Jonas B.

Analysis II Zusammenfassung

Stetigkeit und Grenzwert

- Von allen Seiten muss Grenzwert der selbe sein

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}}$
2. $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}}$
3. $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y=x^2}}$
4. $x\to 0$, $y=m\cdot x$
5. Polarkoordinaten
   $x = r\cdot\cos(\theta)$
   $y = r\cdot\sin(\theta)$
   $x^2+y^2=r^2$
   ↳ Darf nicht von θ abhängig sein

6. Eingrenzen / Sandwich-Lemma

$$\lim_{x\to 0}\Big|\underbrace{\frac{x}{x+7}}_{<1}\cdot\sin(x)\Big| < \lim_{x\to 0}|\sin(x)|$$

↳ Absolutbetrag gilt von allen Seiten

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^n)}{x^n}\to 0$

Richtungsableitung

- Funktion
- Stelle A
- Vektor r, der die Richtung angibt (Länge = 1)

1. Bestimme Gradienten
2. Setze Punkt A in Gradienten ein
3. Bilde Skalarprodukt des Gradienten mit normierten Vektor r

- $D_r f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h\cdot v)-f(x)}{h}$ / $-t \to f(x+t\cdot v) \Rightarrow t=0 \triangleq D_r f(x)$

Partielle Ableitung

- $\frac{\partial f}{\partial x}$

Gradient

- $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$ / $-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\int_a^b f(x,y,z) \Leftrightarrow \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\cdot f(x,y,z)$

Kettenregel

Totale Differential

- $df = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot dx_i$

- ~~Das~~ totale Differential ist die Verallgemeinerung der Richtungsableitung, denn dieses ist eine Formel, wo man den gewünschten Punkt und die Richtung einsetzen kann, und dann die Veränderung des Funktionswertes bekomme.
- Bei der Richtungsableitung kann ich nur sagen, in welche normierte Richtung mit Länge 1 sich die Steigung verhält

- $\underbrace{\nabla f}_{\text{Vektor mit Funktionen}} \longrightarrow \underbrace{\nabla f(p)}_{\text{Vektor mit Zahlen}} \longrightarrow \underbrace{\langle \nabla f(p), \vec{r} \rangle}_{\text{Skalar / Richtungsableitung}}$

Geometry of Gradient

- With no points inserted: tangent-plane at (x_0, y_0)
- With points inserted: Points at the greatest ascend
  - ↳ Each component of the gradient tells one, how fast the function is changing with respect to the standard basis

$$\text{grad}(f(a)) \cdot \vec{v} = |\text{grad}(f(a))| \cdot \overset{1}{|\vec{v}|} \cdot \cos(\theta)$$
$$= |\text{grad}(f(a))| \cdot \underbrace{\cos(\theta)}_{\cos(0) = 1} = |\text{grad}(f(a))|$$

- Is f differentiable at x_0?
  1. Is f continous at x_0?
  2. Is f partial differentiable at x_0?

  $\}$ f is total differentiable

Lines and Planes

- Line: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$ (2 Points)
- Plane: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}_{\vec{OA}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}}_{\vec{AB}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix}}_{\vec{AC}}$ (3 Points) (Parameterform)

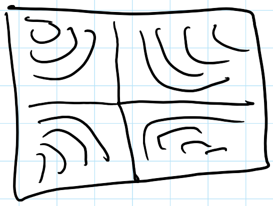
  - $ax + by + cz + d = 0$ (Koordinatenform)

