Systemy liczbowe

Damian Kurpiewski

Popularne systemy liczbowe

Dziesiętny:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Binarny:

$$\{0, 1\}$$

Ósemkowy:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Szesnastkowy:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

Przykład

$$418_{10}$$

$$=$$

$$1\ 1010\ 0010_2$$

$$=$$

$$642_8$$

$$=$$

$$1A2_{16}$$

Konwersja z dziesiętnego

- Dzielimy przez podstawę systemu
- Resztę zapisujemy do wyniku
- Wynik czytamy od końca

Przykład – konwersja na system binarny

Dzielimy	Reszta z dzielenia
24	0
12	0
6	0
3	1
1	1
0	

Przykład – konwersja na system binarny

Dzielimy	Reszta z dzielenia
24	0
12	0
6	0
3	1
1	1
0	

Kierunek czytania

Przykład – konwersja na system binarny

Dzielimy	Reszta z dzielenia
24	0
12	0
6	0
3	1
1	1
0	

Kierunek czytania

$$24_{10} = 11000_2$$

Ćwiczenia

Przelicz na system binarny, ósemkowy i szesnastkowy:

- 16
- 120
- 2016
- 156
- 333

Ćwiczenia - rozwiązania

- $16 \;=\; 10000_2 = 20_8 = 10_{16}$
- $120 \;=\; 1111000_2 = 170_8 = 78_{16}$
- $2016 \;=\; 11111100000_2 = 3740_8 = 7E0_{16}$
- $156 \;=\; 10011100_2 = 234_8 = 9C_{16}$
- $333 \;=\; 101001101_2 = 515_8 = 14D_{16}$

Konwersja do dziesiętnego

- Każdej cyfrze przyporządkowujemy potęgę
- Zaczynamy od potęgi 0 z prawej strony
- Potęgi mnożymy przez cyfry
- Wyniki sumujemy

Przykład

$$11001_2 = 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 0 * 2^2 + 1 * 2^3 + 1 * 2^4$$

$$153_8 = 3 * 8^0 + 5 * 8^1 + 1 * 8^2$$

Ćwiczenia

Przelicz na system dziesiętny:

- 10_2
- 13_8
- $A2_{16}$
- 110101_2
- 163_8
- $15DE_{16}$
- 101010_2
- 2701_8
- $EFDC_{16}$

Ćwiczenia - rozwiązania

- $10_2 = 2_{10}$
- $13_8 = 11_{10}$
- $A2_{16} = 12_{10}$
- $110101_2 = 53_{10}$
- $163_8 = 115_{10}$
- $15DE_{16} = 5598_{10}$
- $101010_2 = 42_{10}$
- $2701_8 = 1473_{10}$
- $EFDC_{16} = 61404_{10}$

Kod U2

- Kod uzupełnień do dwóch
- Pozwala na zapis liczb ujemnych w systemie binarnym
- Pierwszy bit jest bitem znaku

Konwersja do U2

1. Określamy, na ilu bitach ma zostać zapisana liczba
2. Obliczamy postać binarną wartości bezwzględnej
3. Uzupełniamy zerami do porządanej liczby bitów
4. Zamieniamy cyfry na przeciwne
5. Dodajemy binarną jedynkę

Przykład – zapis na 8 bitach

Konwertujemy wartość bezwzględną:

$$|-\mathbf{25_{10}}| = \mathbf{11001_2}$$

Uzupełniamy do 8 bitów:

$$\mathbf{00011001}$$

Zamieniamy bity na przeciwne:

$$\mathbf{11100110}$$

Dodajemy binarną jedynkę:

$$\mathbf{11100111}$$

$$-25_{10} = 11100111_{\mathrm{U2}}$$

Ćwiczenia

Przelicz z dziesiętnego na U2 i zapisz na 8 bitach:

- -1
- -126
- -12
- -101
- -56
- -92

Ćwiczenia - rozwiązania

- $-1 = 11111111_{\mathrm{U2}}$
- $-126 = 10000010_{\mathrm{U2}}$
- $-12 = 11110100_{\mathrm{U2}}$
- $-101 = 10011011_{\mathrm{U2}}$
- $-56 = 11001000_{\mathrm{U2}}$
- $-92 = 10100100_{\mathrm{U2}}$

