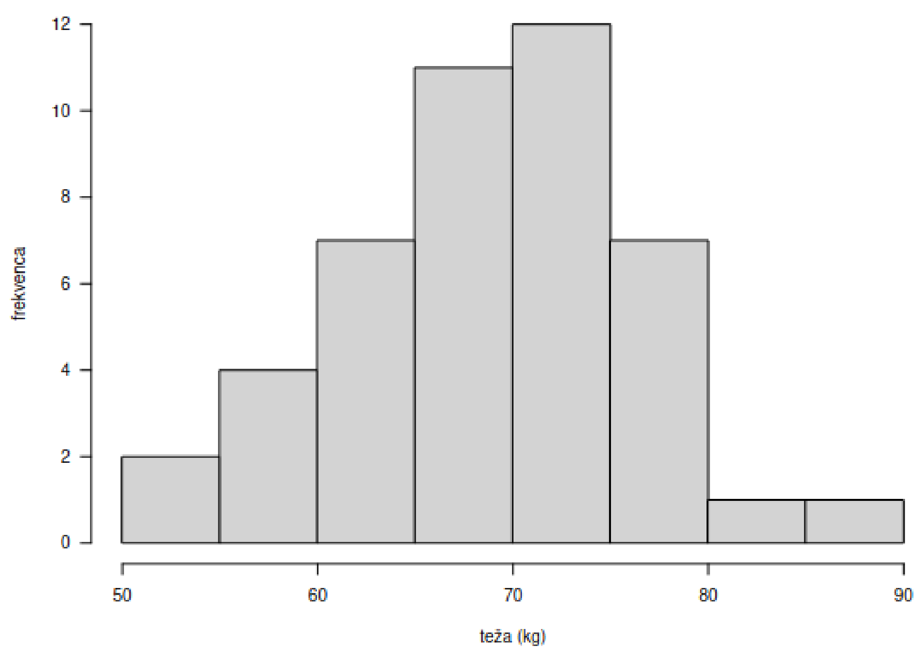
0. Ponovitev snovi iz srednje sole

1. Opisna statistika

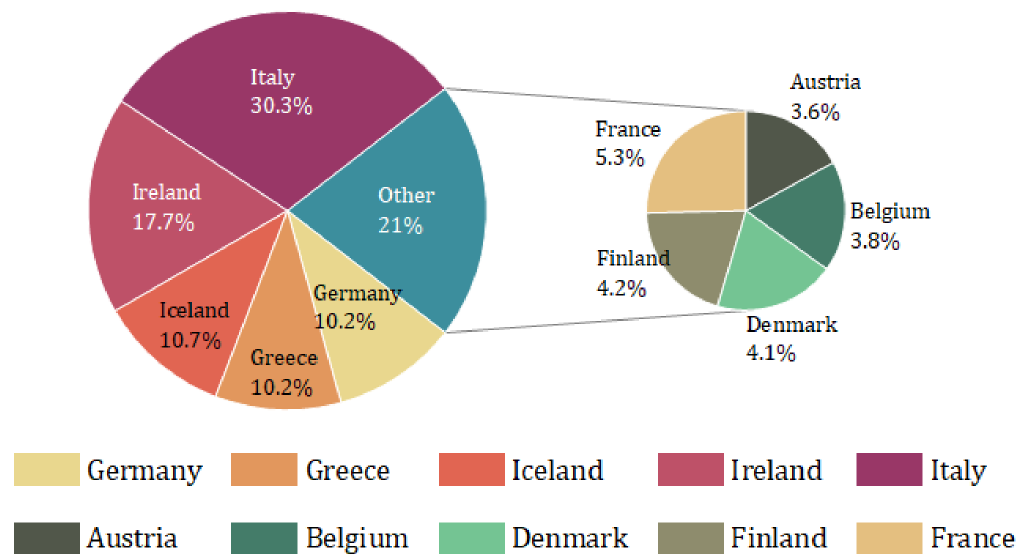
1. `Vrste slucajnih spremelnjivk, primeri`
    - Slucajna spremenljivka X je kolicina, katere vrednosti so rezultat slucajnega poskusa
    - **numericne**:
        - **diskretne**: met kovanca, met kocke, streljanje na tarco
        - **zvezne**: verjetnost da je cas prihoda dveh zaporednih vlakov pod 3min
    - **kategoricne**: (imajo kategorije za vrednosti)
        - **nominalne (imenske)**: kategorije brez vrstenga reda / urejenosti
            - *spol*: 0 = moski, 1 = zenski
            - *barva las*: 1 = crna, 2 = rjava, 3 = rdeca, 4 = blond, 5 = bela
        - **ordinalne** (urejenostne): kategorije z vrstnim redom / urejenostjo
            - *stopnja bolecine*: 0 = ni, 1 = blaga, 2 = srednja, 3 = mocna
            - *stopnja izobrazbe*: 1 = brez, 2 = osnovna sola, 3 = srednja sola, 4 = fakulteta
2. `Frekvenca porazdelitev`
    - tabela skupin vrednosti (razredov) in njihovih frekvenc v podatkih
    - obstaja min, max, spodnja, zgornja meja, sirina, sredina rezreda, komulativna frekvenca, relativna frekvence
        - primer zabelezili smo krvno skupino nakljucnega vzorca 100 slovencev.

