

1 STROJNO UCENJE

1.1 PROBLEMSKI PROSTOR, OCENJEVANJE ZNANJA

1.2 EVALVIRANJE HIPOTEZ

Pomembni kriteriji:

- **konsistentnost** hipotez z primeri (ucnimi)
- **splosnost** (tocnost za nevidene primere)
- **razumljivost** hipotez

TP=true positive, TN=true negative, FP=false positive (napaka 1. tipa), FN=false negative (napaka 2. tipa)

Klasifikacijska tocnost = $\frac{TP+TN}{TP+TN+FP+FN} = \frac{TP+TN}{N}$

Obcutljivost/senzitivnost = $TPR = \frac{TP}{TP+FN}$

1.3 GRADNJA ODLOCITVENIH DREVES

Az koliko se entropija zmanjsa po delitvi z Atributom A:

Informacijski prispevek: $Gain(A) = H(A) - H_{res}(A)$

$H_{res} = -\sum_{v_i \in A} P v_i \sum_c p(c|v_i) \log_2 p(c|v_i)$

Razmerje inofrmacijskega prispevka atributa A:

IGR(A) = $\frac{Gain(A)}{H(A)}$

1.3.1 TDIDT (TOP DOWN INDUCTION DECISION TREE) ALGORITHM

Pozresen algoritem, ki **lokalno** izbira najbolsi atribut.

- kratkoviden algoritem

1.3.2 BINARIZACIJA ATRIBUTOV

Alternativa za resevanje problematike z vecvrednostnimi atributi:

Strategije (za primer B = {Y, G, R, B}):

- $\{[Y], [R, G, B]\}$ (one-vs-all)
- $\{[Y, R], [G, B]\}$
- vpeljava bianrnih atributov za vsako barvo

Primer B = {Y, G, R}, konstruiramo 3 nove binarne atribute:

barva	Y	G	R
Y	1	0	0
G	0	1	0
R	0	0	1

Prednost: manjse vejnanje drevesa.

1.4 UCENJE IZ SUMNIH PODATKOV (REZANJE)

tocnost t...verjetnost pravilnosti klasifikacije

napaka e ... 1 - t

relativna frekvenca $p = \frac{n}{N}$

m-ocena $p = \frac{n+p_a \cdot m}{N+m}$

m... koliko zaupam apriorni verjetnosti

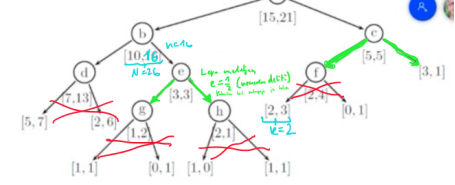
p_a apriorna verjetnost (domenski ekspert lahko pove)

Laplacova ocena verjetnosti $p = \frac{n+1}{N+k}$

k...stevilo vseh moznih razredov

1.4.1 MEP (MINIMAL ERROR PRUNNING)

e...statnica napaka, E...vzvrtna napaka, $e \leq E \rightarrow$ rezemo poddrevo



(Laplace)

$e_L(d) = 1 - t = 1 - \frac{13+1}{20+2} = 0.363$

$E_L(d) = 12/20 \cdot e_L(d_1) + 8/20 \cdot e_L(d_d) = \frac{12}{20} \cdot (1 - \frac{7+1}{12+2}) + \frac{8}{20} \cdot (1 - \frac{13+1}{20+2})$

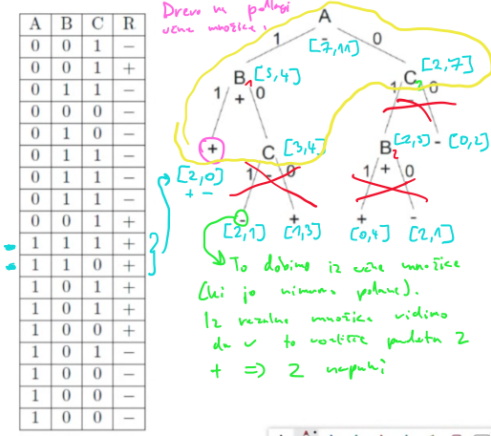
1.4.2 REP (REDUCED ERROR PRUNNING)

Dela dobro ce imamo veliko rezalno mnozico.