    · Normalenvektor steht senkrecht/orthogonal auf Ebene

    1. $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 1x + 2y + 3z + d = 0$

    2. Punkt in Gleichung einsetzen und auf d auflösen

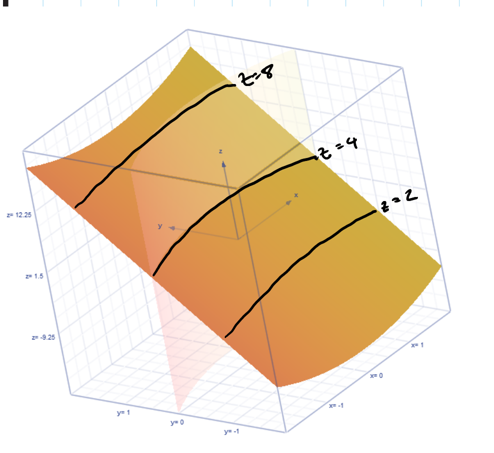
Höhenlinien



- Höhenlinien können sich nicht schneiden
- <u>Beispiel</u>: $f(x,y) = x^2 + 8y$

$$x^2 + 8y = z \quad / \text{Höhe } 4 = z$$

$$x^2 + 8y = 4$$



$$8y = 4 - z \quad / :8$$

$$y = \frac{4 - z}{8}$$

↳ Funktion nur noch von x abhängig, ist somit eine (Höhen)linie

Higher partial derivative

- Normalerweise gilt: $\frac{\partial f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$
- Hessian-Matrix: $\nabla^2 f \,/\, H_f(x)$: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$

  ↳ Wird benötigt für Bestimmung für Extremalwerte und Taylor-Formel

- Satz von Schwarz:
  - Wenn Funktion p-mal differenzierbar ist
  - Wenn Funktion bei allen Ableitungen stetig ist

  ↳ Dann gilt: $f_{xy} = f_{yx}$ bzw $\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial y}$

  - Wenn Hessian-Matrix symmetrisch ist, gilt Satz von Schwarz für diese Funktion $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial xx} & \frac{\partial f}{\partial xy} \\ \frac{\partial f}{\partial yx} & \frac{\partial f}{\partial yy} \end{pmatrix}$

- Taylor-Formula:

I. Bilde alle partiellen Ableitung bis zur vorgegebenen Ordnung

II. Setze in jede Ableitung den Entwicklungspunkt ein

III. Diese Werte müssen dann nur noch in die Formel eingesetzt werden

$$T_{\underbrace{(0,\pi)}_{\text{Entwicklungspunkt}},\overset{\text{Ordnung der Taylorapproximation}}{2}}(x,y) = \underbrace{f(0,\pi)}_{\text{Funktionswert}} + \underbrace{f_x(0,\pi) * (x-0) + f_y(0,\pi)(y-\pi)}_{\text{1. Ableitung}}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left(f_{xx}(0,\pi)\boxed{(x-0)^2} + 2f_{xy}(0,\pi)(x-0)(y-\pi) + f_{yy}(0,\pi)\boxed{(y-\pi)^2}\right)}$$

$$T_{a,3}(x,y) = f(a) + f_x(a) * (x-a_1) + f_y(a) * (y-a_2)$$
$$+ \frac{1}{2} f_{xx}(a)(x-a_1)^2 + f_{xy}(a)(x-a_1)(y-a_2) + \frac{1}{2} f_{yy}(a)(y-a_2)^2$$
$$+ \frac{1}{6}\left(f_{xxx}(a)(x-a_1)^3 + 3f_{xxy}(a)(x-a_1)^2(y-a_2) + 3f_{yyx}(a)(x-a_1)(y-a_2)^2 + f_{yyy}(a)(y-a_2)^3\right)$$

$$T_{a,n}(x) = \sum_{|k| \le n} \frac{D^k f(a) * (x-a)^k}{k!}$$

↳ Vektor mit allen partiellen Ableitungen

Optimierungsproblem (Serie 5/Aufgabe 4)

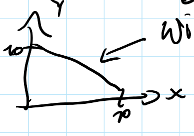
- Beispielsweise: Quadratformel
  - Gradient von Formel
  - $V(r,h) \approx \underbrace{V(r_0,h_0)}_{\text{Ausgangspunkt}} + \underbrace{\nabla V(r_0,h_0)\cdot \begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta h\end{pmatrix}}_{\text{Richtungsableitung}}$

Kritische Punkte und Extremalwerte

Lokale Extremalstellen

1. $\nabla f(x,y) = 0 \longrightarrow$ Kritische Punkte
2. Bilde Hesse-Matrix und setze kritische Punkte ein
   ↳ Vorsicht bei sin/cos $\Rightarrow$ Unendlich Extremalwerte
3. Bestimme jeweils die Definitheit der Hesse-Matrix
   - Positiv-definit: Minimum
   - Indefinit: Sattelpunkt
   - Negativ-definit: Maximum