Krvna Skupina	0	A	B	AB
frekvenca f	38	40	15	7

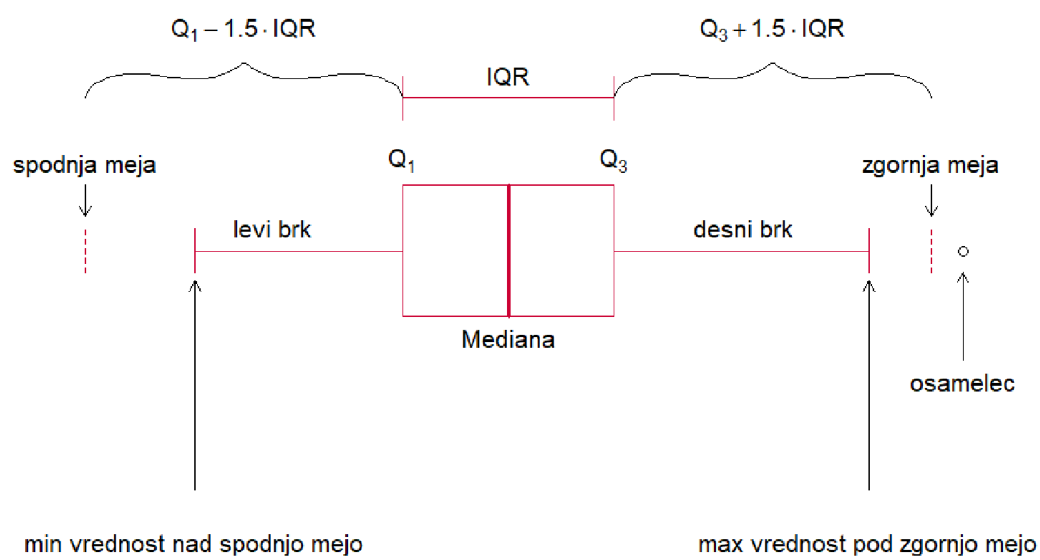
3. `Graficni prikaz podatkov`
    - **Histogram**
        - podatke razdelimo v **razrede (intervale)** in prestejemo stevilo podatkov v vsakem razredu
        - z n podatkov je potrebno stevilo razredov: $\lceil \log_2(n) \rceil + 1$
        - dolzina razreda: $h = \frac{max - min}{k}$
        - npr. imamo 45 podatkov o tezi (n=45)
            - minimalna teza = 52.3kg, maksimalna = 86kg
            - potrebujemo $k = \lceil \log_2(45) \rceil + 1 = 7$ rezredov
            - dolzina razreda: $h = \frac{max - min}{k} = \frac{86 - 52.3}{7} = 4.8 \approx 5$



- **tortni diagram**
  - vsakemu razredu priredimo krozni odsek
  - kot $\alpha_i = \frac{f_i}{n} \cdot 360 \text{degrees}$

