Úvod, opakování, funkce jedné reálné proměnné

Jiří Vítovec

1. přednáška z IMA (1. týden semestru)

Přednášky z Matematické Analýzy

Určeno studentům FIT VUT

Obsah

Co je Matematická analýza?

- **Matematická analýza** - základní disciplína matematiky.
- Základní pojmy **Matematické analýzy:** funkce, limita, derivace, integrál a nekonečné součty.
- Základem **Matematické analýzy** je tzv. *infinitezimální počet* neboli *calculus* (infinitezimální = nekonečně malý).

Matematika $\mapsto$ **Matematická analýza** $\mapsto$ Teorie Funkcí
$\mapsto$ Diferenciální počet
$\mapsto$ Integrální počet
$\mapsto$ Nekonečné řady
$\mapsto$ Diferenciální rovnice

Číselné obory

- **Přirozená čísla**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$.
- **Celá čísla**: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- **Racionální čísla**: $\mathbb{Q} = \{q = \frac{z}{n} : \; z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
  Čísla, která nejsou racionální, tj. nelze je vyjádřit jako podíl celého a přirozeného čísla, nazýváme **iracionální** a značíme $\mathbb{I}$.
- **Reálná čísla**: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
  K reálným číslům lze jednoznačně přiřadit všechny body nekonečné přímky (číselné osy) dle jejich vzdálenosti od počátku.
- **Komplexní čísla**: $\mathbb{C} = \{z = a + bi : \; a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.
  Komplexním číslem z nazýváme uspořádanou dvojici reálných čísel $[a, b]$ a píšeme $z = [a, b] = a + bi$. Číslu a říkáme **reálná část** komplexního čísla z, číslu b **imaginární část** komplexního čísla z.

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$

Nejznámějšími podmnožinami reálných čísel (vedle množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$, kde platí $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$) jsou **intervaly**. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Připomeňme:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $\langle a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $(-\infty, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Prvky $-\infty$ a ∞, tzv. *nevlastní body*, **nepatří** do $\mathbb{R}$!
Zavedeme označení $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Funkce

Definice (Zobrazení)

Nechť D, M jsou neprázdné množiny. **Zobrazení** f množiny D do množiny M, zapisujeme $f : D \to M$, je předpis, který **každému** prvku $x \in D$ přiřadí **právě jeden** prvek $y \in M$.

- Tímto „předpisem“ rozumíme vybranou podmnožinu uspořádaných dvojic (x, y) z kartézského součinu $D \times M$.
- Množina D se nazývá **definiční obor zobrazení** f.
- Množina H, $H \subseteq M$, definovaná jako

  $$H = f(D) = \{f(x) : x \in D\}$$

  se nazývá **obor hodnot zobrazení** f.
- Prvek y se nazývá **hodnota zobrazení** f v x nebo též **obraz** x a značí se $f(x)$. Tedy $y = f(x)$.

Definice (Funkce)

Nechť $D \subseteq \mathbb{R}$. Zobrazení $f : D \to \mathbb{R}$ se nazývá **reálná funkce jedné reálné proměnné** (dále jen **funkce**). Zapisujeme $y = f(x)$.

- Množina $D = D(f)$ se nazývá **definiční obor funkce** f.
- Množina $H(f)$, $H(f) \subseteq \mathbb{R}$, definovaná jako

$$H(f) = \{f(x) : x \in D\}$$

  se nazývá **obor hodnot funkce** f.
- x se nazývá **proměnná** (argument) funkce f.
- Číslo $f(x_0)$ se nazývá **funkční hodnota funkce** f v bodě x_0.

Poznámka

Není-li definiční obor funkce zadán, jedná se o množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má daná funkce smysl.

Příklad

- Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{x+9}{x^3-5x}$.
- Určete definiční obor funkce $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 5x + 6}$.
- Určete definiční obor funkce $h(x) = \log_2(9 - x^2)$.

Řešení:

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{5}, 0\}$, $D(g) = (-\infty, 2\rangle \cup \langle 3, \infty)$, $D(h) = (-3, 3)$

Poznámka

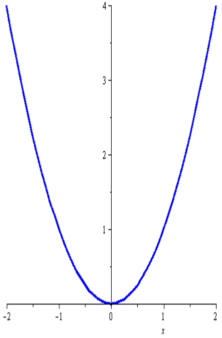
Ze SŠ víme, že při určování definičního oboru funkcí tvaru

- $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ platí $h(x) \neq 0$.
- $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$ platí $g(x) \geq 0$.
- $f(x) = \log_a[g(x)]$ platí $g(x) > 0$.

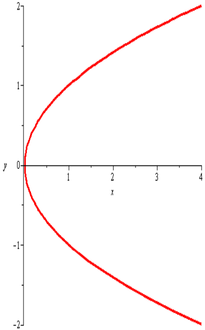
Definice (graf funkce)

Množina všech bodů roviny daných souřadnicemi $[x, f(x)]$ se nazývá **graf funkce** f.

Příklad



Obr. : Funkce $f(x) = x^2$.



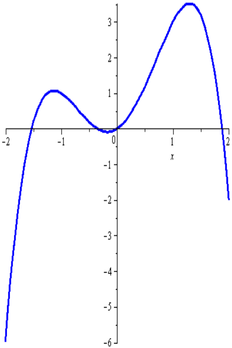
Obr. : Nejde o graf funkce.

Definice (Ohraničenost)

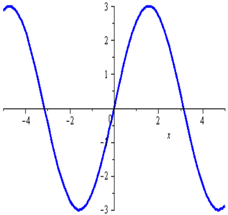
Buď f funkce, $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- **zdola ohraničená**, jestliže existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \geq d$,
- **zhora ohraničená**, jestliže existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq h$,
- **ohraničená**, jestliže existují $d, h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $d \leq f(x) \leq h$.

