Lab7

June 1, 2022

1 Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi

1.1 Bartosz Kucharz

2 Zadany układ

Dany jest układ równań liniowych **A***x*=**b**.
Elementy macierzy **A** są zadane wzorem (*m*,*k* - parametry zadania podane indywidualnie):

$$\text{a)}\ \begin{cases} a_{i,i} = k \\ a_{i,j} = \dfrac{m}{n-i-j+0.5} \quad dla\ \ i \neq j \end{cases}$$

$$k = 8, m = 1$$

3 Kryteria stopu

$\left|\left|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right|\right| < \rho$

$\left|\left|Ax^{(i)} - b\right|\right| < \rho$

4 Norma stosowana w obliczeniach

$$||x||_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i|$$

5 Wyniki

Kolumna "Norma" zawiera wartość normy z różnicy między wektorem zadanym na początku a wektorem wyliczonym metodą Jacobiego.

5.1 Wyniki dla zerowego wektora początkowego

5.1.1 Kryterium stopu $\left|\left|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right|\right| < \rho$

n	ρ	Liczba iteracji	Czas [ms]	Norma
5	0.01	6	1.168	0.0023495756806111157
5	1e-05	14	0.486	1.7174090233273986e-06
5	1e-09	24	0.961	2.2246149367077805e-10
50	0.01	7	0.327	0.0026851217007035633
50	1e-05	15	0.568	1.5701051239158659e-06
50	1e-09	25	0.837	1.4699130801432148e-10
100	0.01	7	0.539	0.0032951220727652775
100	1e-05	15	0.716	2.125625766735695e-06
100	1e-09	25	0.983	3.223503686200502e-10
500	0.01	7	1.907	0.003301422454142555
500	1e-05	15	6.703	1.8672866024527224e-06
500	1e-09	25	8.104	1.626092593909334e-10
1000	0.01	7	11.007	0.0035679161774500034
1000	1e-05	15	20.55	2.0193126011314178e-06
1000	1e-09	25	33.758	1.833453389110673e-10
2000	0.01	7	62.61	0.003593400768517885
2000	1e-05	15	88.396	2.0320802751605527e-06
2000	1e-09	25	227.449	1.7717916023229918e-10
5000	0.01	7	859.22	0.003892103873146091
5000	1e-05	15	1150.621	2.202474891355166e-06
5000	1e-09	25	1340.553	2.0078183560201524e-10

5.1.2 Kryterium stopu $\left|\left|Ax^{(i)} - b\right|\right| < \rho$

n	ρ	Liczba iteracji	Czas [ms]	Norma
5	0.01	8	0.489	0.0003531863129944135
5	1e-05	15	0.71	8.698140803176102e-07
5	1e-09	26	1.077	3.695488359767296e-11
50	0.01	8	0.446	0.0007928299110886439
50	1e-05	16	0.666	4.699065754287801e-07
50	1e-09	26	1.017	4.28879154412698e-11
100	0.01	8	0.518	0.0009413154490366393

100	1e-05	16	0.8	8.349866433832176e-07
100	1e-09	26	1.231	1.29205424137524e-10
500	0.01	8	7.752	0.0007063369360560401
500	1e-05	16	12.734	4.1098923575511037e-07
500	1e-09	26	14.494	3.6459057994875366e-11
1000	0.01	8	24.926	0.0009956178518706338
1000	1e-05	16	44.247	7.794377179237699e-07
1000	1e-09	26	58.315	1.0642453585063549e-10
2000	0.01	8	198.061	0.0009812915435785108
2000	1e-05	16	231.652	7.591241587556752e-07
2000	1e-09	26	302.35	1.0232403813148494e-10
5000	0.01	8	1147.651	0.0007097177545601907
5000	1e-05	16	1538.205	4.113956911799832e-07
5000	1e-09	26	1764.416	6.391043250175699e-11

