3. del

1. Vzorcenje in cenilke

- `Definicija enostavnega slucajnega vzorca`
    - Naj bo X slucajna spremenljivka. **Enostavni slucajni vzorec** je slucajni vektor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ z vrednostmi meritev $(x_1, \ldots, x_n)$ (n = velikost vzorca) za katerega velja:
        1. vsi cleni vektorja X_i imajo **enako porazdelitev** kot spremenljivka X
        2. cleni X_i so med seboj **neodvisni**
- `Vzorcna statistika`
    - **poljubna simetricna funkcija vzorca** (njena vrednost je neodvisna od permutacij argumentov)

$$Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

    - Vzorcna statistika je **slucajna spremenljivka**. Znacilni vrednosti:
        - pricakovana vrednost $E(Y)$, za katero uporabljamo vzorcno povprecje
        - standardni odklon σ_Y (pravimo tudi standardna napaka statistike $\mathrm{SE}(Y)$), za katerega upostevamo vzorcni odklon
- `Vzorcne sredinske mere (modus, mediana, povprecje)`
    - **vzorcni modus** je najpogostejsa vrednost
    - **vzorcna mediana** je srednja vrednost glede na urejenost

$$M_e = \begin{Bmatrix} Y_{n+1}/2 & , n - \text{ liho} \\ \frac{Y_{n/2}+Y_{n/2+1}}{2} & , n - \text{ sodo} \end{Bmatrix}$$

    - **vzorcno povprecje** je povprecna vrednost

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- `Vzorcne mere razprsenosti (razmik, varianca, standardni odklon)`
    - **vzorcni razmah/razmik**: $\max_i x_i - \min_i x_i$
    - **Vzorcna disperzija**: $s_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$
    - **Popravljen vzorcna disperzija** $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ uporabimo jo ko je vzorec majhen
    - **vzorcna odklona**: s_0 in s
- `Vzorcne mere oblike porazdelitve (koeficienta asimetrije in sploscenosti)`
    - **koeficient asimetrije** (s centralnimi momenti): $g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$
    - **koeficient sploscenosti** (s centralnimi momenti): $K = g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$

- $K = 0$ ~ normalna porzadelitev zvonaste oblike
- $K < 0$ ~ bolj kopasta kot normalna porazdelitev, s krajsimi repi
- $K > 0$ ~ bolj spicasta kot normalna porazdelitev, s daljsimi repi

- `Definicija cenilke` > cenilka je pravilo ali formula, ki nam pove, kako izracunati numericno oceno parametra populacije na osnovi merjenj vzorca.
  - **Cenilka** parametra ζ je **vzorcna statistika** $C = C(X_1, \ldots, X_n)$, katere porazdelitveni zakon je odvisen le od parametra ζ, njene vrednosti pa lezijo v prostoru parametrov. Seveda je odvisna tudi od velikosti vzorca n. |Parameter | Cenilka $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ | Ocena $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$| | - | - | - | | Pricakovana vrednost μ | $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ | $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ | | Standardni odklon σ | $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ | $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$ | Verjetnost p | $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ | $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ |
- `Vpelji nepristranskost in doslednost cenilke`
  - Cenilka C_n parametra ζ je **nepristranska**, ce je $E(C_n) = \zeta, \forall n$ in je asimpoticno nepristranska, ce je $\lim_{n\to\infty} E(C_n) = \zeta$
  - Cenilka C_n parametra ζ je **dosledna** ce z rastocim n zaporedje C_n verjetnostno konvergira k parametru ζ, tj. za vsak $\epsilon > 0$, velja

$$\lim_{n\to\infty} P(|C_n - \zeta) < \epsilon) = 1$$

- `CLI`
  - Opazujemo doloceno lastnost(neke populacije velikosti N), ki jo spremlja spremenljivka X.
  - Radi bi oceneili pricakovano vrednost $E(X)$, pri cemer predpostavimo $D(X) < \infty$.
  - V ta namen si izberemo vzorec velikosti $n << N$ (nimamo vec moznosti, da bi opravili meritve na celotni populaciji ali pa je to enostavno predrago):
    - vzorec je vektor $(x_1, \ldots, x_n)$, sestavljen iz n meritev.
    - izberemo ga nakljucno, mertive in izbira pa so med seboj neodvisne
    - vzorec mora biti dovolj velik (npr. vsaj $n \geq 30$)
  - Naj bo $X_i (1 \leq i \leq n)$ spremenljivka, ki spremlja i-to meritev. Lahko predpostavimo, da ima enako porazdelitev kot X ter zato tudi