Příklad



Obr. : Funkce ohraničená zhora.



Obr. : Ohraničená funkce.

Definice (Parita)

Buď f taková funkce, že pro její definiční obor platí

$$x \in D(f) \;\Rightarrow\; -x \in D(f).$$

- Řekneme, že funkce f je **sudá**, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí

$$f(-x) = f(x).$$

- Řekneme, že funkce f je **lichá**, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí

$$f(-x) = -f(x).$$

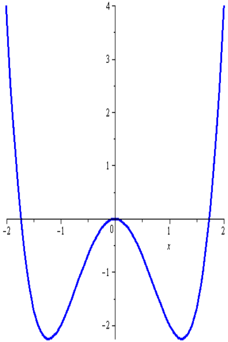
Příklad

Rozhodněte o případné sudosti a lichosti následujících funkcí:

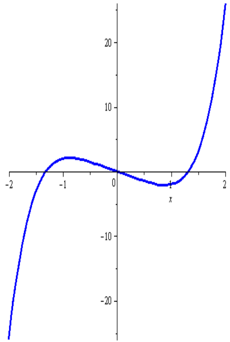
$$a)\ f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+3} \qquad b)\ g(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad c)\ h(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$$

Řešení: a) sudá, b) ani sudá, ani lichá c) lichá

Příklad



Obr. : Graf sudé funkce je symetrický podle osy y.



Obr. : Graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Základní vlastnosti sudých a lichých funkcí:

- Je-li lichá funkce f definovaná v bodě 0, tak platí $f(0) = 0$.
- Jedinou funkcí, zároveň sudou i lichou, je funkce $f(x) = 0$.
- Součet dvou sudých (resp. lichých) funkcí je sudá (resp. lichá) funkce.
- Součet liché a sudé funkce není ani lichá ani sudá funkce.
- Součin dvou sudých (resp. lichých) funkcí je vždy sudá funkce.
- Součin liché funkce a sudé funkce je lichá funkce.
- Libovolnou funkci (s definičním oborem symetrickým kolem nuly) lze jednoznačně rozložit na součet sudé a liché funkce

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Příklad

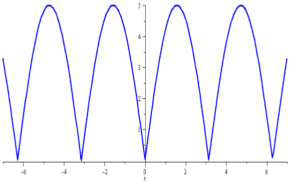
Zapište funkci $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, jako součet sudé a liché funkce. [**Řešení**: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-1}$]

Definice (Periodičnost)

Nechť $p \in \mathbb{R}, p > 0$. Řekneme, že funkce f je **periodická** s **periodou** p, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí

$$x + p \in D(f), \qquad f(x+p) = f(x).$$

Příklad



Obr. : Periodická funkce.

Definice (rostoucí a klesající funkce na množině)

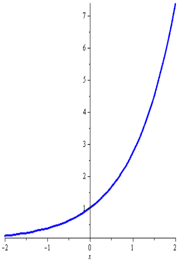
Buď f funkce, $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- **rostoucí**, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$
- **neklesající**, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2),$$
- **klesající**, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$
- **nerostoucí**, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

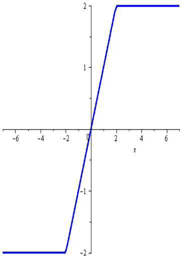
Definice (monotónost)

- Funkce je **monotóní** na množině M, pokud je neklesající na M, nebo nerostoucí na M.
- Funkce je **ryze monotóní** na množině M, pokud je klesající na M, nebo rostoucí na M.

Příklad



Obr. : Rostoucí funkce.



Obr. : Neklesající funkce.

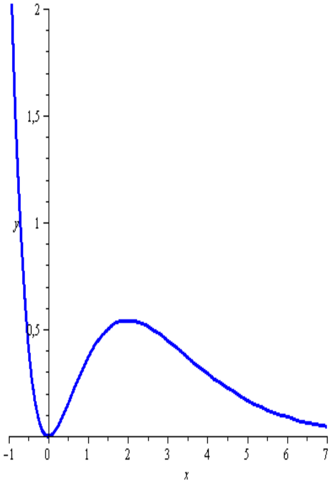
Definice (kladná a záporná)

Buď f funkce a $M \subseteq D(f)$.

- Funkce f je **kladná** na M, pokud $f(x) > 0$ pro $\forall x \in M$.
- Funkce f je **nezáporná** na M, pokud $f(x) \geq 0$ pro $\forall x \in M$.
- Funkce f je **záporná** na M, pokud $f(x) < 0$ pro $\forall x \in M$.
- Funkce f je **nekladná** na M, pokud $f(x) \leq 0$ pro $\forall x \in M$.
- Bod $[0, f(0)]$ nazýváme **průsečík funkce f s osou y**.
- Je-li $f(x_0) = 0$, pak nazýváme bod $[x_0, 0]$ **průsečík funkce f s osou x**.

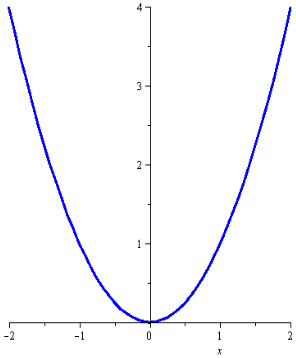
Příklad

Popište zobrazenou funkci pomocí právě zmíněných pojmů.