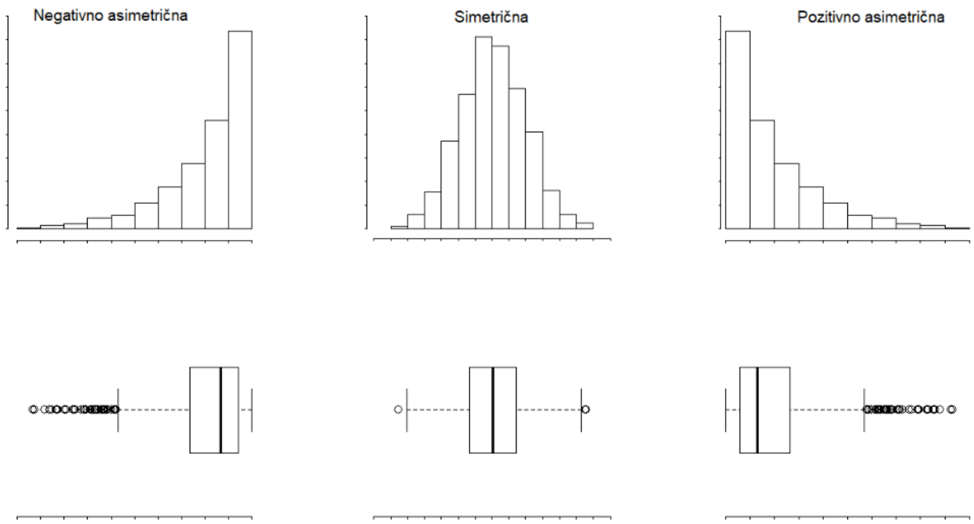


- **Skatla z brki**
  - Mediana navpicna crta v skatli
  - Meje skatle Q_1 in Q_3
  - Dolzina skatle IQR=$Q_3 - Q_1$
  - Spodnja meja = $Q_1 - 1.5 \cdot IQR$
  - Zgornja meja = $Q_1 + 1.5 \cdot IQR$
  - Podatki ki so mansi od spodnje ali vecje od zgornje meje se imenujejo **osamelci**



- Primeri razlicnih tipov histrogramov in skatel z brkami

- Primeri histogramov in škatle z brki negativno asimetrične, simetrične in pozitivno asimetrične vzorčne porazdelitve.



4. `Grafi in opisna statistika glede na vrsto slucajne spremenljivke`
    - Kategoricne spremenljivke

Podatki	Opisna Statistika	Grafi
Nominalni	Modus	Stolpicni diagram
Ordianlni	Modus, mediana, kvartili	Stolpicni diagram

- Numericne spremenljivke

Podatki	Opisna Statistika	Grafi
Diskretni	povprecje, standardni odklon, povzetek s petimi stevili	**Malo stevilo vrednosti**: stolpicni diagram, **Vecje stevilo vrednosti**: histogram, skatla z brki
Zvezni	povprecje, standardni odklon, povzetek s petimi stevili	Histogram, skatla z brki

5. `Vzorcne statistike`

- **ordinalne slucajne spremenljivke**
    - Lahko jim izracunamo modus, vzorcno mediano in vzorcne kvartile
        - Podatke razvrstimo po vrsti $Y_1 \leq Y_2 \leq \cdots \leq Y_n$
            - npr stopnje bolecine: $0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3$
        - Modus (najpogostejsa vrednost) = 2
        - Mediana (drugi kvartil Q_2) predstavlja srednji podatek = 2
        - Prvi kvartil Q_1 je mediana prve polovice sortiranih podatkov = 1
        - Tretji kvartil Q_3 je mediana druge polovice sortiranih podatkov = 2
- **zvezne slucajne spremenljivke**:
    - Vzorcno povprecje: $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
    - Popravljeni vzorcni standardni odklon $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$
    - povzetek s petimi stevili: minimum, maksimum, mediana, prvi in tretji kvartil
- **diskretne slucajne spremenljivke**:
    - enako kot zvezne (vzorcno povprecje, vzorcni standardni odklon, povzetek s petimi stevili)

