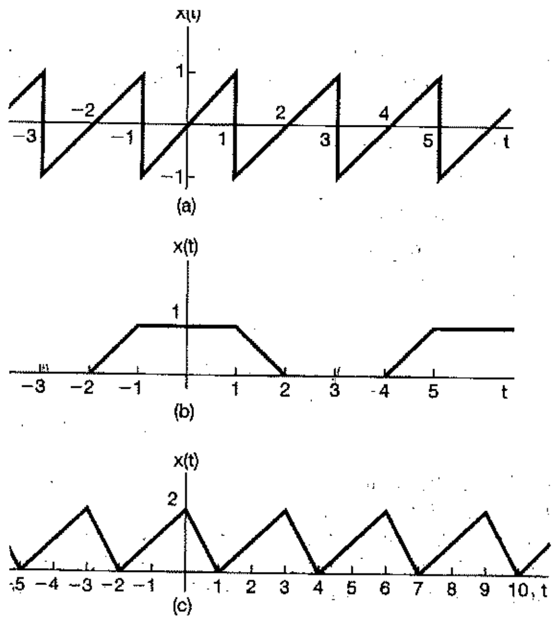
i)desplazamiento horizontal de la señal f en $\pi/6$ hacia la derecha;

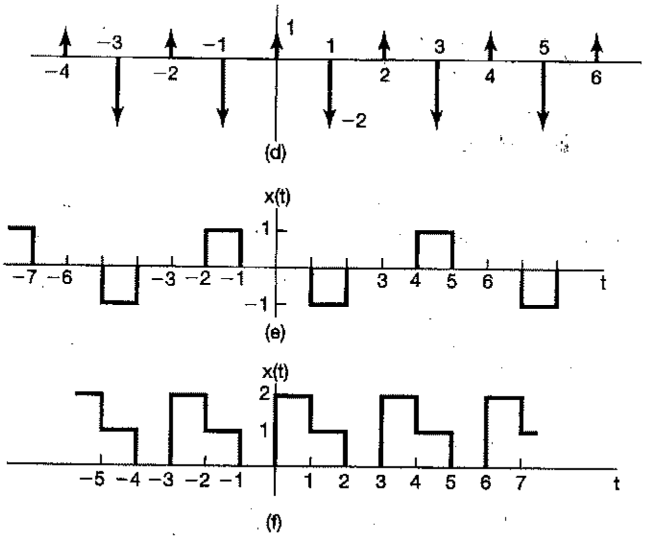
ii) desplazamiento vertical de la señal f en 1 hacia arriba;

iii) suma de deltas: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\delta(x-(2n+1)\frac{\pi}{2})$.

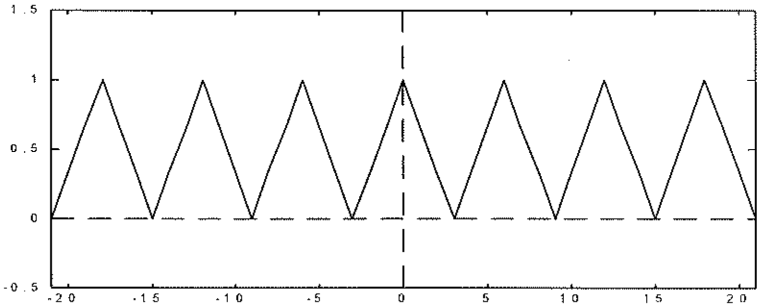
2. Utilizando las propiedades de los coeficientes calcule la serie de Fourier para las siguientes señales:

a) Ejercicio gráficos:





b) Señal indicada en el siguiente gráfico.



3. Convergencia de la serie de Fourier de señales continuas: El siguiente ejercicio tiene como objetivo el estudio de la convergencia de la serie continua de Fourier mediante el uso de MATLAB, y las implicancias prácticas de este tipo de aproximación.

a) Sea una señal $y[n]$ dada como

$$y_N[n] = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{2} \left(e^{jk\frac{\pi}{256}n} + e^{-jk\frac{\pi}{256}n}\right),$$

con $a_k = \mathrm{sen}(k\pi/4)/(k\pi)$. Esta señal discreta puede ser interpretada como muestras de la señal continua

$$y_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{2} \left(e^{jk\frac{\pi}{256}t} + e^{-jk\frac{\pi}{256}t}\right),$$

con $t = n$. Esta es la descomposición en serie de Fourier de una señal periódica. Cuando $N \to \infty$ el teorema de Fourier nos dice que

$$y_N(t) \to y(t)$$

es decir, que la distancia (en norma 2) entre las sumas parciales y la señal $y(t)$ tiende a cero.

i) Utilizando la tabla 4.2 (pares transformados de Fourier) del Oppenheim - Wilsky determine la forma de la función $y(t)$ a partir de la forma de los coeficientes a_k.

ii) Grafique mediante MATLAB las distintas señales $y_N(n)$, para $N = 3,\ldots,20$, y compárelos con el gráfico de $y(t)$. Analice mediante los gráficos el significado de la convergencia en norma 2.

b) El error entre la función $y(t)$ y $y_N(t)$ puede expresarse como

$$E_N = \int_T |y(t) - y_N(t)|^2 dt = \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|^2$$

i) Demuestre la igualdad anterior.

ii) Cuando $N \to \infty$ el teorema de Fourier nos dice que $E_N \to 0$. Qué nos dice esto acerca de los valores que deben tomar los coeficientes a_k, $k > N$?. Qué implicancia práctica tiene este hecho?.

4. Este ejercicio se refiere a la propiedad de multiplicación y a la propiedad de Parseval de a serie continua de Fourier. Sean:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_o t}; \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{j\omega_o t}$$

a) Demuestre que los coeficientes de la serie de Fourier de la señal

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_o t}$$

están dados por la convolución discreta :

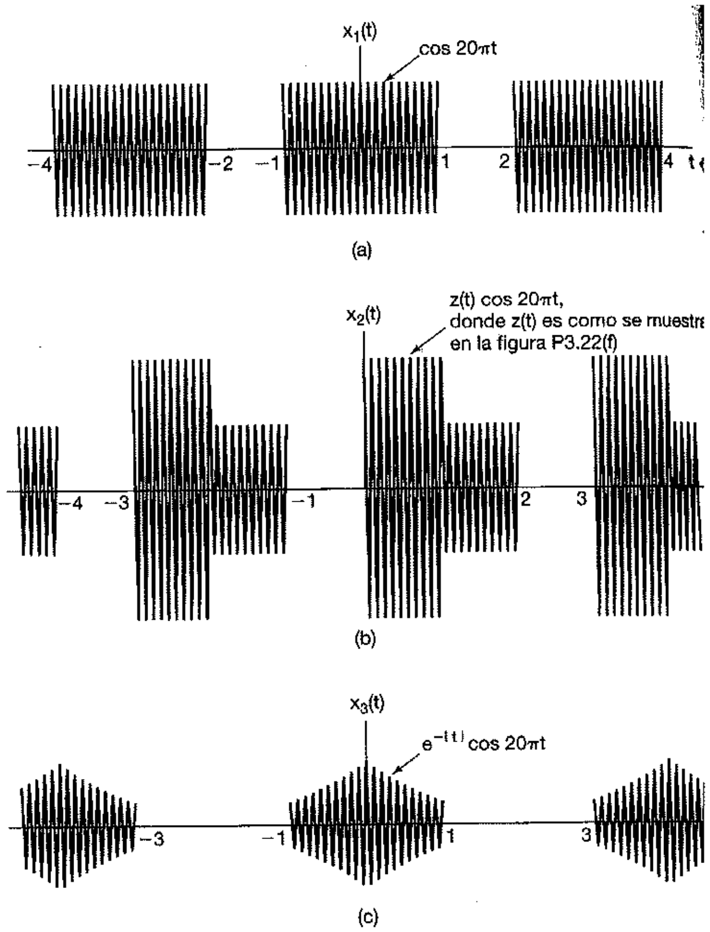
$$c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

b) Utilice el reultado de la parte a) para calcular los coeficientes de la serie de Fourier de las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representadas en la figur correspondiente a este ejercicio.

c) Suponga ahora que $y(t) = x^*(t)$. Exprese los b_k de la ecuación en términos de los a_k y use el resultado de la parte a) para probar la relación de Parseval para señales periódicas.

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Responder en base a este ejercicio que condición debe cumplir una secuencia de números $\{a_k\}$ para ser los coeficientes de Fourier de una señal periódica.