$$E(X_i) = \mu \text{ in } D(X_i) = \sigma^2$$

  - Iscemo dobro formulo oz. funkcijo $f(x_1, \ldots, x_n)$ (cenilko), za katero velja, da je simetricna in da bo njena vrednost na danem vzorcu z dovolj veliko verjetnostjo blizu $E(X)$. V primeru $E(X)$ je to vzorcno povprecje (ki je tudi slucajna spremenljivka):

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  - CLI nam zagotavlja, da se $\overline{X}$ porazdeljuje normalno, tj. $\overline{X} \sim N(\mu_{\overline{X}}, \sigma_{\overline{X}})$ (ob predpostavkah $n \leq 30$ in $\sigma < \infty$!). V praksi nas zanima, koliko sta parametra $\mu_{\overline{X}}, \sigma_{\overline{X}}$! ## 2. CLI za $\overline{X}$
- `teorija`

- Denimo da se spremenljivka X na populaciji porazdeljuje normalno $N(\mu,\sigma)$. Na vsakem vzorcu (s ponavljanjem) izracunamo vzorcno povprecje $\overline{X}$. Po reprodukcijski lastnosti normalne porazdelitve je **porazdelitev vzorcnih povprecij normalna** kjer je:

$$E(\overline{X}) = E(\frac{\sum X_i}{n}) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = \frac{\sum E(X_i)}{n} = \frac{\sum \mu}{n} = \mu$$

$$\mathrm{SE}(\overline{X}) = D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(Xi) = \frac{D(x)}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- **Kaj pa ce porazdelitev X ni normalna?**. Pri vecjih vzorcih (n>30), lahko uporabimo centralni limitni izrek, ki zagotavlja, da je spremenljivka $\overline{X}$ porazdeljena standardizirano normalno. Vzorcno povprecje ima tedaj porazdelitev priblizno

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

* `primer`
  - Koliksna je verjetnost, da bo pri 36 metih igralne kocke povprecno stevilo pik vecje ali enako 4? X je slucajna spremenljivka z vrednostmi 1,2,3,4,5,6 in verjetnostmi $1/6$. Zanjo je $\mu = 3.5$ in $\sigma = 1.7$. Vseh 36 ponovitev meta lahko obravnavamo kot slucajni vzorec velikosti 36.

$$P(\overline{X} \geq 4) = 1 - \phi\left(\frac{E(\overline{X}) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{4 - 3.5}{\frac{1.7}{6}}\right) \approx 0.04$$

3. CLI za delez

* `izrek`
  - Denimo, da **zelimo na populaciji oceniti delez enot π z doloceno lastnostjo**. V ta namen poiscemo vzorcni delez p. Pokazati se da, da se za dovolj velike slucajne vzorce s ponavljanjem (za deleze okoli 0.5 je dovolj 20 enot ali vec), vzorcni delezi poradeljujejo priblizno normalno s

$$E(\hat{P}) = \pi$$

$$\mathrm{SE}(\hat{P}) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

$$\hat{P} \sim N(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}})$$

  - Za manjse vzorce (n<20) se vzorcni delez porazdeljuje `binomsko`. Mimogrede, cenilka populacijskega deleza je nepristranska ker velja $E(\hat{P}) = \pi$

$$\hat{P} \sim B(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}})$$

  - cenilka za delez π

- $\hat{P} = \frac{\sum X_i}{n} = \overline{X}$

- `primer`
    - V izbrani populaciji je polovica zensk $\pi = 0.5$. Ce tvorimo vzorce po n = 25 enot, nas zanima, koliksna je verjetnost, da je v vzorcu vec kot 55% zensk? To pomeni da iscemo verjetnost $P(p > 0.55)$. Uporabimo dejstvo da se vzorcni delezi p porazdeljujejo priblizno normalno

$$\hat{P} \approx N(0.5, \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{25}}) = N(0.5, 0.1)$$

    - Zato je

$$P(\hat{P} > 0.55) = 1 - \phi(\frac{0.55 - 0.5}{0.1}) \approx 0.31$$

    - Torej pri priblizno 31% vzorcih zensk bo delez zensk vecji od 55%.