Obicajno uporabljamo relativno frekvenco za ocenjevanje verjetnosti.

$G(v) = \#napak_T - \#napak_v$

$G(v) \geq 0 \Rightarrow$ rezemo poddrevo



$e(C) = 3$

$e_T = 2 + 3 = 5$

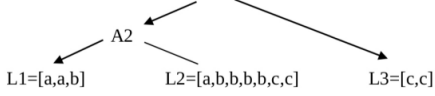
$G(C) = 5 - 3 = 2 \geq 0 \rightarrow$ rezemo

1.5 OCENJEVANJE USPEŠNOSTI MODELOV

tocnost t ... verjetnost pravilnosti klasifikacije

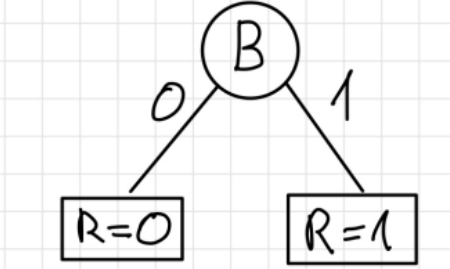
Laplacova ocena verjetnosti $p = \frac{n+1}{N+k}$

k...stevilo vseh moznih razredov list.



$t_{L1} = \frac{2+1}{3+3} = 0.5, t_{L2} = \frac{4+1}{7+3} = 0.5, t_{L3} = \frac{2+1}{2+3} = 0.6$

tocnost drevesa: $t_D = 3/12 \cdot 0.5 + 7/12 \cdot 0.5 + 2/12 \cdot 0.6 = 0.5167$



$e = 1 - (P(B=0)P(R=0|B=0) + P(B=1)P(R=1|B=1))$

1.6 OBRAVNANVA MANKAJOCIH ATRIBUTOV, NAVINI BAYESOV KLASIFIKATOR

1.6.1 NAIVNI BAYES

Ce poznamo razred, kam klasificiramo ce nepoznamo atributov:

Klasifikator: $\text{argmax}_{c \in C} P(c) \prod_{i=1}^n P(x_i|c)$

c...razred, x_i...atributi

Verjetnost::

$P(C = c|x_1, \dots, x_n) = \frac{P(C = c)P(X_1 = x_1|C = c)P(X_2 = x_2|C = c) \dots}{P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \dots}$

Primer moski: visina ≥ 175, teza ≥ 65, spol = M

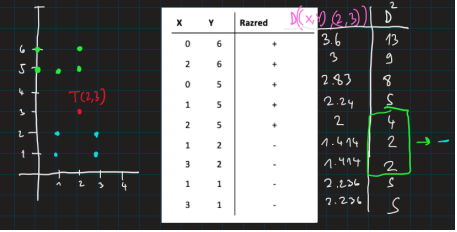
X\Y	Razred A	Razred B
p _a	$P(A) = \frac{2}{3}$	$P(B) = \frac{1}{3}$
spol	$P(M A)$	$P(M B)$
visina	$P(V \geq 175 A)$	$P(V \geq 175 B)$
teza	$P(T \geq 65 A)$	$P(T \geq 65 B)$
$P(y) \prod_{i=1}^n P(x_i y)$

1.6.2 NOMOGRAMMI

Ciljni razred $C = c_T$

$X_{X_i} = x_j = \ln \left(\frac{P(X_i = x_j|C = c_T)}{P(X_i = x_j|C = \bar{c}_T)} \right)$

1.7 K-NAJBILZIJIH SOSEDOV



2 VRSTE UCENJA

2.1 NADZOROVANO UCENJE (SUPERVISED LEARNING)

Ucni primeri so podani/oznaceni kot vrednosti vhodov in izhodov.