5. Respuesta de un sistema LTI a exponenciales complejas:

a) Cuál es la respuesta de un sistema LTI al que se le aplica $x(t)=e^{jw_0t}$?. Discuta la utilidad de la serie de Fourier para representar señales periódicas utilizando su respuesta anterior.

b) Es $x(t)=e^{jw_0t}\,u(t)$ una autofunción?.

c) En base a a) responda a lo siguiente

Considere un sistema LTI de tiempo continuo con respuesta al impulso:

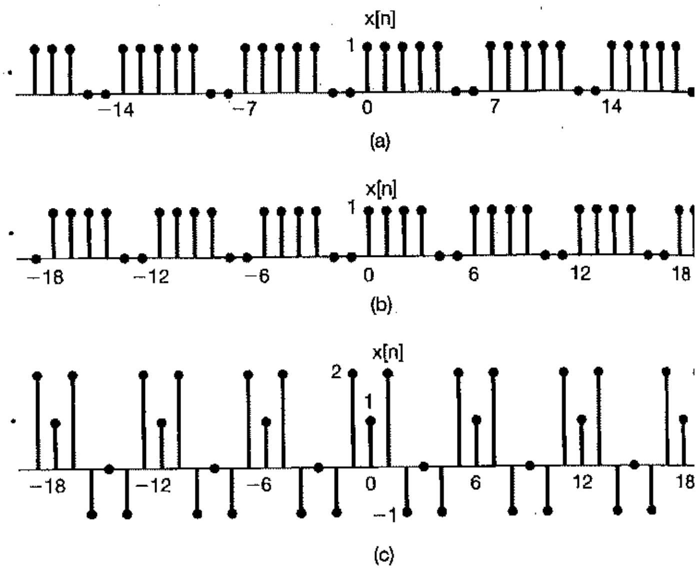
$$h(t)=e^{-4|t|}$$

Encuentre la representación en serie de Fourier de la salida *y(t)* para las entradas

i) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\,\delta(t-n)$

ii) $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } -1/4 \le t < 1/4 \\ 0 & \text{en otro caso} \\ \text{periódica con período } 1. \end{cases}$

6. Determine los coeficientes de la serie de Fourier para cada una de las siguientes señales periódica discretas. Grafique la magnitud y fase de dada conjunto de coeficientes a_k para los siguientes casos:
   a) Cada $x[n]$ de la siguiente figura:



b) $x[n] = sen(2\pi n/3)\cos(\pi n/2)$

c) $x[n]$ periódica con período 4 y
$x[n] = 1 - sen(\pi n/4)$ para $0 \le n \le 3$]

d) $x[n]$ periódica con período 12 y ?
$x[n] = 1 - sen(\pi n/4)$ para $0 \le n \le 11$

7. Propiedades de la Serie Discreta de Fourier:
   Sea x[n] una secuencia periódica con período N y representación en serie de Fourier:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Halle:

$a)\ x[n-n_o]$

$b)\ x[n]-x[n-1]$

$c)\ x[n]-x[n-\frac{N}{2}]$ suponga que N es par

$d)\ x[n]-x[n+\frac{N}{2}]$ suponga que N es par; observe que esta señal es periódica con período 2N

$e)\ x^*[-n]$

$f)\ (-1)^n x[n]$ (suponga que N es par)

$g)\ (-1)^n x[n]$ (suponga que N es impar; observe que esta sñal es periódica con período 2N)

$$h)\ y[n]=\begin{cases} x[n], & \text{n par} \\ 0, & \text{n impar.} \end{cases}$$

8. Autofunciones de sistemas LTI: De acuerdo al ejercicio anterior existe una estrecha relación entre la base de Fourier y los sistemas LTI. Ellas pueden ser utilizadas inclusive para verificar si un sistema es LTI. Realice el siguiente ejercicio:

a) Para cada par de señales *x[n]* e *y[n]* determine si hay un sistema LTI discreto cuya salida corresponda respectivamente a la entrada. Si existe tal sistema determine si es único. También determine la respuesta en frecuencia de un sistema LTI con el comportamiento deseado. Si no existe el sistema LTI para el par dado explique por qué.

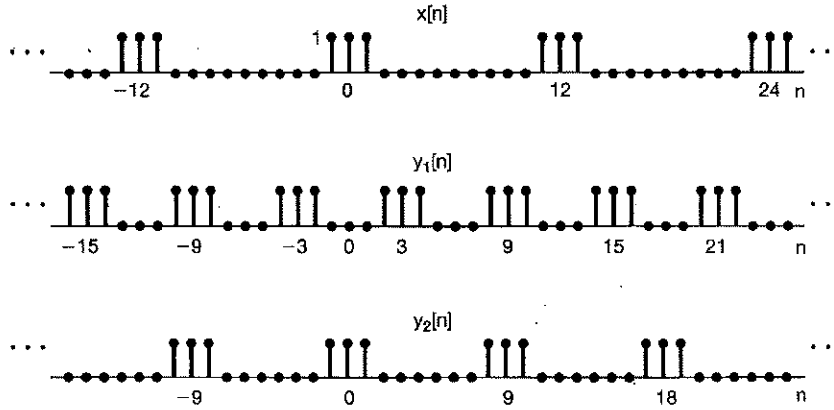
$i)$

$ii)\ x[n]=e^{jn/8};\ y[n]=e^{2jn/8}.$

$iii)\ x[n]=\cos(\pi n/3);\ y[n]=\cos(\pi n/3)+\sqrt{3}sen(\pi n/3).$

$iv)\ x[n];\ y_1[n]$ son como en la figura.

$v)\ x[n];\ y_2[n]$ son como en la figura.



b) Puede asegurar mediante este método que un sistema es realmente LTI?.

9. El ejercicio 3.66 (OW, 2ª Ed.) (4.8 de la 1ª Ed) , analiza el problema de la aproximación de señales mediante familias de funciones ortonormales generales (como por ejemplo la base de Fourier), y no ortogonales.

a) Sea el vector $\mathbf{x} = [1,2]^T$, y las dos "familias" de vectores siguientes:

$$B_1 = \left\{ \frac{1}{2}[1,1], \frac{1}{2}[1,-1] \right\} \text{ y } B_2 = \{[2,0],[1,2]\}$$

i) Demuestre que ambas familias son bases de $\Re^2$.

ii) Encuentre las sucesivas "aproximaciones" $\mathbf{x}_N$ de $\mathbf{x}$ en cada una de estas bases, de modo que se minimice el error cuadrático medio en cada aproximación.

iii) Qué diferencia encuentra entre ambos casos?.

b) Realice el ejercicio 3.66 propuesto.

c) Realice la descomposición de la función $y(t)$ tratada en el ejercicio 4), en base de Walsh. Grafique las sucesivas aproximaciones $y_N(t)$. Qué diferencia encuentra entre esta descomposición y la de la serie de Fourier tradicional?.

d) Cuál es el espacio de las funciones representables mediante la serie de Taylor?. Qué tipo de convergencia propone esta serie?.

e) Compare las ventajas y desventajas del uso de cada una de las bases propuestas en este ejercicio.

Señales y Sistemas (66.07)

Práctica 4 : Transformada de Fourier y Transformada de Fourier de corto Tiempo

Transformada de Fourier:

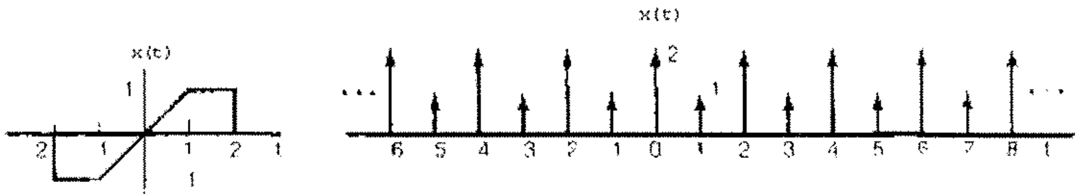
1) Transformada de Fourier de señales de tiempo continuo
Hallar analíticamente la transformada de Fourier de las siguientes señales:

a) $$x(t) = \begin{cases} 1+\cos \pi t & |t| \le 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

b) $$x(t) = \left[\frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t}\right]\left[\frac{\operatorname{sen} 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$$

c) $$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{en otro valor} \end{cases}$$

d) x(t) definidas por las figuras 1a y 1b



a) b)

Figura 1

2) Antitransformada de Fourier de señales de tiempo continuo
Hallar analíticamente la antitransformada de Fourier de las siguientes funciones

a) $X(j\omega) = \cos(4\omega + \pi/3)$

b) $$X(j\omega) = \frac{2\operatorname{sen}(3(\omega - 2\pi))}{(\omega - 2\pi)}$$

c) $X(j\omega)$ como en la figura 2

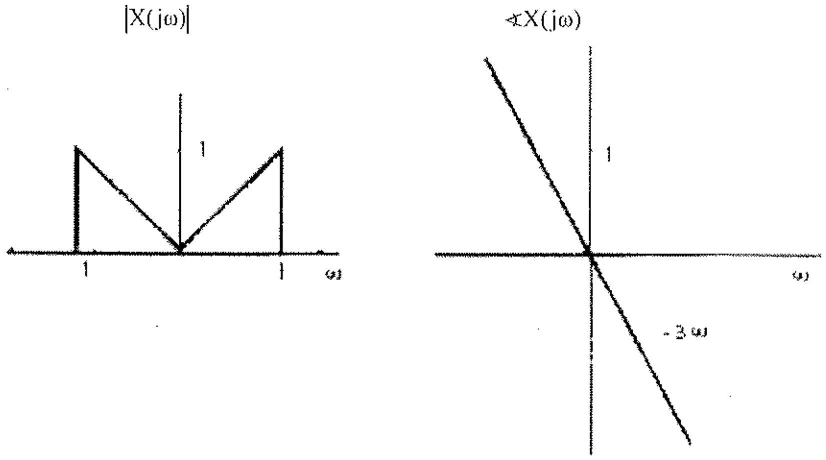


Figura 2

3) Propiedades de la Transformada de Fourier para señales de tiempo continuo

a) Hallar la transformada de Fourier de las cuatro señales de la figura 3 utilizando sus propiedades. ($x_0(t)$ es la señal usada en el ejercicio 1c)