4. CLI za S^2

- Naj bo slucajna spremenljivka X na neki populaciji porazdeljena normalno $N(\mu, \sigma)$. Kako bi dolocili porazdelitev za vzorcno disperzijo ali popravljeno vzorcno disperzijo tj.:

$$S_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \text{ oziroma } S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

- Dobimo ju iz vzorcne statistike χ^2:

$$\chi^2 = \frac{nS_0^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

- Ker vemo, da je $E(\chi^2(n)) = n$ in $D(\chi^2(n)) = 2n$ lahko takoj izracunamo:
    - $E(S_0^2) = E(\frac{\sigma^2\chi^2}{n}) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n}$, $E(S^2) = E(\frac{\sigma^2\chi^2}{n-1}) = \sigma^2$
    - $D(S_0^2) = D(\frac{\sigma^2\chi^2}{n}) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}$, $D(S^2) = D(\frac{\sigma^2\chi^2}{n-1}) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$
- Torej za dovolj velike n je:

$$\chi^2 \approx N(n-1, \sqrt{2(n-1)})$$

$$S_0^2 \approx N(\frac{(n-1)\sigma^2}{n}, \frac{\sigma^2\sqrt{2(n-1)}}{n})$$

$$S^2 \approx N(\sigma^2, \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n-1}})$$

5. CLI za razliko vzorcnih povprecij

- `definicija`
    - Denimo da imamo dve populaciji velikosti N_1 in N_2 in se spremenljivka X na prvi populaciji porazdeljuje noralno $N(\mu_1, \sigma)$ na drugi populaciji pa $N(\mu_2, \sigma)$ (standardna odklona sta na obeh

populacijah enaka). V vsaki od obeh populacij tvorimo neodvisno slucajne vzorce velikosti n_1 in n_2. Na vsakem vzorcu (s ponavljanjem) prve populacije izracunamo vzorcno povprecje $\overline{X}_1$ in podobno na vsakem vzorcu druge populacije $\overline{X}_2$. Po reprodukcijski lastnosti normalne porazdelitve **je porazdelitev velikih vzorcnih povprecij normalna** kjer je:

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$D(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = D(\overline{X}_1) + D(\overline{X}_2) = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$\overline{X}_1 - \overline{X_2} \approx N\left(\mu_1 - \mu_2, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}\right)$$

- `Primer`
  - Populacijama studentov na neki univerzi (tehnikom in druzboslovcem) so izmerili neko sposobnost s priackovanima vrednostima $\mu_t = 70$ ter $\mu_d = 80$ tock in standardnim odklonom, ki je na obeh populacijah enak $\sigma = 7$ tock.
  - Koliksna je verjetnost, da je pri nakljucnih vzorcih vzorcno povprecje druzboslovcev $(n_d = 36)$ vezje za vec kot 12 tock od vzorcnega povprecja tehnikov ($n_t = 64$)? Zanima nas torej verjetnost:

$$P(\overline{X}_d - \overline{X}_t > 12) = 1 - \phi\left(\frac{12 - 10}{7 \cdot \sqrt{\frac{36+64}{36 \cdot 64}}}\right) = 1 - \phi(1.37) = 0.085$$

6. CLI za razliko delezev

- `definicija`
  - Podobno kot pri porazdelitvi razlik vzorcnih povprecij naj bosta dani dve populaciji velikosti N_1 in N_2 z delezema enot z neko lastnostjo π_1 in π_2. Iz prve populacije tvorimo slucajne vzorce velikosti n_1 in na vsakem izracunamo delez enot s to lastnostjo p_1. Podobno naredimo tudi na drugi populaciji; tvorimo slucajne vzorce velikosti n_2 in na njih dolocimo deleze p_2.
  - Pokazati se da, **da se za dovolj velike vzorce razlike vzorcnih delezev porazdeljujejo priblizno normalno s**

$$E(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) = E(\hat{P}_1) - E(\hat{P}_2) = \pi_1 - \pi_2$$

$$D(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) = D(\hat{P}_1) + D(\hat{P}_2) = \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}$$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \approx N\left(\pi_1 - \pi_2, \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}\right)$$

