Оглавление

1. Процесс «Рождения и гибели»

Это класс непрерывных цепей Маркова (дискретными состояниями и непрерывным временем), когда все состояния можно вытянуть в одну цепочку и из среднего состояния k возможны переходы только в состояния k, k-1 и k+1 в следующие моменты времени:
- в момент t объем сообщений был равен k и в течение времени $(t, t+\Delta t)$ не произошло изменения состояния;
- в момент t объем сообщений был равен k-1 и в течение времени $(t, t+\Delta t)$ появилось(родилось) одно сообщение
- в момент времени t объем сообщений был равен k+1 и в течение времени $(t, t+\Delta t)$ ушло(погибло) одно требование.

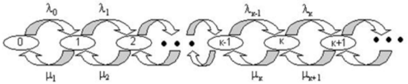


Рис. 2.3 Диаграмма интенсивностей переходов для процесса «рождения и гибели».

Овалам соответствуют дискретные состояния, *стрелки* определяют интенсивности потоков вероятности переходов от одного состояния к другому. λ_k, λ_{k-1} –рождение. μ_k, μ_{k-1} –гибели.

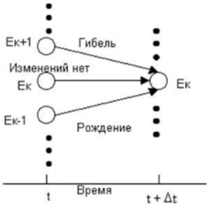


Рис. 2.2 Возможные переходы в состояние Ек.

Вероятность ($P_k(t)$) того,что в системе на момент времени t на обслуживании находятся k вызовов:

$$P_k = \frac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_{i-1}}{\mu_0\mu_1...\mu_{i-1}}P_0 = P_0\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_i+1}\ (1);$$

Вероятность,того что в системе 0 вызовов:

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_i+1}}\ (2)$$

Система,описываемая формулами (1) и (2), имеет стационарное распределение вероятностей, если она эргодическая(апериодическая,вер-сть возврата не равна 0).

Условия эргодичности выполняются только тогда, когда, начиная с некоторой k, все члены последовательности $\{\frac{\lambda_k}{\mu_k}\}$ ограничены единицей, т.е. тогда, когда существует некоторое k_0(и некоторое C<1) такое, что для всех $k\geq k_0$ выполняется неравенство:

$$\frac{\lambda_k}{\mu_k+1} < C < 1$$

2. Процесс «Рождения и Гибели». Вывод формул р.

Это класс непрерывных цепей Маркова (процесс дискретными состояниями и непрерывным временем), когда все состояния можно вытянуть в одну цепочку и из среднего состояния k возможны переходы только в состояния k, k-1 и k+1 в следующие моменты времени:

- в момент t объем сообщений был равен k и в течение времени (t,t+Δt) не произошло изменения состояния;
- в момент t объем сообщений был равен k-1 и в течение времени (t,t+Δt) появилось(родилось) одно сообщение
- в момент времени t объем сообщений был равен k+1 и в течение времени (t,t+Δt) ушло(погибло) одно требование.

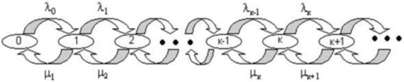


Рис. 2.3 Диаграмма интенсивностей переходов для процесса «рождения и гибели».

Овалам соответствуют дискретные состояния, *стрелки* - интенсивности потоков вероятности переходов от одного состояния к другому. λ_k, λ_{k-1} – рождение. μ_k, μ_{k-1} – гибели.

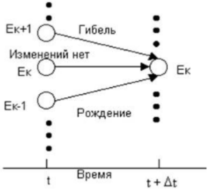


Рис. 2.2 Возможные переходы в состояние Ек.

Найдем вероятность $P_k(t)$ в системе находятся k заявок на обслуживания в момент времени t.
Воспользуемся уравнением Чепмена-Колмогорова:

P(T+t)=$\sum P(T)\ *\ p(t)$, где P(T)-нахождения события в

момент T,P(t) – интенсивности перехода за время t.
Соотношения для вероятности достижения состояния k в момент времени t+Δt**:**
$P_k(t\ +\ \Delta t) = P_{k-1}(t) \bullet P_{k-1,k}(\Delta t) + P_k(t) \bullet P_{k,k}(\Delta t) + P_{k+1}($
(1)
Выразим вероятности переходов за интервал Δt через интенсивности:
$P_{k-1,k}(\Delta t) = \lambda_{k-1}(\Delta t)\cdot\Delta t\ +\ o(\Delta t)$ – в-сть «рожения» вызова.
$P_{k+1,k}(\Delta t) = \mu_{k-1}(\Delta t)\cdot\Delta t\ +\ o(\Delta t)$ – в-сть «гибели»
$P_{k,k}(\Delta t) = \left[1\ -\ P_{k-1,k}(\Delta t)\right] \bullet \left[1\ -\ P_{k+1,k}(\Delta t)\right] =\ 1\ -\ \left[\lambda_k(\Delta t\right.$
$o(\Delta t)$ – произвольная ф-ция, которая при Δt,
стремится к нулю быстрее, чем Δt, т.е. $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\ =\ 0.$
В стационарных условиях для каждого состояния поток, входящий в данное состояние должен равняться потоку, исходящему из данного состояния:
$\mu_k(\Delta t) = \mu_k$;
$\lambda_k(\Delta t) = \lambda_k$. Исходя из этого, перепишем (1) уравнение, вынесем за «=» $P_k(t)$ и поделим на Δt:

$$\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t} = P_{k-1}(t)\lambda_{k-1} + P_{k+1}(t)\mu_{k+1} - P_k(t)\left[\mu_k + \lambda_k\right];$$

Получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\{\frac{dP_k(t)}{dt} = P_{k-1}(t)\lambda_{k-1} + P_{k+1}(t)\mu_{k+1} - P_k(t)\left[\mu_k + \lambda_k\right],\ k\geq 1$$

Для стационарного установившегося режима в-сти остаются неизменными в произвольный момент времени t, т.е производная по времени будет равняться нулю. С учетом этого, при **k=0** выразим P_1:

$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$**;**

k=1: 0=$P_0\lambda_0 - P_1\left(\mu_1 + \lambda_1\right) + P_2\mu_2$**;** Выражаем отсюда P_2 и подставляем P_1**:** $P_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_2}P_0$**;** $P_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_2\mu_3}P_0$.

Вероятность ($P_k(t)$) того, что в системе на момент времени t на обслуживании находятся k вызовов:

$$P_k = \frac{\lambda_0\lambda_1 ... \lambda_{i-1}}{\mu_0\mu_1 ... \mu_{i-1}}P_0 = P_0\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_i+1}\ (1);$$

$P_0 + \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$. Вероятность, того что в системе 0 вызовов: $P_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_i+1}}$ (2)

Система, описываемая формулами (1) и (2), имеет стационарное распределение вероятностей, если она эргодическая (апериодическая, вер-сть возврата не равна 0).

3.Закон сохраниения для СМО.

Предположим, что за бесконечно малый промежуток времени Δt система изменяется на один шаг. В момент t состояние системы E_k – обслуживаются k-заявок в данной системе. Рассмотрим возможные случаи, которые произойдут за промежутки времени за Δt:

1)Если в момент времени Δt поступит заявка, то вероятность этого состояния: $P(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, $E_{k+2,}$ E_{k-2} – есть бесконечно малые $o(\Delta t)$. $o(\Delta t)$ – произвольная ф-ция, которая при Δt, стремится к нулю быстрее, чем Δt, т.е. $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

2) Если обслужена одна заявка в течение Δt:
$P(\Delta t) = \mu \cdot \Delta t + o(\Delta t)$.

3) Если ничего не произойдет:
$P(\Delta t) = (1 - (\lambda + \mu) \cdot \Delta t + o(\Delta t)$.

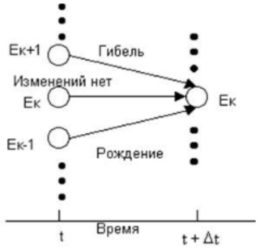


Рис. 2.2 Возможные переходы в состояние Ек.

Таким образом:
Цепь Маркова можно представить в виде графа: *овалам* соответствуют дискретные состояния,

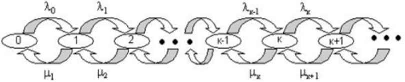


Рис. 2.3 Диаграмма интенсивностей переходов для процесса «рождения и гибели».