$(\vec{x}_1, \vec{y}_1), (\vec{x}_2, \vec{y}_2), \dots, (\vec{x}_N, \vec{y}_N)$

$\vec{x}_i \dots$ atributi, $\vec{y}_i \dots$ ciljna spremenljivka

Locimo dve vrsti problemov:

1. **Klasifikacijski problemi** - y_j diskretna
2. **Regresijski problemi** - y_j zvezna

2.1.1 LOKALNO UTEZENA REGRESIJA

$$h(\vec{x}_i) = \frac{\sum_{i=1}^k w_i \cdot f(\vec{x}_i)}{\sum_{i=1}^k w_i}, w_i(d) \dots utez$$

A	B	C	dolžina	$k(x_i, x_j)$	w_i	$w_i \cdot f(w_i)$
0	0	0	9	4	1/5	0/5
0	0	0	10	4	1/5	2
0	1	1	9	2	1/3	3
0	2	0	12	2	1/3	4
0	2	1	12	1	1/2	6
1	0	0	12	2	1/4	3
1	0	1	15	3	1/4	11/4
1	1	1	11	1	1/2	11/2
1	1	1	15	1	1/2	15/2
1	1	1	9	1	1/2	3/2
1	2	0	9	1	1/2	3/2
1	2	1	12	0	1	12

Z lokalno utezeno regresijo zelimo napovedati dolžino postvi z atribut $x_j = (A = 1, B = 2, C = 1)$. Pri izracunu uporabi:
• Manhattansko razdaljo za merjenje razdalj,
• jedrno funkcijo $w_i = \frac{1}{1 + d_i}$.

2.1.2 REGRESIJSKA DREVEŠA

Linearna regresija je poseben primer regresijskega drevesa.

V listih regresijskega drevesa vcasih napovemo kar povprečno vrednost.

2.2 NENADZOROVANO UCENJE (UNSUPERVISED LEARNING)

Ucni primeri niso oznaceni (nimajo ciljne spremenljivke), **ucimo se vzorcev v podatkih**, (npr. grucenje)

2.2.1 HIERARHICNO GRUCENJE

Poveze po podobnosti med primeri, primer zacne kot samostojna gruca, na koncu vsi primeri pripadajo eni gruci

Dendrogram: drevo, ki predstavlja grucenje.

Single-linkage: povezava med grucami je najkrajse razdalje med primeroma iz razlicnih gruc.

Complete-linkage: povezava med grucami je najdaljsa razdalja med primeroma iz razlicnih gruc.

Average-linkage: povezava med grucami je povprečna razdalja med primeroma iz razlicnih gruc.

2.2.2 K-MEANS

1. V prostor dodamo k centroidov, ki predstavljajo gruce.

2. Izracunamo ketri centroid je najblizji vsakemu primeru.

3. Izracunamo nove centre gruc $= \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} x_i$

4. Ponovimo korake 2 in 3 dokler se centri ne premaknejo.

2.3 SPODBUJEVALNO UCENJE - REINFORCEMENT LEARNING

Inteligentni agent se uci iz zaporedja **naprad** in **kazni**

2.4 OCENJEVANJE UCENJA

2.4.1 PRECNO PVERJANJE

Poseben primer **veckratnega ucenja** in testiranja

k-kratno precno preverjanje

- celo ucno mnozico razbij na k disjunktnih podmnozic
- za vsako od k podmnozic:
 - uporabi **mnozico** kot **testno mnozico**
 - uporabi **preostalih k-1** mnozic kot **ucno mnozico**
- povprecni dobljenih k ocen tocnosti v koncno oceno
- Pri precnem preverjanju uporabimo vse podatke za testiranje in vse za ucenje

Metoda **leave one out** je poseben primer precnega preverjanja

Imamo dve hipotezi A in B. Izkaze se, da A bolje napoveduje na uc-nih podatkih B pa na testnih. Potem je B verjetno boljsa hipoteza.

3 PREISKOVANJE

3.1 NEINFORMIRANI PREISKOVALNI ALGORITMI

3.1.1 ISKANJE V SIRINO

3.1.2 ISKANJE V GLOBINO

Izboldsave:

- Iskanje s sestopanjem

- **depth-limited-search** (vnapej definiramo globino l Mejo l (dolocimo preko domenskega znanja))

3.1.3 ITERATIVNO POGLABLJANJE

problem gobinsko omejenega iskanja -> nastavitev meje l Mejo l postopoma povecujemo za 1, dokler ne najdemo resitve.

