1. Komplexe Zahlen
2. Lineare Gleichungssysteme
3. Matrizen
4. Skalarprodukt
5. Inverse einer Matrix
6. Vektorräume
6.1 Span/Erzeugenden System / Basis / Basiswechsel
6.4 Kern/Bild
7. Normen
8. Orthogonale Basen
8.3 Projektion
10. Lineare Abbildungen
11. LR-Zerlegung
11. Methode kl. Quadrat
12. Determinante
13. Eigenwerte/vektor
14. Singulärwertzerlegung

Jonas B.

Lineare Algebra

1. Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

- Imaginäre Teil i $\quad (i^2 = -1 \;/\; i^3 = -i \;/\; i^4 = 1 \;/\; i^5 = i)$
- $z = x + y \cdot i$
- Addition: $z = x + iy \;+\; w = u + iv \Rightarrow z + w = x + u + i(y + v)$
- Multiplikation: $z = x + iy \cdot \alpha \Rightarrow z \cdot \alpha = \alpha x + \alpha i y$
- Multiplikation: $z = x + iy \cdot w = u + iv \Rightarrow z \cdot w = (u + iv) \cdot (x + iy) =$
  $= ux + uiy + xiv + i^2 vy = ux + i(uy + xv) + i^2 \cdot vy = ux - vy + i(uy + xv)$

- Konjugierte komplexe Zahl: $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$
- Betrag von komplexen Zahlen: $z = a + bi \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (|z| = |\bar{z}| \;/\; |z \cdot w| = |z| \cdot |w|)$
- Division: $\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{\bar{w}^2}$ | Bsp: $\frac{3+i}{1+i} = \frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(3+1)+(1-3)}{2} = 2 - i$
- Polarform: $\underbrace{z = a + b \cdot i}_{\text{Normalform}} \Leftrightarrow r \cdot [\cos(e) + i \cdot \sin(e)] \Leftrightarrow \underbrace{r \cdot e^{i \cdot e}}_{\text{Eulerform / Polarform}}$
  $r = \sqrt{a^2 + b^2} \;|\; e = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \;|\; e^{i \cdot e} = \cos(e) + i \sin(e)$

2. Lineare Gleichungssysteme

- Anzahl Lösungen:
  - Keine: Nach Gaussen, wenn links vor "=" überall 0 stehen, und rechts nach "=" eine Zahl $\neq 0$
  - Eine: Wenn nach Gaussen Dreiecksform gegeben ist, auch wenn |Gleichungen| = |Unbekannten|
  - Unendlich: Nach Gaussen, wenn es Nullzeilen gibt, wo vor und nach "=" alles "0" ist

Verträglichkeitsbedingung

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\rightarrow x_2$ und x_5 freie Variabeln

- Freie Variabeln können selbst gewählt werden (Variable hat kein Pivot)
- Rang ist Anzahl Pivotelemente $\quad$ Rang $\leq$ Variabeln, Rang $\leq$ Zeilen
- Anzahl freier Variabeln: Variabeln − Rang
- Lösungsmenge ist eindeutig: $m = n =$ Pivots
- Homogenes Gleichungssystem = Rechte Seite nur lauter 0en
  - $\hookrightarrow$ Homogenes Gleichungssystem besitzt triviale Lösung: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$

2.1 Symmetrien Matrix

- A symmetrisch & B symmetrisch $\not\Rightarrow$ A·B symmetrisch
- A symmetrisch $\Rightarrow A^T \cdot A$ symmetrisch
- B $m \times n \Rightarrow B^T \cdot B$ symmetrisch

3. Matrizen

Typen:
- Nullmatrix := Jedes Element $=0$
- Quadratische Matrix := Zeilen = Spalten / $m=n$
- Diagonalmatrix := Alle Elemente $=0$ ausser die Diagonale
- Identitätsmatrix / Einheitsmatrix := $\begin{pmatrix}1&&0\\&1&\\0&&1\end{pmatrix}$ (Diagonale $=1$) $I\cdot A = A\cdot I = A$
- Symmetrische Matrix := $A = A^T$ $\begin{pmatrix}1&3\\3&6\end{pmatrix}$ ← Muss noch konjugiert werden
- Hermitesche Matrix := $A = A^H$ $\begin{pmatrix}1&i\\-i&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&i\\-i&3\end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix}1&-i\\i&3\end{pmatrix}}$
- Obere Dreiecksmatrix := $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&0&4\end{pmatrix}$ - Untere Dreiecksmatrix := $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{pmatrix}$