стрелки - интенсивности потоков вероятности переходов от одного состояния к другому. $\lambda_{k,}$ λ_{k-1} – рождение. $\mu_{k,}$ μ_{k-1} – гибели.
Здесь имеет место **закон сохранения:** разность между суммой интенсивностей потока вероятности, с которой система попадает в состояние k, и сумма интенсивности потока вероятности, с которой система покидает состояние k, должна равняться интенсивности изменения вероятности потока в это состояние (т.е производная по t). Но для

стационарного процесса она равна 0 (изменений не будет).
Для стационарного установившегося режима вероятности в произвольный достаточно отдаленный момент времени постоянны.
$(P_{k-1}\lambda_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}) - (P_k\lambda_k + \mu_k P_k) = 0$ **– закон сохранения.**

4. Процесс «рождения и гибели». Решение уравнения баланса.

Это класс непрерывных цепей Маркова (процесс дискретными состояниями и непрерывным временем), когда все состояния можно вытянуть в одну цепочку и из среднего состояния k возможны переходы только в состояния k, k-1 и k+1 в следующие моменты времени:

- в момент t объем сообщений был равен k и в течение времени $(t,t+\Delta t)$ не произошло изменения состояния;
- в момент t объем сообщений был равен k-1 и в течение времени $(t,t+\Delta t)$ появилось(родилось) одно сообщение
- в момент времени t объем сообщений был равен k+1 и в течение времени $(t,t+\Delta t)$ ушло(погибло) одно требование.

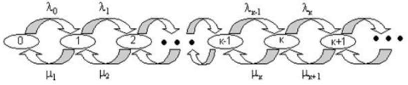


Рис. 2.3 Диаграмма интенсивностей переходов для процесса «рождения и гибели».

Овалам соответствуют дискретные состояния, *стрелки* - интенсивности потоков вероятности переходов от одного состояния к другому. λ_k, λ_{k-1} – рождение. μ_k, μ_{k-1} – гибели.

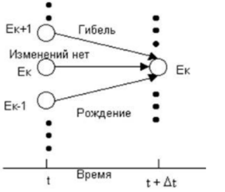


Рис. 2.2 Возможные переходы в состояние Ек.

Здесь имеет место закон сохранения:

$$(P_{k-1}\lambda_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}) - (P_k\lambda_k + \mu_k P_k) = 0$$

Решение уравнения баланса:

При k=0: $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$**;**

k=1: $P_0\lambda_0 + P_2\mu_2 = P_1(\mu_1 + \lambda_1)$**;** Выражаем отсюда P_2 и подставляем P_1**:** $P_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_2}P_0$**;** $P_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_2\mu_3}P_0$.

Вероятность ($P_k(t)$) того, что в системе на момент времени t на обслуживании находятся k вызовов:

$$P_k = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_0\mu_1 \ldots \mu_{i-1}}P_0 = P_0\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_i+1} \ (1);$$

$P_0 + \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$**.** Вероятность, того что в системе 0 вызовов: $P_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_i+1}}$ (2)

Система, описываемая формулами (1) и (2), имеет стационарное распределение вероятностей, если она эргодическая (апериодическая, вер-сть возврата не равна 0).

Для большинства СМО выполняется неравенство: Условия эргодичности выполняются только тогда, когда, начиная с некоторой *k*, все члены последовательности $\{\frac{\lambda_k}{\mu_k}\}$ ограничены единицей, т.е.

тогда, когда существует некоторое k_0(и некоторое C<1) такое, что для всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство:

$$\frac{\lambda_k}{\mu_k + 1} < C < 1$$

5.Закон сохранения для Смо. Решение уравнения баланса.

Цепь Маркова можно представить в виде графа: *овалам* соответствуют дискретные состояния,

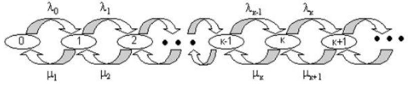


Рис. 2.3 Диаграмма интенсивностей переходов для процесса «рождения и гибели».

стрелки - интенсивности потоков вероятности переходов от одного состояния к другому. λ_{k}, λ_{k-1} – рождение. μ_{k}, μ_{k-1} – гибели.

Здесь имеет место **закон сохранения:** разность между суммой интенсивностей потока вероятности, с которой система попадает в состояние k, и сумма интенсивности потока вероятности, с которой система покидает состояние k, должна равняться интенсивности изменения вероятности потока в это состояние (т.е производная по t). Но для стационарного процесса она равна 0 (изменений не будет).

Для стационарного установившегося режима вероятности в произвольный достаточно отдаленный момент времени постоянны.