Globale Extremalstellen

1. Hängt Hesse-Matrix bereits vor dem Einsetzen nicht mehr von den Variablen ab, haben wir bereits unsere globalen Extremalwerte
2. Anderenfalls muss man noch die Randpunkte im Definitionsbereich beachten (Falls es Definitionsbereich gibt)
   ↳ Beispiel: 

   wir schauen von oben drauf

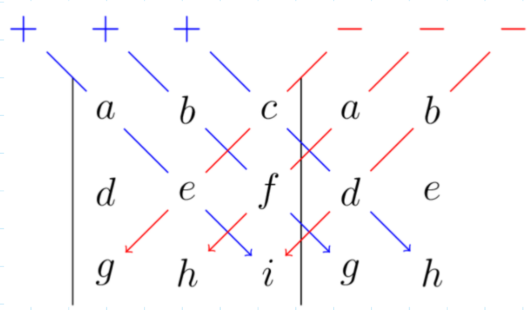
   $$\left.\begin{array}{ll} 1.\ x=0 & \Longrightarrow f(0,y) \\ 2.\ y=0 & \Longrightarrow f(x,0) \\ 3.\ y+x=10 & \Longrightarrow f(x,10-x) \end{array}\right\}$$ Eindimensionales Extremalwertproblem
3. Für das globale Maximum/Minimum sucht man dann den grössten/kleinsten Wert aus den lokalen Extremalstellen und Randpunkten aus.

Definitheit von Matrix mit Satz von Sylvester

- Überprüfung der Hauptminoren: · Alle positiv: Maximum
  - · $H_1 < 0 / H_2 > 0 / H_3 < 0$: Minimum
  - ↳ Alle anderen Kombinationen: Keine Aussage

$$\begin{array}{ccc} H_1 & H_2 & H_3 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- H_1 : -3
- H_2 : $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$: $(-3 \cdot -5) - (-3 \cdot -3) = 6$
- H_3 :



$\det(A) = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$

$= -19$

$\Rightarrow$ Minimum

Definitheit von Diagonalmatrix

- Eigenwerte $\hat{=}$ Diagonaleinträgen

Parametrisierung Kreis

- Kreis: · $1 = x^2 + y^2 \;\hat{=}\; \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \to x \\ \to y \end{matrix} \;\hat{=}\; f(\gamma(t))$
  - · $\gamma(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Mittelpunkt}} + \underbrace{k}_{\text{Radius}} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ } Im Uhrzeiger $\hat{=}\; f(\sin(t), \cos(t))$
  - · $\gamma(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Mittelpunkt}} + \underbrace{k}_{\text{Radius}} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ } Gegen Uhrzeigersinn

---

- Scalar Field : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Vector Field : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Vector Field

- If $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is differentiable, the matrix of partial derivatives is called "Jacobian-Matrix"
- $$\nabla f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \nabla f_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$
- Chain Rule example:
  - $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$
  - $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 \\ x \cdot y \cdot z \end{pmatrix}$

  $\Big\} \; \frac{d}{dt} f(g(x,y,z))$

  - $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$
  - $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$
  - $f'(g(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 2(x^2+y^2+z^2) & -2xyz \\ 2xyz & 2(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}$
  - $$f'(g(x)) = \underbrace{f'(g(x))}_{\begin{pmatrix} 2(x^2+y^2+z^2) & -2xyz \\ 2xyz & 2(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}}$$

Line/Path/Weg/Kurven-Integral

- $\gamma(t) = \sin(t) \quad t: [0, 2\pi] \;\hat{=}\; \gamma(t) = \sin(2t) \quad t: [0, \pi]$
  ↳ Geschwindigkeit ist egal

- $\alpha: [a,b] \to \Omega \; + \; \beta: [b,c] \to \Omega \;\overset{?}{=}\; \gamma: [a,c] \to \Omega$
- $\gamma: [a,b] \to \Omega \iff -\gamma: [b,a] \to \Omega$
  ↳ If you reverse the orientation, you reverse the sign.

