2. del

1. Pricakovana vrednost slucajne spremenljivke (matematicno upanje)

- `primer: npr. igralna kocka (3.5) ali binomska (np)`
  - $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$
  - $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$

Porazdelitev	E(X)
$B(p)$	p
$B(n,p)$	np
$G(p)$	$\frac{1}{p}$
$P(n,p)$	$\frac{n}{p}$
$H(R,B,n)$	$\frac{nR}{R+B}$
$E([a,b])$	$\frac{a+b}{2}$
$P(\lambda)$	λ
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$
$\Gamma(n,\lambda)$	$\frac{n}{\lambda}$
$N(\mu,\sigma)$	μ
$\chi^2(n)$	n

- `motivacija za definicijo (utezeno povprecje), tj. tezisce`
  - povprecje vrednosti diskretne spremenljivke (verjetnost · vrednost)
  - utezeno povprecje: $k_1 + \cdots + k_m = N$, $f_i = \frac{k_i}{N}$

$$\overline{x} = \frac{x_1 k_1 + \cdots + x_m k_m}{N} = x_1 f_1 + \cdots + x_m f_m$$

  - predstavlja μ pri CLI

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

  - $P(X = a) = 1 \Rightarrow E(X) = a$

- `definicija za diskretne slucajne spremenljivke (kdaj obstaja)`
  - diskretna slucjna spremenljivka je slucajna spremenljivka, ki ima stevno zalogo vrednosti
  - $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$
  - **pogoj** $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \cdot p_i < \infty$
  - Slucajna spremenljivka X ima pricakovano vrednost, ko ga ima slucajna sp. $|X|$. Ocitno velja $|E(X))| \leq E(|X|)$.
- `definicija za zvezne slucajne spremenljivke (kdaj obstaja)`
  - zvezna slucajna spremenljivka je slucajna spremenljivka ki lahko zavzameo katerokoli vrednost iz nekega intervala
  - $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) dx$
  - **pogoj**: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x) dx < \infty$
- `primer slucajne spremenljivke za katero ne obstaja E(X)`
  - $X \sim p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ **Caucheyeva porazdelitev**
  - $x_k = (-1)^{k+1} \dfrac{2^k}{k}$ in $p_k = 2^{-k}$ (primer diskretne ko je $E(X) = \infty$) V tem primeru bi morala biti koncna vsota: $s = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$, opazimo $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, ter v splosnem

$$\frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{2^n}{2^n + 1} = \frac{1}{2}$$

    torej velja $S > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \to$ neskoncna vsota.
- `lastnosti: linearnost, z dokazom za homogenost`
  - **linearnost**: $E(aX + bY) = aE(x) + bE(Y)$
  - **homogenost**: $E(aX) = aE(X)$:
    - `Dokaz` : homogenost in linearnost **integriranja** ter **vsote** (po definiciji)
    - $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a \cdot x_i p_{Xi} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} b \cdot y_i p_{Yi} = a \cdot b \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_{Xi} + y_i p_{Yi}$
    - E(X) je definirana kot povprecje diskretnih spremenljivk, ce vse to pomnozis s konstanto se mnozi tudi povprecje
- `Skica dokaz aditivnosti E(X+Y) = E(X)+E(Y) = ali Trditev 7.1: E(|XY|) ≤ √E(X2)E(Y 2)`
  -

$$E(X+Y) = E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z p_z(z) dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} z(\int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x))dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) p(x,y) dx dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} x p(x,y) dx) dy + \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} y p(x,y) dx) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y p_X(y) dy$$
$$= E(X) + E(Y)$$

- lastnosti vsot/integralov

2. Disperzija (razprsenost oz. varianca) slucajne spremenljivke, odklon in standardizacija

- `primeri: npr. binomska (np(1 - p)), enakomerna (b - a)2/12`

porazdelitev	D(X)
$B(p)$	$p(1-p)$
$B(n,p)$	$np(1-p)$
$G(p)$	$\frac{1-p}{p^2}$
$P(n,p)$	$\frac{n(1-p)}{p^2}$
$H(R,B,n)$	$\frac{nRB\cdot(R+B-n)}{(R+B)^2(R+B-1)}$
$P(\lambda)$	λ
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\Gamma(n,\lambda)$	$\frac{n}{\lambda^2}$
$E([a,b])$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\chi^2(n)$	$2n$

