

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

МАРШРУТИЗАЦИЯ НА СЕТЯХ СВЯЗИ: АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ

1.1 Цель работы

Изучить алгоритм определения кратчайшего пути на сетях связи.

1.2 Кратчайшие пути в сетях связи

Распределение информации в сетях связи производится с учетом оптимальности пути. При этом очевидно, что информацию целесообразно передавать по наиболее «коротким» путям или по кратчайшим путям.

Кратчайшим путем передачи информации называется путь, для которого критерий длины пути имеет наименьшее значение из всех возможных путей.

Для оценки длины пути могут быть использованы различные критерии: число транзитных узлов в пути, протяженность пути, качество тракта, вероятность установления соединения, надежность передачи информации и т.п.

В дальнейшем будем решать задачу поиска наилучшего маршрута в смысле кратчайшего расстояния. Эта задача моделируется с помощью сети связи $G = (A, B)$, в которой каждому ребру B приписан положительный целый вес, равный длине ребра. Длина пути между заданными узлами A равна сумме длин ребер, составляющих путь. В терминах сетей связи задача сводится к отысканию кратчайшего пути между заданными узлами.

1.3 Алгоритм Дейкстры

Алгоритм позволяет находить в сети кратчайший путь между двумя выделенными узлами сети i и j . Для этого сеть связи представим матрицей расстояний L , элементы которой L_{kl} означают длину ребра между узлами k и l и равны:

$$\begin{aligned} l_{kl} &= \infty, \text{ если между узлами } k \text{ и } l \text{ нет ребра;} \\ l_{kl} &= 0 \text{ для всех } k = l; k, l = 1, 2, \dots M; \\ l_{kl} &= \text{длине ребра между узлами } k \text{ и } l, \end{aligned}$$

где M – количество узлов на сети.

Метод Дейкстры состоит из выполнения следующих шагов:

1. Начинаем с непосредственных расстояний, с длины в одно ребро от заданного узла i до всех остальных узлов.

2. Затем выбираем наименьшее из них в качестве «постоянного» наименьшего расстояния, фиксируя узел, до которого наименьшее расстояние, в качестве нового узла.

3. Далее добавляем это наименьшее расстояние к длинам ребер от нового узла до всех остальных узлов.

4. Сравниваем эту сумму с предыдущим расстоянием от узла до остальных узлов и заменяем прежнее расстояние, если новое меньше.

5. Затем новый узел удаляем из списка узлов, до которых еще не определены кратчайшие расстояния, и ему присваиваем «постоянную» метку.

Затем шаги 1...5 повторяем, присоединяя новое кратчайшее расстояние к списку «постоянных» узлов и т.д., пока конечный узел j не окажется соединенным с узлом i путем из выделенных ребер.

Теперь можно сформулировать алгоритм Дейкстры.

Алгоритм Дейкстры служит для определения кратчайшего расстояния L_{kl} от заданного начального узла i до конечного узла j в связной сети связи G , имеющей M узлов и N ребер и представленной матрицей расстояний L .

Шаг 0. Отмечаем метками все узлы, для этого припишем узлу i «постоянную» метку, а остальным узлам сети «временные» метки.

Шаг 1. Присвоим длину l_{kl} всем ребрам сети между узлами, имеющими непосредственную связь; если между узлами k и l нет ребра, то $l_{kl} = \infty$; $l_{kl} = 0$ для всех $k = l, k, l = 1, 2, \dots, M$. Присвоим узлу i вес, равный нулю, т.е. $d_i = 0$, остальным узлам присвоим веса, равные бесконечности, т.е. $d_k = \infty, k \neq i$. Черта над индексом означает, что метка d_i – постоянная.

Шаг 2. Если узел j не включен в список узлов с «постоянной» меткой, то идти к шагу 3, в противном случае задача решена.

Шаг 3. Для каждого узла k с «временной» меткой определим меньшее расстояние по формуле

$$d_k = \min[d_k, d_m + l_{mk}], \quad k = 2, 3, 4, 5, 6, m = 1$$

где d_m – вес узла, который включен в список с «постоянной» меткой последним.