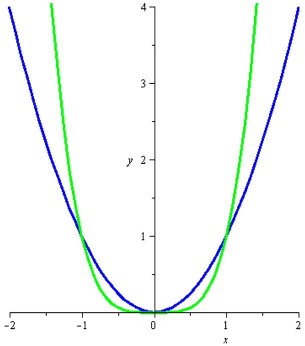


Přehled elementárních funkcí

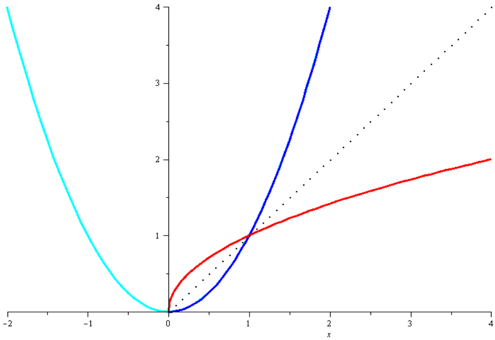
1) Mocninné funkce



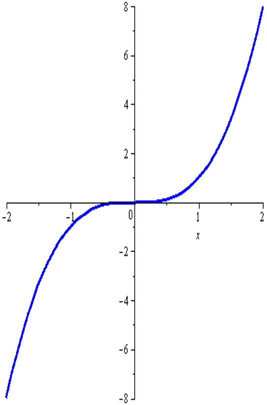
Obr. : x^2



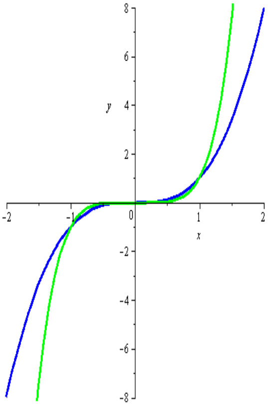
Obr. : x^2, x^4



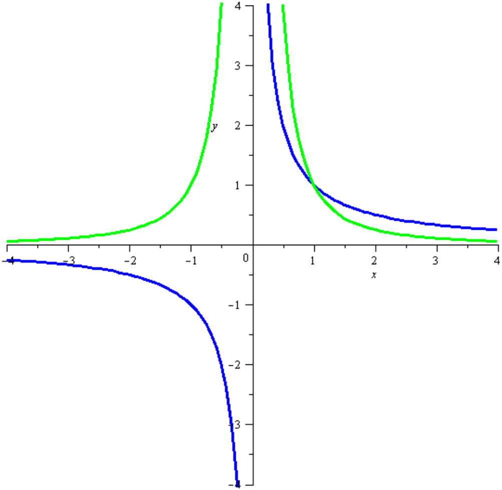
Obr. : x^2, $\sqrt{x}$



Obr. : x^3

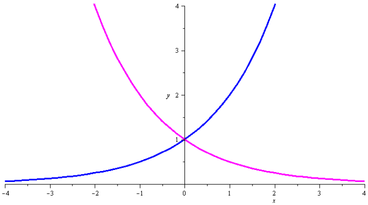


Obr. : x^3, x^5

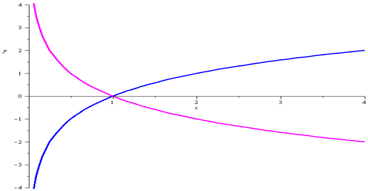


Obr. : $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$

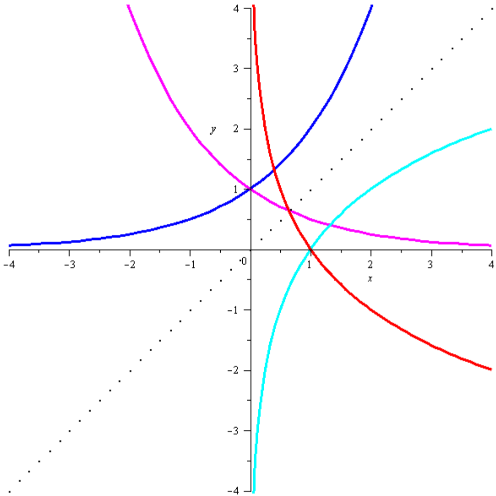
2) Exponenciální a logaritmické funkce



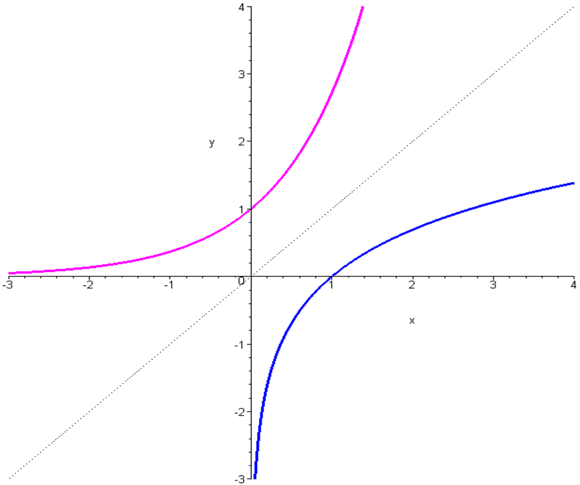
Obr. : 2^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$