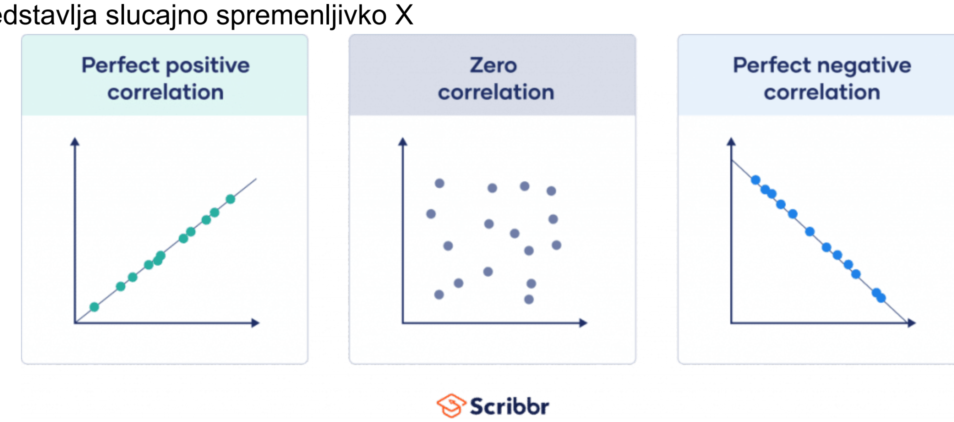
- `definicija s pricakovano vrednostjo in obstoj`
  - **Definicija**: $D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E^2(X)$
  - $D(X) \geq 0$
  - **Pogoj**: nesme biti neskoncna
  - $D(aX) = a^2 D(X)$ in $D(x+a) = D(X)$
- `D(X) = 0 ⇐ ⇒ X je konstanta`
  - $D(X) = E((X - E(X))^2) = E((X - X)^2) = E(0) = 0$
  - Torej ce je npr $P(X = a) = c$, Bo odklon vseh ostalih posameznih vzorcev od povprecja = 0;
- `lastnosti (aditivnost za neodvisni slucajni spremenljivki)`
  - Aditivnost disperzije: $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
    - ce sta X in Y neodvisni: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$
- `Standardizacija, slucajne spremenljivke in njena pricakovana vrednost oz. odklon`
  - Slucajno spremenljiko X **standardiziramo** s transformacijo

$$X_s = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

        - $E(X) = \mu$ in $D(X) = \sigma^2$
    - **Velja**:
        - $E(X_s) = E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{E(X-\mu)}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$
        - $D(X_s) = D(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{D(X-\mu)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2+0}{\sigma^2} = 1$
    - Standardizacija slucajne spremenljivke povzroci da vsaka spr. enako vpliva na pricakovano vrednost (npr. ce smo neke rezultate zmerili z razlicinimi merili, to nam pomaga za primerjavao razlicnih tipov spremenljivk)
- `Skica dokaza zveze “kosinusni izrek”`
    - $$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X,Y) \sim (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2cos\alpha$$
    - analogija: Disperzijo bi lako primerjali s tipicnim geometrijskim kosinusnim izrekom. Ko sta si stranici pravokotni se izraz izracuna neodvisno od $cos(90) = 0$. Ce pogledamo pri disperziji, ko sta si spremenljivki nedovisni je njuna kovarianca $Cov(X,Y) = 0$.