Шаг 4. Пусть k – узел, из числа узлов с «временными» метками, до которого расстояние d_k – наименьшее среди всех узлов с «временными» метками; припишем узлу k «постоянную» метку и присвоим ему постоянный вес, равный d_k .

Шаги 2, 3, 4 повторять до тех пор, пока узел j не будет включен в список узлов с «постоянной» меткой.

Продemonстрируем работу алгоритма Дейкстры на примере.

Пример. Для заданной структуры сети (рис.1.1) определить кратчайший путь между узлами 1 и 6. Цифры возле ребер обозначают длину каждого ребра.

Шаг 0. Припишем узлу 1 «постоянную» метку, а остальным узлам – «временные» метки, т.е.

$$C = \{1\}, \quad C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Шаг 1. Присвоим длину всем ребрам, т.е. составим матрицу расстояний L :

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 3 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Присвоим узлу 1 постоянный вес $d_1 = 0$, а остальным узлам временные веса $d_k = \infty$, $k = 2, 3, 4, 5, 6$. Следовательно, $m = 1$.

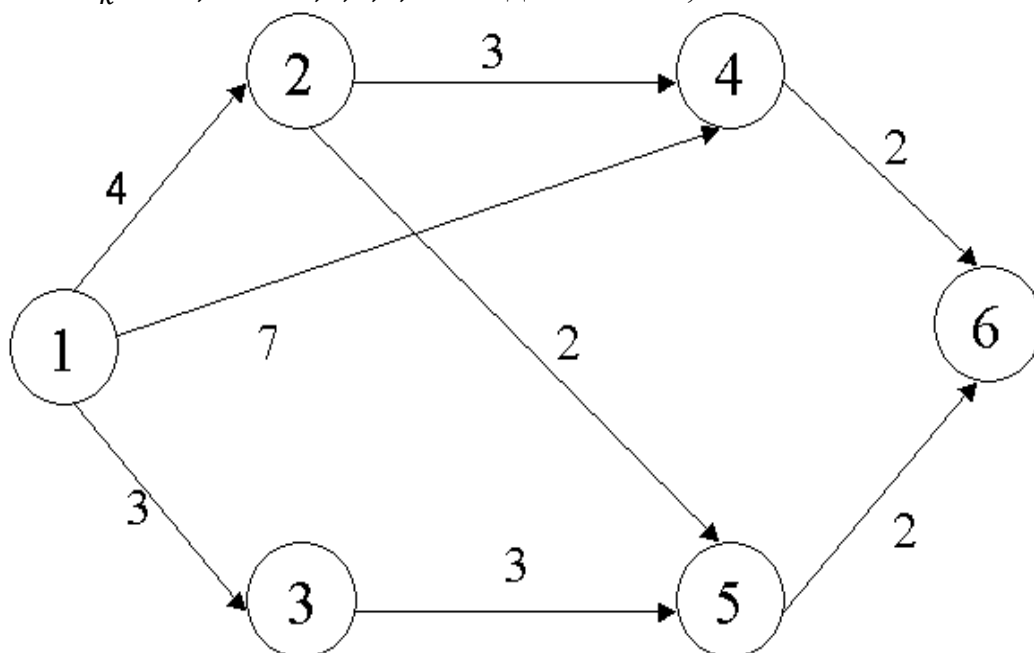


Рисунок 1.1

И т е р а ц и я 1

Шаг 2. Так как узел 6 не включен в список узлов с "постоянной" меткой, то идем к шагу 3.

Шаг 3. Для всех узлов с "временными" метками определим веса по формуле

$$d_k = \min[d_k, d_m + l_{mk}], \text{ где } k = 2, 3, 4, 5, 6; m = 1.$$

Подставляя поочередно k в последнюю формулу, получим

$$\begin{aligned} d_2 &= \min[d_2, d_1 + l_{12}] = \min[\infty, 0 + 4] = 4, \\ d_3 &= \min[d_3, d_1 + l_{13}] = \min[\infty, 0 + 3] = 3, \\ d_4 &= \min[d_4, d_1 + l_{14}] = \min[\infty, 0 + 7] = 7, \\ d_5 &= \min[d_5, d_1 + l_{15}] = \min[\infty, 0 + \infty] = \infty, \end{aligned}$$

$$d_6 = \min[d_6, d_1 + l_{16}] = \min[\infty, 0 + \infty] = \infty.$$

Шаг 4. Определим наименьший вес из полученных на третьем шаге по формуле

$$\min[d_k] = \min[4, 3, 7, \infty, \infty] = 3$$

Следовательно, узлу 3 припишем «постоянную» метку и присвоим постоянный вес, равный 3, т.е.