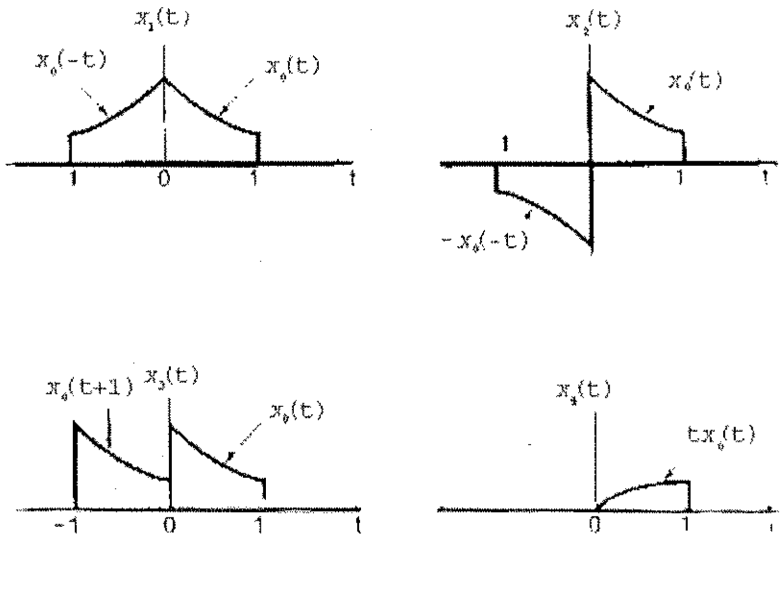


Figura 3

b) Dadas las señales representadas en la figura 4 indicar para cada una de ellas si cumplen algunas de estas condiciones:

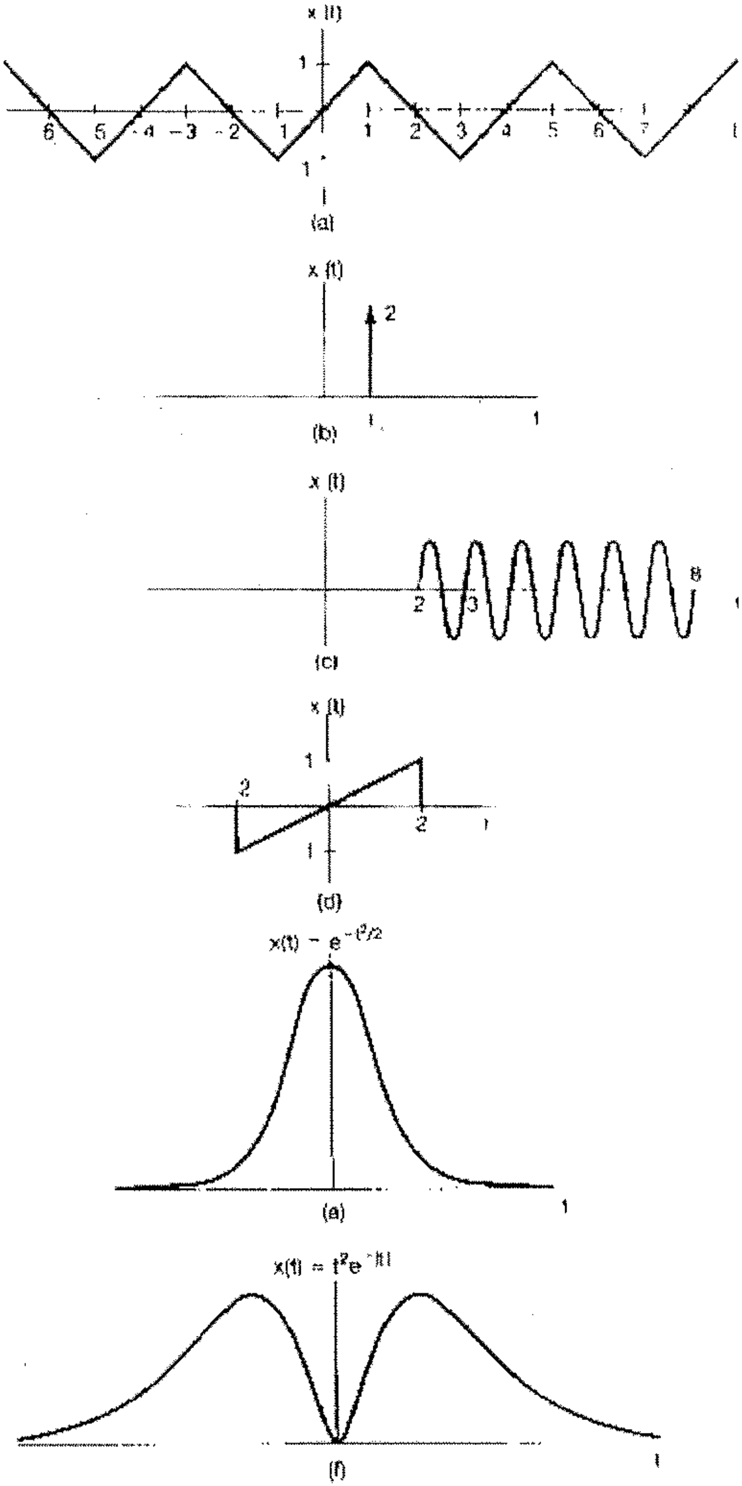


Figura 4

1. $\Re e[X(j\omega)] = 0$

2. $\Im m[X(j\omega)] = 0$

3. Que exista un α real tal que $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ sea real

4. $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 0$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega)d\omega = 0$

6. Que $X(j\omega)$sea periódica

? c) Sea $X(j\omega)$ la función dada por la figura 5

1) Encuentre $\sphericalangle X(j\omega)$
2) Encuentre $X(0)$
3) Encuentre $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$
4) Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{2\mathrm{sen}(\omega)}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$
5) Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$
6) Dibuje la señal cuya transformada es $\Re e|X(j\omega)|$

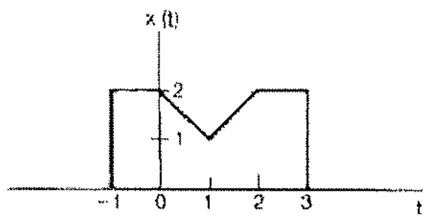


Figura 5

4) Transformada de Fourier de señales de tiempo discreto:
Hallar y graficar la transformada de Fourier de tiempo discreto de las siguientes secuencias:

a) $h[n] = u[n] - u[n-20]$
b) $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$
c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$
d) $x[n] = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)n + \cos(n)$

Analizar los resultados obtenidos para las secuencias a) y b) comparando los resultados con los obtenidos en el ejercicio 9 de la Práctica 2

5) Antitransformada de Fourier de señales de tiempo discreto
Hallar la antitransformada de Forier de tiempo discreto de las siguientes funciones:

a) $X(e^{j\omega}) = 1 + 3e^{-j2\omega} - 4e^{-j3\omega} + e^{-j10\omega}$

? b) $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}k\right)$

c) $X(j\omega) = \dfrac{e^{-j\omega} - 1/5}{1 - (1/5)e^{-j\omega}}$

6) Propiedades de la Transformada de Fourier para señales de tiempo discreto.

a) Sea X (e^{jw}) la transformada de Fourier de la secuencia x(n) que se muestra en la figura 6, hallar los siguientes valores utilizando las propiedades de la transformada.

1) $X(e^{j0})$
2) $\sphericalangle X(e^{j\omega})$
3) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$
4) $X(e^{j\pi})$
5) $\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$

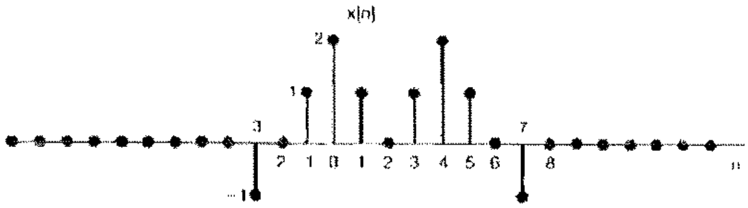


Figura 6

b) Dada la señal que se muestra en la figura 7 si se escribe su transformada de Fourier en forma cartesiana como:

$X(e^{jw}) = A(\omega) + jB(\omega)$

dibujar la secuencia cuya transformada de Fourier es ω
$Y(e^{j\omega}) = B(\omega) + A(\omega)e^{j\omega}$