3. Korelacija in kovarianca

- `meri algebraicno povezanost dveh stevilskih slucajnih spremenljivk`
    - predstavlja mero povezanosti med dvema spremenljivkama
        - os y predstavlja slucajno spremenljiko Y
        - os x predstavlja slucajno spremenljivko X



- `definicija kovariance in njen obstoj (CS E(|XY|) ≤ √E(X2)E(Y2))`
    - **Kovarianca** $\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$
    - $|Cov(X,Y)| \leq \sqrt{D(X)D(Y)} = \sigma_X \sigma_Y$
    - spremenljivki za katerei velja da:
        - $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$ sta **korelirani**
            - $\mathrm{Cov}(X,Y) > 0 \to X \uparrow Y \uparrow$ (pozitivno korelirani)
            - $\mathrm{Cov}(X,Y) < 0 \to X \uparrow Y \downarrow$ (negativno korelirani)
        - $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ sta **nekorelirani**
    - **Primer** $X \equiv$ telesna visina osebe, $Y \equiv$ teza osebe
        - X in Y sta korelirani (pozitivno)
- `lastnosti korelacije`
    - Ce sta slucajni spremenljivki X in Y neodvisni $\to E(XY) = E(X)E(Y) \to \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

- `definicij korelacijskega koeficienta, vedno na [-1, 1]`
  - Korelacijski koefcient vpeljemo zato, ker je moc povzezanosti med dvema s.s. tezko ocentit preko kovariance, zato jo delimo s obema std. odklonoma
  - $r(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2)-E^2(X)}\cdot\sqrt{E(Y^2)-E^2(Y)}}$
  - $r(X,Y) = 0 \Leftrightarrow$ X in Y nekorelirani
  - $r(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow$ X in Y sta v linearni zvezi
- `kdaj lahko zakljucimo linearno odvisnost`
  - Dve slucajni spremenljivki sta **linearno odvisni** ce lahko eno zapisemo kot linearno funkcijo druge $\rightarrow$ korelacijski koeficient med njima bo 1 ali -1.
- `Ali lahko izracunamo korelacijo iz disperzij (tj. D(X), D(Y) in D(X+Y))`
  - $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
- `kovariancna matrika`
  - Naj bo X stolpicni vektor $X = (X_1, X_2, \ldots X_n)^T$ (kjer so X_i slucajne spremenljivke)
  - Potem definiramo kovariancno matriko K_{XX}, (i,j)-ti element je (kovarianca):
    - $K_{X_iX_j} = \mathrm{cov}[X_i, X_j] = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])]$
  - Kovariancna matrika je **simetricna**
  - Diagonalne vrednosti so **disperzije** $K_{X_iX_i} = E((X_i - E(X_i))(X_i - E(X_i))) = E((X_i - E(X_i))^2) = D(X_i)$
- `povezava z regresijsko premico`
  - $K_{YX}K_{XX}^{-1}$ je matrika regresijskih koeficientov

4. Slucajni vektorji 2D, 3D, nD

- `definicija slucajnega vektorja (primer)`
  - Slucajni vektor je n-terica slucajnih spremenljiv $X = (X_1, \ldots., X_n)$
  - Primer slucajni vektor $X = (X_1, X_2)$:
    - X_1 stevilo metov ko pade sestica, pri 3 metih kocke
    - X_2 stevilo metov ko pade stevilo manjse od 3, pri 3 metih kocke
- `definicija porazdelitvene funkcije (primer)`
  - $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n)$
  - Primer za metanje kock
    - $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \cdot 0/1$ (1 ce je i <= x in j <= y 0 sicer
  - Za zvezni vektor uporabimo integrale
    - $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(x,y)dxdy$
- `verjetnostna in kontingencna tabela, verjetnostna funkcija (primer)`
  - **verjetnostna tabela**

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
X, Y & y_1 & y_2 & \dots & y_m & X \\
\hline
x_1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} & p_1 \\
x_2 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} & p_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_n & p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nm} & p_n \\
\hline
Y & q_1 & q_2 & \dots & q_m & 1
\end{array}
$$