$$C = \{1, 3\}, C = \{2, 4, 5, 6\}, d_1 = 0, d_3 = 3, d_2 = 4, d_4 = 7, d_5 = \infty, d_6 = \infty$$

И т е р а ц и я 2

Шаг 2. Так как узел 6 не включен в список C , идти к шагу 3.

Шаг 3. Для всех узлов с «временными» метками определим веса по формуле

$d_k = \min[d_k, d_m + l_{mk}]$, где $k = 2, 4, 5, 6$, $m = 3$ (так как узел 3 в список с «постоянными» метками включен последним).

Получим

$$\begin{aligned} d_2 &= \min[d_2, d_3 + l_{32}] = \min[4, 3 + \infty] = 4, \\ d_4 &= \min[d_4, d_3 + l_{34}] = \min[7, 3 + \infty] = 7, \\ d_5 &= \min[d_5, d_3 + l_{35}] = \min[\infty, 3 + 3] = 6, \\ d_6 &= \min[d_6, d_3 + l_{36}] = \min[\infty, 3 + \infty] = \infty. \end{aligned}$$

Шаг 4. Определим наименьший вес

$$\min[d_k] = \min[4, 7, 6, \infty] = 4$$

Следовательно, $C = \{1, 3, 2\}$, $C = \{4, 5, 6\}$, $d_1 = 0$, $d_3 = 3$, $d_2 = 4$, $d_4 = 7$, $d_5 = 6$, $d_6 = \infty$.

И т е р а ц и я 3

Шаг 2. Идти к шагу 3.

Шаг 3. Определим веса при $k = 4, 5, 6$, $m = 2$.

$$\begin{aligned} d_4 &= \min[d_4, d_2 + l_{24}] = \min[7, 4 + 3] = 7, \\ d_5 &= \min[d_5, d_2 + l_{25}] = \min[6, 4 + 2] = 6, \\ d_6 &= \min[d_6, d_2 + l_{26}] = \min[\infty, 4 + \infty] = \infty. \end{aligned}$$

Шаг 4.

$$\begin{aligned} \min[d_k] &= \min[7, 6, \infty] = 6, \\ C &= \{1, 3, 2, 5\}, C = \{4, 6\}, \\ d_1 &= 0, d_3 = 3, d_2 = 4, d_5 = 6, d_4 = 7, d_6 = \infty. \end{aligned}$$

И т е р а ц и я 4

Шаг 2. Идти к шагу 3.

Шаг 3. Определим веса при $k = 4, 6; m = 5$:

$$d_4 = \min[d_4, d_5 + l_{54}] = \min[7, 6 + \infty] = 7,$$

$$d_6 = \min[d_6, d_5 + l_{56}] = \min[\infty, 6 + 2] = 8.$$

Шаг 4.

$$\min[d_k] = \min[7, 8] = 7$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}, C = \{6\},$$

$$d_1 = 0, d_2 = 4, d_3 = 3, d_4 = 7, d_5 = 6, d_6 = 8.$$

И т е р а ц и я 5

Шаг 2. Идти к шагу 3.

Шаг 3. Определим веса при $k = 6; m = 4$:

$$d_6 = \min[d_6, d_4 + l_{46}] = \min[8, 7 + 2] = 8$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, C = \{0\},$$

$$d_1 = 0, d_2 = 4, d_3 = 3, d_4 = 7, d_5 = 6, d_6 = 8.$$

И т е р а ц и я 6

Шаг 2. Так как узел 6 включен в список узлов с «постоянной» меткой, то задача решена.