5.2 Wyniki dla wektora początkowego będącego permutacją zbioru {1000, -1000}

5.2.1 Kryterium stopu $\left|\left|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right|\right| < \rho$

n	ρ	Liczba iteracji	Czas [ms]	Norma
5	0.01	16	2.055	0.004226439620655054
5	1e-05	24	0.912	2.684697221422283e-06
5	1e-09	34	1.287	2.8943625274280294e-10
50	0.01	17	0.658	0.002597934908283417
50	1e-05	25	0.676	1.4845638849347864e-06
50	1e-09	34	0.69	3.0340596701705635e-10
100	0.01	17	0.703	0.003985330635591033
100	1e-05	25	0.599	3.6090748782857673e-06
100	1e-09	35	0.692	5.674520853204967e-10
500	0.01	17	10.254	0.0038101147929285872
500	1e-05	25	3.849	2.957001477676968e-06
500	1e-09	35	8.653	4.0128367295722e-10
1000	0.01	17	22.341	0.003007513728519484
1000	1e-05	25	26.15	1.7031138370704468e-06
1000	1e-09	35	41.235	1.4870771281039197e-10
2000	0.01	17	159.028	0.0030359711002118095
2000	1e-05	25	106.014	1.7183643936657944e-06
2000	1e-09	35	149.608	1.4991297092592504e-10
5000	0.01	17	1157.161	0.003401979295968305
5000	1e-05	25	1292.538	1.923701622774665e-06
5000	1e-09	35	1624.391	1.6784573730888042e-10

5.2.2 Kryterium stopu $\left|\left|Ax^{(i)} - b\right|\right| < \rho$

n	ρ	Liczba iteracji	Czas [ms]	Norma
5	0.01	18	0.81	0.0006674220468707581
5	1e-05	25	1.026	8.76423036921814e-07
5	1e-09	36	1.259	4.689582056016661e-11
50	0.01	18	0.746	0.0008014632884751904
50	1e-05	26	0.956	4.936790840570637e-07
50	1e-09	36	0.767	4.7761794519374234e-11
100	0.01	18	0.759	0.001666441834733079
100	1e-05	26	0.825	1.503774529232338e-06
100	1e-09	37	1.034	9.846468085328297e-11
500	0.01	18	14.614	0.0009083127658833234
500	1e-05	26	14.722	7.50411412564489e-07
500	1e-09	36	23.316	1.1436274149900783e-10
1000	0.01	18	44.431	0.0006539773278761984
1000	1e-05	26	59.101	3.8131812896136097e-07
1000	1e-09	36	76.228	3.402100823279852e-11
2000	0.01	18	167.006	0.0007117115296242371
2000	1e-05	26	248.231	4.014688148590295e-07
2000	1e-09	36	316.656	4.474376424923321e-11
5000	0.01	18	1466.758	0.0006379868565471458
5000	1e-05	26	1907.189	3.548651767992794e-07
5000	1e-09	36	2199.504	4.367350925349456e-11

5.3 Wnioski

Na podstawie powyższych danych można stwierdzić, że liczba iteracji metody nie zależy od rozmiaru rozwiązywanego układu, a jedynie od wartości ρ. Czas wykonania rośnie wraz z zmniejszeniem ρ oraz zwiększeniem rozmiaru układu.

Stosując kryterium stopu $\left|\left|Ax^{(i)} - b\right|\right| < \rho$ metoda ma dłuższy czas wykonania, co może być związane z koniecznością obliczania macierzy $Ax^(i)$ przy każdej iteracji. Jednakże przy zastosowanmiu tego kryterium wartości normy są o rząd wielkości mniejsze w porównaniu do wyników z kryterium $\left|\left|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right|\right| < \rho$.

Wybranie wektora początkowego znacznie oddalonego od wektora wynikowego skutkuje zwiększeniem liczby iteracji i wydłużeniem czasu, nie wpływa jednak na dokładność wyniku.

6 Promień spektralny

Promień spektralny jest wyliczany przy pomocy funkcji z biblioteki numpy (numpy.linalg.eigvals), która zwraca tablice wartości własnych dla zadanej macierzy. Mając wartości własne promień spektralny jest wyliczany ze wzoru: $\rho(M) = \max_{i=1}^{n} |\lambda_i|$ gdzie

M-macierz iteracji, λ-wartość własna.

n	Promień spektralny
5	0.4088762274491867
50	0.4163044986583178
100	0.4166615319528021
500	0.416948184556922
1000	0.4169838483178467
2000	0.4170016586467134
5000	0.4170123421211433

Wszystkie obliczone wartości promieni spektralnych są mniejsze od 1. Oznacza to, że dla danych rozmiarów macierzy metoda rozwiązywania układu równań jest zbieżna bez względu na wybór wektora początkowego. Zgadza się to z przeprowadzonymi obliczeniami.