- **popolnost:** Da
- **optimalnost:** Da
- **casovna zahtevnost** $O(b^d)$
- **prostorska zahtevnost** $O(bd)$

Boljshe od iskanja v globino/sirino

3.1.4 DVOSMERNO ISKANJE

Ideja: pognati vzporedni iskanji od zacetka do cilja in od cilja do zacetka.

Motivacija:

Implemenatcija dvosmernega iskanja

- ciljno vozlisce mora biti znano

- originalni problemski prostor preslikamo v dvosmerni prosto stanj E1, E2 dosegljiv iz E in S1,S2,S3 dosegljiv iz S (S,E) -> (S1, E1), (S1,E2), (S2, E1), (S2, E2)... Vozlisce (Si, Ei) je v dvosmernem prostoru ciljo vozlisce ce velja E=S (soda dolzina na isto mesto pridemo iz obeh strani) ali S->E (liha pot sosednja)

3.1.5 CENOVNO - OPTIMALNO ISKANJE

- posplošitev iskanja v sirino (iskanje v sirino je optimalno, ce so cene vseh povezav enake 1)

- dijkstra basically (sam do zadnga noda)

- https://stackoverflow.com/a/14587449

3.2 INFORMIRANI PREISKOVALNI ALGORITMI

3.2.1 HEVRISTICNO PREISKOVANJE

ideja: preiskovanje usmerjamo z dodatnim znanjem (ocenitven funkcija za obetavnost vozlišca)

hevristika je ocenitvena funkcija za obetavnost vozlišca

- **optimisticna/dopustna**: $h(n) \leq h^*(n)$ (h^* je optimalna ocena)

- **optimalna**: $h(n) = h^*(n)$

- **pesimisticna**: $h(n) \geq h^*(n)$

3.2.2 POZRESNO PREISKOVANJE/ GREEDY BEST-FIRST SEARCH

$h(n)$ hevristicna ocena

vrednotenje vozlišca $f(n) = h(n)$ hevristicna ocena ... npr manhattan distance (zračna razdalja)

- **popolnost** (ali najde vedno rešitev): Ne
- **optimalnost**: Ne
- **casovna zahtevnost** $O(b^m)$, kjer je m največja globina drevesa

3.2.3 A*

A* is informed version of **dijkstra** (uses heuristics and pq)

Vozlišca vrednotimo: $f(n) = g(n) + h(n)$

$g(n)$ cena poti do n (znano),

$h(n)$ cena od n do najbližjega cilja (ocena)

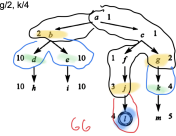
prioritetna vrsta (max glede na $f(n)$) Basically dijkstra + $h(n)$ (A* is basically an informed variation of Dijkstra.)

- **popolnost**: Da (ce ustreza pogoju dopustnosti)
- **optimalnost**: Da (ce ustreza pogoju dopustnosti)
- **casovna zahtevnost** $O(b^m)$, kjer je m največja globina drevesa

3.2.4 IDA* (ITERATIVE DEEPENING A*)

DFS with heuristics and iterative bound (value)

- primer:
 - podane so vrednosti $f(n)$ (= $g(n) + h(n)$) vozlišč
 - simuliraj preiskovanje z IDA*
- generirana vozlišča
 - 1. iteracija, meja=1: a/1, b/2, c/1, f/1, j/3, g/2
 - 2. iteracija, meja=2: a/1, b/2, d/10, e/10, c/1, f/1, j/3, g/2, k/4
 - 3. iteracija, meja=3: a/1, b/2, d/10, e/10, c/1, f/1, j/3, i/4, g/2, k/4
 - 4. iteracija, meja=4: a/1, b/2, d/10, e/10, c/1, f/1, j/3, i/4



Ucinkovitost

- neucinkovit ce vozlišca raznolika $f(n)$
- prednost: ne hrani vec vseh vozlišc kot A*
- optimalen: ce razvija v prioriteten vrstnem redu, $h(n)$ mora biti **monotona**/**konsistentna** ($h(n)$ skos pada) (posledicno tudi dopustna)

$$h(n) \leq c(n, n') + h(n')$$

(h naslednjega vozlišca manjši ker je bližji cilja)

- monotona \rightarrow dopustna (proti primer $h(n) = 0$)

