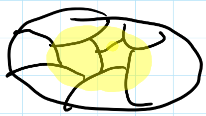
Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

$x|_{10}^{30} = 30 - 10 = 2$

- Ereignismenge $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots\}$
- Elementarereignis ist Element $\omega \in \Omega$
- Ereignis ist eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$
- Potenzmenge ist Menge aller Teilmengen: $2^{\Omega} / P(\Omega)$
- $P[A^c] = 1 - P[A]$
- $P[B|A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$ (= Wahrsch. von B, wenn A eingetroffen ist)
- Satz der totalen Wahrsch.: $P[B] = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{P[B|A_n] \cdot P[A_n]}_{P[B \cap A_i]}$
- Satz von Bayes
  - $Pr[A_i|B] = \frac{Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]}{Pr[B]}$



Unabhängigkeit

- A_1 / A_2 sind unabhängig:
  - $P[A_1 \cap A_2] = P[A_1] \cdot P[A_2]$
  - $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A] \cdot \cancel{P[B]}}{\cancel{P[B]}}$
  - $P[B|A] = 1 - P[B^c|A]$

Zufallsvariablen

- Dichte:
  - $f_X(x) = P[X = x] = F_X'(x)$
  - $f_X(x) \geq 0$ / $f_X(x) = 0$ wenn $x \notin W(X)$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$
- Verteilung:
  - $F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) \cdot du$
  - Wachsend (Wahrsch. kann nur größer werden)
  - Rechtsstetig
  - $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ / $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- Erwartungswert:
  - $E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} x \cdot Pr[x]$
  - $E[X] + E[Y] = E[X + Y]$
  - $E[aX + c] = a \cdot E[X] + c$
  - $E[10] = 10$ z.B. $E[E[X] \cdot E[Y]] = E[X] \cdot E[Y]$
  - $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)$

Varianz / Standartabweichung / Kovarianz / Korelation

- Falls $E[X^2] < \infty$: $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
- $Var(aX+c) = a^2 \cdot Var(X)$
- Standartabweichung: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$
- Kovarianz $Cov(X,Y) = E[(X-E[X]) \cdot (Y-E[Y])] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$
- Korelation $\sigma(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- $P_{X|Y}(x|y) = P[X=x \mid Y=y] = \frac{P[X=x, Y=y]}{P[Y=y]}$

Algemeine Wahrscheinlichkeitsräume

- Raum besteht aus Triplet (Ω, F, P)
  - Ω ist eine beliebige Menge
  - F ist das σ-Algebra und gibt vor, welche Teilmengen möglich sind (diskreten Fall ist Potenzmenge)
  - P ist Wahrscheinlichkeitsmass $P[X] = [0,1]$

Gleichverteilung / Uniforme Verteilung $X \sim U(a,b)$

- $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ für $a \leq x \leq b$ / 0 sonst
- $F_X(x) = 0$ für $x < a$ / $\frac{x-a}{b-x}$ für $a \leq x \leq b$ / 1 für $x > b$
- $E[X] = \frac{a+b}{2}$ / - $Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$

Exponentialverteilung $X \sim Exp(\lambda)$

- Gedächtnislos

$$P[X > t+s \mid X > s] = \frac{P[X > t+s]}{P[X > s]} = \frac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

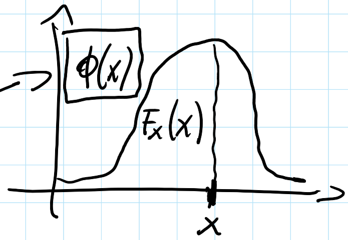
- $f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$
- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$
- $E[X] = 1/\lambda$ / $Var(X) = 1/\lambda^2$

Was ist Wahrsch. dass etwas zwischen 26 kg und 32 kg wiegt?