Obr. : $\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$

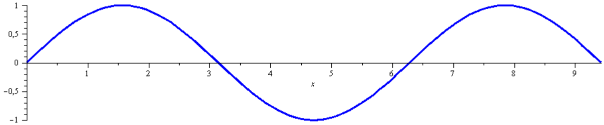


Obr. : 2^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$

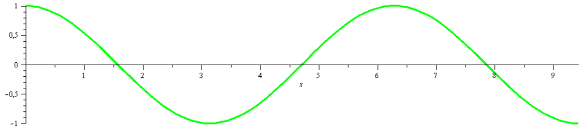


Obr. : e^x, $\ln x$ $(e = 2,718281828...)$

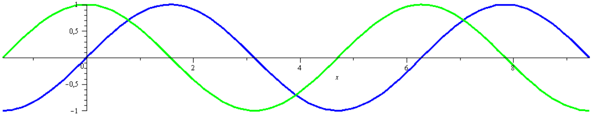
3) Goniometrické funkce



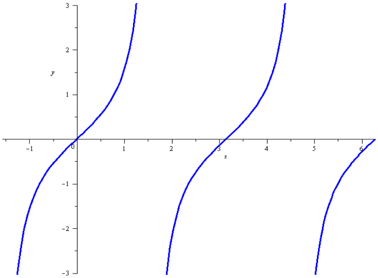
Obr. : $\sin x$



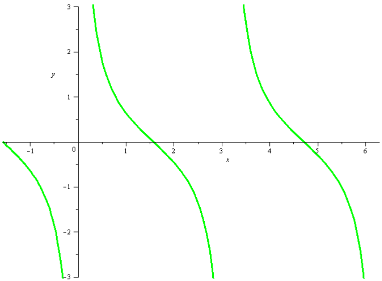
Obr. : $\cos x$



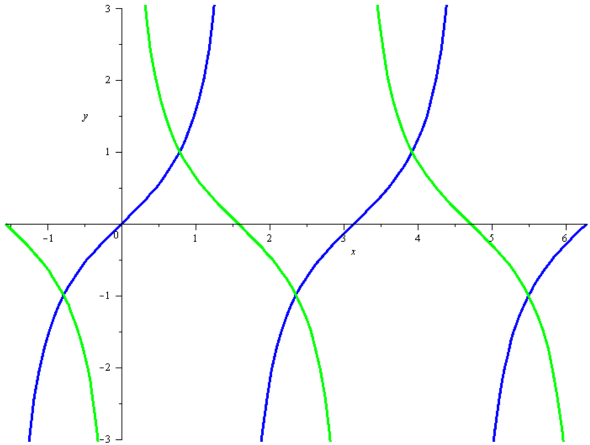
Obr. : $\sin x$, $\cos x$



Obr. : tg x



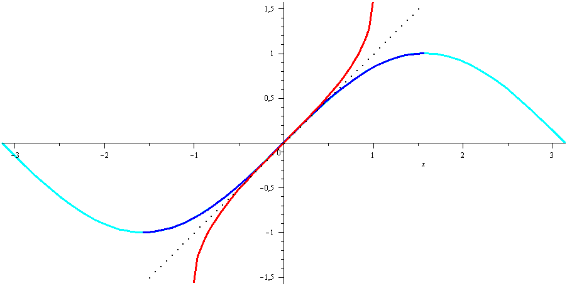
Obr. : cotg x



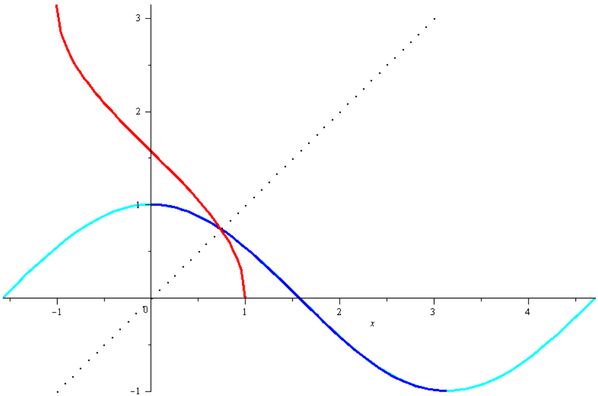
Obr. : $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$

4) Cyklometrické funkce

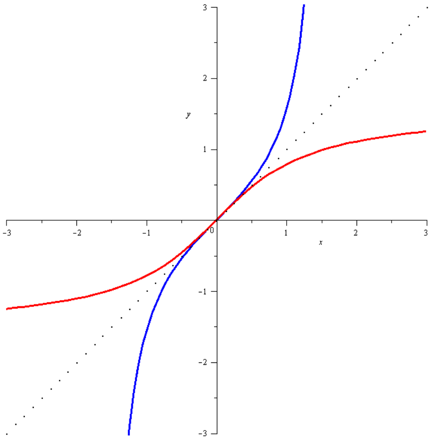
(inverzní ke goniometrickým)



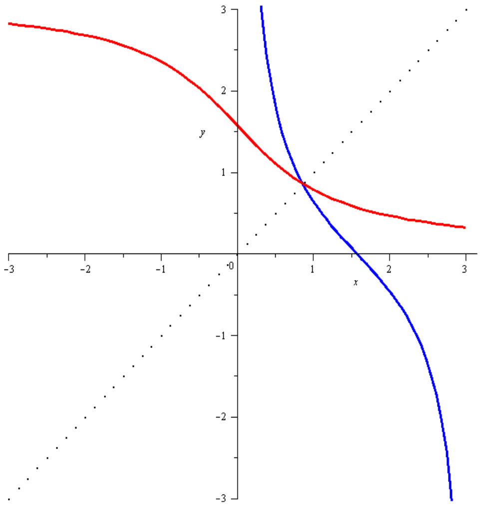
Obr. : $\sin x$, $\arcsin x$



Obr. : $\cos x$, $\arccos x$



Obr. : $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$



Obr. : $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{arccotg} x$

Další speciální funkce

- **Celá část**: $f(x) = [x]$. Funkce splňuje $[x] \leq x < [x] + 1$.
- **Signum**: $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Funkce je definována jako

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

- **Charakteristická funkce množiny *M***: $f(x) = \chi_M(x)$. Funkce je definovna jako

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin M, \\ 1 & \text{pro } x \in M. \end{cases}$$

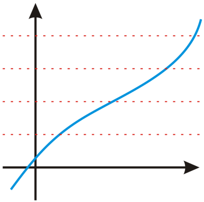
Inverzní funkce

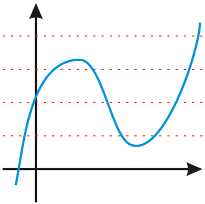
Definice (Prostá funkce)

Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M **prostá**, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in M$ platí

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Vodorovné přímky protnou graf prosté funkce nejvýše jednou.