3.2.5 KAKOVOST HEVRISTICNIH FUNKCIJ

7	2	4
5		6
8	3	1

Primer igra 8 ploscic

- h_1 : stevilo ploscic ki niso na pravem mestu (8)

- h_2 : vsota manhattanskih razdalj ploscic do pravega mesta ($3+1+2+2+3+3+2=18$)

Kakovost h ocenimo z:

- stevilom generiranih vozlišc

- z efektivnim faktorjem vejanja (koliko vozlišc N je algoritem general da je na globini d nasel rešitev)

Globina	število generiranih vozlišč			efektivni faktor vejanja		
	IDS	A*(h1)	A*(h2)	IDS	A*(h1)	A*(h2)
2	10	6	3	2,45	1,79	1,79
4	112	13	12	2,87	1,48	1,45
6	880	20	18	2,73	1,34	1,30
8	6384	39	25	2,80	1,33	1,24
10	47127	93	39	2,79	1,38	1,22
12	3644035	227	73	2,78	1,42	1,24
14	?	539	113	?	1,44	1,23
16	?	1301	211	?	1,45	1,25
18	?	3056	363	?	1,46	1,26
20	?	7276	676	?	1,47	1,27
22	?	18094	1219	?	1,48	1,28
24	?	39135	1641	?	1,48	1,26

Vidimo $h_2(n) \geq h_1(n) \forall n$ pravimo h_2 **dominira** h_1

3.3 LOKALNO PREISKOVALNI ALGORITMI

3.3.1 PLEZANJE NA HRIB

Ne pomnemo poti do cilja, ampak samo trenutno stanje

Koristni v primerih:

- ce nas zanima samo kakovost resitve (in ne pot do cilja)

- reševanje optimizacijskih problemov (kjer je podana **kriterijska funkcija** za oceno kakovosti resitve)

Prednosti:

- majhna poraba prostora

Primer 4 kraljice na šahovnici - kriterijska funkcija: maksimiziramo - (minus) stevilo kraljic, ki se medsebojno napadajo

Tezave:

- lokalni maksimumi
- "rame, plaote" (kriterijska funkcija konstantna vrednost)
- grebeni (za plezanje navzgor je potreben sestop po pobočju grebena)

Reševanje iz lokalnih maksimumov:

- **koraki vstran**: ce ima naslednje stanje isto vrednost kriterijske funkcije, dovolimo premik v to stanje
- **stohastično plezanje** na hrib: iz množice boljših stanj, verjetnostno izberemo naslednje stanje (pri cemer upostevamo da imajo boljša stanja večjo verjetnost izbora)
- **naključni ponovni zagon**: večkrat pozeni plezanje na hrib iz naključnih stanj dokler ne najdes rešitve

3.3.2 SIMULIRANO OHLAJANJE

algoritem ki izvira iz metalurgije (ko je jeklo tekoce, so molekule v njem bolj gibljive; ko se ohlaja se strjuje in molekule se umirjajo) Analogija:

- generiramo naključne sosedne trenutnega stanja

- ce najdemo **boljše stanje** ga izberemo

- ce najdemo **slabše stanje**, ga izberemo z **določeno verjetnostjo**

- verjetnost izbire neoptimalnega stanja s casom pada (nizanje temperature)

3.3.3 LOKALNO ISKANJE V SNOPU

Algoritem:

- v spominu hrani k aktualnih stanj namesto enega

- izberi k optimalnih stanj od sosedov aktualnih stanj

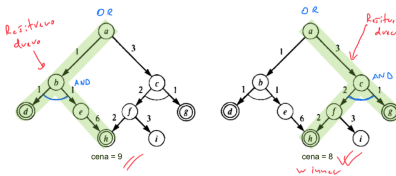
- ponavljaj do ustavitnega pogoja

3.4 PREISKOVANJE GRAFOV AND/OR, NEDETERMINISTICNO OKOLJE Pomagajo reševati probleme z **dekompozicijo** na manjše probleme Uporabnost:

- princip deli in vladaj
- iskanje v nedeterminističnih okoljih
- igre med dvema nasprotnikoma s popolno informacijo (sah, dama)
- ekspertno reševanje problem