$P[26 < X \leq 32] \Leftrightarrow P[X \leq 32] - P[X \leq 26]$

Normalverteilung $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- $f_X(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- $F_X(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x) \cdot dx$



- $E[X] = \mu$ / $Var(X) = \sigma^2$
- Standartnormalverteilung: $X \sim N(0,1)$
- Quantil: $\phi^{-1}(0{,}9)$: Ich suche x-Wert, bei welchem 0,9 % aller Werte darunter liegen

$\hookrightarrow P[X \leq c] = 0{,}9$

$$\phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}9 \quad / \phi^{-1}$$
$$\frac{c-\mu}{\sigma} = \phi^{-1}(0{,}9)$$
$$c = \mu + \phi^{-1}(0{,}9) \cdot \sigma$$

$\phi(-0{,}5)$
$\Leftrightarrow 1 - \phi(0{,}5)$

- c so bestimmen, dass 90 % der Gewichte zwischen 28−c und 28+c liegen

1. $P[28-c < X \leq 28+c] = 0{,}9$
2. $P[X > 28+c] = 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - P[X \leq 28+c]$ wegen Symmetrie nur eine Seite

$\Leftrightarrow 1 - \phi\left(\frac{28+c-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}05$

$\phi^{-1}(0{,}9) = 1{,}28$
$\phi^{-1}(0{,}1) = -1{,}28$

$1 - \phi(x) = 0{,}05$
$\phi(x) = 0{,}95$

Bernoulli-Verteilung $X \sim Be(p)$ (Münzwurf Ergebnis)

- $f_X(x) = p,\ x=0$ oder $1-p,\ x=1$
- $E[X] = p$ / $Var(X) = p(1-p)$

Binomial-Verteilung $X \sim Bin(n,p)$ (Mehrere Bernoulli nacheinander)

- $f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
- $F_X(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-1}$
- $E[X] = n \cdot p$ / $Var(X) = n \cdot p(1-p)$

Poisson-Verteilung $X \sim P(\lambda)$

- $f_X(x) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$
- $F_X(x) = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda^i}{i!}$ - $E[X] = Var(X) = \lambda$

Geometrische Verteilung $X \sim geom(p)$

- Anzahl Bernoulli-Versuche bis zum Erfolg
- $f_X(x) = p(1-p)^{x-1}$
- $F_X(x) = 1-(1-p)^x$ - $E[X] = 1/p$ / $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Varianz einer Summe

- Sein $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen im gleichen Wahrsch.raum
- $Var(\sum X_i) = Co(\sum X_i, \sum X_j) = \sum_{i,j=1}^{n} Cov(X_i, X_j)$
  $= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$
- $Var(X_1+X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2 \cdot Cov(X_1, X_2)$
- Falls X_1 / X_2 endliche zweite Momente haben und unabhängig sind $\Rightarrow Cov(X_1, X_2) = 0$

Momente

1. Moment: $E[X]$ / 2. Moment: $Var(X)$

- Das p-te absolute Moment von X ist: $M_p = E[|X|^p]$
- Das p-te normale Moment von X ist: $m_p = E[X^p]$

Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion

- $f_{X,Y}(x,y) = P[X=x, Y=y]$ (=Gemeinsame Dichtefunktion)
  - $f_X(x) = \frac{d}{dx} \cdot F_X = \frac{d}{dx} F(x, \infty) = \cancel{\frac{d}{dx}} \cdot \cancel{\int_{-\infty}^{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v) \, dv \, du$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \stackrel{!}{=} 1$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v) \, dv$ (Randdichte)
- $F_{X,Y}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y]$ (=Gemeinsame Verteilungsfunktion)
  - $F_X(x) = P[X \leq x] = P[X \leq x, Y \leq \infty] = F(x, \infty) = \lim_{y \to \infty} F(x,y)$

  ↳ Randverteilung von X
- Unabhängigkeit: $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ Multiplikation der Randverteilungen

↳ $Cov(X,Y) = E[(X-E[X]) \cdot (Y-E[Y])] = E[X-E[X]] \cdot E[Y-E[Y]] = 0$

- $E[X]$ = 1. Randdichte von X ausrechnen
  2. $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) = E[X]$

Gesetz der Grossen zahlen

- $X_1, \dots, X_n$ mit $E[X_i] = \mu$
- Unter geeigneter "Annahme" gilt: $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow \mu$
- Schwaches Gesetz:
  1. $E[X_i] = \mu$ für alle i
  2. $Var(X_i) \leq \sigma^2$ (können versch. Varianzen haben)
  3. $Cov(X_i, Y_j) = 0 \quad i \neq j$ (muss nicht unabhängig sein)