$(P_{k-1}\lambda_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}) - (P_{k}\lambda_{k} + \mu_{k}P_{k}) = 0$ **– закон сохранения.**

Решение уравнения баланса:

При k=0: $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$**;**

k=1: $P_0\lambda_0 + P_2\mu_2 = P_1(\mu_1 + \lambda_1)$**;** Выражаем отсюда P_2 и подставляем P_1**:** $P_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_0\mu_2} P_0$**;** $P_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_0\mu_2\mu_3} P_0$.

Вероятность ($P_k(t)$) того, что в системе на момент времени t на обслуживании находятся k вызовов:

$$P_k = \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_0\mu_1 \dots \mu_{i-1}} P_0 = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i + 1} \ (1);$$

$P_0 + \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$**.** Вероятность, того что в системе 0 вызовов: $P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i + 1}} \ (2)$

Система, описываемая формулами (1) и (2), имеет стационарное распределение вероятностей, если она эргодическая (апериодическая, вер-сть возврата не равна 0).

Условия эргодичности выполняются только тогда, когда, начиная с некоторой *k*, все члены последовательности $\{\frac{\lambda_k}{\mu_k}\}$ ограничены единицей, т.е. тогда, когда существует некоторое k_0(и некоторое C<1) такое, что для всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство:

$$\frac{\lambda_k}{\mu_k+1} < C < 1$$

6.Анализ СМо. Система M/M/1 : ∞. Расчет P.

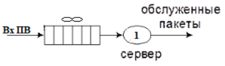


Рис. 2.6 СМО типа М/М/1.

1) **М** - символ в первой позиции определяет распределение поступающего потока запросов(простейший поток вызова),вид функции: $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность входящего потока заявок. Средний промежуток времени между вызовами:$\overline{t_A} = \lambda^{-1}$.

2)**Символ «М»** во второй позиции определяет закон распределения времени обслуживания без последействия, вид функции: $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$, где μ - интенсивность обслуживания заявок.Математическое ожидание времени обслуживания заявок: $\overline{t_B} = \mu^{-1}$.

3) Третий символ определяет число обслуживающих приборов, в нашем случае используется одно обслуживающее устройство.

4) В четвертой позиции указывается число мест для ожидания. : ∞ - символ говорит о неограниченной емкости буферного накопителя на входе СМО.

Поскольку входной поток является простейшим(оринарный), то в каждый момент времени к очереди может добавиться только одна заявка.

Поскольку сервер один, то в каждый момент времени может быть обслужена, то есть уйти из очереди только

одна заявка. Таким образом, СМО относится к процессу «рождения и гибели».
Распределение промежутков между вызовами подчинено показательному закону, значит интенсивность потока вероятность будет одинакова:

$$\{\lambda_k = \lambda,\ k = 0, 1 \ldots\ \mu_k = \mu,\ k = 1, 2 \ldots$$

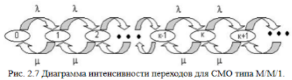


Рис. 2.7 Диаграмма интенсивности переходов для СМО типа M/M/1.

Вероятность того, что в стационарном состоянии в очереди будет находиться k заявок:

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i + 1} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = P_0 \rho^k;$$

Вероятность того, что в системе нет ни одного устройства на обслуживании:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_i + 1}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/\mu}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = (1 - \rho)$$

Окончательно получаем формулу для вероятности длины очереди: $P_k = (1 - \rho)\rho^k$.

График вероятностей того, что в очереди находится k заявок в установившемся режиме.

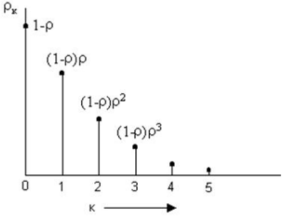


Рис. 2.8 Стационарные вероятности $p_к$ для СМО типа M/M/1.

7. Анализ СМо. Система M/M/1 : ∞. Характеристика качества обслуживания.

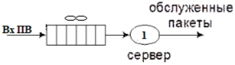


Рис. 2.6 СМО типа M/M/1.

1) **M** - символ в первой позиции определяет распределение поступающего потока запросов(простейший поток вызова),вид функции: $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность входящего потока заявок. Средний промежуток времени между вызовами:$\overline{t_A} = \lambda^{-1}$.