Primer graf dekompozicija v dva manjša problema skozi g in f

Resitveno drevo je resitev AND/OR grafov



3.4.1 AO*

- posplošitev A* na grafe AND/OR
- **popoln in optimalen** $\Leftrightarrow h(n)$ ne precenjuje dejanske cene do cilja

$F(N)$... ocena za usmerjanje preiskovanja

$H(N)$... dinamična hevristicna ocena

Postopek:

1. Razvij najcenejše vozlišce
 - ce list in končno (oznaci), preveri 3. korak, nadaljuj v 1.
 - ce list in ni končno (oznaci) vrednost vozlišca = ∞
2. Posodobi vse predhodnike
 - v AND starših, cena starša = \sum sinov + povezava v
 - v OR starših, cena starša = \min (sinovi) + povezava v
3. Končaj ko obstaja pot od začetnega vozlišca, po kateri v AND vozlišcih po vseh sinovih prides do cilja, v OR vozlišcih v vsaj enem

3.4.2 PREISKOVANJE V NEDETERMINISTICNEM OKOLJU:

Nedeterministična akcija - ista akcija lahko obrodi različna ciljna stanja

Do rešitve ni več **poti** temveč **drevesa** (uporabljam AND/OR grafe) Vozlišca OR **mozne akcije**, vozlišca AND **vejanja v možna stanja**, ko se rezultat nedeterminističnih akcij

3.5 PREISKOVANJE BREZ INFORMACIJ O STANJU

Okolja smo razdelili na **transparent** (agent lahko zazna popolno informacija) in **netransparentna** (brez informacije o stanju)

Kej ce imamo opravka z netraspranetim okoljem?

- izvajamo preiskovanje prostora **verjetnih** stanj in ne prostora **dejanskih** stanj

- izvajamo s postopkom omejevanja množnosti kandidatnih stanj

3.6 IGRANJE IGER

3.6.1 PREDSTAVITEV PROBLEMA

3.6.2 ALGORITEM MINIMAX

- m globina - b

3.6.3 REZANJE ALFA-BETA

4 PLANIRANJE

plan zaporedje akcij, ki pripelje od začetnega do končnega stanja

4.1 PLANIRANJE S SREDSTVI IN CILJI (STRIPS)

Agentu opisemo svet in postavimo fizikalne omejitve.

Ne zagotavljaja optimalne rešitve, obravnavamo le en cilj naenkrat (ko ga dosežemo, se lahko ostali izgubijo) = Sussmanova anomalija

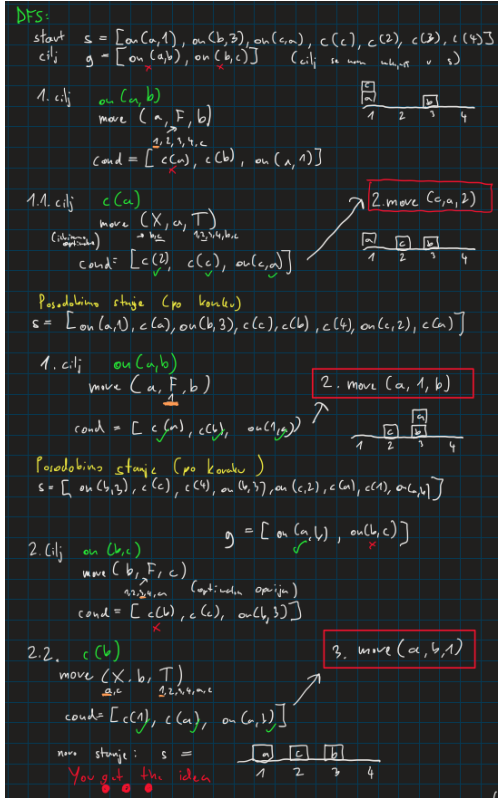
Akcija move(X, From, To)

- pogoj: **cond**=[$\text{clr}(X)$, $\text{on}(X,F)$, $\text{clr}(T)$] \rightarrow pogoji za izvajanje akcije,
- poz. učinki: **adds**=[$\text{on}(X, T)$, $\text{clr}(F)$] \rightarrow nova stanja,
- neg. učinki: **dels**=[$\text{on}(X, F)$, $\text{clr}(T)$] \rightarrow izbrisana stanja,
- omejitve: **constr**=[$F \neq T$, $X \neq F$, $X \neq T$, $\text{block}(X)$] \rightarrow omejitve akcij (fizikalne omejitve),

Algoritem:

1. Izberi se neresen cilj iz množice CILJEV
2. Izberi akcijo, ki izbrani cilj doda v stanje
3. Omogoči izbrano akcijo (izpolni pogoje)
4. Izvedi akcijo (ki izpolni največ pogojev)
5. Ce obstajajo nereseni cilji \Rightarrow 1.