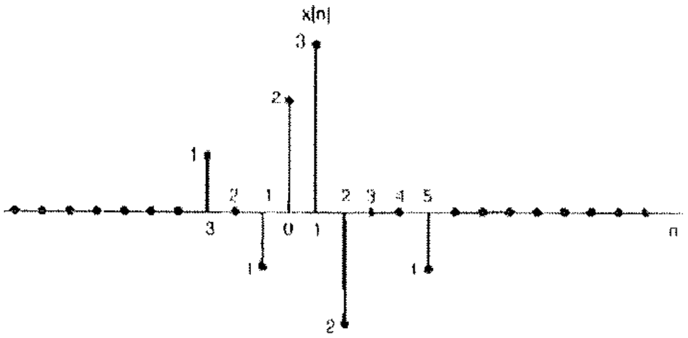


Figura 7

c) Dadas las señales representadas en la figura 8 indicar para cada una de ellas si cumplen algunas de estas condiciones:

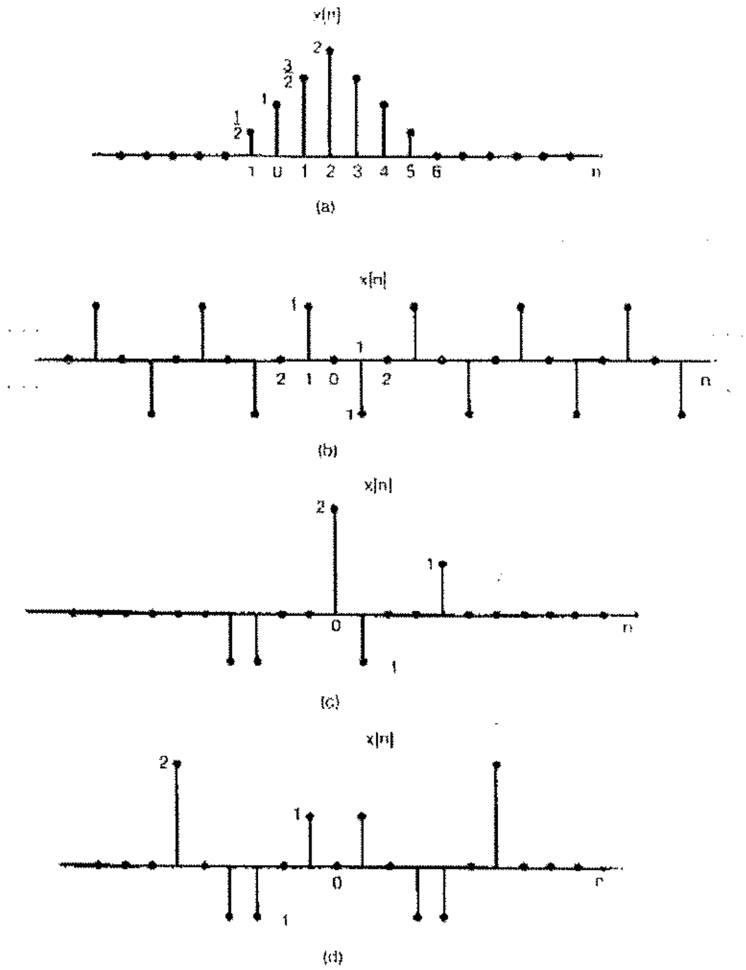


Figura 8

1.$\Re e[X(j\omega)] = 0$

2.$\Im m[X(j\omega)] = 0$

3.Que exista un α real tal que $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ sea real

4. $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 0$

5. Que $X(j\omega)$sea periódica

6.$X(e^{j0}) = 0$

7) Convolución vista en el dominio de la frecuencia.
Considere un sistema LTI discreto cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = (1/2)^n u[n]$$

Usando la transformada de Fourier de tiempo discreto hallar la salida y[n] para las siguientes entradas:

a) $x[n] = (3/4)^n u[n]$
b) $x[n] = (-1)^n u[n]$

8) Autofunciones y sistemas LTI.
Determine la secuencia de salida del sistema cuya respuesta impulsiva es

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

a las siguientes entradas:

a) $x(n) = Ae^{j\pi n/2}$, $-\infty < n < \infty$
b) $x(n) = 10 - 5\,\mathrm{sen}(\pi/2n) + 20\cos(\pi n)$, $-\infty < n < \infty$

9) Respuesta permanente y transitoria para señales sinusoidales
Para el sistema descripto por la siguiente ecuación en diferencias

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$$

con condiciones iniciales de reposo, se pide:

a) Encontrar la expresión analítica de la salida $y(n)$ ante una entrada $x(n)$ aplicada a partir de $n = 0$, utilizando los métodos de la guía de Sistemas LTI (recurrencia temporal).
b) Encontrar a partir de dicha expresión general, la salida que corresponde cuando la entrada es $x(n) = Ae^{jn\pi/2}$, $n \geq 0$ (en forma explícita). A partir de esta expresión, y comparándola con la obtenida en el ejercicio 8.a) discuta el significado de la respuesta permanente y de la transitoria. Grafique ambos tipos de respuesta mediante MATLAB.

Transformada de Fourier de Corto Tiempo

10) Este ejercicio propone el análisis de una señal *no* estacionaria mediante el análisis de Fourier convencional y con ventanas. La señal propuesta se encuentra en el ftp de la materia:

ftp://fi.uba.ar/pub/materias/6607/muestras/fsk.mat

y representa una porción (simplificada) de una transmisión por sistema FSK (frequency-shift keying). En dicho sistema se pueden transmitir una serie de dígitos, codificados en la frecuencia de una portadora:

$$\omega_0 \to 0, \omega_1 \to 1, \ldots, \omega_k \to k$$

Cada porción de señal contiene un segmento de señal sinusoidal con una de las frecuencias claves. En el transmisor la tarea consiste en convertir una secuencia de dígitos en una secuencia de segmentos de senoides de las frecuencias correspondientes. En el receptor el objetivo es el inverso: dada la secuencia de senoides, determinar cuál es la secuencia de dígitos correspondiente.

Se pide:

a) Realizar la transformada de Fourier de la señal contenida en el archivo `fsk.mat`. Para ello utilice la función de MATLAB
b) `X = fft(x);`
c) (considerar que la secuencia `X` son las muestras del espectro de Fourier de la señal `x`, entre 0 y 2π).
   `i)` Graficar dicho espectro y determinar si corresponde a una señal FSK.
   `ii)` Cuáles son las frecuencias presentes?.
   `iii)` Se puede determinar la secuencia de dígitos a partir de este espectro (suponiendo que se conoce el código)?
d) Graficar el espectro de corto tiempo de la señal mediante la función de MATLAB
e) `specgram(x)`
   i) Explicar el significado de las líneas horizontales y verticales que aparecen en el gráfico.
   ii) Se puede determinar en este espectro la secuencia de dígitos contenidos?
   iii) Verificar en la señal temporal la ubicación de los momentos donde se producen las conmutaciones de frecuencia, usando como dato el espectrograma.

11)
a) Realizar el análisis de la señal contenida en el archivo `chirp.mat` que figura en el mismo directorio, con la Trasformada de Fourier convencional y la de corto tiempo.
b) A partir de los datos que se obtuvieron en el apartado anterior generar una señal de iguales características.

12) Comparación de ventanas
a) Graficar el modulo de la transformada de Fourier de las ventanas Rectangular, de Hamming y de Kaiser (esta última con valores de β = 3 y 6). Utilice las funciones de MATLAB `hamming`, `kaiser` y `semilogy`. Determine el ancho del lóbulo principal y la altura de los lóbulos secundarios para valores de N = 64, 128 y 256.

b) Para la señal $s[n] = \cos(\omega_0 n) + \cos(\omega_1 n), \quad -\infty < n < \infty$, realice un análisis de Fourier con ventana rectangular con N = 64, para los siguientes valores $\omega_0 = \frac{2\pi}{14}$ y $\omega_1 = \frac{4\pi}{15}, \frac{2\pi}{12}$ y $\frac{4\pi}{25}$.

c) Rehacer el punto b) con una ventana de N = 128. Qué poder discriminativo tiene esta ventana?.

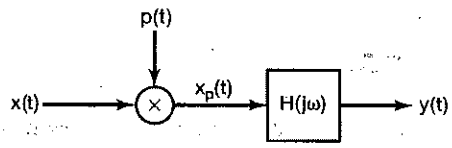
d) Rehacer el punto b) con una ventana de Hamming de N = 64. Qué es 'leakage'?.

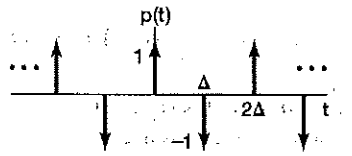
e) Realizar nuevamente el ejercicio 12.b) utilizando diferentes tipos y anchos de ventanas.

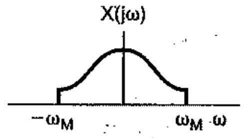
Señales y Sistemas (66.07)

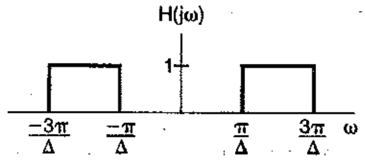
Práctica 5: Muestreo e interpolación

1. En la figura se muestra un sistema en el cual la señal de muestreo es un tren de impulsos con signo alternado. La transformada de Fourier de la señal de entrada es como se indica en la figura.
   a) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$ dibuje la transformada de Fourier de $x_p(t)$ e $y(t)$.
   b) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$ determine un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.
   c) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$ determine un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.
   d) ¿Cuál es el valor *máximo* de Δ en relación con ω_M para la cual $x(t)$ puede recuperarse a partir de $x_p(t)$ o de $y(t)$?

