Analysis 1

Supremum / Infimum

- Jede nach oben beschränkte Menge besitzt eine kleinst oberste Schranke: Supremum sup (Menge)
- Jede nach unten beschränkte Menge besitzt eine grösst oberste Schranke: Infimum Inf (Menge)

Maximum / Minimum

- Wenn das Supremum selbst auch in der Menge vorkommt, nennt man es auch das Maximum
- Wenn das Infimum selbst auch in der Menge vorkommt, nennt man es auch das Minimum

Offenes, geschlossenes Interval

- $[1, 2]$ = Alle Zahlen zwischen 1-2 inklusive den Rändern
  - Sup = Max = 2
  - Inf = Min = 1
- $(1, 2)$ = Alle Zahlen zwischen 1-2 ohne Ränder
  - Sup = 2
  - Inf = 1

  } Es existiert kein Minimum/Maximum

Bestimmung von Supremum / Infimum

1. Supremum / Infimum abschätzen $x = 1$
2. Supremum / Infimum beweisen $f(x) \leq 1$

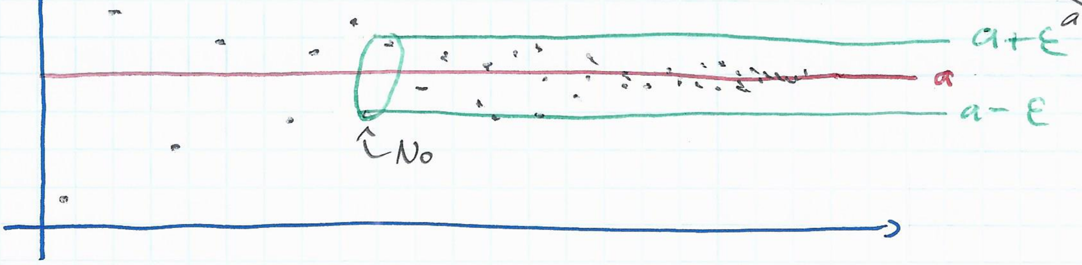
Archimedisches Prinzip

- Zu jeder reellen Zahl $0 < r$ gibt es eine natürliche Zahl n, die grösser ist als b: $r < n$

Folgen

- Eine Abbildung $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
- Das Bild wird mit a_n bezeichnet
- Grenzwert einer Folge
  - Eine Folge konvergiert mit Grenzwert a, wenn sich ausserhalb einer beliebig grossen ε-Umgebung nur endlich viele Glieder der Folge befinden
  - Wenn wir ein $\varepsilon > 0$ vorgeben, gibt es immer einen Mindestindex N_0, so dass ab diesem Index sich alle weiteren Folgeglieder in der ε-Schranke befinden: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_0: \ |a_n - \underbrace{a}_{\text{Grenzwert}}| < \varepsilon$

$a \pm \varepsilon$ (=Schranke)



- Konvergent: Folge besitzt einen Limes
- Divergent: Folge besitzt keinen Limes
- Uneigentliche Konvergenz: Wenn Folge gegen $\pm\infty$ strebt
- Arithmetische Folge: Wenn $|a_{n+1}| - |a_n|$ konstant sind
- Geometrische Folge: Wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konstant sind
- $a_n \underbrace{\text{konvergiert}}_{\text{Grenzwert}} \Rightarrow a_n \underbrace{\text{beschränkt}}_{\text{obere/untere Schranke}}$ (z.B. $a_n = (-1)^n$)
  - kein Grenzwert
  - jedoch beschränkt

Konvergenzkriterien

$\lim a_n = a \ / \lim b_n = b$

- $\lim \lambda \cdot a_n = \lambda \cdot a$
- $\lim a_n + b_n = a + b$
- $\lim a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
- $a_n \leq b_n \Leftrightarrow a \leq b$
- $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$

Jonas B.

Konvergenz - Sandwich-Satz

- $\lim a_n = a$ / $\lim b_n = b$
- $a_n \le c_n \le b_n$

a_n: Konvergiert; c_n: Muss auch konvergieren!; b_n: Konvergiert

Monotone Konvergenz

- Sei a_n nach oben beschränkt + monoton wachsend
  ↳ a_n auch konvergent und $\lim a_n$ = Supremum

Teilfolgen / Häufungspunkte

- Häufungspunkte sind Werte, gegen die ein Teil der Folge strebt
- Eine Zahl a ist ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gibt, die gegen die Zahl a konvergiert
- $\limsup_{n \to \infty} a_n$ (= Grösster Häufungspunkt)
- $\liminf_{n \to \infty} a_n$ (= Kleinster Häufungspunkt)