2. Kombinatorika in prestevanje

- Pojasni pravili za vsoto in produkt, ki ju uporabljamo pri stetju
  - **vsota**:
    - Kadar se pri izbiranju odlocamo za eno od n_1 moznosti iz prve mnozice ali za eno od n_2 moznosti iz druge, …. ali za eno od n_k moznosti iz tretje in so te mnozice paroma disjkunktne, potem je stevilo **vseh moznih izidov**

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots n_k$$

    - **Primer**: Iz Ajdove gore do Brezic vodi 5 poti, iz Brezic do Cvetocoega dola pa 4. Na koliko nacinov lahko pridemo z Ajdove gore do Cvetocega dola, ce imamo med njima se 3 direktne poti? $5 \cdot 4 + 3 = 23$
  - produkt
    - Izbiranje poteka v k korakih, na vsakem koraku imamo n_i moznosti.
    - Vseh moznosti: $\prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$
    - **Primer**: Koliko je vseh tri-mestnih stevil: $9 \cdot 10 \cdot 10$
- Definiraj permutacije (in omeni kaksen primer)
  - vrstni red je pomemben
  - brez ponavljanja
    - So vse mozne razporeditve n razlicnih elementov na n prostih mest
    - $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$
    - **Primer**: Imamo 5 mest in 5 stevil {1,2,3,4,5}, koliko razlicnih stevil lahko sestavimo ce moremo vsako stevko uporabiti natanko enkrat?
  - s ponavljanjem
    - razporeditve n **ne nujno razlicnih** elementov
    - Elemente razdelimo v **skupine** enakih
    - Ce je teh skupin m, in ima vsaka skupin k_i elementov

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$$

    - **Primer**: Na koliko nacinov lahko razporedimo na polici 3 romane, 4 ucbenike in 2 vodica, ce knjig iste vrste ne razlikujemo?

$$\binom{9}{3, 4, 2} = \frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = 1260$$

- Definiraj variacije (in omeni kaksen primer)
  - Vrstni red je pomemben
  - brez ponavaljanja
    - Razporeditev n razlicnih elementov na k prostih mest vsak element najvec enkrat nastopi

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

    - **Primer**: Imamo 3 mesta ter 5 stevil $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Koliko razlicnih stevil lahko sestavimo ce lahko vsako stevko uporabimo najvec enkrat?

$$5 \cdot 4 \cdot 3$$

  - s ponavaljanjem
    - Razporeditve n razlicnih elementov na k mest vsak element uporabimo poljubno krat
    - $n^k = n \cdot n \cdots n$
    - **Primer**: Na koliko nacinov lahko izberemo 3 izmed 5ih kroglic ce kroglice vracamo ter upostevamo vrstni red?

$$5 \cdot 5 \cdot 5$$

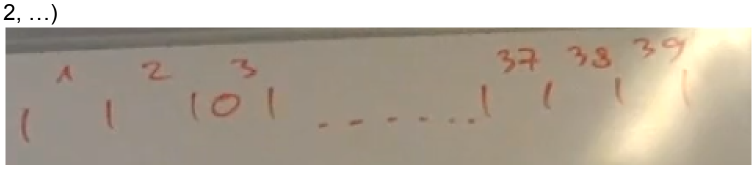
- Definiraj kombinacije (in omeni kaksen primer)
  - vrstni red ni pomemben
  - brez ponavljanja
    - So izbire k elementov izmed n razlicnih elementov (vsak element lahko izberemo najvec enkrat)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

        - Imamo 4 razlicne kroglice. Na koliko razlicnih nacinov lahko izberemo 2.

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{12}{2} = 6$$

    - `s ponavljanjem`
        - So izbire k elementov izmed n razlicnih elementov (vsak element lahko izberemo veckrat)
        - **Loterija**: zreb 7 stevil izmed 39 kroglic, ki se po vsakem krogu vracajo v boben.
        - Z crticami oznacimo 39 predalckov, vsakic ko vlecemo neko kroglico jo dodamo v pripadajoc predalcek (predalcek 1 = stevilka 1, predalcek 2 = stevilka 2, …)