Промежуточные результаты, полученные при решении данной задачи, приведены в таблице 1.

Как видно из таблицы 1.1, узлу 6 приписывается постоянная метка $d_6 = 8$. Следовательно, длина кратчайшего пути из узла 1 в узел 6 равна 8. Этот путь состоит из ребер, для каждого из которых разность между значениями постоянных меток ее концевых узлов равна длине этого ребра. Иными словами, если d_i и d_j – постоянные метки узлов i и j , соответственно, то условие, при выполнении которого эти узлы принадлежат кратчайшему пути, может быть записано следующим образом:

$$d_j = d_i + l_{ij}$$

Таблица 1.1

Итерация	Узлы					
	1	2	3	4	5	6
0	0	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	4	3	7	∞	∞
2	0	4	3	7	6	∞
3	0	4	3	7	6	∞
4	0	4	3	7	6	8
5	0	4	3	7	6	8

Последнее соотношение можно использовать рекурсивно, двигаясь от узла j к узлу i . Определив узел, непосредственно предшествующий j в кратчайшей цепи, будем повторять данную процедуру до тех пор, пока не достигнем узла i . Покажем, как это делать, обратившись к нашему примеру.

1. Определим $d_6 = d_i + l_{i6}$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$d_6 = d_1 + l_{16} = 0 + \infty = \infty,$$

$$d_6 = d_2 + l_{26} = 4 + \infty = \infty,$$

$$d_6 = d_3 + l_{36} = 3 + \infty = \infty,$$

$$d_6 = d_4 + l_{46} = 7 + 2 = 9,$$

$$d_6 = d_5 + l_{56} = 6 + 2 = 8.$$

Так как постоянный вес d_6 равен 8, то из анализа последних выражений видно, что на кратчайшем пути из узла 1 в узел 6 находится узел 5.

2. Далее определим $d_5 = d_i + l_{i5}$ для $i = 1, 2, 3, 4, 6$:

$$d_5 = d_1 + l_{15} = 0 + \infty = \infty,$$

$$d_5 = d_2 + l_{25} = 4 + 2 = 6,$$

$$d_5 = d_3 + l_{35} = 3 + 3 = 6,$$

$$d_5 = d_4 + l_{45} = 7 + \infty = \infty,$$

$$d_5 = d_6 + l_{65} = 8 + \infty = \infty.$$

Так как постоянный вес $d_5 = 6$, то на кратчайшем пути из узла 1 в узел 6 находится как узел 2, так и узел 3, выбираем любой из них, например, узел 2.

3. Определим $d_2 = d_i + l_{i2}$ для $i = 1, 3, 4, 5, 6$:

$$d_2 = d_1 + l_{12} = 0 + 4 = 4,$$

$$d_2 = d_3 + l_{32} = 3 + \infty = \infty,$$

$$d_2 = d_4 + l_{42} = 7 + \infty = \infty,$$

$$d_2 = d_5 + l_{52} = 6 + \infty = \infty,$$

$$d_2 = d_6 + l_{62} = 8 + \infty = \infty.$$

Так как постоянный вес $d_2 = 4$, узла 1 в узел 6 находится узел 1.

Следовательно, мы показали, что кратчайший путь в рассмотренной нами сети связи образуется последовательностью узлов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ либо

1→3→5→6, так как здесь есть альтернативное решение при переходе из узла 5.