7. CLI za kvocient S_1^2/S_2^2

- uvod

- Zelimo primerjati varianci teze prebivalcev dveh razlicnih populacij. Naj bo X teza odraslih moskih iz prve populacije, ter Y teza odraslih moskih iz druge populaciji. Nimamo moznosti da izmerimo tezo celotne prve in druge populacije, zato bomo izbrali enostavni slucajni vzorec iz vsake od populacij in jim izmerimo tezo. Slucajni spremenljivki X in Y sta neodvisni. Obe sta porazdeljeni normalno $X \sim N(\mu_1, \sigma_1), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$. Na njih tvorimo slucajne vzorce $(X_1, \ldots, X_n)$ in $(Y_1, \ldots, Y_m)$ ter izracunamo vzorcni povprecji in popravljeni vzorcni varianci za obe spremenljivke. Nastavimo vzorcno statistiko za kvocient obe popravljeni vzorcni varianci:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

- `fisherjeva porazdelitev`
  - porazdelitev $F = \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2}$ je **fisherjeva** $F(n-1, m-1)$
    - kjer sta parametra prostostne stopnje obeh vzorcev porazdeljeni po χ^2 z m-1 oziroma n-1 prostostnimi stopnjami in sta tudi neodvisni.
    - $\chi^2(m-1) = (m-1)s_X^2/\sigma_X^2$
- `parameter μ te normalne porazdelitve`
  - μ = $\frac{d_2}{d_2-2}$
- `parameter σ te normalne porazdelitve`
  - $\sigma = \frac{2d_2^2(d_1+d_2-2)}{d_1(d_2-2)^2(d_2-4)}$
- `uporaba`
  - Uporabljamo pri intervalu zuapanja in statisticnemu testu za kvocient populacijskih varianc $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
- `primer`

  Zelimo prijemjati varianci teze prebivalcev dveh mest. X je teza odraslih moskih enega mesta in Y je teza odraslih moskih drugega mesta. Ker ne moramo izmeriti teze celotni populaciji si izberemo slucajni vzorec iz vsake od populacij in izmerimo njuno tezo. Slucajni spremenljivki sta neodvisni, obe porazdeljeni normalno. Na njih tvorimo slucjane vzorce $(X_1, \ldots, X_m)$ in $(Y_1, \ldots, Y_m)$ ter izracunamo vzorcni povprecji in popravljeni vzorcni varianci za obe spremenljivki. Kvoceiwnt varianc ocenujemo s kvocientom popravljenih vzorcnih varianc.

8. Intervali zaupanja

- `interval zaupanja σ je znan`
  - Za konstrukcijo intervala zaupanja uporabljamo dejstvo

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

  - Slucajna spremenljivka X je normlano porazdeljena ali imamo dovolj veliki vzorec (za uporabo CLI)
  - Z verjetnostjo $1 - \alpha$ se μ nahaja na intervalu $\left[\overline{X} - \epsilon, \overline{X} + \epsilon\right]$
  - Dobi se $\epsilon = c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- $I_\mu = \left[\overline{X} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
- $c = F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$
- $1-\alpha$ je **stopnja zaupanja**, α je **stopnja tveganja**
- **Sirina (dolzina)** intervala zaupanja je $l = 2c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- **Primer**: Signal intenzitete μ je poslan z lokacije A. Na lokaciji B se belezi sprejet signal. Zaradi sumenja signal zaznamo z nakljucno napako. Intenziteta signala na lokaciji B je normalno porazdeljena slucajna spremenljivka s povprecjem μ in standardnim odklonm 3. Da bi zmanjsali napako, isti signal neodvisno belezimo 10-krat. Dobili smo naslednje vrednosti intenzitete signala na lokaciji:

$$B : 17, 21, 20, 18, 19, 22, 20, 21, 16, 19$$

- Doloci 95% interval zaupanja za μ
  - n = 10,$\sigma = 3$, α=0.05, $c = F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$, $\overline{x} = 19.3$
    - c pogledamo v tabeli za $c = F^{-1}(0.975) = 1.9$
  - Interval zaupanja $I_\mu = [17.5, 21.1]$
- `interval zaupanja σ ni znan`
  - Za konstrukcijo intervala zaupanja uporabljamo dejstvo

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

  - Interval zaupanja za μ s stopnjo zaupanja $1-\alpha$ je enak

$$I_\mu = \left[\overline{X} - c\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + c\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