- Schiefsymmetrische Matrix := $A^T = -A$ (Diagonale $=0$) $\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&3\\2&-3&0\end{pmatrix}$
- Matrixmultiplikation: $A = m\times n$ $B = k\cdot l$ $\Rightarrow$ Dimension $= m\times l$
  Bedingung $= n=k$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 2 & 3\\ & & & 0 & 4 & 6\\ & & & 2 & -1 & 8\\ \hline 4 & 2 & 1 & 6 & 15 & 32\\ 0 & -2 & 4 & 8 & -12 & 20\end{array}$$

- Rechenregeln: 1. $(A^T)^T = A$ / $(A^H)^H = A$ / 2. $(\alpha\cdot A)^T = \alpha\cdot A^T$ / $(\alpha\cdot A)^H = \alpha\cdot A^H$
  3. $(A+B)^T = A^T + B^T$ / $(A+B)^H = A^H + B^H$
  4. $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$ / $(A\cdot B)^H = B^H\cdot A^H$
- Transponierte-Matrix: $\begin{pmatrix}5&7&3\\8&16&9\\22&1&7\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}5&8&22\\7&16&1\\3&9&7\end{pmatrix}$
- Hermitesche-Matrix: $(\overline{A})^T$ oder $\overline{(A^T)}$ für komplexe Zahlen
- Produkt zweier symmetrischen Matrizen normalerweise nicht symmetrisch
- Wenn $A\cdot B = B\cdot A$ → Matrix ist symmetrisch
- Reguläre Matrix: Quadratische $n\times n$ Matrix, wo Rang = Anz. Unbekannten → Es gibt keine Nullzeile
- Singuläre Matrix: Es gibt linear abhängige Zeilen → Nullzeilen beim Gaussen

4. Skalarprodukt (Zusammenhang zweier Vektoren durch Zahl (=Skalar))

- $\langle a,b\rangle := \underbrace{\|a\|\cdot\|b\|}\cdot\cos(\varphi)$ $(\cos(0°)=1$ / $\cos(90°)=0)$
  $\|$ $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots}$ $\underbrace{\text{(=Betrag / euklidische Länge)}}_{\text{2er-Norm}}$
- $\langle a,b\rangle : a^T\cdot b$
- $\langle x, y+z\rangle = x^T\cdot(y+z) = x^Ty + x^Tz = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$
- $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = x^H\cdot y = (x^H\cdot y)^T = y^T(x^H)^T = \overline{y^H}\cdot(\overline{x}^T)^T = \overline{y^H\cdot\overline{x}} = \overline{y^H\cdot x} = \overline{\langle y,x\rangle}$
- $\langle x,x\rangle \geq 0 = \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$ / $\langle x,x\rangle = x^H\cdot x = \sum_{k=1}^{n}\overline{x_k}\cdot x_k = \sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 \geq 0$
- 3 Bedingungen des Skalarproduktes: 1. Linearität im 2. Faktor
  $\langle x, \alpha(y+z)\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \alpha\langle x,z\rangle$
  2. Symmetrie: $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
  3. Positive Definitheit: $\langle x,x\rangle \geq 0$
  $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$
- Innere Produkt: Skalarprodukt $x^T\cdot y$
- Äusseres Produkt: $x\cdot y^T$

5. Inverse einer Matrix (= Kehrmatrix)

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ → n×n Matrix (quadratisch)
- Reguläre Matrizen sind invertierbar, singuläre Matrizen nicht
- Die Inverse einer Matrix ist eindeutig: $X = XI = X(AY) = (X \cdot A) \cdot Y = IY = Y$
- $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow_{\cdot 3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right)$ (I unter $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ der ersten Matrix; I und A^{-1} unter der letzten Matrix)
- Rechenregeln: 1. $(A^{-1})^{-1} = A$ / 2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ /
  3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ / $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$