1.4 Исходные данные к работе

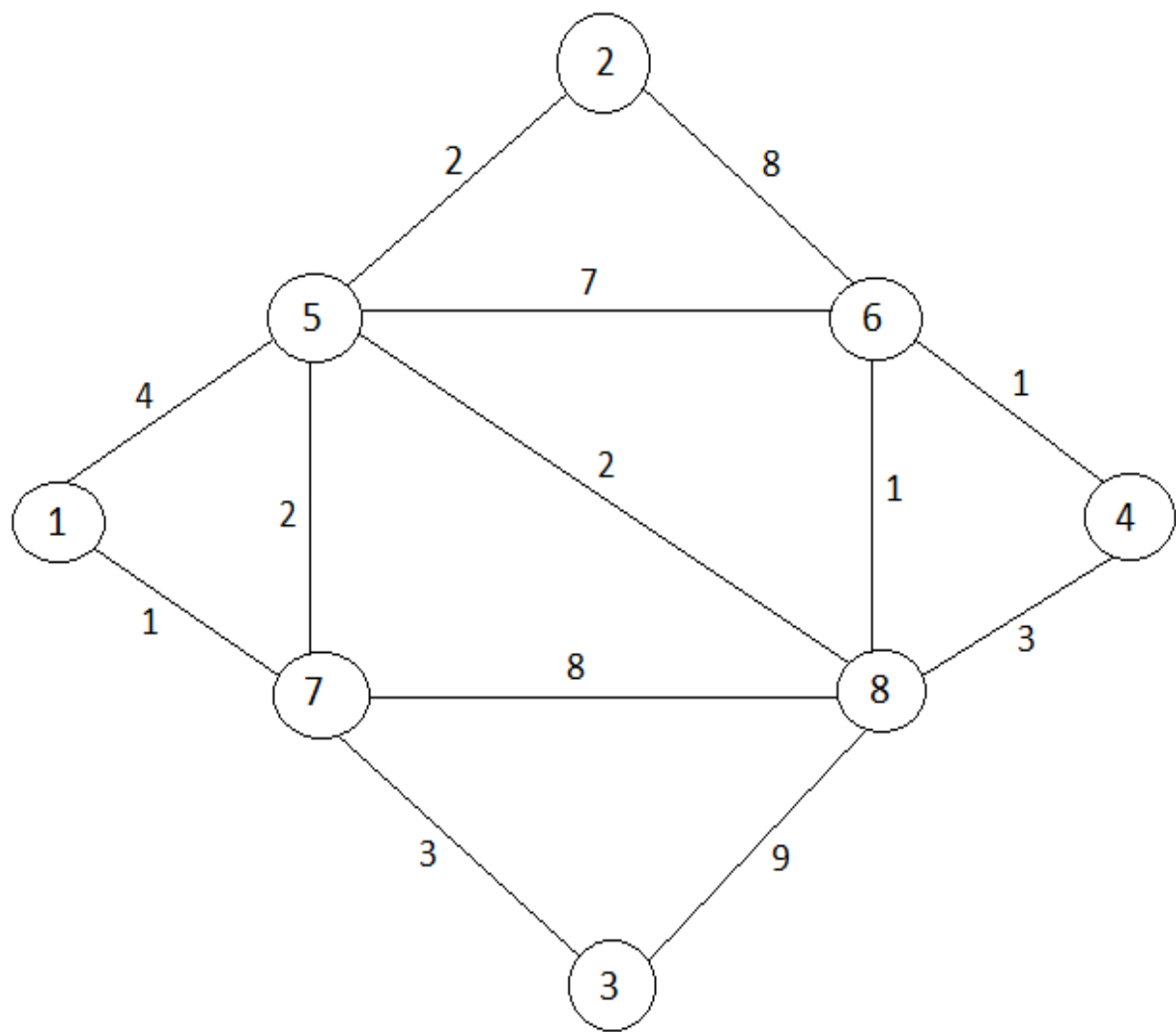


Рисунок 1.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Направление	1→4	4→1	3→2	2→3	7→6	6→7	6→1	1→6	7→4	4→7
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Направление	1→3	3→1	3→5	5→3	7→2	2→7	6→3	3→6	7→6	4→1
Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Направление	1→8	8→1	3→4	4→3	7→1	6→7	6→1	7→6	5→4	4→5