↳ Falls lim sup = lim inf, dann konvergiert Folge

- Teilfolge muss auch unendlich Elemente beinhalten
  ↳ Ansonsten wäre es nur eine Liste

Konvergenz beweisen

- Ein Nachweis eines Grenzwertes gelingt, wenn die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ umgeformt werden kann in die Ungleichung $n > f(\varepsilon)$

Intervalverschachtelung

- b_n monoton fallend
- a_n monoton wachsend

↳ wenn $a_n \leq b_n$ gilt, dann sind beide Folgen konvergent

Bolzano-Weierstrass

- Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt: a_n beschränkt $\overset{\text{Weiers.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Teilfolge, die konvergiert
- Es gibt also mindestens eine Zahl x, so dass eine Teilfolge gegen x konvergiert
- Beispielsanwendung
  - sei a_n eine Folge und $\left.\begin{array}{l}\lim a_{2n} = a \\ \lim a_{2n+1} = a\end{array}\right\} \lim a_n = a$
- Falls Folge konvergiert, konvergieren auch alle Unterfolgen

Cauchy

- Cauchy-Kriterium: Wenn $a_n \in \mathbb{R}$ + konvergent $\Rightarrow$ Cauchy
- a_n nicht cauchy $\Rightarrow$ a_n divergent
- Bei Folge geben wir Maximalabstand zwischen zwei benachbarten Gliedern an, und wir bekommen ein N, ab diesem Element der Abstand immer kleiner ist.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$
- Bei konvergenten Folgen kommen die Folgeglieder nicht nur dem Grenzwert beliebig nahe, sondern sie kommen sich selbst auch untereinander beliebig nahe.

Harmonische Folge / Reihe

- $a_n := \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \to 0$ } Folge
- $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to$ divergent

Alternierende Reihe

- $b_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ } konvergent
- Zu zeigen: Teilfolgen b_{2k} und b_{2k-1} sind monoton sowie beschränkt

Leibnitz-Kriterium

- Spezielles Kriterium für alternierende Reihen
  ↳ Das sind Reihen, bei denen das Vorzeichen wechselt
- Wenn Folge $a_k \geq a_{k+1}$ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \to 0$
  ↳ Dann ist Leibnitz Reihe $S_n = a_1 - a_2 + a_3 + \dots$ konvergent

Konvergenzkriterien (= ob eine Folge/Reihe konvergiert)

- Folgen
  - Monotoniekriterium: monoton + beschränkt
  - Cauchy-Kriterium
  - Sandwichkriterium
- Reihen
  - Cauchy-Kriterium / Nullfolgenkriterium
  - Majoranten / Minorantenkriterium
  - Quotientenkriterium
  - Wurzelkriterium
  - Leibnitz-Kriterium

Bernoulli de l'Hôpital

- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

↳ der Satz gilt, wenn $\frac{f(x) \to 0}{g(x) \to 0}$ oder $\frac{f(x) \to \infty}{g(x) \to \infty}$ streben

Rechnen mit Supremum / Infimum

- $\sup(a+b) = \sup a + \sup b$
- $\inf(a+b) = \inf a + \inf b$

- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
- $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

} Für alternierende Definitionen

- Beispiel: $A: \{3n + \frac{2}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$B: \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $C: \{\frac{2}{m} \mid m \in \mathbb{N}\}$

Monotonie

- Monoton fallend: $f'(x) < 0$
- Monoton wachsend: $f'(x) > 0$

Geometrische Reihe

- Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ $(1 + q + q^2 + q^3 + \dots)$

  - $|q| < 1$ konvergiert, und ihre Summe $S_n = \frac{1}{1-q}$
  - $q = 1$ divergent
  - $q = -1$ divergent (springt) $S_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$
  - $|q| > 1$ divergent $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \infty$

Reihen

- Sei a_n eine Folge
- Summe der ersten n Folgegliedert = Partialsumme
- $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
- Eine Reihe ist eine unendliche Summe einer Folge
- Wir sagen, die Reihe ist konvergent, falls die Partialsumme konvergiert

---

Grenzwert von Funktionen

- f besitzt den Grenzwert L an der Stelle a

$$\hookrightarrow \underbrace{\lim_{x \to a^-} f(x)}_{\text{Linksseitiger Grenzwert}} = \underbrace{\lim_{x \to a^+} f(x)}_{\text{Rechtsseitiger Grenzwert}} = L$$