6. Vektorräume

- Rechenregeln: • Assoziativgesetz: $(x+y)+z = x+(y+z)$ / • Neutralelement: $x+0 = 0+x = x$ } +
  • Inverses: $x + x^{-1} = 0$ / • Kommutativität: $x+y = y+x$
  • { • Distributivgesetz: $\alpha \cdot (x+y) = \alpha x + \alpha y$ / • Assoziativität: $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
  • Neutralelement: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
- Beispiele für VR: $\mathbb{K}^n$, m×n Matrizen $\mathbb{K}^{m \times n}$, P_n (Polynome vom Grad n)
- Untervektorraum ist eine nichtleere Teilmenge vom VR
  U1: Abgeschlossenheit: $\forall u, v \in UVR: u + v \in UVR$
  U2: Abgeschlossenheit: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, u \in UVR: \lambda \cdot u \in UVR$
  ↳ Jeder UVR ist wieder Vektorraum, darum muss man nur diese zwei Bedingungen prüfen, ob es sich um ein VR handelt

6.1 Span bzw. lineare Hülle

- Menge der Linearkombinationen eines Vektorraums
- $\mathbb{R}^3 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$
- Beispiel ist linear unabhängig, da wir alle Vektoren als Matrix schreiben können und dann Zeilenstufenform bekommen

6.2 Erzeugenden System und Basis

- Falls jeder Vektor als Linearkombination des spans dargestellt werden kann, ist es ein erzeugenden System des VR V
- Ist span ein minimales erzeugenden System, dann nennt man es Basis ($\mathbb{R}^3$ hat 3 Vektoren / P_4 hat 5 Vektoren)
- Wann ist es eine Basis: • Linear unabhängig / • minimal erzeugenden System
  ($\dim(B) = |B|$) ⇒ • Anzahl Zeilen entspricht Anzahl der Vektoren
- Monombasis von $P_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$

6.3. Basiswechsel

$\to T_A^A = I$ $\to T_B^A \cdot a = b$

- Transformationsmatrix beschreibt den Wechsel von Basis A → Basis B
- Basis $A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ $B = \left\{ \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \right\}$

$$T_B^A = (\text{"B"} \mid \text{"A"}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{I} \quad \underbrace{}_{T_B^A}$$

$$T_B^A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_A^B = \left(T_B^A\right)^{-1}$$

- Ein Basiswechsel hat eine Koordinatentransformation zur Folge

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{x \in V} & \xrightarrow{\text{lin. Abbildung}} & y \in W \\
K \downarrow \; \uparrow K^{-1} & & \\
\boxed{\hat{x} \in \mathbb{K}^n} & \xrightarrow[A]{\text{Abbildungsmatrix}} & \hat{y} \in \mathbb{K}^m \quad \} \text{Koordinaten bez. Alter Basis} \\
T_B^A \downarrow \; \uparrow T_A^B & & S^{-1} \downarrow \; \uparrow S \quad \} \text{Koordinatentransformation} \\
\boxed{\hat{x}' \in \mathbb{K}^n} & \xrightarrow[B]{\text{Abbildungsmatrix}} & \hat{y}' \in \mathbb{K}^m \quad \} \text{Koordinaten bez. neuer Basis}
\end{array}$$

6.4. Kern und Bild

- $\dim(x) = \dim(\text{Kern}(x)) + \dim(\text{im}(x))$
- Kern ist die Menge aller Vektoren, so dass $Fx = 0$ (Nullspace)
- Bild gibt an, welche Menge an Lösungen auftreten können (Wertebereich)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Gaussen}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

} Image hat 3 Vektoren } Rang
} Kern hat zwei Vektoren
} dim(A)

- Kern

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Freie Parameter

$6z + 7 = 0 \Rightarrow z = -7/6$
$y + 5 \cdot (-7/6) + 7 \Rightarrow y = -7/6$
$x + 4 \cdot (-7/6) + 3 \cdot (-7/6) + \ldots \Rightarrow x = \frac{37}{6}$

↳ Jeder freie Parameter ein Mal = 1 und alle anderen f. Parameter = 0

- $\text{Kern}(\sim) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 37/6 \\ -7/6 \\ -7/6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- Bild, Rang 3: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Im}(\sim) = \text{span} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Wir brauchen nur 3x3 Matrix, da alles andere nur Linearkombination davon ist.