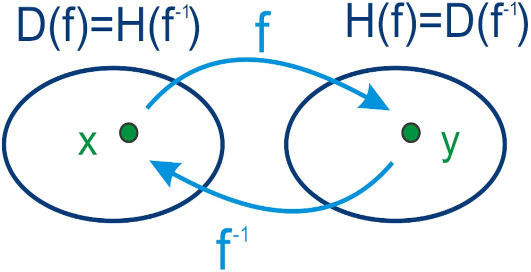




- Je-li funkce f na M ryze monotónní, pak je f na M prostá.
- Opak (f je prostá $\Rightarrow$ f je ryze monotónní) **neplatí**! (Proč?)

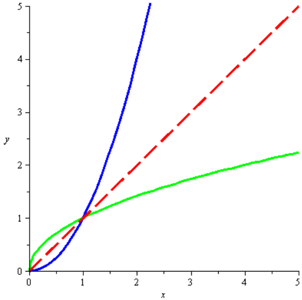
Definice (Inverzní funkce)

Nechť f je prostá funkce. Funkce f^{-1}, která každému $y \in H(f)$ přiřazuje právě to x, pro které platí $y = f(x)$, se nazývá **inverzní funkcí k funkci** f. Píšeme $x = f^{-1}(y)$.



Nechť f je prostá funkce. Potom platí

- $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$.
- $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D(f^{-1})$ a $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in D(f)$.
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Je-li funkce f rostoucí/klesající, je také funkce f^{-1} rostoucí/klesající.
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu (přímky $y = x$).



Výpočet inverzní funkce f^{-1} z funkce f

1) V zápisu $y = f(x)$ zaměníme x a y, čímž dostaneme $x = f(y)$.
2) Z rovnice $x = f(y)$ vyjádříme y a máme předpis $y = f^{-1}(x)$.

Příklad

U zadané funkce f najděte definiční obor $D(f)$ a ověřte, že f je na množině $D(f)$ prostá. Potom určete f^{-1}, $D(f^{-1})$, $H(f)$ a $H(f^{-1})$.

(i) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ [**Řeš.**: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$]

(ii) $f(x) = e^{2-x}$ [**Řeš.**: $f^{-1}(x) = 2 - \ln(x)$, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(f^{-1}) = (0, \infty)$]

(iii) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$ [**Řeš.**: $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{\arcsin x}{1 - \arcsin x}\right)^2$, $D(f) = \langle 0, \infty)$, $D(f^{-1}) = \langle 0, \sin 1)$]

K elementární funkci je inverzní vždy jiná elementární funkce:

$f(x)$	$D(f)$	$f^{-1}(x)$	$D(f^{-1})$
x^2	$x \in \langle 0, \infty)$	$\sqrt{x}$	$x \in \langle 0, \infty)$
x^2	$x \in (-\infty, 0\rangle$	$-\sqrt{x}$	$x \in \langle 0, \infty)$
x^3	$x \in \mathbb{R}$	$\sqrt[3]{x}$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	$x \in \mathbb{R}$	$\ln x$	$x \in (0, \infty)$
a^x	$x \in \mathbb{R}$	$\log_a x$	$x \in (0, \infty)$
$\sin x$	$x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$	$\arcsin x$	$x \in \langle -1, 1\rangle$
$\cos x$	$x \in \langle 0, \pi\rangle$	$\arccos x$	$x \in \langle -1, 1\rangle$
$\mathrm{tg}\, x$	$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\mathrm{arctg}\, x$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$x \in (0, \pi)$	$\mathrm{arccotg}\, x$	$x \in \mathbb{R}$

Skládání funkcí

Mezi základní operace s funkcemi (vedle skládání funkcí), patří **sčítání**, **odčítání**, **násobení** a **dělení** funkcí definované takto:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x),\\
(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x),\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}.
\end{aligned}
$$

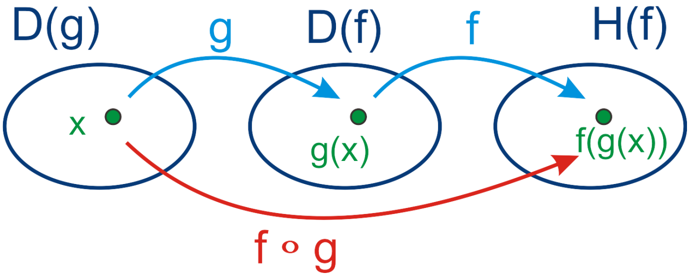
Poznámka

Předpokládáme, že definiční obory funkcí f a g jsou shodné, navíc u dělení funkcí je $D\left(\frac{f}{g}\right)$ zúžen o ta x, pro která platí $g(x)=0$.

Definice (Složená funkce)

Nechť $u = g(x)$ je funkce s definičním oborem $D(g)$ a oborem hodnot $H(g)$. Nechť $y = f(u)$ je funkce s definičním oborem $D(f)$ a navíc platí $H(g) \subseteq D(f)$.

Složenou funkcí $(f \circ g)(x)$ rozumíme přiřazení, které $\forall x \in D(g)$ přiřadí $y = f(u) = f\big(g(x)\big)$. Funkci g nazýváme **vnitřní složkou** a funkci f **vnější složkou** složené funkce. Tedy $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.



