

20.1 Introducción

En el capítulo anterior se vio que el paso de una corriente eléctrica crea un campo magnético alrededor del conductor por el que fluye la corriente. El descubrimiento de Oersted de este hecho, en 1819, condujo a los científicos a preguntarse si alguna manera sería igualmente posible invertir el proceso e inducir el flujo de corriente en un circuito por medio de un campo magnético. Los experimentos iniciales para producir este efecto fracasaron, porque al principio no se apreció que los flujos magnéticos constantes no inducen una FEM o flujo de corriente en un circuito. No fue sino hasta 1831 que se descubrió que podía generarse magnéticamente una corriente, pero

que este fenómeno sólo se observa cuando el flujo magnético a través del circuito cambia en el tiempo. A este efecto se le llama *inducción electromagnética*, y las corrientes y FEMs generadas de esta manera se denominan *corrientes inducidas* y *FEMs inducidas*. El físico inglés Michael Faraday (1791-1867) y Joseph Henry (1797-1878), quien fue el primero de una larga serie de distinguidos físicos estadounidenses, descubrieron de manera independiente y casi al mismo tiempo, la inducción electromagnética.

El descubrimiento de la inducción electromagnética de inmediato condujo a la posibilidad de construir máquinas que pudieran convertir el trabajo mecánico en energía eléctrica haciendo girar simplemente bobinas

conductoras en un campo magnético intenso. Este tipo de máquinas, que ahora se denominan *generadores*, se llamaron primeramente *dinamo-eléctricas*, y aunque muchos ingenieros y técnicos participaron en el desarrollo tecnológico de las *dinamos*, desde una curiosidad de laboratorio hasta una máquina comercial eficiente, puede considerarse que Henry y Faraday fueron los inventores del generador eléctrico. Puesto que las dinamos simples son reversibles y pueden operar como *motores*, o máquinas que producen trabajo mecánico cuando se les suministra corriente eléctrica de una fuente externa, igualmente se puede acreditar a Faraday y a Henry el haber inventado el motor eléctrico.

Estos dos científicos observaron que cuando fluye una corriente variable en el tiempo por un circuito dado, el campo magnético del propio circuito actúa induciendo una FEM en el mismo circuito, cuyos efectos son tales que se opone a la FEM externa que provoca la variación de la corriente. A este efecto se le llama *auto-inducción*. También estudiaron las FEMs y corrientes inducidas en una bobina por corrientes variables en el tiempo que fluían en otra bobina próxima, y encontraron que se podían producir FEMs inducidas muy grandes en una bobina con un número grande de vueltas de conductor, por medio de una FEM variable en el tiempo y más pequeña, aplicada en una bobina que consistiera en relativamente pocas vueltas. Así construyeron las primeras *bobinas de inducción*, que son precisamente las antecesoras de las bobinas de encendido que se usan en los automóviles con motor de gasolina para excitar las bujías, e inventaron los principios sobre los que opera el *transformador*.

Aunque Michael Faraday y Joseph Henry estaban interesados primordialmente en comprender y explicar los principios científicos en los que se funda el comportamiento de las corrientes eléctricas y los campos magnéticos, y no en inventar y desarrollar productos comerciales, se puede decir con seguridad que los valores sociales y comerciales resultantes de su trabajo hubieran bastado para multiplicar con creces sus modestos salarios.

En este capítulo se estudiará la manera como se producen las FEMs y las corrientes

inducidas a partir de flujos magnéticos cambiantes y cómo los flujos variables afectan las corrientes que circulan en los circuitos donde se originan y en otros circuitos. Al hacerlo, se tendrán que dominar los conceptos fundamentales que subyacen a los fenómenos de las FEMs y las corrientes inducidas, y a comprender la autoinducción, la inducción mutua y el comportamiento de los circuitos resistivos-inductivos.

20.2 FEMs de movimiento, corrientes inducidas y ley de inducción de Faraday

La física básica que fundamenta la producción de fuerzas electromotrices y corrientes inducidas por variación de flujos magnéticos, se puede comprender bastante bien considerando ejemplos donde algunos circuitos se someten a la acción de flujos magnéticos variables en el tiempo. En este punto, será conveniente que el lector revise la definición del término *flujo magnético* dada en la sección 19.3, ya que no se podrá comprender bien este capítulo a menos que el estudiante entienda este concepto.

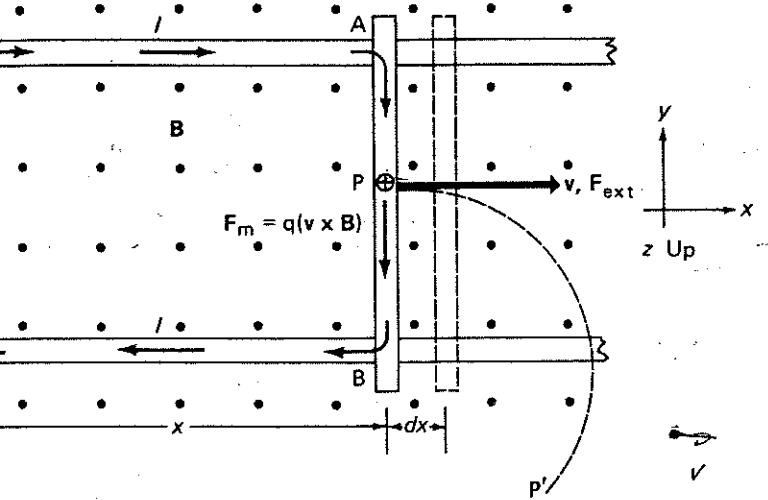
Los resultados experimentales de Faraday y Henry acerca de la producción de FEMs y corrientes inducidas puede resumirse en la observación de que

siempre que un flujo magnético variable en el tiempo atraviesa un circuito, se induce una FEM en éste cuya magnitud es directamente proporcional a la intensidad de cambio del flujo magnético con respecto al tiempo.

Este enunciado se conoce como *ley de inducción de Faraday*. Matemáticamente, haciendo referencia a la definición de flujo magnético expresada en la sección 19.3, puede escribirse como ecuación en la forma siguiente:

$$\delta_m = C \frac{d\Phi_m}{dt} = C \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (20.2.1)$$

en que δ_m designa la FEM inducida magnéticamente en el circuito y C es una constante de proporcionalidad cuya magnitud depende de



0.1. Fuerzas magnéticas y corrientes en un conductor en forma de U sobre el que se contactó deslizante que toca las dos ramas.

des en que estén \mathcal{E}_m , Φ_m y t . La in-
(20.2.1) se toma sobre el área en-
terior al circuito. En el SI, la constante
valor exacto de -1 , por razones se-
a las que determinan el valor $4\pi \times$
a la permeabilidad magnética del
tonces, en este sistema la ley de Far-
presa como

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA \quad (20.2.2)$$

resión puede simplificarse a

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = - \frac{d}{dt} BA \cos \theta \quad (20.2.3)$$

stancias en que se puede expresar
 $\cos \theta$ a la integral de (20.2.2), que
flujo magnético. En la expresión an-
tes el área limitada por el circuito y θ
entre el campo magnético y la nor-
no de aquél. La ecuación (20.2.3)
lizarse siempre que B sea de magni-
tud constante en el área encerrada por el cir-
cuito y la condición de que el circuito esté en un
as condiciones se satisfarán en la

mayoría de los ejemplos considerados en este texto, aunque hay algunos casos de interés práctico en que no es así. En esos casos es necesario calcular la FEM inducida utilizando la expresión más general (20.2.2).

El flujo magnético que atraviesa un circuito se puede variar, como indica (20.2.3), en una diversidad de modos: variando la magnitud de B con respecto al tiempo, haciendo cambiar el área del circuito con respecto al tiempo, o variando el ángulo θ con respecto al tiempo. En todos los casos se produce una FEM inducida descrita por (20.2.3) o por (20.2.2). Diferenciando el producto $BA \cos \theta$ en (20.2.3) y utilizando la regla para diferenciar el producto de tres funciones, se pueden ver más claramente estas distintas posibilidades:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (BA \cos \theta) &= A \cos \theta \frac{dB}{dt} + B \cos \theta \frac{dA}{dt} \\ &\quad + BA \frac{d(\cos \theta)}{dt} \end{aligned} \quad (20.2.4)$$

Como $d(\cos \theta)/dt = -\sin \theta (d\theta/dt)$, esto permite escribir (20.2.3) en la forma

$$1 A^2 \Omega = 1 J/s \quad 20.2 \text{ FEMs de movimiento, corrientes inducidas y ley de inducción de Faraday} \quad 821$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= -A \cos \theta \frac{dB}{dt} - B \cos \theta \frac{dA}{dt} \\ &\quad + BA \omega \sin \theta \end{aligned} \quad (20.2.5)$$

en que ω es la velocidad angular $d\theta/dt$. El signo negativo en (20.2.2) y (20.2.3) también tiene gran significación física, aunque se pospondrá el estudio detallado hasta más adelante en este capítulo.

Se pueden ilustrar los principios físicos en que se basa la ley de inducción de Faraday considerando detalladamente unos cuantos casos específicos en que se generan FEMs inducidas de modos especialmente simples. La primera se ilustra en la figura 20.1. En ese diagrama se ve un conductor rígido en forma de U cuyos brazos están conectados por un segmento de conductor recto AB que puede deslizarse sobre los brazos de la U. Todo el sistema está en un campo magnético constante B , en la dirección z . Aplicando una fuerza F_{ext} hacia la derecha se puede hacer que el conductor deslizante se mueva con velocidad constante v en la misma dirección. Una carga libre dentro del conductor AB experimentará una fuerza magnética, ya que se mueve con la velocidad v . De acuerdo con la expresión (19.2.7) de la fuerza magnética de Lorentz la magnitud es

$$F_m = q(v \times B) = q(v_i \times B_i) \quad (20.2.6)$$

porque en la figura 20.1 el vector v está en la dirección x mientras que B está en la dirección z . La fuerza F_m está en la dirección que se muestra en la figura 20.1, para una carga positiva; evaluando el producto vectorial de la ecuación (20.2.6), es claro que

$$F_m = (-qvB) i_y \quad (20.2.7)$$

en que el signo negativo significa que el vector F_m apunta en la dirección y negativa. Como las cargas en el conductor son móviles, esta fuerza establece una corriente I que fluye alrededor del circuito ABCD en el sentido de las manecillas del reloj. Al mover una carga q

desde A hasta B una distancia l en la figura, es necesario efectuar una cantidad de trabajo sobre la carga, dada por el producto de la fuerza y la distancia, es decir, $-qvBl$, que corresponde a un trabajo por unidad de carga $-qvBl/q = -vBl$. Por la definición de fuerza electromotriz dada en el capítulo 18, sección 18.3, esta última es la FEM que hace que fluya una corriente en el conductor AB, y por tanto, en el circuito ABCD. Adoptando esta imagen física de la FEM inducida, se puede expresar esta FEM inducida por movimiento \mathcal{E}_m como

$$\mathcal{E}_m = -vBl \quad (20.2.8)$$

En las otras ramas del circuito BC, CD y DA hay fuerzas $I dl \times B$ que actúan sobre las cargas que constituyen la corriente I , pero en todos los casos son normales a la dirección de flujo de la corriente, por lo que no efectúan trabajo. En consecuencia, la FEM dada por (20.2.8) es la única que hace que fluya corriente en el circuito. La intensidad de la corriente I que se debe a la FEM inducida será

$$I = \frac{|\mathcal{E}_m|}{R} = \frac{vBl}{R} \quad (20.2.9)$$

en que R es la resistencia de la trayectoria ABCD, suponiendo que todos los conductores son óhmicos. $|J| = I/R$

Cuando fluye corriente por la trayectoria ABCD, la energía eléctrica se disipa en forma de calor a razón de $I^2 R$ (joules por segundo) a medida que la corriente encuentra la resistencia R en el circuito. Esta energía eléctrica se debe originalmente a la energía cinética asociada a la velocidad ordenada de deriva de las cargas a lo largo del conductor. A su vez, sobre tal movimiento de deriva de la distribución de cargas libres dentro del conductor, actúa la fuerza de Lorentz que proviene de la velocidad v lateral, impartida al conductor AB por la fuerza externa. Por tanto, esta fuerza es la responsable de efectuar trabajo sobre cargas libres dentro del conductor, que las acelera hasta su velocidad media de deriva en el sentido de la corriente —o en el sentido contrario si son negativas. Por tanto, según la ley de conservación de la energía sería de esperar que el trabajo efectuado sobre el conductor por la fuerza externa durante un intervalo

dado, fuera igual a la energía eléctrica producida por la FEM inducida durante ese período, lo que sería igual a la cantidad de energía eléctrica disipada como calor por la resistencia del circuito durante ese tiempo.

De acuerdo con esta consideración, en que se conserva la energía, el trabajo efectuado por la fuerza F_{ext} para mover el conductor AB la distancia dx en el tiempo dt , es sencillamente $F_{ext} dx$, mientras que la cantidad de energía eléctrica disipada durante ese intervalo debe estar dada por

$$dW = I^2 R dt = (I)(IR) dt \quad (20.2.10)$$

o, recordando (20.2.9),

$$dW = IIBv dt \quad (20.2.11)$$

Igualando estas dos cantidades se encuentra que

$$F_{ext} dx = IIBv dt \quad (20.2.12)$$

$$F_{ext} \frac{dx}{dt} = F_{ext} v = IIBv \quad (20.2.13)$$

de donde, por (20.2.9),

$$F_{ext} = IIB = \frac{vB^2 l^2}{R} \quad (20.2.14)$$

En la sección 19.4 se vio que un segmento conductor recto definido por un vector \mathbf{l} y que lleva una corriente I , experimenta una fuerza $(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ cuando se coloca en un campo magnético uniforme \mathbf{B} . En el caso del segmento AB de la figura 20.1, esto significa que el conductor AB experimenta una fuerza de magnitud IIB en la dirección x negativa por parte del campo \mathbf{B} , pues el vector $\mathbf{l}_{AB} \times \mathbf{B}$ apunta en esa dirección. Pero según (20.2.14), tal fuerza es igual y opuesta a la fuerza aplicada exteriormente \mathbf{F}_{ext} . La fuerza resultante sobre el conductor AB es cero, lo que significa que está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre él. Por tanto, la fuerza \mathbf{F}_{ext} no acelera al conductor AB, sino sólo vence la fuerza magnética $I(\mathbf{l}_{AB} \times \mathbf{B})$ que actúa en la dirección opuesta, y por tanto, lo mantiene en movi-

miento a la velocidad constante v .¹ Una persona que tire de un conductor como AB, experimentará efectivamente una fuerza resistente que puede ser apreciable en las circunstancias apropiadas.

En este caso, es evidente que todo el trabajo efectuado por la fuerza aplicada exteriormente se transforma en energía térmica interna de los átomos en los conductores. Pero si se intercala un motor eléctrico en el circuito ABCD de la figura 20.1, parte de ese trabajo aparecería como trabajo mecánico efectuado por el motor. La disposición que se muestra en la figura puede considerarse como una especie burda de dinamo o generador eléctrico.

Se ha explorado con cierta extensión el fundamento físico de la FEM inducida en este caso para que el lector pueda comprender sus orígenes en forma puramente cualitativa e intuitiva, y para demostrar cómo encaja esto en el cuadro de las corrientes, campos y fuerzas que se delineó en el capítulo anterior. Se podría haber obtenido su valor con mucho mayor facilidad, y pronto se incurrirá en el hábito de hacerlo, partiendo simplemente de la ley de inducción de Faraday expresada por (20.2.3):

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA \cos \theta) \quad (20.2.15)$$

En este ejemplo, B no cambia en el tiempo y la normal al plano del circuito es paralela a \mathbf{B} , de manera que $\theta = 0$ y $\cos \theta = 1$. En estas circunstancias, lo único que ahora varía en el tiempo es el área de ABCD, de manera que (20.2.15) queda como

$$\mathcal{E}_m = -B \frac{dA}{dt} = -B \frac{d}{dt}(lx) = -Bl \frac{dx}{dt} \quad (20.2.16)$$

o bien,

$$\mathcal{E}_m = -Blv \quad (20.2.17)$$

¹ Este enunciado es estrictamente cierto sólo si la resistencia R del circuito ABCD permanece constante. En realidad debido a que la longitud de los segmentos AD y BC varía a medida que el conductor AB se mueve hacia la izquierda, la resistencia del circuito también cambia. Sin embargo, ésta es una cuestión secundaria que no afecta la validez general del estudio que se da en este ejemplo.

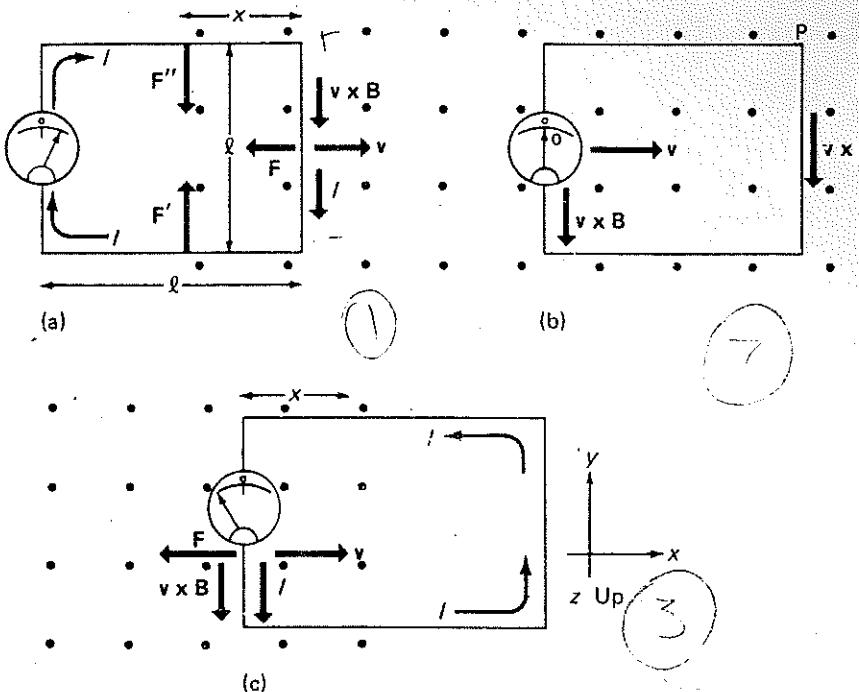


FIGURA 20.2. Corriente y "FEMs de movimiento" en un circuito que entra (a), atraviesa (b) y sale (c) de una región en la que se ha producido un campo magnético uniforme.

Esta respuesta concuerda exactamente con el resultado anterior (20.2.8). Desde luego, se podría haber utilizado (20.2.5), en donde se cancelan el primero y el tercer términos porque tanto B como θ son constantes, para obtener el mismo resultado. También puede notarse que la concordancia entre este resultado y el expresado como (20.2.8) sólo se obtiene si a la constante C de (20.2.1) se le asigna el valor -1 . Se puede considerar que esta concordancia justifica la selección de $C = -1$ en aquella ecuación.

En la figura 20.2 se muestra otro ejemplo algo semejante pero en el que se ilustran algunos otros aspectos de la inducción electromagnética. En este caso se desplaza una espira cuadrada de alambre cuyos lados miden l y que originalmente está en una región sin campo magnético, con una velocidad constante v hacia una región donde hay un campo \mathbf{B} constante; la espira pasa a través de esta región y

sale por el otro lado, donde nuevamente no hay campo magnético. Se supone que el campo es normal al plano de la espira. Se desea examinar las corrientes inducidas en la espira, así como las fuerzas que actúan sobre ella al pasar, por esta serie de eventos.

En tanto que la espira está en una región sin campo, no puede haber FEMs de movimiento, pero tan pronto como el lado derecho del cuadrado entra a la región donde existe el campo constante \mathbf{B} , las cargas en esta parte de la espira experimentarán fuerzas magnéticas dadas por

$$\mathbf{F}_m = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (20.2.18)$$

que establecen una FEM de movimiento con magnitud

$$\mathcal{E}_m = -lvB \quad (20.2.19)$$

en forma análoga a como en el ejemplo anterior. Esta FEM establece en la espira una

de I en el sentido del reloj, cuya intensidad

$$= \frac{vBl}{R} \quad (20.2.20)$$

rior se ilustra en la figura 20.2, a. Esta vez en el lado derecho de la espira experimenta una fuerza dada por $F = I(l \times B)$. La flecha apunta en la dirección x negativa, como se muestra en el diagrama, y naturalmente su magnitud es

$$IlB = -\frac{vB^2l^2}{R} \quad (20.2.21)$$

Para contrarrestar esta fuerza y mantener la espira en equilibrio de manera que se mueva con velocidad constante, es necesario aplicar una fuerza externa de igual magnitud y dirección opuesta. En los tramos de las partes superior e inferior del cuadrado que están en la espira, donde se halla establecido el campo, no hay fuerzas del tipo $I(l \times B)$; F' y F'' , como se muestra, aunque son iguales en magnitud y no dan origen a fuerzas o momentos.

Una vez que el lado izquierdo de la espira entra en la región del campo, como se muestra en la figura 20.2, b, las cargas en los tramos izquierdo e izquierdo del circuito experimentan fuerzas magnéticas iguales de la forma de (20.8). Pero estas fuerzas tienden a establecer corrientes que circularían en sentidos opuestos alrededor del circuito, cancelándose entre sí. Visto de otra manera, una carga positiva sale del punto P y recorre el circuito en sentido contrario de las manecillas del reloj, primero experimenta una FEM que aumenta su energía potencial en la cantidad $qBlv$ en el lado izquierdo de la espira, y luego una FEM en el lado derecho que disminuye su energía potencial en una cantidad semejante. Por tanto, la fuerza neta alrededor del circuito es cero, y no permanece ninguna corriente inducida. Puesto que no hay corriente en la espira, no hay fuerzas que actúen sobre ella o sobre ninguna de sus partes.

En la figura 20.2, c, el lado derecho de la espira sale de la región del campo y en esa parte del circuito la FEM de movimiento se ha redu-

cido a cero. Pero todavía está la FEM en el segmento del lado izquierdo, de magnitud vBl , que provoca que fluya una corriente vBl/R alrededor del circuito, esta vez en sentido contrario al del reloj. La corriente en este tramo del circuito experimenta una fuerza F cuya magnitud está dada por (20.2.21), y que tiene la dirección x negativa; ya que tal es la dirección de $I(l \times B)$. Nuevamente, para mantener a la espira en movimiento a velocidad constante es necesario aplicar una fuerza externa igual y opuesta, en dirección hacia la derecha. Esta fuerza es la que proporciona en última instancia la energía disipada como calor a medida que la corriente inducida pasa por la resistencia ohmica de la espira.

Utilizando nuevamente la ley de Faraday, se pueden obtener estos resultados de manera muy simple relacionando la FEM inducida neta con el cambio en el flujo a través del circuito. Por tanto, en la figura 20.2, a, basta notar que como $\cos \theta = 1$, el flujo magnético a través del circuito es sencillamente el producto de la inducción magnética B por el área de esa parte de la región de campo dentro del circuito, que es lx . Entonces, como B y l se mantienen constantes,

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(Blx)}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} \quad (20.2.22)$$

o

$$\mathcal{E}_m = -Blv \quad (20.2.23)$$

que concuerda con (20.2.17). En la figura 20.2, b, es claro que no cambia el flujo a través del circuito, de donde $\mathcal{E}_m = -d\Phi_m/dt$, mientras que en la figura 20.2, c, el flujo de nuevo es igual al producto de la inducción por el área de la región de campo contenida en el circuito, lo que permite escribir

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Bl(-v) = Blv \quad (20.2.24)$$

ya que dx/dt es negativa y su magnitud es v .