- kjer:
  - $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$
  - $P(X = x_i) = p_i$, **robna porazdelitev** za X
  - $P(Y = y_i) = q_i$, **robna porazdelitev** za Y
- **kontigencna tabela** (modelira nakup avtomobila)

starost	>20	<20	sum
kupil avtomobil	80	20	100
ni kupil	100	50	150
sum	180	70	250

- `gostota verjetnosti (primer)`
  - funkciji $p_{X,Y}$ pravimo (dvorazsezna) gostota verjetnosti (doloca vektor zveznih spremenlijvk)
  - npr: $p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}$ z zalogo vrednosti $x \in [0,2], y \in [0,2]$
- `robne porazdelitvene funkcije`
  - Funkciji $F_i(x_i) = F(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty)$ pravimo **robna porazdelitvena funkcija** spremenljivke X_i
  - Npr za diskretne
    - $P(X = x_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ji}$
    - $P(Y = y_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij}$
- `Ali se da iz verjetnostne funkcije slucajnega vektorja ugotoviti neodvisnost njegovih komponent?`
  - **DA**, npr za diskretni vektor:
    - $\forall x, y : P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$
  - npr, za zvezni vektor
    - $\forall x, y, X \leq x \land Y \leq y : p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$
- `zveza med gostoto verjetnosti in porazdelitveno funkcijo`
  - za dve spremenljivki (na n spremenljivk trivialen prehod):
    - $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} p_{X,Y}(x,y)dxdy$
- `definicija kvadranta in izpeljava formule pravokotnik`
  - Naj bo $A(x,y) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \leq x \land v \leq y\}$ (levi spodnji kvadrant glede na (x,y))
  - Naj porazdelitvena funkcija opisuje verjetnost da je slucajna tocka (X,Y) v mnozici A(x,y)

$$F(x,y) = p(X \leq x, Y \leq y) = P(X,Y) \in A(x,y)$$

- Tedaj je verjetnost da je slucjana tocka (X,Y) v pravokotniku $(a,b] \times (c,d]$ enaka:

$$P(X,Y) \in (a,b] \times (c,d] = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$

- `neodvisnost`
  - diskretne: $P(X=x) \cdot P(Y=y) = P(X=x, Y=Y)$
  - zvezne: $P_{X,Y}(X,Y) = P_X(X) * P_Y(Y)$

5. Polinomska porazdelitev

- `primeri`
  - Imamo volitve z 3 izbirami (A,B,C). Kandidat A prejme 20% glasov, B 30%, C 50% glasov. Ce so glasovalci izbrani randomly, kaksna je verjetnost da bomo izmed 6 izbranih izbrali natanko enega volivca za kandidata A, dva za B in tri za C.

$$X \sim P(6; 0.2, 0.3, 0.5)$$

$$P(A=1, B=2, C=3) = \frac{6!}{1!2!3!}(0.2^1)(0.3^2)(0.5^3)$$

  - Iz kupa igralnih kart (52) na slepo izberemo eno karto in jo nato vrnemo nazaj. Postopek ponovimo 5-krat. Koliksna je verjetnost da bomo videli dvakrat srce, po enkrat pa pika kriza in karo

$$X \sim P(5, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$$

$$P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1) = \frac{5!}{2!1!1!1!} 0.25^2 0.25^1 0.25^1 0.25^1 = 0.05859$$

- `definicija`
  - Polinomska porazdelitev $\sim P(n; p_1, \ldots, p_r)$ je dolocena s predpisom
    - $P(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$
- `zaloga vrednosti`
  - $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$
  - $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$
- `verjetnostna funkcija (zapisi pi,j,...,k)`
  - Polinomska porazdelitev $\sim P(n; p_1, \ldots, p_r)$
    - $\sum p_i = 1$, $\sum k_i = n$
    - spremenljivke X_i opisujejo stevilo pojavitev rezultata i
  - $P(X_1 = k_1, \ldots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$
- `povezava z binomsko`
  - je posplositev binomske porazdelitve
  - za r=2 dobimo binomsko spremenjivko $B(n,p) = P(n,p,q)$
- `pricakovana vrednost in disperzija`
  - $E(X_i) = np_i$
  - $D(X_i) = np_i(1-p_i)$

6. Funkcije slucajnih spremenljivk

- `primeri enostavnih funkcij`
  - Imamo $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$
  - Potem $5X \sim \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$
  - Imamo podano porazdelitveno shemo

Y, X	0	1	2	X
0	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{5}{50}$
1	$\frac{6}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{15}{50}$
2	$\frac{12}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{30}{50}$
Y	$\frac{20}{50}$	$\frac{20}{50}$	$\frac{10}{50}$	1