7. Normen

- Ist eine Funktion $\|\cdot\|$: Vektorraum $\rightarrow \mathbb{R}$
- Besitzt folgende Eigenschaften
  - Positiv definit: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  - Homogen: $\|\alpha \cdot x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$
  - Dreiecksungleichung: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- Besitzt ein VR eine Norm $\Rightarrow$ normierter Vektorraum
- Eins-Norm: $\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + |v_3| + \dots + |v_n|$ $\quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
- Zwei-Norm: $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots v_n^2}$
- Maximum-Norm: $\|v\|_\infty = \max(|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|)$

- Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

8. Orthogonale- / orthonormale Basen

$\rightarrow$ Test: $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$

- Orthogonale Basis = Alle Vektoren sind im 90°-Winkel zueinander
  - $\langle b_k, b_l \rangle = 0$, falls $k \neq l$
  - Man kann leicht Inverse berechnen: $M^{-1} = M^T$

- Orthonormale Basis = Zusätzlich sind Vektoren normiert (Länge = 1)
  - $\|b_k\| = 1$
  - Erleichtert uns berechnung von Transformationsmatrix und Koordinatenvektoren

  $\rightarrow$ Test: $\|\cdot\| = 1$

- Transformationsmatrix: $A = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\quad B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow T_A^B = \left(\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 1\\1 & 0\end{matrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

- Koordinatenvektor

8.1. Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsalgorithmus

$$b_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

$$\hat{b}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle \cdot b_j$$

$$b_k := \frac{\hat{b}_k}{\|\hat{b}_k\|}$$

$$b = \left\{\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}\right\}$$

$$b_1 = \frac{\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}$$

$$\hat{b}_2 = a_2 \langle b_1, a_2 \rangle \cdot b_1 = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} - 8/5 \cdot \begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}124/25\\93/25\end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{\hat{b}_2}{|\hat{b}_2|} = \frac{\begin{pmatrix}124/25\\93/25\end{pmatrix}}{31/5} = \begin{pmatrix}4/5\\3/5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow b_{orth.} = \left\{\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4/5\\3/5\end{pmatrix}\right\}$$

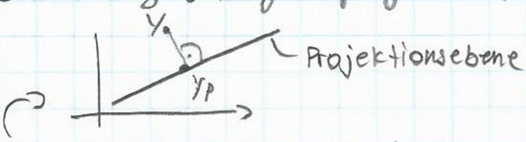
8.2 Parsevalsche Formel

- Sei V ein VR mit $\dim(V)=n$ und $(b_1, \dots, b_n)$ eine ONB von V
- Für zwei Vektoren x, y wissen wir
  ↳ $\lambda_k = \langle b_k, x \rangle$ $\mu_k = \langle b_k, y \rangle$, $\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_n)$ und $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$
- Die parsevalsche Formel erlaubt uns nun die folgende Äquivalenz

$\langle x, y \rangle = \langle \lambda, \mu \rangle$ → Längentreu: $\|x\| = \|y\|$
Winkeltreu: $\measuredangle(x, y) = \measuredangle(\lambda, \mu)$

9. (Orthogonal)projektion

- Eine lineare Abbildung $P: \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^m$ heisst Projektion, falls gilt
  ↳ $P^2 = P$ (Wenn ich 3D Vektor auf 2D Ebene projeziere, und dann nochmals, bleibt er gleich → Ich kann nicht >1 Projezieren)
- Falls zusätzlich der Nullraum senkrecht zum Bildraum steht $\mathcal{N}(P) \perp \mathcal{R}(P)$
  ↳ orthogonalprojektion ($I-P$ ist wieder orth. Projektor) ($P^H = P$)
- Berechnung Orthogonalprojektion: A mxn Matrix. Orthogonale Projektion P_A auf den Bildraum von A

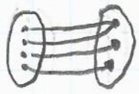
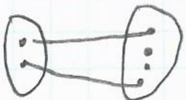
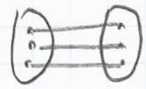


↳ $P_A := A(A^H \cdot A)^{-1} \cdot A^H$

- Orthogonalprojektion liefert kürzesten Weg von $y \to P_y$

Jonas B.