En la figura 20.3 se muestran las gráficas de la FEM neta, la corriente y la fuerza que experimenta la espira, en función de la distancia

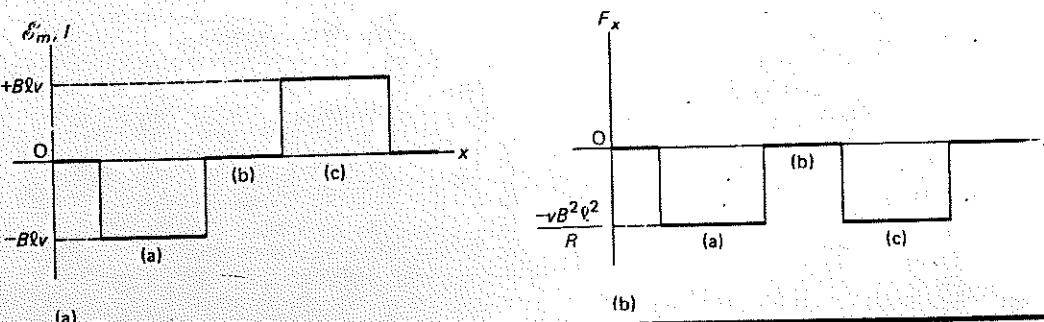


FIGURA 20.3. (a) Fuerza electromotriz y (b) fuerzas experimentadas por el circuito de la figura 20.2 durante las fases (a), (b) y (c) mostradas antes.

dentro de un solenoide largo se puede escribir, de acuerdo con (19.7.10), como

$$B = \mu_0 n I_0 = \mu_0 n A t \quad (20.2.26)$$

en que n es el número de vueltas por unidad de longitud. El flujo magnético interceptado por cada vuelta de la pequeña bobina será

$$\Phi_m = BA = \mu_0 n I_0 A = \mu_0 n A x t \quad (20.2.27)$$

en tanto que

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \mu_0 n A \alpha \quad (20.2.28)$$

En cada vuelta de la bobina pequeña se generará una FEM dada por $-d\Phi_m/dt$, debido a que cada una de las N vueltas exper-

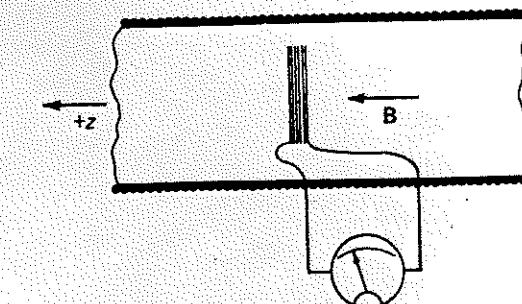


FIGURA 20.4. Inducción en una bobina estacionaria a través de la cual pasa un flujo magnético creciente producido por una corriente también creciente.

menta el cambio en el flujo. Es claro que estas FEMs individuales están en serie, de manera que es evidente que para una bobina de N vueltas, debe escribirse la ley de inducción de Faraday como

$$\mathcal{E}_m = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\mu_0 n N A \alpha \quad (20.2.29)$$

Si se nota que, de acuerdo con (20.2.25), $\alpha = dI_0/dt$, finalmente se puede escribir la anterior como

$$\mathcal{E}_m = -\mu_0 n N A \frac{dI_0}{dt} \quad (20.2.30)$$

Entonces, la corriente en la bobina pequeña será

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = \frac{\mu_0 n N A}{R} \frac{dI_0}{dt} \quad (20.2.31)$$

en que R es su resistencia.

Es evidente que cuando aumenta la corriente en el solenoide con *rapidez constante*, se produce una corriente inducida de *intensidad constante* y proporcional a la *rapidez de aumento* de la corriente en el solenoide. No es fácil comprender por qué debe ser así, con base en las FEMs de movimiento, presentadas en las ilustraciones anteriores de FEMs y corrientes inducidas. No hay movimiento relativo entre las dos bobinas ni tampoco existe cambio en su área. Desde luego, es verdad que el flujo magnético del solenoide se propaga de alguna manera a través de las espiras de la bobina pequeña, aunque no hay una forma clara de asociar una FEM de movimiento con ella. Sin embargo, experimentalmente se observa que en la bobina pequeña fluye en efecto una corriente cuya intensidad predice correctamente (20.2.31). En forma análoga, como descubrieron tanto Faraday como Henry, es fácil demostrar que cuando se inserta un imán permanente en una bobina conectada a un galvanómetro, se observa una corriente momentánea al aumentar el flujo magnético que pasa por las vueltas de la bobina. Al retirar el imán, circula una corriente momentánea en sentido contrario a medida que disminuye el flujo a través de la bobina, como se ilustra en la figura

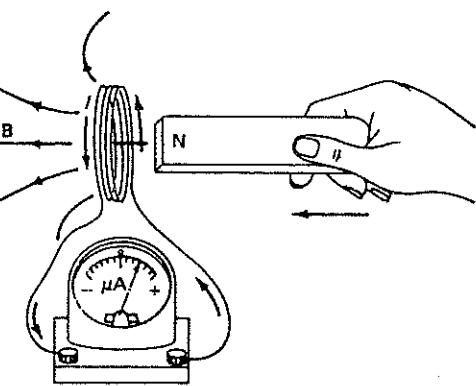


FIGURA 20.5. Otro ejemplo de una FEM inducida por un cambio de flujo magnético.

ra 20.5. La FEM asociada a estas corrientes, aunque no es de movimiento en el sentido ordinario, existe y está descrita correctamente por la ley de Faraday en términos de la rapidez de variación del flujo a través de la bobina.

Los dos primeros ejemplos se pudieron analizar partiendo de la expresión de la fuerza de Lorentz y utilizándola para encontrar una FEM de movimiento apropiada, de manera bastante independiente de la ley de Faraday. En el tercer ejemplo ya no pudo hacerse esto, pues no hubo una forma clara de encontrar una FEM de movimiento. Fue necesario utilizar la ley de Faraday para describir lo que se observa; desde luego, se pudo igualmente haber estudiado los otros ejemplos desde el punto de vista de la citada ley de Faraday. Entonces, es claro que esta ley comprende la información relativa a las fuerzas magnéticas sobre cargas móviles que contiene la ley de Lorentz; en efecto, el carácter correcto observado de la ley de Faraday proporciona una justificación experimental adecuada de la fuerza de Lorentz, aunque también hay otra confirmación experimental. No obstante, la mencionada ley de Faraday va más allá de este punto para generalizar el comportamiento de FEMs inducidas y flujos magnéticos variables en casos donde no son claramente definibles las "FEMs de movimiento". Por tanto, la ley de Faraday es la que resume en un solo enunciado todo lo que se sabe y se ha observado de

las FEMs y corrientes inducidas electromagnéticamente. Más adelante se verá que es una de las cuatro leyes básicas del electromagnetismo a partir de las que Maxwell formuló la teoría de la radiación electromagnética.

A las FEMs y corrientes inducidas electromagnéticamente les acompaña un *campo eléctrico inducido* por acción electromagnética. En efecto, este campo eléctrico inducido es el que puede considerarse como el origen de las FEMs predichas por la ley de Faraday. Por tanto, es importante poder relacionar el cambio en el flujo magnético con el campo eléctrico inducido, al igual que con FEMs inducidas en circuitos. Ahora se mostrará cómo puede hacerse lo anterior. El lector recordará del estudio del concepto de fuerza electromotriz en la sección 18.3 que se puede relacionar toda FEM con un campo eléctrico que al menos sea parcialmente de origen *no electrostático* (recuérdese que los campos eléctricos no siempre son campos electrostáticos). Si se expresa el campo eléctrico total E en cualquier punto como la suma de un campo *electrostático* E_0 y un campo *no electrostático* E' que expresa la fuerza por carga unitaria, que no se puede atribuir a las interacciones electrostáticas con otras cargas, es posible escribir, como se hizo en el capítulo 18,

$$E = E_0 + E' \quad (20.2.32)$$

Se recordará que la FEM \mathcal{E} se definió como el trabajo efectuado, por unidad de carga, sobre una carga que realiza un recorrido completo en un circuito cerrado. Pero como el trabajo efectuado sobre una carga unitaria en cualquier desplazamiento $d\ell$ es $dw = E \cdot d\ell$, se tiene que

$$\mathcal{E} = \oint_C E \cdot d\ell = \oint_C E_0 \cdot d\ell + \oint_C E' \cdot d\ell \quad (20.2.33)$$

en que las integrales se evalúan alrededor de la trayectoria del circuito cerrado C , que puede seguir, o *puede no* hacerlo, la trayectoria de un conductor metálico. Pero en el capítulo 16 se vio que como el campo electrostático es de carácter *conservativo*, es cero el trabajo efectuado sobre una carga para moverla alrededor de cualquier camino cerrado. En consecuen-

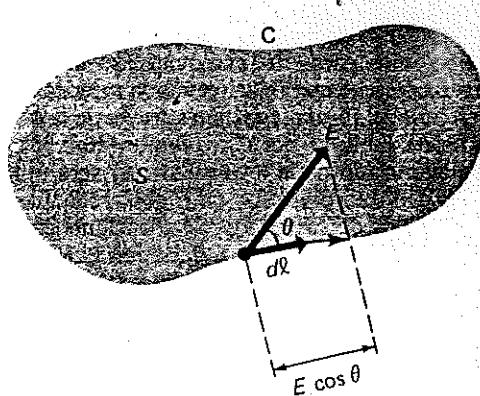


FIGURA 20.6. Evaluación de la integral de $E \cdot d\ell$ alrededor de un circuito cerrado.

cia, la primera integral en el segundo miembro de (20.2.33) es nula y

$$\mathcal{E} = \oint_C E \cdot d\ell = \oint_C E' \cdot d\ell \quad (20.2.34)$$

en que entonces la FEM representa el trabajo *no electrostático* por carga unitaria efectuado para mover una carga alrededor de la trayectoria cerrada C . Ya que la integral de $E' \cdot d\ell$ no puede ser cero si hay una FEM inducida, necesariamente la parte *no electrostática* del campo eléctrico, E' , debe ser *no conservativa*.

En todo caso, ahora puede reemplazarse la FEM en el enunciado de la ley de Faraday dada antes como la ecuación (20.2.2), por la expresión anterior, lo que permite escribir la ley como sigue:

$$\oint_C E \cdot d\ell = -\frac{d}{dt} \int B \cdot n da \quad (20.2.35)$$

En esta ecuación, $E \cdot d\ell = E \cos \theta d\ell$, en que θ es el ángulo entre el campo eléctrico inducido E y el elemento $d\ell$ del recorrido C en ese punto. Por tanto, la cantidad $E \cos \theta$ representa la componente de E tangente a la trayectoria cerrada C en cualquier punto dado, como se muestra en la figura 20.6. La ley de Faraday escrita de esta manera indica que *siempre que hay un flujo magnético variable, hay un campo eléctrico inducido acompañante*, y que la

ral de la componente tangencial de este alrededor de cualquier trayectoria da C tiene una relación con la rapidez de rotación del flujo magnético a través de la superficie S limitada por C , dada por (20.2.35). El enunciado de la ley de Faraday será útil en el capítulo posterior para desarrollar las aplicaciones de las ondas electromagnéticas. La aplicación de la ley de Faraday en esta forma en la forma dada originalmente quedará dada más ampliamente por la serie de los siguientes.

EJEMPLO 20.2.1

Supongamos un conductor recto de longitud l con velocidad constante v normal a un campo magnético constante B , como se muestra en la figura 20.7. Determinar la fuerza neta sobre la carga dentro del conductor. Evaluar el campo electrostático. Determinar el campo "de movimiento" no electrostático. ¿Cuál es la diferencia de potencial electrostático entre los extremos del conductor? ¿Qué sucede si los dos extremos del conductor están conectados por un alambre que completa un circuito que pasa por alguna región fuera del conductor?

Puesto que no hay circuito por el que pueda fluir la corriente, las cargas libres dentro del conductor deberán estar en reposo con respecto a éste, lo que significa que sólo se ven con la velocidad constante v con respecto a un observador estacionario. En todo caso, están en equilibrio, de manera que la fuerza resultante sobre cualquier carga debe

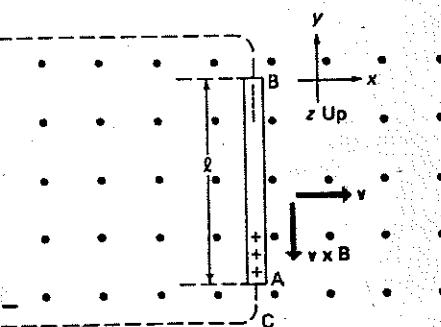


FIGURA 20.7

ser cero. No obstante, la fuerza sobre una carga móvil puede expresarse como la suma de las fuerzas electrostática y magnética por medio de

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_0 + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (20.2.36)$$

en que \mathbf{E}_0 es el campo electrostático dentro del conductor. En este ejemplo, el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ está en la dirección y negativa y se puede escribir la relación entre las componentes y de las fuerzas en (20.2.36) como

$$F_y = qE_{0y} - qvB = 0 \quad (20.2.37)$$

lo que indica que el campo electrostático E_{0y} dentro del conductor tiene el valor constante

$$E_{0y} = vB \quad (20.2.38)$$

En (20.2.37) se puede identificar el término $-qvB$ con un campo "de movimiento" no electrostático qE' , de manera que

$$E'_y = -vB \quad (20.2.39)$$

La FEM \mathcal{E} sobre cualquier trayectoria cerrada, como la línea punteada C , será la integral de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de aquella, es decir,

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (20.2.40)$$

Observando sólo (20.2.38) y (20.2.39), es difícil ver que el valor de la integral en (20.2.40) debe ser distinto de cero, pues \mathbf{E}_0 y \mathbf{E}' son iguales y opuestos dentro del conductor. La resolución de esta aparente paradoja estriba en el hecho de que, aunque es cierto que \mathbf{E}_0 y \mathbf{E}' son iguales y opuestos dentro del segmento conductor AB , no son iguales y opuestos fuera del conductor a lo largo del resto de la trayectoria C . El hecho es que fuera del conductor, el campo de movimiento \mathbf{E}' es *nulo*. Por otra parte, el campo electrostático \mathbf{E}_0 es originado por una distribución de carga establecida en los extremos superior e inferior del conductor por la fuerza $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que impulsa las cargas positivas hacia A y las cargas negativas hacia B . Dentro del conductor, esta distribución de cargas establece un campo dado por (20.2.38) para que no fluya ninguna corriente. Pero el campo electrostático de esa

distribución de cargas también se extiende *fuerza* del conductor por toda la región alrededor de la cual se traza la trayectoria punteada C . En consecuencia, hay una contribución a la integral de $\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de la parte de C que está fuera del conductor y que cancela exactamente la contribución del interior. ¿Por qué se cancela exactamente? Porque, como recordará de los capítulos 5 y 16, la integral $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ es cero alrededor de cualquier trayectoria cerrada para cualquier fuerza que sea de naturaleza *conservativa* (es decir, a la que se puede asociar una energía potencial única), y la fuerza electrostática de Coulomb es de este tipo.

Por tanto, la FEM total \mathcal{E} alrededor de la trayectoria C está dada por

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (20.2.41)$$

y como el campo \mathbf{E}' está dado por (20.2.39) dentro del conductor y es cero fuera de él, lo anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{y_A}^{y_B} E'_y dy = - \int_{y_A}^{y_B} vB dy = -vB \int_{y_A}^{y_B} dy \\ \mathcal{E} &= -vB(y_B - y_A) = -vBl \end{aligned} \quad (20.2.42)$$

La diferencia en potencial electrostático entre los dos extremos del conductor puede calcularse del modo usual a partir de la relación $dV = -\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}$. De esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta V_{AB} &= V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_{y_A}^{y_B} E_{0y} dy = -vB \int_{y_A}^{y_B} dy \end{aligned}$$

o sea,

$$\Delta V_{AB} = -vB(y_B - y_A) = -vBl \quad (20.2.43)$$

Cuando se completa un circuito externo, conectando por ejemplo un alambre alrededor de la trayectoria punteada C , las cargas excedentes acumuladas que representan la fuente del campo electrostático pueden fluir con libertad fuera del conductor, a través del circuito externo. Cuando sucede así, el campo electrostático decrece a cero y sólo deja la FEM de movimiento $-vBl$, que ahora mantiene un flujo de corriente inducida en el

circuito externo, como en el ejemplo que se consideró antes en relación con la figura 20.2, a.

EJEMPLO 20.2.2

Un conductor recto de longitud R gira alrededor de uno de sus extremos con velocidad angular constante ω en un campo magnético constante B paralelo al eje de rotación, como se ilustra en la figura 20.8, a. Hallar el campo electrostático dentro del conductor y la diferencia en potencial electrostático entre sus extremos. Si se establece un circuito como en la figura 20.8,b, conectando el extremo del conductor en el eje de rotación con un aro circular de radio R sobre el que se desliza el otro extremo, encontrar la FEM en el circuito.

La fuerza resultante sobre una carga q en el conductor es nuevamente

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}_0 + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (20.2.44)$$

En este caso no se puede igualar de inmediato a cero esta fuerza como en el ejemplo anterior, debido a que las cargas están aceleradas, de manera que no se hallan en equilibrio bajo la acción de las fuerzas. En vez de ello es necesario igualar la fuerza resultante \mathbf{F} dada por (20.2.44) a la masa de la carga por su aceleración centrípeta, que es $-r\omega^2$, en que r es la distancia desde el eje de rotación. Como, de acuerdo con la figura 20.8, a, la magnitud de la fuerza $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ es $qvB = qr\omega B$, se puede escribir la siguiente ecuación para las componentes de fuerza radiales

$$qE_0 + qr\omega B = -mr\omega^2 \quad (20.2.45)$$

De aquí puede despejarse E_0 ,

$$E_0 = -r\omega \left(B + \frac{m\omega}{q} \right) \quad (20.2.46)$$

Ahora es posible encontrar, como es costumbre, la diferencia de potencial entre los puntos O ($r = 0$) y P ($r = R$), a partir de $dV = -\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l}$. En este caso, ya que $d\mathbf{l}$ y \mathbf{E}_0 son vectores radiales, $\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = E_0 dr$ y se puede escribir

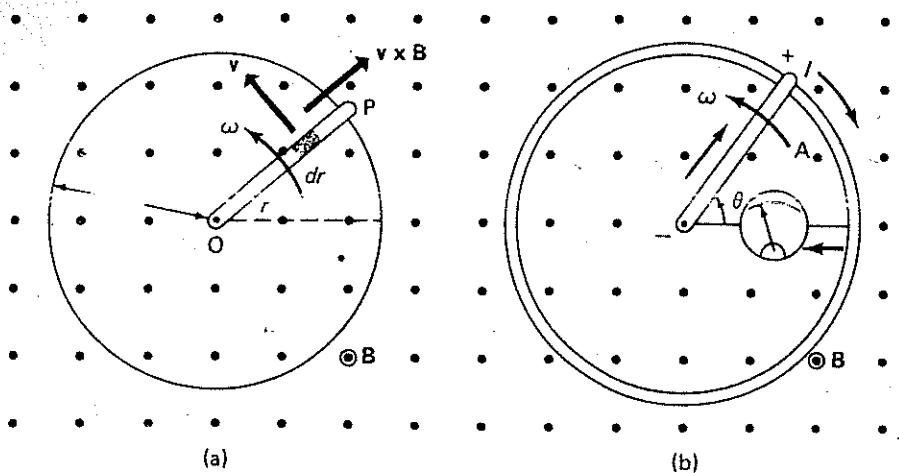


FIGURA 20.8

$$\begin{aligned}\Delta V_{OP} &= V_p - V_o = - \int_0^R E_0 \cdot dl \\ &= - \int_0^R E_0 dr = \int_0^R r\omega \left(B + \frac{m\omega}{q} \right) dr \\ \Delta V_{OP} &= \omega \left(B + \frac{m\omega}{q} \right) \int_0^R r dr \\ \Delta V_{OP} &= \left(B + \frac{m\omega}{q} \right) \frac{\omega R^2}{2}\end{aligned}\quad (20.2.47)$$

En la integración anterior, como B , m , ω y q son constantes, la cantidad $\omega B + (m\omega^2/q)$ puede sacarse de la integral.

En (20.2.46) y (20.2.47) hay dos términos independientes. El primero, que contiene a B , se debe al movimiento del conductor en el campo magnético y la fuerza correspondiente $v \times B$, de la misma manera como se produce el campo en el ejemplo anterior expresado por (20.2.38). Si el campo magnético fuera cero, esta contribución se anularía también. El segundo término, en que aparece el factor $m\omega/q$, se debe simplemente a que el segundo miembro de la ecuación (20.2.45) debe tener el valor $-mr\omega^2$ debido a la aceleración centrípeta. Por tanto, este término representa

un campo eléctrico de origen *inercial* que sólo sirve para mantener las cargas en el conductor moviéndose en trayectorias circulares con velocidad angular ω . Está ahí debido a que las cargas libres se mueven hacia afuera en el conductor, dejando una carga no compensada de signo contrario en los iones metálicos fijos de la red cristalina, hasta que haya una fuerza hacia el interior de atracción electrostática entre las dos cargas que sea apenas suficiente para proporcionar la fuerza centrípeta necesaria para mantener a las cargas libres en sus recorridos circulares. Si no hubiera aceleración centrípeta, este término no estaría presente, como en el ejemplo anterior.

Ahora se calculará qué diferencia de potencial puede generar este campo inercial en la práctica. Por ahora se hará B igual a cero y se utiliza un valor de ω que produzca la *mayor* diferencia de potencial posible que pueda lograrse en procedimientos experimentales normales. Luego supóngase que $R = 0.3$ m y $\omega = 6280$ rad/s; esto corresponde a un conductor de aproximadamente 30 cm de largo, que gira a 60 000 rpm. Sería difícil utilizar un conductor que se mueve con mayor rapidez que ésta, en experimentos de la práctica. En este caso, utilizando valores numéricos apro-

piados para la masa y carga del electrón se encuentra que

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{m\omega^2 R^2}{2q} \\ &= \frac{(9.11 \times 10^{-31})(6.28 \times 10^3)^2 (9 \times 10^{-2})}{(2)(-1.602 \times 10^{-19})} \\ &= -1.01 \times 10^{-5} \text{ volt}\end{aligned}$$

En efecto, éste es un voltaje muy pequeño, que incluso sería muy difícil detectar. Por ejemplo, supóngase que el conductor girara en un plano normal al campo magnético terrestre, que en realidad es muy débil, pues en la mayoría de los sitios su intensidad es próxima a 0.5×10^{-4} Wb/m². En estas circunstancias, la contribución del primer término en (20.2.47), que se debe al movimiento del conductor en el campo magnético terrestre, sería

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{1}{2} B \omega R^2 \\ &= (0.5)(0.5 \times 10^{-4})(6.28 \times 10^3)(9 \times 10^{-2}) \\ &= 1.41 \times 10^{-2} \text{ volt}\end{aligned}$$

Esta magnitud es unas 1400 veces mayor que el voltaje producido inercialmente $m\omega^2 R^2/2q$. Para tener una probabilidad más o menos razonable de detectar la diferencia de potencial de origen inercial, tendría que reducirse el campo terrestre mediante blindaje magnético hasta que fuera de 1000 a 10 000 veces menor que su valor normal, lo que no es una tarea imposible, aunque tampoco puede hacerse con facilidad.

El caso se puede resumir observando que en condiciones normalmente logrables, el voltaje inercial $m\omega^2 R^2/2q$ es tan pequeño que puede ser despreciado por completo en comparación con la contribución debida al movimiento del conductor, incluso aunque sólo haya campos dispersos debidos al magnetismo terrestre. En estas circunstancias, puede *despreciarse* la contribución inercial y escribir como aproximaciones razonables para (20.2.46) y (20.2.47),

$$E_0 = -r\omega B \quad (20.2.48)$$

y

$$\Delta V_{OP} = \frac{1}{2} B \omega R^2 \quad (20.2.49)$$

Ocasionalmente se encontrarán más adelante casos en que existen estas diferencias de potencial inercial electrónico, y con base en el trabajo realizado aquí, siempre se *despreciarán* en comparación con los voltajes inducidos electromagnéticamente y que son mucho mayores. Empero, cabe señalar que hay casos, notablemente en física atómica, en los que las fuerzas centripetas que actúan sobre los electrones pueden ser efectivamente muy importantes. Un ejemplo simple en que así ocurre es el átomo de hidrógeno, en el que la fuerza electrostática de atracción entre un protón y un electrón de la fuerza centrípeta que mantiene al electrón en su trayectoria alrededor del núcleo.