Příklad

- Určete obě složky $f(x)$ a $g(x)$ funkce $F(x) = \sin x^2$.
- Určete všechny tři složky $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$ funkce $G(x) = \sqrt[3]{e^{2x-4}}$.
- Alespoň třemi způsoby složte funkce: $f(x) = \ln x$, $g(x) = \arcsin x$ a $h(x) = x^3$.

Věta (O skládání prostých funkcí)

- *Libovolné složení dvou rostoucích funkcí je rostoucí funkce.*
- *Libovolné složení dvou klesajících funkcí je rostoucí funkce.*
- *Libovolné složení rostoucí a klesající funkce je klesající funkce.*
- *Libovolné složení dvou prostých funkcí je prostá funkce.*
- *Složení dvou navzájem inverzních funkcí je identita, tj.* $y = x$.

(Důkaz prvních tří tvrzení vyplyne z věty o derivaci složené funkce.)

Poznámka

Při určování definičních oborů složených funkcí je nutné zapsat všechny podmínky! Definiční obor je pak průnik těchto podmínek. Zejména při určování definičního oboru složených funkcí tvaru

- $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ platí $h(x) \neq 0$.
- $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$ platí $g(x) \geq 0$.
- $f(x) = \log_a[g(x)]$ platí $g(x) > 0$.
- $f(x) = \operatorname{tg}[g(x)]$ platí $g(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(x) = \operatorname{cotg}[g(x)]$ platí $g(x) \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f(x) = \arcsin[g(x)]$ platí $-1 \leq g(x) \leq 1$.
- $f(x) = \arccos[g(x)]$ platí $-1 \leq g(x) \leq 1$.

Příklad

Určete definiční obory následujících funkcí:

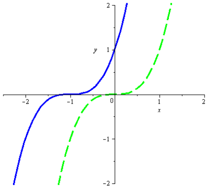
$$f(x) = \frac{5-2x}{\ln(3-2x)}, \quad g(x) = \sqrt{\ln(5x - x^2 - 5)}, \quad h(x) = \arccos\frac{2x-1}{x+3}$$

Řeš. : $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$, $\quad D(g) = \langle 2, 3\rangle$, $\quad D(h) = \langle -\frac{2}{3}, 4\rangle$

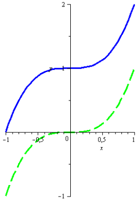
Transformace grafu funkce

Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a nenulová reálná čísla a, b.

- Uvažujme funkci $y_1 = f(x + a)$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď **doleva** (je-li $a > 0$), nebo **doprava** (pro $a < 0$), a to o velikost čísla a.
- Uvažujme funkci $y_2 = f(x) + b$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď **nahoru** (je-li $b > 0$), nebo **dolů** (pro $b < 0$), a to o velikost čísla b.



Obr. : $f(x) = (x + 1)^3$



Obr. : $f(x) = x^3 + 1$

Nechť je dána funkce $y = f(x)$.

- Uvažujme funkci $y_3 = |f(x)|$. Tato funkce má vůči původní funkci **graf** nacházející se **pod osou *x*** symetricky **překlopený** podle osy x **nad osu *x***.
- Uvažujme funkci $y_4 = f(|x|)$. Tato funkce je sudá a má vůči původní funkci **graf vpravo od osy *y*** totožný a zároveň symetricky **překlopený** podle osy y **doleva od osy *y***.
- Uvažujme funkci $y_5 = -f(x)$. Tato funkce má **graf** vůči původní funkci symetricky **překlopený podle osy *x***.
- Uvažujme funkci $y_5 = f(-x)$. Tato funkce má **graf** vůči původní funkci symetricky **překlopený podle osy *y***.

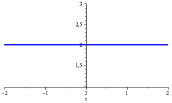
Polynomy

Funkci

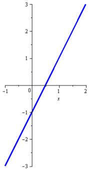
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ nazýváme **polynom stupně** n, $n \in \mathbb{N}_0$.

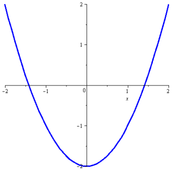
- Čísla $a_0, \ldots, a_n$ nazýváme **koeficienty** polynomu P.
- Koeficient a_n nazýváme **vedoucí koeficient**
- Koeficient a_0 nazýváme **absolutní člen**.
- Je-li $a_n = 1$, říkáme, že polynom P je **normovaný**.



Obr. : $P_0(x) = 2$



Obr. : $P_1(x) = 2x - 1$



Obr. : $P_2(x) = x^2 - 2$

Příklad (Operace s polynomy)

- Sčítání, odčítání polynomů a násobení polynomu konstantou:

$$\begin{aligned}
&(3x^2 - 2x + 4) - 2(x^3 + x^2 + 2x - 1)\\
&= 3x^2 - 2x + 4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x + 2\\
&= -2x^3 + x^2 - 6x + 6.
\end{aligned}$$

- Násobení polynomů:

$$\begin{aligned}
&(2x^2 - 3)(x^3 + 2x + 3)\\
&= 2x^2(x^3 + 2x + 3) - 3(x^3 + 2x + 3)\\
&= 2x^5 + 4x^3 + 6x^2 - 3x^3 - 6x - 9\\
&= 2x^5 + x^3 + 6x^2 - 6x - 9.
\end{aligned}$$

Příklad (Operace s polynomy)

- Dělení polynomu $P_n(x)$ polynomem $Q_m(x)$, $n \geq m$:

$$
\begin{aligned}
& (4x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 7) : (x^2 + 2) = 4x^2 - x - 7 + \tfrac{-x+21}{x^2+2}. \\
- & \underline{(4x^4 + 8x^2)} \\
& 0 - x^3 - 7x^2 - 3x + 7 \\
- & \underline{(-x^3 - 2x)} \\
& 0 - 7x^2 - x + 7 \\
- & \underline{(-7x^2 - 14)} \\
& 0 - x + 21
\end{aligned}
$$