2)**Символ «M»** во второй позиции определяет закон распределения времени обслуживания без последействия, вид функции: $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$, где μ - интенсивность обслуживания заявок.Математическое ожидание времени обслуживания заявок: $\overline{t_B} = \mu^{-1}$.

3) Третий символ определяет число обслуживающих приборов, в нашем случае используется одно обслуживающее устройство.

4) В четвертой позиции указывается число мест для ожидания. : ∞ - символ говорит о неограниченной емкости буферного накопителя на входе СМО.

Поскольку входной поток является простейшим(оринарный), то в каждый момент времени к очереди может добавиться только одна заявка.

Поскольку сервер один, то в каждый момент времени может быть обслужена, то есть уйти из очереди только одна заявка. Таким образом, СМО относится к процессу «рождения и гибели».

Распределение промежутков между вызовами подчинено показательному закону, значит интенсивность потока вероятность будет одинакова:

$$\{\lambda_k = \lambda,\ k = 0, 1 \ldots \mu_k = \mu,\ k = 1, 2 \ldots$$

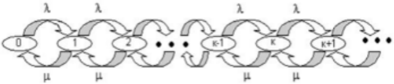


Рис. 2.7 Диаграмма интенсивности переходов для СМО типа M/M/1.

Вероятности длины очереди: $P_k = (1 - \rho)\rho^k$.

Характеристики качества обслуживания:

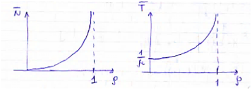
1) Среднее число заявок в системе:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = (1 - \rho)\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho}{1-\rho};$$

2) Среднее время пребывания в системе:

Из формулы Литтла: $\overline{N} = \lambda\overline{T}$ следует

$$\overline{T} = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$



При увеличении ρ $\overline{N}$ и $\overline{T}$ неограниченно возрастают.
Такой вид зависимости от ρ характерен для всех СМО

3) Характеристики очереди:

3.1) число заявок в буфере:

$$\overline{N} = \overline{N}_{буф} + \overline{N_{обсл}};\ \overline{N}_{буф} = \overline{N} - \overline{N_{обсл}};$$

$$\overline{N}_{буф} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho};$$

3.2) время ожидания в очереди:

$$\overline{T}_{буф} = \frac{\overline{N}_{буф}}{\lambda} = \frac{\lambda\rho}{\mu\,\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

4) Вероятность того, что в системе в очереди будет не менее k заявок:

$$P[\geq k] = \sum_{i=k}^{\propto} P_i = (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\propto} \rho^i = \frac{\rho^k(1-\rho)}{1-\rho} = \rho^k$$

5) Вероятность того, что в системе в очереди будет менее k заявок:

$$P[< k] = 1 - P[\geq k] = 1 - \rho^k$$

8. Анализ СМо. Система М/М/1 : ∞. Характеристики очереди.

1) **М** - символ в первой позиции определяет распределение поступающего потока запросов(простейший поток вызова),вид функции: $A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность входящего потока заявок. Средний промежуток времени между вызовами:$\overline{t_A} = \lambda^{-1}$.

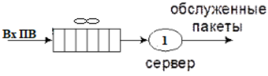


Рис. 2.6 СМО типа М/М/1.

2)**Символ «М»** во второй позиции определяет закон распределения времени обслуживания без последействия, вид функции: $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$, где μ - интенсивность обслуживания заявок.Математическое ожидание времени обслуживания заявок: $\overline{t_B} = \mu^{-1}$.

3) Третий символ определяет число обслуживающих приборов, в нашем случае используется одно обслуживающее устройство.

4) В четвертой позиции указывается число мест для ожидания. : ∞ - символ говорит о неограниченной емкости буферного накопителя на входе СМО. Поскольку входной поток является простейшим(оринарный), то в каждый момент времени к очереди может добавиться только одна заявка.

Поскольку сервер один, то в каждый момент времени может быть обслужена, то есть уйти из очереди только одна заявка. Таким образом, СМО относится к процессу «рождения и гибели».
Распределение промежутков между вызовами подчинено показательному закону, значит интенсивность потока вероятность будет одинакова:

$$\{\lambda_k = \lambda,\ k = 0, 1 \ldots \mu_k = \mu,\ k = 1, 2 \ldots$$

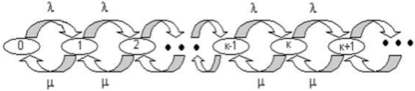


Рис. 2.7 Диаграмма интенсивности переходов для СМО типа M/M/1.