Volviendo ahora al caso que se muestra en la figura 20.8, b, donde se ha formado un circuito completo que incluye el conductor rotatorio anterior, se puede utilizar la ley de Faraday para encontrar la FEM en el circuito con mucha facilidad. En este caso puede expresarse el flujo a través del área sombreada como

$$\Phi_m = BA \quad (20.2.50)$$

y como B es constante,

$$\delta_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -B \frac{dA}{dt} \quad (20.2.51)$$

El área A del sector sombreado es una fracción $\theta/2\pi$ del área total πR^2 dentro del conductor circular externo. Por tanto, ya que R es constante,

$$\begin{aligned}\delta_m &= -B \frac{d}{dt} \left(\frac{\theta}{2\pi} \pi R^2 \right) \\ &= -\frac{BR^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2} BR^2 \omega\end{aligned}\quad (20.2.52)$$

en que el signo negativo sencillamente refleja el hecho de que la corriente en el circuito externo fluye en el sentido negativo (el de las manecillas del reloj) en vez de en sentido positivo (el sentido contrario). A su vez, esto se debe al hecho de que se consideran los desplazamientos angulares contrarios al sentido del reloj como positivos, y los opuestos como negativos. Ya que la ley de Faraday sólo habla de las FEMs y corrientes inducidas *electromagnéticamente*, no da indicación alguna de

también pueda haber una FEM o corriente inducida *inercialmente*. También debe quedar claro por este y varios ejemplos anteriores que la diferencia esencial en un segmento conductor que se mueve en un campo magnético a veces puede trársese muy fácilmente utilizando la ley de Faraday para evaluar la FEM en un circuito completo en el que el conductor móvil forma una rama. La concordancia entre (20.2.52) y (20.2.48) y entre (20.2.17) y (20.2.43), otros ejemplos estudiados hasta ahora, da la validez de este procedimiento. Se demuestra el hecho de que la integral de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ a lo largo del segmento conductor de que se trata da la FEM en el segmento conductor móvil y, en tanto que el campo magnético no varía en el tiempo, en el circuito en que ese conductor forma la rama móvil. Lo destacado *reservativas* de la frase anterior define las limitaciones de este procedimiento, ya que cuando los campos variables en el tiempo, existen FEMs inducidas en el circuito asociadas a la variación en el tiempo de \mathbf{B} al igual que al momento del segmento conductor.

EJEMPLO 20.2.3

En forma más simple, un generador de corriente alterna (CA), que también se conoce como *alternador*, consiste en una bobina de N vueltas que gira con velocidad angular constante en un campo magnético uniforme B , como se ilustra en la figura 20.9. Para una bobina de 150 vueltas con 200 cm^2 de área y 2.5Ω de resistencia, que gira con velocidad angular constante de 60 revoluciones por segundo en un campo magnético de 0.15 Wb/m^2 , hallar el valor de la FEM en función del tiempo, la amplitud valor máximo de la FEM, la amplitud de la máxima corriente que puede suministrarse a un circuito externo y la potencia entregada a un circuito exterior de resistencia constante en función del tiempo.

La FEM instantánea se calcula a partir de la ley de Faraday en la manera usual, recordando que como hay N vueltas, la FEM en la espira está en serie con las demás. Por

$$-N \frac{d\Phi_m}{dt} = -N \frac{d}{dt} BA \cos \theta \quad (20.2.53)$$

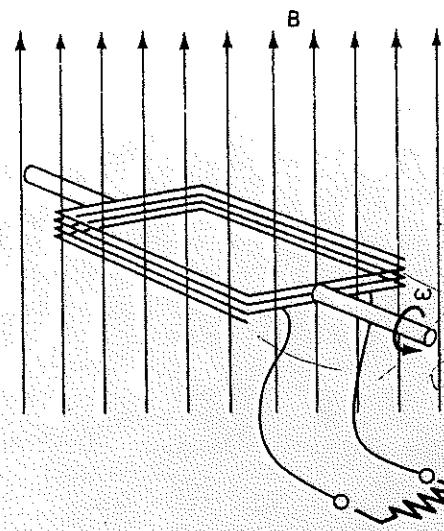


FIGURA 20.9

en que θ es el ángulo entre el campo magnético y la normal al plano en el que está la bobina. En este ejemplo son constantes B y A , y el ángulo θ cambia a medida que la bobina gira. Al girar ésta, el flujo interceptado cambia desde el valor máximo BAN cuando $\theta = 0^\circ$, en cuyo caso el plano de la bobina es normal a \mathbf{B} , hasta cero cuando $\theta = 90^\circ$ y el plano de la bobina es paralelo a las líneas de \mathbf{B} . En estas circunstancias, se puede escribir (20.2.52) como

$$\mathcal{E} = -BAN \frac{d \cos \theta}{dt} = BAN \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (20.2.54)$$

Pero $d\theta/dt$ es la velocidad angular constante ω ; por tanto, puede expresarse lo anterior como

$$\mathcal{E} = BAN\omega \sin \theta \quad (20.2.55)$$

Esto también podría haberse obtenido de (20.2.5), donde debido a que $dB/dt = dA/dt = 0$, sólo el tercer término contribuiría en algo al resultado. Ya que en este ejemplo la bobina gira continuamente alrededor de un eje fijo, el ángulo θ aumenta continuamente en el tiempo de acuerdo con la relación $\theta = \omega t$, y por último, la FEM puede expresarse en la forma

$$\mathcal{E}(t) = BAN\omega \sin \omega t \quad (20.2.56)$$

Como $N = 150$, $A = 200 \text{ cm}^2 = 0.02 \text{ m}^2$, $B = 0.15 \text{ Wb/m}^2$ y $\omega = 60 \text{ rev/s} = 120\pi \text{ rad/s}$, (20.2.56) queda

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= (0.15)(0.02)(150)(120\pi) \sin(120\pi t) \\ &= 169.6 \sin(120\pi t) \text{ volts} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se observa que la FEM varía en el tiempo como en el caso de un oscilador armónico simple de frecuencia angular ω y amplitud $BAN\omega$. En el ejemplo dado, es claro que la amplitud de la FEM es 169.6 volts, valor que se alcanza cuando $\omega t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$ rad. En la figura 20.10 se muestra la FEM de salida graficada en función del tiempo. Una FEM que varía en el tiempo de la misma manera que un oscilador armónico simple se conoce como *FEM alterna sinusoidal*.

Si la resistencia interna de la bobina rotatoria es R_i y la resistencia del circuito externo al que está conectado el dispositivo es R , en el circuito fluirá una corriente cuyo valor instantáneo es

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R} = \frac{BAN\omega}{R_i + R} \sin \omega t \quad (20.2.57)$$

La amplitud de esta corriente será

$$I_{\max} = \frac{BAN\omega}{R_i + R} = \frac{169.6}{2.5} = 67.8 \text{ A}$$

cuando $R_i = 2.5 \Omega$ y la resistencia externa es cero, en cuyo caso la corriente en el circuito exterior será la más intensa posible. La potencia instantánea disipada en la resistencia externa R será $I^2 R$, en que I está dada por (20.2.57). Entonces se puede escribir

$$P_{ext} = I^2 R = \left(\frac{BAN\omega}{R_i + R} \right)^2 R \sin^2 \omega t \quad (20.2.58)$$

EJEMPLO 20.2.4

Un campo magnético uniforme \mathbf{B} está limitado a un volumen cilíndrico de radio R , siendo la dirección de \mathbf{B} paralela al eje del volumen; fuera del mismo, \mathbf{B} es cero, (fig. 20.11). La

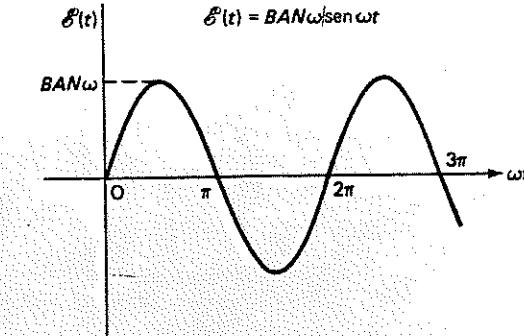


FIGURA 20.10. Gráfica en función del tiempo de la FEM de variación armónica (o sinusoidal) que produce un generador de CA (o alternador).

magnitud del campo \mathbf{B} varía linealmente en el tiempo de manera que

$$B(t) = \alpha t \quad (20.2.59)$$

es la descripción B en función del tiempo; la constante α representa la rapidez de cambio dB/dt . Se ve que este caso es parecido al que se estudió en relación con la tercera de las

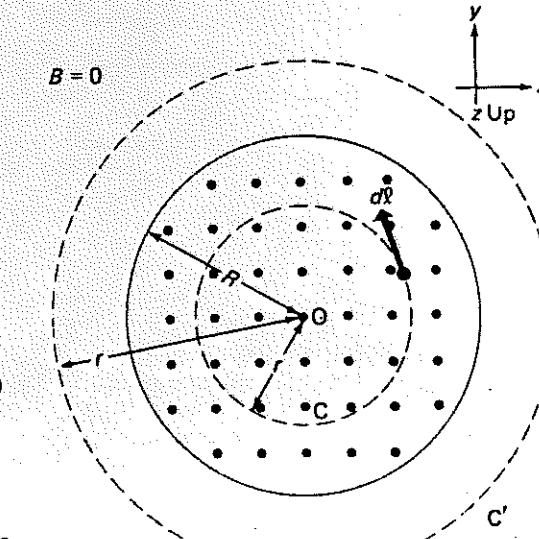


FIGURA 20.11

ilustraciones consideradas en el texto anterior a esta serie de ejemplos. Hallar la magnitud y dirección del campo eléctrico inducido no electrostático \mathbf{E} que existe dentro de la región del campo y externo a él como resultado del flujo magnético cambiante.

La ley de Faraday en la forma

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (20.2.60)$$

muestra de la mejor manera la relación entre el campo \mathbf{E} y la rapidez de variación del flujo magnético. En este caso, la simetría cilíndrica del campo \mathbf{B} es exactamente la misma que la de la distribución de corriente en conductores rectos que se estudió en el capítulo 19, sección 19.6, en relación con la deducción de los campos magnéticos alrededor de conductores cilíndricos, en que se utilizó la ley de Ampère. Los mismos argumentos de simetría que se emplearon son útiles aquí también para indicar que el campo \mathbf{E} inducido debe ser puramente radial o únicamente tangencial a contornos circulares. Pero si el campo fuese puramente radial, entonces \mathbf{E} y $d\mathbf{l}$ siempre serían mutuamente perpendiculares y el producto $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ sería cero en todos los puntos alrededor de una trayectoria circular como C o C' en la figura 20.11. En estas circunstancias, la integral de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ alrededor de cualquier trayectoria, y por tanto la FEM alrededor de la misma, tendría que ser cero. Experimentalmente, se sabe bien que *hay* FEM inducidas alrededor de esas trayectorias, además que en todo caso del desarrollo que lleva a (20.2.30) se vio que puede calcularse su valor a partir de la ley de Faraday en la forma (20.2.3). En consecuencia, el campo \mathbf{E} no puede ser puramente radial, sino que debe ser circunferencial o tangencial, como el campo magnético alrededor de un conductor recto con corriente, y sus líneas de campo están en el plano de la ilustración (fig. 20.11).

Si este fuera el caso, entonces el campo \mathbf{E} y los elementos $d\mathbf{l}$ de la trayectoria son paralelos, alrededor de una trayectoria circular como C o C' , y E es igual para todas las partes de la trayectoria. En consecuencia, puede escribirse

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C E dl = E \oint_C dl = 2\pi r E \quad (20.2.61)$$

Al mismo tiempo, si se evalúa la integral de superficie de la izquierda en (20.2.60) sobre la superficie limitada por C o C' , se ve que las líneas de \mathbf{B} y la normal \mathbf{n} a esta superficie son paralelas, además de que la magnitud de \mathbf{B} es la misma en todas partes dentro de la región del campo. Consecuentemente puede escribirse, para la trayectoria C ,

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \int_S B da = B \int_S da = \pi r^2 B \quad (20.2.62)$$

mientras que para la trayectoria C' , notando con cuidado que el campo \mathbf{B} se extiende hacia el exterior sólo hasta $r = R$ y que más allá es cero,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da &= \int_S B da = B \int_{r < R} da + 0 \int_{r > R} da \\ &= \pi R^2 B \end{aligned} \quad (20.2.63)$$

Tratándose de trayectorias como C , para la que $r < R$, entonces se puede sustituir (20.2.61) y (20.2.62) en la ley de Faraday (20.2.60) y obtener

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt} (\pi r^2 B) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (20.2.64)$$

de donde

$$E = -\frac{r dB}{2 dt} = -\frac{\alpha r}{2} \quad r < R \quad (20.2.65)$$

Tratándose de trayectorias como C' para la que $r > R$, puede sustituirse (20.2.62) y (20.2.63) en (20.2.60) y encontrar

$$2\pi r E = -\frac{d}{dt} (\pi R^2 B) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \quad (20.2.66)$$

o sea,

$$E = -\frac{R^2 dB}{2r dt} = -\frac{\alpha R^2}{2r} \quad r > R \quad (20.2.67)$$

Se notará que para $r = R$, tanto (20.2.65) como (20.2.67) llevan al mismo resultado, $E = -\alpha R/2$. En la figura 20.12 se muestra la gráfica en función de r de la magnitud del campo eléctrico inducido. Se parece mucho a la del campo magnético de un conductor uni-

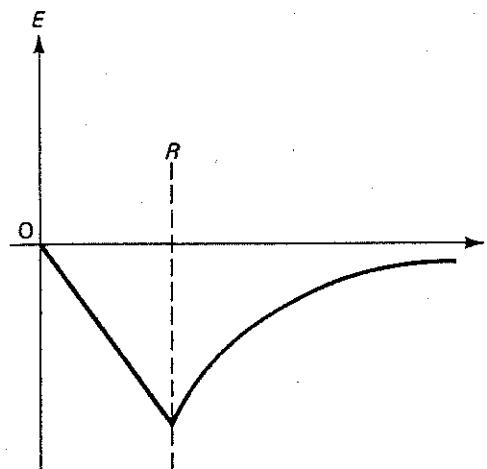


FIGURA 20.12. Gráfica de la intensidad del campo eléctrico inducido, como función de la distancia radial desde el centro del sistema de la figura 20.11.

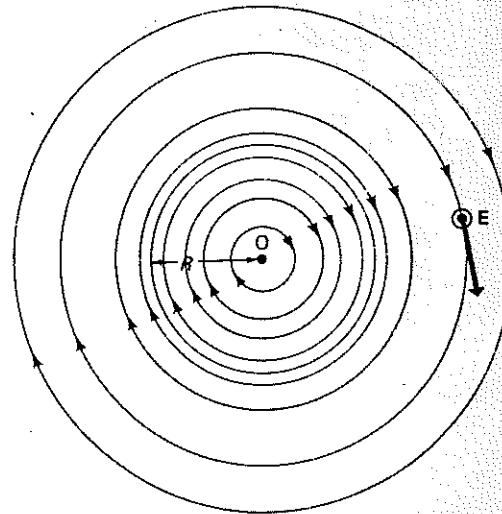


FIGURA 20.13. Líneas del campo eléctrico inducido en el sistema de la figura 20.11.

tienen un papel importante en la descripción de las ondas electromagnéticas.

20.3 Ley de Lenz y corrientes de Foucault

Lo que por lo general se conoce como la *ley de Lenz* es sencillamente un aspecto de la ley de Faraday que todavía no se ha examinado a fondo aquí. Se refiere al sentido de las corrientes inducidas por cambios de flujo y al de sus propios campos magnéticos. En la sección anterior se destacó en especial el cálculo de las FEMs, campos eléctricos y corrientes inducidos, utilizando la ley de Faraday, sin poner demasiada atención a su sentido. Desde luego que la ley de Faraday determina en forma unívoca el sentido de cualquier corriente inducida por un cambio en el flujo magnético a través de un circuito; no hay ambigüedad al respecto. Pero todavía queda la cuestión del signo negativo frente a la rapidez de cambio del flujo magnético en las ecuaciones (20.2.2), (20.2.3) o (20.2.35), y lo que se llama ley de Lenz sencillamente expresa los efectos físicos que requieren que el signo algebraico sea negativo en vez de positivo.

ley de Lenz puede expresarse como

corrientes inducidas fluyen de manera que sus efectos magnéticos se opongan al cambio que las creó inicialmente.

Ejemplos resueltos en la sección anterior mencionan muchas ilustraciones de cómo la ley de Lenz. Por ejemplo, haciendo referencia a la figura 20.1, se ve que la corriente inducida I es creada por un aumento de flujo debido a un campo B que apunta en dirección z positiva, a medida que aumenta la longitud del circuito de x a $x + dx$. En consecuencia, el cambio en el flujo $d\Phi_m = B[I(x + dx) - Ix] = BI dx$ es positivo. De acuerdo con la ley de Lenz, la corriente inducida fluye alrededor del circuito ABCD de manera que su propio campo magnético se opone a este cambio en el flujo. Por tanto, la corriente debe crear otro campo magnético que esté en dirección z negativa, por lo que, de acuerdo con la regla de la mano derecha que relaciona las corrientes con sus campos magnéticos, fluir en el sentido *del reloj* alrededor de ABCD. Esto concuerda con los cálculos anteriores basados en la dirección de la fuerza de Faraday y en la propia ley de Faraday. Se ve que aunque la ley de Lenz no da la magnitud de la FEM o corriente inducidas, sí indica rápidamente y sencillamente el sentido de la corriente inducida, de donde naturalmente es más fácil sacar el signo de la FEM.

En el ejemplo ilustrado en la figura 20.2, que en (a) el campo magnético está en la dirección z positiva; en consecuencia, el flujo a través del circuito aumenta. De acuerdo con la ley de Lenz, el efecto magnético de la corriente inducida en el circuito debe ser de sentido contrario; por tanto, tiene que producir un campo magnético que se opone a este aumento de flujo, y por consiguiente, estar en dirección z negativa. De acuerdo con la regla de la mano derecha, la corriente debe fluir en el sentido del reloj para producir este efecto magnético. En la figura 20.2, c se observa que aunque el campo magnético todavía fluye en la dirección z positiva, el área de la recta de campo encerrada por la espira disminuye a medida que ésta se retira del campo.

Por tanto, el flujo a través de la espira también está disminuyendo. El efecto magnético de la corriente inducida debe ser tal que se oponga a esa disminución en el flujo a través de la espira; por tanto, debe dar lugar a un campo magnético en la dirección z positiva. De acuerdo con la regla de la mano derecha para las corrientes y campos, la corriente inducida debe circular entonces en sentido contrario al del reloj alrededor de la espira. Nuevamente estas conclusiones están de acuerdo con las que se obtuvieron de manera distinta.

En el ejemplo de la figura 20.4, el campo B del solenoide está en la dirección z positiva y aumenta en magnitud. El mayor flujo a través de la bobina pequeña debe crear un campo magnético que se oponga a este aumento de flujo en la dirección $+z$ de manera que este campo magnético debe estar en la dirección $-z$. Pero esto sólo puede ocurrir si el flujo de la corriente en la bobina pequeña es hacia afuera (de la página) en su parte superior y hacia adentro en la parte inferior de la bobina.

Por último, en la figura 20.5 se ve un imán cuyo extremo norte se aproxima a una bobina circular. El flujo a través de la bobina aumenta rápidamente a medida que el imán se acerca a aquella. El sentido de la corriente inducida en la bobina debe ser tal que se oponga al aumento en el flujo, de manera que tal corriente crea un campo magnético cuya dirección es opuesta a la del campo del imán, es decir, cuyo vector B apunte hacia la derecha en la figura. Pero este campo sólo puede obtenerse si la corriente inducida tiene el sentido que se muestra. Al hacerlo, el campo magnético de la bobina es tal que el extremo más próximo al imán queda como polo norte mientras que el extremo opuesto es sur, como se muestra, por ejemplo, en la figura 19.4. En consecuencia, se establece una fuerza de repulsión que se opone a la aproximación del polo del imán de barra a la bobina. Si se invirtiera el movimiento del imán, retirándolo hacia la derecha, disminuiría el flujo primario a través de la bobina. Entonces la corriente en la misma tendría que fluir de manera que se opusiera a la disminución, generando con ello un campo propio cuya dirección fuera la del imán, representada por un vector B hacia la izquierda. En

este caso el sentido de la corriente en la bobina sería opuesto al que se indica en el diagrama. El campo magnético de la bobina es tal que el extremo más próximo al imán de barra es un polo sur y el otro extremo es norte. En estas circunstancias hay una fuerza de atracción entre la bobina y el imán de barra que se opone a que se aleje el imán.

Al utilizar la ley de Lenz es importante comprender que el campo magnético de la corriente inducida siempre se opone al *cambio* en el flujo magnético primario que induce la corriente, no al flujo magnético primario, lo que se ilustra precisamente en el último ejemplo que se consideró antes, en que se retira hacia la derecha el polo norte del imán de la figura 20.5. En este caso, el vector B del campo primario dentro de la bobina todavía apunta hacia la izquierda pero su magnitud está disminuyendo, de manera que el vector ΔB que expresa el *cambio* de flujo en un intervalo dado apuntará en la dirección opuesta, hacia la *derecha*. Este *cambio* en el flujo es al que se debe oponer la corriente inducida generando un campo magnético cuyo vector B apunta hacia la *izquierda*.

Considerando las consecuencias de recordarla, se puede comprender el significado físico de la ley de Lenz. Por ahora supóngase que las corrientes inducidas siempre tuvieran el sentido *opuesto* al que predice la ley de Lenz. Las direcciones de las fuerzas que experimentan los conductores que llevan corrientes inducidas y se hallan en campos magnéticos externos también estarían invertidas. Esto querría decir que, en la figura 20.2, a, la dirección de la fuerza F que actúa sobre el lado derecho de la espira, dada por la ecuación (20.2.21), sería opuesta a la que se indica. Ahora la espira sería atraída *hacia* la región del campo y se necesitaría aplicar una fuerza igual y opuesta para retenerla y evitar que se acelerara. En efecto, la espira haría trabajo contra esta fuerza externa y serviría como fuente de energía que pudiera accionar cualquier dispositivo externo que se quisiera operar. Lo mismo sucedería del otro lado de la región del campo, como se muestra en la figura 20.2, c. La dirección de la fuerza F sobre el lado izquierdo de la espira se invertiría y ésta sería expelida de la región del campo, pudien-

do hacer trabajo externo. Entonces se repetiría el proceso reintroduciendo la espira desde la derecha y volviendo a su posición original de nuevo, haciendo otra vez trabajo. Todavía está ahí el campo magnético; no ha dado energía al exterior —por lo que respecta a este estudio, podría provenir de un imán permanente. El único cambio neto fue en la realización de trabajo externo sin que se diera energía al sistema. ¿Es necesario decir más? Para rechazar la ley de Lenz también debe prescindirse de la ley de conservación de la energía, lo que hasta la fecha nadie ha descubierto cómo hacer.

Un estudio de la ley de Lenz no sería completo sin una descripción breve de las *corrientes de Foucault*, ya que su generación y comportamiento subsecuentes están relacionados estrechamente con la operación de la ley de Lenz. Estas corrientes son inducidas, al igual que cualquier otra corriente, por cambios en el flujo magnético, pero en *objetos conductores de forma diversa* en vez de en conductores lineales. Aunque el flujo de las corrientes de Foucault está limitado por las fronteras del conductor, no lo está a una sola trayectoria cerrada y lineal como sucede con el flujo de corriente en un circuito conductor ordinario. Las trayectorias de estas corrientes dentro del conductor se definen primordialmente por las fuerzas eléctrica y magnética que actúan sobre la distribución de cargas móviles en el objeto conductor, y la ley de Lenz determina el sentido en que fluyen dichas corrientes por estas trayectorias.