- Zkuste sami!
  a) $(3x + 7) : (x + 1)$ $\left(\text{výsledek: } 3 + \frac{4}{x+1}\right)$
  b) $(x^3 - 3) : (x + 1)$ $\left(\text{výsledek: } x^2 - x + 1 - \frac{4}{x+1}\right)$
  c) $(x^3 - 2x + 2) : (x^2 + 1)$ $\left(\text{výsledek: } x + \frac{-3x+2}{x^2+1}\right)$

Definice (Kořen, násobnost, kořenový činitel)

Číslo $x_0 \in \mathbb{C}$, pro které $P_n(x_0) = 0$ nazýváme **kořen** polynomu P_n.

Kořen $x_0 \in \mathbb{C}$ je k-**násobným kořenem** polynomu P_n, $1 \leq k \leq n$, pokud $(x - x_0)^k$ dělí $P_n(x)$ beze zbytku a $(x - x_0)^{k+1}$ nedělí $P_n(x)$.

Pokud $k = 1$, mluvíme o **jednoduchém kořenu**.

Lineárnímu výrazu $(x - x_0)$ říkáme **kořenový činitel** polynomu P_n.

Věta

Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ k-násobným kořenem polynomu P_n, pak existuje polynom Q_{n-k} takový, že platí

$$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x).$$

Příklad

Polynomy $P(x) = x^4 - 16$, $Q(x) = x^4 - 9x^2$, $R(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ rozlož na součin kořenových činitelů a urči kořeny a násobnost.

Věta (Základní věta algebry a rozklad polynomu v oboru $\mathbb{C}$)

Polynom stupně n má právě n (ne nutně různých) komplexních kořenů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a platí

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Poznámka

- Je-li komplexní číslo $x_0 = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ kořenem polynomu P_n, pak je kořenem i číslo komplexně sdružené $\overline{x_0} = a - bi$.
- Počet reálných kořenů polynomu stupně n je buď n, nebo o sudý počet menší.
- Polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.

Příklad

U polynomu $P_5(x) = x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 3$ naznačte varianty o počtu reálných a komplexních kořenů.

Věta (Rozklad polynomu na součin v oboru $\mathbb{R}$)

Každý polynom je v reálném oboru možné zapsat jako součin vedoucího koeficientu, kořenových činitelů a kvadratických polynomů s komplexními kořeny.

Věta (Celočíselné kořeny)

Nechť P je normovaný polynom s celočíselnými koeficienty. Pak jsou všechny jeho celočíselné kořeny dělitelé jeho absolutního člene.

Příklad

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18, \quad \text{tedy } a_0 = 18.$$

Všechny celočíselné kořeny jsou tedy mezi děliteli čísla 18:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18.$$

Skutečně

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)^2.$$

Hornerovo schéma je algoritmus používaný při rozkladu polynomu s celočíselnými koeficienty na součin kořenových činitelů. Umožní najít všechny jeho racionální kořeny tvaru $\alpha = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$.

Hornerovo schéma - postup

Koeficienty $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$ polynomu

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

a číslo $\alpha = \frac{p}{q}$ - **potencionální kořen** polynomu P_n (kde p je dělitel čísla a_0 a q je dělitel čísla a_n) sepíšeme do tabulky

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_0	b_{-1}

Čísla $b_{n-1}, \ldots, b_{-1}$ dopočítáme následujícím způsobem:

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = \alpha b_k + a_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Tím získáme polynom

$$Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0$$

a číslo b_{-1} takové, že platí

$$P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x) + b_{-1}.$$

- Pokud vyjde $b_{-1} = 0$, tak α **je kořenem** polynomu P_n a můžeme zkoušet hledat další kořen polynomu P_n aplikací celého postupu na polynom Q_{n-1}.
- Pokud vyjde $b_{-1} \neq 0$, tak α **není kořenem** polynomu P_n a zkusíme celý postup s jiným číslem α.

Příklad

Rozložte polynom $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$ na součin kořenových činitelů.

Celočíselné kořeny jsou mezi čísly $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18$.

	1	-5	1	21	-18
1	1	-4	-3	18	‖0
1	1	-3	-6	12	–
-1	1	-5	2	16	–
2	1	-2	-7	4	–
-2	1	-6	9	‖0	–
⋮	⋮	⋮	⋮	–	–

Našli jsme kořeny $1, -2$.

$Q(x) = x^2 - 6x + 9$

$P(x) = (x-1)(x+2)Q(x)$

Celkem tedy:

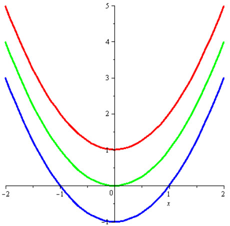
$P(x) = (x-1)(x+2)(x^2 - 6x + 9) = (x-1)(x+2)(x-3)^2$.

Kořeny $1, -2$ jsou jednoduché, kořen 3 je dvojnásobný.

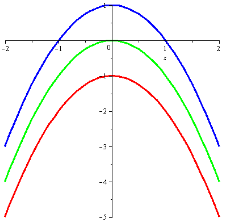
Kvadratický polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$

- $D = b^2 - 4ac$,
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
- $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- $D > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$,
- $D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$,
- $D < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \overline{x_2}, \quad x_{1,2} \in \mathbb{C}$.