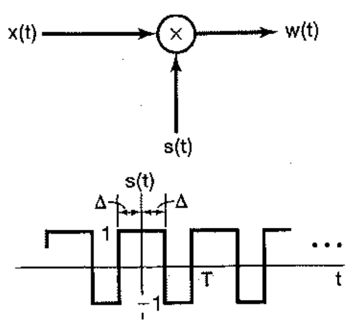




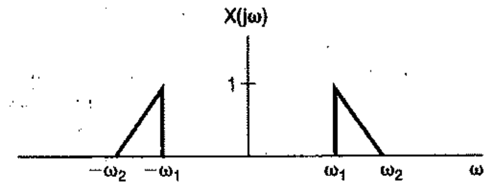




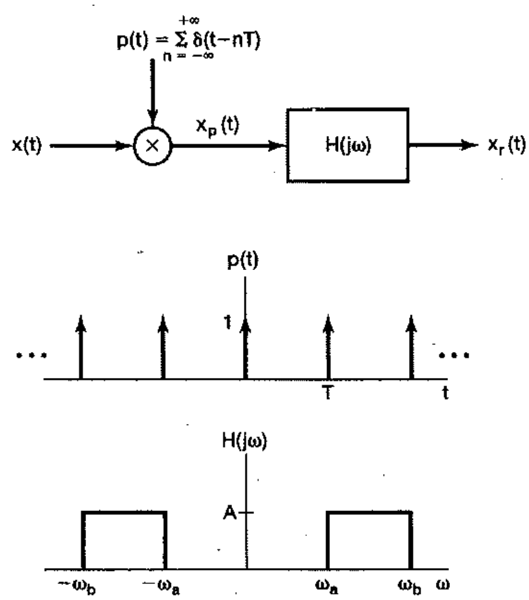
? 2. En la figura se muestra un sistema en el cual la señal de entrada está multiplicada por una onda cuadrada periódica. El período de $s(t)$ es T. La señal de entrada es de banda limitada con $|X(j\omega)| = 0$ para $|\omega| \geq \omega_M$.
   a) Para $\Delta = T/3$ determine en términos de ω_M el valor máximo de T para el cual no hay traslape entre las réplicas de $X(j\omega)$ en $W(j\omega)$.
   b) Para $\Delta = T/4$ determine en términos de ω_M el valor máximo de T para el cual no hay traslape entre las réplicas de $X(j\omega)$ en $W(j\omega)$.



3. El teorema del muestreo establece que una señal $x(t)$ debe ser muestreada a una velocidad mayor que su ancho de banda (es decir a una velocidad mayor que dos veces el doble de su frecuencia máxima). Esto implica que si $x(t)$ tiene un espectro como el indicado en la figura entonces $x(t)$ debe ser muestreada a una velocidad mayor que $2\omega_2$. Sin embargo, ya que la señal tiene la mayor parte de su energía concentrada en una banda angosta, parecería razonable esperar que una velocidad de muestreo más baja que el doble de la frecuencia más alta pudiera ser usada. A una señal cuya energía está concentrada en una banda de frecuencias a menudo se la conoce como *señal paso banda*. Hay una gran variedad de técnicas de muestreo para dichas señales, y estas técnicas son generalmente conocidas como *técnicas de muestreo paso banda* . Considere para ello el sistema de muestreo de la figura. Suponiendo que $\omega_1 > \omega_2 - \omega_1$ encuentre el valor máximo de T y los valores de las constantes A, ω_a y ω_b tales que $x_r(t)=x(t)$.

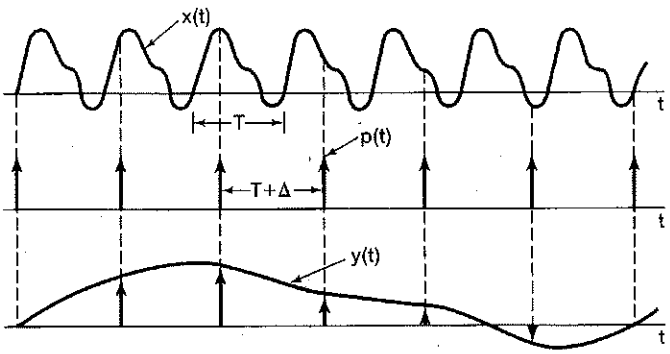


(a)

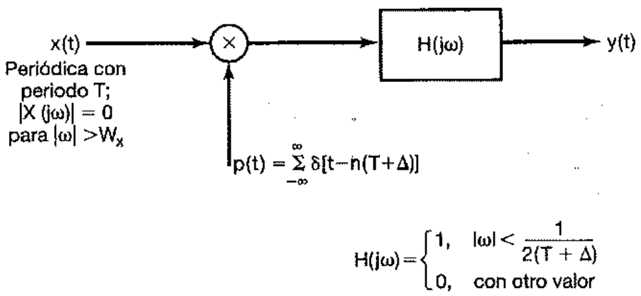


(b)

4. A menudo es necesario desplegar en una pantalla de osciloscopio las forma de onda que tienen estructuras de tiempo muy cortas, por ejemplo en la escala de milésimas de nanosegundo. Debido a que el tiempo de subida del osciloscopio más rápido es más largo que tales intervalos, este tipo de despliegue no se puede lograr directamente. Sin embargo, si la forma de onda es periódica, el resultado deseado puede obtenerse de manera indirecta usando un instrumento llamado osciloscopio de muestreo. La idea, como se muestra en la figura (a), es muestrear la forma de onda *x(t)* rápida una vez cada período, pero en puntos sucesivos posteriores y en períodos sucesivos. El incremento Δ debe ser un intervalo de muestreo seleccionado apropiadamente en relación con el ancho de banda de *x(t)*. Si el tren de impulsos resultante se pasa entonces a través de un filtro de interpolación pasa bajo adecuado, la salida *y(t)* será proporcional a la forma de onda rápida original, haciéndola más lenta o alargada en tiempo, es decir *y(t)* es proporcional a *x(at)*, donde $a<1$.
Para $x(t) = A + B\cos((2\pi/T)t + \theta)$, encuentre un intervalo de valores Δ de manera que *y(t)* de la figura (b) sea proporcional a *x(at)* con $a<1$. También determine el valor de a en términos de T y Δ.



(a)



(b)

5. Muestreo: Para la señal $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}}$ (gaussiana),

a) Calcular aproximadamente la frecuencia de Nyquist de muestreo observando con la FFT el espectro de la señal obtenida. Contrastar el resultado obtenido teóricamente.

b) Repetir el punto anterior pero para la señal $x(t)$ multiplicada por $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

6. Aliasing: Sea la señal $x(t)=\cos(2\pi f_0 t+\phi)$, y la señal discreta generada a partir de ella $x[n]=x(t)|_{t=nT_s}$.
   c) Graficar 20 ms de $x[n]$, para f_0= 100, 225, 350, 475 Hz, considerando que $f_s = 1\ T_s = 8000$ Hz. Graficar aproximadamente además (muestras de) $X(\Omega)$, mediante las tecnicas estudiadas en la práctica 4.
   d) Idem a) pero para f_0= 7525, 7650, 7775, 7900 Hz. Explique la apariencia de ambas series de graficos, y sus diferencias.
   e) Cuál es la f_0 limite entre ambos casos? .

7. La señal discreta

$$x(n)=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right),\ -\infty < n < \infty$$

se obtuvo del muestreo de la señal continua

$$x(t)=\cos(\omega_0 t),\ -\infty < n < \infty$$

a una frecuencia de muestreo Fs = 1000Hz. ¿Qué valores de ω_0 (positivos) resultarían en la secuencia *x(n)*?.

8. Interpolación: Siendo *x(n)* la señal discreta obtenida en el punto 3.a) con $f_0 = 100$, a una frecuencia mayor que la f_s de Nyquist. Dada

$$x_e(n)=\begin{cases} x(n/L) \text{ para } n = 0, \pm L, \pm 2L,.. \\ 0 \text{ para otro } n \end{cases}$$

   f) Escriba las ecuaciones en diferencias que correspondan a un interpolador de orden 0 y otro de orden 1.
   g) Usando la función `filter` de MATLAB interpole la señal $x_e(n)$ para L = 5, con ambos filtros.
   h) Idem b) pero usando la función `interpft` de MATLAB y usando interpolacion ideal. Comparar b) y c) contra los valores reales de la señal.
   i) Discuta las diferencias entre el espectro de la señal original *x(n)* y los espectros de las señales interpoladas.

9. La figura 1 muestra el sistema global para filtrar una señal en tiempo continuo utilizando un filtro en tiempo discreto.La figura 2 muestra la respuesta en frecuencia del filtro de reconstrucción $X_r(j\Omega)$ y del filtro en tiempo discreto $H(e^{j\omega})$.
   (a) Para la señal cuyo espectro $X_c(j\Omega)$ se muestra en la figura 3 y 1/T=20KHz. Dibuje $X_s(j\Omega)$ y $X(e^{j\omega})$.
   Para un cierto intervalo de valores de T el sistema completo, con entrada $x_c(t)$ y salida $y_c(t)$ es equivalente a un filtro pasa bajos en tiempo continuo cuya respuesta en frecuencia $X_{\text{eff}}(j\Omega)$ se muestra en la figura 4.