En la figura 20.14 se muestra la acción de las corrientes de Foucault. Se tira de una lámina conductora rectangular hacia afuera de una región donde se ha establecido un campo magnético uniforme. Dentro de la región del campo hay fuerzas magnéticas sobre cargas móviles en el conductor, dadas por $q(v \times B)$, en tanto que estas fuerzas son cero en el exterior. Las fuerzas hacen que fluyan corrientes hacia abajo en la parte de la lámina que está dentro del campo, pues hay una FEM en la dirección de cualquier trayectoria, (como la ABC) que esté en tal región. El origen de esta FEM es igual al asociado a la espira conductora lineal de la figura 20.2, c. Se establece el flujo de corriente en esta trayectoria, y la

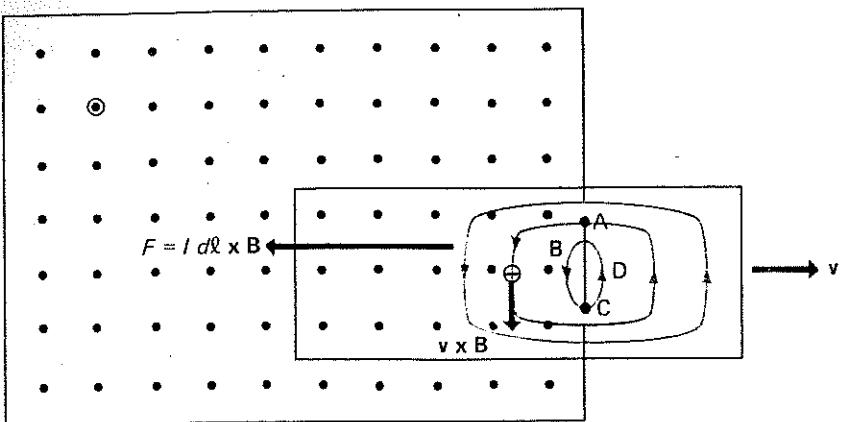


FIGURA 20.14. Corrientes de Foucault en una placa conductora delgada que sale de una región en la que existe un campo magnético uniforme.

corriente regresa al punto A por la trayectoria CDA que está fuera del campo. Como en el caso de la espira que se muestra en la figura 20.2, c, la corriente experimenta una fuerza de retardación $F = I l \times B$ que hace necesario

ejercer una fuerza externa en dirección opuesta para mantener al conductor moviéndose a velocidad constante. Hay muchas espiras o caminos de corriente de este tipo en la lámina, cuyo efecto conjunto es generar calor pór-

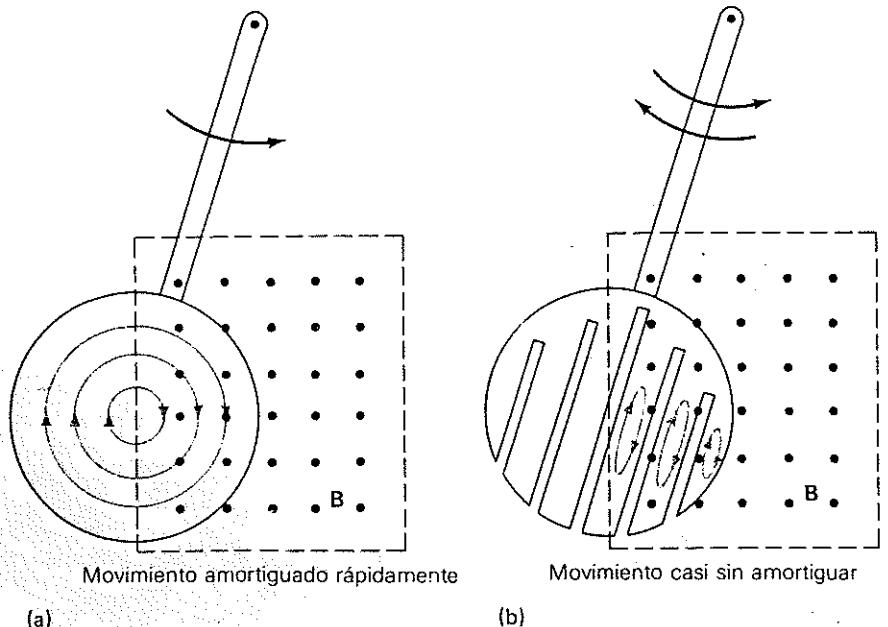


FIGURA 20.15. Circulación de corrientes de Foucault en la lenteja de un péndulo de material altamente conductor (a), y de un péndulo del mismo material con ranuras paralelas (b).

efecto Joule a medida que la corriente pasa por la resistencia de los caminos conductores, además de crear una fuerza retardatriz que puede ser apreciable si se trata de tirar con mucha rapidez de la lámina conductora hacia afuera del campo.

En la figura 20.15 se ilustra otra demostración de los efectos de las corrientes de Foucault. Allí se muestra un péndulo cuya lenteja es una placa circular conductora dispuesta para que oscile entre los polos de un imán poderoso, como se muestra en (a). Debido a la generación de corrientes de Foucault y a las fuerzas de retardación que experimentan al entrar y salir de la región de campo, el movimiento del péndulo se amortigua rápidamente y su energía cinética aparece como calor por efecto Joule, dentro de la placa conductora. En (b) se ha reemplazado el péndulo por otro igual pero que tiene una serie de ranuras verticales. Estas impiden que se formen corrientes de Foucault en una gran extensión y limitan las que se originan a recorrer caminos largos y estrechos entre las ranuras. Como resultado de ello se reduce la intensidad de las corrientes de Foucault y se genera mucho menos calor dentro del cuerpo conductor, las fuerzas de retardación que experimenta el péndulo a medida que su disco entra y sale de la región del campo son mucho más pequeñas, y el movimiento pendular sufre muy poca amortiguación. Este método de descomponer el flujo de corrientes de Foucault, y de reducir el calentamiento debido a las mismas también se utiliza en transformadores, en los que los núcleos de hierro se hacen con láminas aisladas eléctricamente entre sí, en vez de hacerse de una sola pieza maciza de metal.

20.4 Autoinducción y autoinductancia: comportamiento de los circuitos R-L

Hasta este punto, la atención se ha centrado en las FEMs generadas por flujos magnéticos producidos exteriormente. Desde luego, todo cambio de flujo experimentado por un circuito, incluso un cambio en el flujo magnético producido por corriente que fluye en el propio circuito, inducirá una FEM en éste. Las fuer-

zas electromotrices generadas de esta manera por la propia corriente de un circuito se llaman *FEMs autoinducidas* y a su generación se le denomina *autoinducción*.

Es más fácil comprender la producción de las FEMs autoinducidas estudiando algunos ejemplos específicos. Primero se considerará el caso de un solenoide largo ideal con n vueltas de alambre por unidad de longitud. De los estudios anteriores, por la ecuación (19.7.9) resulta que la inducción magnética axial B dentro del arrollamiento de esta bobina tiene el valor

$$\Phi_m = \mu_0 n I \quad (20.4.1)$$

en que I es la corriente en la misma. En el solenoide ideal, todo el flujo magnético asociado a este campo pasa por cada vuelta de la bobina, como se muestra en la figura 19.41, lo cual no es cierto para un solenoide de longitud finita, como se ilustra en la figura 19.42. Aun así, si la longitud del solenoide es mucho mayor que su radio, como se supondrá, no se comete mucho error haciendo esta consideración: Procediendo de esta manera, el flujo a través de cada vuelta puede expresarse como el producto de la inducción magnética por el área transversal A de la bobina,

$$\Phi_m = B \cdot A = \mu_0 n I A \quad (20.4.2)$$

Si la corriente cambia en el tiempo, la rapidez de variación del flujo dentro del solenoide es

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \mu_0 n A \frac{dI}{dt} \quad (20.4.3)$$

Ahora puede obtenerse la FEM autoinducida, a partir de la ley de Faraday como

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\mu_0 N n A \frac{dI}{dt} \quad (20.4.4)$$

en que N es el número total de vueltas igual a nl , siendo l la longitud del solenoide. Por último se puede expresar la FEM autoinducida como

$$\mathcal{E} = -\mu_0 n^2 l A \frac{dI}{dt} \quad (20.4.5)$$

Si el circuito fuera de alguna forma distinta a un solenoide largo, ya no se hubiera podi-

lizar (20.4.1) para expresar el campo magnético alrededor y dentro del mismo. Pero si no hubiese sido posible calcular el flujo que rodea al circuito, de la ley de Biot-Savart —expresada por (19.5.5)— se hubiera llegado a la conclusión de que el campo magnético en todos los puntos debe ser *directamente proporcional a la corriente* que lo crea, también es cierto acerca del flujo Φ_m , que es simplemente una suma de valores de flujo sobre el área del circuito —en el caso simple, igual al campo multiplicado por el área. De modo que la rapidez de variación del flujo $d\Phi_m/dt$ tiene que ser directamente proporcional a la rapidez de cambio de la corriente dI/dt , sin importar la forma que tenga el circuito. En consecuencia, siempre se encontrará que la FEM autoinducida \mathcal{E} está relacionada con la corriente en el circuito por medio de

$$-N \frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (20.4.6)$$

Si L es una constante de proporcionalidad, llamada *autoinductancia* del circuito. El valor de la autoinductancia a menudo se abrevia *inductancia*. En el caso de un circuito con forma de solenoide largo abrevia, de longitud l y sección transversal A , formado de n vueltas de alambre por unidad longitud, es fácil ver (20.4.5) que la autoinductancia debe ser

$$\mu_0 n^2 l A \quad (20.4.7)$$

un circuito de otra forma tendría que haberse una relación distinta a (20.4.2) que dé cuenta del flujo dentro del circuito. También, como en el caso de solenooides cuyo radio no es pequeño en comparación con su longitud, todo el flujo producido puede no estar envuelto por cada espira del circuito; en este caso tendría que considerarse precisamente qué cantidad del flujo producido contribuye efectivamente a las espiras en cada espira. En ese caso la autoinductancia del circuito ya no estaría dada por (20.4.7), y en efecto sería difícil o imposible calcularla puramente por cálculos matemáticos. Empero, incluso en estos casos, debido a la estricta proporcionalidad entre la corriente

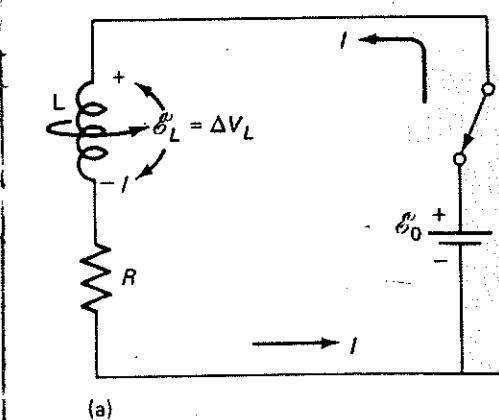
en un circuito y el flujo magnético que produce, todavía se satisface la ecuación (20.4.6), aunque no se tenga una manera simple de determinar la autoinductancia L , aparte de medirla experimentalmente. Por fortuna esto no es difícil en especial y para casi todos los propósitos basta con conocer simplemente que la FEM autoinducida está dada por (20.4.6), en que L es una propiedad de un circuito individual o de un conjunto de espiras de un circuito, que se determinará por mediciones.

El caso es semejante al que se plantea en la ley de Ohm para los circuitos eléctricos. A menudo es muy difícil *calcular* directamente la resistencia eléctrica de un resistor, aunque se conozca con exactitud la resistividad eléctrica del material lo que por lo general no es necesario. Sin embargo, prácticamente es juego de niños hacer pasar una corriente medida con precisión por la resistencia, medir la diferencia de potencial a través de ella y utilizar $R = \Delta V/I$ para obtener el resultado deseado. Lo importante no es saber cómo calcular la resistencia sino poder determinar su valor de alguna manera práctica, y saber que expresa la proporcionalidad entre la corriente y la diferencia de potencial, de acuerdo con la ley de Ohm.

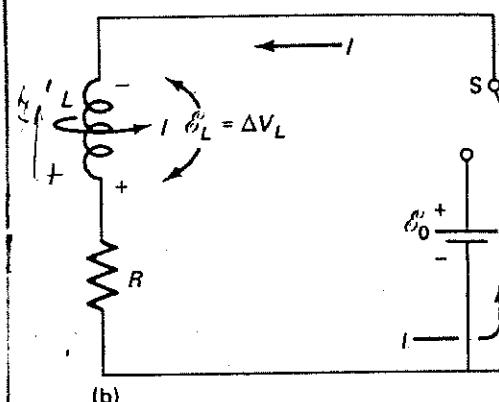
Del mismo modo no es del todo importante saber cómo calcular directamente la autoinductancia de un circuito o bobina. Es mucho más importante poder determinar la autoinductancia de un circuito en una forma experimental práctica, y comprender que la FEM autoinducida en cualquier circuito está relacionada con la rapidez de variación de la corriente en el circuito por medio de

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} = \Delta V_L \quad (20.4.8)$$

en que el factor de proporcionalidad L es la autoinductancia. Como cualquier otra FEM, el efecto de ésta es producir una diferencia de potencial ΔV_L entre las terminales del dispositivo, por medios *no electrostáticos*. En este caso, la FEM es de origen electromagnético; y como se verá pronto, aunque la diferencia de potencial a la que contribuye al circuito siempre puede representarse matemáticamente



(a)



(b)

FIGURA 20.16. FEMs de autoinducción en un circuito $R-L$ (resistivo-inductivo) (a) cuando pasa corriente y (b) cuando no pasa corriente.

que como $\Delta V_L = -L(dI/dt)$, su sentido depende de que dI/dt sea positiva (corriente en aumento) o negativa (corriente en disminución).

También es importante notar que la inductancia de un circuito puede concentrarse en un solo elemento como un solenoide o una bobina toroidal —diseñado para que tenga un valor grande de autoinductancia—, o que esté distribuida alrededor del circuito en caso de que no exista este tipo de elemento. En cualquier forma está presente la FEM $-L(dI/dt)$, pero en el primer caso claramente se halla asociada al elemento inductor, más o menos

como la FEM de una batería, mientras que en el segundo se halla distribuida alrededor de todo el circuito. Ahora se trabajará principalmente con circuitos que contengan elementos inductivos concentrados, llamados *inductores*, o simplemente *bobinas*. El símbolo ilustra la presencia de inductores en los diagramas de circuitos eléctricos. En un ejemplo que se presentará un poco más adelante se estudiará un método para medir la autoinductancia de los circuitos. De (20.4.6) es evidente que la unidad de autoinductancia puede expresarse como la unidad de flujo dividida entre la unidad de corriente. Entonces, en el SI la unidad de autoinductancia es weber/ampere, que normalmente se conoce como *henry*, y su símbolo es H .

Es fácil determinar el *sentido* de las FEMs autoinducidas en los circuitos inductivos aplicando la ley de Lenz. Por ejemplo, en la figura 20.16, a se muestra una bobina, que tiene una autoinductancia L y una resistencia R , en serie con una fuente de FEM E_0 y un interruptor S . La resistencia R , que representa la del conductor que forma la bobina, se muestra como un elemento separado en el circuito para que se puedan estudiar individualmente los efectos asociados a la resistencia y la autoinductancia, igual como se podría mostrar la resistencia interna de una fuente en forma de un elemento separado de circuito. Se supondrá que toda la resistencia del circuito está contenida en la resistencia R y que *toda la autoinductancia del circuito está representada por L* .

Cuando se cierra a la izquierda el interruptor S , comienza a fluir por el circuito la corriente I , que al principio era cero. Al pasar por la bobina empieza a establecerse un campo magnético, y entonces el flujo variable en el tiempo que pasa por las espiras de la bobina y por el resto del circuito, de inmediato genera una FEM autoinducida $\mathcal{E}_L = -L(dI/dt)$. El signo de esta FEM es tal que se opone al aumento de flujo magnético a través de la bobina provocado por la corriente I . Esta corriente I produce un campo B dentro de la bobina que apunta hacia arriba y que crece continuamente, pues la corriente va aumentando en el tiempo. En un intervalo de tiempo Δt , hay un cambio de flujo provocado por un

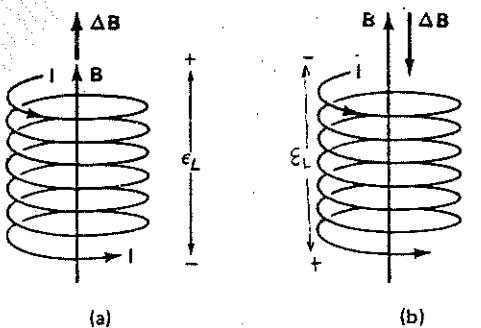


FIGURA 20.17. Cambios de flujo y FEMs inducidas (a) en el caso de la figura 20.16a y (b) en el de la figura 20.16b.

cambio de campo ΔB , como se muestra en la figura 20.17, a. En este caso la FEM autoinducida debe ser tal que si se determinara el sentido de la corriente en el campo, generaría un cambio de flujo opuesto. Por tanto, la FEM autoinducida ϵ_L tiende a establecer una corriente que se opone a la que está fluyendo en realidad; la corriente circula de la manera como lo hace debido a que la FEM de la fuente ϵ_0 es mayor que ϵ_L . Actuando por sí sola, crearía una diferencia de potencial en el circuito que hacia al extremo superior de la bobina positivo con respecto al extremo inferior, como se muestra en la figura 20.17, a. Por tanto, el signo de ϵ_L es opuesto al de la FEM de la batería. En vez de hacer que exista un aumento de potencial en el circuito al recorrerlo en el sentido de flujo de la corriente, provoca una caída de potencial, lo que ya se refleja en el signo negativo de la ecuación (20.4.8), que puede encontrar sus orígenes en la ley de Lenz. La aplicación de la ley II de Kirchhoff, que indica que la suma de todas las FEMs y cambios de potencial alrededor de cualquier circuito cerrado debe ser cero, muestra entonces que con el interruptor S en la posición que se indica en la figura 20.16, a.,

$$\epsilon_0 - L \frac{dI}{dt} - RI = 0 \quad (20.4.9)$$

Esta ecuación diferencial puede resolverse para evaluar la corriente I en el circuito en

función del tiempo, y poner así de manifiesto el modo como crece la corriente cuando se cierra el interruptor.

Es muy fácil resolver la ecuación diferencial o derivando primero ambos miembros de (20.4.9) con respecto al tiempo:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} = 0 \quad (20.4.10)$$

Ahora se designará a la cantidad dI/dt como w . Entonces, si $w = dI/dt$, debe tenerse que $dw/dt = d^2I/dt^2$, o cual permite escribir (20.4.10) como

$$L \frac{dw}{dt} = -Rw$$

de donde:

$$\frac{dw}{w} = -\frac{R}{L} dt \quad (20.4.11)$$

Ahora es posible integrar ambos miembros de esta ecuación desde el tiempo $t = 0$, cuando la corriente también es nula, hasta algún tiempo posterior t , cuando la corriente tenga el valor I y su derivada respecto al tiempo, el valor w . Pero si la corriente I es cero inicialmente, de (20.4.9) debe tenerse en estado inicial del sistema

$$\left(\frac{dI}{dt} \right)_{t=0} = \frac{\epsilon_0}{L} \quad (20.4.12)$$

Ya que dI/dt es w en (20.4.11), cuando $t = 0$ entonces w debe tener el valor inicial ϵ_0/L , por lo que debe integrarse (20.4.11) desde $t = 0$ hasta el tiempo posterior t en el primer miembro desde $w = \epsilon_0/L$ que corresponde al tiempo $= 0$, hasta el valor w , que corresponde al tiempo t . De esta manera, recordando que R y L son constantes y no varían en el tiempo, se obtiene

$$\int_{\epsilon_0/L}^w \frac{dw}{w} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

o

$$[\ln w]_{\epsilon_0/L}^w = \ln w - \ln \frac{\epsilon_0}{L} = -\frac{Rt}{L} \quad (20.4.13)$$

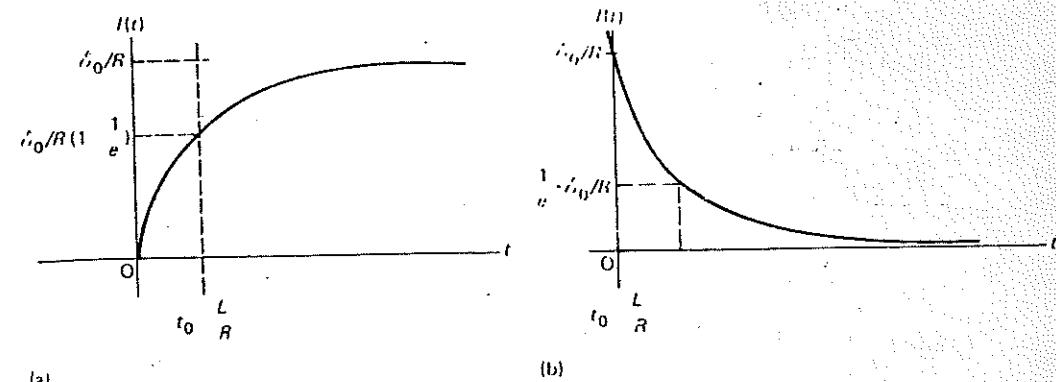


FIGURA 20.18. Gráfica de la corriente en función del tiempo (a) para el caso de la figura 20.16a, (b) para el de la figura 20.16b.

Como $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$, lo anterior puede escribirse

$$\ln \frac{wL}{\epsilon_0} = -\frac{Rt}{L} \quad (20.4.14)$$

y exponencializando ambos miembros:

$$\frac{wL}{\epsilon_0} = e^{-Rt/L} \quad (20.4.15)$$

o

$$w(t) = \frac{\epsilon_0}{L} e^{-Rt/L} = \frac{dI}{dt} \quad (20.4.16)$$

recordando que en todo momento se utilizó w como representación de dI/dt .

Ahora es posible escribir (20.4.16) como sigue:

$$dI = \frac{\epsilon_0}{L} e^{-Rt/L} dt \quad (20.4.17)$$

después de multiplicar ambos miembros por dt . Esta expresión puede integrarse nuevamente desde $t = 0$, cuando la corriente I también es cero, hasta el tiempo t , cuando la corriente tiene el valor I :

$$\int_0^t dI = \frac{\epsilon_0}{L} \int_0^t e^{-Rt/L} dt$$

o sea,

$$I = \frac{\epsilon_0}{L} \left[-\frac{1}{R} e^{-Rt/L} \right]_0^t$$

$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (20.4.18)$$

La ecuación (20.4.18), que se obtuvo después de todas las operaciones, es la buscada. Describe la forma como crece la corriente del circuito de la figura 20.16, a, en el tiempo, después que se cierra el interruptor.

De la ecuación (20.4.8), la diferencia del potencial a través de la inductancia es

$$\Delta V_L = \epsilon_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (20.4.19)$$

y como (20.4.16) da dI/dt , se encuentra que

$$\Delta V_L = -\epsilon_0 e^{-Rt/L} \quad (20.4.20)$$

y el signo negativo refleja el hecho de que la corriente experimenta una caída de potencial al pasar por la inductancia. La caída de potencial a través de la resistencia es IR , en que I está dada por (20.4.18); es fácil verificar que la suma de estos dos cambios de potencial dados por las ecuaciones (20.4.18) y (20.4.19) es igual a la FEM aplicada ϵ_0 .

en la figura 20.18, a, se muestra la variación corriente del circuito en función del tiempo. Se ve que la corriente se eleva desde su valor inicial cero y después de cierto tiempo se vuelve al valor \mathcal{E}_0/R , que se esperaría en un circuito resistivo simple cuyos efectos de inducción son despreciables. Claramente, el efecto de la autoinductancia es *retrasar* el aumento de la corriente del circuito durante un tiempo hasta que se establezca el campo magnético del inductor. En la ecuación (20.18), en $t = L/R$ segundos, el exponente del término exponencial es la unidad; y después de ese tiempo, la corriente ha aumentado a una fracción $1 - (1/e)$ de su valor final. En otras palabras, *difiere* de ese valor final en la fracción $1/e$. La cantidad L/R , que tiene dimensiones de tiempo y que expresa esta propiedad de los circuitos inductivos-resistivos, se conoce como *constante de tiempo inductiva* del circuito. En circuitos en que la inductancia es grande y la resistencia es pequeña, tal constante de tiempo puede ser considerable. En la práctica no es muy difícil formar un inductor cuya inductancia sea de unos 10 henrys y que tenga no más de 1 ohm de resistencia. Esta inductancia tendría una constante de tiempo de 10 segundos. Con frecuencia se encontrarán inductancias de circuitos cuyas constantes de tiempo son fracciones muy pequeñas de un segundo. Aun así, pueden ser muy importantes los efectos de la autoinducción en circuitos costosos.