  - kjer je $c = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ kvantil **Studentove porazdelitve** z $n-1$ prostnostnimi stopnjami (stevilo vzorca)
- **Primer**: Na vzorcu 30 zensk so dobili povprecje 6 in popravljeni standardni odklon 5 kolicine PCB-jev. Doloci 99% interval zaupanja za povprecno kolicino PCB-jev.
  - $\overline{x} = 6$, $s = 5$, $\alpha = 0.01$, $n = 30$, $c = t_{29;0.995}$
  - $I_\mu = \left[\overline{x} - c\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + c\frac{s}{\sqrt{n}}\right] = [3.5, 8.5]$
- `interval zaupanja za delez p`
  - p je delez populacije z neko lastnostjo
  - naj bo $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ enostavni slucajni vzorec, kjer je $X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, n$
  - neznani delez p ocenjujemo z vzorcnim delezom $\hat{p} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
  - za konstrukcijo intervala uporabimo dejstvo $\hat{p} \sim N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$
  - Interval zaupanja $I_p = \left[\hat{p} - c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$
  - kjer je $c = F^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ kvantil standardne normalne porazdelitve
- `definicija tockovne ocene za parameter, primeri (vsaj 3)`
  - Za konkreten vzorec naredimo **numericno oceno neznage paramatera oz. “vrednost v tocki”**

- **Vzorcno povprecje, vzorcna varianca, vzorcni delez**
- `kdaj uporabimo Studentovo porazdelitev`
    - ko nepoznamo standardnega odklona populacije σ ter imamo dokaj majhen vzorec $n < 30$
- `kaj je drugace, ko imamo majhen vzorec`
    - nemoremo uporabiti izreka za CLI
- `izpeljava formule za interval zaupanja`

9. Preverjanje domnev

- `uvod`
    - **Statisticna domneva** je vsaka domneva o porazdelitvi slucajne spremenljivke X na populaciji
    - Ce poznamo vrsto(obliko) porazdelitve in razkisujemo domnevo o parametru **a** govorimo o **parametricni domnevi**
    - Ce pa je vprasljiva vrsta porazdelitve govorimo o **neparametricni domnevi**
    - Domneva je:
        - **enostavna**: ce natancno doloca porazdelitev (vrsto in tocno vrednost parametra)
        - **sestavljena**: sicer
    - **Primer**: Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma)$, ce poznamo σ je domneva $H : \mu = 0$ enostavna; ce pa parametra σ nepoznamo pa je sestavljena
        - primer sestavljene je tudi $H : \mu > 0$
    - Domneva je lahko:
        - **pravilna** (podatki domnevo podpirajo)
        - **napacna** (podatki prevec odstobajo od domneve)
- `Nicelna in alternativna domneva`
    - **Nicelna domneva** (H_0)
        - je trditev o lastnosti populacije za katero predpostavimo da drzi (verjamemo da je resnicna)
        - je trditev ki jo test zeli ovreci
    - **Alternativna (nasprotna) domneva** H_a ali H_1
        - trditev, ki ni zdruzljiva z nicelno domnevo
        - trditev, ki jo s testiranjem skusamo dokazati
    - **Primer**: Ameriski sodni sistem
        - H_0: obtozenec je nedolzen (nicelna domneva)
        - H_a: obtozenec je kriv (alternativna domneva)

Elementi preverjanja domneve

		odločitev	
		nedolžen	**kriv**
dejansko stanje	**nedolžen**	pravilna odločitev	napaka 1. vrste (α)
	kriv	napaka 2. vrste (β)	moč testa $(1-\beta)$

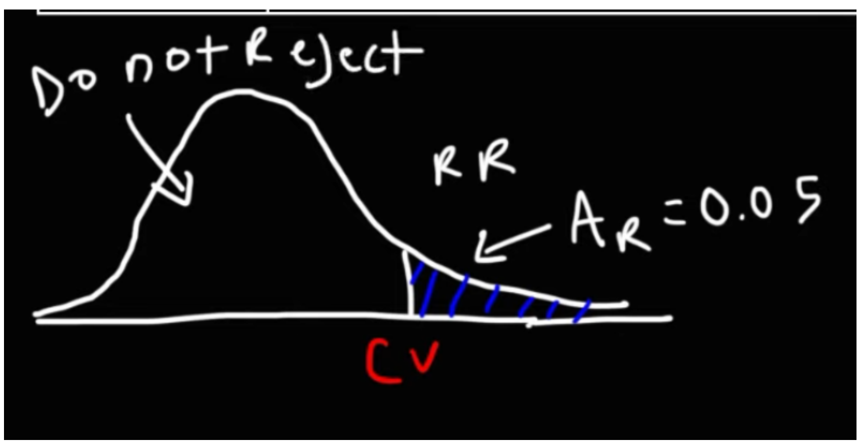
- `Napaka 1. vrste, 2. vrste`
    - **Napaka 1. vrste** je zavrnitev nicelne domneve, ce je le ta pravilna. Verjetnost da naredimo napako 1. vrste