(b)Determine el intervalo de valores de T para los que la información presentada en el punto (a) es verdadera cuando $X_c(j\Omega)$es de banda limitada a $|\Omega| \leq 2\pi \times 10^4$, como se muestra en la figura 3.

(c)Para el intervalo de valores determinado en el punto (b), dibuje Ω_c en función de 1/T.

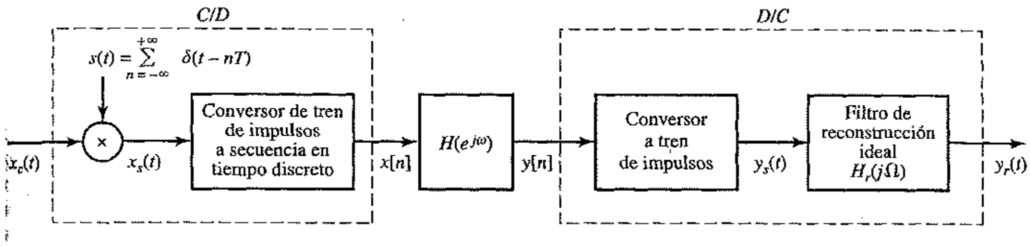


Figura 1

Figura 2

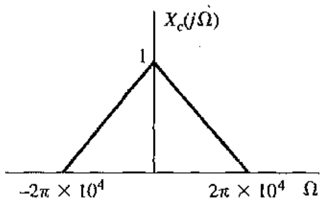


Figura 3

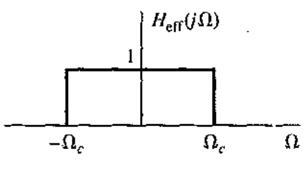
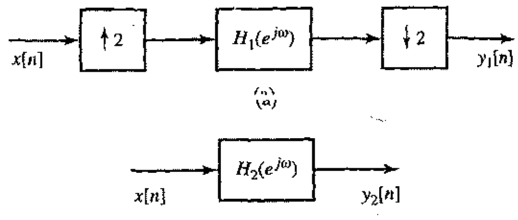


Figura 4

10. Considere el sistema que se muestra en la figura. Suponga que $H_1(e^{j\omega})$ es fija y conocida. Obtenga $H_2(e^{j\omega})$, la respuesta en frecuencia del sistema LTI, de forma que si las entradas al sistema son iguales, se cumpla $y_2[n] = y_1[n]$.



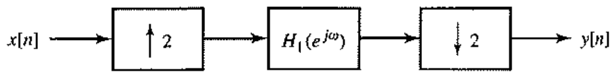
(b)

11. Se sabe que una señal en tiempo continuo de banda limitada contiene una componente de 60Hz. que deseamos eliminar procesándola con el sistema de la figura 4.11, con $T=10^{-4}$.
   (a)¿Cuál es la máxima frecuencia que puede contener la señal en tiempo continuo para evitar el solapamiento?
   (b)La respuesta en frecuencia del sistema en tiempo discreto que se va a utilizar es

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\left[1-\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1-e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}{\left[1-0.9e^{-j(\omega-\omega_0)}\right]\left[1-0.9e^{-j(\omega+\omega_0)}\right]}$$

   Dibuje el modulo y la fase de $H\left(e^{j\omega}\right)$.
   (c)¿Qué valor debería tener ω_0 para eliminar la componente de 60 Hz?

12. Sea $x_c(t)$ una señal real de tiempo continuo cuya frecuencia superior es $2\pi(250)$ rad/seg. Además, sea la señal $y_c(t) = x_c(t - 1/1000)$.
   (a)Si $x(n) = x_c(n/500)$, ¿es teóricamente posible recuperar $x_c(t)$ a partir de $x(n)$? Justifique la respuesta.
   (b)Si $y(n) = y_c(n/500)$, ¿es teóricamente posible recuperar $y_c(t)$ a partir de $y(n)$? Justifique la respuesta.
   (c)¿Es posible obtener $y(n)$ a partir de $x(n)$ utilizando el sistema de la figura? Si es así, determine $H_1\left(e^{j\omega}\right)$.
   (d)Es también posible obtener $y(n)$ a partir de $x(n)$ sin utilizar diezmado ni interpolación, sino utilizando un unico sistema LTI con respuesta al impulso $H_2\left(e^{j\omega}\right)$. Determine $H_2\left(e^{j\omega}\right)$.


x[n]
↑ 2
H_1(e^{jω})
↓ 2
y[n]

Señales y Sistemas (66.07)

Práctica 6: Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La Transformada Discreta y sus Propiedades

1) Calcular analíticamente y mediante la función FFT de Matlab las siguientes DFT's:

   a) x[n] = [1,0,0,0,0,0,0,0]

   b) x[n] = [0,0,0,1,0,0,0,0]
      i. Determinar la relación con la DFT de la secuencia a) analíticamente.
      ii. Probar otros desplazamientos determinando si existe alguno distinto de cero tal que la DFT sea real.
      iii. Repetir para vectores de longitud 10.

2) A partir de los resultados obtenidos en el ejercicio anterior calcular las DFT's de la siguientes secuencias:

   a) x[n] = [1,0,0,0,1,0,0,0]

   b) x[n] = [1,1,1,1,1,1,1,1]

   c) x[n] = [1,1,1,0,0,0,1,1]

   d) $x[n]=\dfrac{\sin(\pi nL/N)}{\sin(\pi n/N)}$ para n = 0, ..., N-1 y L impar.

3) Dada una secuencia cualquiera de longitud N=10 calcular su DFT . Ahora genere una nueva secuencia de longitud 50 intercalando 4 ceros entre las muestras de la secuencia anterior y calcule su DFT. Relacione teóricamente ambos resultados utilizando la definición de DFT.

Autovectores y autofunciones de los sistemas LTI. Relación con la DFT

4) La DFT puede comsiderarse un cambio de base y por lo tanto puede escribirse como el producto de un vector fila por una matriz.

   a) A partir de la expresión de la DFT determine esa matriz.

   b) Los vectores columna de esa matriz forman una base ortogonal? Cuál es la expresión analítica de estos vectores.

   c) Cuál es la DFT de cada uno de estos vectores columnas y cuál es su IDFT? Relacione su respuesta con las DFT's obtenidas en los puntos 1 y 2.

5) Sea la señal discreta $s[n] = A \cos(2\pi f_0 n/N)$ para $n = 0, \ldots\ldots, N - 1$

a) Grafique la señal y su transformada para algún $_0$ entero entre 1 y $N - 1$.

b) Cómo puede leerse f_0 en el gráfico de la señal y de la transformada.

c) Calcular analíticamente la DFT utilizando los conceptos vistos en el ejercicio 4 es decir expresando s[n] como combinación lineal de los vectores de la base.

d) Grafique la señal y su transformada para un f_0 no entero entre 1 y $N - 1$. Relacione los resultados con los obtenidos en los puntos anteriores. Calcule analíticamente la DFT y explique la diferencia con el cálculo de la DFT del punto c). Puede leerse f_0 en los gráficos de la señal temporal y de su transformada?

e) Los puntos anteriores pueden utilizarse para la construcción de un "analizador de espectro" digital. Sea una señal discreta s[n] obtenida al muestrear una funció senoidal de frecuencia f con período de muestreo $Ts = 1/fs$. Determinar la frecuencia f mediante la DFT. Analice la conveniencia de las distintas ventanas y del agregado de ceros para mejorar la resolución espectral. Qué pasaría si en lugar de una única frecuencia fuera la suma de varias senoides?

Relación de la DFT con la serie discreta de Fourier

6) A partir de la fórmula de la DFT de una señal discreta x[n] de duración N, hallar l relación con los coeficientes de la serie de Fourier de la señal x[n] periodizada en N.

7) Para las señales de la figura 1 calcular y graficar los coeficientes de la serie de Fourier utilizando la DFT. Justificar el procedimiento.

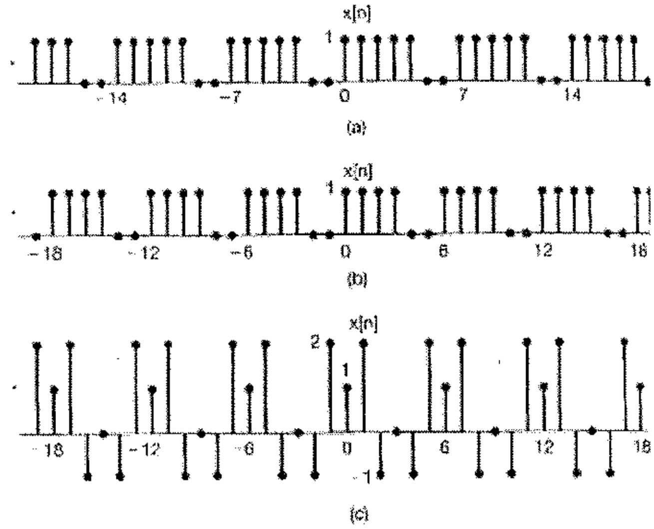


Figura 1

8) Calcule y grafique nuevamente los coeficientes de la serie de Fourier para la señal a) de la figura 1 pero suponiendo que es un pulso de 5 muestras y período de repetición $N = 10$ y $N = 50$. Qué relación existe entre estas DFT's y la hallada en e punto anterior?