- $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \lim_{x \to a} f(x)$
- <u>Unentscheidbare Situation</u>: $\frac{0}{0} / \frac{\infty}{\infty} / \infty - \infty / 1^\infty / \infty^0 / 0^0 / 0 \cdot \infty$
  - Sandwich Theorem
  - Dominanz: Dominanten Term ausklammern
  - Wurzeltrick: $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x} - x \quad / \cdot \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$ ← Dominanz

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{\cancel{x}\ 1}{\sqrt{\cancel{x^2}_{1} + \cancel{x}_{\frac{1}{x} \to 0}} + \cancel{x}_{1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

  - Bernoulli de l'Hôpital
  - Der $e^{\log(x)}$-Trick: $\lim_{x \to 0} x^{\sin(x)} = e^{\sin(x) \cdot \log(x)}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} e^{\lim_{x \to 0} \sin(x) \cdot \log(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) \cdot \log(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} =$$ ─ l'Hôpital

Konvergenzkriterien für Reihen (Konvergiert/Divergiert Reihe?)

- **Notwendige Bedingung: Cauchy Kriterium / Nullfolgenkriterium**
  - Wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist, muss $\lim_{n\to\infty} a_n \to 0$ streben
  - $\sum a_k$ konvergent $\Rightarrow \lim a_k \to 0$
  - Wenn Reihe nur positive* Glieder besitzt:
    $\sum a_k$ konvergent $\Leftrightarrow S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist beschränkt
    ↳ $\left.\begin{array}{l}\text{· Reihe ist monoton wachsend*} \\ \text{· Reihe ist beschränkt}\end{array}\right\}$ konvergent

- **Majoranten / Minoranten - Kriterium**
  - Vergleich mit Reihe, bei der man bereits weiss, dass sie konvergiert / divergiert
  - Majorantenkriterium: · $\sum a_n$ ← konvergiert $\sum b_n$
    - Ab einem gewissen n_0 muss gelten
      ↳ $a_n \geq b_n \;\forall n \geq n_0$
    - Dann gilt: $\sum a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum b_n$ konvergent
  - Minorantenkriterium: $\sum a_n \quad \sum b_n$ ← divergiert
    - $a_n \geq b_n \;\forall n$ ab gewissen n_0
    - $\sum b_n$ divergent $\rightarrow \sum a_n$ divergent

  ↳ Nützliche Funktionen
  Geometr. Reihe - $\sum q^n$ konvergent $\Leftrightarrow |q| < 1$
  Riemannsche zeta Funktion - $\sum \frac{1}{n^s}$ konvergent $\Leftrightarrow s > 1$

- **Quotientenkriterium** geeignet, wenn $n!$ (z.B. $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$) & λ^n
  - $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konvergent
  - $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergent
  - $= 1 \Rightarrow$ Keine Aussage → Wurzelkriterium

- **Wurzelkriterium** (stärker als Quotientenkriterium)
  - $\lim \sqrt[k]{a_k} < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konvergiert
    ↳ Geeignet für $(b_n)^n$
  - $\lim \sqrt[k]{a_k} = 1 \Rightarrow$ Keine Aussage möglich
  - $\lim \sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergiert

Riemann Zeta-Funktion

- $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ → konvergent für $s > 1$ / → divergent für $0 < s \leq 1$

Absolute Konvergenz

- Die Reihe $\sum a_k$ ist absolut konvergent, falls $\sum |a_k|$ auch konvergent ist
- Die Reihenfolge der Elemente bei einer bedingt konvergenten Reihe dürfen nicht vertauscht werden, nur bei absolut konvergent, da das nur Addition ist

Wichtige Reihen

- Harmonische Reihe = $\sum \frac{1}{n} \to \infty$
- Geometrische Reihe: $\sum q^n$ → konvergiert, wenn $|q| < 1$
- Alternierende Harmonische Reihe: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ → konvergiert
- Zeta-Funktion: $\sum \frac{1}{n^s}$ → konvergiert, wenn $s > 1$

Potenzreihe

- Reihe der Form: $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

Entwicklungspunkt

Beliebige Folge

- Konvergenzradius sagt aus, für welche Zahlen eine Potenzreihe konvergiert

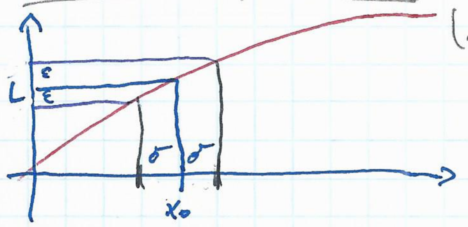
Definitionsbereich / Konvergenzbereich

- Potenzreihen sind sozusagen Polynome vom Grad ∞
- Konvergenzbereich ist kreisförmig: $|x| < \rho$ → konvergiert
- Beispiel: Geometrische Reihe (Radius: 1) $|x| = \rho$ → keine Aussage
- Berechnung des Radius: $|x| > \rho$ → divergiert
  - $\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$
  - $\rho = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}}$