1. Finde Parametrisierung des Weges $\gamma(t): [a,b]$
2. Berechne $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \cdot \gamma(t)$
3. Berechne das Wegintegral durch $\int_\gamma f \cdot ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \cdot dt$

- Wenn $\nabla f = v$ gilt, dann
  - ist ∇f das Potential von v (Eine Art Stammfunktion in höheren Dimensionen)
  - ist v konservativ
  - ist der Weg, welcher ich von $a \to b$ nehme, egal
  - ist der Weg $a \to a = 0$

  ↳ Gut, da man Linienintegral einfacher berechnen kann, da man den Weg einfach auswählen kann.

  ↳ $\int_a^b v \cdot d\mu = \nabla f(\gamma(b)) - \nabla f(\gamma(a))$ (Fundamentalsatz Integralrech.)

  - Notwendige Bedingung für kurzen Check: $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$

  ↳ $v(x,y) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$ (Nicht hinreichende Bedingung!)

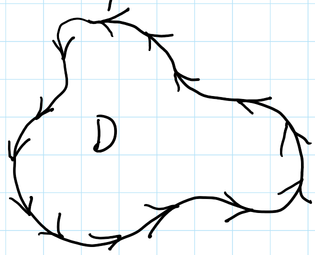
<u>Doppelintegral</u>

- $\int_D f \cdot d\mu = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) \cdot dx \cdot dy$

- Wenn man Funktion $\int_D 1 \cdot d\mu$ nimmt, bekommt man die Fläche
- Beim Vertauschen von $dx \to dy$ werden die Funktionsintegrale vertauscht.
- Die kleinere Schranke/Funktion kommt immer nach unten, je nachdem man es von X oder Y aus sieht
- Wenn zuerst X integriert wird, müssen die Funktionen nach $x = \dots y$ umgewandelt werden.
- $\int_0^1 \int_x^0 f(x,y) \cdot dy \cdot dx = \int_0^1 \int_1^y f(x,y) \cdot dx \cdot dy$

Satz von Green

- Anstatt Linienintegral zu berechnen, rechnen wir einfach das dazugehörige Doppelintegral aus



- $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

Normalerweise in $\Rightarrow$ Richtung, ausser, wenn Funktion gerade wie $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ aussieht.

- $\oint_C P \cdot dx + Q \cdot dy \Leftrightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot dA$

- Berechnung Fläche: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \overset{!}{=} 1$

- $\cos^2(t) := \frac{1+\cos(2t)}{2}$
- $\sin^2(t) := \frac{1-\cos(2t)}{2}$

1. $Q = x \ / \ P = 0$
2. $Q = 0 \ / \ P = -y$
3. $Q = \frac{1}{2}x \ / \ P = -\frac{1}{2}y$

$\left.\right\}$ Parametrisierungsfunktion $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \text{Area}(D) = \oint_C \underbrace{x \cdot dy}_{\text{Ableitung von y-Komponente}} = \oint_C \underbrace{-y \cdot dx}_{\text{Ableitung von x-Komponente}} = \frac{1}{2} \oint_C -y \cdot dx + \underbrace{x}_{\text{Normale x-Komponente}} \cdot dy$

Change of variable in Integral

- Geeignet für Polarkoordinatenwechsel:

- $\int_{\varphi(u)} f(x) \cdot d\mu = \int_u f(\underbrace{\varphi(u)}_{\text{Wechselfunktion}}) \cdot |\det \nabla \varphi(u)| \cdot d\mu$

Polarkoordinaten $\qquad$ $\det \nabla \varphi(u)$

- For example: $\iint f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \iint f(\underbrace{\varphi(r,\theta)}) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$

$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\theta) \\ r \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix}$

Satz von Pappus (Schwerpunktsbestimmung)

- $V(S) = 2\pi \, \bar{y}(D) \cdot A(D)$

$\hookrightarrow V(S(A,y)) = 2\pi \, \bar{x}(D) \cdot A(D) \Rightarrow \bar{x}(D) = \frac{\overbrace{V(S(D,y))}^{\text{Zylinder von D um die y-Achse und davon das Volumen } \pi \cdot r^2 \cdot h}}{2\pi \cdot \underbrace{a(D)}_{\text{Fläche von D}}}$

$\hookrightarrow V(S(A,x)) = 2\pi \, \bar{y}(D) \cdot A(D) \Rightarrow \bar{y}(D) = \frac{V(S(D,x))}{2\pi \cdot a(D)}$