Relación de la DFT con la Transfomada Continua de Fourier

9) Encuentre la relación entre X(k), la DFT de una señal discreta y finita x[n], y la transformada Fourier de tiempo discreto $X(\Omega)$ de la misma señal, a partir de las fórmulas de ambas transformadas.

10) Conociendo la relación entre la DFT y la transformada de Fourier de tiempo discreto se desea obtener 100 muestras del espectro de la señal $x[n] = \sin(n\pi/32)/n$. Cuál es el procedimiento a seguir

11) Hallar utilizando la DFT la respuesta en frecuencia de un sistema cuya respuesta impulsiva es:

a) $h[n] = u[n] - u[n\text{-}20]$.

b) $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

c) Comparar los resultados con los hallados en el punto 4 de la Práctica 4.

12) Encuentre la relación entre la IDFT y la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto.

13) Calcule la señal y[n] como la IDFT de las muestras del espectro de la seña $x[n] = \sin(n\pi/32)/n$ obtenidas en el punto 10). Grafique las señales x[n] e y[n] y encuentre la relación entre ambas.

14) Dada una secuencia de 64 valores definida por

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{64}\right) + \cos\left(\frac{16\pi n}{64}\right) \qquad n = 0,......,63$$

y sea X(k) la DFT de 64 muestras se forma una nueva secuencia $X_I(k)$ de 32 muestras definida por

$$X_I(k) = X(2k) \qquad n = 0,......, 31$$

a) Hallar $x_I[n]$ la IDFT de $X_I[k]$

b) Hallar otras dos secuencias x[n] que den la misma $x_I[n]$.

Convolución lineal y circular utilizando la DFT

15) Según lo visto en clases anteriores es posible obtener la salida de un sistema LTI calculando la Transformada de Fourier de la señal de entrada y de la respuesta impulsiva del sistema y haciendo la transformada inverso del producto de ambas transformadas. Es posible aplicar el mismo principio utilizando la transformada discreta en lugar de la continua?

16) Dadas las señales:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{para } n = 0,.....,7 \\ 0 & \text{para otro } n \end{cases}$$

$$h[n] = \delta(n-8)$$

a) Encuentre analíticamente la IDFT del producto de ambas DFT's considerando a las señales como de longitud 12.

b) Idem anterior pero considerando a las señales como de longitud 16.

c) Repita los cálculos utilizando Matlab.

17) Dados dos pulsos discretos de duración N=8 y amplitud unitaria:

a) Hallar analíticamente su convolución lineal y luego mediante la función "conv" de Matlab.

b) Hallar analíticamente la convolución circular de 8 puntos y luego mediante la DFT la IDFT.

c) Hallar su convolución lineal mediante el uso de la DFT y la IDFT.

d) Periodizar la secuencia obtenida en el punto a) con período N=8. Qué relación tiene con la secuencia obtenida en el punto b)?

18) Dadas dos secuencias de 4 puntos x[n] y h[n] definidas de la siguiente forma:

$$x[n] = \cos(n\pi/2), \qquad = \quad n \quad 0$$

$$h[n] = 2^n, \qquad = \quad n \quad 0 \quad ,1 \quad , \quad 2 \quad ,$$

a) Calcular la DFT $X[k]$ de 4 puntos de la secuencia $x[n]$.

b) Calcular la DFT $H[k]$ de 4 puntos de la secuencia $h[n]$.

c) Calcular $y_1[n]$ como la convolución circular de 4 puntos de $x[n]$ con $h[n]$.

d) Calcular $y_2[n]$ como la IDFT de 4 puntos del producto de las DFTs $X[k]$ y $H[k]$.

e) Calcular la respuesta de un sistema cuya respuesta impulsiva es $h[n]$ cuando se le aplica a la entrada la secuencia $x[n]$. Qué relación guarda esta respuesta con la salida $y_2[n]$ hallada en el punto d).

19) Dadas las señales que se muestran en la figura 2

Figura 2

a) Conteste intuitivamente cuál de las dos señales tiene mayor energía en altas frecuencias.

b) Compruebe su respuesta calculando la transformada de Fourier de tiempo discreto de ambas señales suponiendo que los saltos son unitarios, es decir el mínimo valor es 0 y el máximo 4.

c) Qué sucede si se quiere encontrar la respuesta en frecuencia a partir de la DFT de 8 muestras? Discutir el resultado.

20) Dada la señal $x[n] = (1 + \cos(n\pi/10))\cdot u[n]$

a) Hallar la salida para un sistema cuya respuesta al impulso es $h[n] = u[n] - u[n-10]$. Qué precauciones hay que tomar para realizar el filtrado utilizando la DFT y la IDFT.

d) Hallar nuevamente la salida pero utilizando la función "filter". Comparar los resultados.

c) Qué tipo de filtrado realiza este sistema.

d) Analizar intuitivamente cuál sería la salida si la respuesta al impulso del sistema fuera $h[n] = u[n] - u[n-20]$. Verificar el resultado con Matlab.

Señales y Sistemas (66.07)

Práctica 7 : Transformada z y Transformada de Laplace

Parte I: Transformada de Laplace

1) Transformada de Laplace:
Determinar la transformada de Laplace, la región de convergencia asociada y el diagrama de polos y ceros de cada una de las siguientes funciones del tiempo:

$a)\ x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

$b)\ x(t) = e^{2t}u(-t) + e^{3t}u(-t)$

$$c)\ x(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 2-t & 1 < t \le 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

2) Diagrama de polos y ceros y región de convergencia:
2.1)Dibujar mediante los comandos de MATLAB `roots` y `plot` el diagrama de polos y ceros de las transformadas de Laplace

$a)\ \frac{1}{s^2+9};\ \Re e\{s\} > 0$

$b)\ \frac{1}{s^2+9};\ \Re e\{s\} < 0$

$c)\ \frac{s+1}{(s+1)^2+9};\ \Re e\{s\} < -1$

$d)\ \frac{s+2}{s^2+7s+12};\ -4 < \Re e\{s\} < -3$

$e)\ \frac{s+1}{s^2+5s+6};\ -3 < \Re e\{s\} < -2$

$f)\ \frac{(s+1)^2}{s^2-s+1};\ \Re e\{s\} > \frac{1}{2}$

$g)\ \frac{s^2-s+1}{(s+1)^2};\ \Re e\{s\} > -1$

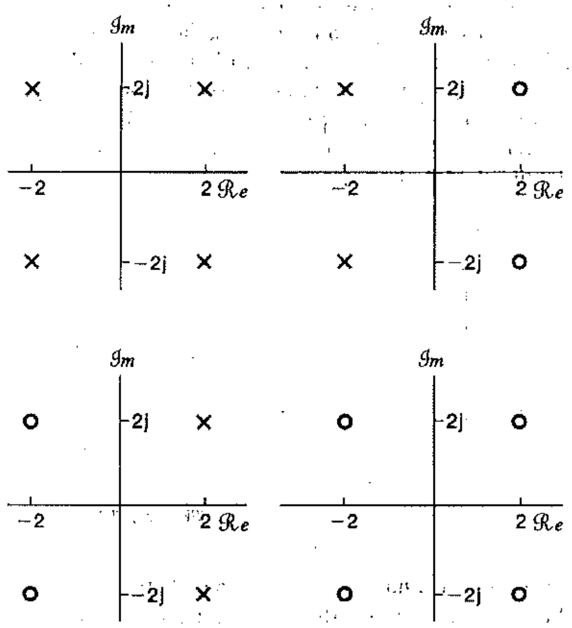
2.2) Para cada uno de los siguientes enunciados acerca de *x(t)*, y para cada uno de los cuatro diagramas de polos y ceros de la figura, determine la restricción correspondiente de la ROC.

a) $x(t).e^{-3t}$ es absolutamente integrable.

b) $x(t) * (e^{-t}u(t))$ es absolutamente integrable.

c) $x(t) = 0,\ t > 1$.

d) $x(t) = 0,\ t < -1$.



3) Antitransformada de Laplace:
Para los mismos casos correspondientes al ejercicio 2), hallar *x(t)*.

4) Ecuaciones en diferencias y diferenciales:
Considere un sistema LTI continuo en el cual la entrada *x(t)* y la salida *y(t)* están relacionadas con la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

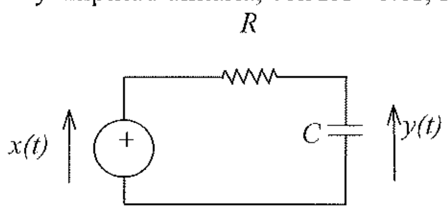
Sean *X(s)* e *Y(s)* las transformadas de Laplace de *x(t)* e *y(t)*, respectivamente, y sea *H(s)* la transformada de Laplace de *h(t)*, la respuesta al impulso del sistema.

a) Determine *H(s)* como una relación de polinomios en *s*. Dibuje el patrón de polos y ceros de *H(s)*.

b) Determine *h(t)* para cada uno de los siguientes casos:

- El sistema es estable.
- El sistema es causal.
- El sistema no es causal ni estable.