Grenzwert von Funktionen

- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ => Der Grenzübergang $x \to x_0$ bedeutet, dass x der Stelle x_0 beliebig nahe kommt, jedoch sie niemals erreicht
- Die Funktion muss an der Stelle x_0 nicht definiert sein (=Definitionslücke)
- Bei einer Sprungstelle ist nur der linksseitige oder rechtsseitige Grenzwert möglich
- ε-δ-Definition: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - L| < \varepsilon$

Grenzwert



↳ Für jede beliebig klein gewählte Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta > 0$, welche von ε abhängt, sodass für alle x im Bereich $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Stetigkeit

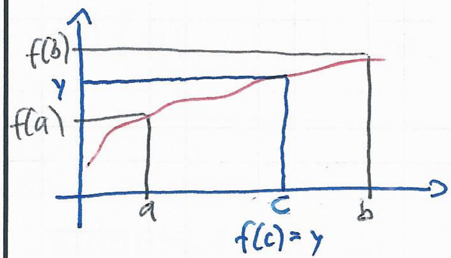
- f heisst stetig an der Stelle x_0, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
  ↳ Man darf Schreiber beim zeichnen nicht hochheben
- Für stetige Funktion können wir beim Grenzwert einfach den Funktionswert $f(x_0)$ nehmen
- Stetig ergänzbar: Wenn bei x_0 Definitionslücke ist, kann ich diese ergänzen
- f ist an der Stelle x_0 stetig:
  - f ist an Stelle x_0 definiert
  - $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert
  - $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Jedes Polynom ist stetig
- Gleichmässige Stetigkeit
  - δ hängt nur von ε ab, und nicht noch von x_0
  - z.B. ist lineare Funktion gleichmässig stetig
    ↳ $y = x$
    $y = \sqrt{x}$
- Punktweise Stetigkeit (ε-δ-Definition)
  - δ hängt von ε sowie von x_0 ab
  - z.B. $f(x) = x^2$ => Je höher ich x_0 wähle, desto grösser wird auch δ-Umgebung

Zwischenwertsatz

- Wenn $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sind, und $f(a) \leq f(b)$
- Dann gibt es zu jedem y ein $c \in [a,b] \Rightarrow f(c) = y$

↳ Für jede stetige Funktion gibt es für jeden y-Wert ein dazugehörigen x-Wert

↳ Für unstetige Funktionen gilt dies nicht, da es dort Sprungstellen usw. gibt



Kompakte Mengen

- Wenn Menge abgeschlossen und beschränkt ist z.B $[1,2]$
- falls jede Teilfolge in der Teilfolge konvergiert
- Beispielsweise ist $a_n = \frac{1}{n}$ nicht kompakt, da alle Teilfolgen nach 0 konvergieren, aber 0 nicht in der Teilmenge liegt.

Offen / Geschlossen

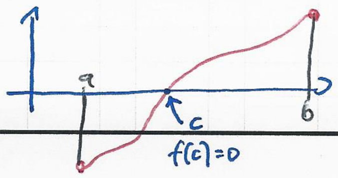
- Offen: $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\}$
- Geschlossen: $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq r\}$

↑ Sichtbarer Cut

Folgerung des Zwischenwertsatzes

Eins davon muss negativ sein

- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \cdot f(b) < 0$
- Dann muss ein c existieren, $f(c) = 0$ (=Nullstelle)



Umkehrfunktion - Stetigkeit

- Wenn $f(x)$ stetig + streng monoton wächst, ist somit auch $f^{-1}(x)$ stetig

Punktweise Konvergenz

- Die Wahl von n_0 hängt sowohl von ε als auch von x ab
- $\forall x \in \Omega \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$
- $\forall x \in \Omega : \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Gleichmässige Konvergenz

- Die Wahl von n_0 hängt nur von ε ab, x ist beliebig
- $\lim_{n \to \infty} \sup (f_n(x) - f(x)) = 0$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \forall n > n_0 : \forall x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
- Gleichmässige Konvergenz => Punktweise Konvergenz

Differentialrechnung (Ableitung)