10. Lineare Abbildungen

- Bewahren lineare Struktur, wenn gilt: ① $F(x+x') = F(x) + F(x')$
  ② $F(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot F(x)$
- y (= Wertebereich)
- x (= Definitionsbereich) $\Big\}\ x \to y$
- Surjektiv:  Injektiv:  Bijektiv: 
- Jede lineare Abbildung lässt sich als Abbildungsmatrix A darstellen $Ax = y$.
  ↳ Abbildungsmatrix besteht aus Basis von x, welche linear abgebildet worden sind.
- $f: \underbrace{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2}_{\begin{pmatrix} 2x-3y \\ x-2y+z \end{pmatrix}}$ / $A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ / $A = \left(f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^{*} f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right)$ / $^{*} f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
  ↳ Basis von $\mathbb{R}^3$

11. LR-Zerlegung

$A = L \cdot R$ (L = Linke untere Dreiecksmatrix / R = Rechte obere Dreiecksmatrix)

↳ $Ax = b$

$\overbrace{L \cdot R}^{} \cdot x = b$ 1. Berechne LR-Zerlegung von A

$L\underbrace{y}_{} = b$ 2. Löse y durch Vorwärtseinsetzen

$R \cdot x = y$ 3. Löse x durch Rückwärtseinsetzen

- Wenn noch Zeilenvertauschungen dazukommen ⇒ Permutationsmatrix
  ↳ $P \cdot A = L \cdot R$
- Beispiel $B = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -3/2 & 3 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{3} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -3/2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \Bigg\}\ 1.$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -3/2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & -3/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}}^{y} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}^{B} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 \cdot y_1 = 1 \Rightarrow 1 \\ -1/2 \cdot 1 + 1 \cdot y_2 = 2 \Rightarrow 2{,}5 \\ 1/2 - 1/3 \cdot 2{,}5 + y_3 = 3 \Rightarrow 10/3 \end{array} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ 10/3 \end{pmatrix} \Bigg\}\ 2.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & -3/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ 10/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + 15 + 80/3 = 1 \Rightarrow 2x_1 = -\frac{122}{3} \ /:2 \Rightarrow x_1 = -\frac{61}{3} \\ -3/2\, x_2 + 10 = 2{,}5 \Rightarrow 3/2\, x_2 = 15/2 \ /\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = 5 \\ x_3 = 10/3 \end{array} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -\frac{61}{3} \\ 5 \\ 10/3 \end{pmatrix} \Bigg\}\ 3$$

11. Methode der kleinsten Quadrate (für überstimmte GS)

- Gleichungen > Unbekannte => Fehler minimieren $\hat{=}$ Residuum
- Residuum: $r := b - Ax$ => Residuumnorm $\langle r, r \rangle_2$
- Konditionszahl: $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$
- Konvertierung in Matrizen: $f(x) = k \cdot x + d$ ← Achsenabschnitt
  ↑ Steigung (bei k)

(2, 15) (3, 10) (4, 15) (5, 9) (6, 10) (7, 9

↳ $15 = 2k+d$ / $10 = 3k+d$ / $15 = 4k+d$ / $9 = 5k+d$ / $10 = 6k+d$ / $9 = 7k+d$

↳ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} k \\ d \end{pmatrix} = y = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 15 \\ 9 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$

Variante 1: Normalengleichung (Für grosse, fast lin. abhängige Mat. ungeeignet)

- $Ax = P_A y = A\,(A^H \cdot A)^{-1} \cdot A^H \cdot y$

$$\Rightarrow x = \underbrace{\left[(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \right]}_{\text{Pseudoinverse}} \cdot \underbrace{y}_{\binom{k}{d}} \quad (= \text{Normalengleichung}) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix} \begin{matrix} \to k \\ \to d \end{matrix}$$

Variante 2: QR-Zerlegung $A = Q \cdot R$

orthonormale Matrix (Q)
obere Dreiecksmatrix (R)

a_1

- Reduzierte QR-Zerlegung
  1. Gram-Schmidt aus $A \to Q$
  2. Berechne R wie folgt: $r_{11} := \|a_1\| = \sqrt{\langle a_1, a_1 \rangle}$

  ↳ Alternativ: $A = QR$ $\quad r_{kk} := \|\hat{q}_k\|$

  $R = Q^T \cdot A \quad r_{jk} := \langle q_j, a_k \rangle$

- Vollständige QR-Zerlegung
  1. Wir fügen linear abhängige Vektoren zum orthogonalisiertem Q hinzu, bis Q quadratisch ist.
     ↳ Die neu hinzugefügten Vektoren mittels Gram-Schmidt orthogonalisieren
     ↳ $\hat{Q} = (Q \mid Q_{neu})$
  2. Nun noch $\hat{R}$ berechnen: $A = \hat{Q} \cdot \hat{R}$
     $\hat{R} = \hat{Q}^T \cdot A$ ← ist eigentlich $\hat{Q}^{-1}$, aber orthonormal

