

Funkcje

Błażej Kucman

28 stycznia 2016

Spis treści

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Funkcje | 2 |
| 1.1 | Funkcja Dirchleta | 2 |
| 1.1.1 | Właściwości | 2 |
| 1.2 | Funkcja Riemanna | 2 |
| 2 | Ciekawostki | 3 |
| 2.1 | Rodzaje funkcji liczbowych | 3 |
| 2.2 | Wartości funkcji trygonometrycznych | 3 |
| 2.3 | Znak funkcji trygonometrycznych w układzie | 3 |
| 2.4 | Wykres funkcji \sin | 4 |
| 2.5 | Funkcja logarytmiczna | 4 |

Spis rysunków

| | | |
|---|---------------------------------------|---|
| 1 | Wykres funkcji \sin | 4 |
| 2 | Wykres funkcji $y = \ln(x)$ | 4 |

Spis tablic

| | | |
|---|--|---|
| 1 | Wartości funkcji tryg... | 3 |
| 2 | Znak funkcji trygonometrycznych w układzie | 3 |

1 Funkcje

Funkcja (ac. functio, -onis, ódbywanie, wykonywanie, czynność") dla danych dwóch zbiorów \mathbf{X} i \mathbf{Y} przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru \mathbf{X} dokładnie jednego elementu zbioru \mathbf{Y} . Oznacza się je na ogół f , g , h itd

1.1 Funkcja Dirchleta

Funkcja Dirichleta – funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych \mathbb{Q} , tzn. funkcja zmiennej rzeczywistej, która przyjmuje wartość 1, gdy argument jest liczbą wymierną i wartość 0, gdy argument jest liczbą niewymierną

Formalnie funkcję Dirichleta można zapisać wzorem : (1)

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad (1)$$

Ponadto (2)

$$1_{\mathbb{Q}}(\mathbf{x}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n}(m\pi x) \quad (2)$$

1.1.1 Właściwości

- jest wszędzie nieciągła (tzn. nie jest ciągła w żadnym punkcie swojej dziedziny); stąd wynika, że jest wszędzie nieróżniczkowalna,
- jest okresowa, przy czym ma ona nieskończenie wiele okresów (każda liczba wymierna jest jej okresem) i nie ma okresu podstawowego,
- zbiór jej ekstremów jest mocy continuum,
- nie jest całkowalna w sensie Riemanna – w zależności od doboru podziału przedziału całkowania, aproksymacja prostokątami może dać dowolną sumę od zera do długości przedziału, zatem granica definiująca całkę Riemanna nie istnieje,
- jest całkowalna w sensie Lebesgue'a, przy czym jej całka Lebesgue'a na dowolnym przedziale jest równa zeru, ponieważ zbiór liczb wymiernych jest miary Lebesgue'a zero.

1.2 Funkcja Riemanna

Funkcja Riemanna (3) – funkcja rzeczywista zdefiniowana wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \text{ jest nie wymierne} \\ \frac{1}{n} & \text{gdy } x = \frac{m}{n} \text{ jest przedstawione w postaci ułamka nieskracalnego} \end{cases} \quad (3)$$

W szczególności, $f(x) = 1$ dla wszystkich argumentów \mathbf{x} całkowitych, ponieważ dla każdej liczby całkowitej x nieskracalną postacią ułamka $\frac{m}{n} = \mathbf{x}$ jest $\frac{x}{1}$

2 Ciekawostki

Rodzaje funkcji , wartości funkcji trygonometrycznych (2.2) i (2.3) , wykresy funkcji \sin (2.4) i (2.5) itd...

2.1 Rodzaje funkcji liczbowych

1. funkcja rosnąca;
2. funkcja malejąca;
3. funkcja nierosnąca;
4. funkcja niemalejąca;
5. funkcja monotoniczna
6. funkcje ograniczone
7. funkcja parzysta
8. funkcja nieparzysta
9. funkcja okresowa;
10. funkcja ciągła;

2.2 Wartości funkcji trygonometrycznych

| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|
| $\sin \alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos \alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | 0 |
| $\tan \alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - |
| $\cot \alpha$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

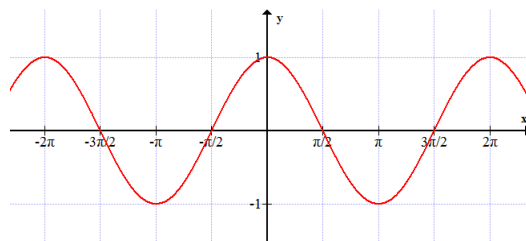
Tablica 1: Wartości funkcji tryg...

2.3 Znak funkcji trygonometrycznych w układzie

| Ćwiartka układu współrzędnych | \sin | \cos | \tan | ctg | $\sec = \frac{1}{\cos}$ | $\text{cosec} = \frac{1}{\sin}$ |
|-------------------------------|--------|--------|--------|--------------|-------------------------|---------------------------------|
| I | + | + | + | + | + | + |
| II | + | - | - | - | - | + |
| III | - | - | + | + | - | - |
| IV | - | + | - | - | + | - |

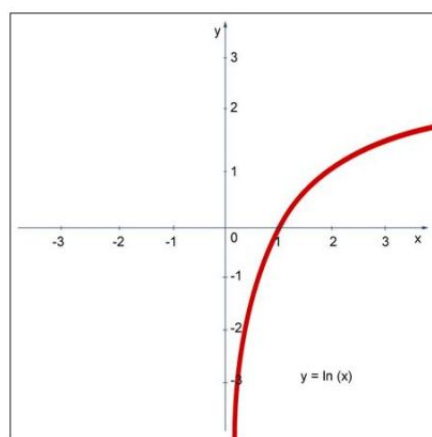
Tablica 2: Znak funkcji trygonometrycznych w układzie

2.4 Wykres funkcji \sin



Rysunek 1: Wykres funkcji \sin

2.5 Funkcja logarytmiczna



Rysunek 2: Wykres funkcji $y = \ln(x)$

Literatura

- [1] REGEL WIESŁAWA, *81 zadań o funkcjach zespolonych z pełnymi rozwiązaniami krok po kroku*. Data wydania: 2014-05-23
- [2] <https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja>
- [3] https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja_Dirichleta
- [4] https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja_Riemanna