  - $Z = X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$
  - $W = X + Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.04 & 0.16 & 0.38 & 0.30 & 0.12 \end{pmatrix}$
    - $P(W=0) = P(X=0, Y=0) = 0.04$
    - $P(W=1) = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) = 0.16$
    - $P(W=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=0) = 0.38$
    - $P(W=3) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) = 0.30$
    - $P(W=4) = P(X=2, Y=2) = 0.12$
- `definicija in povezava med ustreznima porazdelitvenima funkcijama`
  - naj bo $Y = g(X)$
  - $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = \begin{cases} P(X \leq g^{-1}(y)), & g^{-1} \text{ narascujoca} \\ P(X \geq g^{-1}(y)), & g^{-1} \text{ padajoca} \end{cases}$
  - **Primer**: naj bo $Y = X^2$
    - $P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
- `zveza med gostatami verjetnosti`
  - Ce je X porazdeljena z zvezno gostoto $p(x)$, je $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} p(x)dx$,
  - in ce je f se odvedljiva velja $p_Y(x) = p(f^{-1}(y))f^{-1}(y)'$
- `formula za pricakovano vrednost`
  - diskretna:

$$E(f(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) \cdot p_k$$

  - zvezna

$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p_X(x) dx$$

- `neodvisnost`
  - Ce so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne standardizirane normalne slucajne spremenljivke, je slucajna spremenljivka $Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ porazdeljena po $\chi^2(n)$
- `izpeljava zveze med N(0, 1) in χ2(1)`
  - Naj bo X standardizirana normalna spremenljivka z $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
  - nastavimo $Y = X^2$
    - $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$
    - $\frac{dg^{-1}}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$
  - $p_Y(x) = p_X(g^{-1}(x)) \cdot \frac{dg^{-1}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}$
  - Dobili smo $\chi^2(1)$
    - $X_i \sim N(0,1)$
    - $\chi^2(k) = X_1^2 + \cdots + X_k^2$

7. Funkcije slucajnih vektorjev

- `primer`
  - Izracun pricakovane vrednosti $(E(X))$
- `definicija`
  - Naj bo $f : (x, y) \to (u, v)$ transofrmacija slucajnega vektorja (X,Y) v slucajni vektor (U,V) dolocena z zvezama $U = u(X, Y)$ in $V = v(X, Y)$. Porazdelitveni zakon za nov slucajni vektor (U, V) je
  - $F_{U,V}(u, v) = P(U < u, V < v) = P((U, V) \in A(u, v)) = P(X, Y) \in f^{-1}(A(u, v))$
- `definicija konvolucije`
  - Definiramo $Z = X + Y$, kjer je (X, Y) zvezno porazdljen slucajni vektor z gostoto $p(x, y)$ verjetnostna funkcija (diskretni)
  - $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int\int_{x+y \leq z} p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p(x, y) dy$
  - za slucajni dobimo gostoto verjetnosti:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z - x) dx$$

  - za diskretni pa dobimo

$$P(Z = z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(X = k) P(Y = z - k)$$

    - ce sta neovidsni pa

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) p_Y(z - x) dx$$

- Gostota $p_Z = p_X * p_Y$ je **konvolucija** funkcij p_X in p_Y.
- `uporaba za vsoto dveh neodvisnih normalnih porazdelitev`
  - $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$
  - $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$
  - $Z = X + Y \to Z \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$
- `uporaba za vsoto dveh neodvisnih Gama porazdelitev`
  - $X \sim \Gamma(n_1, \lambda)$, in $Y \sim \Gamma(n_2, \lambda)$ potem $X + Y \sim \Gamma(n_1 + n_2, \lambda)$
- `formula za pricakovano vrednost produkta`
  - $E(XY) = E(E(XY|Y))$
  - ce sta neovidsni
    - $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
- `Jacobijeva determinanta in prehod na nove spremenljivke`
  - Ce je funkcija f bijektivna z zveznimi parcialnimi odvodi lahko nadaljujemo

$$F_{U,V}(u,v) = \int\int_{A(u,v)} p(x(u,v), y(u,v)) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right| dudv$$