- Approximation
  $A = \hat{Q} \cdot \hat{R}$: $\left((\hat{Q} \cdot \hat{R})^H \cdot (\hat{Q} \cdot \hat{R}) \right)^{-1} \cdot (\hat{Q} \cdot \hat{R})^H$

  $\Leftrightarrow (\hat{R}^H \cdot \hat{Q}^H \cdot \hat{Q} \cdot \hat{R})^{-1} \cdot (\hat{R}^H \cdot \hat{Q}^H) = \hat{R}^{-1} \cdot \hat{R}^{H-1} \cdot \hat{R}^H \cdot \hat{Q}^H = \hat{R}^{-1} \cdot Q^H$

  ↳ $\underline{x = \hat{R}^{-1} \cdot \hat{Q}^H \cdot y}$

Gibt es nur für quadratische Matrizen! Jonas B.

12. Determinante $\det(A)$ oder $|A|$

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det(A_{[k,j]})$

- Determinante $= 0 \Leftrightarrow$ Matrix singulär
- Determinante $\neq 0 \Leftrightarrow$ Matrix regulär

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- Wenn A obere/untere Dreiecksmatrix: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$ Produkt aller Diagonalelemente
- Zeilenvertauschung ändert Vorzeichen: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ (Spalten auch!)
- Multiplikation einer Zeile: $\det\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ / $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$
- Determinante von skalaren Vielfachen $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$
- Blockmatrix: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$
- Schiefsymmetrische Matrix: Wenn ungerade Anzahl an Zeilen/Spalten: $\det() = 0$
  ↳ $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ Wenn gerade Anzahl an Zeilen/Spalten: $\det() \neq 0$
  $\det(A) \neq -\det(A)$ $A = (a) = \det(a) = a$
- Determinante berechnen: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det(A) = ad - bc$
  ↳ Bei grösseren Systemen: $A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}$ $\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$
  Laplaceschen Entwicklungssatz:

1. Wir suchen uns Zeile/Spalte mit möglichst vielen Nullen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = -0 \cdot \det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{6}}$$

Cramer'sche Regel (Finden von Unbekannten)

$$\left.\begin{matrix} 2x + 1y + 1z = 3 \\ 1x - 1y - 1z = 0 \\ 1x + 2y + 1z = 0 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ } Ich will nun y berechnen

$$d_y = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -6 \quad \text{und} \quad d = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{d_y}{d} = \frac{-6}{3} = \underline{\underline{-2 = y}}$$

13. Eigenwerte und Eigenvektoren

$A \cdot v = \lambda \cdot v$ — Eigenvektor (v), Eigenwert (λ)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

  Eigenvektor von A, da nur skaliert wird Eigenwert: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$
- Ein Eigenwert hat unendlich viele Eigenvektoren: $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$
- Berechnung Eigenwerte

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow 3x = \lambda \cdot x \Rightarrow 3x - \lambda x = 0 \Rightarrow \overbrace{(3-\lambda)}^{x} \cdot x + \overbrace{0}^{y}\, y$

$\hookrightarrow -9x + 6y = \lambda \cdot y \Rightarrow -9x + 6y - \lambda \cdot y = 0 \Rightarrow \underbrace{(-9)}_{x}\, x + \underbrace{(6-\lambda)}_{y} \cdot y$

Charakteristisches Polynom

$\hookrightarrow A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -9 & 6-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -9 & 6-\lambda \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow (3-\lambda) \cdot (6-\lambda) - (-9) \cdot 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\lambda_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ → $\lambda_1 = 3$, → $\lambda_2 = 6$ } Menge aller Eigenwerte (= Spektrum)

- Berechnung Eigenvektoren

- $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow \overbrace{(A - \lambda I) \cdot v = 0}^{\text{Kern berechnen}}$
- $\lambda_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = 1$, $y = -9 + 3y = 0 \Leftrightarrow 3y = 9 \Leftrightarrow y = 3$ } $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = 6$: $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x = -3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y = 1$ } $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- A diagonalisieren
  - Wenn charakteristische Polynom völlig in lineare Faktoren zerfällt (→ keine $\mathbb{C}$)
  - Wenn $\underbrace{\text{geometrische Vielfachheit}}_{\text{Anzahl Vektoren}} = \underbrace{\text{Algebraische Vielfachheit}}_{\text{Anzahl gleicher Nullstellen}}$ ⟺ Für jeden Eigenwert
  - Wenn dies gilt, dann ist A ähnlich zu einer symmetrischen Matrix Λ, welche diagonal ist