- Geometrische Darstellung ist die Tangente
- f heisst differenzierbar an der Stelle x_0, falls der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert. (Analytisch: Grenzwert Steigung Sekante)
- Falls f an jeder Stelle differenzierbar ist, entsteht aus der Kollektion aller Ableitungen eine neue Funktion, die Ableitungsfunktion
- Ist f an Stelle x_0 differenzierbar => an Stelle x_0 stetig
  ↳ Wenn eine Funktion an einer Stelle nicht stetig ist, ist die Funktion nicht differenzierbar.
- Kritische Stelle: Ableitung = 0 oder ∞

- <u>Differentialquotient</u>: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

H-Methode
Dadurch Ableitung
$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

- H dient als Platzhalter für x_1
- $h = x_1 - x_0$
- $h = \Delta x$

- <u>Differenzenquotient</u>: $m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ (= Steigung / Sekantengleichung)

- <u>Tangentenfunktion</u>: $y = mx + n$

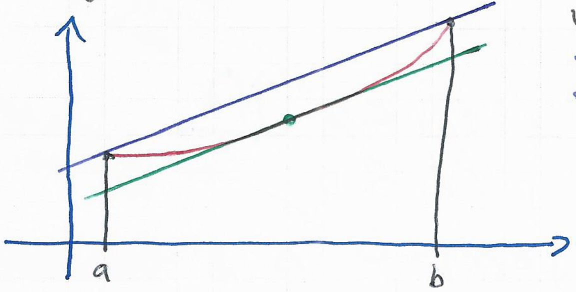
Punkt (x,y), an der Tangente angelehnt ist

1. Ableitung

- Der Differentialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten

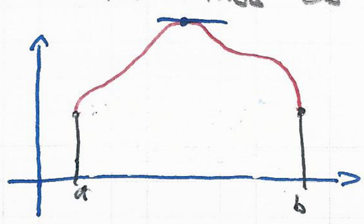
Mittelwertsatz

- Es gibt ein c, sodass $\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{Steigung Sekante}} = \underbrace{f'(c)}_{\text{Steigung Tangente}}$



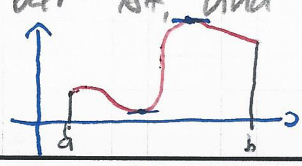
Satz von Rolle

- Wenn f differenzierbar ist und $f(a) = f(b)$ gilt, dann muss es ein c geben, mit $f'(c) = 0$



Maximum / Minimum

- Wenn $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und es dort ein Maximum / Minimum gibt
- Dann ist an Max / Min Ableitung = 0



Steigungen

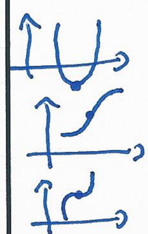
- $f'(x) < 0$: monoton sinkend
- $f'(x) = 0$: konstant (=kritische Stelle)
- $f'(x) > 0$: monoton wachsend

Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich: Wo ist Funktion überall definiert (Lücken)
2. Randverhalten: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ / $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ / $\lim\limits_{x \to \text{Am Rande von Lücken}} f(x)$
3. Nullstellen: $0 = f(x)$ (y Null setzen)
4. Symmetrie: $f(x) = f(-x)$
5. Schnittstelle y-Achse: x Null setzen
6. Extrempunkte: $f'(x) = 0$
7. Hochpunkt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
8. Tiefpunkt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$
9. Wendepunkt: $f'(x) \neq 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
10. Sattelpunkt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
11. Graph

Da 1. Ableitung nach Tiefpunkt wieder nach oben wächst

Wir fangen beim Sattelpunkt hier an.



Umkehrregel / Inversenregel

- Wenn eine Funktion differenzierbar ist und eine Umkehrfunktion / Inverses besitzt (bijektiv)
- Dann ist ihre Umkehrfunktion ebenfalls differenzierbar mit der Ableitung: $f^{-1\prime}(x) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
- Beispiel: $y = e^x \quad x = \log(y)$

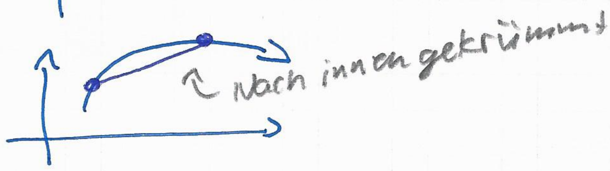
$$y' = e^x \qquad x' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\underbrace{e^{\log(y)}}_{=y}} = \frac{1}{y} \iff \log(x)' = \frac{1}{x}$$

Jonas B.