Вероятности длины очереди: $P_k = (1 - \rho)\rho^k$.

Характеристики очереди:

1) число заявок в буфере:

$$\overline{N} = \overline{N}_{буф} + \overline{N}_{обсл};\ \overline{N}_{буф} = \overline{N} - \overline{N}_{обсл};$$

$$\overline{N}_{буф} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho};$$

2) время ожидания в очереди:

$$\overline{T}_{буф} = \frac{\overline{N}_{буф}}{\lambda} = \frac{\lambda\rho}{\mu\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

3) Вероятность того, что в системе в очереди будет не менее k заявок:

$$P[\geq k] = \sum_{i=k}^{\propto} P_i = (1 - \rho) \sum_{k=0}^{\propto} \rho^i = \frac{\rho^k(1-\rho)}{1-\rho} = \rho^k$$

4) Вероятность того, что в системе в очереди будет менее k заявок: $P[< k] = 1 - P[\geq k] = 1 - \rho^k$

9. АНАЛИЗ СМО. СИСТЕМА M/M/м : &. ДИАГРАММА ПЕРЕХОДОВ. С-ФОРМУЛА ЭРЛАНГА

Диаграмма интенсивностей переходов для такой системы

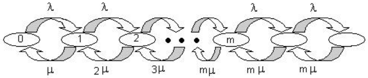


Рис. 3.11. Диаграмма интенсивностей переходов для СМО типа M/M/m.

Интенсивности переходов могут быть определены следующим образом:

$$\lambda_n = \lambda, n = 0,1,2,3\ldots,$$

$$\mu_n = \min[n\mu, m\mu] = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n \le m \\ m\mu, & m \le n \end{cases}$$

Используя основные общие соотношения для процессов гибели-размножения, получим:

$$p_k = \begin{cases} p_0 \dfrac{(m\rho)^k}{k!}, & k \le m \\ p_0 \dfrac{\rho^k m^m}{m!}, & k \ge m \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{A}{m} < 1.$$

С-формула Эрланга определяет вероятность того, что поступающий на пучок из m линий вызов, не застанет ни одной свободной линии и будет поставлен в очередь на обслуживание.

$$C(m,\lambda/\mu)=\frac{\left(\frac{(A)^m}{m!}\right)\left(\frac{1}{1-A/m}\right)}{\left[\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(A)^k}{k!}+\left(\frac{(A)^m}{m!}\right)\left(\frac{1}{1-A/m}\right)\right]},\text{где A}=\frac{\lambda}{\mu}$$

10. АНАЛИЗ СМО. СИСТЕМА М/М/м : &. ХАРАКТЕРИСТИКИ КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Интенсивности переходов могут быть определены следующим образом:

$$\lambda_n = \lambda, n = 0,1,2,3\ldots,$$

$$\mu_n = \min[n\mu, m\mu] = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n \le m \\ m\mu, & m \le n \end{cases}$$

Используя основные общие соотношения для процессов гибели-размножения, получим:

$$p_k = \begin{cases} p_0 \dfrac{(m\rho)^k}{k!}, & k \le m \\ p_0 \dfrac{\rho^k m^m}{m!}, & k \ge m \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{A}{m} < 1.$$

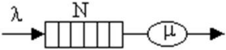
Вероятность простоя определяется громоздкой формулой, которая может быть записана через общую входную нагрузку A и удельную нагрузку ρ на один сервер:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{(A)^k}{k!}\right) + \frac{(m\rho)^k}{m!}\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$$

Полученные здесь соотношения *позволяют рассчитать характеристики QoS* - вероятность того, что поступающее в систему заявка окажется в очереди.

11. АНАЛИЗ СМО. СИСТЕМА M/M/1 : N. ДИАГРАММА ПЕРЕХОДОВ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ P.

Длина очереди накопителя в реальных системах ограничена. Блокировка наступает тогда, когда число поступающих заявок превышает р-р накопителя (N)



N заявок и одна на обслуживании.
Поступающие заявки образуют Пуассоновский поток, а обслуживание осуществляется одним сервером с показательным законом распределения времени обработки. Приспособим для описания такой системы модель процесса гибели-размножения.