5) Sistemas LTI, representación de señales en base de Fourier y respuesta en frecuencia: Para el siguiente circuito *RC*, excitado con una señal periódica rectangular de período T=1s, ciclo de servicio=0.5 y amplitud unitaria, con RC=0.1s; se pide:



a) Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de la entrada $x(t)$ y en base a éstos calcular los de la salida $y(t)$, aplicando los conceptos de sistemas LTI vistos hasta el momento. Graficar mediante MATLAB estos coeficientes, para $k = 0,\ldots,100$.

b) Calcular analíticamente utilizando Transformada de Laplace la forma de $y(t)$. Calcular a partir de esta expresión temporal los coeficientes de su representación en serie de Fourier. Comparar estos valores con los obtenidos en el punto a).

c) Explicar conceptualmente qué es la *respuesta en frecuencia*. Graficar esta función para los valores de k mencionados utilizando los datos calculados en el punto b) y los coeficientes de la señal de entrada. Graficar toda la envolvente superponiéndola a los valores anteriores utilizando la función `freqs` de MATLAB.

6) Respuesta en frecuencia y gráficos de Bode

Para el sistema de segundo orden que consiste en un resorte y un amortiguador unidos a una masa móvil y a un soporte fijo (ver figura 1), y que responde a la ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - k\frac{dy}{dt} - by(t),$$

que es del tipo general con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dy}{dt} + \omega_n^{\ 2}y(t) = \omega_n^{\ 2}x(t)$$

a)Graficar el diagrama de polos y ceros, considerando que $\omega_n = 1$, y los valores de ς: 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1, 1.5.

b) Graficar mediante la función `mesh` de MATLAB la superficie correspondiente al módulo, para valores de $\sigma < 0$ y $\omega > 0$, donde σ y ω son las componentes real e imaginaria de variable compleja s.

c) Idem b), pero con los módulos y los valores de ω en escala logarítmica. Comparar el corte de la superficie sobre el eje $j\omega$ con los gráficos de la figura 2.

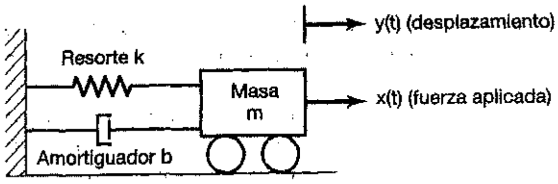


Figura 1

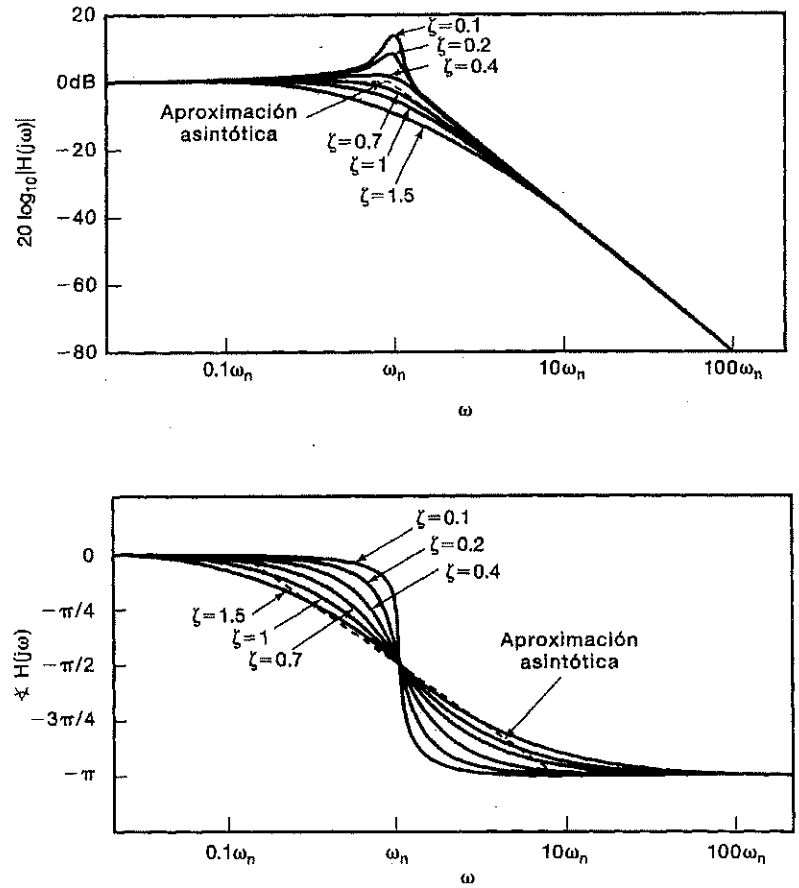


Figura 2

7) Determinación geométrica de la Transf. de Laplace:

a) Realizar el diagrama de Bode (puede utilizar la función `bode` de MATLAB) de la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + 10}{s^2 + 2s + 10}$$

Para qué propósito podría ser utilizado este sistema?

b) Interpretar geométricamente el gráfico obtenido, en especial el de fase.

c)

Parte II: Transformada z:

8) Transformada z:

Determine la transformada z de cada una de las siguientes secuencias. Trace el diagrama de polos y ceros e indique la región de convergencia. Indique si existe o no la transformada de Fourier de la secuencia.

$a)\ \delta[n+5]$

$b)\ \delta[n-5]$

$c)\ (-1)^n u[n]$

$d)\ (1/2)^{n+1} u[n+3]$

$e)\ (-1/3)^n u[-n-2]$

$f)\ (1/4)^n u[3-n]$

9) Determine la transformada z de cada una de las siguientes secuencias. Exprese todas las sumas en forma cerrada. Trace el diagrama de polos y ceros e indique la región de convergencia. Indique si existe la transformada de Fourier de la secuencia.

$a)\ (1/2)^n \{u[n+4] - u[n-5]\}$

$b)\ n.(1/2)^{|n|}$

$c)\ |n|.(1/2)^{|n|}$

$d)\ 4^n.\cos\left[\frac{2\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right]u[-n-1]$

10) Antitransformada z:

Usando el método indicado, determine la secuencia asociada con cada una de las siguientes transformadas z:

a) Por fracciones parciales:

$$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

siendo $x[n]$ absolutamente sumable.

b) Por división larga:

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

siendo *x[n]* derecha.

c) Por fracciones parciales:

$$X(z)=\frac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}$$

siendo *x[n]* absolutamente sumable.

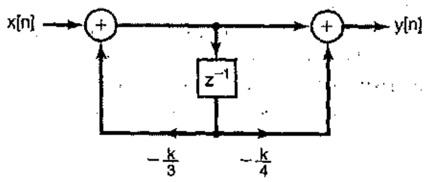
11) Ecuaciones en diferencias:
Sean los sistemas descriptos por las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-x[n-1]$$

$$y[n]-\frac{3}{2}y[n-1]=x[n]$$

a) Hallar *H(z)*, realizar el diagrama de polos y ceros, y analizar estabilidad y causalidad para cada uno de los sistemas y para el sistema que resulta de conectarlos en cascada.
b) Hallar la respuesta al impulso y al escalón de la cascada de ambos utilizando `filter`, para cada uno de los casos que resulta del análisis realizado en el punto anterior
c) Graficar la respuesta en frecuencia del sistema del punto b) usando la función de MATLAB `freqz`.
d) La función `freqz` realiza un muestreo de la Transf. z sobre el círculo unitario. Mediante la función `ifft` de MATLAB obtener una función temporal a partir de estas muestras, indicando el significado que esta función tiene. Comparar con las funciones obtenidas en el punto b). Es igual a alguna de ellas?. Justifique <u>analíticamente</u> su respuesta.

12) Sistemas LTI discretos:
Considere la estructura de filtro digital mostrado en la figura.
a) Encuentre H(z) para este filtro causal. Trace el patrón de polos y ceros e indique la región de convergencia.
b) ¿Para qué valores de *k* el sistema es estable?
c) Determine *y[n]* si $k=1$ y $x[n]=(2/3)^n$.



13) Transformada z e IDFT:

Para el sistema LTI descripto por

$$H(z) = 1 - z^{-5}$$

se pide:

a) Dibujar el diagrama de polos y ceros y las posibles ROC, analizando estabilidad y causalidad en cada caso.
b) Para cada una de las posibles ROC encontradas en el ítem anterior, hallar *h[n]* (antitransformada de *H(z)*) y graficarla.
c) Para cada una de las posibles ROC hallar la ecuación en diferencias equivalente.
d) Determinar *H(Ω)* la transformada de Fourier de *h[n]* y graficarla, indicando la relación con *H(z)*.
e) Para la secuencia $\hat{H}(k)$, correspondiente a muestras de la transformada de Fourier *H(Ω)* en $\Omega = \frac{2\pi k}{N}$, determinar su IDFT, $\hat{h}[n]$, para los casos: N=10; N=5; y N=2. Indicar justificadamente la relación entre $\hat{h}(n)$ y *h[n]* en dada caso.