- **Napaka 2. vrste** je ko ne zavrnemo nicelne domneve v primeru da je ta napacna. Verjetnost te napake je β
- `P-vrednost`
  - **P-vrednost** oziroma **stopnja znacilnosti/signifikantnosti testa** je najvecja vrednost parametra α ki jo je vodja eksperimenta pripravljen sprejeti glede na dan vzorec.
- `Moc statisticnega testa`
  - **Moc statisticnega testa** (1-β) je verjetnost zavrnitve nicelne domneve v primeru, ko je ta v resnici napcna.
- `Preverjanje z P-testom`
- `Preverjanje z Hi-kvadrat testom`

  Ravnatelj bi rad izvedel odsotnost studentov na posamezen dan. Naredi vzorec z 100 nakljucnimi profesorji in jih vprasa katere dni so studenti najvec manjkali. Rezultate je zbral v tabelo. **Ali se dnevi in odsotnosti povezani z enako povprecno frekvenco**? Uporabi $\alpha = 0.05$ (stopnja tveganja)

	Ponedeljek	Torek	Sreda	Cetrtek	Petek
Izmerjene frekvence	23	16	14	19	28
Priackovane frekvence	20	20	20	20	20

- H_0: enake frekvence (neodvisno od dneva)
- H_a: neneakovredne frekvence
- χ^2 je nesimetricna porazdelitev