8. Pogojna porazdelitev

- `primer za diskretni slucajni vektor`
  - Imamo porazdelitveno shemo. Zapisi pogojno verjetnostno porazdelitev slucajne spremenljivke X, glede na pogoj y=2

$Y \setminus X$	1	2	3	4	Y
0	0	0·10	0·20	0·10	0·40
1	0·03	0·07	0·10	0·05	0·25
2	0·05	0·10	0·05	0	0·20
3	0	0·10	0·05	0	0·15
X	0·08	0·37	0·40	0·15	1

  - Verjetnost v vrstici pri $y = 2$, moramo deliti s $P(Y = 2) = 0.2$

$$X|y = 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

- `definicija v diskretnem primeru in v zveznem primeru`
  - diskretni primer:
    - Naj bo B nek mogoc dogodek $P(B) > 0$. Potem lahko vpeljemo **pogojno porazdelitveno funkcijo**:

$$F(x|B) = P(X \leq x|B) = \frac{P(X \leq x, B)}{P(B)}$$

  - zvezni primer:
    - Postavimo $B = (y < Y \leq y + h)$ za $h > 0$ in zahtevajmo $P(B) > 0$

$$F_X(x|B) = P(X \leq x|B) = \frac{P(X \leq x, y < Y \leq y+h)}{P(y \leq Y < y+h)} = \frac{F(x, y+h) - F(x,y)}{F_Y(y+h) - F_Y(y)}$$

- `pogojna porazdelitvena funkcija v obeh primerih`
  - diskretni primer:

$$F_X(x|y_k) = F_X(x|Y = y_k) = P(X \leq x|Y = y_k) = \frac{P(X < x, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \frac{1}{q_k} \sum_{x_i \leq x} p_{ik}$$

  - zvezni primer:
    - ce obstaja limita za ($h \to 0$)

$$F_X(x|y) = F_X(x|Y = y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x, y+h) - F(x,y)}{F_Y(y+h) - F_Y(y)}$$

    - imenujemo jo pogojna porazdelitvena funkcija slucajne spremenljivke X glede na dogodek (Y=y)
- `izpeljava pogojne verjetnostne funkcija v diskretnem primeru`
  - Vpeljimo pogojno verjetnostno funkcijo $p_{i|k} = \frac{p_{ik}}{q_k}$. Tedaj je $F_X(x|y_k) = \sum_{x_i \leq x} p_{i|k}$
- `izpeljava pogojne gostote v zveznem primeru`
  - Naj bosta gostoti $p(x,y)$ in $p_Y(y) > 0$ zvezni. Tedaj je:

$$F_X(x|y) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{F(x,y+h) - F(x,y)}{h}}{\frac{F_Y(y+h) - F_Y(y)}{h}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{F_Y'(y)} = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} p(u,y) du$$

- `primer za zvezni slucajni vektor`

9. Momenti in kvantili

- Momenti pokazejo lastnosti vzorca - povprecno vrednost, razprsitev, asimetrijo in sploscenost.
- `katere momente poznas`
  - **Zacetne** (merimo od 0)
    - Consider the following dataset [12 14 14 17 18]
    - Consider alternate dataset