Konwersja z U2

- Pierwszy bit (najbardziej znaczący) mnożymy przez -1
- Dalsza konwersja jak w standardowym przypadku

Przykład

$$10011001_{U2} = -2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = -103$$

$$00011001_{U2} = 2^4 + 2^3 + 2^0 = 25$$

Ćwiczenia

Przelicz z U2 na dziesiętny:

- 1001_{U2}
- 10011001_{U2}
- 11111111_{U2}
- 11100101_{U2}
- 10101010_{U2}

Ćwiczenia - rozwiązania

- $1001_{\mathrm{U2}} = -7$
- $10011001_{\mathrm{U2}} = -123$
- $11111111_{\mathrm{U2}} = -1$
- $11100101_{\mathrm{U2}} = -27$
- $10101010_{\mathrm{U2}} = -86$

Liczby rzeczywiste w systemie binarnym

Zapis stałopozycyjny

- „Przecinek” znajduje się w określonym miejscu
- Wyraźnie oddzielona część całkowita od ułamkowej
- Osobna konwersja części całkowitej i części ułamkowej

Konwersja do binarnego

- Część całkowitą konwertujemy standardowo
- Część ułamkową zamiast dzielić, mnożymy przez 2
- Część całkowitą zapisujemy do wyniku
- Odczytujemy „od góry do dołu”
- Uważamy na ułamki okresowe

Przykład

Mnożymy	Część całkowita
0,75	
0,5	1
0,0	1

Przykład

Mnożymy	Część całkowita
0,75	
0,5	1
0,0	1

Kierunek czytania

Przykład

Mnożymy	Część całkowita
0,75	
0,5	1
0,0	1

Kierunek czytania

$$0{,}75_{10} = 0{,}11_2$$

Ćwiczenia

Zamień na liczbę binarną, z dokładnością do 10 cyfr po przecinku:

- $0{,}8125$
- $0{,}16$
- $0{,}3$
- $0{,}125$
- $0{,}7$

Ćwiczenia - rozwiązania

- $0{,}8125 = 0{,}1101_2$
- $0{,}16 = 0{,}0010100011_2$
- $0{,}3 = 0{,}0(1001)_2$
- $0{,}125 = 0{,}001_2$
- $0{,}7 = 0{,}1(0110)_2$

Konwersja na dziesiętny

- Część całkowitą konwertujemy standardowo
- Część ułamkową zapisujemy
z potęgami ujemnymi, zaczynając od -1
- Cyfry mnożymy przez potęgi
- Wynik sumujemy

Ćwiczenia

Zamień na liczbę dziesiętną:

- $0{,}011_2$
- $0{,}11_2$
- $0{,}0101_2$
- $0{,}1101_2$
- $0{,}1111_2$

Ćwiczenia - rozwiązania

- $0{,}011_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
- $0{,}11_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
- $0{,}0101_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$
- $0{,}1101_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$
- $0{,}1111_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

Zapis zmiennopozycyjny

Składa się z trzech liczb:

- Mantysy
- Podstawy systemu
- Cechy

$$L = m * 2^c$$

Konwersja do dziesiętnego

- Pierwsza część liczby to cecha, druga to mantysa
- Przyjmijmy następujący format FP:
  - Cecha jest 4-bitową liczbą całkowitą zapisaną w kodzie U2
  - Mantysa jest 4-bitową liczbą stałoprzecinkową zapisaną w kodzie U2, z przecinkiem pomiędzy drugim a trzecim bitem
- Konwertujemy cechę i mantysę, a następnie podstawiamy do wzoru

Przykład

$$10001010_{FP}$$

$$c = 1000_{U2} = -8$$

$$m = 10{,}10_{U2} = -1\frac{1}{2}$$

$$L = -1\frac{1}{2} * 2^{-8}$$

Ćwiczenia

Zamień na liczbę dziesiętną:

- 10111101_{FP}
- 00010100_{FP}
- 11010111_{FP}
- 11111001_{FP}

Ćwiczenia - rozwiązania

- $10111101_{\text{FP}} = -\frac{3}{4} * 2^{-5}$
- $00010100_{\text{FP}} = 1 * 2^{1}$
- $11010111_{\text{FP}} = 1\frac{3}{4} * 2^{-3}$
- $11111001_{\text{FP}} = -1\frac{3}{4} * 2^{-1}$