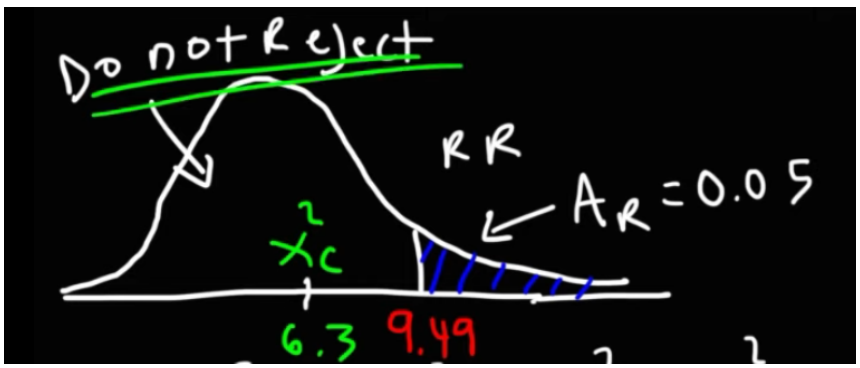


- Uporabimo tabelo za χ^2
  - stopnje prostosti = n-1 = 4, $\alpha = 0.05$

Area to the Right of the Critical Value

df	0.99	0.95	0.90	0.75	0.50	0.25	0.10	0.05	0.01
1	0.000	0.004	0.016	0.102	0.455	1.320	2.710	3.840	6.630
2	0.020	0.103	0.211	0.575	1.386	2.770	4.610	5.990	9.210
3	0.115	0.352	0.584	1.212	2.366	4.110	6.250	7.810	11.34
4	0.297	0.711	1.064	1.923	3.357	5.390	7.780	9.490	13.28
5	0.554	1.145	1.610	2.675	4.351	6.630	9.240	11.07	15.09
6	0.872	1.635	2.204	3.455	5.348	7.840	10.64	12.59	16.81
7	1.239	2.167	2.833	4.255	6.346	9.040	12.02	14.07	18.48
8	1.646	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	20.09
9	2.088	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	21.67
10	2.558	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	23.21
11	3.053	4.575	5.578	7.584	10.341	13.70	17.28	19.68	24.72
12	3.571	5.226	6.304	8.438	11.340	14.85	18.55	21.03	26.22
13	4.107	5.892	7.042	9.299	12.340	15.98	19.81	22.36	27.69
14	4.660	6.571	7.790	10.165	13.339	17.12	21.06	23.68	29.14
15	5.229	7.261	8.547	11.037	14.339	18.25	22.31	25.00	30.58
16	5.812	7.962	9.312	11.912	15.338	19.37	23.54	26.30	32.00
17	6.408	8.672	10.085	12.792	16.338	20.49	24.77	27.59	33.41
18	7.015	9.390	10.865	13.675	17.338	21.60	25.99	28.87	34.80
19	7.633	10.117	11.651	14.562	18.338	22.72	27.20	30.14	36.19
20	8.260	10.851	12.443	15.452	19.337	23.83	28.41	31.41	37.57
22	9.542	12.338	14.041	17.240	21.337	26.04	30.81	33.92	40.29
24	10.856	13.848	15.659	19.037	23.337	28.24	33.20	36.42	42.98
26	12.198	15.379	17.292	20.843	25.336	30.43	35.56	38.89	45.64
28	13.565	16.928	18.939	22.657	27.336	32.62	37.92	41.34	48.28
30	14.954	18.493	20.599	24.478	29.336	34.80	40.26	43.77	50.89
40	22.164	26.509	29.051	33.660	39.335	45.62	51.80	55.76	63.69
50	27.707	34.764	37.689	42.942	49.335	56.33	63.17	67.50	76.15
60	37.485	43.188	46.459	52.294	59.335	66.98	74.40	79.08	88.38

- Dobimo kriticno vrednost $c = 9.49$
- izracunamo se $\chi_c^2 = \sum \frac{(x_i - \overline{X})^2}{\overline{X}} = \frac{3^2}{20} + \frac{(-4)^2}{20} + \frac{(-6)^2}{20} + \frac{(-1)^2}{20} + \frac{8^2}{20} = 6.3$



- sprejmemo domnevo (relativno enake frekvence)

10. Bivariatna analiza in regresija

- Gledamo odvisnost oziroma povezanost spremenljivk
  - $X \leftrightarrow Y$ povezanost
  - $X \rightarrow Y$ odvisnost
- `Tipi spremenljivk in testi za povezanost`
  - **Imenski/nominalni**: χ^2, kontingencni koeficienti, koeficient asociacije
  - **Ordinalni**: koeficient korealcije rangov
  - **Stevilski**: koeficient korelacije
- `Povezanost dveh imenskih spremenljivk`
  - `teorija`
  - Za preverjanje domneve o povezanosti med dveme **imenskima** spremenljivkama lahko uporabimo χ^2 test.
    - Testna statistika χ^2, ki primerja dejanske in teoreticne frekvence

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - f_i')^2}{f_i'}$$

- k je stevilo razredov (celic) v kontingencni tabeli
- testna statistika se porazdeljuje po χ^2 porazdelitvi s $(s-1)(v-1)$ prostostnimi stopnjami, kjer je s stevilo vrstic v kontingencni tabeli in s stevilo stolpcev Nicelna in osnovna domneva sta v primeru tega testa:

- $H_0 : \chi^2 = 0$ (spremenljivki nista povezani)
- $H_1 : \chi^2 > 0$ (spremenljivki sta povezani)
- `primer`
  - Zanima nas ali sta spol in stanovanje v casu studija povezana. Izmerimo podatke za nakljucni vzorec.

	starsi	st. dom	zasebno	skupaj
moski	16	40	24	80
zensek	48	36	36	120
skupaj	64	76	60	200

  - Naredimo **kontingencno tabelo** (relativne frekvence po stolpcih)

	starsi	st. dom	zasebno	skupaj
moski	20	50	30	100
zenske	40	30	30	100
skupaj	32	38	30	100

- npr koliko moskih zivi pristarsih

$$P(M) = \frac{80}{200}, P(S) = \frac{64}{200}, P(MS) = P(M)P(S) = \frac{80}{200} \cdot \frac{64}{200} = 0.128$$

$$f'(MS) = n \cdot P(MS) = 200 \cdot \frac{80}{200} \cdot \frac{64}{200} = 25.6$$

- podobno izracunamo se ostale teoreticne frekvence

$$\chi^2_{1-\alpha}[(s-1)(v-1)] = \chi^2_{0.95}(2) = 5.99$$

$$\chi^2 = \frac{(16-26)^2}{26} + \frac{(40-30)^2}{30} + \cdots = 12$$

- Izracunana vrednost je vecja od kriticne, zavrzemo osnovno domnevo

- `povezanost dveh ordinalnih spremenljivk`
  - Merimo s **koeficientom korelacije rangov** r_s (Spearman)

$$r_s := 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n \cdot (n^2 - 1)}$$