Krümmung von Funktionen

- **Konvex**
  - $f''(x) > 0$

- **Konkav**
  - $f''(x) < 0$



Ableitungsregeln

- **Summenregel:** $[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- **Produktregel:** $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- **Kettenregel:** $f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Riemannsche Summe

- Der Flächeninhalt einer Funktion wird durch Rechtecke angenähert
- Partitionen teilen die Funktion in Blöcke ein (Breite)
  ↳ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$
  x_0: [a, x_n: b]
- Die Feinheit sagt aus, wie viel mal die Funktion unterteilt ist
  ↳ $\sigma(P) = \max\{|x_i - x_{i-1}|\}$ (= Breiteste Partition)
- Die Stützstellen sagen, von wo man den y-Wert nimmt
  ↳ $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$

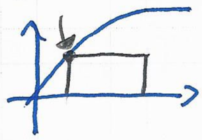
$$\Rightarrow S(\underset{\text{Funktion}}{f}, \underset{\text{Partition}}{P}, \underset{\text{Stützstellen}}{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{Höhe}} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{Breite}}$$

Riemannsches Integral

- Das Riemannsche-Integral kommt von der Riemann-Summe
- Riemann-Integral: $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, P, \xi)$

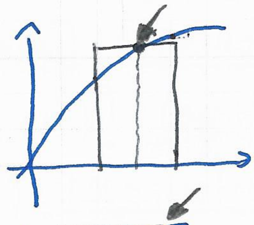
  └ Wir machen die Unterteilung extrem klein

- Untersumme



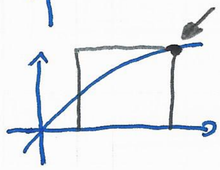
  - $\underline{S} := \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{\inf f(x)}_{\text{Kleinster x-Wert im Bereich } [x_{i-1}, x_i]} \cdot (x_i - x_{i-1})$

- Normale Summe



  - $S := \sum\limits_{i=1}^{n} f\Big(\underbrace{\tfrac{x_i - x_{i-1}}{2}}_{\text{Mitte}}\Big) \cdot (x_i - x_{i-1})$

- Obersumme



  - $\overline{S} := \sum\limits_{i=1}^{n} \sup f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$

- Lemma
  - $\underbrace{\sup \underline{S}(f, P)}_{\text{Die Untersummenpartition mit dem grössten Wert}} \leq \underbrace{\inf \overline{S}(f, P)}_{\text{Die Obersummenpartition mit dem kleinsten Wert}}$

Kriterien für Integrierbarkeit

- f monoton $\Rightarrow f$ integrierbar
- f stetig $\Rightarrow f$ integrierbar
- f differenzierbar $\Rightarrow f$ integrierbar

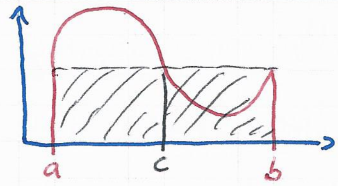
Integrationsregeln

- $f(x) \leq g(x) \ \forall x \iff \int f(x) \cdot dx \leq \int g(x) \cdot dx$
- $\int \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) \iff \alpha \int f(x) + \beta \int g(x)$
- $\int_a^b f(x) \cdot dx \iff -\int_b^a f(x) \cdot dx$
- $\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$

Jonas B.

Mittelwertsatz der Integration

- $\int_a^b f(x) \cdot dx = f(c) \cdot (b-a)$



Hauptsatz der Integralrechnung

- $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ (= Die zu integrierende Funktion)
- $F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ (= Stammfunktion / Integrierte Funktion)
- $\int_a^b f(x) \cdot dx = \underbrace{F(b)}_{\text{Grosser Wert}} - \underbrace{F(a)}_{\text{Kleiner Wert}}$
- $F'(x) = f(x)$

Integrationsregeln

- Partielle Integration
  - Für Produktregel der Differentialrechnung
  - $\int \underset{\uparrow}{u} \cdot \underset{\downarrow}{v'} \cdot dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \cdot dx$
- Substitution
  - Für Kettenregel der Differentialrechnung
  - $\int \sin(2x) \cdot dx \;/\; u = 2x \Leftrightarrow u' = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2}$

$\Leftrightarrow \int \sin(u) \cdot \frac{du}{2}$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{2} \cdot \sin(u) \cdot du \;/\; u = 2x$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x)$

„Bestimmtes Integral"

  - Bei Integrationsgrenzen: Man ersetzt diese, indem man sie in die zu substituierende Funktion einsetzt.