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, k < N \\ 0, k \geq N \end{cases} \quad , \mu_k = \mu, \; \mathrm{k} = 1,2,\ldots,\mathrm{N}$$

Эта система эргодична и диаграмма интенсивностей переходов может быть изображена

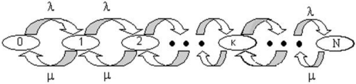


Рис. 3.9 Диаграмма интенсивностей переходов системы типа M/M/1:N

Найдем распределение вероятностей в стационарном режиме непосредственно из общей формулы:

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu}, \; k \le N,$$

$$p_k = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k, \; k \le N,$$

$$p_k = 0, \; k \ge N.$$

Найдем теперь начальную вероятность, следуя общей формуле:

$$p_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{(\lambda / \mu)(1 - (\lambda / \mu)^N}{1 - (\lambda / \mu)} \right]^{-1}$$

$$= \frac{1 - \lambda / \mu}{1 - (\lambda / \mu)^{N+1}}.$$

Окончательная формула для стационарных вероятностей будет:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^k \ , \ 0 \le k \le N , \\ 0 \ , \ k < 0 \ ; \ k > N . \end{cases}$$

12. АНАЛИЗ СМО. СИСТЕМА M/M/1 : N. ХАРАКТЕРИСТИКИ КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Вероятность потери заявки или вероятность блокировки рассчитывается по формуле:

$$p_B = p_k(k = N) = \frac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}$$

Средняя длина очереди в буфере :

$$\bar{L} = \sum_{k=0}^{N} k p_k = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{N+1}} \sum_{k=0}^{N} k\rho^k =$$

$$\frac{\rho(1-\rho)\left(1+2\rho+3\rho^2+4\rho^3+\ldots+N\rho^{N-1}\right)}{1-\rho^{N+1}}$$

Задержка может быть найдена по формуле Литтла:

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda}\bar{L}$$

Пропускная способность системы как число заявок, обслуживаемых системой в одну секунду.

$$\gamma = \lambda\left(1 - P_B\right)$$

пропускная способность на выходе системы может быть определена иначе. Если система всегда была бы непуста, то ее производительность равнялась бы величине обратной среднему времени обслуживания, то есть μ. Однако, поскольку часть времени система может простаивать, вероятность того, что в ней нет ни одной заявки, отлична от нуля, реальная производительность может быть выражена как:

$$\gamma = \mu\left(1 - P_0\right)$$

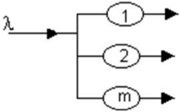
Для системы с конечным буфером получим:

$$\gamma = \mu\left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right) \Rightarrow$$

$$P_B = \frac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}} \approx (1-\rho)\rho^N \ , \ \rho^N << 1$$

13. АНАЛИЗ СМО С ПОТЕРЯМИ. СИСТЕМА M/M/м : Loss. ДИАГРАММА ПЕРЕХОДОВ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ P.

Рассмотрим систему без образования очереди для заявок, поступивших в моменты , когда все m серверов были заняты. Такие заявки просто теряются.



Такая система описывается процессом «гибели-размножения»

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n < m \\ 0, & n \geq m \end{cases}$$

$$\mu_n = n\mu, \; n = 1,2,3,\ldots,m.$$

Диаграмма интенсивности переходов

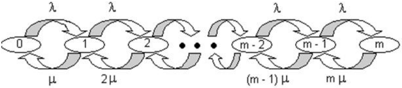


Рис. 3.12 Диаграмма интенсивностей переходов для СМО типа M/M/m:Loss.

Так как система оказывается эргодичной, то распределение вероятностей для данной СМО:

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(1+i)\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{1}{k!}, \ k \le m \ ,$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{1}{k!} \right]^{-1} .$$

14. АНАЛИЗ СМО С ПОТЕРЯМИ. СИСТЕМА M/M/m : Loss. ХАРАКТЕРИСТИКИ КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Основной характеристикой QoS для этой системы является средняя доля времени, когда все серверы оказываются занятыми.

В этом случае говорят о том, что в системе наступила блокировка.

Вероятность такой блокировки определяется по формуле, носящей в телефонии название B - формулы Эрланга или первой формулой потерь Эрланга:

$$P_B = E_B(m, A) = p_m = \frac{\dfrac{A^m}{m!}}{\sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{A^k}{k!}}, \quad A = \frac{\lambda}{\mu}$$

Эта формула играет столь большую роль в телефонии, что ее значения табулированы и существует масса таблиц, обратного расчета, то есть определения нагрузки, при которой обеспечивается заданная вероятность блокировки для заданного числа серверов. Такая таблица важна при расчетах многих сетей и систем массового обслуживания.