$$15 15 15 15 15$$

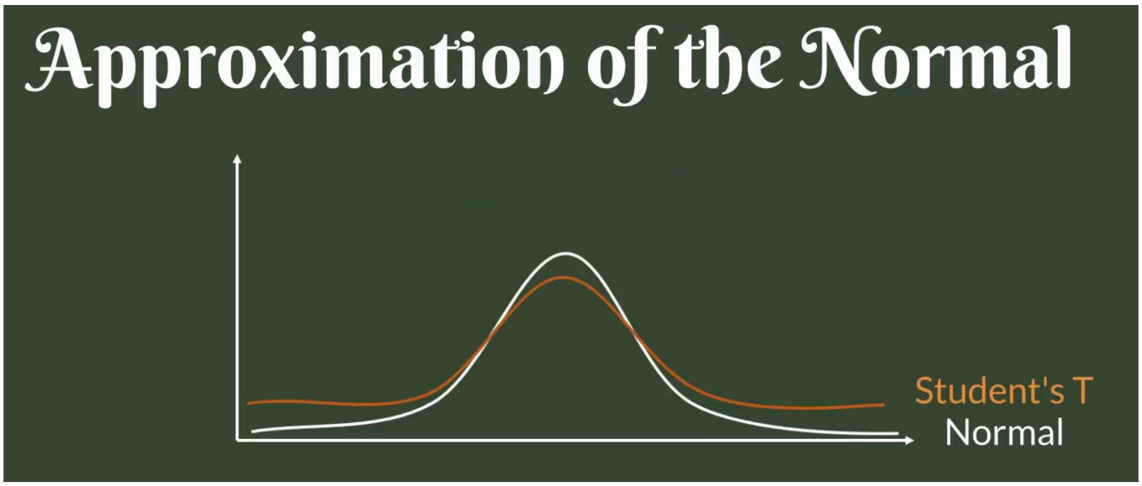
      (enak prvi moment)
    - Each item represents distance from 0
    - average distance from zero: $\frac{\Sigma x_i}{n}$ $\to$ **prvi moment** = $\mu_1 = 15$ predstavlja **povprecje**
    - average square distance fom zero : $\frac{\Sigma x_i^2}{n}$ $\to$ **drugi moment** = $\mu_2 = 229.8$ (alternate data set ima $\mu_2 = 225$)
    - $\frac{\Sigma x_i^3}{n}$ **tretji moment**
    - $\frac{\Sigma x_i^4}{n}$ **cetrti moment**
  - **Centralne** (merimo od sredine)

        - average square distance from povprecna vrednost $\frac{\Sigma(x_i-\mu_1)^2}{n}$ $\rightarrow$ **centriran drugi moment** predstavlja varianco σ^2
        - $\frac{\Sigma(x_i-\mu_1)^3}{n}$ $\rightarrow$ **centriran tretji moment** (asimetrija skewness)
        - $\frac{\Sigma(x_i-\mu_1)^4}{n}$ $\rightarrow$ **centriran cetrti moment** (sploscenost, kurtosis)
    - **Standardizirane**
        - $\frac{1}{n}\frac{\Sigma(x-\mu)^3}{\sigma^3}$ (standardizeran tretji moment)
        - $\frac{1}{n}\frac{\Sigma(x-\mu)^4}{\sigma^4}$ (standardizeran cetrti moment)
- `definicija momenta reda k glede na tocko a`
    - Momenti so posplositev pricakovane vrednosti in disperzije.
    - Momenti reda $k \in N$ glede na tocko $a \in R$ imenujemo kolicino $m_k(a) = E((X-a)^k)$
    - Moment obstaja, ce obstaja pricakovana vrednost, ki ni neskoncna $E(|X-a|^k) < \infty$
    - Za $a = 0$ dobimo zacetni moment $z_k = m_k(0)$
    - Za $a = E(x)$ dobimo centralni moment $m_k = m_k(E(X))$
- `zacetni moment, centralni moment`
    - zacetni moment ko je a =0
    - centralni moment ko je a = povprecna vrednost
- `lastnosti`
    - Ce obstaja centralni moment reda n, potem obstaja vsi momenti reda k, $k \leq n$
    - Ce obstaja zacetni moment reda n, potem obstajaju tudi centralni momenti reda n za $\forall a \in \mathbb{R}$
    - Ce sta X in Y neodvisni velja: $m_3(X+Y) = m_3(X) + m_3(Y)$
- `definicija kvantila`
    - Kadar spremenljivka nima momentov uporabimo kvantile.
    - Kvantili so “linije” ki razdelijo podatke v skupine enake velikosti
    - Mediana je drugi kvantil (ker polovica podatkov manse polovica vecje)
    - Percentili so kvantili ki delijo podatke v 100 skupine enake velikosti
- `povezava z inverzom porazdelitvene funkcije`
    - TODO