  $\hookrightarrow \lim_{n \to \infty} P(|\overline{X_n} - \mu| < \varepsilon) = 1$
- Starkes Gesetz:
  1. Zufallsvariablen müssen unabhängig sein
  2. Zufallsvariablen haben gleiche Verteilfunktion

  $\hookrightarrow P[\overline{X}_n \to \mu] = 1$

Zentraler Grenzwertsatz (Normalverteilung)

- Die Summe der Werten von ZU ist normalverteilt

1. $X_1, \dots, X_n$ sind unabhängig
2. $X_1, \dots, X_n$ besitzen die gleiche Verteilung
3. $X_1, \dots, X_n$ besitzen endlichen Erwartungswert/Varianz

$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - E[X_1]}{\sqrt{Var(X_1)}} \sim N(0,1)$ ← Standardnormalverteilung

$\hookrightarrow \lim_{n \to \infty} P\left[1/\sqrt{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - E[X_1]}{\sqrt{Var(X_1)}} \leq x \right] = \phi(x)$

- $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_{50}$: $E[S_n] = 50 \cdot E[X_1]$ / $Var(S_n) = 50 \cdot Var[X_1]$
- $S_n \sim N(E[S_n], Var(S_n)) \Rightarrow P[S_n \leq c] \Rightarrow \phi\left(\frac{c - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}}\right)$

Abschätzungen/Schranken (Abweichung vom Erwartungswert)

- Markov:
  - $Pr[X \geq t] \leq \frac{E[X]}{t}$
  - $Pr[X \geq t \cdot E[X]] \leq 1/t$
- Chebychev:
  - $Pr[|X - E[X]| \geq t] \leq \frac{Var(X)}{t^2}$ $(E[X]-t; E[X]+t)$
- Chernoff:
  - $X_1, \dots, X_n$ unabhängig Bernoulli verteilt
  - $X \geq C$: $Pr[X \geq (1+\sigma) \cdot E[X]] \leq e^{-1/3 \cdot \sigma^2 \cdot E[X]}$
  - $X \leq C$: $Pr[X \leq (1-\sigma) \cdot E[X]] \leq e^{-1/2 \cdot \sigma^2 \cdot E[X]}$
  - $Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2 \cdot e \cdot E[X]$

Bedingter Erwartungswert

- $E[Y|X=1/8] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y|x=1/8)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{f_{X,Y}(1/8, y)}{f_X(1/8)} \cdot dy$

Maschine 1 hält mehr als doppelt so lange wie Maschine 2

$P[X > 2Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{2y}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \cdot dx \cdot dy$

Schätzer

- Wir haben irgendeine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit unbekannten Parameter, die wir schätzen wollen
- Likelihood-Funktion: $L(\alpha; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$
  - $\prod_{i=1}^{n} 5^{x_i} \hat{=} 5^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$
  - $\sum \lambda \cdot x_i \hat{=} \lambda \cdot \sum x_i$
- Log-Likelihood-Funktion: $\log(L(\alpha; x_1, \dots, x_n)) = l(\alpha; x_1, \dots, x_n)$
  - $\log(\alpha^n) = n \cdot \log(\alpha)$
  - $\log(\prod \dots) = \sum \log(\dots)$
- Maximum-Likelihood-Funktion: $\frac{\partial}{\partial\alpha}[\log(L(\alpha, x_1, \dots))] = 0 \Rightarrow \alpha = \dots$
- Momentenmethode: Wir berechnen Momente und setzen diese gleich Erwartungswert / Varianz
  - $\hat{m}_1 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = E[X]$ } Schätzung $E[X]$
  - $\hat{m}_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = E[X^2]$ } Schätzung $Var(X)$
  - Dies können wir, wegen zentralen Grenzwert.
- Erwartungstreu: Erwartungstreu für α, falls $E[T] = \alpha$
  - $E[T]$: Wenn man Erwartungswert von Most-likelihood funktion T nimmt
- Konsistent: Folge von Schätzern $T^{(n)}$ heissen konsistent für α, falls $T^{(n)}$ für $n \to \infty$ gegen α konvergiert
  - $\lim_{n\to\infty} P[|T^{(n)} - \alpha| > \varepsilon] \le \frac{Var[T^{(n)}]}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