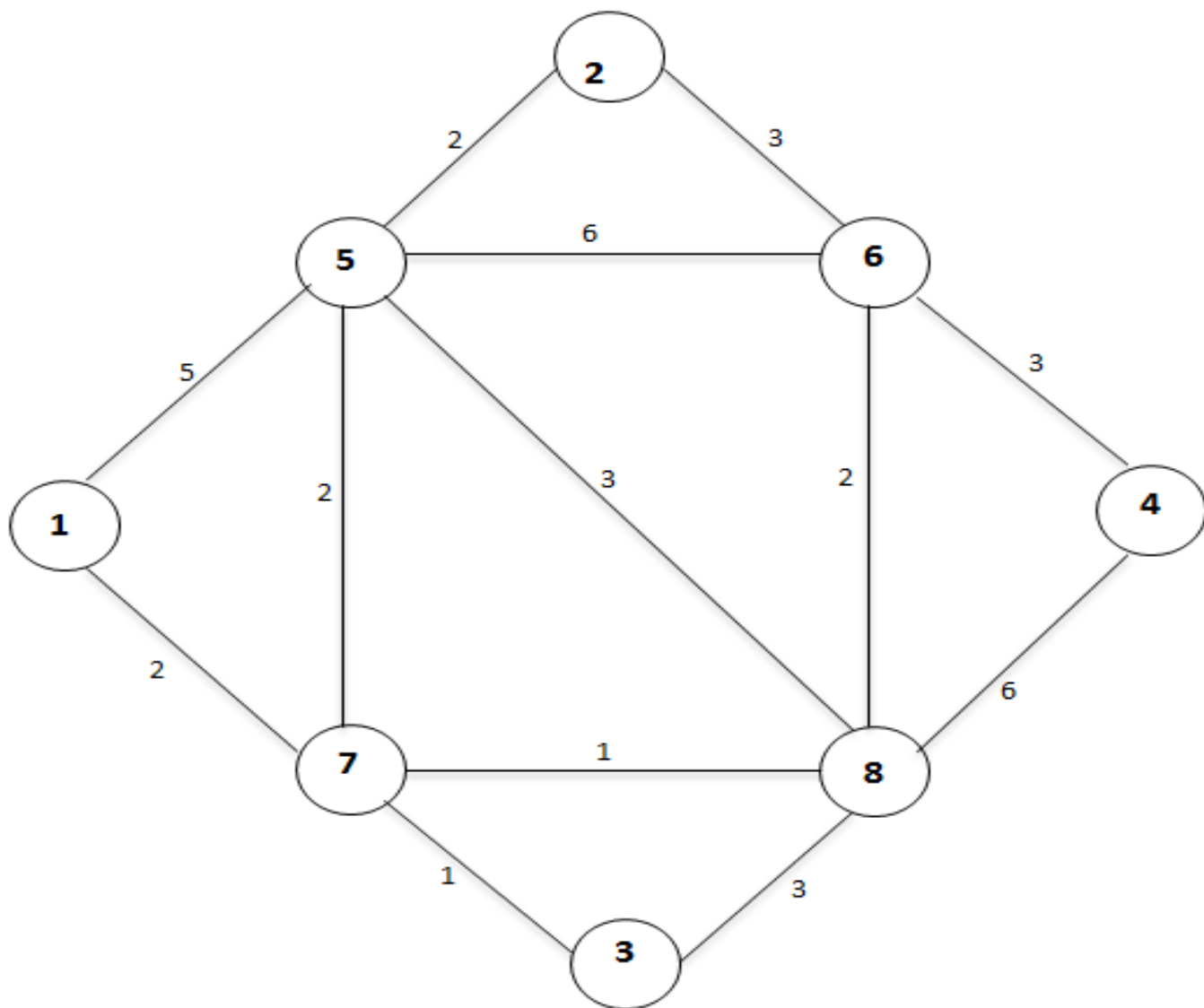


Рисунок 1.3

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Направление	1→4	4→1	3→2	2→3	7→6	6→7	6→1	1→6	7→4	4→7
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Направление	1→3	3→1	3→5	5→3	7→2	2→7	6→3	3→6	7→6	4→1
Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Направление	1→8	8→1	3→4	4→3	7→1	6→7	6→1	7→6	5→4	4→5

1.5 Порядок выполнения работы:

1. Получить исходные данные к работе.
2. Построить сеть связи.
3. Решить задачу на ЭВМ.
4. Используя метод Дейкстры, определить кратчайшие расстояния в сети.

1.6 Содержание отчета:

1. Цель работы.
2. Ручной расчет сети.
3. Блок-схема алгоритма, расчет на ЭВМ.