Ahora se supondrá que la corriente ha alcanzado el valor asintótico \mathcal{E}_0/R después de un tiempo largo, y que repentinamente se abre el interruptor S, (cambiándolo al lado derecho) lo que se muestra en la figura 20.16, b. Esto permite decir que de pronto se suprime la FEM de la batería. Entonces no existe ya una fuente externa de energía que mantenga la corriente en el circuito o el campo magnético que proporciona, de manera que la corriente comienza a disminuir y el flujo magnético contenido por las espiras del inductor (o en el propio circuito) comienza a disminuir. De acuerdo con la ley de Faraday, como resultado debe inducirse una FEM, cuyo signo nuevamente se puede determinar por medio de la ley de Lenz. La figura 20.17, b, ahora el campo magnético está disminuyendo; el vector $\Delta\mathbf{B}$

que representa la variación en el campo B en un intervalo de tiempo Δt , tiene la dirección mostrada. Esta variación de campo es lo que produce el cambio de flujo en la bobina que genera la FEM inducida. De acuerdo con la ley de Lenz, la FEM debe inducirse de manera que se opone al cambio de flujo que la produce, por lo que la inducción debe ser tal que contribuya a un flujo de corriente que produciría un campo opuesto a $\Delta\mathbf{B}$. Entonces, la FEM aparece como se indica en la figura 20.17, b, de manera que el extremo inferior de la bobina es positivo y el superior, negativo. Una FEM con esta polaridad tiende a *mantener* el flujo de corriente a través de la inductancia y de todo el circuito, en tanto que la corriente siga variando en el tiempo, de manera parecida a la de una batería de polaridad semejante. Desde luego, la FEM actúa en tanto que la corriente esté variando; una vez que haya cesado tal corriente y desaparecido su campo magnético asociado, también desaparecerá la FEM inducida. De nuevo, la FEM origina una diferencia de potencial $\Delta V_L = +L(dI/dt)$ entre las terminales del elemento inductivo; pero como ahora dI/dt es negativa, su polaridad es opuesta a la que tenía en el caso que se estudió antes y que está ilustrado en la figura 20.16, a.

De nuevo se puede igualar a cero la suma algebraica de las elevaciones caídas de potencial alrededor del circuito de la figura 20.16, a, de acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff, para obtener

$$-L \frac{dI}{dt} - RI = 0 \quad (20.4.21)$$

Multiplicando todo por dt y reordenando algebraicamente, lo anterior puede quedar como

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \quad (20.4.22)$$

en que el primer miembro sólo depende de I y el segundo sólo de t . Ahora puede integrarse en ambos lados desde $t = 0$, en cuyo momento la corriente tiene el valor de estado estable

\mathcal{E}_0/R dado por (20.4.18) para t grande, hasta el tiempo t , cuando la corriente tiene el valor I . Por tanto,

$$\int_{\mathcal{E}_0/R}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \quad (20.4.23)$$

o sea,

$$[\ln I]_{\mathcal{E}_0/R}^I = \ln I - \ln(\mathcal{E}_0/R) = -\frac{Rt}{L} \quad (20.4.24)$$

$$\ln\left(\frac{IR}{\mathcal{E}_0}\right) = -\frac{Rt}{L}$$

Exponencializando ambos lados de esta ecuación, se obtiene por último

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-Rt/L} \quad (20.4.25)$$

La diferencia de potencial ΔV_L entre las terminales del inductor, de acuerdo con (20.4.19), será

$$\Delta V_L = -L \frac{dI}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_0 L}{R} \left(-\frac{R}{L} e^{-Rt/L} \right)$$

o bien,

$$\Delta V_L = \mathcal{E}_0 e^{-Rt/L} \quad (20.4.26)$$

El signo positivo de esta diferencia de potencial confirma el razonamiento anterior que condujo a esperar un aumento de potencial a través de la inductancia en estas condiciones, parecido al asociado a una batería. En efecto, en el circuito de la figura 20.16, b, el inductor es la única fuente de FEM en el circuito y es la FEM de la inductancia, generada a medida que decrece el campo magnético de la bobina, la única que mantiene la corriente en el circuito.

Nuevamente, la caída de potencial a través del circuito es IR , en que I está dada por la ecuación (20.4.25). De nuevo es más fácil verificar que es cero la suma algebraica de las diferencias de potencial a través de la inductancia y de la resistencia como lo requiere (20.4.20). En la figura 20.18, b, se muestra la gráfica de la corriente dada por (20.4.25) en

función del tiempo. Se observará que la intensidad decae exponencialmente en el tiempo; después de un lapso de $t = L/R$ segundos, igual a la constante de tiempo del circuito, la corriente ha disminuido a una fracción $1/e$, cerca de 37% de su valor inicial. No debe pasarse por alto la similitud entre el comportamiento de la corriente que se muestra en la figura 20.18 con el que ocurre durante la carga y descarga de un capacitor, que se estudió en la sección 18.9 del Capítulo 18. De hecho, hay una estrecha analogía entre el comportamiento de un circuito $R-C$ y el de un circuito inductivo-resistivo, que se conoce también como circuito $R-L$. En el caso de los primeros, el capacitor almacena y libera la energía de un campo eléctrico que se forma entre las placas; en el caso de los segundos, el inductor almacena y libera la energía *magnética* asociada a su campo.

Por último, el lector debe tener cuidado de no confundir el aumento retrasado de la corriente en los circuitos $R-L$ a medida que se aplica una FEM externa y el decaimiento prolongado de la corriente cuando se elimina aquella, con los retrasos mucho más breves en el aumento y reducción de la corriente debidos a la inercia de los electrones libres de conducción en los circuitos puramente resitivos que se estudiaron en el Capítulo 18, sección 18.4, correspondiente al desarrollo de la ley de Ohm. Estos últimos efectos ocurren por razones completamente distintas y en una escala de tiempo mucho más breve; de hecho, tanto que ni siquiera pueden observarse directamente. Los fenómenos inductivos que se estudian aquí, son de origen exclusivamente magnético y producen efectos en el crecimiento y decrecimiento de las corrientes en circuitos, cambios que pueden observarse incluso con aparatos más rudimentarios.

EJEMPLO 20.4.1

Calcular la autoinductancia L de una bobina toroidal arrollada estrechamente, de radio interno a , radio externo b , radio medio d , y que tiene n vueltas por unidad de longitud a lo largo de la circunferencia media. Se supone que el toroide es "delgado", es decir, uno en que la diferencia $b - a$ entre los radios interno y

externo es mucho menor que el radio medio d . En (19.7.8) se vio que el campo B dentro de una bobina toroidal está dada por

$$B = \mu_0 n I \left(\frac{d}{r} \right) \quad (20.4.27)$$

y es cero fuera de la bobina. En un toroide "delgado", la relación d/r está muy próxima a la unidad en todas partes dentro del toroide, como se ilustra en la figura 19.40, b. En este caso (20.4.27) se reduce a la expresión aproximada

$$B \approx \mu_0 n I \quad (20.4.28)$$

Ya que en este tipo de bobina toroidal, B prácticamente es constante en la sección transversal, el flujo magnético dentro de la bobina será

$$\Phi_m = BA = \mu_0 n I A \quad (20.4.29)$$

en que A es el área transversal. Entonces, la FEM inducida es

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\mu_0 n N A \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (20.4.30)$$

y la igualdad final se sigue (20.4.6). De esta ecuación es evidente que

$$L = \mu_0 n N A \quad (20.4.31)$$

Pero el número total de vueltas N está relacionado con el número n por unidad de longitud mediante $N = nc$, en que c es la circunferencia media igual a $2\pi d$. Sustituyendo esto en (20.4.31),

$$L = 2\pi\mu_0 n^2 d A \quad (20.4.32)$$

Para una bobina de 10 cm de radio, el área transversal de 3 cm^2 , y con 50 vueltas/cm, se obtiene

$$L = (6.283)(12.57 \times 10^{-7})$$

$$= (5.0 \times 10^{-1})(0.1)(3 \times 10^{-4})$$

$$= 5.92 \times 10^{-13} \text{ H}$$

EJEMPLO 20.4.2

La bobina descrita en el ejemplo anterior está formada con alambre de cobre de 0.2 mm de diámetro, cuya resistividad eléctrica ρ es $1.75 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Calcular la constante de tiempo de la bobina.

De acuerdo con el estudio anterior de los circuitos, la constante de tiempo es sencillamente L/R , en que R es la resistencia. Para encontrar este valor se necesita conocer la longitud de alambre que se utilizó en el devanado, la que está dada por

$$l = 2\pi r_c N \quad (20.4.33)$$

en que r_c es el radio de la sección transversal circular de la bobina. Se sabe que el área transversal es de $3 \text{ cm}^2 = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, por lo que,

$$A = \pi r_c^2 = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

de donde

$$r_c = 9.772 \times 10^{-3} \text{ m}$$

El número total de vueltas es el número por unidad de longitud (en este caso 50 cm^{-1} , o sea 5000 m^{-1}) por la circunferencia media del toroide, que es $2\pi d = (2\pi)(0.1) \text{ m}$. Por tanto, $N = (5000)(2\pi)(0.1) = 3142$. En consecuencia, la longitud del alambre en la bobina es, de acuerdo con (20.4.33),

$$l = (2\pi)(9.772 \times 10^{-3})(3142) = 192.9 \text{ m}$$

El área transversal del conductor es

$$A_w = \pi r_w^2 = (\pi)(10^{-4})^2 = 3.142 \times 10^{-8} \text{ m}^2$$

La resistencia del mismo es

$$R = \frac{\rho l}{A_w} = \frac{(1.75 \times 10^{-8})(192.9)}{3.142 \times 10^{-8}} = 107.5 \text{ ohms}$$

La constante de tiempo t_0 de la bobina es

$$t_0 = \frac{L}{R} = \frac{5.92 \times 10^{-13}}{107.5} = 5.51 \times 10^{-15} \text{ s}$$

EJEMPLO 20.4.3

Se determina que una bobina de inductancia desconocida lleva una corriente unidireccional

medida en las condiciones estables de la corriente continua:

$$R_i = \frac{\Delta V_L}{I_{dc}} = \frac{2.80}{3.50} = 0.80 \text{ ohm}$$

En efecto, se pueden reemplazar las resistencias en serie R_i y R_e en la figura 20.19 con una sola resistencia equivalente total R dada por

$$R = R_i + R_e = 0.80 + 1.00 = 1.80 \text{ ohm}$$

en cuyo caso es que el circuito es idéntico al de la figura 20.16, a. Por tanto, los resultados deducidos para ese circuito son aplicables a éste, a condición de que se identifique a R como la suma de las resistencias internas y externas.

De acuerdo con ello, (20.4.18) de la variación de la corriente en el tiempo después de cerrado el interruptor. Se sabe que para $t = 4.2 \times 10^{-3}$ segundos, I es igual a 0.90 veces el valor asintótico final \mathcal{E}_0/R , por lo que, sustituyendo estos valores en (20.4.18), junto con $R = 1.80 \Omega$,

$$(0.90)(\mathcal{E}_0/R) = (\mathcal{E}_0/R)(1 - e^{-11.80(4.2 \times 10^{-3})t})$$

Ahora se puede cancelar \mathcal{E}_0/R a ambos lados para encontrar

$$e^{-7.56 \times 10^{-3} L} = 1 - 0.90 = 0.10$$

y tomando el logaritmo natural en ambos miembros,

$$\frac{7.56 \times 10^{-3}}{L} = \ln 0.10 = -2.303$$

$$L = 3.28 \times 10^{-3} \text{ H}$$

La corriente instantánea en este momento puede encontrarse sustituyendo los valores $\mathcal{E}_0 = 6.3 \text{ V}$, $R = 1.80 \Omega$, $I = 4.2 \times 10^{-3}$ y S y $L = 3.28 \times 10^{-3} \text{ H}$ en (20.4.18) para encontrar $I = 3.15 \text{ A}$. Empero, es más simple observar que para $t = 4.2 \times 10^{-3} \text{ s}$,

$$I = (0.90)(\mathcal{E}_0/R) = (0.90) \left(\frac{6.3}{1.8} \right) = 3.15 \text{ A}$$

La diferencia de potencial entre las terminales del inductor, es la suma de la diferencia de potencial inducida $-L(dI/dt)$ a través de la in-

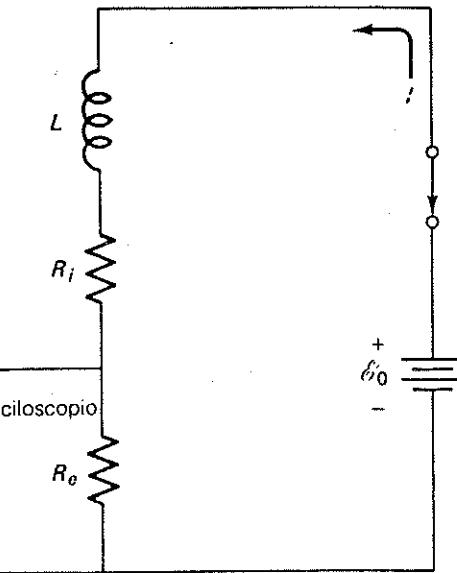


FIGURA 20.19.

y la diferencia de potencial $-IR_i$, la resistencia interna de la bobina; se da uno de estos términos con signo para indicar que en ambos casos se *caída* de potencial. Por tanto, por se puede escribir

$$V_L + \Delta V_{R_i} = -\mathcal{E}_0 e^{-Rt/L} - IR_i \\ (6.3)(0.10) - (3.15)(0.80) = -3.15 \text{ volts}$$

Este cálculo, se observa que ya se conocen los resultados anteriores que $e^{-Rt/L} =$ a los valores dados de R , t y L . Más tarde, se podrían haber sumado las caídas de potencial alrededor del circuito

$$V_{R_i} + \Delta V_{R_e} + \Delta V_{R_s} = 0$$

$$V_{R_i} = -\mathcal{E}_0 - \Delta V_{R_e} = -\mathcal{E}_0 + IR_e \\ = -6.3 + (3.15)(1.0) = -3.15 \text{ volts}$$

ante de tiempo del circuito de la figura en que se tienen tanto resistencia interna externa será

$$\frac{L}{R_i + R_e} = \frac{3.28 \times 10^{-3}}{1.80} \\ = 1.82 \times 10^{-3} \text{ s}$$

mina la resistencia externa del circuito, la constante de tiempo asociada a la y su propia resistencia interna queda

$$= \frac{3.28 \times 10^{-3}}{0.8} = 4.10 \times 10^{-3} \text{ s}$$

Energía en circuitos inductivos y densidad de energía de los campos magnéticos

Volverá el caso ilustrado en la figura 20.4, en donde el campo magnético asociado a la bobina mantiene el flujo en el circuito durante cierto tiempo conforme decrece el flujo magnético. Se observó que la corriente que fluye

durante este tiempo produce determinada cantidad de energía térmica como calentamiento por efecto Joule al pasar por la resistencia R del circuito. ¿De dónde viene este calor? Ciertamente no fue creado de la nada, a menos que se deseé abandonar la fe en la ley de conservación de la energía. La energía térmica se debió al paso de corriente a través de una resistencia y la FEM que provocó el flujo de la corriente fue generada por el cambio del flujo magnético a través de las espiras del inductor, conforme decreció el campo magnético en su proximidad. Por tanto, es evidente que la energía térmica generada por efecto Joule *originalmente debe haber sido energía almacenada en el campo magnético de la inductancia*. Si se ha de creer en la ley de conservación de la energía, la suma de las energías magnética y térmica siempre debe ser igual, por lo que si se designa la energía del campo magnético por U_m y la energía térmica por Q , y se hace igual a la suma de las energías magnética y térmica en los tiempos t y $t + dt$, entre los cuales ocurren los cambios dU_m y dQ , se tiene

$$U_m + Q = U_m + dU_m + Q + dQ \quad (20.5.1)$$

o sea,

$$-dU_m = dQ \quad (20.5.2)$$

Se pueden dividir ambos miembros de esta ecuación entre dt para obtener

$$-\frac{dU_m}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I^2 R \quad (20.5.3)$$

recordando que la velocidad a la que la energía eléctrica se convierte en calor es PR . Pero ahora se estudia la ecuación (20.4.20), que indica que, para este sistema,

$$-L \frac{dI}{dt} = RI \quad (20.5.4)$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por I y notando que $I(dI/dt) = d(\frac{1}{2}I^2)/dt$, lo anterior queda

$$-LI \frac{dI}{dt} = -\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}I^2) = I^2 R \quad (20.5.5)$$

o sea,

$$-\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}LI^2) = \frac{dQ}{dt} \quad (20.5.6)$$

Comparando esto con (20.5.3), se ve que debe expresarse la *energía en el campo magnético de un inductor como*

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (20.5.7)$$

Aunque este resultado se dedujo considerando un proceso específico, es evidente que es de aplicabilidad general.

También es importante poder calcular la *densidad de energía*, o energía por unidad de volumen, del campo magnético, lo que puede hacerse con referencia al ejemplo del solenoide largo con vueltas por longitud unitaria, en cuyo interior ya se demostró que existe un campo constante dado por

$$B = \mu_0 nI \quad (20.5.8)$$

y para el que recientemente se calculó la autoinductancia como

$$L = \mu_0 n^2 l A \quad (20.5.9)$$

Siendo l la longitud y A el área transversal. De acuerdo con (20.5.7) y (20.5.8), la cantidad de energía magnética asociada al campo es

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 l A) \left(\frac{B^2}{\mu_0^2 n^2} \right) = l A \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (20.5.10)$$

El producto lA representa sencillamente el volumen V del interior del solenoide, donde $reside$ el campo magnético; esto quiere decir que la *densidad de energía del campo magnético* se puede expresar como

$$U_m = \frac{(1.2)^2(\pi)(0.15)^2(0.05)}{(2)(4\pi)(10^{-7})} = 2025 \text{ J} \quad (20.5.11)$$

Las ecuaciones (20.5.7) y (20.5.11) son análogas a las expresiones deducidas antes $U_c = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$ y $U_c/t = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, que expresan la energía del campo eléctrico en un capacitor y la energía por volumen unitario asociada a un campo eléctrico:

En consecuencia, es claro que los inductores pueden almacenar energía en sus campos magnéticos, igual que los capacitores pueden contener energía electrostática, y además, que cualquier campo magnético tiene una densidad de energía semejante a la de un campo electrostático. En los circuitos oscilatorios y en las ondas electromagnéticas, como pronto se verá en detalle, la energía se puede intercambiar continuamente entre los campos eléctrico y magnético.

EJEMPLO 20.5.1

Un electroimán grande de investigación tiene polos con caras circulares paralelas de 30 cm de diámetro, que están a una distancia de 5 cm. El imán puede producir un campo máximo de 1.2 Wb/m^2 , esencialmente constante dentro de la región cilíndrica entre los polos. Determinar qué cantidad de energía se almacena en el campo magnético de esta región, en estas condiciones. ¿Cuánto tiempo podrá permanecer encendida una lámpara incandescente de 60 W desarrollando esta potencia y alimentada con la energía del campo?

La densidad de energía en la región del campo está dada por (20.5.11). La energía total en el volumen V de la región cilíndrica entre los polos es entonces

$$U_m = \frac{B^2}{2\mu_0} V = \frac{B^2 \pi R^2 h}{2\mu_0} \quad (20.5.12)$$

en que R es el radio de la cara del polo y h el espaciamiento entre las caras. Sustituyendo los valores dados de estas cantidades se encuentra

$$U_m = \frac{(1.2)^2(\pi)(0.15)^2(0.05)}{(2)(4\pi)(10^{-7})} = 2025 \text{ J}$$

Una lámpara incandescente de 60 W trabajando a esta potencia, consume 60 joules de energía por segundo. La cantidad de energía expresada antes puede entonces alimentar la lámpara durante un tiempo de

$$t = \frac{2025}{60} = 33.75 \text{ s}$$

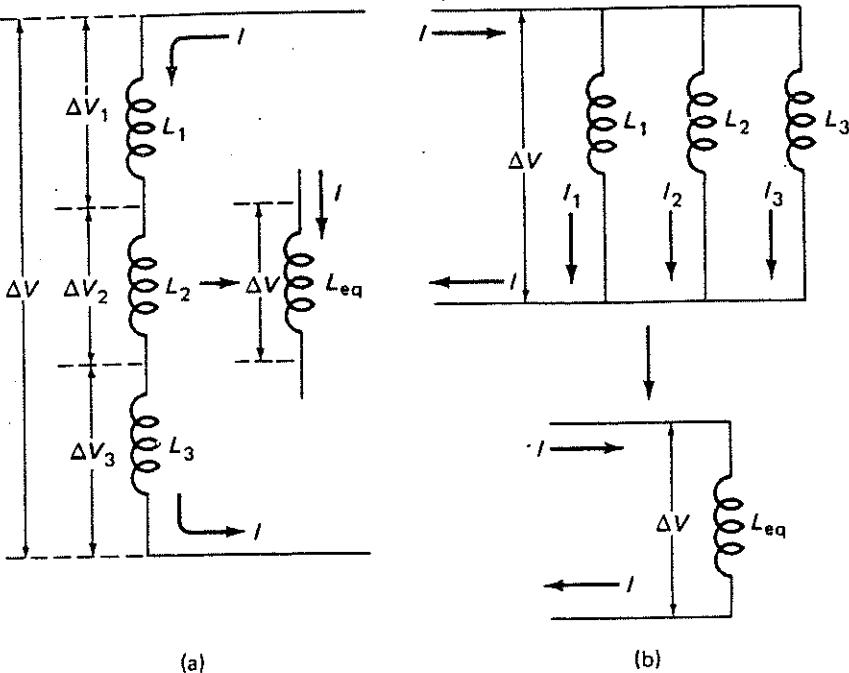


FIGURA 20.20. (a) Inductancias en serie y (b) inductancias en paralelo.

20.6 Inductores en serie o en paralelo

Los inductores pueden combinarse como elementos de circuito en serie o en paralelo de la misma manera que los resistores o los capacitores. Surge así la pregunta de qué valor debe tener la inductancia total del circuito en términos de las inductancias individuales combinadas en serie o en paralelo. Esta cuestión puede resolverse considerando la figura 20.20. En el caso de inductancias en serie, como se muestra en la figura 20.20, a, todos los inductores llevan la *misma corriente* \$I(t)\$. La diferencia de potencial a través del conjunto es la suma de las diferencias de potencial en cada elemento, de donde se puede escribir

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \quad (20.6.1)$$

De (20.4.8), puesto que todas las inductancias llevan la misma corriente, la magnitud de las caídas de potencial a través de ellas será \$L_1(\frac{dI}{dt})\$, \$L_2(\frac{dI}{dt})\$ y \$L_3(\frac{dI}{dt})\$. También, la

magnitud de la diferencia de potencial \$\Delta V\$ a través del conjunto debe ser \$L(\frac{dI}{dt})\$, en que \$L\$ es la inductancia equivalente de la combinación en serie. Sustituyendo estos valores en (20.6.1), se obtiene

$$L\left(\frac{dI}{dt}\right) = L_1\left(\frac{dI}{dt}\right) + L_2\left(\frac{dI}{dt}\right) + L_3\left(\frac{dI}{dt}\right) \quad (20.6.2)$$

o, dividiendo entre \$(dI/dt)\$,

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \quad (20.6.3)$$

El mismo procedimiento dará para \$n\$ inductancias.

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n \quad (20.6.4)$$

En el caso de varios inductores en paralelo, como se muestra en la figura 20.20, b, todas las inductancias experimentan la *misma diferencia de potencial* \$\Delta V\$, aunque lleven distin-

tas corrientes: \$I_1\$, \$I_2\$ e \$I_3\$. La corriente total \$I\$ que entra y sale del conjunto puede expresarse en términos de estas corrientes individuales como

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (20.6.5)$$

Diferenciando esto con respecto al tiempo:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} + \frac{dI_3}{dt} \quad (20.6.6)$$

Pero de (20.4.8), la magnitud de la diferencia de potencial \$\Delta V\$ a través de cada inductancia individual tiene que estar relacionada con la rapidez de variación de la corriente a través de ella por medio de

$$\Delta V = L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} = L_3 \frac{dI_3}{dt} \quad (20.6.7)$$

Esto quiere decir que

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\Delta V}{L_1} \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{\Delta V}{L_2} \quad \frac{dI_3}{dt} = \frac{\Delta V}{L_3} \quad (20.6.8)$$

Sustituyendo estos valores en (20.6.6) y notando que la relación entre la diferencia de potencial \$\Delta V\$ y la rapidez de cambio de la corriente total debe estar expresada en términos de la inductancia equivalente \$L\$ de la conexión en paralelo, por \$\Delta V = L(dI/dt)\$, resulta que

$$\frac{\Delta V}{L} = \frac{\Delta V}{L_1} + \frac{\Delta V}{L_2} + \frac{\Delta V}{L_3} \quad (20.6.9)$$

o sea,

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \quad (20.6.10)$$

Nuevamente, una repetición de este mismo razonamiento muestra que una combinación de \$n\$ inductancias en paralelo tiene la inductancia equivalente dada por

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (20.6.11)$$

De estos resultados es evidente que para las conexiones en serie o en paralelo de inductores, las inductancias equivalentes tienen la misma forma que las resistencias equivalentes

de conexiones de resistores en serie o en paralelo. Siendo así, no es necesario presentar ejemplos específicos de cómo se realizan cálculos relacionados con esas combinaciones en serie y en paralelo.