#Proben

Chebychev

Tests

- Modell, wo Parameter unbekannt sind, jedoch haben wir eine Vermutung, in welchem Bereich Parameter liegt
- Hypothese: H_0: Wahrer Parameter liegt in Hypothese
- Alternative: H_A: Wahrer Parameter liegt in Alternative
  - ↳ einfach: nur ein Parameter zu vermuten
  - ↳ zusammengesetzt: mehrere Parameter zu schätzen
- Fehler 1. Art:
  - Wirklichkeit: Hypothese stimmt
  - Test: Alternative stimmt
  - $P[\text{Fehler 1. Art}] = $ signifikanzniveau α
- Fehler 2. Art:
  - Wirklichkeit: Alternative stimmt
  - Test: Hypothese stimmt
  - $P[\text{Fehler 2. Art}] = P[X \geq c] = 1 - P[X \leq c]$
- Signifikanzniveau:
  - Level an dem man Fehler 1. Art toleriert
  - z.B. $\alpha = 10\%$
- Macht des Tests:
  - $\beta(\theta_A) = 1 - P[X < c]$
  - Das Maximieren der Macht entspricht dem Minimieren des Fehler 2. Art
- Likelihood-Quotient:
  - $R(x_1, \ldots, x_n; \lambda_0, \lambda_A) = \dfrac{L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_0)}{\sup\limits_{\lambda \in [\lambda_0, \infty]} L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_A)}$
  - Um sup zu bestimmen $\log(L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_A))$ ableiten und dann $= 0$ setzen
  - Klein: Tendenz θ_0 zu verwerfen

Z-Test / Gauss-Test

- Test für Erwartungswert mit bekannter Varianz

1. Hypothese und Alternative bestimmen (z.B. $H_0: \mu = \mu_0 := 30$
   $H_A: \mu < \mu_0$
2. Signifikanzniveau α festlegen
3. Arithmetisches Mittel berechnen: $\bar{x}_n = 1/n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$
4. Teststatistik berechnen: $t = \frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
5. Quantile berechnen: $z_\alpha \hat{=} \phi^{-1}(\alpha)$ oder $\underbrace{z_{\alpha/2} \hat{=} \phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{\text{zweiseitiger Test}}$
6. Kritischer Bereich: $\cdot\ \mu < \mu_0 \Leftrightarrow (-\infty, z_\alpha]$
   $\cdot\ \mu > \mu_0 \Leftrightarrow (z_{1-\alpha}, +\infty)$
   $\cdot\ \mu \neq \mu_0 \Leftrightarrow \underbrace{(-\infty, z_{\alpha/2}) \cup (z_{\alpha/2}, +\infty)}_{\text{Kritischer Bereich}}$
7. Annahmebereich: Gegenteil von kritischen Bereich
8. Testentscheidung: · In kritischen Bereich: ablehnen
   · In Annahmebereich: annehmen

- P-Wert: · Kleinste Niveau auf dem der Test die Nullhypothese verwirft.
  Wert der Teststatistik
  · $\mu < \mu_0$: p-Wert $= P[T \leq t]$
  · $\mu > \mu_0$: p-Wert $= P[T \geq t] = 1 - P[T \leq t]$
  · $\mu \neq \mu_0$: p-Wert $= 2 \cdot P[T > t] = 2 \cdot (1 - P[T \leq t])$

- Wahrsch. Fehler 2. Art: $P[T > z_\alpha] = P\left[\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\right]$
  $= P\left[\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right]$
  $= 1 - \phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha\right] = \ldots$

- Teststatistik für Binomialverteilung
  · $T = S_n = \sum X_i \sim Bin(\mu, \sigma^2)$
  · $K = [c, +\infty]$: $P_{H_0}[S_n \geq c] = 1 - P_{H_0}[S_n < c] \leq \alpha$

t-Test (T-verteilt mit n-1 Freiheitsgraden

- Test für Erwartungswert einer Normalverteilung mit unbekannter Varianz
- Empirische Schätzung der Varianz: $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2$
- Test $T = \frac{\bar{x}_n - \mu}{S/\sqrt{n}}$
- Quantil: $t_{n-1, 1-\alpha}$
  - $\Rightarrow \mu < \mu_0: (-\infty; t_{n-1,\alpha})$
  - $\Rightarrow \mu > \mu_0: (t_{n-1,1-\alpha}; +\infty)$
  - $\Rightarrow \mu \neq \mu_0: (-\infty; t_{n-1,\alpha/2}) \cup (t_{n-1,1-\alpha/2}; +\infty)$