Primer dfs, zlaganje kock



4.2 PLANIRANJE Z REGRESIRANJEM CILJEV (STRIPS)

Resitev za sussmanovo anomalijo

Zacnemo v ciljih, regresiramo do zacetka ($G_i \subset S_0$):

1. $G_{i+1} = G_i \cup \text{cond}(A) - \text{adds}(A)$
2. **POGOJ**: $G_i \cap \text{dels}(A) = \emptyset$
3. Preveri da ni protislovja (npr. $G_{i+1} = [\text{on}(b,c), \dots, c(c) \dots]$)

→ zactno_stanje = [on(a,1), on(b,a), c(b), on(c,3), c(c)]
→ hocemo da zacetno_stanje ∈ G_i

- $G_0 = [\text{on}(a,b), \text{on}(b,c)]$
 - on(a,b):** $A_0 = \text{move}(a, \text{From}, b)$
 - From = 1
 - POGOJ: $G_0 \cap \text{dels}(A_0) = \emptyset$ ✓
 - $G_1 = [\text{on}(a,b), \text{on}(b,c), c(a), c(b), \text{on}(a,1)] - [c(1), \text{on}(a,b)]$ ✓
- $G_1 = [\text{on}(b,c), c(a), c(b), \text{on}(a,1)]$
 - c(a):** $A_1 = \text{move}(X, a, \text{To})$
 - X = c, To = 2
 - POGOJ: $G_1 \cap \text{dels}(A_1) = \emptyset$ ✓
 - $G_2 = [\text{on}(b,c), c(a), c(b), \text{on}(a,1), \underline{c(c)}, c(2), \text{on}(c,a)]$
-[c(a), on(c,2)] ✗ (protislovje)
 - on(b,c):** $A_2 = \text{move}(b, \text{From}, c)$
 - From = 3
 - POGOJ: $G_2 \cap \text{dels}(A_2) = \emptyset$ ✓
 - $G_2 = [\text{on}(b,c), c(a), c(b), \text{on}(a,1), c(c), c(b), \text{on}(b,3)]$ ✓
- $G_2 = \dots$

4.3 RAZPOREJANJE OPRAVIL (PDDL)

Razsirimo lahko notacijo (PDDL):

Akcija1 < Akcija2: Akcija1 se mora zgoditi pred Akcijo2

Resources podajo stevila razpoložljivih resursov

DURATION opredeljuje trajanje posamezne akcije

CONSUME opredeljuje (trajno) porabo določene količine resursov

USE opredeljuje (zacasno) zasedenost količine resursov med

izvajanjem akcije

```
Jobs (AddEngine1 < AddWheels1 < Inspect1,
      AddEngine2 < AddWheels2 < Inspect2 )
Resources (EngineHoists(1), WheelStations(1), Inspectors(2), LugNuts(500))

Action (AddEngine1 , DURATION:30,
        USE:EngineHoists(1))
Action (AddEngine2 , DURATION:60,
        USE:EngineHoists(1))
Action (AddWheels1 , DURATION:30,
        CONSUME:LugNuts(20), USE:WheelStations(1))
Action (AddWheels2 , DURATION:15,
        CONSUME:LugNuts(20), USE:WheelStations(1))
Action (Inspect 1, DURATION:10,
        USE:Inspectors (1))
```

Metoda kritične poti

kritična pot: pot, ki je **najdaljša** in določa dolžino trajanja celotnega plana vsaki akciji priredimo par [ES, LS]

- ES:** najbolj zgodnji možen začetek (Earliest Start)
 - $ES(start) = 0, \quad ES(B) = \max_{A < B} [ES(A) + Duration(A)]$
- LS:** najbolj pozni možen začetek (Latest Start)
 - $LS(Finish) = ES(Finish), \quad LS(A) = \min_{A < B} [LS(B) - Duration(A)]$