15. АНАЛИЗ СМО С ПОТЕРЯМИ. СИСТЕМА М/М/м : К/М. ДИАГРАММА ПЕРЕХОДОВ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ Р. МОДЕЛЬ ЭНГСЕТА.

В данной системе входной поток рассматривается как примитивный, то есть параметр потока зависит от числа требований, находящихся на обслуживании. Эта зависимость определяется таким образом, что из *M* источников пуассоновского потока с постоянным параметром *λ* получают отказ те требования, которые поступают в систему тогда, когда в ней уже имеются *К* заявок.

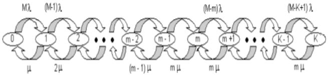


Рис. 3.13 Диаграммой интенсивностей переходов для СМО типа M/M/m: K/M.

Параметры интенсивностей для СМО типа М/М/m: К/М:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(M-n),\ 0 \le n \le K-1 \\ 0,\ n > K-1 \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu,\ 0 \le n \le m \\ m\mu,\ m < n \le k \\ 0, n > k \end{cases}$$

Воспользовавшись формулам для стационарных вероятностей, получим:

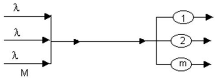
$$p_k = p_0 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda(M-i)}{(i+1)\mu} = C_m^k p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \ 0 \le k \le m-1, \ C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!},$$

$$p_k = C_M^k p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k!}{m!} m^{m-k}, \ m \le k \le K.$$

<u>Если считать, что K = m</u> , то есть в системе только чистые потери (длина буфера совпадает с числом серверов), то распределение стационарных вероятностей может быть дано в виде так называемого *распределения Энгсета:*

$$p_k = \frac{C_M^k \cdot A_1^k}{\sum_{i=0}^{m} C_M^i A_1^i}, \ k = 0,1,2\ldots,m; \ A_1 = \frac{\lambda}{\mu}$$

Эта формула имеет следующую интерпретацию.



Некоторая система массового обслуживания, имеющая *M* входных линий, распределяет поступающие с них заявки на *m* серверов. Интенсивность входного потока зависит от того, сколько серверов занято обслуживанием таким образом, что интенсивность входного потока линейно убывает с числом занятых серверов : $\lambda_n = \lambda(M - n)$

Максимальная нагрузка на один вход: $A_1 = \lambda/\mu$

Вероятность того, что при показательном законе распределения времени обслуживания в стационарном режиме будет занято *k* серверов, будет определяться как раз вышеприведенной формулой Энгсета.

Полученное распределение также позволяет рассчитать вероятность того, что будут заняты все серверы. Для этого достаточно положить *k = m* .

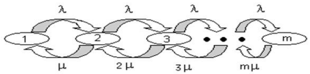
Функция Энгсета:

$$p_m = \xi_M(m, A_1) = \frac{C_M^m A_1^m}{\sum_{k=0}^{m} C_M^k A_1^k}.$$

16. АНАЛИЗ СМО С ПОТЕРЯМИ. СИСТЕМА М/М/м : /м. ДИАГРАММА ПЕРЕХОДОВ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ Р.

мы рассматриваем систему, имеющую одинаковое число входных линий и обслуживающих серверов, например выходных линий. Очевидно, что блокировка в такой системе невозможна.

Диаграмма интенсивностей переходов состояний может быть представлена в виде совокупности несвязных *m* простейших подсистем с двумя состояниями – свободно/занято (Рис. 3.14).



Вероятности того, что k подсистем находятся в состоянии «занято», описывается формулой Энгсета:

$$p_k = \frac{C_m^k \cdot A_1^k}{\sum_{i=0}^{m} C_m^i \cdot A_1^i}; \; A_1 = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

В знаменателе записан бином Ньютона, и формула для вероятностей может быть существенно упрощена:

$$p_k = \frac{C_m^k \rho^k}{(1+\rho)^m} = C_m^k a^k (1-a)^{m-k}, \; a = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\rho}{1+\rho}$$

Полученное распределение вероятностей носит название *биноминального или распределения Бернулли.*

Величина *a* определяет вероятность занятости сервера, а величина (1-a**)** – вероятность его простоя:

$$a=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \quad 1-a=\frac{\mu}{\lambda\div\mu}$$