- Partialbruchzerlegung
  - Um Bruch zu vereinfachen in mehrere Teilbrüche

1. Schauen, ob Zähler grösser ist => Polynomdivision (unecht)
2. Nullstellen von Nennen anschauen
3. Bruch aufstellen: $\frac{A_0}{(x-x_0)} + \frac{A_1}{(x-x_1)} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$
4. Bruch auflösen: $/ \cdot (x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$
5. Term in $A_0, A_1 \dots$ & A_n aufteilen und Gleichungssystem erstellen
6. $A_0, A_1 \dots$ & A_n in Bruch 3.) einsetzen

Uneigentliches Integral

- Integrale auf unbeschränkten Intervallen: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)$

1. Ersetze die kritischen Stellen (z.B. $+\infty$ oder Lücke) durch a und/oder b
2. Wir rechnen Integral ganz normal aus
3. Wir nehmen $\lim\limits_{\substack{a \to \infty \\ b \to \infty}} \Big|_a^b \sim$

Taylorpolynom

- Polynom, welches eine Funktion an der Stelle x_0 approximiert
- $T_{n,x_0}(x)$ (= n-te Taylorpolynom um Entwicklungspunkt x_0)

1. Wir leiten die Funktion n-Mal ab
2. Wir setzen in alle Funktionen den Entwicklungspunkt ein
3. Wir setzen die Werte in die folgende Formel ein

$$\hookrightarrow T_{n,x_0}(x) = \frac{f(x_0)}{0!=1} \cdot \underbrace{(x-x_0)^0}_{=1} + \frac{f'(x_0)}{1!=1} \cdot (x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!=2} \cdot (x-x_0)^2 \ldots + \underbrace{R_n}_{\text{Fehler}}$$

- Rest-Term / Fehler / Restglied
  - Abweichung von der ursprünglichen Funktion
  - $|R_m| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \right|$
  - Wenn wir Restglied des 3. Taylorpolynom berechnen wollen, benötigen wir die 4. Ableitung
  - $f^{(n+1)}(\xi)$ / $\xi \in [a,b]$

    ↳ Hier müssen wir maximaler Wert finden zwischen

    $\max\left[f^{(n+1)}(x) \quad x \in [a,b] \right]$

Wenn die gesuchte Funktion nur von einer Variable abhängt

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

- Es wird eine ganze Funktion gesucht: $y' = 2y + x^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2f(x) + x^2$
- Ordnung: Höchster Grad der Ableitungen
- Typen
  - Homogene: ___ $= 0$
  - Inhomogene: ___ $=$ ___
  - Separierbare: $y' = g(x) \cdot h(y)$
  - Lineare: Höchste Potenz ist $1: x^1 / y^1$
- Zusatzbedingungen
  - Dadurch erhalten wir eindeutige Lösung
  - Anfangswertproblem: $y(0) = 1$
  - Randwertproblem: $y(6) = 10$

Separierbare Differenzialgleichungen

$$- \; y' = y^2 + x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 + x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \cdot dy = x \cdot dx \quad / \int \ldots$$

$$\Leftrightarrow \int y^{-2} \cdot dy = \int x \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^{-1}}{-1} + c_1 = \frac{1}{2} \cdot x^2 + c_2 \quad / - c_1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + \underbrace{c_2 - c_1}_{=c}$$

$$\Leftrightarrow -1 = \left(\frac{x^2}{2} + c\right) \cdot y$$

$$y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + c} = -\frac{x^2}{2+c}$$

Homogene lineare Differenzialgleichung

$$- \; y'' - y = 0$$

1. Charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$
2. Nullstellen finden: $(\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) = 0$
   - $\lambda_1 = 1 \rightarrow y_{H1} = e^x$
   - $\lambda_2 = -1 \rightarrow y_{H2} = e^{-x}$
3. Allgemeine Lösung: $y_H(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^x \; / \; \underbrace{c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$

Mit Zusatzbedingungen kann man diese bestimmen.

Jonas B.

Inhomogene lineare Differenzialgleichung

- $y'' + a_1 y' + a_0 y = \underbrace{g(x)}_{\text{Störfunktion}}$

- $y(x) = \underbrace{y_a(x)}_{\substack{\text{Allgemeine} \\ \text{Lösung}}} + \underbrace{y_p(x)}_{\substack{\text{Partikuläre} \\ \text{Lösung}}}$

- **Beispiel:** $y'' + 3y' + 4y = e^{3x}$

  1. **Allgemeine Lösung:** Homogene lineare Differenzialgleichung
  2. **Partikuläre Lösung:**

Arten von Stetigkeiten

Lipschitz-Stetig $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{Gleichmässig stetig}}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{punktweise stetig}}$

