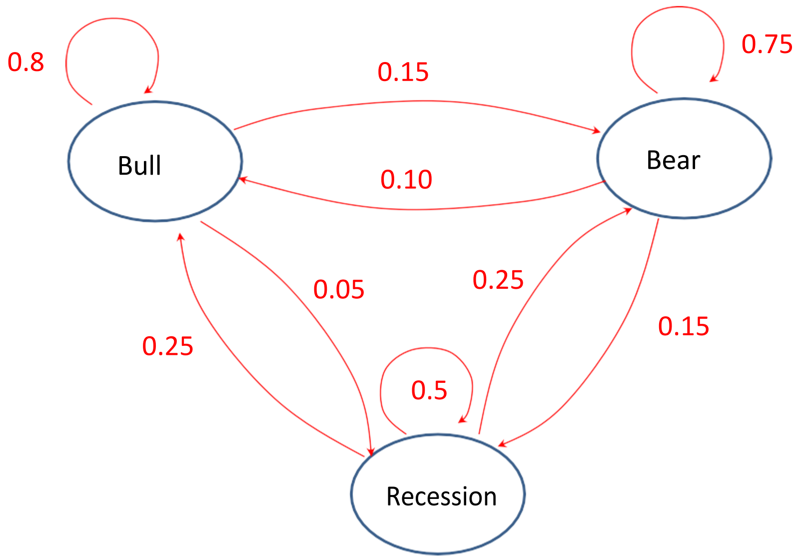
Leif Olsson
Magnus Eriksson, magnus.eriksson@miun.se

Laboration: Markovkedjor och köteori

Man har genom att studera den finansiella marknaden under en längre tid funnit ett samband mellan vad som kallas Bull, Bear samt Recession.

En marknad är i Bull då man förväntar sig en uppgång, Bear om man förväntar en nedgång och är det riktigt dåligt har vi Recession, vilket ofta sammanfaller med en omvärld i gungning som t.ex. vid finanskrisen 2008.

Sambandet en given vecka är illustrerat i Figur 1:



Figur 1: Rådande marknadssituation under en given vecka

Från Figur 1 kan man räkna ut hur fördelningen kan väntas vara på lång sikt gällande Bull, Bear samt Recession. Detta kan vara till hjälp för de som investerar i marknaden.

Uppgift 1: Iterativ numerisk beräkning

(a) Sätt upp överföringsmatrisen P för problemet i Figur 1 så att radsumman blir 1.

(b) Anta en startvektor (radvektor) och en toleransnivå samt gör ett program som iterativt beräknar hur tillståndssannolikheterna konvergerar mot en stationär lösning. Beskriv den metod du har valt för att beräkna det fel som jämförs med toleransnivån; är det en ett-norm (summan av absolutbeloppen av felen), två-norm (roten ur medelvärdet av kvadratiska felen) eller oändlighetsnorm (max av absolutbeloppen)?

(c) Ange stationära lösningen samt hur många iterationer det tar till den når lösningen vid en viss toleransnivå.

(d) Har startvektorn betydelse för det stationära resultatet, dvs är det en icke-ergodisk process?

(e) Har startvektorn betydelse för konvergenstiden? Vilken startvektor ger isåfall snabbast lösning, inom en iteration?

Uppgift 2: Exakt beräkning

Verifiera svaret i Uppgift 1 genom att lösa ekvationer för stationära sannolikheter (ett egenvärdesproblem), genom att sätta nuvarande tillstånd lika med nästa tillstånd, och kombinera det med att summan av sannolikheterna ska bli 1. Använd gärna flera metoder: Du kan handräkna med insättningsmetoden eller gausselimination, beräkna genom matrisinvers eller vänstermatrisdivision (`\` i Matlab), använda symbolic processing toolbox eller använda webbplatsen Wolfram Alpha.

Uppgift 3: Stokastisk simulering

Skapa en stokastisk simulering (Monte Carlo-simulering) av Markovkedjan med hjälp av slumptalsgenerering och metoden *inverse transform sampling*. Slumpa ett starttillstånd k som talen 1, 2 eller 3, eventuellt baserat på en startvektor. Om nuvarande tillstånd är k, anges sannolikheterna för nästa tillstånd av rad k i övergångsmatrisen, dvs av `P(k,:)` med Matlab-kod. Beräkna tillståndens frekvenser som `f(k)=f(k)+1`. De relativa frekvenserna `f/sum(f)` konvergerar mot den stationära fördelningen. Ungefär hur många iterationer tar det innan tillståndens frekvenser konvergerar mot en stationär lösning med rimlig noggrannhet? Är detta snabbare eller långsammare än metod 1?

Uppgift 4: Markov-egenskapernas betydelse

Genom att ändra lite i övergångssannolikheterna i Figur 1 kan man analysera hur den stationära lösningen ändras. Ge exempel på en förändring av sannolikheterna som skulle ge en icke-ergodisk process och därmed inte skulle ge stationär lösning oberoende av initialtillståndet, dels

(a) i form av en periodisk (cyklisk, deterministisk) kedja, dels

(b) en reducibel stokastisk process där alla tillstånd inte kommunicerar, och den stationära lösningen därför beror av initialtillståndet.

(c) Ge även exempel på en icke-minnesfri process genom att införa villkor i tillståndsdiagrammet.

(d) Diskutera för vilka av dessa processer (som inte uppfyller Markov-egenskaperna) som den stationära sannolikheten för valfri startvektor potentiellt skulle kunna beräknas med metoderna i uppgift 1, 2 respektive 3. I vilka fall måste metoden i uppgift 1 och 3 kompletteras med en yttre loop som slumpar flera olika starttillstånd, och beräknar ensemblemedelvärdet av de olika utfall som då erhålles?

Uppgift 5: Kösystem

Betrakta en liten butik med plats för fyra kunder. Den kan vara i fem olika tillstånd: 0, 1, 2, 3 eller 4 kunder i butiken. Två kassörer betjänar högst två kunder samtidigt, medan övriga kunder står i kö. Vid fyra kunder i butiken väntar således två i kö medan två betjänas. Ytterligare anländande kunder möts då av en låst dörr och skylten ”Fullt - var god återkom senare”. Kundernas ankomst är en Poissonprocess med intensiteten $\lambda = 0,3$ kunder per minut. Även betjänandet är en Poissonprocess, det vill säga tiden att betjäna en kund är exponentialfördelad med väntevärdet $1/\mu$ minuter, där μ är serviceintensiteten 0,2 avslutade ärenden per minut, när endast en kassa har en kund. Om båda kassorna betjänar kunder så blir systemets totala serviceintensitet 2μ avslutade ärenden per minut. Kunder kan endast anlända till och lämna butiken varje hel minut (tidluckestorleken). Försumma sannolikheten att två eller fler kunder anländer samma minut, och att två eller fler blir färdiga samma minut.

a) Detta är en M/M/2/4-kö. Förklara innebörden av beteckningen.

b) Rita Markovkedjans tillståndsdiagram med korrekta övergångssannolikheter. Notera att summan av utgående sannolikheter från ett tillstånd (inklusive sannolikheten att systemet stannar i samma tillstånd) ska vara 1.

c) Sätt upp övergångsmatrisen för ditt tillståndsdiagram. Radsumman ska vara 1.

d) Beräkna den stationära fördelningen med valfri av ovanstående metoder (en eller flera).

e) Utifrån denna fördelning, beräkna genomsnittligt antal kunder i butiken efter att stationärt tillstånd har inträtt. Använd ett viktat medelvärde.

f) Uppskatta kundernas genomsnittliga tid i butiken (och/eller i kön) enligt Littles sats (Little’s law).