10. Studentova porazdelitev t-test

- why (https://www.youtube.com/watch?v=32CuxWdOlow)
- `Primer1`
    - Povprecna teza 20 studentov je bila 165lbs z vzorcnim standardnim odklonom 4.5. Konstruiraj 95% interval zaupanja za populacijsko povprecje.
    - $\overline{x} = 165$, $n = 20$, $s = 4.5$
    - Ker **nimamo standardnega odklona populacije** σ, ne moremo izracunati normalne porazdelitve, ampak uporabimo studentovo
        - Poleg tega imamo tudi $n \leq 20$ (za normalno rabimo $n \geq 30$)
    - $\mu \rightarrow \overline{x} \pm t_{n-1,\alpha/2}$
        - $n-1$ = degrees of freedom = 19
        - $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$
        - $t_{19,0.025}$ = pogledamo v tabeli = 2.093

- $\mu \rightarrow 165 \pm 2.093(\frac{4.5}{\sqrt{20}}) = 165 \pm 2.106$
- Dobili smo 95% interval zaupanja $I_\mu = [162.894, 167.106]$
  - z 95% lahko recemo da je povprecna teza v tem interavlu
- `Kako lahko pridemo do te porazdelitve?`
  - Uporablja se kadar imamo na voljo majhno stevilo podatkov, in je priblizek normalne porazdelitve
  - Pridemo preko naslednjega obrazca:
  - $$t_{n-1,\alpha} = \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$
  - Podbna normalni z “debelimi kraki” (vecja dispersija - manj podatkov - mansa zaneslivost)
  - za $n > 30$ je ze skor enaka z-statistiki (normalni porazdelitvi)
  - $Z_X = \mathbb{R}$



- `gostota verjetnosti`

$$p(x) = \frac{(1 + \frac{x^2}{n-1})^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{n-1}B(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})}$$

- `definicja beta funkcije`

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y, x)$$

- `posebne vrednosti beta funkcije`

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$$

$$B(n_1, n_2) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \text{ za } n_1, n_2 \in \mathbb{N}$$

- `katero porazdelitev dobimo za eno prostostno stopnjo in katero, ce je stivlo prosotstnih stopenj dovolj veliko`
  - **ena prostostna stopnja**: Caucheyeva porazdelitev
  - **dovolj veliko stevilo prostostnih stopenj**: Normalna porazdelitev

11. Fisherjeva porazdelitev f-test

- `kako lahko pridemo do te porazdelitve primer`

Recimo da imamo dve populaciji. Populacijo1 bomo primerjali z Populacijo2. Recimo da naredimo **IQ** test na obeh populacijah. Na vzorcih iz obeh populacij izracunamo vzorcno povprecje ter (vzorcni odklon) s_1^2 ter s_2^2 - Primerjali bomo dva vzorcna odklona - **Testna statistika** (Fisherjeva) je $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ - s_1^2 dobimo iz n vzorcev 1. populacije - s_2^2 dobimo iz m vzorcev 2. populacije - `F-distribution, parametri` - $F(n, m) = \frac{\chi^2(n)/n}{\chi^2(m)/m}$ - n prostostne stopnje prve χ^2 spremenljivke - m prostostne stopnje druge χ^2 spremenljivke - $Z_F = \mathbb{R}^+$ - oblika odvisna od prostnostnih stopenj obeh vzorcov - `definicija - verjetnostna funkcija`

$$p(x) = \frac{m^{\frac{3}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{B(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \cdot \frac{x^{\frac{(m-2)}{2}}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}}$$

`- beta`
`funkcije`

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y, x)$$

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$$

`- Primer statistike, ki se porazdeljuje po Fisherjevo` - F-test za hipoteze o enakosti varianc v dveh normalno porazdeljenih statisticnih populacijah in v regresijski analizi. - `se kaksne lastnosti fisherjeve porazdelitve` - Za $U \sim F(m, n)$ je $\frac{1}{U} \sim F(n, m)$ - Za $U \sim t(n)$ je $U^2 \sim F(1, n)$

Statisticni parameter	enacba
Pricakovana vrednost μ	$\frac{m}{m-2}, m > 2$
Modus	$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{m}{m+2}$
varianca	$\frac{2m^2 \cdot (n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$