Obr. :
$P(x) = ax^2 + bx + c, \; a > 0.$



Obr. :
$P(x) = ax^2 + bx + c, \; a < 0.$

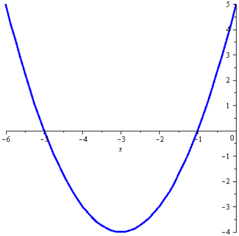
Doplnění na čtverec

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}), \qquad x^2 + px + q = (x + \tfrac{p}{2})^2 - \tfrac{p^2}{4} + q.$$

Příklad

Nakresli graf kvadratické funkce y, tak že najdete vrchol paraboly doplněním na čtverec:

$$y = x^2 + 6x + 5,$$
$$y = x^2 + 6x + 9 - 9 + 5,$$
$$y = (x + 3)^2 - 4.$$



Parabola má vrchol v bodě $[-3, -4]$ a je otevřena směrem nahoru.

Racionální lomená funkce a parciální zlomky

Definice

Nechť P_n a Q_m jsou polynomy stupně n a m. Funkci tvaru

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

nazýváme **racionální lomená funkce**. Navíc funkce $R(x)$ je

- **ryze lomená**, jestliže $n < m$,
- **neryze lomená**, jestliže $n \geq m$.

Věta

Každou neryze lomenou funkci je možné (pomocí dělení polynomů) vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, tedy

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{T_k(x)}{Q_m(x)},$$

kde S_{n-m} a T_k jsou polynomy stupně $(n-m)$ a k a platí $k < m$.

Rozklad ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky

Nechť $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je ryze lomená racionální funkce ($m > n$), kde je znám úplný rozklad polynomu Q_m v oboru $\mathbb{R}$, tj. $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je tvaru

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m (x-x_1)^{k_1} (x-x_2)^{k_2} \cdots (x-x_i)^{k_i} (x^2+p_1 x+q_1)^{r_1} (x^2+p_2 x+q_2)^{r_2} \ldots (x^2+p_j x+q_j)^{r_j}},$$

kde $x_1, \ldots, x_i$ jsou reálné kořeny polynomu Q_m s násobností $k_1, \ldots, k_i$ a $r_1, \ldots, r_j$ je násobnost kvadratických členů s komplexními kořeny. Potom se dá $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ zapsat jako součet tzv. **parciálních zlomků**. Ten vytvoříme tak, že **každé** závorce v rozkladu Q_m přiřadíme **vlastní** součet parciálních zlomků a **všechny** zlomky sečteme.

- Lineárnímu členu $(x - x_0)^k$ odpovídá součet parc. zlomků

$$\frac{A_k}{(x-x_0)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-x_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x-x_0)}.$$

- Kvadr. členu $(x^2 + px + q)^r$ odpovídá součet parc. zlomků

$$\frac{B_r x + C_r}{(x^2+px+q)^r} + \frac{B_{r-1} x + C_{r-1}}{(x^2+px+q)^{r-1}} + \cdots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)}.$$

Příklad

Naznačte rozklad racionálně lomených funkcí na parciální zlomky. Použijte koeficientů $A, B, C, \ldots$, které už nedopočítávejte!

(i)

$$R(x) = \frac{x^4 + 7x + 13}{x^5 - x}.$$

(ii)

$$R(x) = \frac{x^4 + 5x + 11}{x^6 + 2x^4 + x^2}.$$

(iii)

$$R(x) = \frac{x^9 + 2}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)}.$$

(iv)

$$R(x) = \frac{x^9 + 17}{(x^6-1)(x^4-1)}.$$

Postup na výpočet koeficientů parciálních zlomků

Mějme rovnici, kde levá strana je racionální lomená funkce $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ a pravá strana je její rozklad na parciální zlomky s koeficienty $A_1, ..., A_m$. Vynásobíme rovnici výrazem $Q_m(x)$, čímž se zbavíme zlomků. Používají se 3 postupy na určení koeficientů $A_1, ..., A_m$:

(i) **Univerzální postup.** Je vhodný a jediný, pokud všechny kořeny $Q_m(x)$ jsou komplexní. Roznásobíme a sečteme výrazy ve vzniklé rovnici. Porovnáme koeficienty u stejných mocnin na obou stranách rovnice, čímž dostaneme soustavu m rovnic o m neznámých. Jejím vyřešením získáme hodnoty $A_1, ..., A_m$.

(ii) **Dosazovací metoda**. Dá se použít pouze tehdy, když všechny kořeny $Q_m(x)$ jsou jednoduché reálné. Dosazujeme do vzniklé rovnice postupně všechny kořeny polynomu $Q_m(x)$, čímž okamžitě získáváme hodnoty $A_1, ..., A_m$.

(iii) **Kombinovaná metoda**. Spočívá v kombinaci předešlých postupů a je vhodná ve většině případů, kdy kořeny polynomu $Q_m(x)$ jsou jak komplexní, tak reálné či pouze reálné násobné.

Příklad

Rozložte racionálně lomené funkce na součet parciálních zlomků.

(i)

$$R(x) = \frac{x+2}{x^3 - x}.$$

(ii)

$$R(x) = \frac{5x^2 - 14x + 17}{(x-5)^2(x-1)^2}.$$

(iii)

$$R(x) = \frac{16x - 12}{x^4 + 4x^2}.$$

(iv)

$$R(x) = \frac{4}{x^4 + 1}.$$

Řešení: (i) $R(x) = -\frac{2}{x} + \frac{3/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}$, (ii) $R(x) = \frac{9/2}{(x-5)^2} + \frac{1/2}{(x-1)^2}$, (iii) $R(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{4x-3}{x^2+4}$, (iv) $R(x) = \frac{\sqrt{2}\,x+2}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} - \frac{\sqrt{2}\,x-2}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$.