  - d_i je razlika med **rangoma** v i-ti enoti

- `povezanost dveh stevilskih spremenljivk`

Uporabimo **(Pearsonov) koeficient korelacije**

$$r_{X,Y} = \frac{k(X,Y)}{s_X s_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y}))}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

Statisticno sklepanje: - H_0: $r = 0$ (spremenljivki nista linearno povezani) - H_1: $r \neq 0$ (spremelnjivki sta linearno povezani)

Izkaze se da se **testna statistika**:

$$\frac{R_{X,Y} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_{X,Y}^2}} \sim t_{n-2}$$

`Primer`:

Preverimo domnevo, da sta izobrazba (stevilo priznanih let sole) in stevilo ur branja dnevnih casopisov na teden povezana med seboj na 5% stopnji znacilnosti. Najprej izracunajmo vzorcni koeficient korelacije $r = r_{X,Y}$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
10	3	2	0	4	0	0
8	4	0	1	0	1	0
16	7	8	4	64	16	32
8	3	0	0	0	0	0
6	1	-2	-2	4	4	4
4	2	-4	-1	16	1	4
8	3	0	0	0	0	0
4	1	-4	-2	16	4	8
64	24	0	0	104	26	48

$$r = \frac{48}{\sqrt{104 \times 26}} = 0{\cdot}92.$$

Vrednost testne statistike je:

$$\frac{0{\cdot}92\sqrt{8-2}}{\sqrt{1 - 0{\cdot}92^2}} = 2{\cdot}66.$$

Kriticno obmocje je doloceno z kriticnima vrednostima $\pm t_{\alpha/2}(n-2) = \pm t_{0.025}(6) = \pm 2.447$

- `linearna regresija (definicije, predpostavke, metoda najmanjsih kvadratov)`
  - Regresija prikazuje kaksen vpliv ima spremenljivka X na Y, ce razen spremeljivke X ni drugih vplivov na Y
  - Slucjano spremenljivko Y zapisemo kot $Y_i = E(Y_i) + e_i = a + bx_i + e_i$, kjer je $1 \leq i \leq todo$

    $y = a + bx$ je enacba regresijske premice ,kjer je `a` neznan odsek, `b` neznan naklon premice in e_i nakljucna napaka odvisna od X
  - **Metodo najmanjsih kvadratov** uporabimo ko zelimo razdalje tock do regresijske premice cimbolj zmanjsati.
- `casovne vrste in definicija trenda`
  - Casovna vrsta je niz istovrstnih podatkov, ki se nanasajo na zaporedne casovne razmike ali trenutke
  - osnovni namen analize casovnih vrst:
    - opazovati casovni razvoj pojavitev
    - iskati njihove zakonitosti
    - predvidevti nadaljni razvoj

    - Casovne vrste analiziramo tako, da opazujemo spreminjanje vrednosti clenov v casovnih vrstah in iscemo zakonitosti tega spreminjanja
    - Naloga enostavne analize casovnih vrst je primerjava med deli v isti casovni vrsti
    - Z metodami, ki so specializirane za analizo casovnih vrst, analiziramo zakonitosti dinamike ene same vrste, s korelacijsko analizo pa zakonitosti odvisnosti v dinamiki vec pojavov, ki so med seboj v zvezi
    - Trendi ali dolgorocno gibanje - X_T podaja dolgorocno smer razvoja. Obicajno ga je mogoce izraziti s preprostimi rahlo ukrivljenimi krivuljami.
- `Staticni test linearnosti modela`
    - Validnost linearnega regresijskega modela lahko preverimo s tem, da narisemo graf ostankov v odvisnosti od X vrednosti. Ali pa od predvidenih vrednosti $\hat{y} = a\hat{x} + \hat{b}$ in preverimo obstoj kaksnega vzorca.
    - Ce so tocke enakomerno raztresene nad in pod premico in ne vidimo nobene oblike, je linearni model validen. Ce pa na grafu opazimo nekaksen vzorec, nam oblika vzorca daje informacijo, da v modelu manjka neka funkcija X.