        - S takim nizom lahko predstavimo vse mozne kombinacije (niz crtic in kroglic)
            - presteti moramo vse nize take oblike **k=7 krogcev**, **n+1=40 crtic** $\rightarrow$ prve in zadnje se znebimo ker sta fiksni $\rightarrow$ dobimo 38 crtic (n-1))
            - torej izmed k+n-1 moznih mest moramo izbrati k mest kamor narisemo krogec ali pa izmed k+n-1 mest izbremo n-1 mest kamor narisemo crtico
            - Torej dobimo $\binom{k+n-1}{k} = \binom{7+38}{7}$
        - $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{k+n-1}{k}$
- `Iz zgornje definicije izpelji posebna primera: permutacije, kombinacije`
    - **kombinacije**: variacije brez vrstnega reda
        - pri variacijah se znebimo ponovitev tako da v imenovalec dodamo r!
    - **permutacije**: so variacije kjer je (st mest) k = n
        - dobimo $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$
- `Podaj binomski obrazec in definiraj Pascalov trikotnik`
    - $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
    - Pravilo pascalovega trikotnika $\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\binom{7}{1}\binom{7}{2}\binom{7}{3}\binom{7}{4}\binom{7}{5}\binom{7}{6}\binom{7}{7}$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

- Z limito vpelji stevilo e = 2.71 ki predstavlja osnovo za naravni logaritem
    - $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$
    - Razpisemo $(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$
    - Vsota celotnega torej: $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e$
        - Taylorjeva vrsta za $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
- Podaj primer, kjer pridemo do tega stevila v kombinatoriki
    - poissonova porazdelitev
        - dobimo jo kot limitni primer binomske porazdelitve (binomski obrazec)
            - $p_k = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$

3. Racunanje z dogodki

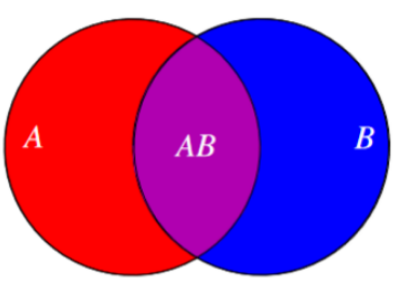
- Definiraj prostor dogodkov (tudi nemogoc, gotov in nasproten)
    - $\Omega \equiv$ verjetnostni prostor $\equiv$ mnozica vseh izidov
    - **Dogodek** A $\subseteq \Omega$ (mnozica)
    - **Gotov** dogodek: $A \cap \Omega = \Omega$
        - $P(A) = P(\Omega) = 1$
        - **dogodek ki se zgodi ob vsakem poskusu**
    - **Nemogoc** dogodek: $A \cap \Omega = \emptyset$,
        - $P(A) = P(\emptyset)$ = 0
        - **dogodek ki se ne zgodi ob nobenem poskusu**
    - **Nasproten** dogodek: A^C,
        - $A^C \cap A = \emptyset$, $P(A^C) = 1 - P(A)$ (komplementarna mnozica)
        - v vsakem poskusu se zgodi ali A ali A^C
- Definiraj vsoto dveh dogodkov
    - Vsota dogodkov je predstavljena z **unijo** $A + B = A \cup B$
    - ali se zgodi en ali se zgodi drug
        - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Definiraj Produkt dveh dogodkov

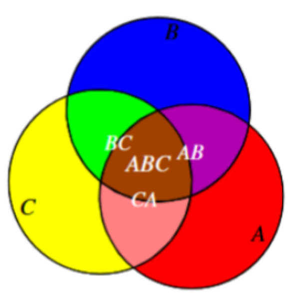
- $AB = A \cap B$
- Produkt dveh dogodkov je verjetnost da se zgodita oba dogodka hkrati (presek)
  - $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- `Nastej lastnosti za vsoto dveh dogodkov`
  - $P(A \cup B) = P(B \cup A)$
  - $P(A \cup A) = P(A)$
  - $P(A \cup \Omega) = P(\Omega)$
  - $P(A \cup \emptyset) = P(A)$
- `Nastej lastnosti za produkt dveh dogodkov`
  - $P(AB) = P(BA)$
  - $P(AA) = P(A)$
  - $P(A\Omega) = P(A)$
  - $P(A\emptyset) = \emptyset$
- `Podaj pravilo o vkljucitvi/izkljucitvi`
  - $$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$
    - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
    - $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

