1. (**1 bod**) Dokažte, že pro každé nenulové přirozené číslo n platí:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

① $L = \frac{1}{2}$ $P = \frac{1}{2}$ $L = P$

② předp: $\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)}} = \frac{k}{k+1}$

dok, že: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{k^2+3k+2} = \frac{(k+1)\cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Hurá!!!

2. (**1 bod**) Na tabuli je za sebou napsáno 2013 různých přirozených čísel. Ukažte, že z nich lze vybrat několik (alespoň jedno) po sobě napsaných tak, že jejich součet je dělitelný 2013.

Označme si jednotlivá čísla: $a_1, a_2 \dots a_{2013}$, potom máme součty:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$s_{2013} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2013}$$

mohou nastat 2 situace:

a) jeden ze součtů je dělitelný 2013 → HURÁ!!!

b) žádný součet není dělitelný, potom některé dva musí dávat stejný zbytek po dělení 2013 (dle Dirichletova principu)

(počet možných zbytků po dělení 2013 je 2012)

Označme si takové dva součty

$$S_i = 2013m + r$$
$$S_j = 2013n + r \qquad j > i$$

$$S_j - S_i = (2013n + r) - (2013m + r) = 2013n - 2013m =$$
$$= 2013(n-m)$$

(součet několika po sobě napsaných čísel)

je dělitelné 2013

✓

3. (**1 bod**) Nechť E_1, E_2 jsou relace ekvivalence, obě na množině M. Zjistěte zdali je relace $E_1^{-1} \circ E_2^{-1}$ také relací ekvivalence na M. Svoje tvrzení zdůvodněte.

$E_{1,2} \rightarrow R, S, T$ na M

$R \rightarrow (a,a) \in E_1 \Rightarrow (a,a) \in E_1^{-1}$

$S \rightarrow (a,b) \in E_1$ i $(b,a) \in E_1 \Rightarrow (a,b) \in E_1^{-1}$ i

$(b,a) \in E_1^{-1}$

$\downarrow$

R a S nám zajistěje stejné prvky v E_1 a E_1^{-1} $\Rightarrow$ T nám nemůže vygenerovat jiné prvky v E_1 a E_1^{-1}

$\Rightarrow E_1 = E_1^{-1}$ $(E_2 = E_2^{-1})$

$M = \{a, b, c\}$

$E_1 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\} = E_1^{-1}$

$E_2 = \{(a,c), (c,a), (a,a), (c,c)\} = E_2^{-1}$

$E_1^{-1} \circ E_2^{-1} = \{(c,a), (c,b), (a,a), (a,b)\}$

není EKV. protože $(c,a) \in E_1^{-1} \circ E_2^{-1}$, ale $(c,c) \notin E_1 \circ E_2 \rightarrow \cancel{R}$

4. (**1 bod**) Na množině $\mathbb{R}$ určete:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 = 0$$

5. (**1 bod**) Na množině reálných čísel řešte soustavu rovnic s parametrem a.

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 2a \\ x & + & y & + & az & = & 3a \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = A$$

$$= a^3 + 1 + 1 - (a + a + a) =$$

$$\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{array}$$

$$= a^3 - 3a + 2 =$$

$$= (a-1)^2 (a+2) \Rightarrow a \notin \{1, -2\}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 1 \\ 3a & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 2a + 3a - (2a^3 + a + 3a)$$

$$\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 1 \end{array}$$

$$= -a^3 - 3a^2 + 4a =$$

$$= -(a-1)(a+2)^2$$

$$x = \frac{A_1}{A} = \frac{-\cancel{(a-1)}(a+2)^{\cancel{2}}}{(a-1)^{\cancel{2}}\cancel{(a+2)}} = \boxed{-\frac{a+2}{a-1}}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & 3a & a \end{vmatrix} = 2a^3 + 3a + a - (a^2 + 3a^2 + 2a) =$$

$$2a^3 - 4a^2 + 2a =$$

$$\begin{array}{ccc} a & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \end{array}$$

$$= 2a(a-1)^2$$

$$y = \frac{A_2}{A} = \frac{2a\cancel{(a-1)^2}}{\cancel{(a-1)^2}(a+2)} = \boxed{\frac{2a}{a+2}}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 2a \\ 1 & 1 & 3a \end{vmatrix} = 3a^3 + a + 2a - (3a + 2a^2 + a^2) =$$

$$\begin{matrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 2a \end{matrix}$$

$$= 3a^3 - 3a^2 =$$

$$= 3a^2(a-1)$$

$$z = \frac{A_3}{A} = \frac{3a^2\cancel{(a-1)}}{(a-1)^2(a+2)} = \boxed{\frac{3a^2}{(a-1)(a+2)}}$$

$$x = \boxed{-\frac{a+2}{a-1}} \qquad y = \boxed{\frac{2a}{a+2}}$$

$$z = \boxed{\frac{3a^2}{(a-1)(a+2)}} \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$$

$a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 2a \\ 1 & 1 & a & 3a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{nemá řešení}$$

$a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \text{nemá řešení}$$