Empero, cabe aquí hacer una advertencia sobre otra cuestión: al deducir las ecuaciones (20.6.4) y (20.6.11), se supuso que la caída de potencial a través de cualquier inductancia dada, sólo se crea por el cambio en la corriente —y por tanto, por el cambio en el flujo magnético asociado a esa inductancia— y que tal caída es completamente *independiente* de los cambios en el flujo magnético generados por las otras inductancias en el circuito. Esto únicamente será cierto si las inductancias están muy separadas, de manera que el campo magnético generado por cada una no afecte a ninguno de los demás en medida apreciable. En consecuencia, los resultados señalados aquí sólo se refieren al caso de combinaciones de inductancias *aisladas magnéticamente* entre sí. En la siguiente sección se atenderá el problema de cómo se comportan las inductancias que no estén aisladas magnéticamente entre ellas.

20.7 Inducción mutua, bobinas de inducción y transformadores

En las secciones 20.5 y 20.6 se estudió la manera cómo se inducen FEM en circuitos por las corrientes que fluyen en los mismos; a este fenómeno se le dio el nombre de autoinducción. Es posible que también se induzcan FEM por los cambios de flujo debidos a otros circuitos. A este fenómeno, que ya se encontró en el circuito ilustrado en la figura 20.4, se le llama *inducción mutua*.

Para comprender los fundamentos de la inducción mutua, se considerará el caso ilustrado en la figura 20.21, donde se ven dos circuitos, designados por 1 y 2, que llevan las corrientes \$I_1\$ e \$I_2\$ que pueden variar en el tiempo. Ahora se desea calcular las FEMs inducidas en cada circuito por los cambios de flujo magnético asociados a estas corrientes variables en el tiempo. Es importante reconocer que en este caso cada circuito encierra flujo

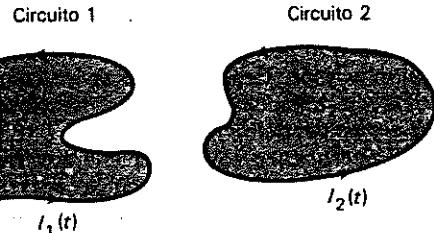


FIGURA 20.21. Dos circuitos cuyos campos magnéticos pueden inducir FEMs en sí mismos y mutuamente.

magnético generado por su propia corriente y la corriente del otro circuito. Por ejemplo, dando la definición de flujo magnético en el capítulo 19 como la ecuación (20.3), el flujo total Φ_1 , encerrado por el circuito 1 puede expresarse como la suma del flujo generado por la corriente I_1 , que fluye en el circuito 1 el generado por la corriente que fluye en el circuito 2:

$$\int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 da + \int_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_1 da \\ \Phi_{11} + \Phi_{12} \quad (20.7.1)$$

De forma análoga, el flujo Φ_2 encerrado por el circuito 2 puede escribirse como la suma del flujo generado por la corriente I_1 en el circuito 1 el generado por I_2 en el propio circuito 2

$$\int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_2 da + \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 da \\ \Phi_{21} + \Phi_{22} \quad (20.7.2)$$

En estas ecuaciones, \mathbf{B}_1 y \mathbf{B}_2 son campos de inducción magnética independientes generados por I_1 e I_2 , S_1 y S_2 son las áreas limitadas por los circuitos, y \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 son vectores unitarios normales a S_1 y S_2 , respectivamente. Por la ley de Faraday se pueden expresar las FEM en los dos circuitos, \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 , como

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} - \frac{d\Phi_{12}}{dt} \\ \frac{d\Phi_{11}}{dt} dI_1 - \frac{d\Phi_{12}}{dt} dI_2 \quad (20.7.3)$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} - \frac{d\Phi_{22}}{dt} \\ = -\frac{d\Phi_{21}}{dI_1} dI_1 - \frac{d\Phi_{22}}{dI_2} dI_2 \quad (20.7.4)$$

Como según (20.4.6), la FEM autoinducida en un circuito que conduzca la corriente I que origine un flujo Φ para una sola espira es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (20.7.5)$$

es evidente que se puede expresar la *autoinductancia* L como

$$L = \frac{d\Phi}{dI} \quad (20.7.6)$$

En consecuencia, pueden escribirse (20.7.3) y (20.7.4) como

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad (20.7.7)$$

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad (20.7.8)$$

en que L_1 y L_2 son las autoinductancias de los circuitos 1 y 2, y se defieren M_{12} y M_{21} por medio de

$$M_{12} = \frac{d\Phi_{12}}{dI_2} \quad M_{21} = \frac{d\Phi_{21}}{dI_1} \quad (20.7.9)$$

El coeficiente M_{12} expresa la rapidez con la que cambia el flujo magnético a través del circuito 1 con respecto a la corriente en el circuito 2, mientras que M_{21} representa la rapidez con la que varía el flujo magnético a través del circuito 2 en función de la corriente en el circuito 1. Estos valores se llaman *coeficientes de inducción mutua* o *inductancias mutuas*, y relacionan magnéticamente los circuitos 1 y 2.

En principio es posible calcular directamente estos coeficientes, como lo es también calcular el coeficiente de autoinducción para un solo circuito. Sin embargo, para hacerlo se necesita conocer la fracción del flujo generado por uno de los circuitos y encerrada o enlazada por el otro, lo que generalmente es muy

difícil representar en matemáticas. Por tanto, por lo general basta admitir la incapacidad de hacer los cálculos necesarios y considerar simplemente a los coeficientes de inducción mutua como parámetros a determinar por medición y no por cálculo. En este sentido son análogos los coeficientes de autoinducción (o autoinductancias) L_1 y L_2 . La magnitud de los coeficientes de inducción mutua es una medida del grado en que el flujo magnético generado por uno de los circuitos afecta a la FEM inducida en el otro. En el caso de circuitos tan distantes que el campo magnético de uno es muy pequeño en la proximidad del otro, las inductancias mutuas serán despreciables en comparación con las autoinductancias y (20.7.7) y (20.7.8) se reducen a

$$\mathcal{E}_1 \cong -L_1 \frac{dI_1}{dt} \quad (20.7.10)$$

$$\mathcal{E}_2 \cong -L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad (20.7.11)$$

En este caso, el único efecto importante es la FEM *autoinducida* en cada circuito, y los circuitos están aislados o son magnéticamente independientes entre sí. Por otra parte, si los circuitos se hallan tan próximos que uno encierra una parte significativa del flujo que genera el otro, los coeficientes de inducción mutua serán comparables en magnitud con los coeficientes de autoinducción, y se dice entonces que los circuitos están *acoplados magnéticamente* entre sí.

Como ejemplo específico, se considerará el caso de una bobina toroidal "delgada", como la que se estudió en el ejemplo 20.4.1, excepto que hay ahora dos devanados, uno encima del otro, como se ilustra en la figura 20.22. El primero, al que se llamará devanado *primario*, consiste en n_1 vueltas por unidad de longitud a lo largo de la circunferencia media y lleva una corriente I_1 variable en el tiempo. El segundo, al que se denominará devanado *secundario*, tiene n_2 vueltas por unidad de longitud y lleva una corriente I_2 también variable en el tiempo. De los resultados del ejemplo 20.4.1, se sabe que la corriente I_1 en el primer devanado produce un campo \mathbf{B} dentro del toroide dado por (20.7.12) y definidos por (20.7.1) y (20.7.2) son

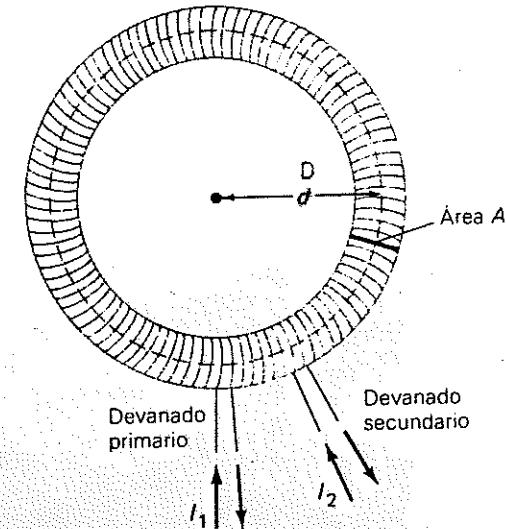


FIGURA 20.22. Bobina toroidal de inducción con dos devanamientos independientes que conducen la corriente "primaria" I_1 y la "secundaria" I_2

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \quad (20.7.12)$$

En este caso, todo el flujo magnético generado está encerrado por todas las vueltas de cada uno de los devanados por lo que los flujos Φ_{11} y Φ_{22} producidos por la corriente primaria I_1 y definidos por (20.7.1) y (20.7.2) son

$$\Phi_{11} = \Phi_{22} = B_1 A = \mu_0 n_1 A I_1 \quad (20.7.13)$$

en que A es el área transversal del toroide. En forma análoga, los flujos Φ_{12} y Φ_{21} generados por la corriente secundaria I_2 son

$$\Phi_{12} = \Phi_{21} = B_2 A = \mu_0 n_2 A I_2 \quad (20.7.14)$$

De acuerdo con (20.7.3), la FEM inducida en el primario —que se considera formado por N_1 vueltas totales de conductor— es

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} - N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \\ = -2\pi D n_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} - 2\pi D n_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \quad (20.7.15)$$

en tanto que la FEM inducida en el devanado secundario es, de acuerdo con (20.7.4),

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} - N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} \\ &= -2\pi D n_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} - 2\pi D n_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} \quad (20.7.16)\end{aligned}$$

en que D es el radio medio de la bobina, y n_1 y n_2 los números de vueltas por unidad de longitud en cada devanado. Sustituyendo los valores de los flujos en términos de las corrientes dados en (20.7.13) y (20.7.14), las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -2\pi\mu_0 D n_1^2 A \frac{dI_1}{dt} \\ &\quad - 2\pi\mu_0 D n_1 n_2 A \frac{dI_2}{dt} \quad (20.7.17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= -2\pi\mu_0 D n_1 n_2 A \frac{dI_1}{dt} \\ &\quad - 2\pi\mu_0 D n_2^2 A \frac{dI_2}{dt} \quad (20.7.18)\end{aligned}$$

Estas ecuaciones son de la misma forma que (20.7.7) y (20.7.8) con

$$L_1 = 2\pi\mu_0 D n_1^2 A \quad L_2 = 2\pi\mu_0 D n_2^2 A \quad (20.7.19)$$

y con

$$M_{12} = M_{21} = 2\pi\mu_0 D n_1 n_2 A \quad (20.7.20)$$

Los valores calculados de los coeficientes L_1 y L_2 de autoinducción concuerdan con el resultado que se obtuvo antes para el toroide delgado, ecuación (20.4.32). Se ve que son iguales los dos coeficientes de inducción mutua M_{12} y M_{21} , aunque en general esto no se verifica para circuitos acoplados inductivamente. De estas relaciones también se pueden expresar los coeficientes de inducción mutua en términos de las autoinductancias L_1 y L_2 :

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (20.7.21)$$

anque nuevamente éste es un resultado que sólo corresponde a esta configuración

específica de circuito. En consecuencia, es posible escribir (20.7.17) y (20.7.18) como

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_2}{dt} \quad (20.7.22)$$

$$\mathcal{E}_2 = -\sqrt{L_1 L_2} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad (20.7.23)$$

Estas ecuaciones describen las FEM inducidas en los devanados en términos de las corrientes que fluyen en cada uno de ellos. Aunque puede ser necesario emplear operaciones algebraicas relativamente complejas para evaluar las corrientes y diferencias de potencial que surgen cuando los devanados están conectados en circuitos, como se verá en los ejemplos que siguen, la característica esencial del dispositivo que se analiza puede hallarse despejando dI_1/dt de la ecuación (20.7.22), y sustituyendo el valor obtenido en (20.2.23). De esta manera, recordando (20.7.19), fácilmente se puede obtener

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{Baja}$$

$$(20.7.24)$$

o, ya que $N_1 = 2\pi D n_1$ y $N_2 = 2\pi D n_2$,

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (20.7.25)$$

Esta ecuación expresa que la relación de las FEMs es igual a la relación entre los números totales de espiras en los dos devanados. Por tanto, si el secundario tiene más vueltas que el primario y en el primario se induce una FEM \mathcal{E}_1 conectando ese devanado a una fuente externa de corriente, la FEM \mathcal{E}_2 inducida en el secundario será mayor que \mathcal{E}_1 en el factor N_2/N_1 . Desde luego, físicamente esto ocurre debido a que ambas bobinas encierran los mismos cambios de flujo, y por tanto en *cada vuelta de cada devanado* se induce la misma FEM, que puede llamarse \mathcal{E}' . Pero como *cada espira de devanado* está en serie con las demás, estas FEMs inducidas individualmente se suman de manera que

$$\mathcal{E}_1 = N_1 \mathcal{E}' \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_2 = N_2 \mathcal{E}' \quad (20.7.26)$$

mite construir dispositivos que *reduzcan* las tensiones con poca o casi nula pérdida de energía. Estos transformadores de reducción son útiles en muchas aplicaciones técnicas.

Debe observarse que toda la energía magnética generada por el circuito primario está contenida o se acumula en el interior de la bobina toroidal, ya que al menos en un toroide ideal, el campo B externo es cero. Es claro que, idealmente, *toda* esta energía magnética actúa sobre el circuito secundario, por lo que en principio no hay pérdida de energía electromagnética en una bobina de inducción con un transformador. En realidad, esta afirmación jamás se cumple totalmente en la práctica, pues siempre hay pérdidas resistivas que ocurren cuando las corrientes primarias y secundarias pasan por sus devanados respectivos, los que jamás serán de resistencia cero. Pero utilizando un conductor suficientemente grueso para el devanado, por lo general es posible reducir estas pérdidas hasta que en la práctica puedan considerarse despreciables.

Entonces, si se desprecian las pérdidas resistivas internas, serán iguales a la potencia $\mathcal{E}_1 I_1$ entregada al devanado primario y la potencia $\mathcal{E}_2 I_2$ que se toma del devanado secundario, por lo que, para un transformador o una bobina de inducción ideales,

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (20.7.27)$$

Como ya se ha visto, un solenoide largo puede considerarse como una bobina toroidal delgada de radio infinito. En consecuencia, los resultados que se estudiaron para el transformador o bobina de inducción de esta última clase, se aplican igualmente a un transformador o bobina de inducción en forma de un cilindro largo en el que se colocan dos devanados estrechamente, enrollados como se ilustra en la figura 20.23. Todas las ecuaciones formuladas para el toroide delgado se aplican al solenoide largo, a condición de que se reemplace en las ecuaciones (20.7.15) a (20.7.20) que debe reemplazarse la cantidad $2\pi D$ por la longitud l de la bobina recta.

La operación de la bobina toroidal con devanados primario y secundario como una bo-

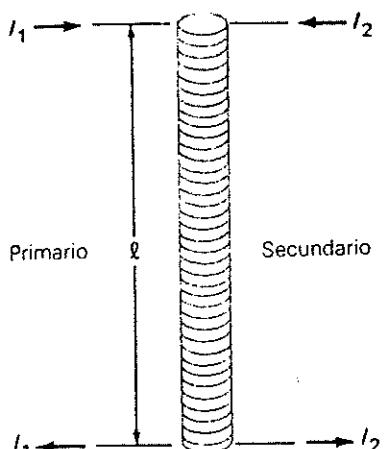


FIGURA 20.23. Bobina cilíndrica y recta de inducción cuya características importantes son similares a las de la bobina toroidal de la figura 20.22

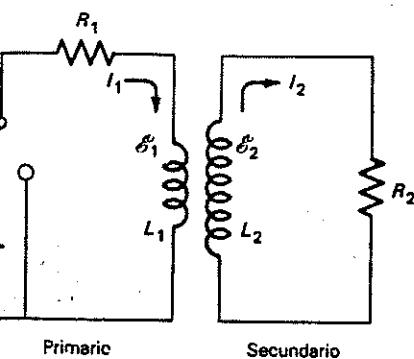
lo que de inmediato conduce a la ecuación (20.7.25).

Si el devanado secundario tiene más vueltas que el primario, la FEM inducida en la bobina secundaria puede ser mucho mayor que la FEM primaria, lo que proporciona la posibilidad de producir voltajes muy altos a partir de voltajes mucho más pequeños, con este tipo de configuración de circuito. A un dispositivo construido de esta manera se le llama *bobina de inducción* si se utiliza en circuitos de corriente continua (CC) o directa (CD) para producir FEMs altas al cerrar o abrir el circuito, o bien, *transformador* si se utiliza en un circuito de corriente alterna (CA) para elevar FEMs en condiciones de continuidad de circuito. La primera configuración se utiliza para producir las FEMs elevadas y transitorias que se necesitan para excitar las bujías de encendido de los motores de automóvil, a partir de la FEM mucho más pequeña de la batería, o acumulador en tanto que la segunda se emplea extensamente para elevar las FEMs de CA en sistemas de transmisión de energía eléctrica y en circuitos electrónicos. Desde luego, si el devanado secundario tiene *menos vueltas* que el primario, la FEM del secundario será menor que la del primario, lo que per-

de inducción en un circuito de CC está dada por el ejemplo 20.7.1, y por el 20.7.2 para el caso de un transformador en un circuito de CA. El segundo de estos dos establece algunos de los principios más adelante se estudiarán en detalle, (20.22), en relación con los circuitos de alta tensión alterna. Aunque no se intentará considerarlos a fondo aquí, será de interés para el repasar el ejemplo 20.7.2 después de haber los temas principales que se estudien en el capítulo 22.

PROBLEMA 20.7.1

Bobina de inducción de la clase autoinducción, que equivale eléctricamente a la bobina de inducción toroidal delgada descrita anteriormente en un circuito como se muestra en la figura 20.24. En el diagrama se emplea el símbolo usual en circuitos para representar los devanados primario y secundario de la bobina, suponiendo que inicialmente son cero las corrientes en ambos devanados, evaluar las FEMs y corrientes inducidas en ambos devanados en función del tiempo, después de que se cierra el interruptor S a la izquierda, como indica. Hallar la diferencia de potencial entre la resistencia R en el circuito secundario. Describir lo que sucede cuando, luego de las corrientes I₁ e I₂ hayan alcanzado sus valores de régimen permanente o estable (en un cierto tiempo), repentinamente se cierra el interruptor S a la conexión de la de-



20.24. Bobina de encendido (o del motor de un automóvil).

recha, interrumpiendo la FEM \mathcal{E}_0 de la batería o fuente de CC.

Para el circuito primario, utilizando la ley de Kirchhoff para sumar las FEMs y caídas de potencial alrededor del circuito en el sentido de la corriente I₁, se puede escribir

$$\mathcal{E}_0 - I_1 R_1 + \mathcal{E}_1 = 0 \quad (20.7.28)$$

mientras que en el circuito secundario, de la misma manera,

$$\mathcal{E}_2 - I_2 R_2 = 0 \quad (20.7.29)$$

En estas ecuaciones, \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 son las FEMs acopladas inducidas mutuamente en los devanados primario y secundario, dadas por (20.7.22) y (20.7.23). Ya que como siempre, estas cantidades están relacionadas mediante (20.7.24), se puede remplazar \mathcal{E}_2 en (20.7.27) por $\mathcal{E}_1 \sqrt{L_2/L_1}$ y escribir

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 + \mathcal{E}_0 = 0 \quad (20.7.30)$$

$$\mathcal{E}_1 \sqrt{L_2/L_1} - I_2 R_2 = 0 \quad (20.7.31)$$

con \mathcal{E}_1 dada por (20.7.22). Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas que pueden resolverse, con cierta dificultad, para evaluar las corrientes I₁ e I₂. Entonces, las ecuaciones (20.7.22) y (20.7.23) darán las FEMs \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 . La manera más simple de hacer esto es sustituir el valor de \mathcal{E}_1 de (20.7.30) en (20.7.31); así,

$$I_1 R_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + I_2 R_2 \quad (20.7.32)$$

Esto da de inmediato una relación entre I₁ e I₂. Se puede obtener una relación entre dI_1/dt y dI_2/dt diferenciando sencillamente (20.7.30) con respecto al tiempo y observando que el primer término de la derecha es constante:

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{R_2}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \frac{dI_2}{dt} \quad (20.7.33)$$

Si se sustituye el valor de \mathcal{E}_1 dado por (20.7.22) en (20.7.31), puede escribirse

$$L_1 L_2 \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} + I_2 R_2 = 0 \quad (20.7.34)$$

Sustituyendo el valor de dI_1/dt dado por (20.7.33) en esta ecuación, es posible formular

una ecuación que sólo contenga I₂ y dI_2/dt ; de este modo

$$\left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2} \right) \frac{dI_2}{dt} = -I_2 \quad (20.7.35)$$

Es fácil reordenar esta ecuación para que únicamente incluya la variable I₂ a la izquierda y t a la derecha, multiplicando por dt y dividiendo entre I₂:

$$\frac{dI_2}{I_2} = -\frac{dt}{\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}} \quad (20.7.36)$$

Ahora debe integrarse esta ecuación desde t = 0, en cuyo momento la corriente I₂ tiene el valor inicial I₀, hasta el tiempo t cuando la corriente tiene el valor I₂. De esta manera resulta

$$\int_{I_{20}}^{I_2} \frac{dI_2}{I_2} = -\frac{1}{\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}} \int_0^t dt \quad (20.7.37)$$

Lo único que impide realizar este procedimiento es que no se conoce el valor de la corriente I₂₀ al tiempo t = 0. Desde luego, para t menor que cero, I₂ es nula. Pero cuando se conecta el interruptor, I₁ comienza a aumentar con rapidez finita generando un cambio de flujo finito a través del circuito secundario. Este cambio de flujo de inmediato hace que la corriente sufra un salto discontinuo en magnitud desde cero hasta I₂₀ en t = 0. Pero en el circuito primario se sabe que I₁ es cero al tiempo t = 0. Si se hace t = 0 e I₁ = 0 en las ecuaciones (20.7.30) y (20.7.31), se obtiene

$$\mathcal{E}_1(0) + \mathcal{E}_0 = 0 \quad (20.7.38)$$

$$\mathcal{E}_1(0) \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} - I_{20} R_2 = 0 \quad (20.7.39)$$

en que $\mathcal{E}_1(0)$ representa el valor de la FEM \mathcal{E}_1 al tiempo t = 0. Pero, de (20.7.38), es claro que $\mathcal{E}_1(0) = -\mathcal{E}_0$, y sustituyendo este valor en (20.7.39) y despejando I₂₀,

$$I_{20} = -\frac{\mathcal{E}_0}{R_2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad (20.7.40)$$

Ahora se pueden integrar ambos miembros de (20.7.37) y encontrar que

$$\begin{aligned} [\ln I_2]_{I_{20}}^{I_2} &= \ln I_2 - \ln I_{20} = \ln \frac{I_2}{I_{20}} \\ &= -\frac{t}{\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}} \end{aligned} \quad (20.7.41)$$

Exponencializando la igualdad final de la expresión anterior y remplazando I₂₀ el valor dado por (20.7.40), por último se puede demostrar que

$$I_2(t) = I_{20} e^{-t(L_1/R_1 + L_2/R_2)}$$

o sea que

$$I_2(t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{R_2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} e^{-t/t_0} \quad (20.7.42)$$

en que la constante de tiempo t₀ está dada por

$$t_0 = \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2} \quad (20.7.43)$$

Se notará que la corriente I₂ decrece exponencialmente en el tiempo, que la constante exponencial de tiempo t₀ es la suma de las constantes de tiempo L₁/R₁ y L₂/R₂ que tendrían el circuito primario y el secundario si no estuvieran acoplados por la inductancia mutua del dispositivo.