4. Popoln sistem dogodkov in definicije vrjetnosti

- `Podaj najmanjsi popoln sistem dogodkov`
  - Ω (samo 1 gotov dogodek)
- `Kdaj je mnozica dogodkov popoln sistem`
  - mnozica dogodkov $H_1, H_2 \ldots, H_n$, kjer velja:
    - $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$
    - $\bigcap_{1 \le i < j \le n} H_i \cap H_j = \emptyset$
- `Statisticna definicija verjetnosti`
  - Verjetnost dogodka A v danem poskusu je stevilo P(A) h kateremu **konvergira relativna frekvenca** dogodka A v velikem stevilu ponovitev poskusa
    - relativna: $f(A) = \frac{k}{n}$, k stevilo ugodnih, n stevilo poskusov
- `Klasicna definicija verjetnosti (izpeljava)`
  - $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{st. izidov v A}}{\text{st. vseh izidov}}$
- `Geometricna definicija vrjetnosti`
  - $P(A) = \frac{\text{mera (A)}}{\text{mera }(\Omega)}$, mera je dolzina, ploscina, volumen, ...
- `Podaj zvezo med verjetnostmi dveh dogodkov ter njunima vsoto in produktom (in jo utemelji bodisi s statisticno ali geometrijsko definicjo verjetnosti)`
  - $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

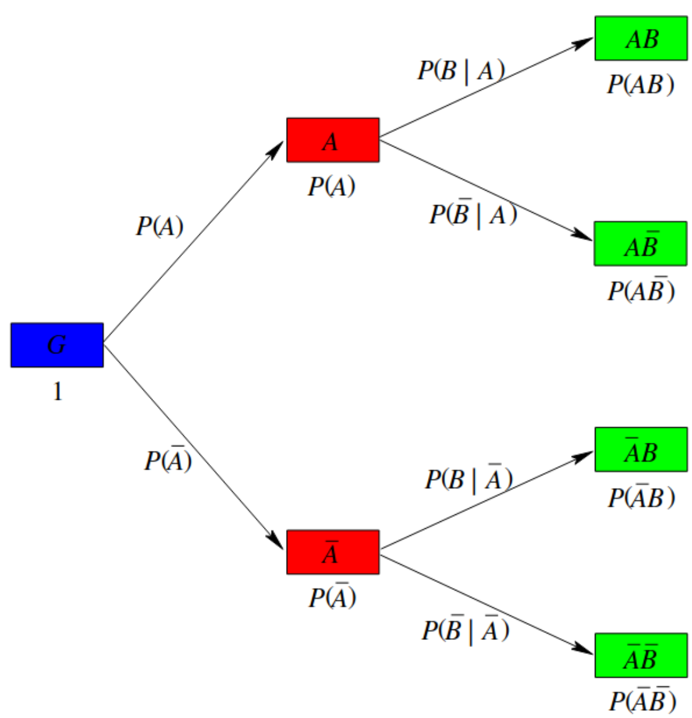
<u>Geometrijska utemeljitev</u>:





5. Pogojna verjetnost

- `Primer`
    - Vrzemo dve kocki
    - $A \equiv$ na prvi kocki pade 6 pik
    - $B \equiv$ skupaj pade 10pik
    - $P(A \mid B)$ koliksna je verjetnost da je na prvi kocki padlo 6 pik ce vemo da je bila vsota na obeh kockah 10
- `Definiraj pogojno verjetnost (s kompleksom pogojev)`
    - $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
    - Ce sta dogodka neodvisna $\rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$
        - $P(A \mid B) = P(A)$
- `Podaj formulo, ki poveze obicajno in pogojno verjetnost`
    - $P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$
    - $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$
        - $P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$
- `Zakaj je pomembna graficna predstavitev z drevesom`



Slika 3.4: Verjetnost vsakega izmed dogodkov $A\,B$, $A\,\overline{B}$, $\overline{A}\,B$ in $\overline{A}\,\overline{B}$ je enaka produktu verjetnosti na puščicah od začetka (koren na levi) pa do samega dogodka, kar nam zagotavlja identiteta (3.1). Primerjaj te dogodke s polji kontingenčne tabele 2×2. Le-ti sestavljajo popoln sistem dogodkov, vsota prvega in tretjega pa je ravno dogodek B. Kakor velja $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, velja tudi $P(B|A) + P(\overline{B}|A) = 1$, tj. vsota verjetnosti na izhodnih puščicah iz A, je enaka 1. Glej Trditev 3.2.