$\hookrightarrow A \cdot W = W \cdot \Lambda$

$\hookrightarrow A = W \cdot \Lambda \cdot W^{-1}$ } Spektralzerlegung / Eigenwertzerlegung

$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{W} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{W^{-1}}$

W: Eigenbasis → Eigenvektoren; Λ: Eigenwerte

14. Singulärwertszerlegung

- Matrix muss nicht diagonalisierbar sein

1. $B = A^T \cdot A$
2. Berechne die Eigenwerte von B
3. Wir ordnen die erhaltenen Eigenwerte der Grösse nach
4. Wir finden die Eigenvektoren für die Eigenwerte (Eigenbasis=V)
5. Σ hat die gleichen Dimensionen wie A und besteht aus der Wurzel der Eigenbasis, welche in Schritt 4 berechnet wurde
6. Wir berechnen $U = A \cdot V \cdot \Sigma^{-1}$

$\Rightarrow A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$

$\hookrightarrow$ Eigenbasis

$\hookrightarrow A \cdot V \cdot \Sigma^{-1}$

$\hookrightarrow \sqrt{\lambda}$ (Eigenwerte von $A^T \cdot A$)

15. Anhang

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Natürliche
$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ Ganze
$\mathbb{Q} = \{-1/2, 1/2, 1, \ldots\}$ Rationale
$\mathbb{R} = \{\pi, e, \sqrt{2}\}$ Reelle
$\mathbb{C} = \{x + iy\}$ Komplexe

- <u>Cauchy-Schwarz-Ungleichung</u> $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$\alpha \cdot x + y$

$\Leftrightarrow 0 \leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle = \langle \alpha x, \alpha x + y\rangle + \langle y, \alpha x + y\rangle$

$= \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot \langle x, x\rangle + \bar{\alpha} \cdot (x, y) + \alpha \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$

Wir nehmen an $x \neq 0$ und wählen $\alpha = \frac{-\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}$

Nach Multiplikation mit $\langle x, x\rangle$ folgt: $0 \leq |\langle x, y\rangle|^2 - |\langle x, y\rangle|^2 - |\langle x, y\rangle|^2 + \langle y, y\rangle \cdot \langle x, x\rangle$

$= 0 \leq -|\langle x, y\rangle|^2 + \|y\|^2 \cdot \|x\|^2$

- <u>Winkel zwischen zwei Vektoren</u>: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$

- <u>Rotationsmatrix in 2D</u>: $R_\alpha \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ · Gegen Uhrzeigersinn R_α · Mit Uhrzeigersinn R_α^T

- <u>Rotationsmatrix in 3D</u>: $R_{\alpha x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ | $R_{\alpha y} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ | $R_{\alpha z} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- <u>Kronecker's Delta</u>: $\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{Bmatrix}$

- <u>Beweis: Distanz minimal, wenn $(Ax - b) \perp R(A)$</u>

$\langle Ax - b, Ax' - Ax\rangle = \langle Ax - b, A(x' - x)\rangle = 0$

$\|(Ax - b) + (Ax' - Ax)\|^2 = \|Ax - b\| + \|Ax' + Ax\|^2$

$\Rightarrow \|Ax' - b\|^2 = \|Ax - b\|^2 + \underbrace{\|Ax' - Ax\|^2}_{0 \leq \|Ax' - Ax\|^2}$

$\Rightarrow \|Ax - b\|^2 \leq \|Ax' - b\|^2$

- <u>Anzahl Permutationen</u>: $n!$

- <u>Signum einer Permutation</u>: $\mathrm{sign}(p) = \begin{cases} +1 & \text{wenn Anz. Permutationen gerade} \\ -1 & \text{wenn Anz. Permutationen ungerade ist} \end{cases}$

- <u>Dreiecksungleichung</u>: $|a + b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow a \leq |a|$ und $b \leq |b| \Leftrightarrow (a + b) \leq (|a| + |b|)$

- A voller Rang $\Leftrightarrow$ bijektiv / A lin. unabhängig $\Leftrightarrow$ injektiv /