Sustituyendo (20.7.42) en (20.7.32) y despejando I₁ se obtiene

$$I_1(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1} (1 - e^{-t/t_0}) \quad (20.7.44)$$

Las FEMs \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 se determinan diferenciando (20.7.42) y (20.7.44) para encontrar dI_1/dt y dI_2/dt , y sustituyendo luego estos valores en (20.7.22) y (20.7.23):

$$\mathcal{E}_1(t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{t_0} \left[\frac{L_1}{R_1} + \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_2} \right] e^{-t/t_0} \quad (20.7.45)$$

$$\mathcal{E}_2(t) = -\frac{\mathcal{E}_0}{t_0} \left[\frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R_1} + \frac{L_2}{R_2} \right] e^{-t/t_0} \quad (20.7.46)$$

Si se multiplica por $\sqrt{L_1/L_2}$ la $\mathcal{E}_1(t)$ dada arriba, se obtiene $\mathcal{E}_1(t)$ en la forma (20.7.46), lo que concuerda con lo que se esperaría de

(20.7.24). Por último, se puede observar que la diferencia de potencial a través de la resistencia R_2 es sencillamente

$$\Delta V_2 = I_2(t)R_2 = -\mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} e^{-t/t_0} \quad (20.7.47)$$

o, ya que de (20.7.24) y (20.7.25) la relación $\sqrt{L_2/L_1}$ es igual a la relación de las espiras o vueltas del secundario a las del primario, N_2/N_1 ,

$$\Delta V_2 = -\mathcal{E}_0 \frac{N_2}{N_1} e^{-t/t_0} \quad (20.7.48)$$

En el sistema de ignición de un vehículo automotor, el interruptor S es en realidad el ruptor con los "platinos" o contactos en el distribuidor, y la bobina de inducción es la llamada "bobina de encendido" del auto. La resistencia R_1 es la del devanado primario de la bobina, en tanto que la resistencia R_2 es la resistencia combinada del devanado secundario, los conductores de las bujías y de los entrehielos de la chispa en éstas. Es claro que la diferencia de potencial de salida, que esencialmente aparece entre los electrodos de la bujía de encendido (pues de ordinario su resistencia es mucho mayor que la del alambre del devanado o del sistema de las bujías), al principio es *mayor* que la FEM de la batería, en proporción a la relación de números de espiras $N_2/N_1 = 1000$ dará un voltaje inicial de encendido de 12 000 V.

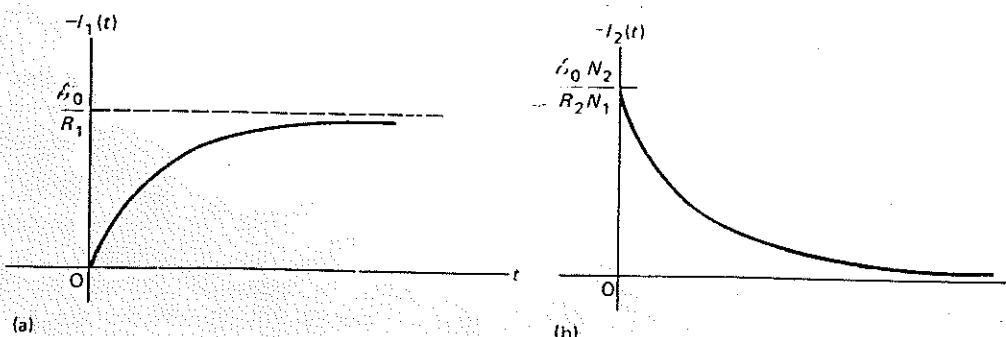


FIGURA 20.25. (a) Corriente primaria y (b) corriente secundaria en la bobina de inducción de automóvil de la figura 20.24, graficadas en función del tiempo transcurrido después del cierre del interruptor S.

En la figura 20.25 se tienen las gráficas de las corrientes I_1 e I_2 en función del tiempo. Después de un tiempo largo, si el interruptor S permanece cerrado, la corriente primaria I_1 alcanzará el valor constante de estado estable (de CC) \mathcal{E}_0/R_1 , y ya no cambiará. En este caso, tampoco lo hará el flujo magnético que genera, y la FEM \mathcal{E}_2 en el circuito secundario caerá a cero. En estas condiciones, la corriente del secundario I_2 también debe declinar asintóticamente a cero, como se muestra en la figura 20.25b o la ecuación (20.7.42).

Si ahora se conecta repentinamente el interruptor a la derecha, eliminando la FEM \mathcal{E}_0 de la batería, la corriente primaria I_1 comenzará a disminuir. Pero debido al hecho de que los campos magnéticos que reducen su magnitud originan las FEMs \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 en ambas ramas del circuito, no decaerá de inmediato a cero, sino que será sostenida durante cierto tiempo por la FEM \mathcal{E}_1 , que —de acuerdo con la ley de Lenz— ahora estará en sentido opuesto. En consecuencia, la corriente I_1 declinará exponencialmente a cero y su constante de tiempo t_0 estará dada por (20.7.43), en forma muy parecida a como la corriente autoinducida decrece en un inductor, se estudió antes en la sección 20.4. Al mismo tiempo, el flujo magnético que cambia repentinamente a través del secundario de la bobina inducirá otra "punta" exponencial grande de FEM y corriente en el secundario, semejante a la que se muestra en la figura 20.25b, pero nuevamente en direc-

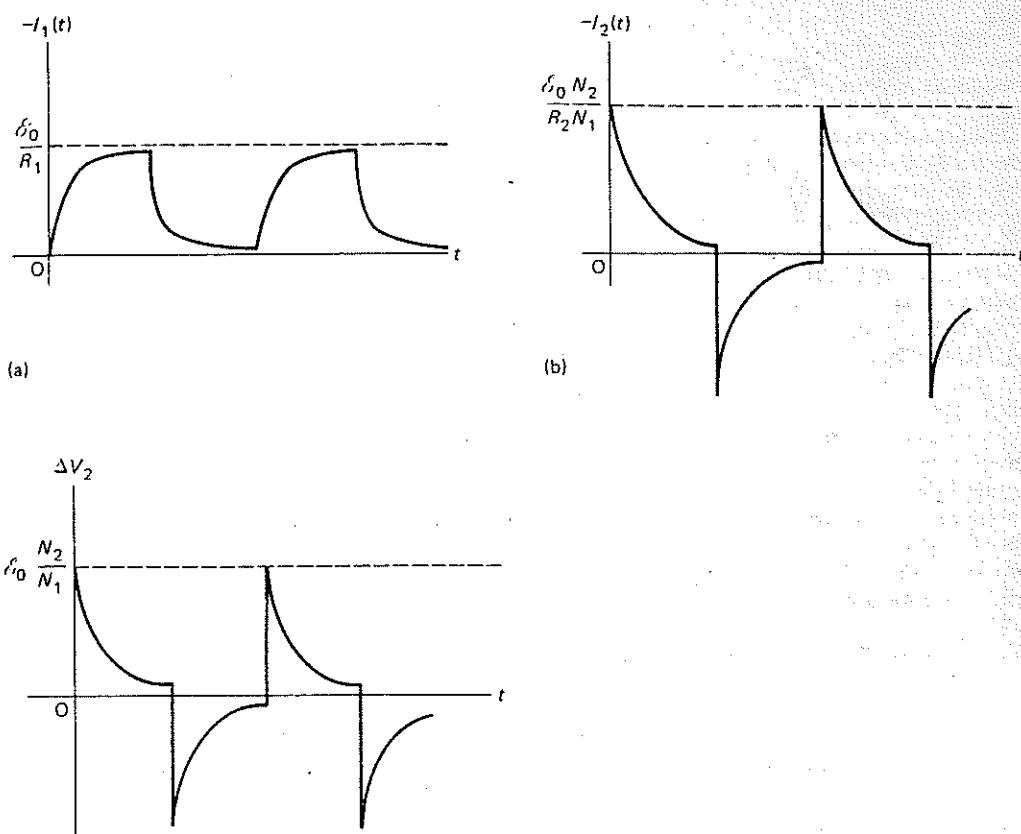


FIGURA 20.26. Aumento y disminución de (a) la corriente primaria, (b) la corriente secundaria y (c) la FEM secundaria en una bobina de encendido conforme los "platinos" cierran y abren alternativamente el circuito primario

ción opuesta, como lo requiere la ley de Lenz. Desde luego, se podrían verificar matemáticamente estas conclusiones cualitativas por métodos semejantes a los empleados antes, pero no será necesario, pues los métodos están bien establecidos y los efectos se pueden describir en términos cualitativos por razonamientos puramente físicos. Si luego se acciona continuamente el interruptor de izquierda a derecha y viceversa, la corriente en el primario será como se muestra en la figura 20.26a, en tanto que el voltaje y la corriente en el secun-

dario presentarán una serie de puntas que corresponderán a diferencias de potencial muy grandes a través de la resistencia de salida R_2 , como se ilustra en las figuras 20.26b y 20.26c.

En el sistema de un automóvil, esta acción repetitiva de cerrar y abrir el circuito primario lo hace automáticamente una leva en el distribuidor, que en forma reiterada abre y cierra los contactos (o platinos) del ruptor. En las bobinas de inducción de laboratorio, esta acción interruptiva generalmente la efectúa un

mito operado magnéticamente, semejante que se utiliza en un zumbador o timbre eléctrico. El encendido de un automóvil es una complicación que no se ha tomado cuenta. Antes de que salte una chispa en el espacio entre electrodos de una bujía, la resistencia R_2 del circuito secundario es muy alta, y las únicas corrientes que pueden fluir son las de escape a través, y por la superficie de elementos aislantes. Pero cuando salta la chispa, la corriente es establecida por la bujía, lo que proporciona un camino de conducción con relativamente baja resistencia a través de los gases ionizados que se forman a cargo de la descarga, una vez iniciada ésta. Entonces la resistencia R_2 cae a un valor mucho más pequeño, determinado principalmente por la resistencia del devanado secundario y del circuito de encendido, y se mantiene ahí hasta que la corriente decrece en tanto que se extingue la chispa. Entonces vuelve al valor superior anterior. Esto quiere decir que la constante de tiempo t_0 dada por (20.40) no se mantiene igual durante todas las fases del proceso de inducción, sino que varía con la resistencia del circuito secundario. Aunque esto cambia en cierta medida los efectos cuantitativos de lo que se ha presentado, no necesariamente afecta las características físicas importantes de los resultados que se obtienen.

Históricamente, las bobinas de inducción han tenido un papel importante en el estudio

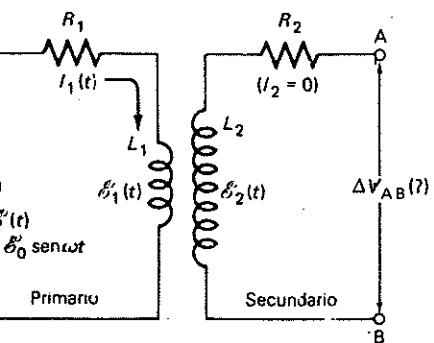


FIGURA 20.27. Esquema de una bobina de inducción empleada como transformador en un circuito de corriente alterna.

de los fenómenos eléctricos, ya que fueron los primeros generadores de alto voltaje verdaderamente prácticos y confiables. Antes de que Joseph Henry construyera el primero de estos dispositivos, la única manera de obtener altas tensiones era a partir de máquinas electrostáticas molestas y poco confiables, que no eran más que dispositivos mecánicos para la electrificación por frotamiento de una sustancia con otra. El invento de la bobina de inducción condujo a la investigación sistemática de la conducción eléctrica en gases ionizados y al fenómeno de la disrupción o "ruptura" eléctrica que ocurre en gases, líquidos y sólidos cuando se inician arcos o chispas eléctricas.

EJEMPLO 20.7.2

Aplicando una FEM de CA $\epsilon(t) = \epsilon_0 \operatorname{sen} \omega t$ al primario de una bobina de inducción como la que se estudió en el ejemplo anterior, se utiliza aquella como un transformador. Evaluar la diferencia de potencial que aparece entre las terminales de salida AB (fig. 20.27), suponiendo que no se toma corriente del secundario para un circuito externo.

En la figura 20.27 se tiene esencialmente el mismo circuito que en la figura 20.24, excepto que la batería y el interruptor están remplazados por un generador de CA que proporciona una FEM alterna dada por $\epsilon(t) = \epsilon_0 \operatorname{sen} \omega t$. En principio, esta es la misma clase de dispositivo descrita en el ejemplo 20.2.3. También, para simplificar algo los cálculos, se dejó abierto el circuito secundario, de manera que $I_2 = 0$ y bastará entonces con encontrar la diferencia de potencial ΔV_{AB} desarrollada entre las terminales de salida. En la figura 20.27 se puede considerar que la resistencia R_1 es la resistencia interna combinada del generador y el primario del transformador, en tanto que R_2 —que más adelante se verá que no desempeña ninguna función en los cálculos— representa la resistencia del secundario.

Como siempre, (20.7.22) y (20.7.23) representan las FEMs inducidas ϵ_1 y ϵ_2 , aunque, como en este caso $I_2 = 0$, las expresiones están muy simplificadas. También en este ejemplo, ϵ_1 y ϵ_2 están relacionadas por medio de

(20.7.24) y (20.7.25). Si se escribe la II ley de Kirchhoff para el circuito primario, se tiene

$$\epsilon_0 \operatorname{sen} \omega t - I_1 R_1 + \epsilon_1(t) = 0 \quad (20.7.49)$$

en tanto que para el circuito secundario,

$$\epsilon_2(t) - I_2 R_2 - \Delta V_{AB} = 0$$

o, ya que $I_2 = 0$,

$$\epsilon_2(t) - \Delta V_{AB} = 0 \quad (20.7.50)$$

De (20.7.22), es claro que en este caso $I_2 = 0$ y $\epsilon_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0$, que permite escribir para (20.7.49)

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 = \epsilon_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (20.7.51)$$

Esta ecuación diferencial puede resolverse para evaluar I_1 en función del tiempo. Es de forma ligeramente distinta de las que se han tratado en los ejemplos anteriores, debido al término $\epsilon_0 \operatorname{sen} \omega t$ de la derecha. En realidad, está relacionada con las ecuaciones que describen las vibraciones forzadas en sistemas mecánicos sometidos a fuerzas externas que varían senoidalmente.

En todo caso, si hay una FEM alterna aplicada al circuito, es razonable creer que producirá una corriente alterna de la misma frecuencia en el mismo. No se tiene mucha certeza de que la corriente estará en fase con la FEM; podría estarlo —aunque quizás no sea irrazonable que lo esté— pero desde luego es más seguro suponer que no lo está, cuando no se tiene la certidumbre absoluta. Por tanto, se supondrá que fluye una corriente alterna de frecuencia ω tal que

$$I_1(t) = I_{10} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (20.7.52)$$

Esta corriente tiene la amplitud máxima I_{10} y difiere en fase de la FEM aplicada $\epsilon_0 \operatorname{sen} \omega t$, en el ángulo Φ . Si la corriente y la FEM aplicada están en fase, $\phi = 0$; pero en realidad, como se verá pronto, no lo están. Si se deriva (20.7.52) se encuentra que

$$\frac{dI_1}{dt} = I_{10} \omega \operatorname{cos}(\omega t + \phi) \quad (20.7.53)$$

Sustituyendo los valores de I_1 y dI_1/dt dados antes en (20.7.51),

$$L_1 I_{10} \omega \operatorname{cos}(\omega t + \phi) + R_1 I_{10} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ = \epsilon_0 \operatorname{sen} \omega t \quad (20.7.54)$$

Pero por trigonometría elemental se sabe que

$$\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \operatorname{sen} \omega t \operatorname{cos} \phi + \operatorname{cos} \omega t \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{cos}(\omega t + \phi) = \operatorname{cos} \omega t \operatorname{cos} \phi - \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi$$

Sustituyendo estas relaciones en (20.7.54) y agrupando todos los términos que contengan a $\operatorname{sen} \omega t$, y a todos los términos que contengan a $\operatorname{cos} \omega t$, se puede escribir (20.7.54) en la forma

$$I_{10} (\omega L_1 \operatorname{cos} \phi + R_1 \operatorname{sen} \phi) \operatorname{cos} \omega t \\ + [I_{10} (R_1 \operatorname{cos} \phi - \omega L_1 \operatorname{sen} \phi) - \epsilon_0] \operatorname{sen} \omega t = 0 \quad (20.7.55)$$

El primer miembro de esta ecuación varía en el tiempo según las funciones sinusoidales $\operatorname{sen} \omega t$ y $\operatorname{cos} \omega t$, en tanto que el segundo miembro es cero. Para que la suma de los términos del lado izquierdo siempre sea nula, los coeficientes de los términos $\operatorname{sen} \omega t$ y $\operatorname{cos} \omega t$ deben anularse. Por ejemplo, en $t = 0$, $\operatorname{sen} \omega t$ es cero mientras que $\operatorname{cos} \omega t$ vale la unidad; en este caso, es evidente que el coeficiente de $\operatorname{cos} \omega t$ debe ser cero para que se satisfaga (20.7.51). Por otra parte, al tiempo $t = \pi/2\omega$ (cuando $\omega t = 90^\circ$), $\operatorname{cos} \omega t$ es cero mientras que $\operatorname{sen} \omega t$ es igual a 1. Entonces, la única manera como puede satisfacerse (20.7.55) es que se anule el coeficiente de $\operatorname{sen} \omega t$. Pero la ecuación sólo puede ser satisfecha en estas dos ocasiones si se hacen cero los dos coeficientes. Por tanto, haciendo iguales a cero ambos coeficientes, se pueden escribir

$$\omega L_1 \operatorname{cos} \phi + R_1 \operatorname{sen} \phi = 0 \quad (20.7.56)$$

y también

$$I_{10} (R_1 \operatorname{cos} \phi - \omega L_1 \operatorname{sen} \phi) = \epsilon_0 \quad (20.7.57)$$

De (20.7.56), dividiendo ambos miembros entre $\operatorname{cos} \phi$, de inmediato se ve que

$$\tan \phi = -\frac{\omega L_1}{R_1} \quad (20.7.58)$$

y si hay entonces una diferencia de fase entre la FEM aplicada exteriormente y la corriente. De modo que fue inteligente haber previsto tal contingencia en la ecuación (20.7.52). Por el signo menos en (20.7.58), se sabe que el ángulo de fase será negativo, de manera que la fase de la corriente será de atraso con respecto a la de la FEM aplicada. Más adelante, en el capítulo 22, se verá que ésta es una característica general de los circuitos inductivos de CA. Si la tangente del ángulo de fase es $-\omega L_1/R_1$, entonces de la figura 20.28 pueden deducirse el seno y el coseno; en el triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo ϕ es $-\omega L_1$ y el lado adyacente es R_1 , lo que garantiza que la tangente está dada por (20.7.58). En este triángulo es claro que

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{-\omega L_1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}}$$

y que

$$\cos \phi = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \quad (20.7.59)$$

Sustituyendo estos valores de nuevo en (20.7.57) y despejando I_{10} , finalmente se encuentra que

$$I_{10} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \quad (20.7.60)$$

Por último, sustituyendo este valor en (20.7.52),

$$I_1(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad (20.7.61)$$

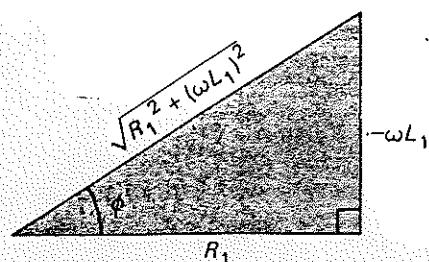


FIGURA 20.28. Relaciones de fase en el circuito primario del transformador de la figura 20.27.

Una característica especial de este resultado es que la relación de la corriente I_1 a la FEM aplicada \mathcal{E}_0 —que se puede considerar como la conductancia en un circuito de CC— no es constante, sino que depende de la frecuencia. Esta es otra característica muy general de los circuitos de CA que contienen inductancia o capacitancia, acerca de la cual se aprenderá más en el capítulo 22.

Sin embargo, se tiene interés en evaluar la FEM inducida $\mathcal{E}_1(t)$, lo cual se obtiene de (20.7.22), notando que $I_2 = 0$, como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t) &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} \\ &= -\frac{\omega L_1 \mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (20.7.62)$$

Luego puede obtenerse la FEM \mathcal{E}_2 secundaria de (20.7.24) como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(t) &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \mathcal{E}_1(t) \\ &= -\frac{\omega \sqrt{L_1 L_2} \mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (20.7.63)$$

lo que permite finalmente, de (20.7.50), expresar la diferencia de potencial de salida ΔV_{AB} como

$$\begin{aligned} \Delta V_{AB} &= -\mathcal{E}_2(t) \\ &= -\frac{\omega \sqrt{L_1 L_2} \mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2}} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (20.7.64)$$

De aquí es obvio que si la frecuencia ω es cero, el voltaje de salida ΔV_{AB} también será cero, lo que quiere decir *sencillamente que un transformador no funciona en un circuito de corriente continua*, algo que ha molestado durante décadas tanto a los ingenieros electricistas como a los técnicos en electricidad, pero acerca de lo cual poco puede hacerse. Desde luego, la razón es que en un circuito de CC no hay cambio en el flujo, y por tanto, tampoco hay FEM secundaria inducida para crear el voltaje de salida ΔV_{AB} . No obstante para frecuencias de CA tales que $\omega L_1 \gg R_1$ se

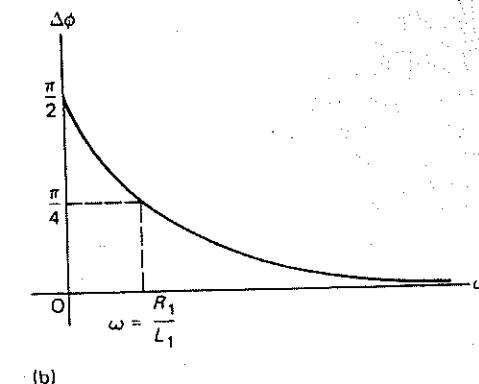
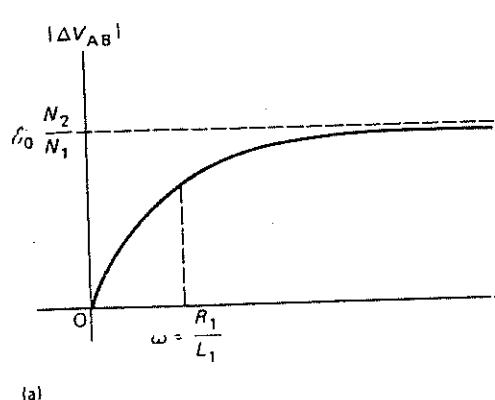


FIGURA 20.29. (a) Tensión secundaria de salida y (b) ángulo de fase ϕ entre las tensiones (o voltajes) de salida y de entrada, graficados en función de la frecuencia.

puede despreciar R_1 en el denominador de (20.7.64), que entonces queda como

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cos(\omega t + \phi) \quad (20.7.65)$$

También, en este caso, el ángulo de fase ϕ dado por (20.7.58) se aproxima a $-\pi/2$, ya que $\tan \phi$ tiende a $-\infty$. Pero $\cos(\omega t - \pi/2) = \operatorname{sen} \omega t$, de manera que puede escribirse (20.7.65) como

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E}_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \operatorname{sen} \omega t \quad (20.7.66)$$

o, recordando (20.7.24) y (20.7.15),

$$\Delta V_{AB} = \mathcal{E}_0 \frac{N_2}{N_1} \operatorname{sen} \omega t = \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}(t) \quad (20.7.67)$$

El resultado final es: un transformador no trabaja en absoluto con corriente continua. Con frecuencias bajas, hay un voltaje de salida dado por (20.7.64). La fase de esta tensión difiere de la fase de la FEM $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$ aplicada al circuito primario, y su amplitud depende de la frecuencia, aumentando cuando lo hace esta última, como se ilustra en la figura 20.29. Para frecuencias tan altas que $\omega L_1 \gg R_1$, la amplitud del voltaje de salida es en esencia *independiente* de la frecuencia, e igual a la FEM de entrada multiplicada por la relación de vueltas N_2/N_1 del secundario al primario. En este límite, ya no hay una diferencia de

fase significativa entre los voltajes de entrada y salida; esto es evidente de la ecuación (20.7.67) y de la figura 20.29b.