    - TODO
- `Izpelji formulo za racunanje pogojne verjetnosti (z uporabo statisticne definicije verjetnosti in/ali geometrijske definicije verjetnosti)`
    - TODO

6. Dvofazni poskusi

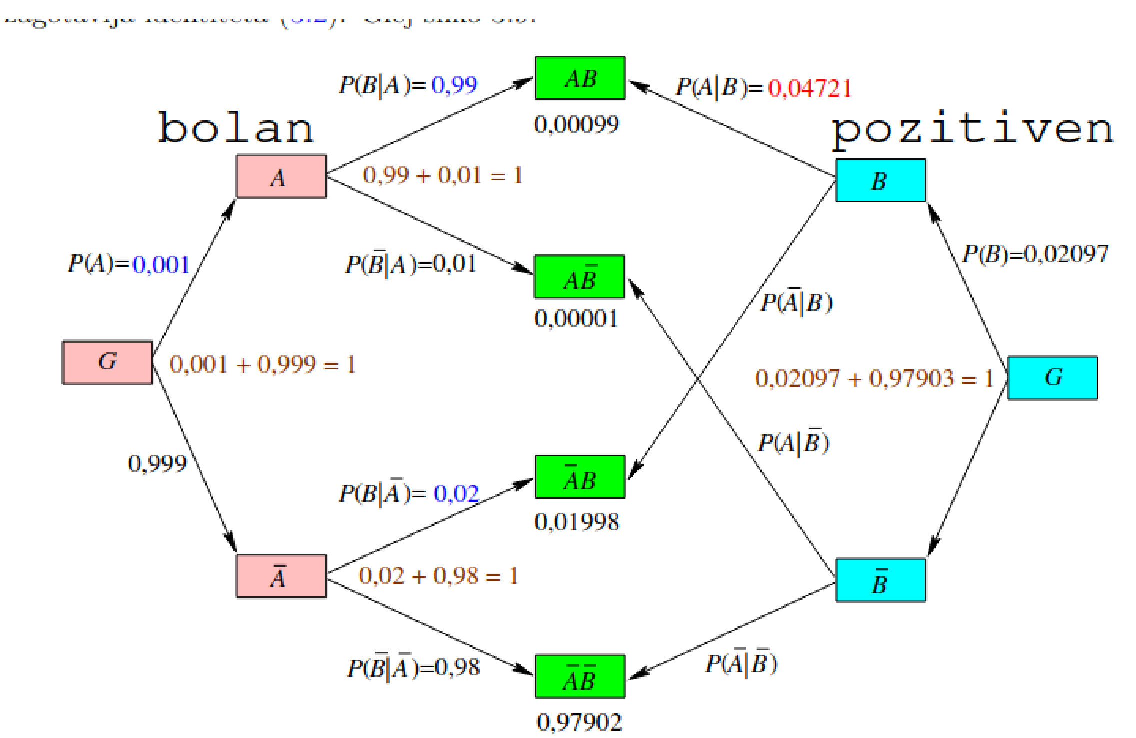
- `definicija popolnega sistema dogodkov`
    - zgoraj
- `formula za pogojno verjetnost`

    - zgoraj
- `primer`

Redko nalezljivo bolezen dobi ena oseba na 1000. Imamo dober a nepopolen test za to bolezen: ce ima neka oseba to bolezen potem test potrdi to v 99% primerih
Test napacno pokaze 2% negativnih pacientov kot bolanih. - dogodek A: pacient je dobil nalezjlivo bolezen - dogodek B: pacientov test je bil pozitiven - $P(A) = 0.001$ - $P(B|A) = 0.99$ - $P(B|\overline{A}) = 0.02$ (dogodek “napacno pooizitven”)
Zanima nas $P(A|B)$, verjetnost da smo se nalezli ce je test pozitiven?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{A \cap B}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(A)}$$

