CC3039, Modelación y Simulación
Sección 20
Ricardo Méndez, 21289
Sara Echeverría, 21371
Melissa Pérez, 21385

Laboratorio No. 4

Parte I

Suponga que en un escenario totalmente ficticio existe un virus conocido como el virus T. Se ha descubierto que este existe en el 0.5% de la población, y a la vez se ha desarrollado una prueba que es efectiva detectando el 97% de las veces si una persona está infectada. Pero, esta prueba da un falso positivo el 0.1% de las veces. Considerando esto conteste:

a. Si una persona resulta con una prueba positiva para el virus T, ¿cuál es la probabilidad de realmente tener dicho virus?

Utilizando el teorema de Bayes: $P(I|P) = \frac{P(P|I) * P(I)}{P(P)}$

Sabiendo que:

- $P(I) = 0.005$ probabilidad de una persona infectada con el virus
- $P(P|I) = 0.97$ probabilidad de una prueba positiva teniendo el virus
- $P(FP) = 0.001$ probabilidad de un falso positivo
- $P(\neg I) = 1 - P(I) = 0.995$ probabilidad de una persona no infectada
- $P(P)$ probabilidad total de una prueba positiva

Calculando la probabilidad de una prueba positiva:

$P(P) = P(P|I) * P(I) + P(FP) * P(\neg I)$

$P(P) = (0.97 * 0.005) + (0.001 * 0.995)$

$P(P) = 0.005845$

Calculando la probabilidad de una prueba positiva teniendo el virus:

$P(I|P) = \frac{0.97*0.005}{0.005845} \approx 0.829$

∴ La probabilidad de que una persona tenga el virus teniendo un resultado positivo es de aproximadamente 82.9%

b. Si un grupo de 5 personas se han tratado de refugiar y para ello han hecho una prueba cada uno. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 resulten positivos? Si dado el caso estos tres resulten positivos en la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 tengan el virus?

Utilizando la distribución binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$

- Número de personas: $n = 5$
- Número de resultados positivos: $k = 3$
- Probabilidad de un resultado positivo $p = P(P) = 0.005845$

Calculando que 3 resulten positivos

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} * (0.005845)^3 * (1 - 0.005845)^{5-3}$$

$$P(X = 3) = 10 * (0.005845)^3 * (1 - 0.005845)^2 = 0.0000197$$

Calculando que al menos 2 de las 3 tengan el virus

$P(2|3) = 1 - [P(0|3) + P(1|3)]$ (probabilidades: izquierda infectados, derecha positivos)

Conociendo que la probabilidad de una prueba positiva teniendo el virus es: $P(I|P) = \frac{0.97*0.005}{0.005845} \approx 0.829$. Su complemento $P(\neg I|P) = 0.171$.

Entonces:

$$P(0|3) = \binom{3}{0} * (0.171)^3 = 0.005$$

$$P(1|3) = \binom{3}{1} * 0.171 * (0.829)^2 = 0.102$$

$$P(2|3) = 1 - (0.005 + 0.102) = 0.893$$

∴ La probabilidad de que 3 de 5 personas resulten positivos al virus es muy pequeña, siendo de 0.00197%. Por otro lado, la probabilidad que al menos 2 tengan el virus dado que 3 resultaron positivos es de 89.3%.