Falls die Menge kompakt ist

– Punktweise Stetig

- Hängt von ε und x ab

1. $\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0:}$

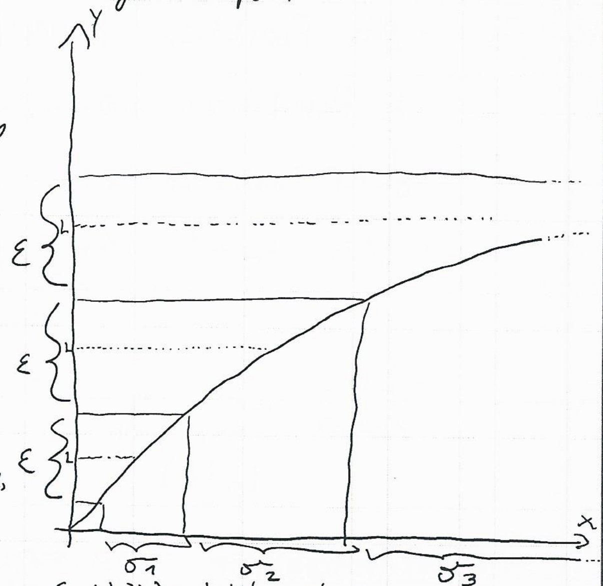
   Für jedes ε gibt es immer eine δ Umgebung, für die gilt:

2. $\underbrace{|x - x_0| < \delta}$

   Für alle x-Werte im Bereich von $(x_0 - \delta) - (x_0 + \delta)$ muss gelten,

3. $\underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}$

   dass alle f(x)-Werte von δ im ε-Bereich um den Grenzwert L liegen

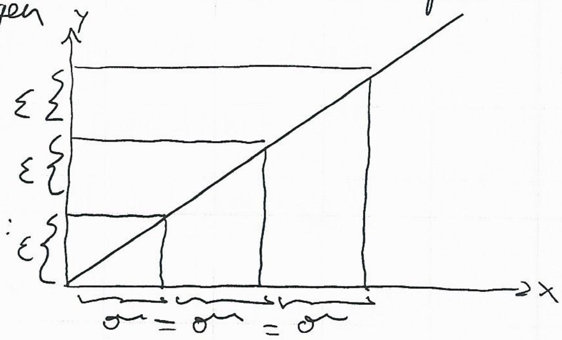


ε bleibt gleich, aber wegen x Werten wird δ immer grösser

– Gleichmässig stetig

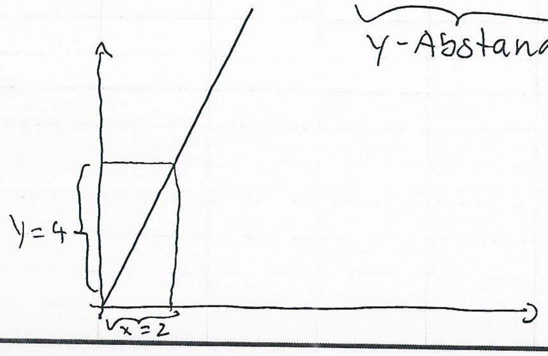
- Hängt nur von ε ab
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \ \forall x, y \in \Omega:$

  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



– Lipschitz-Stetig

- Zwei Funktionswerte dürfen sich höchstens um L-Mal unterscheiden
- $\exists L \ \forall x, y: \underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\text{Y-Abstand}} \leq L \cdot \underbrace{|x - y|}_{\text{X-Abstand}}$



$\boxed{\text{Beispiel: } L = 2}$

Jonas B.

Arten von Konvergenzen

- Gleichmässige Konvergenz $\Rightarrow$ Punktweise Konvergenz
- Punktweise Konvergenz
  - Die Funktion kann unterschiedlich schnell an versch. X-Punkten konvergieren
  - Jeder Punkt hat seine eigene Konvergenzgeschwindigkeit
  - $\forall x \in \Omega: \lim_{n \to \infty} \underbrace{f_n(x)}_{\text{Funktionenfolge}} = \underbrace{f(x)}_{\text{Funktion}}$
  - $\lim_{x \to \infty} \underbrace{\frac{x+n}{2n} + x}_{f_n(x)} \to \underbrace{\frac{1}{2}x}_{f(x)}$ ✓
- Gleichmässige Konvergenz
  - Die Konvergenzgeschwindigkeit ist an jedem Punkt die gleiche
  - Die Funktion konvergiert gleichmässig
  - $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0$
  - $\lim \sup \left| \frac{x+n}{2n} + x - \frac{1}{2} \cdot x \right| = \lim \sup_{x \in \Omega} \left| \frac{x}{2n} \right| \not\to 0$

Appendix