Se notará que la condición $\omega L_1 \gg R_1$, con la que la bobina de inducción “opera como debe hacerlo un transformador”, se puede expresar como $\omega \gg R_1/L_1$, o, ya que

L_1/R_1 es la constante de tiempo inductiva t_1 del circuito primario, también en esta forma:

$$\omega \gg \frac{1}{t_1} \quad (20.7.68)$$

De modo que, mientras la frecuencia sea mucho mayor que el recíproco de la constante de tiempo del circuito primario, el dispositivo se comportará como un transformador “ideal” en el sentido antes descrito.

Si una corriente I_2 circula en el circuito secundario, prácticamente no cambian las características esenciales del sistema aunque el análisis matemático se complica mucho más, al igual que las expresiones para las FEMs y corrientes en los dos circuitos. No se tratará de atacar los detalles de este caso, excepto para mencionar que la condición (20.7.68) queda entonces así:

$$\omega \gg \frac{1}{t_1 + t_2} \quad (20.7.69)$$

en que t_2 representa la constante de tiempo inductiva del circuito secundario.

se ha considerado sólo el caso de los transformadores cuyos devanados no encierran sustancia muy fuertemente magnética, los que son muy útiles en la práctica, especialmente para usos de alta frecuencia, en circuitos de radio y televisión. Sin embargo, para frecuencias del orden de 60 Hz este tipo de dispositivo tiene que ser muy grande y voluminoso, y contener mucho cobre —que es un material costoso— para satisfacer la condición (20.7.69). En estas circunstancias se acostumbra devanar los transformadores alrededor de "núcleos de hierro sólido". Como se verá más claramente en el siguiente capítulo, el principal efecto del hierro de acero es aumentar muchísimo el flujo magnético dentro de los devanados. Este efecto se debe a que el flujo producido por la corriente de los devanados es acrecentado por el flujo magnético proveniente de los momentos magnéticos de los átomos de hierro en el núcleo, que se alinean fácilmente por efecto de las corrientes en los devanados. En estas circunstancias, un cambio pequeño en la corriente del primario o del secundario puede causar un cambio considerable en el flujo magnético. De acuerdo con (20.7.6), esto vale a decir que las *inductancias* de los circuitos primario y secundario aumentan tanto cuando se tiene un núcleo de hierro, lo que su vez significa que es posible lograr una constante de tiempo L/R con un valor mucho más alto de resistencia de circuito primario o secundario. En consecuencia, se puede hacer que los devanados del transformador sean de cable más delgado, produciendo un dispositivo mucho más pequeño, ligero y económico.

El transformador es un dispositivo de considerable importancia técnica. Cuando fue inventado, se obtuvo un logro del mismo orden de importancia que el desarrollo de la energía nuclear o de los dispositivos electrónicos de radio sólido, en fechas más recientes; la razón es que sólo es económico transmitir la energía eléctrica a gran distancia por líneas de transmisión con voltaje muy alto, pero es sumamente peligroso e inconveniente generar o aumentar esos niveles de tensión. Supóngase que se necesita transmitir una potencia de 10^8 W por una línea eléctrica cuya resistencia es de 1 Ω . Se podría enviar una corriente de 10^6 A por

la línea utilizando una diferencia de potencial de 10^2 V . En ese caso, la potencia disipada por la resistencia de la propia línea tendría que ser $P = I^2 R = (10^6)^2(1) = 10^{12} \text{ W}$. Lo anterior quiere decir que se necesitaría 10 000 veces más potencia para transmitir la energía eléctrica hasta su destino, que la que se entrega ahí! Por otra parte, supóngase que se envía una corriente de 10^3 A utilizando una diferencia de potencial de 10^5 V . Ahora, la potencia disipada en la línea es $P' = (10^3)^2(1) = 10^6 \text{ W}$, o sea, solamente 1% de la potencia entregada en el extremo final. Este es un nivel aceptable de pérdidas en la línea, pero es difícil diseñar generadores de $100\,000 \text{ V}$, e incluso más difícil que los usuarios empleen la energía en tales condiciones. Sería posible reducir un poco las resistencias de las líneas eléctricas, lo que exigiría conductores muy gruesos y que representarían cuantiosas inversiones en cobre, que es un metal muy costoso. La alternativa más razonable, que es eminentemente práctica y económica, consiste en generar la energía a bajos voltajes, utilizar transformadores para elevarla al valor requerido para la transmisión económica, y disminuir el voltaje en el otro extremo para la distribución y uso convenientes, mediante transformadores de reducción. Desde luego, los transformadores no operan en circuitos de CC, razón por la cual virtualmente toda la electricidad generada en forma comercial se utiliza como *corriente alterna*.

EJEMPLO 20.7.3

El toroide del ejemplo 20.4.2 se utiliza como el secundario de un transformador toroidal. Un devanado primario de 628 vueltas —un quinto del número de espiras del secundario— se coloca sobre el devanado secundario, utilizando un conductor de la misma clase que el empleado para el devanado secundario. Entonces se tiene un transformador con resistencia $R_2 = 10.75 \Omega$ en el secundario, inductancia en el mismo $L_2 = 5.92 \times 10^{-3} \text{ H}$, resistencia $R_1 = (0.2)(10.75) = 2.15 \Omega$ en el primario e inductancia primaria [recordando de (20.4.32) que la inductancia es proporcional al cuadrado del número de vueltas] $L_1 = (0.04)(5.92 \times 10^{-3}) = 2.368 \times 10^{-4} \text{ H}$. Determinar los

límites de frecuencias dentro de los que este dispositivo se comportará como un transformador "ideal". Calcular la relación de la diferencia de potencial de salida a la FEM de entrada dentro de estos límites de operación.

La condición (20.7.69) debe satisfacerse para que un dispositivo como éste opere como transformador ideal. Las dos constantes de tiempo son

$$t_2 = \frac{L_2}{R_2} = \frac{5.92 \times 10^{-3}}{10.75} = 5.51 \times 10^{-4} \text{ s}$$

y

$$t_1 = \frac{L_1}{R_1} = \frac{2.368 \times 10^{-4}}{2.15} = 1.10 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Entonces, la condición (20.7.69) dice que

$$\omega \gg \frac{1}{t_1 + t_2}$$

o bien,

$$\omega \gg 1513 \text{ rad/s, o } 241 \text{ Hz}$$

Debe esperarse que el dispositivo opere como un transformador ideal para frecuencia mucho mayor que 240 Hz —quizás, como cuestión práctica, arriba de 1 000 Hz. Si se hubieran devanado las bobinas primaria y secundaria sobre un núcleo de hierro, habrían podido lograrse inductancias en el primario y secundario superiores a las dadas arriba en un factor aproximado de 1 000, aumentando con ello la constante de tiempo t_1 y t_2 en el mismo factor. Así pues, la condición (20.7.68) daría $\omega \gg 1.513 \text{ rad/s}$ (0.241 Hz), y arriba de aproximadamente 1.0 Hz se tendría un sistema que tiende al comportamiento de un transformador ideal. Entonces este dispositivo constituiría un transformador muy eficaz para operación en una línea eléctrica de 60 Hz.

La ecuación (20.7.67) da la relación del voltaje de salida a la FEM de entrada para el transformador ideal. Por tanto, en este caso se puede escribir

$$\frac{\Delta V_{AB}}{\delta(t)} = \frac{N_2}{N_1} = 5.0$$

EJEMPLO 20.7.4

Un solenoide largo en área transversal A_1 , tiene un devanado primario de n_1 vueltas por unidad de longitud y lleva una corriente variable en el tiempo I_1 . Esta bobina primaria está dentro de una bobina secundaria mayor, con área A_2 y n_2 vueltas por longitud unitaria, que lleva una corriente I_2 , como se muestra en la figura 20.30. Calcular los coeficientes de inducción mutua M_{12} y M_{21} para esta estructura.

De (20.4.1), se sabe que el campo B_2 dentro de la bobina secundaria grande tiene el valor constante

$$B_2 = \mu_0 n_2 I_2 \quad (20.7.70)$$

En el caso de la bobina primaria más pequeña, el campo B_1 está dado por

$$B_1^{(a)} = \mu_0 n_1 I_1 \quad \text{dentro de la bobina 1}$$

y por

$$B_1^{(b)} = 0 \quad \text{fuerza de la bobina 1} \quad (20.7.71)$$

De las integrales que se tienen en las ecuaciones (20.7.1) y (20.7.2), puede verse que en este caso

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12} = B_1 A_1 + B_2 A_1 \\ &= \mu_0 n_1 I_1 A_1 + \mu_0 n_2 I_2 A_1 \\ \Phi_2 &= \Phi_{21} + \Phi_{22} = B_1 A_2 + B_2 A_2 \\ &= B_1^{(a)} A_2 + B_1^{(b)} (A_2 - A_1) \\ &\quad + B_2 A_2 \\ &= \mu_0 n_1 I_1 A_2 + \mu_0 n_2 I_2 A_2 \end{aligned}$$

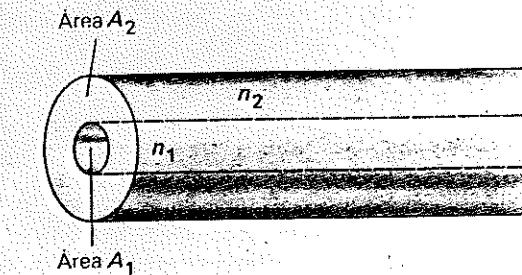


FIGURA 20.30.

recordando que $B_1^{(0)} = 0$. Las FEMs \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 en los dos circuitos son

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} - N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} \\ &= -(n_1 l) \mu_0 n_1 A_1 \frac{dI_1}{dt} - (n_1 l) \mu_0 n_2 A_1 \frac{dI_2}{dt}\end{aligned}\quad (20.7.72)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} - N_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} \\ &= -(n_2 l) \mu_0 n_1 A_1 \frac{dI_2}{dt} - (n_2 l) \mu_0 n_2 A_2 \frac{dI_1}{dt}\end{aligned}\quad (20.7.73)$$

Comparando estas ecuaciones con (20.7.7) y (20.7.8), es evidente que los coeficientes de dI_1/dt y de dI_2/dt en (20.7.72) son L_1 y M_{12} , respectivamente, mientras que los coeficientes de las mismas cantidades en (20.7.73) son M_{21} y L_2 , respectivamente. Por tanto,

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 l A_1 \quad \text{y} \quad L_2 = \mu_0 n_2^2 l A_2 \quad (20.7.74)$$

que concuerda con (20.4.7), en tanto que

$$M_{12} = M_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l A_1 \quad (20.7.75)$$

En este ejemplo, es importante notar que la relación entre las autoinductancias L_1 y L_2 , y los coeficientes de inducción mutua, ya no está dada por (20.7.21), sino por

$$M_{12} = M_{21} = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} L_1 L_2 \quad (20.7.76)$$

RESUMEN

Siempre que hay un flujo magnético variable en el tiempo que atraviesa un circuito, se induce una FEM en éste, cuya magnitud es igual a la rapidez de variación del flujo magnético interceptado por el circuito. A este enunciado se le llama *de la inducción de Faraday*, que matemáticamente se puede expresar como

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da$$

Si la inducción magnética es uniforme en el área encerrada por el circuito, esto queda

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d}{dt} (BA \cos \theta)$$

en que A es el área del circuito y θ el ángulo entre la normal al plano en el que está y el vector inducción \mathbf{B} . La FEM inducida aparece en el circuito sin importar cómo se produzca el cambio en el flujo.

La ley de Faraday implica que un flujo magnético variable en el tiempo genera un campo eléctrico \mathbf{E} , aunque no electrostático, cuya integral, evaluada alrededor de un circuito cerrado, representa la FEM inducida \mathcal{E}_m . Vista de esta manera, la ley de Faraday puede escribirse como

$$\mathcal{E}_m = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da$$

La ley de Lenz indica que las corrientes inducidas fluyen de manera que sus propios efectos magnéticos se oponen al cambio de flujo que los creó inicialmente. La ley de Lenz está relacionada con la ley de conservación de la energía, y es la que origina el signo negativo de la FEM inducida expresada por la ley de Faraday. Las corrientes de Foucault son corrientes inducidas magnéticamente que fluyen en cuerpos conductores extensos, aparte de los conductores lineales. De las leyes de Lenz y de Faraday se puede inferir la dirección y configuración general del flujo magnético.

La FEM autoinducida es una FEM que se produce en un circuito por un cambio en su propio flujo magnético, o por un cambio en la corriente que fluye en dicho circuito. Como el flujo magnético siempre es proporcional a la corriente, la FEM autoinducida siempre será proporcional a dI/dt , por lo cual, la citada FEM en un inductor de N espiras es

$$\mathcal{E}_m = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

en que L es una constante de proporcionalidad que se conoce como *coeficiente de autoinducción* o *autoinductancia* del circuito. Esta inductancia propia de un circuito o de un ele-

mento inductivo de circuito, depende del número de vueltas de conductor, del área y de la forma del circuito, pero es independiente de la corriente. La FEM autoinducida magnéticamente en una bobina se opone al crecimiento de la corriente que circula en ella, o puede mantener el flujo de la corriente en la bobina después de suprimir la FEM externa; la FEM autoinducida da lugar a una diferencia de potencial entre las terminales de un inductor, cuya magnitud instantánea es

$$\Delta V_L = -L \frac{dI}{dt}$$

En el caso de un solenoide largo, es fácil calcular que la inductancia es

$$L = \mu_0 n^2 l A$$

en que l es la longitud de la bobina, A el área transversal y n el número de espiras por unidad de longitud. La ley de Lenz determina el sentido de las FEMs autoinducidas.

Debido a estas FEMs asociadas a las inductancias, los circuitos con inductancia y resistencia en serie $R-L$ presentan crecimiento y decrecimiento exponenciales de la corriente, como se encuentra en los circuitos en serie $R-C$. La constante t_0 que da la escala de tiempo en que ocurren estos cambios exponenciales es

$$t_0 = L/R$$

Como un capacitor, un elemento inductivo también almacena energía, pero ésta reside en el campo magnético de la inductancia en vez de un campo electrostático, como en un capacitor. Se puede demostrar que la energía magnética almacenada en un inductor que lleva una corriente I es

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2$$

y que la densidad de la energía magnética (energía de campo magnético por unidad de volumen) en cualquier parte de un campo magnético es

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Las inductancias en serie y en paralelo se combinan como las resistencias, es decir, en el caso de inductancias en serie,

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

y para inductancias en paralelo,

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

En el primer caso, la diferencia de potencial a través del conjunto es la suma de las asociadas a los elementos individuales, y la corriente que pasa por cada uno es la misma; en el segundo caso, la diferencia de potencial es también la misma a través de cada elemento, y la corriente en cada uno se suma para producir la corriente total a través del conjunto.

La inducción mutua aparece entre distintos circuitos cuando un flujo cambiante generado por uno de ellos induce una FEM en otro. Si hay dos circuitos de esta clase la FEM en el circuito 1 dependerá de dI_1/dt además de dI_2/dt , por lo que

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

En estas ecuaciones, a M_{12} y M_{21} se les llama *coeficientes de inducción mutua* o *inductancias mutuas*; expresan la intensidad de los campos magnéticos generados por los circuitos y la medida en que el flujo magnético generado por un circuito intercepta el área encerrada por el otro. Las leyes de la inducción mutua gobiernan el comportamiento de dispositivos como las bobinas de inducción y los transformadores, en los que se pueden elevar o reducir las tensiones mediante el acoplamiento inductivo entre bobinas con distinto número de vueltas. En estos dispositivos, las FEMs primaria y secundaria \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 están relacionadas con los números de espiras o vueltas N_1 y N_2 en los devanados por medio de

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

EGUNTAS

La FEM inducida en un circuito depende de una serie de factores. Exprese tantos como pueda.

En cada uno de los casos que se muestran en los diagramas marcados (a), (b) y (c), indique claramente el sentido de la corriente inducida en el circuito de línea punteada. (Ver pág. 869). Una espira circular de alambre se coloca entre los polos de un electroimán. ¿Qué orientaciones produce un flujo magnético máximo o mínimo?

Explique cuidadosamente la diferencia entre inducción magnética y flujo magnético. Dé un ejemplo en el que la inducción magnética sea constante pero el flujo magnético no lo sea. Se coloca una espira circular cerca de un alambre recto largo, que lleva una corriente que aumenta constantemente en el tiempo. En qué sentido fluirá la corriente en la espira? Explique claramente por qué la frecuencia angular ω de rotación de una bobina en un campo magnético determina la magnitud de la tensión inducida, al igual que su variación en el tiempo. ¿Qué otros factores afectan la magnitud de este voltaje?

Puede expresar ejemplos de fenómenos que obedezcan una ley análoga a la de Lenz en el sentido de que un efecto tienda a oponerse a la causa que lo produjo?

Explique muy brevemente el significado de EM de autoinducción.

Puede explicar por qué una FEM autoinducida siempre es proporcional a la rapidez de cambio de la corriente que pasa por un circuito? ¿De qué factores depende la autoinductancia L ?

¿Cómo cambia la inductancia por unidad de longitud de un solenoide dado si se duplica la longitud del conductor que se utiliza en el devanado?

Si la FEM de un generador produce una corriente alterna. Describa varias maneras de convertir ésta en una corriente unidireccional pulsante.

Se conecta un circuito $R-L$ a una batería. Exprese si la constante de tiempo depende del voltaje de la fuente. ¿Es posible que la tensión de inductancia exceda la FEM de la batería? ¿Son algunos razonamientos convincentes que demuestren que una inductancia puede almacenar energía?

Suponga que se aplican 250 V de cc al primario de un transformador, en vez una tensión de cc. Describa lo que ocurre.

15. Se construye un transformador de manera, que la FEM del secundario sea solamente la mitad de la FEM del primario. Emite comentarios acerca de este tipo de construcción.

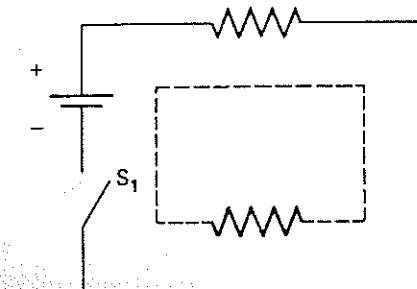
PROBLEMAS

1. Una espira rectangular de alambre de 12.0 cm por 8.0 cm se coloca entre los polos de un electroimán que produce un campo magnético uniforme en la región donde está la espira. Inicialmente, el electroimán está inactivo y el campo magnético en esta región es cero. Luego se hace que fluya una corriente, que crezca linealmente, en las bobinas del electroimán, lo que produce un campo magnético en la región, el que aumenta con rapidez constante desde cero hasta 1.25 Wb/m^2 en un intervalo de tiempo de 0.15 s. (a) ¿Cuál es la magnitud de la FEM inducida en la espira durante este periodo? (b) Si se reemplaza la espira por una bobina rectangular de alambre que tenga 250 espiras, cada una de las cuales tiene las mismas dimensiones que la espira original, determine la FEM inducida en la bobina.

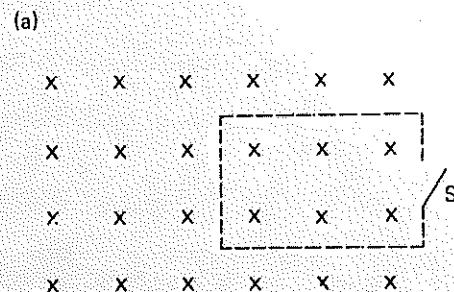
2. Se coloca una espira circular de alambre flexible de 15.0 cm de radio y 0.01Ω de resistencia en un campo magnético uniforme de 0.80 Wb/m^2 . En los extremos opuestos de un diámetro se aplican a la espira fuerzas iguales y opuestas deformándola hasta producir un par de conductores rectos paralelos de separación despreciable, en un intervalo de tiempo de 0.025 s. Calcule (a) la FEM media inducida en la espira, (b) el valor medio de la corriente que fluye, (c) el trabajo necesario para efectuar la deformación.

3. Un alambre recto de cobre con 2 m de longitud se mueve a 1.5 m/s en dirección perpendicular a su longitud y a un campo magnético uniforme de 0.7 Wb/m^2 . Evaluar la FEM inducida entre los extremos del alambre. Si tales extremos se unen completando un circuito a través de una resistencia de 3Ω , indique la rapidez a la que debe hacerse el trabajo para mantener el alambre moviéndose con la velocidad constante de 1.5 m/s.

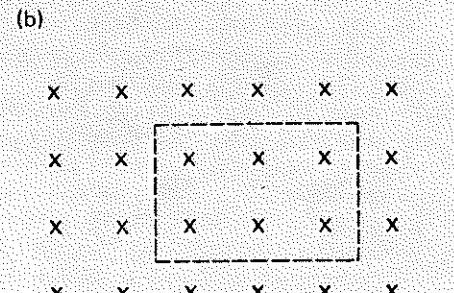
4. Una barra de cobre de 20 cm de longitud es perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.5 Wb/m^2 . Como resultado de su movimiento perpendicular a su longitud, existe una FEM de 0.10 V entre sus extremos. Determine la velocidad con la que se mueve la barra a través del campo.



Al cerrar el interruptor S_1



Al cerrar el interruptor S_2

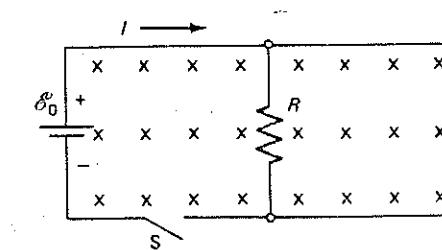


$$\text{Cuando } \frac{dB}{dt} = -3t^2$$

(c)

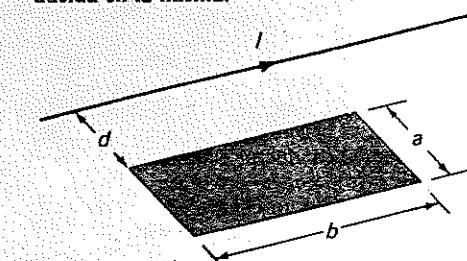
5. Una espira circular de alambre de 10 cm de radio está orientada con su plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.2 Wb/m^2 . Se da una vuelta de 180° a la espira en un intervalo de tiempo 0.5 s. (a) Halle la FEM media inducida durante este proceso. (b) Dé el campo eléctrico promedio en la espira. (c) Si la resistencia de la misma es de 2.0Ω , calcule el trabajo, que se necesitó para dar vuelta a la espira.

6. Un circuito eléctrico contiene una pila o batería con FEM δ_0 y un resistor con resistencia R , longitud l y masa m , que puede moverse lateralmente con libertad, según se indica en la siguiente figura. Como se ilustra, hay un campo magnético uniforme B perpendicular al plano del circuito. Cuando se cierra el interruptor S , puede suponerse que la corriente en R es δ_0/R en $t = 0$. Demuestre que la corriente inducida está dada por $i_{\text{ind}} = \delta_0^2/B^2 l/(mR^2)$, a condición de que t no sea demasiado grande. Indique lo que sucede para un valor grande de t .



7. Un solenoide largo con n vueltas por unidad de longitud lleva una corriente que varía en el tiempo de acuerdo con $I = I_0 \sin \omega t$. Dentro del solenoide se coloca una pequeña bobina circular de N espiras. Los ejes de la bobina y del solenoide son paralelos y cada una de las espiras de la bobina tiene área A' y resistencia R' . Calcule (a) la FEM inducida en la bobina pequeña, (b) la corriente inducida y (c) la intensidad de disipación de energía en la bobina pequeña.

8. Se coloca una espira rectangular de alambre cerca de un conductor largo y recto en el que la corriente aumenta linealmente con el tiempo, de acuerdo con $I = \alpha t$, como se muestra en la figura. Obtenga una expresión para (a) el flujo magnético a través de la espira y (b) la FEM inducida en la misma.



9. Una sola espira de alambre con resistencia R inicialmente tiene un flujo magnético Φ que la atraviesa. Después de un cierto intervalo de