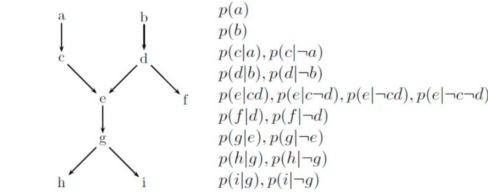
rezerva(slack)=LS-ES (casovna rezerva) **Algoritem** po **hevristik**i **minimum slack** → na vsaki iteraciji ima prednost akcija ki ima izpolnjene predhodnike in najnižji slack, nato posodobi [ES in LS] za celotni graf in ponovi.

5 SKLEPANJE

5.1 BAYESOVSKE MREZE

Baye. mreza = Usmerjen graf, kjer so podane zahtevane verjetnosti:

- Za vozlišca **brez starsev** verjetnosti $P(v_i)$
- Za vozlišca z **starsi** pogojne verjetnosti vseh kombinacij starsev

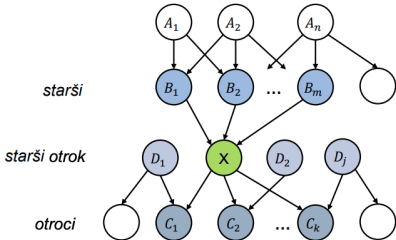


Pravila verjetnostnega sklepanja:

- Konjunkcija:** $P(X_1 X_2 | C) = P(X_1 | C) P(X_2 | X_1 C)$
- Gotov dogodek:** $P(X | \dots X \dots) = 1$
- Nemogoc dogodek:** $P(X | \dots \bar{X} \dots) = 0$
- Negacija:** $P(\bar{X} | C) = 1 - P(X | C)$
- Ce je Y naslednik od X in je Y vsebovan v pogojnem delu:
 $P(X | YC) = P(X | C) \cdot \frac{P(Y|XC)}{P(Y|C)}$
- Ce pogojni del ne vsebuje naslednika od X:
(a) ce X **nima** starsev: $P(X | C) = P(X), P(X)$ je podan
(b) ce **ima** X starse S: $P(X | C) = \sum_{S \in P_X} P(X | S) P(S | C)$
- Iz 6b zgoraj: $P(i | gc) = P(i | g)$

5.2 OVOJNICA MARKOVA

Ce so podani **starsi**, **otroci** in **starsi otrok**, je vozlišce X **neodvisno** od vseh ostalih vozlišc.



5.3 D-LOEVANJE

A in B v mrezi sta **neodvisni** ⇔ obstaja množica vozlišc E, ki

d-locuje A in B, potem sledi: $(P(A|EB) = P(A|E))$

za **vsako neusmerjeno pot P** med **A** in **B** v bayesovski mreži:

za **vsako vozlišče X** na poti **P**:

analiziraj pogoj za pripadnost X množici E glede na tip:

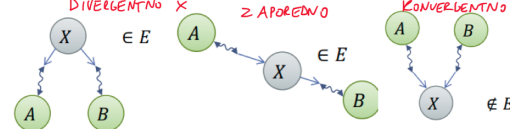
divergentno ali **zaporedno** vozlišče: $X \in E$

konvergentno vozlišče: X in nasledniki $\notin E$

S_X = množice vozlišč, ki ustrezajo pogoju za X

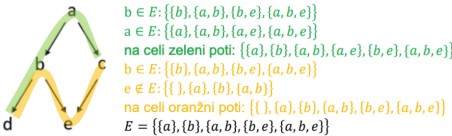
$S_P = \bigcup_X (S_X)$ // množice, ki d-ločujejo samo na poti P

$E = \bigcap_P S_P$ // množice, ki d-ločujejo v celi mreži



! pri konvergentnem izlocimo tudi vse naslednike X

Primer d-loevanje vozlišc c in d



→ $P(d|ca) = P(d|a), P(d|cb) = P(d|b), P(d|cab) = P(d|ab),$

$P(d|cbe) = P(d|be), P(d|cabe) = P(d|abe)$