- `drevesna struktura`



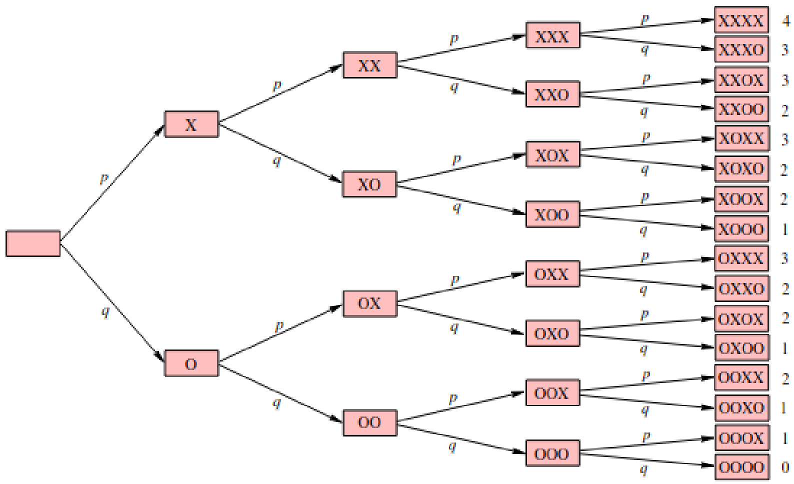
- `nepopolna formula`
    - TODO
- `formula za popolno verjetnost`
    1. $A = (A_1 \cap H_1) \cup (A_1 \cap H_2) \cup \cdots \cup (A_1 \cap H_n)$
    2. $P(A) = P(A \cap H_1) + \cdots + P(A \cap H_n)$
        - uporabimo: $P(A \mid H_i) = \frac{P(A \cap H_i)}{P(H_i)} \rightarrow P(A \cap H_i) = P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)$
    3. $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \ldots P(A|H_n)P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$
- `Bayesov obrazec`
    - za popoln sistem dogodkov H_i
    - $P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)}$
- `Dokaz za Beysov obrazec in formulo za popolno verjetnost`
    - zgornja izpeljava samo po definiciji (mnozic)

7. Bernullijevo zaporedje neodvisnih poskusov

- `primeri`
    - verjetnosti izidov v enem poskusu neodvisne od tega kar se je zgodilo v drugih poskusih

- V vsakem poskusu se lahko zgodi dogodek A ali pa $\overline{A}$
- mecemo kovanec:
- $P(A) = 0.5$ (pade cifra)
- $P(\overline{A}) = 0.5$ (pade grb)

- `vecfazni poskusi`
- `kombinacije`
- `drevesna predstavitev`



- `nepopolna formula`
- `formula za racunanje verjetnosti (binomska porazdelitev)`
    - verjetnost da se dogodek A zgodi k krat v n zaporednih poskusih:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- `racunanje verjetnosti in/ali Laplacoev tockovni obrazec`
- `zveza med binomsko in normalno porazdelitvijo i/ali Poissonovo porazdelitvijo`
- `Dokazovanje pricakovane vrednosti z indikatorji`

8. Sredine

- `aritemticna sredina (k=1)`
    - $$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$
- `geometrijska sredina (k=0)`
    - $$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$
- `kvadratna sredina (k=2)`
    - $$K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$
- `harmonoicna sredina (k=-1)`
    - $$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$
- `potencna sredina stopnje k`
    -

$$P_{n,k} = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + \cdots + a_n^k}{n}}$$

- neenakosti med njimi
    - Sredine dveh stevil

$$H_2 \leq G_2 \leq A_2 \leq K_2$$

- dokaz $A_2 \geq G_2$ (in karakterizacija enakosti)
    - $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
    - $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geq ab$
    - $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$
    - $(a-b)^2 \geq 0$
- dokaz $K_2 \geq A_2$ (in karakterizacija enakosti)
    - $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$
    - $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$
    - $\frac{a^2+b^2-2ab}{4} \geq 0$
    - $\frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$
- dokaz brez besed