Zweistichproben-Test

$$\left.\begin{array}{l} - x_1, \ldots, x_n \\ - x_1, \ldots, x_m \end{array}\right\} n = m \text{ oder } m \neq m \left\{\begin{array}{l} - \text{gepaart oder ungepaart} \\ - \sigma \text{ bekannt oder unbekannt} \end{array}\right.$$

- **Gepaart**: · Nur wenn $n = m$ und wenn z.B. x und y die gleiche Person ist, die z.B. zwei verschiedene Medikamente testet
  - $x_1, \ldots, x_n \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ / $y_1, \ldots, y_m \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$
  - $z = x_i - y_i \sim N(\mu_x - \mu_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$
  - Für bekanntes $\sigma \Rightarrow$ z-Test für $z_1, \ldots, z_n$
  - Für unbekanntes $\sigma \Rightarrow$ t-Test für $z_1, \ldots, z_n$
- **Ungepaart**: · Bekannte Varianz:
  - $H_0: \mu_x - \mu_y = \mu_0$
  - $T = \frac{\bar{x}_n - \bar{y}_m - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$
  - $\mu_x - \mu_y < \mu_0: (-\infty, z_\alpha)$
  - $\mu_x - \mu_y > \mu_0: (z_{1-\alpha}, +\infty)$
  - $\mu_x - \mu_y \neq \mu_0: (-\infty, z_{\alpha/2}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$

  · Unbekannte Varianz:
  - $T = \frac{\bar{x}_n - \bar{y}_m - \mu_0}{S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$
  - $S^2 = \frac{1}{m+n-2} \cdot ((n-1) \cdot S_x^2 + (m-1) S_y^2)$
  - $S_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum (x_i - \bar{x}_n)^2$
  - $S_y^2 = \frac{1}{m-1} \cdot \sum (y_i - \bar{y}_m)^2$

Konfidenzintervalle (Für Schätzer benötigt)

- Wir geben Intervall an, in welchem der Schätzer der unbekannte Parameter vermutet
- Je mehr Beobachtungen, desto kleiner wird Schätzer
- Konfidenzniveau γ : γ% der Schätzungen im Interval
- 95% Konfidenzintervall $\hat{=}$ 5% Signifikanzniveau

Konfidenzintervall 95%
$\hookrightarrow \alpha = 0{,}05$

- $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
- $P(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$
- $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

$\hookrightarrow P(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$

↑ Anzahl Proben

$\hookrightarrow \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\hookrightarrow \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Lineare Regression

- Wenn man linearen Zusammenhang zwischen zu x/y vermutet
- $y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \varepsilon$ (y ist Vielfaches von x plus Rauschen ε)

1. $\frac{\partial}{\partial \beta_0} \cdot \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i - y_i)^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i - y_i) = 0$

   $\Leftrightarrow \bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}$ (1. Gleichung)

2. $\frac{\partial}{\partial \beta_1} \cdot \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i - y_i)^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i - y_i) \cdot x_i = 0$

   $\Leftrightarrow \overline{x \cdot y} = \beta_0 \cdot \bar{x} + \beta_1 \cdot \overline{x^2}$ (2. Gleichung)

3. $\overline{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2$ / $\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$

4. $b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\mathrm{var}(x)}$ / $b_0 = \bar{y} - \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\mathrm{var}(x)} \cdot \bar{x}$

- $\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \cdot dx$
- $\int \frac{1}{x} = \log|x|$ • $\int \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \log|ax+b|$ • $\int \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan(\frac{x}{a})$
- $\int e^{ax} = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$
- $\frac{\log(x)}{\log(y)} = \log(x-y)$

Quantile

- $z_{0{,}95} = 1{,}645$ – $z_{0{,}05} = -1{,}645$ – $z_{0{,}975} = 1{,}96$